FURG

Universidade Federal do Rio Grande

Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências: Química da Vida e Saúde

Associação Ampla FURG / UFRGS / UFSM

EXPRESSÕES NUMÉRICAS: IMBRICAÇÕES ENTRE OS CAMPOS CONCEITUAIS ADITIVO E MULTIPLICATIVO

Rita de Cássia de Souza Soares Ramos

Orientador:

Dr. João Alberto da Silva

Rio Grande

2023

Rita de Cássia de Souza Soares Ramos

Expressões Numéricas: Imbricações entre os Campos Conceituais Aditivo e Multiplicativo

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências da Universidade Federal do Rio Grande, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação em Ciências.

Linha de Pesquisa: Processos de ensino e aprendizagem na escola, na universidade e no laboratório de pesquisa.

ORIENTADOR: Prof. Dr. João Alberto da Silva

Rio Grande
2023

Ficha Catalográfica

R175e Ramos, Rita de Cássia de Souza Soares.

Expressões numéricas: imbricações entre campos conceituais aditivo e multiplicativo / Rita de Cássia de Souza Soares Ramos. – 2023.

244 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências, Rio Grande/RS, 2023.

Orientador: Dr. João Alberto da Silva.

1. Expressões Numéricas 2. Teoria dos Campos Conceituais 3. Imbricação 4. Problemas Mistos I. Silva, João Alberto da II. Título.

CDU 51

Catalogação na Fonte: Bibliotecário José Paulo dos Santos CRB 10/2344

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE - FURG
PPG EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS: QUÍMICA DA VIDA E SAÚDE.

ATA DE DEFESA DE DOUTORADO Nº 01/2023

Aos vinte e sete dias do mês de fevereiro de 2023, na Universidade Federal do Rio Grande - FURG, às 14 horas , por videoconferência, reuniu-se a Comissão Examinadora, remotamente, para a defesa de Doutorado da estudante **Rita de Cássia de Souza Soares Ramos,** composta pelos seguintes integrantes: **Prof. Dr. João Alberto da Silva (Orientador/FURG), Profa. Dra. Elaine Corrêa Pereira (FURG), Profa. Dra. Síntria Labres Lautert (UFPE), Profa. Dra. Sandra Maria Pinto Magina (UESC) e a Profa. Dra. Veridiana Rezende (UNESPAR).** Título da tese: **EXPRESSÕES NUMÉRICAS: IMBRICAÇÕES ENTRE OS CAMPOS CONCEITUAIS ADITIVO E MULTIPLICATIVO.** Dando início à reunião, o orientador agradeceu a presença de todos e fez a apresentação da Comissão Examinadora. Logo em seguida, esclareceu que a Doutoranda teria um tempo de 25 a 40 minutos para a explanação de sua pesquisa, e cada membro da Comissão um máximo de 30 minutos para arguição. A seguir, passou a palavra a Doutoranda que apresentou a pesquisa e respondeu às perguntas formuladas pela banca. Após discussão a Comissão reuniu-se para arguição conjunta e considerou a tese **<u>APROVADA.</u>** Nada mais havendo a tratar, lavrou-se a presente Ata que, após lida e aprovada, será assinada pela Comissão Examinadora. Orientações/observações da Banca sobre a pesquisa:

Obs.: no caso de aprovação com observações, as orientações da banca devem ser acatadas pela doutoranda na versão final da pesquisa.

____

Prof. Dr. João Alberto da Silva (Orientador/FURG)

____________videoconferência____________

Profa. Dra. Elaine Corrêa Pereira (FURG)

____________videoconferência____________

Profa. Dra. Síntria Labres Lautert (UFPE)

____________videoconferência____________

Profa. Dra. Sandra Maria Pinto Magina (UESC)

____________videoconferência____________

Profa. Dra. Veridiana Rezende (UNESPAR)

Para minha mãe.

AGRADECIMENTOS

Minha total gratidão a Deus, que, em sua misericórdia e infinita bondade, me proporciona, a cada dia, conhecer pessoas que cumprem a sua Palavra em minha vida.

Ao meu esposo e filhos, que acompanharam a façanha do doutorado de perto, doando à pesquisa o tempo que era deles. À minha família, que me apoia em todos os momentos, nesta caminhada cheia de desafios e possibilidades.

Ao Prof. Dr. João Alberto da Silva, orientador que deu um toque de leveza aos desafios. Sua competência como professor, pesquisador e militante da Educação Matemática proporciona-me uma alegria de ser pesquisador, e uma vontade de continuar no caminho. Aprender com quem é exemplo, é muito mais fácil.

À minha banca de mulheres grandiosas, fonte de inspiração e admiração. Às Professoras Dra. Veridiana Rezende, Dra. Sandra Magina, Dra. Sintria Lautert e Dra. Elaine Pereira: gratidão imensa. As suas contribuições, tanto na banca de qualificação quanto em suas pesquisas, são um presente de imenso valor. Vocês fazem da Educação Matemática um lugar que inclui, pois faz sentido. Obrigada.

Aos colegas do Grupo de Estudos sobre Educação Matemática com Ênfase nos Anos Iniciais (GEEMAI) da FURG e da UFPel, especialmente aos colegas do PPGEC, que motivaram, impulsionaram e acreditaram na pesquisa. Aos grandes parceiros do Laboratório Multilinguagens da UFPel. Aos colegas do Departamento de Educação Matemática da UFPel.

Agradeço às Escolas que abriram suas portas para esta pesquisa. Às equipes diretivas, às professoras e aos estudantes.

À Biblioteca da FURG, que conseguiu textos de lugares de difícil acesso, com prontidão.

À Profa. Dra. Roselice Parmengiani, por enviar seu artigo para compor a tese.

Agradeço a todas as professoras e professores que fizeram de mim a professora que sou hoje. Nas pessoas da Profa. Dauraci Furtado, da Pré Escola, até o Prof. João Alberto da Silva, orientador de Doutorado, contemplo todos os docentes que me emprestaram um pouco de si.

Por fim, agradeço a todos os estudantes, meus alunos e meus futuros alunos, nos quais deposito minha esperança. Que a Matemática faça sentido para vocês, e por vocês, para as próximas gerações.

RESUMO

RAMOS, R. C. S. S. **Expressões Numéricas:** Imbricações entre os Campos Conceituais Aditivo e Multiplicativo. 244f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências – Química da Vida e Saúde) – Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2023.

Uma expressão numérica é uma representação matemática que contém necessariamente números e operações e pode conter sinais de associação para organizar a sua prevalência operatória. Comumente, desde os anos iniciais, as expressões numéricas são trabalhadas como conjunto de regras e técnicas a memorizar e grande parte dos erros referentes a este conteúdo diz respeito às regras de prevalência, pois os estudantes não atribuem significado às mesmas. Estudos sugerem que, mediante a resolução de problemas com as quatro operações e sua representação por meio de expressões numéricas, se discutam os sentidos das operações e dos números. Embasados na Teoria dos Campos Conceituais, compreende-se que existe uma ruptura entre o sentido de número do Campo Conceitual Aditivo para o Campo Conceitual Multiplicativo e, problemas mistos, representados por expressões numéricas, contemplam ambos os sentidos. Compreendem-se problemas mistos, como aqueles que contemplam adição ou subtração e divisão ou multiplicação simultaneamente. Desta forma, buscou-se analisar as estratégias e processos de pensamento de estudantes de 6º ano e 8º ano, em uma situação que pode ser representada por expressões numéricas, por meio do Método Clínico, a fim de compreender como pode se dar a imbricação entre os Campos Conceituais Aditivo e Multiplicativo. Esta pesquisa é constituída por três estudos. O primeiro é um levantamento sobre as expressões numéricas em textos científicos. O segundo é um estudo descritivo sobre como livros didáticos apresentam as expressões numéricas. O terceiro é uma pesquisa quase experimental que analisa como estudantes do Ensino Fundamental mobilizam os elementos de uma expressão numérica. Por meio do Método Clínico Piagetiano, foram entrevistados 25 estudantes de escolas públicas de Pelotas/RS, do 6º ano e do 8º ano. Os resultados indicam que as expressões numéricas são analisadas quanto à sua escrita e resolução. A hierarquia das quatro operações é um conhecimento lógico devido às operações matemáticas e sua ordem de prevalência, e cultural, no que toca aos sinais de associação. As expressões numéricas são trabalhadas de forma descontextualizada e a maior parte dos erros diz respeito à ordem das operações e ao sentido dos números. Sugere-se que a hierarquia das operações seja trabalhada, tanto na escrita quanto na resolução, a partir de problemas contextualizados, a fim de proporcionar a compreensão dos sentidos dos números e operações. Mediante o Método Clínico, constatou-se que os estudantes têm desenvolvimentos diferentes para expressões numéricas descontextualizadas e na forma de situação problema. O estudo diz respeito à ordem das operações, aos esquemas, diagramas e expressões numéricas referentes, às representações utilizadas pelos estudantes e aos sentidos das operações usadas na resolução do problema misto, organizadas em três níveis. O nível básico diz respeito à respostas idiossincráticas, o nível intermediário, aos processos coerentes, mas sem o uso de expressões numéricas, e o nível mais avançado, àqueles desenvolvimentos que expressaram de forma simbólica o problema, com o uso de mais de uma operação na mesma representação, em forma de expressão numérica. Conclui-se que os estudantes, que representaram e resolveram o problema por meio de uma expressão numérica, conhecem os sentidos das operações e realizam a imbricação entre o Campo Conceitual Aditivo e o Campo Conceitual Multiplicativo em suas representações.

Palavras-chave: Expressões Numéricas; Teoria dos Campos Conceituais; Imbricação; Problemas Mistos.

ABSTRACT

RAMOS, R. C. S. S. **Expressões Numéricas:** Imbricações entre os Campos Conceituais Aditivo e Multiplicativo. 244 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências – Química da Vida e Saúde) – Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2023.

A numerical expression is a mathematical representation that necessarily contains numbers and operations and may contain association signs to organize its operative prevalence. Commonly, since the early years, numerical expressions are worked as a set of rules and techniques to be memorized and a large part of the errors regarding this content is related to the prevalence rules, because students do not assign meaning to them. Studies suggest that, by solving problems with the four operations and their representation through numerical expressions, the meaning of operations and numbers should be discussed. Based on the Conceptual Fields Theory, it is understood that there is a rupture between the meaning of number from the Additive Conceptual Field to the Multiplicative Conceptual Field, and that mixed problems, represented by numerical expressions, contemplate both meanings. Mixed problems are understood as those that contemplate addition or subtraction and division or multiplication simultaneously. In this way, we sought to analyze the strategies and thought processes of 6th and 8th grade students, in a situation that can be represented by numerical expressions, by means of the Clinical Method, in order to understand how the imbrication between the Additive and Multiplicative Conceptual Fields can occur. This research consists of three studies. The first is a survey about numerical expressions in scientific texts. The second is a descriptive study about how textbooks present numerical expressions. The third is a quasi-experimental research that analyzes how elementary school students mobilize the elements of a numerical expression. Through the Piagetian Clinical Method, 25 6th and 8th grade students from public schools in Pelotas/RS were interviewed. The results indicate that numerical expressions are analyzed in terms of their writing and resolution. The hierarchy of the four operations is a logical knowledge due to the mathematical operations and their order of prevalence, and cultural, regarding the association signs. Numerical expressions are worked in a decontextualized manner and most errors concern the order of operations and the meaning of numbers. It is suggested that the hierarchy of operations be worked on, both in writing and in solving, based on contextualized problems, in order to provide an understanding of the meaning of numbers and operations. Through the Clinical Method, it was found that students have different developments for decontextualized numerical expressions and in the form of a problem situation. The study concerns the order of operations, the referring schemes, diagrams and numerical expressions, the representations used by the students and the meanings of the operations used in solving the mixed problem, organized into three levels. The basic level refers to idiosyncratic answers, the intermediate level, to coherent processes, but without the use of numerical expressions, and the most advanced level, to those developments that expressed the problem in a symbolic way, with the use of more than one operation in the same representation, in the form of a numerical expression. It is concluded that the students, who represented and solved the problem by means of a numerical expression, know the meanings of the operations and realize the imbrication between the Additive Conceptual Field and the Multiplicative Conceptual Field in their representations.

Key-words: Numerical Expressions; Conceptual Fields Theory; Imbrication; Mixed Problems.

LISTA DE IMAGENS

SUMÁRIO

1 CARACTERIZAÇÃO DO TEMA – EXPRESSÕES NUMÉRICAS

Apresentamos as expressões numéricas em suas possibilidades de escrita matemática, como legado social e cultural, e como representação de problemas mistos. Sua potência de representação e sua normatização lógica e organizacional se constituem com maior sentido quando estudantes resolvem problemas e deles extraem as regras e técnicas necessárias à sua escrita e ao seu desenvolvimento. Diante desta realidade, a Teoria dos Campos Conceituais permite que analisemos as estratégias e as movimentações dos estudantes ao escreverem e resolverem uma expressão numérica.

1.1 Motivações para este estudo

As motivações para o estudo das expressões numéricas são tanto de cunho afetivo, por tratá-las como um jogo *puzzle* quando criança, e delas me movimentar para aprender Matemática, quanto constituintes de minha professoralidade, no sentido de compreender como essa representação matemática simbólica se constitui no jogo de significações e negociações dos sentidos dos números e operações em problemas matemáticos.

Sou professora de instituição pública. Na década de 1990 trabalhei como professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental em rede municipal e estadual, nas décadas de 2000 e 2010, como professora de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, na rede estadual, e, desde o meio da década de 2000 até hoje, na rede federal de ensino, atuando em Educação Matemática no curso de Licenciatura em Matemática.

Desde 2012 constituímos o Laboratório Multilinguagens (LAM), na Universidade Federal de Pelotas (UFPel), que abriga projetos de ensino, pesquisa e extensão voltados à aprendizagem dos diversos conceitos, e à formação docente. Nossos projetos são realizados em parceria com o Grupo de Pesquisa em Educação Matemática nos Anos Iniciais (GEEMAI), do qual fazemos parte. Em uma das discussões do grupo, no qual já trabalhávamos textos de Teoria dos Campos Conceituais para estudar a compreensão de outros conceitos, as expressões numéricas surgiram para o debate a partir da experiência de professores da Educação Básica. Desta forma, unindo minhas motivações pessoais às demandas de escolas, resolvemos estudar as expressões numéricas.

Para isso, usamos o arcabouço teórico dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990), que nos permite traçar um olhar investigativo sobre as classes de situações das operações matemáticas e sobre o processo de compreensão e representação simbólica dessas situações, com vistas à imbricação entre os campos conceituais aditivo e multiplicativo.

Considerando que, como quebra-cabeças, as expressões numéricas são um processo de regras e algoritmos, dar-se conta dos processos de construção destas regras é um passo epistemológico na constituição *do que* e *de como* queremos trabalhar matematicamente com nossos alunos, pois, mais do que um quebra-cabeças, as expressões numéricas são uma forma de representar matematicamente problemas aritméticos, e por meio deles possibilitamos aos alunos a construção dessas regras e significações (PARMEGIANI, 2011).

1.2 Expressar algo numericamente

As expressões numéricas são um tipo de representação matemática, na forma simbólica. Obedecem à propriedades aritméticas, possuem números, operadores e podem conter sinais de associação, e seu resultado é único e numérico. Pode representar uma situação envolvendo números e operações em linguagem algébrica. É caracterizada tanto por sua escrita quanto pela sua resolução (ANDRINI, 1975; ARRAIS, 2006, PINTO *et al.,* 2019).

Sendo composta somente por números, operações entre esses números e sinais de associação, e, necessariamente, por números e operações entre esses números. A escrita das expressões numéricas necessariamente se dá na horizontal, conforme o texto padrão da Língua Portuguesa, e sua leitura se dá da esquerda para a direita. No entanto, seus elementos (números e operações) podem ser organizados de forma prévia de qualquer parte da expressão. Esta forma de escrever essa expressão é chamada de Infixa (PINTO *et al*., 2019). Outras notações, chamadas de posfixa e prefixa serão explicadas adiante.

A respeito da resolução, toda expressão numérica deve ter um, e somente um, resultado correto. A resolução em expressões numéricas precisa respeitar as propriedades aritméticas dos conjuntos cujo domínio estão inseridas, no caso do Corpo dos Números Reais: associativa, comutativa, elemento neutro, elemento inverso, distributividade da multiplicação em relação à adição (OTTES; FAJARDO, 2017).

A ordem de resolução das operações segue uma regra de prevalência, que indica qual operação deve prevalecer, não qual deve ser resolvida primeiro, isso contraria o que os livros didáticos trazem como regra. A resolução das quatro operações na ordem em que aparecem, primeiramente multiplicações e divisões, posteriormente adições e subtrações. A respeito dos sinais de associação, inicialmente eliminam-se os parênteses, colchetes e chaves, nesta ordem. (FREITAS, 2014).

A regra não é de qual operação é feita primeiro, mas qual prevalece entre duas, e isso é compreendido ao se construir o conceito de número nas operações, por exemplo, na expressão 8+5+2x7+4, realizar primeiro a operação 8+5 não é errado, pois o termo (8+5) não está associado a nenhuma multiplicação, mas realizar a adição 7+4 incorre em erro, pois o 7 está multiplicando o 2 em (2x7). A multiplicação prevalece sobre a adição.

Prevalecem os sinais de associação e suas operações internas, e, para as quatro operações, a multiplicação e a divisão na ordem que aparecem, da esquerda para a direita, seguindo-se pela adição e subtração na ordem que aparecem, da esquerda para a direita. Ressalta-se aqui a sugestão de não se usar mnemônica como PEMDAS, BIDMAS, BEDMAS ou BODMAS[1], pois além de não fazer sentido, não obedece as regras de prevalência (BENDER, 1962, JONSSON, 2016, ALI RAHMAN *et al.*, 2016).

Existe um algoritmo para a resolução das expressões numéricas, e funciona. Mas entre decorar os passos e constituir a lógica necessária para os mesmos, está um abismo entre fazer e compreender o que faz. Operar é importante, mas para além de um raciocínio operatório, esperamos uma lógica formal que permita aos estudantes explicitarem os porquês dos seus fazeres, com um raciocínio predicativo (VERGNAUD, 2007).

1.3 Conhecimento cultural e lógico expresso em números

Bender (1962) prenunciou a possibilidade de escrever as expressões numéricas de forma diferente, de modo a não necessitar sinais de associação, mas advertiu quanto a “retreinar” todos os que conhecem o procedimento usual. As notações que seguem foram criadas para economia em processamento de dados em computação.

Em informática costuma-se usar o termo expressão aritmética para as expressões numéricas. A forma convencional utilizada comumente é denominada infixa. Em virtude dos computadores processarem os dados de forma parcial, o uso de regras de prevalência e sinais de associação não é o mais indicado. Para isso, os computadores armazenam seus dados na pilha (como em empilhamento), como memória, nos quais os números entre si se empilham, e só operam ao ser digitado um sinal de operação.

Duas notações permitem que sinais de associação não sejam utilizados e ao mesmo tempo se obedeçam às regras de prevalência, a saber: Notação polonesa (prefixa) e notação

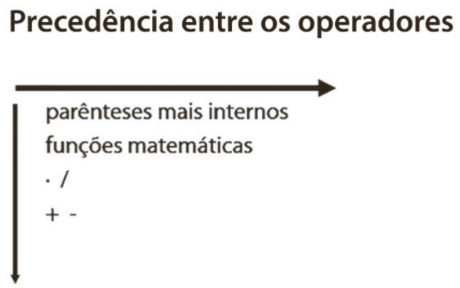
---

[1] Acrônimos mnemônicos utilizados em países anglófonos para lembrar a ordem das operações, como *please excuse my dear aunt Sally* – PEMDAS, que propõem a ordem de parênteses, expoentes, multiplicação, divisão, adição e subtração, sugestionando para o erro de realizar as multiplicações antes das divisões, por exemplo. As outras versões usam I para índices, B para *brackets* (parênteses e colchetes), e O para *orders* (raízes e potenciação), mas seguem a mesma lógica.

polonesa invertida (posfixa). Rosen (2010) apresenta que além da escrita da expressão numérica em uma ordem diferente, as expressões são analisadas por meio de grafos conexos não orientados que não contêm nenhum ciclo simples, denominados árvores.

Segundo Morais *et al*. (2018, p. 21), expressões aritméticas possuem operadores aritméticos e seus operandos são constantes e/ou variáveis do tipo numérico (inteiro ou real). Chama de operadores aritméticos os sinais das operações e os sinais de associação. A ordem de prevalência é chamada de ordem de precedência, conforme Figura 1.

Figura 1 – Ordem de precedência em expressões aritméticas



Fonte: Morais *et al*. (2018, p. 13).

A explicação da Figura 1, segundo os autores, é que os operadores de mesma precedência são resolvidos da esquerda para a direita, na ordem que aparecerem na expressão.

Para se transformar uma expressão aritmética, os delimitadores agrupam cadeias de texto ou dados simples em subpartes, marcando o início e o final do grupo. Os delimitadores devem ser emparelhados e equilibrados, podendo-se usar parênteses em expressões matemáticas para agrupar ou substituir a ordem de precedência para as operações (PINTO *et al*., 2018).

Os delimitadores devem ser usados conforme seus tipos correspondentes, em pares: { }, [ ] e ( ). A posição dos delimitadores deve ocorrer de modo que um delimitador de abertura dentro de um par externo seja fechado dentro do mesmo par externo. Por exemplo, se abrir um colchete, depois abrir um parênteses, o parênteses deve ser fechado antes do colchete ser fechado.

Segundo Pinto *et al*. (2019), expressões matemáticas são muito fáceis de serem avaliadas por humanos, mas a tarefa é mais difícil em um programa de computador quando essa expressão é representada por uma *string* (cadeia de caracteres). Então a alternativa de programação é organizar as expressões de modo que a cada caractere inserido na pilha, o próximo seja relacionado a ele, formando, assim, as expressões prefixa, na qual os operadores vêm antes dos números, e a posfixa, na qual os números e operadores são inseridos na pilha conforme ordem de operação, esta última largamente utilizada em calculadoras comuns, conforme exemplo no Quadro 1.

Quadro 1 – Representações de uma expressão numérica

Expressão infixa	Expressão prefixa	Expressão posfixa
(2 + 3) x 4	x + 2 3 4	2 3+4 x

Fonte: adaptado de Miller e Ranum (2011).

Julgamos importante apresentar tais formas de escrever uma expressão numérica para discutir o conhecimento lógico e o conhecimento cultural/social que envolvem esta representação simbólica. Os sinais de associação são uma convenção social, mas a ordem de prevalência das operações é de caráter lógico e provém do sentido dos números nas operações.

Os sentidos dos números são construídos pelas crianças conforme se deparam com situações a resolver, sendo assim, para a construção lógica do regramento presente nas expressões numéricas, percebemos a necessidade de nos atrelarmos à Teoria dos Campos Conceituais, que entende que cada campo conceitual tem esquemas específicos que se formam e ampliam mediante o enfrentamento de uma série de situações a eles pertinentes (VERGNAUD, 2009b).

A Teoria dos Campos Conceituais visa o desenvolvimento do conhecimento dos conteúdos, e se liga à Didática no sentido de entender o ensino e a aprendizagem por um viés cognitivista, e a abordaremos de forma mais aprofundada no capítulo de Referencial Teórico.

1.4 Expressões numéricas como expressão de um pensamento sobre aprendizagem

Nem sempre as expressões foram trabalhadas como problemas, e os livros didáticos, que são um retrato do ensino através dos tempos, confirmam. Por motivos afetivos, escolhemos as obras do autor Álvaro Andrini, que escreveu livros de Matemática para diversas gerações, incluindo a nossa. A Figura 2 expressa algumas capas de livros didáticos de Matemática deste autor ao longo dos anos. Os dois primeiros marcaram nossa infância, e são parte da motivação[2] que nos impele a estudar expressões numéricas.

[2] Meu gosto pela Matemática veio por brincar de Matemática com os livros de meus irmãos mais velhos, e fazia isso seguindo o modelo. Para mim era divertido e satisfatório seguir o modelo e entender como o jogo produzido pelos números e pelas letras funcionava. Era criança, não tinha muito que fazer, brincava de escolinha com meus

Figura 2 – Capas de livros didáticos com autoria ou co-autoria de Álvaro Andrini

1975 1984 1989 2006 2012 2018

Fonte: Editora do Brasil.

Historicamente, as expressões numéricas tiveram protagonismo dentre os conteúdos trabalhados no Ensino Fundamental, o que se reflete nos livros didáticos, os quais primam pelas regras e técnicas no ensino de expressões numéricas (FREITAS, 2014, OTTES, 2016).

Os chamados "carroções[3]" eram tarefa árdua de operação algorítmica, trabalhada por estudantes após as lições de operações numéricas. O caráter procedimental, incluindo o passo-a-passo de resolução, era apresentado como a solução de uma expressão numérica, definida como uma sequência de operações cujo resultado é um único número (TOSTES, 2015).

Para ilustrar tais afirmações, apresentamos a abordagem dada às expressões numéricas por um mesmo autor ao longo dos anos: Andrini (1975, 1989) e Andrini e Vasconcelos (2012). A escolha deste se deu devido ao autor estar em atuação há pelo menos 45 anos no mercado de livros didáticos.

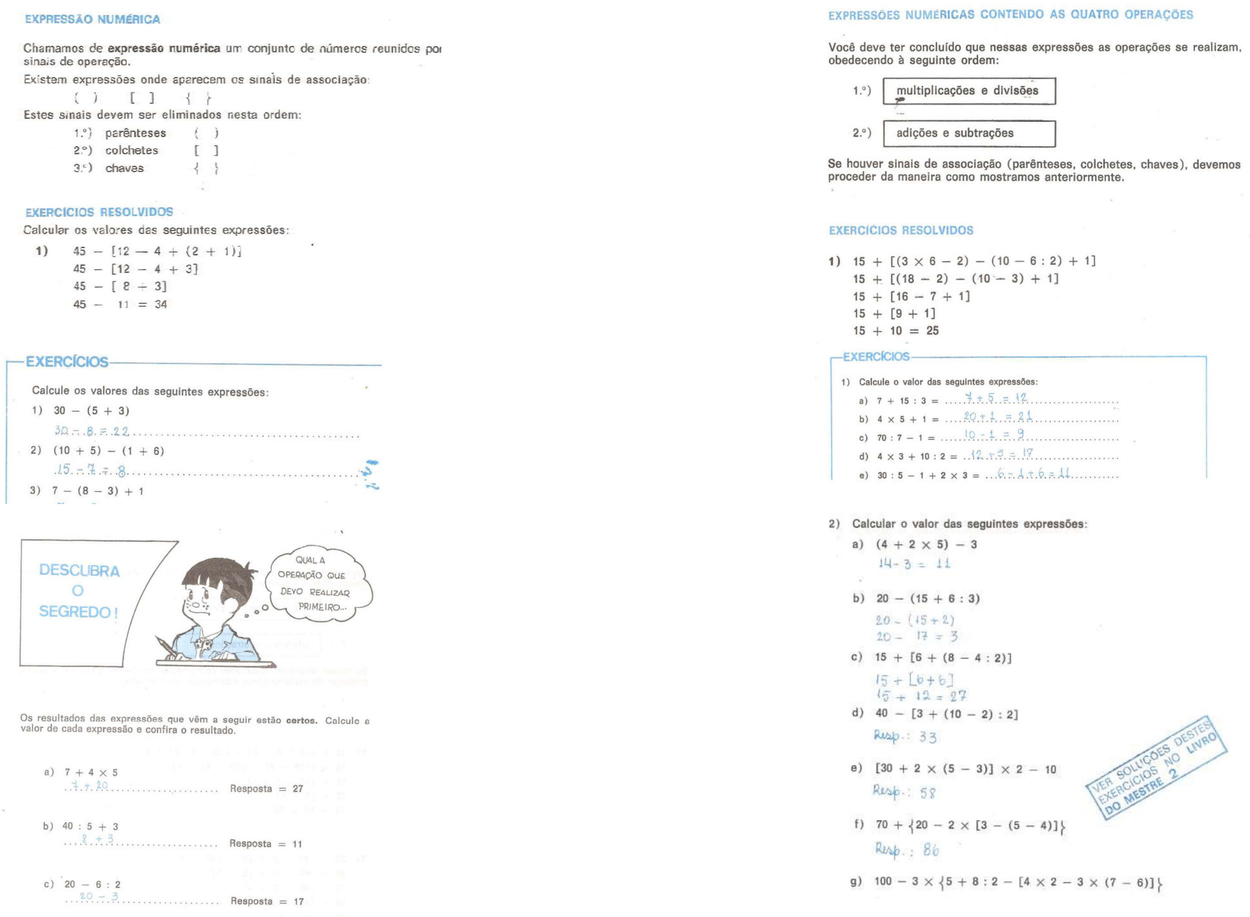
A capa do livro de 1975 nos traz duas cenas. Na primeira as crianças estão se divertindo, jogando futebol com uma bola cheia de símbolos matemáticos, na segunda, um diálogo entre duas crianças, uma carregando uma caixa em uma das mãos e dizendo "eu fiquei forte fazendo exercícios físicos" e a outra segurando uma caixa com uma roldana e dizendo "eu fiquei inteligente fazendo exercícios de Matemática" (ANDRINI, 1975). A ideia de ficar inteligente fazendo exercícios é bastante coerente com a proposta do livro, que apresenta definições, exercícios resolvidos e exercícios. No livro Ensino Objetivo de Matemática, o autor define brevemente as expressões numéricas, e apresenta um exemplo, conforme Figura 3.

---

gatos e resolvia exercícios, e nesse ponto as expressões numéricas foram uma espécie de quebra-cabeças. Meus irmãos, em média 20 anos mais velhos que eu, me faziam charadas matemáticas, as quais ficaram em minha memória afetiva. O livro de meus irmãos era Andrini (1975) e o usado por mim em sala de aula era Andrini (1984).

[3]Em depoimento de Osvaldo Sangiorgi, citado por Búrigo (2008, p.46), carroções são utilizados como sinônimos de expressões numéricas com procedimentos enfadonhos e com muitas operações.

Figura 3 – Excertos de livro didático de 1975 – apresentação das expressões numéricas



EXPRESSÃO NUMÉRICA

Chamamos de **expressão numérica** um conjunto de números reunidos por sinais de operação.

Existem expressões onde aparecem os sinais de associação:

( ) [ ] { }

Estes sinais devem ser eliminados nesta ordem:

1.º) parênteses ( )
2.º) colchetes [ ]
3.º) chaves { }

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Calcular os valores das seguintes expressões:

1) 45 − [12 − 4 + (2 + 1)]
45 − [12 − 4 + 3]
45 − [8 + 3]
45 − 11 = 34

EXERCÍCIOS

Calcule os valores das seguintes expressões:

1) 30 − (5 + 3)
30 − 8 = 22
2) (10 + 5) − (1 + 6)
15 − 7 = 8
3) 7 − (8 − 3) + 1

Os resultados das expressões que vêm a seguir estão **certos**. Calcule o valor de cada expressão e confira o resultado.

a) 7 + 4 × 5
7 + 20 .... Resposta = 27

b) 40 : 5 + 3
8 + 3 .... Resposta = 11

c) 20 − 6 : 2
20 − 3 .... Resposta = 17

EXPRESSÕES NUMÉRICAS CONTENDO AS QUATRO OPERAÇÕES

Você deve ter concluído que nessas expressões as operações se realizam, obedecendo à seguinte ordem:

1.º) multiplicações e divisões
2.º) adições e subtrações

Se houver sinais de associação (parênteses, colchetes, chaves), devemos proceder da maneira como mostramos anteriormente.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) 15 + [(3 × 6 − 2) − (10 − 6 : 2) + 1]
15 + [(18 − 2) − (10 − 3) + 1]
15 + [16 − 7 + 1]
15 + [9 + 1]
15 + 10 = 25

EXERCÍCIOS

1) Calcule o valor das seguintes expressões:
a) 7 + 15 : 3 = 7 + 5 = 12
b) 4 × 5 + 1 = 20 + 1 = 21
c) 70 : 7 − 1 = 10 − 1 = 9
d) 4 × 3 + 10 : 2 = 12 + 5 = 17
e) 30 : 5 − 1 + 2 × 3 = 6 − 1 + 6 = 11

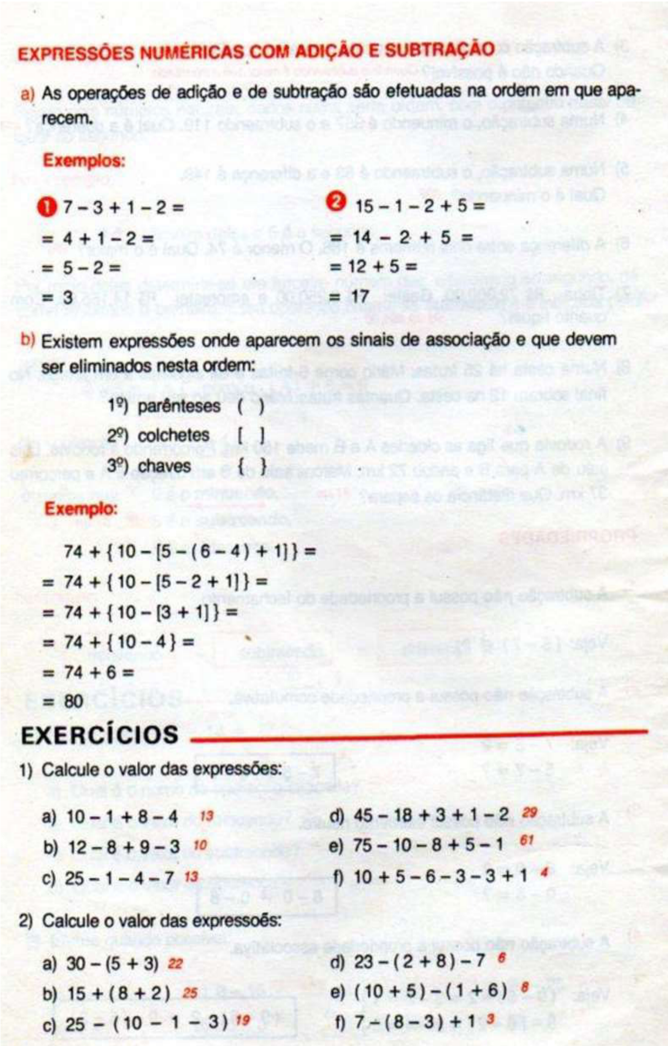
2) Calcular o valor das seguintes expressões:
a) (4 + 2 × 5) − 3
14 − 3 = 11
b) 20 − (15 + 6 : 3)
20 − (15 + 2)
20 − 17 = 3
c) 15 + [6 + (8 − 4 : 2)]
15 + [6 + 6]
15 + 12 = 27
d) 40 − [3 + (10 − 2) : 2]
Resp.: 33
e) [30 + 2 × (5 − 3)] × 2 − 10
Resp.: 58
f) 70 + {20 − 2 × [3 − (5 − 4)]}
Resp.: 86
g) 100 − 3 × {5 + 8 : 2 − [4 × 2 − 3 × (7 − 6)]}

VER SOLUÇÕES DESTES EXERCÍCIOS NO LIVRO DO MESTRE 2

Fonte: Andrini (1975, p. 54-56, 67-69).

A definição como *conjunto de números reunidos por sinais de operação* é sucinta e necessita de contexto puramente matemático para ser compreendida. É um caráter informativo. No livro de 1989, ilustrado na Figura 4, acompanhamos um exemplo antes da explicação, e explicitamente a ordem de prevalência das operações.

Figura 4 – Excerto de um livro didático de 1989 – apresentação das expressões numéricas



EXPRESSÕES NUMÉRICAS COM ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

a) As operações de adição e de subtração são efetuadas na ordem em que aparecem.

Exemplos:

1. $7 - 3 + 1 - 2 =$
   $= 4 + 1 - 2 =$
   $= 5 - 2 =$
   $= 3$

2. $15 - 1 - 2 + 5 =$
   $= 14 - 2 + 5 =$
   $= 12 + 5 =$
   $= 17$

b) Existem expressões onde aparecem os sinais de associação e que devem ser eliminados nesta ordem:

1º) parênteses ( )
2º) colchetes [ ]
3º) chaves { }

Exemplo:

$74 + \{10 - [5 - (6 - 4) + 1]\} =$
$= 74 + \{10 - [5 - 2 + 1]\} =$
$= 74 + \{10 - [3 + 1]\} =$
$= 74 + \{10 - 4\} =$
$= 74 + 6 =$
$= 80$

EXERCÍCIOS

1) Calcule o valor das expressões:

a) $10 - 1 + 8 - 4$ 13
b) $12 - 8 + 9 - 3$ 10
c) $25 - 1 - 4 - 7$ 13
d) $45 - 18 + 3 + 1 - 2$ 29
e) $75 - 10 - 8 + 5 - 1$ 61
f) $10 + 5 - 6 - 3 - 3 + 1$ 4

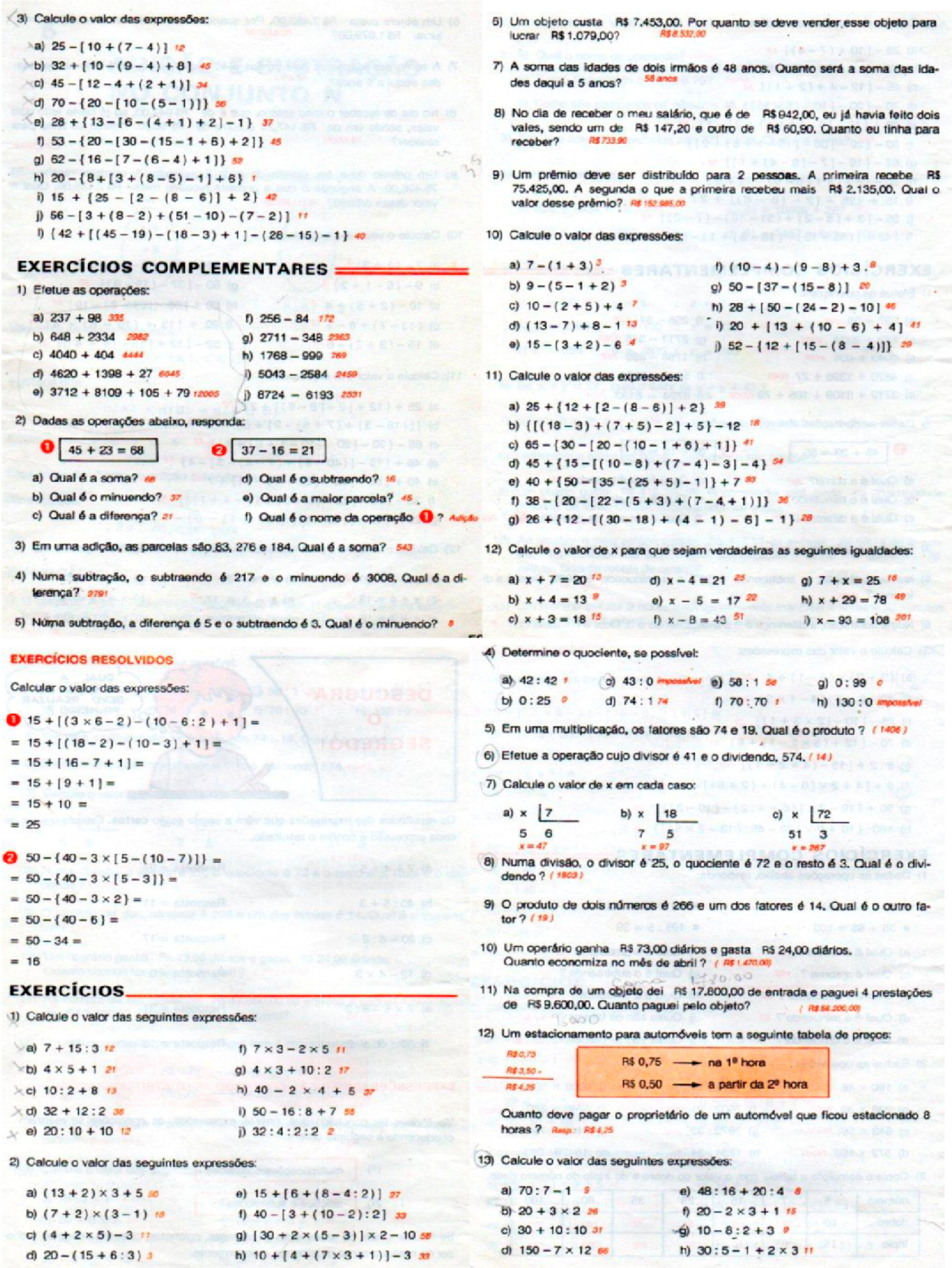
2) Calcule o valor das expressoẽs:

a) $30 - (5 + 3)$ 22
b) $15 + (8 + 2)$ 25
c) $25 - (10 - 1 - 3)$ 19
d) $23 - (2 + 8) - 7$ 6
e) $(10 + 5) - (1 + 6)$ 8
f) $7 - (8 - 3) + 1$ 3

Fonte: Andrini (1989, p.58).

Podemos reparar que após apresentação breve e alguns exercícios, seguiam outros mais complexos e posteriormente, de aplicação, com situações problema. A Figura 5 tem a intenção de permitir a visualização do todo, a predominância de expressões a serem calculadas e as aplicações na forma de situações ao final do tópico. Tem-se, portanto, a ideia de *dizer* como faz, *exercitar* o fazer e, após saber *operar*, *aplicar* em situações. A aprendizagem das expressões numéricas se dava pelo manejo das operações, ensinadas como processo algorítmico, sem a necessidade de proporcionar significados a estes objetos matemáticos (SILVA; ARRUDA, 2011).

Figura 5 – Apresentação do estudo de expressões numéricas em 1989 em um livro didático.



3) Calcule o valor das expressões:

a) $25 - [10 + (7 - 4)]$ 12
b) $32 + [10 - (9 - 4) + 8]$ 45
c) $45 - [12 - 4 + (2 + 1)]$ 34
d) $70 - \{20 - [10 - (5 - 1)]\}$ 56
e) $28 + \{13 - [6 - (4 + 1) + 2] - 1\}$ 37
f) $53 - \{20 - [30 - (15 - 1 + 6) + 2]\}$ 45
g) $62 - \{16 - [7 - (6 - 4) + 1]\}$ 52
h) $20 - \{8 + [3 + (8 - 5) - 1] + 6\}$ 1
i) $15 + \{25 - [2 - (8 - 6)] + 2\}$ 42
j) $56 - [3 + (8 - 2) + (51 - 10) - (7 - 2)]$ 11
l) $\{42 + [(45 - 19) - (18 - 3) + 1] - (28 - 15) - 1\}$ 40

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Efetue as operações:

a) $237 + 98$ 335
b) $648 + 2334$ 2982
c) $4040 + 404$ 4444
d) $4620 + 1398 + 27$ 6045
e) $3712 + 8109 + 105 + 79$ 12005
f) $256 - 84$ 172
g) $2711 - 348$ 2363
h) $1768 - 999$ 769
i) $5043 - 2584$ 2459
j) $8724 - 6193$ 2531

2) Dadas as operações abaixo, responda:

1 $\boxed{45 + 23 = 68}$ 2 $\boxed{37 - 16 = 21}$

a) Qual é a soma? 68
b) Qual é o minuendo? 37
c) Qual é a diferença? 21
d) Qual é o subtraendo? 16
e) Qual é a maior parcela? 45
f) Qual é o nome da operação 1? Adição

3) Em uma adição, as parcelas são 83, 276 e 184. Qual é a soma? 543

4) Numa subtração, o subtraendo é 217 e o minuendo é 3008. Qual é a diferença? 2791

5) Numa subtração, a diferença é 5 e o subtraendo é 3. Qual é o minuendo? 8

6) Um objeto custa R$ 7.453,00. Por quanto se deve vender esse objeto para lucrar R$ 1.079,00? R$ 8.532,00

7) A soma das idades de dois irmãos é 48 anos. Quanto será a soma das idades daqui a 5 anos? 58 anos

8) No dia de receber o meu salário, que é de R$ 942,00, eu já havia feito dois vales, sendo um de R$ 147,20 e outro de R$ 60,90. Quanto eu tinha para receber? R$ 733,90

9) Um prêmio deve ser distribuído para 2 pessoas. A primeira recebe R$ 75.425,00. A segunda o que a primeira recebeu mais R$ 2.135,00. Qual o valor desse prêmio? R$ 152.985,00

10) Calcule o valor das expressões:

a) $7 - (1 + 3)$ 3
b) $9 - (5 - 1 + 2)$ 3
c) $10 - (2 + 5) + 4$ 7
d) $(13 - 7) + 8 - 1$ 13
e) $15 - (3 + 2) - 6$ 4
f) $(10 - 4) - (9 - 8) + 3$ 8
g) $50 - [37 - (15 - 8)]$ 20
h) $28 + [50 - (24 - 2) - 10]$ 46
i) $20 + [13 + (10 - 6) + 4]$ 41
j) $52 - \{12 + [15 - (8 - 4)]\}$ 29

11) Calcule o valor das expressões:

a) $25 + \{12 + [2 - (8 - 6)] + 2\}$ 39
b) $\{[(18 - 3) + (7 + 5) - 2] + 5\} - 12$ 18
c) $65 - \{30 - [20 - (10 - 1 + 6) + 1]\}$ 41
d) $45 + \{15 - [(10 - 8) + (7 - 4) - 3] - 4\}$ 54
e) $40 + \{50 - [35 - (25 + 5) - 1]\} + 7$ 93
f) $38 - \{20 - [22 - (5 + 3) + (7 - 4 + 1)]\}$ 36
g) $26 + \{12 - [(30 - 18) + (4 - 1) - 6] - 1\}$ 28

12) Calcule o valor de x para que sejam verdadeiras as seguintes igualdades:

a) $x + 7 = 20$ 13
b) $x + 4 = 13$ 9
c) $x + 3 = 18$ 15
d) $x - 4 = 21$ 25
e) $x - 5 = 17$ 22
f) $x - 8 = 43$ 51
g) $7 + x = 25$ 18
h) $x + 29 = 78$ 49
i) $x - 93 = 108$ 201

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Calcular o valor das expressões:

1 $15 + [(3 \times 6 - 2) - (10 - 6 : 2) + 1] =$
$= 15 + [(18 - 2) - (10 - 3) + 1] =$
$= 15 + [16 - 7 + 1] =$
$= 15 + [9 + 1] =$
$= 15 + 10 =$
$= 25$

2 $50 - \{40 - 3 \times [5 - (10 - 7)]\} =$
$= 50 - \{40 - 3 \times [5 - 3]\} =$
$= 50 - \{40 - 3 \times 2\} =$
$= 50 - \{40 - 6\} =$
$= 50 - 34 =$
$= 16$

EXERCÍCIOS

1) Calcule o valor das seguintes expressões:

a) $7 + 15 : 3$ 12
b) $4 \times 5 + 1$ 21
c) $10 : 2 + 8$ 13
d) $32 + 12 : 2$ 38
e) $20 : 10 + 10$ 12
f) $7 \times 3 - 2 \times 5$ 11
g) $4 \times 3 + 10 : 2$ 17
h) $40 - 2 \times 4 + 5$ 37
i) $50 - 16 : 8 + 7$ 55
j) $32 : 4 : 2 : 2$ 2

2) Calcule o valor das seguintes expressões:

a) $(13 + 2) \times 3 + 5$ 50
b) $(7 + 2) \times (3 - 1)$ 18
c) $(4 + 2 \times 5) - 3$ 11
d) $20 - (15 + 6 : 3)$ 3
e) $15 + [6 + (8 - 4 : 2)]$ 27
f) $40 - [3 + (10 - 2) : 2]$ 33
g) $[30 + 2 \times (5 - 3)] \times 2 - 10$ 58
h) $10 + [4 + (7 \times 3 + 1)] - 3$ 33

4) Determine o quociente, se possível:

a) $42 : 42$ 1
b) $0 : 25$ 0
c) $43 : 0$ impossível
d) $74 : 1$ 74
e) $58 : 1$ 58
f) $70 : 70$ 1
g) $0 : 99$ 0
h) $130 : 0$ impossível

5) Em uma multiplicação, os fatores são 74 e 19. Qual é o produto? (1406)

6) Efetue a operação cujo divisor é 41 e o dividendo, 574. (14)

7) Calcule o valor de x em cada caso:

a) $x \,|\underline{\,7\,}$ — 5 6 — $x = 47$
b) $x \,|\underline{\,18\,}$ — 7 5 — $x = 97$
c) $x \,|\underline{\,72\,}$ — 51 3 — $x = 267$

8) Numa divisão, o divisor é 25, o quociente é 72 e o resto é 3. Qual é o dividendo? (1803)

9) O produto de dois números é 266 e um dos fatores é 14. Qual é o outro fator? (19)

10) Um operário ganha R$ 73,00 diários e gasta R$ 24,00 diários. Quanto economiza no mês de abril? (R$ 1.470,00)

11) Na compra de um objeto dei R$ 17.800,00 de entrada e paguei 4 prestações de R$ 9.600,00. Quanto paguei pelo objeto? (R$ 56.200,00)

12) Um estacionamento para automóveis tem a seguinte tabela de preços:

R$ 0,75 ⟶ na 1ª hora
R$ 0,50 ⟶ a partir da 2ª hora

R$ 0,75
R$ 3,50 +
R$ 4,25

Quanto deve pagar o proprietário de um automóvel que ficou estacionado 8 horas? Resp.: R$ 4,25

13) Calcule o valor das seguintes expressões:

a) $70 : 7 - 1$ 9
b) $20 + 3 \times 2$ 26
c) $30 + 10 : 10$ 31
d) $150 - 7 \times 12$ 66
e) $48 : 16 + 20 : 4$ 8
f) $20 - 2 \times 3 + 1$ 15
g) $10 - 8 : 2 + 3$ 9
h) $30 : 5 - 1 + 2 \times 3$ 11

Fonte: Andrini (1989, p. 59, 60, 71-76).

A presença de problemas após o cálculo "praticado" em expressões numéricas e seu algoritmo, fica evidente na Figura 4. Tais etapas tradicionais são respeitadas desde o primeiro livro didático de Matemática publicado no Brasil, datado de 1744, no qual uma sequência didática era organizada em definição, explicação e exemplo numérico. Esta tradição foi contestada pela Escola Nova com autores como Euclides Roxo, na década de 1930, afirmando em 1937 que novas doutrinas visavam reformar os fundamentos da finalidade da educação e suas bases, propondo um ensino funcional e globalizado, ao invés da preocupação exagerada da sistematização de conduta (ALVES, 2005).

Contempla-se, portanto, uma ideia diferente da proposta pelos primeiros livros didáticos de Matemática utilizados no Brasil. Nas décadas de 1940 e 1950, com o aumento do número de matrículas na escola, houve necessidade de produção de maior quantidade de livros, com “linguagem mais simples, com o oferecimento de um número grande de exemplos para facilitar a compreensão” (ALVES, 2005, p. 26). Essa proposta de Educação, por fatores externos e a criação de uma perspectiva divergente, sucumbiu a um movimento iniciado na década de 1960 no Brasil, chamado Matemática Moderna, baseado na teoria dos conjuntos, nas estruturas matemáticas e na lógica matemática, com ênfase na linguagem matemática precisa e no rigor das justificações matemáticas, sob o jugo da qual se encontra o livro citado na Figura 5.

Com a derrocada da Matemática Moderna, uma nova era com propostas mais ligadas à sociedade ordenou a dinâmica da Educação Matemática no Brasil, e com ela, as composições dos livros didáticos, diminuindo a ênfase nos algoritmos decorados e procedimentos e conhecendo os conceitos matemáticos presentes nos diferentes conteúdos. Esta mudança aconteceu de forma lenta e gradual, e podemos ver resquícios da ideia de definição, exemplo e exercício ainda hoje nos livros didáticos (ALVES, 2005).

Neste sentido, os esforços somam-se para que os estudantes construam seu conhecimento mediante situações que tenham significado, ainda mais se, tradicionalmente, se estuda certos conteúdos com uma ancoragem procedimental, como o caso das expressões numéricas (SILVA; ARRUDA, 2011).

Diante de tais desafios, os livros didáticos atualizaram-se em cada década, o que podemos ver nas Figuras 6 e 7, cujo conteúdo é de um livro de mesma autoria que o contemplado pelas Figuras 4 e 5. Para além dos elementos visuais, a proposta aborda um número maior de problemas e menor de expressões descontextualizadas, dando menos ênfase à memória de algoritmos e mais à representação das situações propostas, como pode ser visto na Figura 6, que apresenta a proposta de estudo de Expressões Numéricas, unindo os Campos Aditivos e Multiplicativos, com situações mistas, entendendo as expressões numéricas como composição de operações matemáticas que fazem sentido segundo seu contexto (ARRAIS, 2006, PAIM, 2018).

Figura 6 – Exemplos de expressões numéricas em um livro didático de 2012

3. Expressões numéricas

Na língua portuguesa encontramos expressões como:

E muitas outras expressões.

Na Matemática, encontramos as **expressões numéricas**, que envolvem números e operações.

Quando efetuamos uma expressão numérica, chegamos a um número.

$3 + 2 \cdot 7$ é uma expressão numérica que envolve adição e multiplicação. Como podemos efetuá-la?

Sabemos que $2 \cdot 7 = 7 + 7$.

Então: $3 + 2 \cdot 7 = 3 + 7 + 7 = 17$

$3 + 2 \cdot 7 = 3 + 14 = 17$

A multiplicação deve ser efetuada antes da adição.

Para resolver expressões numéricas, as operações devem ser efetuadas na seguinte ordem:

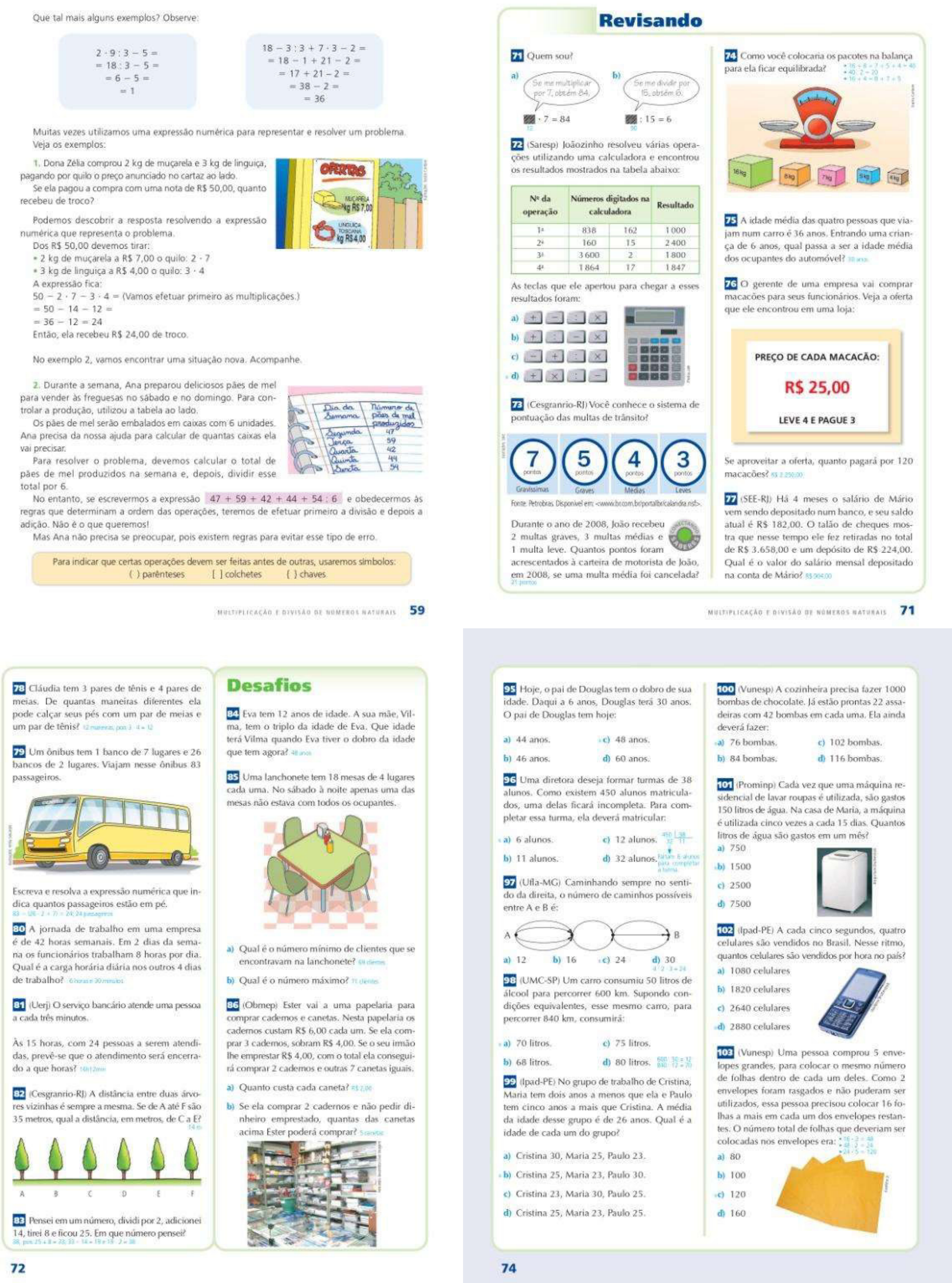
1º) As multiplicações e as divisões na ordem em que aparecem na expressão (da esquerda para a direita).

2º) As adições e as subtrações na ordem em que aparecem na expressão (da esquerda para a direita).

Fonte: Vasconcellos; Andrini (2012, p. 58).

A Figura 7 dá uma dimensão das atividades propostas no livro, agora com uma identidade visual nova e ao mesmo tempo com situações propostas, não aparecendo em grande frequência expressões soltas, ainda que não explicite nem problematize o motivo da ordem de operação nas expressões.

Figura 7 – Apresentação do estudo de expressões numéricas em 2012 em um livro didático.



Fonte: Vasconcellos; Andrini (2012, p. 59, 71, 72, 74).

A mudança de perspectiva acentuada na ilustração com os livros não é percebida de forma efetiva nas escolas. Em sua pesquisa de mestrado, Arrais (2006) conclui que grande parte dos professores entendem que ensinar expressões numéricas consiste em ensinar técnicas algorítmicas, para que os estudantes consigam operar numericamente, descoladamente de situações, bem como enfatizam que é conhecimento necessário para operacionalização posterior, não apontando para seu uso ou para os motivos da ordem das operações. O *fazer* é a ação importante neste caso, *operar* de forma adequada, seguindo o modelo corretamente, como proposto pelo ensino tradicional.

A mudança de concepção sobre a resolução de problemas se apresenta em documentos oficiais. Na Base Nacional Comum Curricular – BNCC, a respeito das habilidades matemáticas para o Ensino Fundamental, o paradigma de seguir o modelo mudou para modelar e resolver problemas cotidianos, em múltiplos contextos, utilizando diferentes registros e linguagens (BRASIL, 2018).

Desta forma, as expressões numéricas, como registro de uma situação problema a ser modelada, trabalham com números e operações, as quais possuem sentidos e ordenamento. Embora as expressões numéricas não constem oficialmente como conteúdo nos currículos oficiais, as mesmas compõem parte dos livros didáticos e manuais de ensino da Educação Básica. São concebidas ora como algoritmos com fim em si mesmo, ora como transposição da linguagem natural à linguagem matemática. (ARRAIS, 2006, FREITAS, 2014).

1.5 As operações nas expressões numéricas

A ilustração explicativa sobre as regras de prevalência na Figura 6 traz consigo a ideia da adição de parcelas iguais, que é uma aproximação entre o Campo Conceitual Aditivo e o Campo Conceitual Multiplicativo, no entanto, o sentido da multiplicação como replicação ou covariação promove ruptura entre esses campos conceituais (NUNES; BRYANT, 1997, GITIRANA *et al.*, 2014). Esta diferenciação e a possibilidade de presença dos Campos Conceituais Aditivo e Multiplicativo nas expressões numéricas, nos permitem pensar em uma imbricação entre os dois campos na representação de problemas mistos por expressões numéricas.

A ordem de prevalência como operações de primeira ordem (adição e subtração), e as que dela podem derivar (multiplicação e divisão), chamadas de segunda ordem, descritas por Bender (1962) é coerente com a apresentada em Andrini (2012), mas não dá conta de explicar que há diversos sentidos na multiplicação que não podem ser reduzidos a uma adição de parcelas iguais, como a multiplicação de dois números fracionários, por exemplo. Assim, um estudo mais detalhado exige uma compreensão mais ampla dos sentidos das operações em cada classe possível de situações, e a Teoria dos Campos Conceituais nos permite esta análise.

A ordem de prevalência em expressões numéricas provenientes da representação de problemas mistos exige, ao mesmo tempo, conhecimento sobre os Campos Conceituais

Aditivo e Multiplicativo. Arrais (2006) propõe o duplo campo conceitual das estruturas mistas, mas nós nos orientamos pela ideia de Teles (2008) de imbricação entre dois campos conceituais, entendida como uma relação na qual os campos conceituais se sobrepõem mutuamente e mediante essa articulação, novos significados são constituídos. Uma de nossas hipóteses é que a imbricação entre o Campo Conceitual Aditivo e o Campo Conceitual Multiplicativo nas expressões numéricas dão sentido, por exemplo, às regras de prevalência. Cabe a questão se existe realmente uma imbricação entre esses campos na escrita e resolução das expressões numéricas pelos estudantes, e como as expressões numéricas se movimentam na constituição dos sentidos das operações, dos processos de resolução de problemas mistos, o que pretendemos investigar.

2 TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

2.1 Ideias iniciais

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) é uma teoria cognitivista, que objetiva propor uma estrutura para compreender filiações e rupturas entre conhecimentos, fornecendo um quadro coerente e princípios que sirvam de base para o estudo do desenvolvimento e aprendizagem. Embora não seja uma teoria específica da Matemática, foi elaborada para estudar os processos de conceitualização progressiva, principalmente de estruturas aditivas e multiplicativas. A conceitualização está no centro da Teoria dos Campos Conceituais, e consiste em identificar os objetos do mundo, suas propriedades, relações e transformações de forma a produzir uma construção de conhecimento (VERGNAUD, 1986, 1990, 1993, 1996, 2007, 2017a).

Gérard Vergnaud se sustenta de forma principal, para iniciar sua teoria, em dois arcabouços teóricos, e usa os mesmos de forma complementar: tanto a Epistemologia Genética de Piaget, da qual organiza as estruturas de conhecimento, a noção de esquema, de invariante operatório e de adaptação, quanto a Teoria Sócio-histórica de Vigotsky, da qual assume que a linguagem como mediação possui um papel na construção do conhecimento como cultura, processo simbólico e mediação em sala de aula. (PLAISANCE; VERGNAUD, 2003, VERGNAUD, 2004, 2017b).

O saber forma-se a partir de situações a dominar, tanto em aspectos práticos como teóricos. Para as concepções erradas dos alunos mudarem verdadeiramente, precisam entrar em conflito com situações que elas não permitem tratar, ou seja, para que as novas situações e conceitos tenham sentido para os alunos, precisam adaptá-los aos seus conhecimentos anteriores. Os conhecimentos englobam tanto o saber fazer quanto os saberes expressos. (VERGNAUD, 1986, 1996).

2.2 Investigação em didática

A parte mais controversa em uma investigação interdisciplinar, como o caso da investigação em didática é desenvolver uma abordagem científica com os conceitos e métodos que a constituam, pois na perspectiva de psicólogos, o que se leva em consideração são "abordagens associativas para os empiristas, estruturas lógicas para os piagetianos, tratamento da informação para os cognitivistas influenciados pelos modelos informáticos e psicolinguística para outros" (VERGNAUD, 1986, p.75), e no caso dos professores de

Matemática e matemáticos profissionais, se dão por satisfeitos com os conhecimentos matemáticos familiares e algumas teorias educativas gerais.

A Teoria dos Campos Conceituais desloca essa abordagem, estudando os processos específicos para transmissão e apropriação de conhecimentos específicos, como o da Matemática, tratando, assim, de um domínio científico próprio, o que constitui uma questão científica de grande importância e que não é redutível nem à Psicologia, nem à Matemática, nem a qualquer outra ciência, tendo uma identidade própria como Didática da Matemática. Desta forma, privilegia modelos matemáticos que atribuem papel aos conceitos matemáticos em si mesmos, considerando fatores secundários de complexidade o enunciado e o número de elementos em jogo (VERGNAUD, 1986, 1993, 2017b).

É preciso desprender a centralização da lógica para os contextos associados aos problemas. Isso não significa abandonar a lógica e as descrições já realizadas, mas refinar os modelos. As situações problema que conferem significação a um conceito são investigadas, analisadas e classificadas da forma mais exaustiva possível. Os resultados de tais ações permitem ampliar a variedade de relações e problemas, e aprofundar a epistemologia de um conceito, tanto em que problemas ele responde, quanto em que outros conceitos ele se apoia. Tanto para a teoria das operações quanto para a teoria do conhecimento operatório, é necessário ter em mente que a resolução do problema é origem e critério do saber operatório, assim, torna-se essencial que professores sejam capazes de proporcionar a estudantes situações que ampliem a significação de um conceito e ponham à prova suas competências e concepções (VERGNAUD, 1986, 1996, 2017b).

As concepções e as competências estão interligadas, não sendo possível contornar a questão teórica do papel da experiência, pois ao longo da experiência o sujeito se depara com a maior parte das situações. Os procedimentos não se desenvolvem por si próprios, nem sobrevivem, livre de representações e relações das quais trata ou implica, da mesma forma, um conceito ou teorema que não pode ser utilizado em situações-problema nas quais são pertinentes, esvaziam-se de sentido, portanto há problemas práticos e teóricos, sendo a prática e a teoria indissoluvelmente ligadas (VERGNAUD, 1986, 2009b).

Tanto para as estruturas gerais do pensamento quanto para os conteúdos dos conhecimentos, a Teoria dos Campos Conceituais afirma que as concepções e as competências se desenvolvem ao longo do tempo. Pais, professores e programas subestimam o ritmo lento do desenvolvimento, dando por vencido um conteúdo, e no próximo período letivo não o retomam, quando é mais sensato retornar e aprofundar os conhecimentos, complexificando com situações novas e eventualmente novos conceitos. Um conceito é aprendido ao longo do tempo; cabe, portanto, respeitar os tempos de aprendizagens e ter a consciência de que um conceito não será construído por completo sem as condições necessárias em situação, esquemas e ação (VERGNAUD, 1986; 2011).

2.3 Esquema

Um esquema é uma organização invariante do comportamento para uma classe de situações dada, podendo haver vários esquemas para uma situação. É nos esquemas que se devem pesquisar os conhecimentos-em-ação do sujeito, uma totalidade dinâmica que organiza a ação do sujeito para uma classe de situações. É composto por objetivo, metas e antecipações, regras de ação, invariantes operatórios e inferências (VERGNAUD, 1993, 2009b, 2017a).

Para cada situação particular, o funcionamento dos esquemas depende das inferências, que permite gerar sequências de ações e tomadas de decisão, de acordo com as situações e suas variáveis. Assim, assume-se na Teoria dos Campos Conceituais o par teórico situação/esquema[4]. Um esquema é universal porque está associado a uma classe de situações, geralmente não definidas (VERGNAUD, 1993, 1996, 2009b, 2011).

As classes de situações se dividem em situações nas quais o sujeito dispõe, em seu repertório, em dado momento de seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias das competências necessárias, ao tratamento relativamente imediato da situação; e nas que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias. Os esquemas evocados para cada classe são diferentes, mas todos se apoiam em uma conceitualização implícita (VERGNAUD, 1993, 2017b).

Há muito de implícito nos esquemas, e sua confiabilidade está relacionada com o conhecimento que ele possui, das relações entre o algoritmo e o problema a resolver. Um algoritmo é um esquema, mas nem todo esquema é um algoritmo, pois não possui necessariamente um número finito de passos para chegar a uma resolução efetiva, sendo, geralmente, eficaz. Uma característica visível do caráter invariante da organização é a automatização, no entanto, ela não impede que o sujeito conserve o controle das condições às quais ela é adequada (VERGNAUD, 1993).

Embora a automatização se apresente como característica visível de um esquema, para que as condutas se automatizem, existe a necessidade de ação ao se deparar com uma

[4]Nesse contexto, Vergnaud (2011) opõe-se ao contexto behaviorista do par estímulo/resposta, e embora afirme ser inevitável pela sua generalidade, se distancia do par sujeito/objeto, de Piaget.

situação, a fim de construir ou se apropriar de um saber operatório. Para se identificar tais condutas, o processo que propicia o estudo dos esquemas leva em conta a interpretação da situação, o sujeito epistêmico, os registros de procedimentos, a validação de processos resolutivos e de respostas, o confronto com os colegas e a institucionalização pelo professor (VERGNAUD, 1986; MUNIZ, 2009).

2.4 Invariantes operatórios

Um esquema se relaciona com uma classe de situações, mas pode ser aplicado a uma classe mais restrita do que àquela para a qual ele seria eficaz, há, nesse caso, um problema de extensão para uma classe mais ampla. Nesse processo, há o reconhecimento de analogias e parentescos entre as classes nas quais o esquema já é operatório e nas situações a resolver, e reconhecer os invariantes é o que possibilita a generalização do esquema. Os conhecimentos contidos nos esquemas são os invariantes operatórios. Tais invariantes se dividem em teoremas-em-ação (proposições, com alcance local), conceitos-em-ação (funções proposicionais, com a presença de quantificadores), de relação dialética (VERGNAUD, 1993, 2009b, 2017a).

Há ainda os argumentos que compõem as proposições e as funções proposicionais. Em Matemática, uma proposição é uma sentença declarativa à qual se atribui um valor lógico. Ela é verdadeira ou falsa, e uma função proposicional envolve variáveis. O teorema-em-ação não é um teorema científico verdadeiro, e o conceito-em-ação tampouco, mas ambos podem tornar-se (DOMINGUES; IEZZI, 2018, ZANELLA; BARROS, 2014).

A conceitualização do real não é, em sua totalidade, ação operatória, pois um enunciado totalmente implícito não permite validação. Existe, portanto, a necessidade de identificar aspectos do real presente nas palavras, enunciados, símbolos e sinais, sendo necessário à conceitualização o emprego dos significantes explícitos. Não sendo reduzido a uma definição, um conceito adquire sentido através das situações e dos problemas a resolver. Assim, um conceito, além dos invariantes operatórios e do conjunto de situações com as quais se relaciona, necessita de uma representação (VERGNAUD, 1993).

2.5 Campo conceitual

Um conceito envolve, segundo Vergnaud (1993, 2017a) uma terna de três conjuntos:

(S, I, R[5]):

---

[5] R é apresentado em outros textos por outros símbolos, como L e Y com o mesmo significado.

- S: o conjunto de situações que dão sentido ao conceito (referência);
- I: o conjunto de invariantes que constituem as diferentes propriedades do conceito (significado);
- R: conjunto das formas de linguagem (ou não) que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (significante).

Uma situação é composta de várias tarefas e muitos elementos. Cada um desses elementos podem ser pensados como subtarefas, ou seja, uma situação é uma combinação de tarefas de natureza e dificuldades conhecidas, não sendo a dificuldade de uma subtarefa a soma nem o produto de suas subtarefas[6], embora o fracasso em uma subtarefa provoque o fracasso da tarefa por completo (VERGNAUD, 1993, 2017b).

Como uma única situação não põe necessariamente em ação todas as propriedades de um conceito, então há urgência de fazer referência a uma classe de problemas para que os estudantes possam compreender tais propriedades. É, portanto, necessária uma diversidade de situações para trabalhar um conceito. De forma análoga, uma situação não é solucionada por um único conceito, sendo necessário, na maior parte das vezes, vários conceitos, cujas dificuldades internas são aparentes na resolução da situação. Para além, a formação de um conceito cobre um período de longo prazo, com uma diversidade de interações e desníveis (VERGNAUD, 1986, 2011).

O sujeito dá sentido às novas situações e novos conceitos aplicando, adaptando uma mistura de situações, definições, interpretações e representações simbólicas que formaram suas concepções e competência ao longo dos anos. Assim, devem ser tomados como objetos de estudo campos conceituais, a fim de compreender o processo complexo e laborioso pelo qual se constrói o conhecimento. Não faz sentido falar da formação de conceito, mas sim da formação de um campo conceitual. Um campo conceitual envolve um conjunto de situações cujo domínio demanda uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas conectadas, cuja descrição requer ao mesmo tempo a análise das situações, dos procedimentos e tratamentos utilizados pelos estudantes, dos propósitos, argumentações e representações simbólicas que utilizam (VERGNAUD, 1986, 2011, MAGINA; MERLINI; SANTOS, 2016).

[6]Aqui a imbricação entre campos conceituais faz sentido, pois temos como hipótese que as dificuldades encontradas em uma expressão numérica, por exemplo, vão além das dificuldades encontradas nas quatro operações, de forma disjunta.

2.6 Representações

A Teoria dos Campos Conceituais não é uma teoria do Campo das Linguagens, mas não exclui o papel da linguagem e do simbolismo na conceitualização. Tendo como primeira função a comunicação, a linguagem funciona na aprendizagem de forma a tornar explícito o que estava implícito, e publicizar, permitindo submeter ao debate e à prova; também tem a função de acompanhar e ajudar o pensamento na identificação de propriedades, relações, objetos, e programar o controle da ação; e a contribuição para a transformação do status de conhecimento. Tendo como significados os esquemas e os invariantes, e também a linguagem natural e outros simbolismos, os quais estão intimamente relacionados aos esquemas, assim, uma situação dada evoca em um indivíduo todos os esquemas disponíveis (VERGNAUD, 1991, 1993, 2017b).

O sentido de uma situação em um campo conceitual não é o sentido do campo conceitual, tampouco o sentido de um símbolo particular. Quando se nomeia o sentido de uma palavra, se está recorrendo a um subconjunto de esquemas. Desta forma, a linguagem tem uma função tríplice na Teoria dos Campos Conceituais: ajuda à identificação dos invariantes, ao raciocínio e inferência, a antecipação dos efeitos e metas, planejamento e ao controle da ação, tendo ainda a função de mediação: como transmissão da cultura, como mediação do professor em sala de aula e por último, com a linguagem e os sistemas simbólicos (VERGNAUD, 1985, 1993).

2.7 Forma Operatória e Forma Predicativa do conhecimento

O conhecimento pode ser operatório ou predicativo. Na forma operatória do conhecimento o sujeito age sobre a situação, podendo ter sucesso. Na forma predicativa, o sujeito revela objetos de pensamento, relações e propriedades referentes ao operatório (VERGNAUD, 2007).

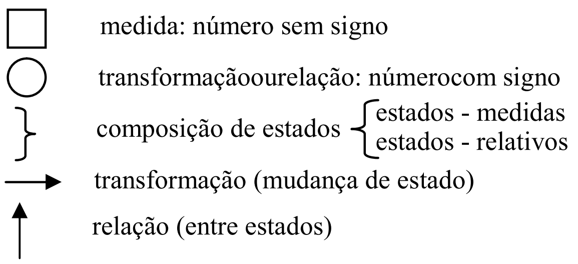
Segundo Greca e Moreira (2003), ao operar com determinados conceitos, os estudantes usam somente invariantes operatórios, sabendo quais elementos considerar, propriedades aplicar, mas não conseguindo explicitar porque o fazem, usando os conceitos como instrumento, e somente a parte operacional dos significados do conceito, porém o significado é mais que a parte operacional, e o conceito não se resume ao seu significado. Portanto, ao mesmo tempo em que os invariantes operatórios constituem a forma operatória do conhecimento, pela ação na situação, eles podem ter o suporte da representação para expressar uma forma predicativa, que permite generalização e produção de novos esquemas.

2.8 Estruturas Aditivas

Vergnaud (2009a) discorre sobre as estruturas aditivas[7], contemplando suas classes e tipos de situações. Os esquemas contidos no Campo Conceitual Aditivo dizem respeito a situações ternárias, contemplando dois elementos e uma relação, ou três relações. O campo conceitual aditivo, ou das estruturas aditivas, corresponde, portanto ao "conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias adições ou subtrações, e o conjunto de conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações como tarefas matemáticas" (VERGNAUD, 1990, p. 141), ou seja, "estruturas cujas relações em jogo são formadas exclusivamente por adições ou subtrações" (VERGNAUD, 2009a, p. 197).

Vergnaud (2009a) classifica os problemas das estruturas aditivas conforme suas relações e medidas, sendo estas representadas por diagramas que traduzem as relações existentes nas situações, tais diagramas possuem elementos acessíveis para leitura, conforme legenda disposta na Figura 8.

Figura 8– Legenda para a leitura dos diagramas de classe dos Campos Conceituais



Fonte: Vergnaud (1986, p. 86).

Magina *et al.* (2008) sintetizam tais classes, e os autores que organizaram os recursos didáticos da Fundação Vale (2015) sugerem, em um curso para professores, os verbos usuais em cada classe de problemas nas estruturas aditivas, sendo eles: acrescentar ou tirar para problemas de transformação, juntar ou separar para problemas de composição, e comparar para problemas de comparação.

2.8.1 Composição de medidas

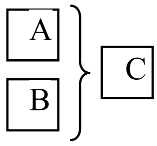
A classe dos problemas de composição de medidas envolve as ideias de juntar, separar ou completar partes entre si para compor o todo (FUNDAÇÃO VALE, 2015), ou ainda separar uma parte do todo para encontrar a outra parte. Seu diagrama é representado pela composição das partes para formar o todo, conforme Figura 9. Um exemplo é: No estojo

---

[7]Estrutura aditiva é sinônima de Campo Conceitual Aditivo.

amarelo tem três canetas e no estojo azul tem oito canetas. Quantas canetas têm nos dois estojos? Neste caso, as quantidades de canetas são medidas estáticas, a situação não demanda um acréscimo ou diminuição, mas o cálculo do total de canetas.

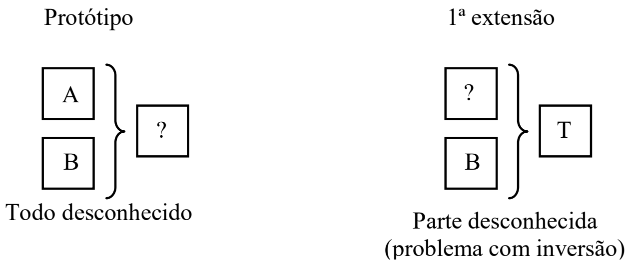
Figura 9– Diagrama da Estrutura Aditiva – Classe composição de medidas



Fonte: Vergnaud (2009a).

Magina *et al*. (2008) organizam protótipos e extensões para cada classe do Campo Conceitual Aditivo. No caso da Composição de Medidas, o protótipo diz respeito às situações nas quais se conhecem as partes e se busca o todo, e a extensão às situações nas quais se conhece uma das partes e o todo, e se busca a parte desconhecida, conforme Figura 9. Exemplos são

Figura 10 – Classe composição de medidas - protótipo e extensão

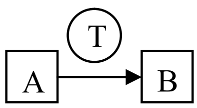


Fonte: Magina *et al.* (2008, p.51).

2.8.2 Transformação de medidas

A classe dos problemas de transformação de medidas envolve a ideia de acrescentar ou diminuir (FUNDAÇÃO VALE, 2015), em situações em que a ideia temporal está sempre envolvida, com um estado inicial, que tem uma quantidade que se transforma, chegando ao estado final com outra quantidade, como em: Tenho três canetas e ganho oito canetas. Com quantas canetas eu fico? Neste exemplo, o estado inicial é de 3 canetas, a transformação é ganhar 8 canetas, e o estado final é desconhecido (MAGINA *et al*., 2008), conforme Figura 11.

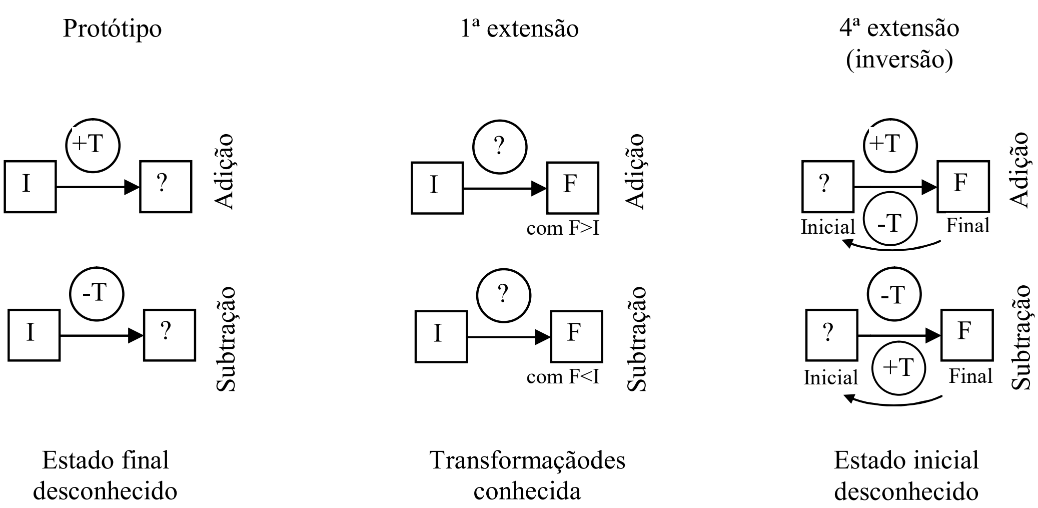
Figura 11 – Diagrama da Estrutura Aditiva – classe transformação de medidas



Fonte: Vergnaud (2009a).

Para a classe de transformação de medidas, o protótipo diz respeito às situações nas quais se conhecem o estado inicial e a transformação, mas não se conhece o estado final; estes valem tanto para transformações para menos como para mais. As extensões dizem respeito aos casos nos quais as transformações são desconhecidas ou o estado inicial é desconhecido, conforme Figura 12 (MAGINA *et al*., 2008).

Figura 12 – Classe transformação de medidas – protótipo e extensões

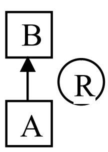


Fonte: Magina *et al*. (2008, p.51).

2.8.3 Comparação de medidas

A classe dos problemas de comparação de medidas, como o verbo indica, envolve a ideia de comparar (FUNDAÇÃO VALE, 2015). Essa classe diz respeito aos problemas que "comparam duas quantidades, uma denominada de referente e a outra de referido". (MAGINA, *et al*. 2008, p.25 - 26), sendo a comparação entre dois grupos, parte-se do grupo de referência (referente) A, para chegar, mediante a relação de comparação, ao valor do outro grupo (referido) B, como no exemplo: No estojo amarelo tem três canetas e no estojo azul tem oito canetas. Quantas canetas o estojo azul tem a mais que o estojo amarelo? A relação de comparação "quantos a mais", liga a quantidade de canetas no estojo azul e no estojo amarelo.

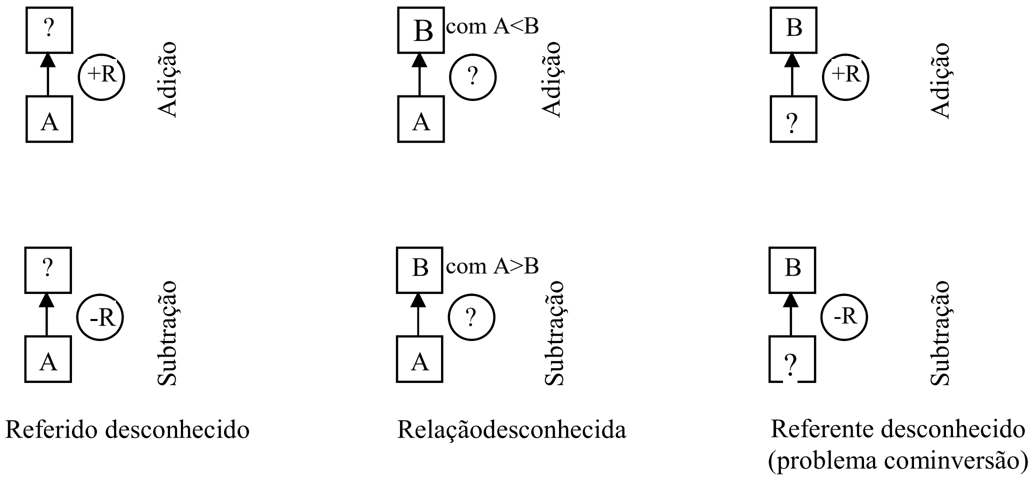
Figura 13 – Diagrama da Estrutura Aditiva – classe comparação de medidas



Fonte: Vergnaud (2009a).

Para a classe de comparação de medidas, Magina *et al*. (2008) descrevem possíveis extensões, as quais dizem respeito ao referido desconhecido, relação desconhecida e referente desconhecida, com diferenciações entre os sinais, conforme Figura 14.

Figura 14 – Extensões da comparação de medidas



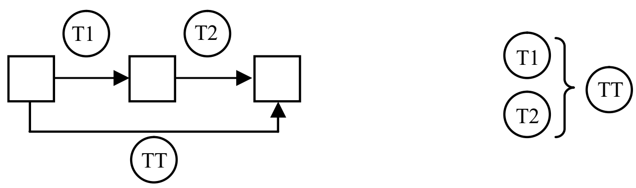
Fonte: Magina *et al*. (2008, p.51)

Além das operações com medidas, Vergnaud (2009a) explicita classes entre os estados relativos, como a composição de estados relativos e a transformação de estados relativos. Ao relacionar duas classes, temos problemas complexos, os quais são compostos de mais de uma das classes supracitadas.

2.8.4 Composição de transformações

É a classe na qual duas transformações se compõem para resultar em uma transformação total, consiste em situações com mais de uma transformação (T1, T2, ...), sendo a transformação total das mesmas (TT) uma composição de estados relativos. A Figura 15 apresenta, em duas partes, seu diagrama, sendo o primeiro o da transformação propriamente dita e o segundo da composição de suas relações, um exemplo é: Eu tinha três canetas, ganhei oito e perdi cinco. Com quantas canetas fiquei?

Figura 15– Diagrama da Estrutura Aditiva – classe composição de transformações

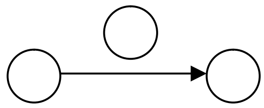


Fonte: Magina *et al*. (2008, p. 60).

2.8.5 Transformação de estados relativos

Nesta classe, a transformação opera sobre um estado relativo (uma relação) para resultar em outro estado relativo, como em: Eu tinha 3 canetas, ganhei oito e perdi cinco. Quantas canetas eu ganhei ao total? Podemos observar seu diagrama na Figura 16.

Figura 16 – Classe de transformação de estados relativos

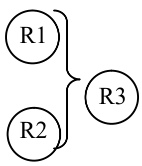


Fonte: Vergnaud (2009a).

2.8.6 Composição de estados relativos

A composição de estados relativos gera outro estado relativo, no qual as medidas estáticas não são levadas em conta, apenas as relações entre elas. A Figura 17 apresenta o diagrama desta classe. Um exemplo é: Eu ganhei três canetas. Você ganhou oito canetas. Quantas canetas nós ganhamos?. Neste caso, as quantidades de canetas que cada um de nós tinha não é levada em conta. Repare que são dois conjuntos diferentes, meus ganhos e seus ganhos, assim, não gera uma composição de transformações, pois as relações são em conjuntos diferentes.

Figura 17 – Classe de composição de estados relativos



Fonte: Vergnaud (2009a).

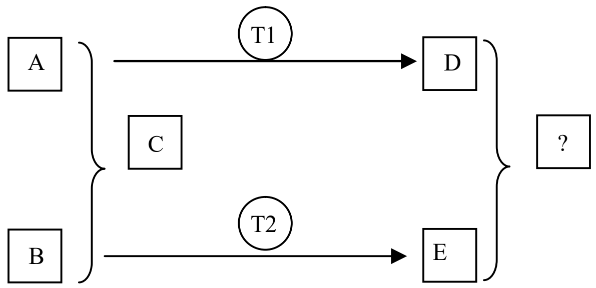
As classes de composição de medidas, transformação de medidas e comparação de medidas permitem descrever a situação de um ponto de vista de estrutura representativa, para além do algoritmo da adição, no entanto, nem sempre uma situação aditiva possui apenas uma dessas classes, necessitando pensamentos mais elaborados para sua resolução. Um exemplo é a classe da transformação de composições, denominada problema complexo[8].

[8]Magina *et al.* (2008) classificam como problemas mistos os que envolvem "mais de um raciocínio aditivo na mesma situação" (p. 61). Vergnaud (2009) denomina de problemas complexos aqueles que, dentro de uma estrutura, possuem mais de uma relação elementar envolvida, e de problema misto o problema que envolve relações aditivas e multiplicativas ao mesmo tempo (p. 269). Arrais (2006) chama de estruturas mistas a uma classe particular de problemas, nos quais "teremos Estrutura Aditiva e Estrutura Multiplicativa ocorrendo concomitantemente" (p. 6). Nós seguiremos a nomenclatura de Vergnaud (2009).

2.8.7 Transformação de composições

A transformação de composições é a classe na qual duas medidas se compõem e resultam em uma terceira. A cada medida é operada uma transformação para resultar em duas novas medidas, que comporão uma sexta, como em No estojo amarelo tinha três canetas e no estojo azul tinha oito canetas. Coloquei duas canetas no estojo amarelo e uma caneta no estojo azul. Quantas canetas tem agora nos dois estojos?

Figura 18 – Diagrama da classe transformação de composições

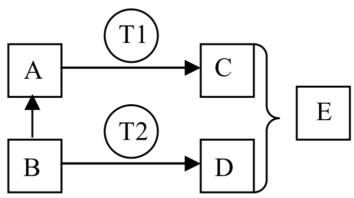


Fonte: Magina *et al*. (2008, p. 55).

2.8.8 Comparação com transformação de composições

As situações do tipo comparação com transformação de composições unem as três principais classes das estruturas aditivas. Nelas, duas medidas se compõem e resultam em uma terceira. A cada medida é operada uma transformação para resultar em duas novas medidas, que comporão uma quarta, e há uma relação entre a terceira e a sexta medidas, conforme pode ser observado na Figura 19. Um exemplo é: No estojo amarelo tinha três canetas e no estojo azul tinha 5 canetas a mais que no amarelo. Coloquei duas canetas no estojo amarelo e uma caneta no estojo azul. Com quantas canetas fiquei ao total?

Figura 19–Diagrama da classe comparação com transformação de composições

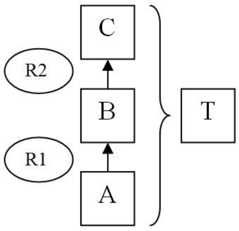


Fonte: adaptado de Magina *et al.* (2008, p. 57).

2.8.9 Composição de comparações

A classe de composição de comparações envolve múltiplas comparações entre as partes, sendo a junção das mesmas a composição que resulta no todo. A Figura 20 apresenta o diagrama que, além das relações de comparação, apresentadas em elipses, contempla a composição.

Figura 20 – Diagrama da Estrutura Aditiva – Classe composição de comparações



Fonte: adaptado de Magina *et al*. (2008, p. 60).

Esta classificação permite um estudo mais detalhado sobre as situações possíveis ao se trabalhar adição, bem como uma preocupação em ampliar o repertório de situações para o desenvolvimento e construção do conceito de adição.

2.9 Estruturas Multiplicativas

O campo conceitual das estruturas multiplicativas diz respeito a todas as situações cujo tratamento implica uma ou várias multiplicações ou divisões, bem como os conceitos e teoremas que permitem analisar estas situações. A aproximação com o Campo Conceitual Aditivo está em trabalhar a multiplicação como adição de parcelas iguais, ou a divisão como subtrações sucessivas, no entanto, há a necessidade de uma ruptura, no sentido de trabalhar outras perspectivas da multiplicação (VERGNAUD, 1990). O conceito de multiplicação envolve uma diversidade de situações que contemplam relações ternárias e quaternárias, cujas classes são esquematizadas no Quadro 2.

Quadro 2 – Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo

<table>
<tr><th colspan="8">Estrutura multiplicativa</th></tr>
<tr><td>Relações</td><td colspan="3">Quaternária</td><td colspan="4">Ternária</td></tr>
<tr><td>Eixos</td><td>Proporção simples</td><td>Proporção dupla</td><td>Proporção múltipla</td><td colspan="2">Comparação multiplicativa</td><td colspan="2">Produto de medidas</td></tr>
<tr><td>Classes</td><td colspan="3">Um para muitos ou Muitos para muitos</td><td>Relação desconhecida</td><td>Referente ou referido desconhecido</td><td>Configuração retangular</td><td>Combinatória</td></tr>
<tr><td>Tipos</td><td colspan="3">Discreto ou Contínuo</td><td colspan="2">Discreto ou Contínuo</td><td>Contínuo</td><td>Discreto</td></tr>
</table>

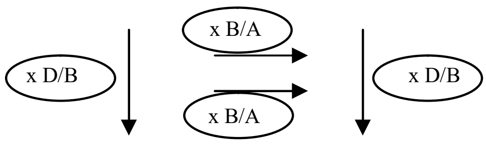
Fonte: Magina, Merlini e Santos (2016, p. 69).

Vergnaud (1993) afirma que existe uma grande diferença entre a análise das estruturas aditivas e multiplicativas, cujas relações de base mais simples são quaternárias. Relações quaternárias “entre quatro quantidades, duas medidas de um tipo e duas medidas de outro tipo” (VERGNAUD, 2009, p. 239), contemplam os eixos de proporção simples, no qual quatro medidas relacionam-se duas a duas; proporção dupla, no qual pelo menos três grandezas são comparadas, sendo duas independentes, relacionadas à terceira, e proporção múltipla, no qual pelo menos três grandezas se relacionam entre si.

2.9.1 Eixo proporção simples

Ao se comparar medidas de mesma grandeza, obtém-se a constante de proporcionalidade chamada operador escalar, sem dimensão; e comparando-se duas grandezas diferentes, o operador funcional, com uma dimensão traduzida pela razão das que o compõem. No diagrama para a proporção simples, Figura 21, está ilustrada na vertical a razão que resulta no operador escalar e na horizontal o operador funcional.

Figura 21 – Diagrama da Estrutura Multiplicativa – Eixo proporção simples



Fonte: adaptado de Vergnaud (2009a).

O operador funcional terá a unidade v2/v1, e o operador escalar, por ser a razão entre duas medidas de mesma grandeza, não tem unidade, podendo ser pensado como estratégia ou co-variação (NUNES; BRYANT, 1997, SANTOS, 2015). Tal relação gera quatro classes de problemas elementares: multiplicação, divisão – partição, divisão por quotas e quarta proporcional (VERGNAUD, 1993; 2009a), conforme Figura 22.

Figura 22 – Classes de problemas elementares de proporção simples

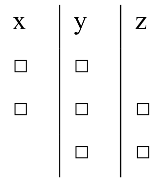
1	a	1	□	1	a	1	a
b	□	b	c	□	c	b	□
multiplicação		divisão-partição		divisão por quotas		quarta proporcional	

Fonte: Vergnaud (1993, p. 15).

2.9.2 Eixo proporções múltiplas

Ainda nas relações quaternárias, as proporções múltiplas são relações nas quais há interdependência entre todas as variáveis, e que ligam as variáveis duas a duas. As relações de proporção simples, múltipla e dupla não conduzem aos mesmos problemas cognitivos, sendo que a proporção múltipla se faz por combinação e a dupla se faz por encadeamento das funções que ligam as variáveis duas a duas: x proporcional a y, y proporcional a z, (VERGNAUD, 2013; SANTOS, 2015) conforme Figura 23.

Figura 23 – Diagrama referente à proporção múltipla

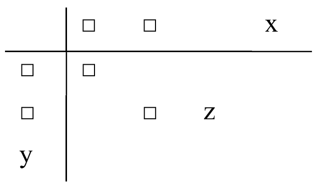


Fonte: Vergnaud (2013, p. 15).

2.9.3 Eixo proporções duplas

Uma proporção dupla é uma relação quaternária envolvendo mais de duas quantidades que se relacionam duas a duas, por produto z proporcional a x e a y; x e y independentes entre si, com proporções independentes, ligadas por uma variável comum (VERGNAUD, 1993; SANTOS, 2015, ARAGÃO; LAUTERT; SCHLIEMANN, 2022), conforme Figura 24.

Figura 24 – Diagrama referente à proporção dupla

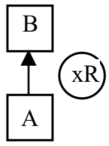


Fonte: Vergnaud (1993, p. 15).

2.9.4 Eixo comparação multiplicativa

Os problemas de relações ternárias englobam produto de medidas e comparação multiplicativa, cujas situações remetem a quantas vezes mais e quantas vezes menos, com referente, referido ou relação desconhecida. O diagrama é análogo à comparação aditiva, porém o sinal x ou ÷ aparece junto à relação, como pode ser observado na Figura 25.

Figura 25 – Diagrama da relação ternária de comparação multiplicativa

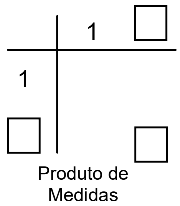


Fonte: Gitirana *et al*. (2014).

2.9.5 Eixo produto de medidas

Os problemas de produto de medidas envolvem "três quantidades, das quais uma é o produto das outras duas ao mesmo tempo no plano numérico e dimensional" (VERGNAUD, 2009, p. 253). São divididas entre combinatória (discreto) e configuração retangular (contínuo). Também são chamadas de produto de medidas, e seu diagrama pode ser observado na Figura 26.

Figura 26 – Diagrama da relação ternária de produto de medidas



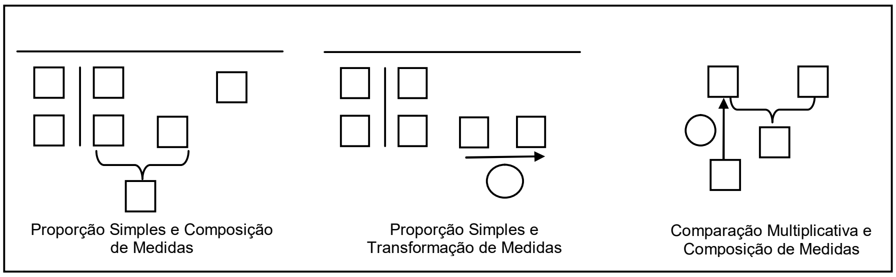
Fonte: Vergnaud (2009a).

2.10 Problemas mistos

As expressões numéricas trabalhadas no 6º ano podem abarcar as quatro operações, sinais de associação e respeitar as regras de prevalência. Vergnaud (2009a) afirma que problemas mistos contemplam as operações de multiplicação e/ou divisão e de adição e/ou subtração ao mesmo tempo. Segundo Santos (2015), os problemas mistos são formados pelas classes, eixos e relações, contidas em cada estrutura.

Uma das representações propostas por Vergnaud (2009a) para problemas mistos é a de quadro, na qual as grandezas envolvidas são descritas nas primeiras linhas e colunas e as relações entre as mesmas nas outras células, permitindo observar as suas diferentes conexões. Miranda (2019) estuda problemas mistos em livros didáticos, descrevendo uma classificação de problemas mistos associados à função afim, a partir das classes de estruturas aditivas e multiplicativas de Vergnaud (2009a), compondo 30 possibilidades de problemas mistos. No Quadro 3 podemos observar os diagramas produzidos por Miranda (2019) para as classes de problemas mistos presentes nos livros que fizeram parte do seu *corpus* de estudo.

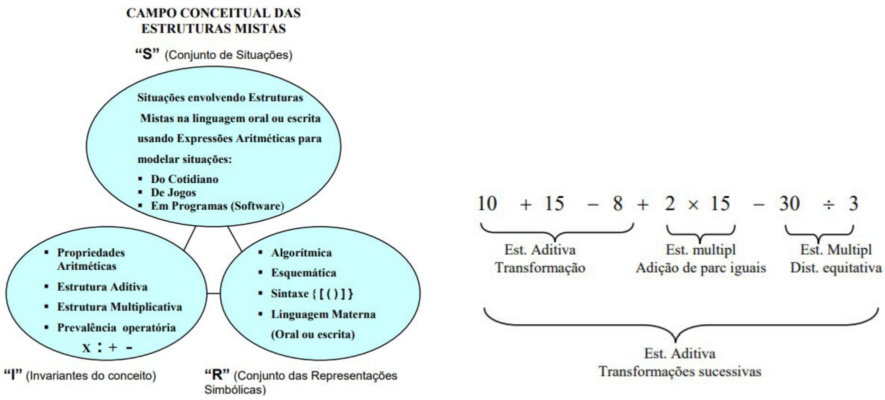
Quadro 3 – Diagramas de problemas mistos



Fonte: adaptado de Miranda (2019).

Embora Arrais (2006) assinale como problema misto um problema puramente aditivo, diferentemente de nossa compreensão, o autor propôs o duplo campo conceitual das estruturas mistas, para expressões aritméticas com as quatro operações, indicando os seus invariantes operatórios, situações e representações, como podemos observar na Figura 27.

Figura 27 – Diagrama e exemplo de caso do Campo Conceitual das Estruturas Mistas, segundo Arrais (2006)



Fonte: Arrais (2006, p.11; 121).

Não compreendemos as expressões aritméticas ou expressões numéricas como duplo campo conceitual, mas como possibilidade de imbricação dos campos aditivo e multiplicativo, ao trabalhar com problemas mistos (MIRANDA, 2019; REZENDE; NOGUEIRA; CALADO, 2020).

2.11 Imbricações

Uma imbricação é uma relação na qual os campos conceituais se articulam e geram novos significados, mediante uma interconexão dinâmica, com uma sobreposição mútua. A resolução das situações imbricadas exige que os sujeitos alternem entre os significados dos campos conceituais e lhes articulem (TELES, 2008).

A escrita dos problemas mistos, em sua forma simbólica, exige do sujeito uma compreensão da ordem das operações. Temos a hipótese que a escrita de um problema misto e sua resolução na forma simbólica é realizada de forma coerente quando os estudantes compreendem os sentidos das operações nele existentes, e quando isso ocorre, há uma imbricação entre o Campo Conceitual Aditivo e o Campo Conceitual Multiplicativo, constituindo um raciocínio diferente do necessário somente a um dos campos conceituais mencionados.

3 CAMINHOS DA PESQUISA

Descrevemos os caminhos da pesquisa a partir da problematização sobre a importância de estudar expressões numéricas, dos sentidos das operações e números que a compõem, nos questionamos sobre a imbricação entre o Campo Conceitual Aditivo e o Campo Conceitual Multiplicativo em uma expressão numérica como representação de um problema misto.

Apresentamos nossas inquietações, o método que utilizamos para buscar responder a essas questões e a estrutura da tese, como artigos que se complementam para atender aos objetivos propostos.

3.1 Justificativa e Problema

A importância de aprender expressões numéricas no Ensino Fundamental se dá em pelo menos três frentes: compreensão das quatro operações em sua completude, conhecimento da sintaxe matemática e iniciação à escrita simbólica/algébrica. Estas frentes são importantes, mas não suficientes: aprender expressões numéricas é mais que conhecer um algoritmo e aplicá-lo. Desenvolver um procedimento conhecendo os motivos das regras aplicadas e dando sentido ao fazer é parte do aprender. Representar uma situação utilizando o sistema de significantes da representação simbólica/algébrica prescinde uma relação entre os significantes e o significado atribuído a essa situação (VERGNAUD, 1985, SILVA, 2009, FREITAS, 2014, PAIM, 2018, VIEIRA, 2019).

Sobre a compreensão das quatro operações, as expressões numéricas são seu registro na forma simbólica, auxiliando na leitura e na representação destas para a escrita do enunciado e da solução dos problemas. Para além do “é de mais ou é de menos”, e das contas armadas, a organização textual de uma expressão numérica contribui para a organização do pensamento (FREITAS, 2014).

A expressão resume um problema e permite que o mesmo seja traduzido para a forma matemática, de forma a ser passível de resolução de forma simbólica, em um processo de descontextualização e recontextualização, com um caráter utilitário para simplificar a sua resolução. Para as razões do ordenamento serem compreendidas é necessário que tenham significado. Assim, para que se entendam as quatro operações matemáticas, é preciso compreender e representar tanto as situações aditivas quanto multiplicativas (NUNES; BRYANT, 1997, FREITAS, 2014).

A representação concisa e a ordem entre as operações fazem parte da sintaxe matemática, cuja compreensão proporciona ao estudante entender os processos que levam às ordenações e conhecer as convenções que permitem os agrupamentos nos sinais de associação. Associada à semântica, permite que se tenha um entendimento do que se está fazendo ao representar e calcular as expressões numéricas, e mais que entender o algoritmo ou decorar as regras do que fazer antes ou depois, a compreensão do significado de número na adição e multiplicação gera um sentido na sintaxe. É a escrita com regras explicadas e bem definidas, que fazem sentido e que se espera que estudantes do Ensino Fundamental consigam construir (ECHEVERRÍA; POZO, 1998, FREITAS, 2014).

A iniciação da escrita simbólica se dá tanto pelo conhecimento mais abrangente das quatro operações quanto pela escrita da sintaxe matemática. As propriedades do Corpo do Conjunto dos Números Reais se aplicam de forma a permitir a resolução das expressões numéricas, e posteriormente as expressões algébricas. Não vamos discutir o Campo Conceitual Algébrico, no entanto, dentre as crenças de professores sobre as expressões numéricas, está a preparação para a Álgebra, no sentido de organizar a escrita de uma forma simbólica (ARRAIS, 2006).

Se as expressões são tão importantes a ponto de instrumentalizar o pensamento na compreensão de problemas mistos, por que professores ainda ensinam o algoritmo desvinculado da situação? A resposta se dá tanto na tradição que inicia com o cálculo para depois aplicar em situações, que está intimamente atrelada à história do ensino de Matemática no país, como na crença de que quem aprendeu o algoritmo sabe o conteúdo, e as situações são interpretação de Língua Portuguesa (ALVES, 2005, ARRAIS, 2006).

Essas ideias são comunicadas aos estudantes através das práticas de sala de aula que eles vivenciam. É preciso avançar com propostas que contemplem o estudo das expressões numéricas como situações, bem como em estudos que compreendam como os estudantes constroem o pensamento perante essas situações (PARMEGIANNI, 2011, FREITAS, 2014).

Assim, propusemos uma pesquisa que contemplasse a resolução de um problema misto por estudantes do Ensino Fundamental, para estudar as expressões numéricas como possível imbricação entre o Campo Conceitual Aditivo e o Campo Conceitual Multiplicativo, entendendo uma imbricação como uma relação na qual os campos conceituais se articulam e geram novos significados, mediante uma interconexão dinâmica, com uma sobreposição mútua. A resolução das situações imbricadas exige que os sujeitos alternem entre os significados dos campos conceituais e lhes articulem (TELES, 2008).

3.2 Formato e estrutura da tese

Esta tese é formada por três estudos complementares e distintos acerca de expressões numéricas, tendo como aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

O primeiro estudo, descrito no capítulo quatro, consiste em um levantamento bibliográfico que descreve e categoriza como textos científicos brasileiros abordam as expressões numéricas, no período de 2000 a 2020. A produção de dados foi realizada em quatro fases, sendo a primeira em teses e dissertações, de forma recursiva, a segunda em periódicos listados em Educação Matemática, a terceira em eventos de relevância para a área e a última fase, em dois portais de periódicos. O levantamento bibliográfico corrobora para a importância do estudo do tema, contemplando uma diversidade de teorias e discussões sobre expressões numéricas, seus elementos e significações.

Considerando os livros didáticos como materiais importantes no suporte ao trabalho dos professores, trazemos no quinto capítulo o segundo estudo, que consiste em uma análise descritiva de como as expressões numéricas são retratadas em livros didáticos do 6º ano do Ensino Fundamental, a partir das estruturas aditiva e multiplicativa. São consideradas as situações contendo expressões numéricas de sete coleções dos livros didáticos de Matemática mais utilizados nas escolas públicas no 6º ano, mediante a Teoria dos Campos Conceituais e suas classes de situações.

O terceiro estudo é uma pesquisa quase-experimental com estudantes do 6º e 8º anos do Ensino Fundamental, em que o instrumento principal é formado por uma situação envolvendo problemas mistos, cuja representação pode dar-se na forma de expressões numéricas, com vistas a compreender a imbricação entre os campos conceituais aditivo e multiplicativo. É composto por quatro artigos, cujos enfoques são ordem das operações, processos de pensamento explicitados nas resoluções, representação e mobilização de expressões numéricas por estudantes do 6º e 8º anos de escolas públicas.

O primeiro artigo, desenvolvido no capítulo seis, estuda como os sujeitos resolvem uma expressão numérica descontextualizada e um problema misto que pode resultar nesta expressão numérica. Analisa a escrita e resolução referente à ordem das operações, os sinais de prevalência e os sinais de associação. O segundo artigo, detalhado no capítulo sete, refere-se às expressões numéricas resultantes dos processos de pensamento explicitados nas resoluções de um problema misto, bem como a organização em diagramas das estratégias organizadas pelos alunos, e das classificações possíveis para este problema em virtude da estratégia escolhida.

No capítulo oito, o terceiro artigo analisa o desenvolvimento das respostas dos estudantes ao problema misto, de forma a estudar os sistemas de significantes presentes em suas resoluções e entender como as imbricações entre os Campos Conceituais Aditivo e Multiplicativo podem se apresentar. O capítulo nove corresponde ao quarto artigo, que analisa as operações e sua estrutura, bem como os níveis hierárquicos de pensamento que levam à resolução de um problema envolvendo as estruturas aditivas e multiplicativas, ao ponto de haver imbricação entre as mesmas. A conclusão visa discutir as considerações dos artigos que compõem a tese, com vistas a atender os objetivos da mesma.

3.3 Método

Abordamos aqui uma visão geral da tese, que é composta por três estudos. O método de cada estudo está especificado nos artigos que o compõem.

3.3.1 Ética da pesquisa

Esta pesquisa segue a Instrução Normativa nº 06/2019 do Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal do Rio Grande - FURG e atende as indicações da Resolução n.º 510/2016 do Conselho Nacional de Saúde, bem como as demais disposições legais da ética em pesquisa nas Ciências Humanas. O Termo de Consentimento Livre e Esclarecido e o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido encontram-se nos Apêndices B e C.

3.3.2 Delineamento da pesquisa

Este estudo é uma pesquisa básica, qualitativa, de delineamento exploratório quanto ao objetivo, de caráter quase-experimental, que produz seus dados e análises por meio do Método Clínico. O delineamento, quanto ao objetivo, se caracteriza por uma pesquisa exploratória, pois analisa casos que estimulam a compreensão sobre os sentidos atribuídos aos números nas expressões numéricas (GIL, 2002).

Tem caráter quase-experimental porque embora trate com rigor e procedimentos de pesquisa experimental suas etapas, não possui um grupo de controle ou caráter aleatório, sendo dado seu rigor de amostra, em função do Método Clínico, pela exaustão (GIL, 2002, 2008).

3.3.3 Questões de pesquisa

A questão principal desta pesquisa é: Como estudantes de 6º e 8º ano do Ensino

Fundamental mobilizam os conhecimentos necessários para resolver situações que podem ser representadas por expressões numéricas contendo as quatro operações? Para responder esta questão, compusemos outras subquestões que nortearão o trabalho, a saber:

O que se entende por expressões numéricas em textos científicos brasileiros?

Como as situações envolvendo expressões numéricas são retratadas nos livros didáticos do 6º ano do Ensino Fundamental, a partir do enfoque da Teoria dos Campos Conceituais?

Como os estudantes estruturam a ordem das operações ao resolver uma expressão numérica na forma simbólica e como problema misto?

Quais os processos organizados por estudantes do Ensino Fundamental ao resolver uma situação de problema misto, com enfoque nas expressões numéricas?

Como estudantes do 6º e 8º ano do Ensino Fundamental representam um problema misto, mediante uma situação dada?

Como os elementos de uma expressão numérica se movimentam na escrita e na resolução de um problema misto, por estudantes do Ensino Fundamental?

3.3.4 Objetivo geral

Tendo como princípio a abordagem das expressões numéricas como possíveis imbricações entre os Campos Conceituais Aditivo e Multiplicativo, apresentamos um problema misto por meio de uma situação prática a ser representada na forma simbólica e resolvida por procedimentos que levam em conta o sentido dos números e operações, e as propriedades aritméticas dos conjuntos. Esta tese buscou **analisar as estratégias e processos de pensamento de estudantes de 6º ano e 8º ano em uma situação que pode ser representadas por expressões numéricas, por meio do Método Clínico, a fim de compreender como pode se dar a imbricação entre os Campos Conceituais Aditivo e Multiplicativo.**

3.3.5 Objetivos específicos

Compreender como textos acadêmicos brasileiros retratam as expressões numéricas, mediante pesquisa bibliográfica, a fim de organizar um panorama sobre a pesquisa e disseminação textual de expressões numéricas;

Descrever como as situações envolvendo expressões numéricas são retratadas nos livros didáticos do 6º ano do Ensino Fundamental, a partir do enfoque da Teoria dos Campos Conceituais;

Verificar como estudantes estruturam a ordem das operações ao resolver uma expressão numérica na forma simbólica e como problema misto;

Detalhar os processos organizados por estudantes do Ensino Fundamental ao resolver uma situação de problema misto, com enfoque nas expressões numéricas;

Identificar como estudantes do 6º ao 8º ano do Ensino Fundamental representam um problema misto mediante uma situação dada, a fim de compreender as imbricações entre os campos conceituais aditivo e multiplicativo;

Analisar como os elementos de uma expressão numérica se movimentam na escrita e na resolução de um problema misto, por estudantes do Ensino Fundamental, mediante Método Clínico Piagetiano.

3.3.6 Tese

Defendemos a tese que as expressões numéricas, como imbricações dos campos conceituais aditivo e multiplicativo, são compreendidas por estudantes de Ensino Fundamental quando suas situações forem representadas em linguagem simbólica e solucionadas nos diferentes significados que esses campos conceituais contemplam, e assim, tanto as relações de ordem quanto de operacionalização serão melhor compreendidas pelos estudantes.

3.3.7 Momento da Pesquisa

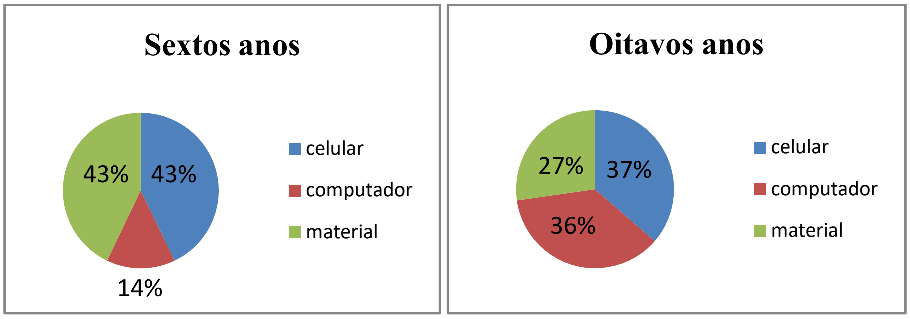
A pesquisa foi realizada durante a pandemia do Coronavírus – COVID-19, e as entrevistas foram adiadas até o momento em que foi possível realizá-las de forma presencial. Os protocolos de higiene foram seguidos: máscaras, *face shield*, álcool gel, distanciamento de 1,5m e higienização dos instrumentos de pesquisa a cada aplicação.

Os equipamentos de proteção dificultaram as questões de áudio, pois houve bloqueio de voz, tanto da pesquisadora quanto dos estudantes. As gravações em vídeo facilitaram a análise, pois é possível manipular e diminuir os ruídos para entender o conteúdo dos vídeos.

Para além das questões sanitárias, o confinamento e as aulas remotas tiveram um impacto na aprendizagem dos estudantes. Embora não faça parte das nossas questões de pesquisa, é necessário afirmar que os alunos do 6º ano estavam no 3º ano antes da pandemia, e realizaram as aulas de forma remota no 4º e no 5º ano, e os alunos do 8º ano estavam no 5º ano antes da pandemia, e realizaram as aulas remotas no 6º e no 7º ano.

Uma das perguntas de identificação dos sujeitos se referiu aos meios de acesso às aulas remotas durante o período de confinamento. Dentre os recursos utilizados estiveram os materiais buscados na escola e o acesso via meios digitais, como celular ou computador. A Figura 28 retrata por quais vias os alunos tiveram acesso às aulas no período de ensino remoto.

Figura 28 – Meios de acesso às aulas remotas pelos estudantes da pesquisa



Fonte: dados da pesquisa.

Embora a maior parte dos estudantes tenha acesso às aulas por meios digitais, há que se considerar uma boa parcela que utilizou materiais impressos disponibilizados pelas escolas. Nem todos tiveram as mesmas condições de aprendizagem, e isso é um fator que deve ser levado em consideração.

Em virtude deste momento incomum, e dos resultados apresentados tanto no estudo piloto quanto no andamento da pesquisa com os 6ºs anos, acrescentamos turmas de 8º ano em nosso Público-alvo. Mantivemos os nomes dos alunos em sigilo, optando por uma identificação em ordem alfabética e nomes com quatro letras.

A produção de dados se deu durante a Pandemia pelo Coronavírus – COVID-19. Conforme já citado, as crianças do sexto ano tiveram aula presencial até o terceiro ano, estudando o quarto e o quinto anos em casa, a partir de material escrito coletado nas escolas, ou por acesso via celular ou computador, compartilhados entre os familiares. Percebemos, como Campos, Perin e Pita (2022), a impossibilidade da adoção eficaz do ensino remoto pela escola pública, pela falta de acesso dos alunos aos recursos de comunicação necessários, com fortes prejuízos para os estudantes.

Para além de se adaptar a novas formas de conviver, aprender e ensinar, os estudantes foram prejudicados tanto na possibilidade de obter um material de qualidade quanto na necessidade de socialização de ideias. Para além da construção individual dos conhecimentos, o diálogo e a interposição de diferentes conhecimentos foram impossibilitados pelo confinamento. Muito embora tentativas de aulas síncronas por meios digitais tenham ocorrido, boa parte das crianças entrevistadas não tiveram acesso a meios digitais para acompanhamento de aulas.

A pandemia refletiu de forma impactante na pesquisa também nas entrevistas, as quais foram adiadas até as doses de reforço da vacina serem disponibilizadas. Os equipamentos de proteção como máscara, *face shield* e álcool gel foram constantemente utilizados. As gravações ficaram com volume baixo e com som não muito claro, devido ao uso de tais equipamentos.

3.3.8 Participantes da pesquisa

Ao final dos anos iniciais, espera-se que as crianças já tenham algum domínio sobre as quatro operações, e que possam resolver adequadamente expressões que envolvam tanto os sinais de associação quanto as regras de prevalência, por isso o público alvo da pesquisa é de adolescentes de 6º ano do Ensino Fundamental.

Inicialmente pensamos nos alunos do 6º ano, mas devido à pandemia do Coronavírus, as condições de aprendizagem não foram as consideradas normais antes do confinamento. Assim, ampliamos nossa margem de escolarização para 6º e 8º ano.

A abordagem foi realizada de forma individual e presencial, após nos vacinarmos com as duas doses da vacina contra o COVID-19. Utilizamos o Método Clínico Piagetiano, mediante coleta/produção, realizada por observação e entrevista clínica com o uso de resolução de situações com materiais manipuláveis, filmadas e posteriormente transcritas. As instituições parceiras são escolas da rede pública municipal e estadual do município de Pelotas.

Tem-se tomado por base para definição do número de participantes um método de saturação. A saturação é a coleta de dados que se realiza até que não haja mais dados novos. Aplica-se a entrevista em conjuntos de, aproximadamente cinco participantes e observa-se os dados até que se perceba a inexistência de novos processos, conceitos ou daquilo que se tem por foco de investigação.

3.3.9 Método Clínico

De acordo com a perspectiva epistemológica do pesquisador, a escolha de instrumentos de pesquisa, bem como da perspectiva metodológica de forma mais geral e das condutas de análise, é produzida. Para Silva e Bertolucci (2021), tais epistemologias são percebidas na escolha da forma com as quais os pesquisadores organizam e põem em ação as entrevistas com crianças. Segundo os autores, para estudos aprioristas, que levam em consideração a ideia do conhecimento ser proveniente do indivíduo e de sua capacidade inata de conhecer, a metodologia de entrevista coerente com a descoberta do que há no indivíduo são os testes de prontidão, bem como a busca pelos que mais se destacam, a fim de estimular o talento. No caso das perspectivas empiristas, Silva e Bertolucci (2021) afirmam que em virtude da ideia empirista afirmar que o conhecimento está fora do sujeito, no ambiente, ensinar envolve principalmente aprender métodos diretivos que mobilizem estímulos com os quais o aluno apreenda tal conhecimento, de forma a condicionar respostas e condutas, sendo coerentes testagens e aferição, cujos questionários e protocolos estruturados são importantes para verificar o que o sujeito já sabe ou pode armazenar. Ambas perspectivas são deterministas. Por outro lado, a epistemologia construtivista, em seus instrumentos de pesquisa, busca conhecer como o sujeito desenvolve operações lógicas sobre o objeto investigado. O construtivismo, para Silva e Bertolucci (2021),

> é a ideia de que nada está fortemente determinado pelo meio ou pela hereditariedade, mas de que o conhecimento se constrói a partir da interação entre sujeito e seus objetos de conhecimento. Assim, há um reconhecimento da influência ambiental e da existência de estruturas inatas, mas há a compreensão de que o conhecimento constrói-se a partir não da soma ou união, mas da interação entre essas condições (2021, p. 351).

Não há garantia de aprendizagem, mas sim estruturas inatas e ambientais que dão condições de possibilidade para que a mesma ocorra. Experiências particulares, subjetividades e ações sobre o mundo são tomados como parâmetro para os processos construtivos, sendo o pensamento entendido como capacidade de raciocinar e empreender operações lógicas (Silva e Bertolucci, 2021), e para analisar tais operações é necessário não ter enfoque no resultado final de uma proposição, mas na construção do raciocínio, com protocolos de entrevista visando mapear os movimentos iniciais, intermediários e finais de estruturação de uma compreensão. Grossi (2017) situa a Teoria dos Campos Conceituais como pós-construtivista, estabelecendo um terceiro elemento, denominado Outro, na relação aprendente-realidade, o que corrobora com a ideia de mediação em linguagem defendida por Vergnaud (1993). Assim, a utilização do método clínico é a mais coerente com a proposta desta tese.

Segundo Delval (2002),

> o método clínico é um procedimento de coleta e análise de dados para o estudo do pensamento da criança (embora também se aplique ao estudo do pensamento dos adultos) que se realiza mediante entrevistas ou situações muito abertas, nas quais se procura acompanhar o curso do pensamento do sujeito ao longo da situação, fazendo sempre novas perguntas para esclarecer respostas anteriores (2002, p. 12).

O método clínico permite que o sujeito explicite o pensamento na medida em que aponta quais opções toma ao desenvolver uma ação. O método indica também as ações do pesquisador, e permite uma análise detalhada e rigorosa dos dados produzidos. Delval (2002) destaca a importância do planejamento para o método clínico, desde coletar os dados mediante entrevista clínica, evitando incorrer em uma série de erros.

Após as entrevistas, os dados foram organizados em classes de acordo com as variáveis de análise de cada artigo. As classes foram discutidas pelo grupo de pesquisa, de modo a validar e reorganizar a pertinência de cada uma.

3.3.10 Estudo Piloto

O estudo piloto foi realizado com seis estudantes do 6º ano. Foram aplicados dois instrumentos. O primeiro instrumento[9] foi a aplicação oral de um problema que se caracterizou pela montagem de um lanche por um aluno, para seu colega, conforme instruções contidas em um cardápio. O colega deveria escrever e resolver o cálculo resultante do custo do lanche. O material utilizado foram três hambúrgueres de brinquedo, com acompanhamentos, e um cardápio contendo os preços de cada opção, conforme Figura 29.

Figura 29 – Material de Apoio para a resolução do problema misto

Fonte: dados da pesquisa.

A montagem do lanche foi feita por um membro da dupla, e o cálculo do preço pelo outro membro. Cada item pode ser triplicado, e o único obrigatório é o X-Burguer. Assim, o valor mínimo é de R$11,00 e o máximo de 266,00.

[9] A caracterização e pré-análise do primeiro instrumento do estudo piloto foi apresentada no XXVI EBRAPEM.

Esperava-se que a expressão numérica resultante fosse escrita com o valor fixo 11 mais a quantidade de cada acompanhamento multiplicada pelo preço, ou ainda, a soma das quantidades de cada acompanhamento do mesmo preço por ele multiplicada.

Para o desenvolvimento das questões durante a entrevista, montamos um roteiro de apoio, que consiste em algumas perguntas-chave e orientações prévias com o intuito de evitar os perigos de sugestão de resposta ou fuga do tema descritos por Delval (2002).

Para este roteiro de apoio, dispusemos as nossas falas, a fim de identificar os comentários sobre os mesmos. Reiteramos que tais perguntas são como guia, e que provavelmente mudarão durante o percurso da entrevista.

- Esta atividade consiste na montagem de um lanche, no qual um de vocês vai montar um lanche para o colega, e ele vai calcular o preço.

- Um pode ajudar o outro no cálculo. É importante que vocês falem em voz alta o que estão pensando. Durante o processo, eu vou fazer umas perguntas para vocês, certo?

- Quem vai escolher primeiro?

- Aqui está o cardápio (apresentar o cardápio) e aqui estão os ingredientes (apresentar o sanduíche de brinquedo). Vamos montar?

Com o modelo do sanduíche para manipular, o estudante vai montando o sanduíche e falando em voz alta os ingredientes escolhidos, assim, o colega pode registrar o preço e a quantidade de cada ingrediente.

- Qual a quantidade de cada ingrediente que você pegou?

- Algum tinha o mesmo preço?

- Como podemos escrever em uma linha[10] este cálculo?

Após a montagem e o registro, perguntamos sobre cada número e seu significado na escrita da expressão, como por exemplo:

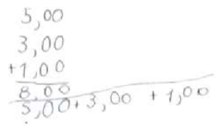
- Este três aqui, o que ele representa no cálculo que você fez? É um ingrediente, um preço, uma quantidade?

Cada um dos sentidos atribuídos possuem um valor na operação, conforme Nunes e Bryant (1997), a multiplicação difere da adição pelo sentido de replicar (número que na proporcionalidade pode representar tanto o fator escalar quanto o fator funcional), ainda, há pelo menos um operador que está replicando uma quantidade, desta forma, as perguntas serão direcionadas conforme a construção de cada expressão, a fim de identificar quais os sentidos dados aos números, sinais de associação e operadores.

[10] Único momento de sugestão: escrever em uma linha para que seja representado como expressão numérica.

Encontramos como resultados a montagem econômica pelos estudantes, que inseriram poucos ingredientes em seu lanche, e o cálculo do valor a pagar se reduziu a operações de adição, como podemos ver no protocolo de Nico (10 anos, 6º ano).

Figura 30 – Excerto do Protocolo de Nico



Fonte: dados da pesquisa.

A realização da tarefa em duplas não foi interessante, pois ao invés de os alunos discutirem sobre o problema, o segundo copiava o que o primeiro fazia, e todos concordaram, sem opor-se entre si, ainda quando divergíamos para incentivar outras respostas, os alunos mantiveram-se firmes nas primeiras.

O segundo instrumento[11] aplicado com os estudantes no estudo piloto foi o problema das caixas. O problema consistiu em calcular a quantidade de canetas em uma caixa com embalagens de estojos, e a metade. Calcular o número de canetas vermelhas.

Na caixa cabem oito embalagens, em cada embalagem está um conjunto com seis estojos azuis, e dez estojos amarelos. Em cada estojo azul estão três canetas azuis, duas canetas pretas, duas canetas vermelhas e uma caneta verde. Em cada estojo amarelo estão duas canetas roxas e uma caneta cor de rosa, conforme Figura 31.

Figura 31 – Esquema do material a ser manipulado no dia da entrevista

Fonte: dados da pesquisa.

Marta pediu uma embalagem cheia, quantas canetas cabem na embalagem? Quantas canetas vermelhas estão na embalagem, quando ela está cheia? Rozane encomendou a metade do pedido de Marta. Quantas canetas há no pedido de Rozane? Quantas canetas azuis Rozane encomendou?

[11] A pré análise do instrumento 2 do teste piloto foi apresentada na Mostra de Pesquisa Universitária (MPU) da Universidade Federal do Rio Grande.

O roteiro de apoio serviu como guia na apresentação. As perguntas guia do roteiro seguem:

- Marta pediu uma embalagem cheia, quantas canetas cabem na embalagem?

[esperar o estudante iniciar e manipular o material]

- Como podemos escrever uma conta que mostre quantas canetas tem ao todo na embalagem? Por onde você começa? Me conte como você pensou.

- Quantas canetas existem em cada um?

[caso o estudante junte as quantidades de canetas]: Se você só calcular o número total de canetas, tem como descobrir o número de cada tipo de caneta?

[Se o aluno chegar em 624 canetas, perguntar o sentido de cada um dos sinais matemáticos presentes nas operações]

- Como podemos escrever essa conta em uma linha?

[Se o aluno chegar na expressão numérica, ainda que incorreta, solicitar que a resolva]

Esperava-se que os estudantes chegassem em uma expressão que se assemelhe a 8.[6.(3+2+2+1)+10.(2+1)].

- Quantas canetas vermelhas estão na embalagem, quando ela está cheia?

[caso o estudante tenha escrito o número de canetas de cada estojo, verificar se ele identifica onde se encontra a quantidade correspondente ao número de canetas vermelhas na expressão].

- Rozane encomendou a metade do pedido de Marta. Quantas canetas há no pedido de Rozane? [identificar se o estudante divide o resultado por dois ou utiliza de outra estratégia, e qual o registro que organiza a partir deste momento, inclusive com a expressão numérica].

Ainda, ao se questionar sobre quantas canetas azuis Rozane encomendou, a percepção de que Rozane encomendou a metade da quantidade de canetas azuis de Marta, e que o número de canetas azuis pode estar representado na expressão numérica. Barbosa e Magina (2014) estudam multiplicação de três fatores, com conjuntos de conjuntos, e concluem que as representações por meio de expressões numéricas multiplicativas, aliadas a outras representações, propiciaram a construção dos sentidos de decomposição, o que será levado em conta na análise desta proposta, que se assemelha pelos fatores, e se distancia pela parcela.

Em virtude do tempo que os estudantes levaram para realizar a tarefa, a parte das compras de Rozane, das canetas vermelhas e das comparações foram retiradas da questão. Esperávamos que os estudantes apresentassem expressões numéricas que traduzissem a questão, mas encontramos representações de conta armada. O instrumento da caixa foi reorganizado e fez parte do estudo principal. Foi acrescentado um instrumento de resolução de uma expressão numérica na forma simbólica, para avaliar os conhecimentos dos estudantes sobre regras de prevalência e sinais de associação e poder sustentar o problema das caixas.

3.3.11 Instrumentos

Os instrumentos foram aplicados individualmente, por meio do Método Clínico Piagetiano. O primeiro consistiu em uma expressão numérica na forma simbólica, e o segundo em uma situação oral contendo material de suporte.

Estudo Principal modificado a partir do Estudo Piloto

Instrumento 1 – Expressão Numérica na forma simbólica.

O instrumento 1 foi o primeiro a ser disponibilizado aos estudantes. Para resolvê-lo, os alunos tiveram acesso a lápis, borracha e apontador. Durante sua resolução foi solicitado que explicassem o que estavam fazendo, e os motivos de seus procedimentos. Consistiu em uma expressão numérica contendo sinais de associação, adição e multiplicação, conforme Figura 32.

Figura 32 – Instrumento 1

Expressão Numérica	Data: ___/___/____	Participante	Folha número

Calcule o valor de **8x[6x(3+2+2+1)+10x(2+1)]**

Fonte: dados da pesquisa.

A avaliação deste instrumento compôs a discussão organizada para o primeiro objetivo específico, ao estudar a ordem das operações.

Instrumento 2 – Problema das Caixas – Problema Misto.

O problema das caixas consistiu em uma situação disponibilizada de forma oral. Nós contávamos a história de uma amiga que realizou uma compra, mas que não sabia quantas canetas havia comprado. Tomamos cuidado para que a expressão numérica pudesse ser organizada com uso de sinais de associação e que contivesse ao menos uma operação do Campo Aditivo e uma operação do Campo Multiplicativo, fazendo dela uma situação do tipo problema misto.

Foi disponibilizado aos estudantes lápis, borracha e apontador, mais o material de suporte composto por:

1 caixa grande

8 embalagens

10 estojos amarelos

6 estojos azuis

Em um estojo amarelo: duas canetas roxas e uma caneta cor de rosa

Em um estojo azul: três canetas azuis, duas canetas vermelhas, duas canetas pretas e uma caneta verde.

Na caixa cabiam exatamente as oito embalagens, sendo que sete delas estavam fechadas. Na embalagem aberta cabiam os estojos, sendo que um de cada cor continha as canetas a ele correspondentes, conforme Figura 33.

Figura 33 – Instrumento 2

Fonte: dados da pesquisa.

O problema contado era: Marta fez uma encomenda de canetas, que vieram em uma caixa. Na caixa cabem oito embalagens, em cada embalagem está um conjunto com seis estojos azuis, e dez estojos amarelos. Em cada estojo azul estão três canetas azuis, duas canetas pretas, duas canetas vermelhas e uma caneta verde. Em cada estojo amarelo estão duas canetas roxas e uma caneta cor de rosa. Marta comprou quantas canetas?

A análise deste instrumento perpassou todos os objetivos e artigos da Parte 3 desta tese.

4 ESTUDO DE REVISÃO SOBRE EXPRESSÕES NUMÉRICAS EM TEXTOS CIENTÍFICOS BRASILEIROS

4.1 Introdução

Pensar o papel das expressões numéricas também é pensar em possibilidades diferentes de movimentação da matemática escolar. Este estudo de revisão tem como meta, mediante a análise de pesquisas brasileiras em Educação Matemática, compreender como as expressões numéricas circulam nos textos acadêmicos.

A escrita de uma expressão numérica segue uma ordem específica, cujas operações e sinais de associação permitem representar em linguagem matemática um problema. Assim, suas características de organização e estratégias de resolução envolvendo as propriedades elementares das operações matemáticas possibilitam que sejam a expressão de problemas que envolvem outros Campos Conceituais, que não o da Aritmética.

As expressões numéricas tradicionalmente fazem parte dos conteúdos trabalhados no Ensino Fundamental, e ainda que sua obrigatoriedade não seja manifestada explicitamente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o trabalho com diferentes linguagens e simbologias está previsto nas legislações pertinentes e nos livros didáticos com a chancela do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD). Ottes e Fajardo (2017) destacam que embora não estejam presentes nos documentos oficiais de forma explícita, as expressões numéricas constam nas escalas de Matemática, produzidas após as avaliações, tanto pelos processos de resolução quanto pelo uso de sinais de associação.

Uma das características encontradas por Silva (2014) sobre o que é ser um bom professor de Matemática é a crença de resolver grandes expressões numéricas. Esta crença está intimamente ligada à ideia produzida historicamente que ser bom em Matemática é lidar bem com a Aritmética. Durante as décadas de 1980 e 1990, a Geometria, a Estatística e outras áreas retomaram espaço quanto à representatividade em Matemática Escolar e os problemas passaram a ter protagonismo, assim como os processos de desenvolvimento do pensamento matemático. Esse movimento impactou a forma de ensinar as expressões numéricas.

4.2 Método

Esta é uma investigação de natureza qualitativa e caráter descritivo, que objetiva compreender como textos acadêmicos brasileiros retratam as expressões numéricas, mediante pesquisa bibliográfica, a fim de organizar um panorama sobre a pesquisa e disseminação textual de expressões numéricas. O período da busca compreendeu entre os anos 2000 e 2020. Os descritores utilizados para a busca foram: “expressão numérica”, “expressões numéricas”, “expressão aritmética”, “expressões aritméticas”.

Trata de um estudo de revisão produzido em cinco fases, a partir das seguintes buscas:

1) Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES e na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD), no qual foi utilizada a busca a partir das ferramentas dos portais;

2) levantamento das referências presentes nos capítulos teóricos de teses e dissertações cujo objeto de estudo foram as expressões numéricas;

3) textos nos eventos ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática) e SIPEM (Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática), nos quais foi utilizada a ferramenta Ctrl+F ou leitura de sumário nos anais, conforme os textos apresentaram possibilidade[12], sendo realizada leitura completa nos demais;

4) artigos nos periódicos de Qualis A1 e A2 da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), de Educação Matemática[13], onde foi utilizada a busca no sumário de cada periódico, e por último,

5) portais de pesquisa de periódicos: Edubase, Scielo e Portal de Periódicos da CAPES, nos quais foi utilizada a busca automatizada.

A fase 1) consistiu em duas etapas: em 1a) constituiu-se um *corpus* a partir de teses e dissertações, dos quais 21 trabalhos foram selecionados por ligarem-se ao tema e estarem inseridos na Educação Matemática. Em 1b) os 21 foram classificados conforme a ênfase dada às expressões numéricas: (i) 7 tiveram como objeto de pesquisa , especificamente, as expressões numéricas, (ii) 10 utilizaram de alguma forma em suas metodologias ou instrumentos as expressões numéricas e (iii) 4 mencionaram expressões numéricas ao falar de outros temas, como expressões algébricas, por exemplo.

A fase 2 de constituição do *corpus* foi elaborada a partir de um movimento recursivo. Identificou-se quais referências sustentaram os capítulos sobre expressões numéricas dos 7 textos acadêmicos que tinham como objeto de investigação especificamente as expressões numéricas e que foram identificados na fase 1b (i). Para tal, foram lidos os capítulos de

---

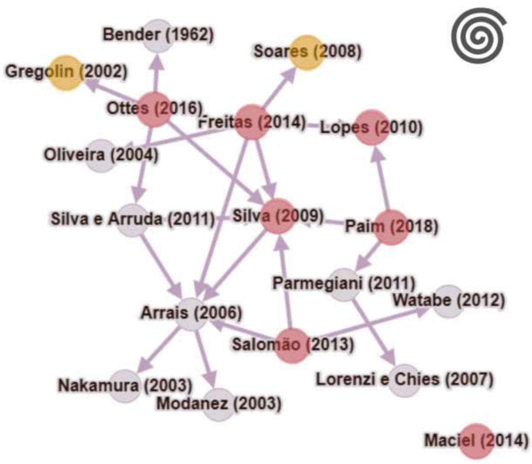
[12] Alguns anais estavam em papel, outros foram digitalizados como Figura, de modo a não permitir ferramentas automatizadas de busca.

[13] Os periódicos da área foram selecionados a partir de Fuchs (2012), e conferidos com o *qualis* do triênio 2013 – 2016, disponível no site da CAPES em 2020 - https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/veiculoPublicacaoQualis/listaConsultaGeralPeriodicos.jsf.

referencial teórico e identificados os textos que foram referenciados. Nessa fase foram encontradas 41 referências que fundamentaram os trabalhos. Dessas, identificou-se que 23 referências relacionavam-se a outros temas ou textos que não envolviam expressões numéricas e, por isso, foram descartadas. Restaram 18 textos relacionados, dentre os quais nove eram dissertações e teses já levantadas na fase 1, acrescidos de outros nove textos inéditos. Assim, essa fase 2 produziu a incorporação de mais 9 textos ao corpus de análise, que acrescidos às 21 dissertações e teses resultaram, até este momento da pesquisa, em 30 textos. Em um esforço de aprofundamento, foi realizado mais um movimento recursivo: o levantamento das referências presentes nestes nove textos desta fase. Nessa busca não se encontraram novas referências, mantendo-se o número total de textos em 30.

A Figura 34 apresenta um esquema de rede dos 18 trabalhos selecionados na fase 2, cuja seta indica o vínculo de citação.

Figura 34 – Rede de trabalhos vinculados às pesquisas sobre expressões numéricas



Fonte: dados da pesquisa.

A Figura 34 evidencia as sete dissertações e teses que tiveram por objeto de estudo as expressões numéricas. As demais referências que se vinculam são nove textos inéditos e duas dissertações/teses, destacadas em amarelo, que surgiram na fase 1, mas cujo objeto de investigação não debruçava-se sobre o tema das expressões numéricas. Assim, entende-se que esse *corpus* constitui-se como a rede de referência para teses e dissertações sobre expressões numéricas no período de 2000 a 2020.

Na fase 3 da pesquisa foram analisados os anais dos eventos ENEM[14] e SIPEM[15],

[14] VII ENEM-Rio de Janeiro-2001, VIII ENEM-Recife-2004, IX ENEM-Belo Horizonte-2007, X ENEM-Salvador-2010, XI ENEM-Curitiba-2013, XII ENEM-São Paulo-2016, XIII ENEM-Cuiabá-2019

resultando em sete trabalhos, compondo, assim, 37 trabalhos. Na fase 4 foram analisados 22 periódicos[16], encontrando três artigos, perfazendo uma frequência parcial com as fases anteriores de 40 trabalhos sobre expressões numéricas.

A busca da fase 5 no Portal de Periódicos da CAPES resultou em 34 artigos, sendo 27 de Educação Matemática, desses, 15 abordaram expressões numéricas. Em virtude de um dos artigos já fazer parte do *corpus* pela fase 4, não foi contado na fase 5, a qual resultou em 14 trabalhos. Na Tabela 1 há a síntese quantitativa deste processo, que finalizou em 54 textos.

Tabela 1 – Textos por fase na constituição do *corpus* do estudo de revisão

Fase	Descrição	Textos
1	Teses e Dissertações	21
2	Referências de Teses e Dissertações	9
3	Eventos	7
4	Periódicos de Educação Matemática segundo Fuchs (2012)	3
5	Portais de Periódicos	14
Total		54

Fonte: dados da pesquisa.

4.3 Resultados e discussão

Os trabalhos foram classificados em três categorias principais, sendo elas: textos teóricos, os quais abordam estudos sobre a hierarquia das quatro operações matemáticas, pesquisas em livros didáticos a respeito de expressões numéricas e propostas reflexivas sobre expressões numéricas.

A segunda categoria diz respeito às intervenções em sala de aula, e foram classificadas em uso de tecnologias, desafios didáticos, intervenções com resolução de problemas, e com o uso de materiais didáticos não digitais.

A terceira e última categoria refere-se aos estudos cujo objeto não são as expressões numéricas, mas contemplam o tema em sua essência. Foram classificados em generalização de padrões e sentido de número, linguagem e expressões numéricas, padronização em Geometria com expressões numéricas, expressões numéricas e pensamento algébrico e por

[15] I SIPEM-Serra Negra-2000, II SIPEM-Santos-2003, III SIPEM-Águas de Lindóia -2006, IV SIPEM-Taguatinga-2009, V SIPEM-Petrópolis-2012, VI SIPEM-Pirenópolis-2015, VII SIPEM-Foz do Iguaçu-2018

[16] Periódicos Analisados: Bolema, Educação & Sociedade – Revista de Ciência da Educação, Revista Educação e Pesquisa, Revista história da Educação, Ciência & Educação, Cadernos CEDES, Educação em Revista (UFMG), Educar em Revista, Revista Brasileira de Educação, Interface (Botucatu impresso), Zetetiké, Educação Matemática em Revista, Revista Educação Matemática Pesquisa, Contexto & Educação – Revista do Programa de Pós-Graduação em Educação nas Ciências, Reflexão e Ação, Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia – RBECT, Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática – JIEEM, Acta Scientiae - Revista de Ensino de Ciências e de Matemática, Alexandria – UFSC, Investigações em Ensino de Ciências (online), Paradigma (Maracay).

último, expressões numéricas como caracterização do professor de Matemática.

4.3.1 Trabalhos teóricos sobre expressões numéricas

Esta categoria[17] é composta tanto de estudos a respeito da hierarquia das quatro operações matemáticas, que sustentam as regras de prevalência nas expressões numéricas, quanto sobre revisões teóricas e análises de livros didáticos a respeito de expressões numéricas.

Estes textos foram lidos em sua totalidade e categorizados segundo o sentido atribuído às expressões numéricas, às ações referentes ao ensino ou à aprendizagem ou ainda às aproximações com outros conceitos e campos conceituais. Deste universo de 54 textos, 12 deles referiam-se a estudos teóricos a respeito de expressões numéricas que discutem os significados dos invariantes: sinais de associação e regras de prevalência.

4.3.1.1 Hierarquia das quatro operações

A hierarquia das quatro operações é o que permite a resolução correta de uma expressão numérica, no entanto, os sentidos matemáticos que possibilitam a compreensão da prevalência de uma operação sobre a outra não são aspectos rotineiramente explorados. Dentre os estudos que desenvolvem a argumentação da necessidade da prevalência, encontram-se Bender (1962), Ottes (2016) e Ottes e Fajardo (2017).

Bender (1962) discute a necessidade de prevalência em uma expressão numérica a partir do problema da ambiguidade da escrita e da resolução de uma sequência de operações em um conjunto de números. Propõe três abordagens: a primeira aborda as regras de ordem PMDAS[18], para a qual admite as operações de primeira ordem (adição e subtração), e as que dela podem derivar (multiplicação e divisão), chamadas de segunda ordem. A segunda abordagem, denominada ordem consecutiva linear dirigida, desenvolve a expressão numérica como escrita em linguagem matemática, escrevendo as operações da esquerda para a direita,

---

[17] Uma versão do levantamento, concernente aos trabalhos teóricos, foi publicada em RAMOS, R. C. S. S; SILVA, J. A. Estudo de revisão sobre expressões numéricas em textos acadêmicos - abordagens teóricas. *In:* Congresso Ibero-americano de Educação Matemática, 9, 2022b, São Paulo. **Anais [...],** online, São Paulo. Pontifícia Universidade Católica – São Paulo, 2022b. Disponível em: https://even3.blob.core.windows.net/processos/8b9539b36aea4c5a8f09.docx. Acesso em: 9 dez. 2022.

[18] A mnemônica PMDAS – Parênteses, Multiplicação, Divisão, Adição e Subtração ou PEMDAS - Parênteses, Expoentes, Multiplicação, Divisão, Adição e Subtração leva a resultados incorretos de expressões numéricas. Gravuras escrevendo as duplas MD e AS na mesma linha indicam que tais operações devem ser realizadas na ordem em que aparecem, mas ainda assim o PMDAS como regra de prevalência é entendido como sequência linear de operações.

com o cuidado de escrever as operações em sua ordem de cálculo. Com essa estratégia poderia-se operar em sequência, na ordem em que aparecem, mas isso exigiria reformular a literatura matemática e retreinar todos os que conhecem a Matemática de outra forma.

A terceira abordagem é o uso de parênteses, colchetes e chaves, conforme conveniência, concluindo que a necessidade de comunicar ideias dá origem às expressões numéricas, e determinam a forma geral da expressão, necessitando de princípios que evitem ambiguidades, sejam claros e simples. Assim, nota-se que o trabalho de Bender foca-se em aspectos procedimentais da linguagem matemática.

Ottes (2016) problematiza o sentido de número na resolução das expressões numéricas, discernindo os sentidos da multiplicação e da adição, bem como a necessidade da ordem das operações. Discute como as expressões numéricas e as regras de prevalência são abordadas em sala de aula, mediante análise de expressões numéricas em livros didáticos, identificando ensino de expressões numéricas como regras e algoritmos.

Ottes (2016) conclui que as expressões numéricas e sua resolução são tratadas como regras em sala de aula, e que apesar de axiomas e propriedades das operações serem trabalhadas no 5º e 6º ano, não são trabalhadas posteriormente. Sugere que se trabalhe com tais propriedades para justificar as regras, em forma de atividades, para os estudantes construírem o raciocínio descobrindo a lógica que existe por trás da regra, visualizando conexões de um conteúdo a outro.

Ottes e Fajardo (2017) analisam três livros didáticos, sendo um do quinto ano e dois do 6º ano, os quais abordam as expressões numéricas em seu teor, trazendo uma listagem de regras sem justificativa. Após uma abordagem histórica dos sinais das operações, apresentam uma dedução matemática, iniciando com os Axiomas de Peano, e utilizando as propriedades aritméticas de forma indutiva para mostrar as regras de prevalência, utilizando o princípio de Henkel para generalizar a prova para os números reais.

4.3.1.2 Estudos em Livros Didáticos

Os livros didáticos são uma importante ferramenta de trabalho de professores de todos os níveis de ensino, e as expressões numéricas fazem parte de sua constituição. Freitas (2014) e Mendes (2017) utilizaram uma abordagem praxeológica de Chevallard (1999) para analisar coleções de livros didáticos, a partir da base teórico-metodológica da Teoria Antropológica do Didático.

Freitas (2014) investigou a abordagem do conteúdo de expressões numéricas em livros didáticos de Matemática do 6º ano do Ensino Fundamental, analisando duas coleções de livros. Em sua revisão teórica encontrou heterogeneidade de temas, programas e orientadores a respeito de expressões numéricas, e embora as expressões numéricas comumente sejam caracterizadas como conjunto de regras, sua natureza permite modelar um problema. Os conteúdos foram analisados em dois gêneros de organização Matemática, o primeiro consistiu no conceito do tema expressão numérica, e o segundo no estudo das expressões numéricas com as quatro operações. Freitas (2014) identificou uma proposta de abordagem didática, na qual os autores priorizam trabalho com as técnicas que envolvem o cálculo mental, resolução de um problema e os algoritmos.

A introdução das expressões numéricas é realizada através de resolução de problema semelhante aos exercícios de aplicação, cujos enunciados anunciam qual processo ou algoritmo deve ser utilizado em exercícios, e uma ampliação gradual de grau de dificuldade. Freitas (2014) defende que as expressões numéricas nos livros didáticos devam ser trabalhadas de forma a ir além da arte de regras, técnicas e números dentro de um ensino algorítmico, contribuindo para a compreensão e emprego das propriedades operatórias.

Ao estudar números binários, Mendes (2017) analisou uma coleção de livros didáticos. As técnicas encontradas para a conversão entre unidades de medidas foram as expressões numéricas e o deslocamento de vírgulas em uma tabela. Santos, Nascimento e Attie (2019) identificam as categorias argumentativas presentes em seis coleções de livros didáticos dos sexto e sétimo anos do Ensino Fundamental. Para a compreensão dos processos argumentativos, os autores recorreram à categorização de argumentação conforme sua finalidade: explicativa ou justificativa. Constataram que nenhuma das obras apresentou a argumentação justificativa na apresentação do conteúdo de expressões numéricas.

Lourenço e Oliveira (2018) abordam, mediante a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, critérios de congruência em problemas de equações do primeiro grau em um material didático apostilado. Entendem que um objeto pode ter várias representações, como a língua natural, diagramas ou linguagem algébrica. Ele não é uma representação, mas o conjunto de todas as suas representações, podendo haver conversões entre os registros de tais representações. O tratamento dado a um registro de representação é disposto no trabalho como resolução da questão. No caso das equações analisadas pelos autores, o tratamento se dá na forma de expressão numérica em um caso no qual não há resolução de equação, mas substituição de valores numéricos em uma expressão algébrica para chegar em um resultado.

4.3.1.3 Propostas de Situações de Expressões Numéricas

As propostas de situações de expressões numéricas, suas análises e possibilidades teóricas, constituem essa subcategoria. Batista Junior (2019) sugere uma situação de compra e venda e possibilita a análise do sentido de número na expressão numérica, Lorenzi e Chies (2007) e Parmegianni (2011) defendem o uso de histórias em quadrinhos produzidas pelos estudantes para a contextualização e a compreensão das propriedades aritméticas.

Batista Junior (2019) sugere uma abordagem contextualizada ao ensino de expressões numéricas, pois a maior dificuldade não está nas operações, mas na ordem, que, de modo geral, é decorada pelo aluno, ao invés de compreender o mecanismo de solução. Explora a partir de um problema de compra e venda, com o uso de material concreto, diferentes representações, utilizando agrupamentos, tabelas e por fim as expressões numéricas resultantes do problema, trabalhando o sentido de cada número presente na expressão.

A tarefa proposta pelo autor consiste em dar um número fixo de peças por grupo a cada integrante, deixando a sobra sobre a mesa. A expressão numérica envolve número de alunos, número de peças/elementos por alunos e elementos de sobra no grupo, desta forma, discute o significado dos números em uma expressão, como grupo ou como elemento. O autor parte de um problema, constrói uma tabela, e resume os dados da tabela na forma de expressão numérica.

Lorenzi e Chies (2007) defendem o uso de situações problema para o ensino de expressões numéricas em sala de aula. Para isso, assumem que expressões numéricas são uma forma de escrever matematicamente a situação, e sugerem um trabalho com história em quadrinhos para ilustrar situações nas quais os estudantes possam perceber o sentido dos números. Embora as expressões numéricas envolvam o domínio de regras, o conhecimento da ordem em que os cálculos são efetuados e a prioridade dos sinais de associação, essas regras precisam fazer sentido, de nada adiantando as crianças decorá-las e resolver as expressões numéricas de forma mecânica. As regras devem surgir de generalizações de análises de situações semelhantes, justificando a partir dessa afirmação a regra de prevalência da multiplicação em relação à adição. Partindo de situações, são desenvolvidas expressões numéricas cada vez mais complexas, chegando ao uso de sinais de associação por agrupamento de conjuntos.

Parmegiani (2011) afirma que, se organizado a partir de problemas, relacionados a situações reais ou lúdicas, ao invés da mera aplicação de técnicas como exercício mecânico, trabalhar com expressões numéricas pode ser uma atividade prazerosa, com significado. Para tal, a autora propõe jogos e histórias matemáticas, nas quais estudantes escrevem simbolicamente e resolvem expressões numéricas a partir da interpretação de diferentes situações-problema, e, em seu contexto, as regras de prevalência vão fazendo sentido.

A respeito da escrita da expressão numérica, a autora afirma que a representação se dá pela tradução de problema, da língua materna para a forma simbólica. Sobre o sucesso da resolução da expressão numérica, está ligado ao domínio das regras de prioridade dos sinais de associação e da ordem na realização dos cálculos além, é claro, da destreza do aluno em operar com os números, sendo que uso dos sinais de associação é uma convenção aceita por todos os matemáticos.

Souza Neto (2014) apresenta uma dissertação em Matemática a respeito de criptografia, a qual afirma ser motivacional para o estudo de expressões numéricas, dentre outros tópicos. O autor aborda a construção histórica da criptografia, exemplificando e ilustrando a mesma, e propõe uma abordagem de sala de aula utilizando matrizes.

4.3.2 Estudos de intervenção com expressões numéricas

As expressões numéricas tradicionalmente fazem parte dos conteúdos trabalhados no Ensino Fundamental, e ainda que sua obrigatoriedade não seja manifestada nas normas curriculares, o trabalho com diferentes linguagens e simbologias está previsto nas legislações pertinentes. Ottes e Fajardo (2017), Freitas (2014) e Santos, Nascimento e Attie (2019) constataram que as expressões numéricas são trabalhadas em livros didáticos como um emaranhado de regras a serem seguidas, não sendo apresentadas justificativas para as regras de prevalência, mas uma explicação da técnica de resolução, o que não promove a compreensão, mas a memorização das regras.

Diante dessa realidade, estudos que buscam alternativas para a construção do sentido de expressões numéricas a partir da compreensão das regras de prevalência, da escrita matemática e do sentido dos números são apresentados neste texto, cujas experiências de intervenção sobre expressões numéricas resultam em diferentes perspectivas de compreensão sobre sua escrita, resolução e sobre os elementos que dela fazem parte. Assim, tanto pelo uso de tecnologia ou materiais didáticos não digitais, pela resolução de problemas ou de desafios, trabalhos acadêmicos promovem uma discussão sobre o ensino e a aprendizagem de expressões numéricas.

Nesta categoria encontram-se os trabalhos que tiveram alguma intervenção em sala de aula. Serviram como parâmetros de classificação as tendências, materiais e percursos pelos quais os autores escolheram. Inicialmente são apresentados os trabalhos com abordagens em tecnologias, seguidos pelos que se definiram por desafios e criptografia, após, pela resolução de problemas e por último pelos que trabalharam expressões numéricas com o apoio de jogos e materiais didáticos.

4.3.2.1 Estudos de intervenção sobre expressões numéricas com uso de tecnologia

Salomão (2013) realiza uma intervenção com estudantes formandas de Pedagogia a respeito de como as mesmas representam situações problema, da língua materna para as expressões numéricas, com o uso da calculadora, versando as questões de pesquisa sobre as concepções das alunas sobre as regras na passagem de problemas da língua materna para expressão aritmética, bem como sobre o uso da calculadora para auxiliar tal passagem. Chama as regras de prevalência de regras universais para que uma expressão aritmética não tenha duas respostas diferentes, e descreve a resolução iniciando pelos sinais de associação, em sua ordem, após, pelas operações, conforme sua ordem de prevalência. Concluiu que os sujeitos tiveram dificuldades em realizar a conversão das expressões aritméticas para a língua materna, usando a calculadora para conferir resultados ou calcular operações simples.

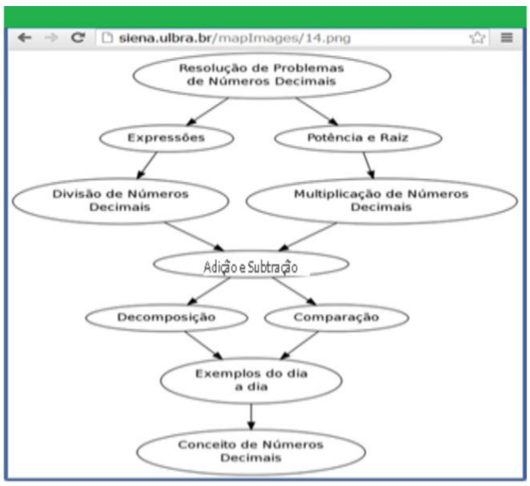
Menezes Junior (2013) investiga como as crianças do quarto ano de uma escola ribeirinha podem utilizar vídeo aulas como recurso de aprendizagem, dentre suas aulas contempla as expressões numéricas. Conclui que o uso de vídeos promove motivação para a aprendizagem de expressões numéricas.

Paim (2018) pesquisa como alunos da Educação de Jovens e Adultos compreendem as expressões numéricas por meio de um Objeto de Aprendizagem. Explica as expressões numéricas como operações de multiplicação ou divisão compondo termos que são separados por adições ou subtrações, pensados como pares ordenados. Esses termos dizem respeito ao que o autor chama de grupos, e trabalha a ordem de prevalência a partir desse argumento. Os resultados apontaram inicialmente que, para as operações descontextualizadas, os estudantes erraram tanto na ordem de prevalência quanto nos cálculos das operações. Os estudantes tiveram uma diminuição de erros significativa na representação da ordem de prevalência nas questões contextualizadas, bem como no cálculo das operações realizadas.

Vieira (2019) criou, organizou e ministrou, via educação a distância, um curso de reconstrução de saberes matemáticos para universitários, no qual um dos tópicos foi de expressões numéricas. Organizou uma análise qualitativa e quantitativa das percepções dos estudantes quanto ao portal de ensino, concluindo que tal produto tecnológico apresentou-se como ferramenta útil para o ensino dos conceitos envolvidos.

Fiuza (2015) aborda um curso nos qual um dos tópicos intitulou-se expressões numéricas e números decimais. A autora organizou uma sequência didática, programada na plataforma, que automaticamente devolveu os resultados dos estudantes mediante algoritmos próprios. Para programar a sequência didática na plataforma escolhida, a autora produziu um mapa conceitual explicitando o que trabalharia. O mapa descrito na Figura 35 apresenta uma árvore conceitual na qual as expressões numéricas é um dos nós, que está ligado a outros.

Figura 35 – Mapa conceitual para o trabalho de resolução de problemas de números decimais



Fonte: http://siena.ulbra.br/mapImages/14.png.

Fonte: Fiuza (2015, p.53).

No tópico referente às Expressões Numéricas, Fiuza (2015) apresentou problemas, utilizou o aplicativo *JClic* para produzir slides (com uma história em quadrinhos ilustrada) contendo situações que depois seriam resolvidas no ambiente virtual, com o uso do mesmo aplicativo. Em comparação entre os tópicos, expressões numéricas adquiriu o menor desempenho, sendo constatada dificuldade dos estudantes em interpretar dados e descobrir quais operações dão conta da situação apresentada.

Recalcati, Figueiredo e Groenwald (2019) propuseram problemas envolvendo expressões numéricas com o uso de planilha eletrônica, tanto no enunciado quanto na resolução, esta avaliada automaticamente pela programação da planilha digital. Os autores sugerem que a produção de enunciados de situações dispostas em recursos digitais é positiva para o ensino de expressões numéricas. Na continuidade, Figueiredo, Groenwald e Recalcati (2019) produziram uma situação que propiciou as ações de formulação e resolução de problemas, com o uso dos recursos tecnológicos digitais, e promoveu a aprendizagem de conhecimentos relativos às Expressões Numéricas e à Matemática Financeira. Mediante a possibilidade de escolha para os valores, a tomada de decisão dos estudantes para as variáveis do problema, os autores concluíram que as etapas de análise da necessidade, projeto, desenvolvimento e implementação e avaliação do resultado obtido, realizadas na produção do problema, exemplificam como criar problemas não rotineiros.

Groenwald (2020) realizou um estudo de caso com estudantes de Licenciatura em Matemática, os quais desenvolveram um Design Instrucional (DI), com o tema expressões numéricas. Os estudantes da licenciatura desenvolveram diversas ações: estudo das expressões numéricas em livros didáticos e na BNCC; análise e estudo do ambiente virtual de aprendizagem; organização de um grafo (Figura 36), de um banco de questões para cada conceito do grafo, produção de atividades didáticas para cada elemento do grafo, com o uso de recursos tecnológicos; desenvolvimento do DI; análise discussão e replanejamento do DIC. O grafo apresentado na Figura 36 é lido de baixo para cima pelo sistema, e as tarefas do banco de questões devem estar de acordo com o mesmo.

Figura 36 – Grafo do Design de Expressões Numéricas

Fonte: Groenwald (2020, p. 647).

Durante o planejamento das atividades, o grupo de estudantes identificou alguns obstáculos epistemológicos, os quais foram sanados mediante estudo coletivo, por exemplo: dificuldade com o uso dos parênteses, dificuldade de desenvolver justificativas para a ordem das operações sem a utilização das regras, sendo esses registrados em protocolos próprios, juntamente com os problemas que os elucidaram.

Os trabalhos de Fiuza (2015), Recalcati, Figueiredo e Groenwald (2019a, 2019b) e Groenwald (2020) seguem a mesma linha metodológica, aprofundando o estudo de expressões numéricas e outros conceitos, com o uso de planilhas eletrônicas, softwares e Design Instrucional.

4.3.2.2 Desafio dos quatro quatros e criptografia

Maciel (2014) faz uma proposta detalhada e ampliada do clássico desafio dos quatro algarismos, na qual ele define as expressões numéricas como: conjunto de operações fundamentais e hierarquização na qual deve-se respeitar a ordem das quatro operações básicas, potenciação e dos parênteses. Justifica o estudo das expressões numéricas utilizando os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), e conclui que para aprender expressões numéricas os alunos devem ser motivados com desafios.

Soares e Pirola (2020) relatam uma experiência realizada em um curso de extensão, com duas atividades: o jogo dos quatro quatros, no qual se inserem sinais entre os quatro para formar os números de um a dez, e o jogo nunca dois binário, no qual formas geométricas representam as potências de base dois. Entendendo as expressões numéricas como conjuntos de números e operações matemáticas cuja ordem é bem definida, os autores enunciam as regras de prevalência da forma usual, mas adicionam que as operações podem ser feitas em qualquer ordem dentro de suas prioridades, afirmando que algumas operações têm maior prioridade que as outras. Os autores destacam a relevância dos recursos no trabalho com expressões numéricas e apontam para a necessidade de contextualizar e trabalhar de forma lúdica.

4.3.2.3 Intervenções a partir de resolução de problemas

Arrais (2006) estuda as crenças e concepções de 70 professoras polivalentes, de primeira a quarta séries de escolas do Ensino Fundamental, a respeito das expressões aritméticas[19], problematizando essas a partir da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (2001). A pesquisa aborda problemas matemáticos denominados Estruturas Mistas, as quais contemplam problemas de Estruturas Aditivas e Estruturas Multiplicativas concomitantemente, sendo a sentença matemática que representa esse problema uma expressão aritmética.

Para o estudo das expressões aritméticas, Arrais (2006) organiza três olhares: do ensino, da pesquisa e dos Campos Conceituais. Inicialmente faz um apanhado histórico sobre como as mesmas tiveram um protagonismo em testes de seleção e nos currículos de Matemática desde o início de seu ensino institucional no Brasil, passando pela não obrigatoriedade das mesmas nas propostas curriculares desde 1986, e da problematização das

---

[19] Expressões numéricas e expressões aritméticas são sinônimas.

mesmas como situações nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) e em Livros Didáticos utilizados pelos professores sujeitos da pesquisa.

Embora mais de 70% dos professores tenham indicado que "ensinavam expressão aritmética *porquê é uma ferramenta importante na resolução de situações-problema*" (ARRAIS, 2006, p.139, grifo do autor), os mesmos não souberam construir ou resolver tais situações. Ao responder sobre *o que são* expressões aritméticas, os professores relacionam as mesmas ao cálculo, e as mesmas *servem para* calcular, embora, tenha constatado que alguns professores tenham afirmado servir para o raciocínio lógico ou situações problema, segundo o autor por "discursos recorrentes necessários à sobrevivência em seus ambientes profissionais", nas escolhas destes professores estava a ideia de cálculo, e 18,57% dos professores afirmando que não servem para nada. Ao confrontar as respostas dos professores sobre *o porquê* de ensinar expressões aritméticas, Arrais (2006) conclui que o motivo é uma tradição cultural, e a respeito do *como* os professores ensinam, os professores afirmam que ensinam como aprenderam, da parte mais simples para a mais difícil, através das regras e dos algoritmos.

Lopes (2010) analisou as estratégias de ensino de estudantes de uma escola na região rural, em situações que consideraram o contexto dos estudantes. O pesquisador propõe situações que resultem em expressões numéricas para 28 alunos de uma 5ª série, enfatizando o meio rural. Os resultados apontam para caracterizações das respostas dos grupos, em três estratos associados às modalidades de aprendizagem significativa subordinada, superordenada e combinatória, derivadas da aprendizagem significativa proposicional, a qual o autor afirma ser a abordada pela pesquisa.

Silva e Oliveira (2013) relataram um encontro realizado em uma turma do Programa PIBID, de 6º e 7º anos, no qual trabalharam a resolução de um problema contendo sinais de associação, frações, números decimais e as quatro operações. Após a turma resolver o problema de diversas formas e ter socializado com os colegas, deveria virar a folha de atividade, na qual continha uma expressão numérica referente ao problema. Os alunos não identificaram a expressão na forma simbólica como representação do enunciado, e afirmaram ser "difícil". Após a elucidação feita passo a passo pelas autoras, os estudantes resolveram da forma tradicional a expressão numérica.

Goulart e Farias (2019) analisaram uma aula sobre expressões numéricas a partir da Teoria Antropológica do Didático, procurando estudar as lacunas, organizações postas em prática, condições e restrições em aula e o desenho do problema didático, em relação às expressões numéricas. Na aula analisada, o professor iniciou a aula com um problema de contexto monetário disposto em uma Tabela, para os alunos resolverem por iniciativa e caminhos livres e depois da socialização registrou a expressão numérica correspondente. Os autores constataram que a aula pendeu mais para o bloco prático, composto por tarefa e técnicas, do que para o bloco teórico, composto por tecnologia e teoria.

Thomé, Cunha e Velasco (2019) relatam uma experiência que trata de um estudo qualitativo realizado em uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental, a respeito da leitura e compreensão de uma expressão numérica. Pensando a linguagem matemática como língua estrangeira, os autores propõem uma expressão com parênteses e as quatro operações. Ao analisar os erros dos alunos, os autores afirmam que os modos de leitura podem ter diferentes interpretações, devendo ser levada em conta que a tradução de um texto da língua materna para a linguagem matemática deve ser realizada mediante compreensão das regras gramaticais, do vocabulário, do alfabeto, e da formação de palavras e regras de pontuação.

4.3.2.4 Estudos de Intervenção com o uso de jogos e materiais didáticos não digitais

Soares (2008) apresenta uma pesquisa quase-experimental, que versa sobre números negativos e sua aprendizagem através de jogos didáticos, enfatizando a resolução de problemas, em três turmas de sétimo ano de uma escola particular, sendo uma turma o grupo controle e duas o grupo experimental. Os instrumentos contemplaram resolução de problemas em língua materna com livre estratégia de resolução, criação de expressões por meio do problema e resolução de expressões em sua forma simbólica. Os resultados mostram diferenças significativas no desempenho dos estudantes dos grupos experimentais em relação ao grupo controle nas questões de resolução de problema na língua materna e na criação da situação para a expressão simbólica, mas não para a resolução de expressões na forma simbólica contendo sinais de associação. Apesar das expressões numéricas com sinais de associação não serem resolvidas corretamente nos instrumentos, durante a intervenção os registros apontam para a escrita e resolução das situações contendo números negativos e uso de parênteses de forma eficaz.

Silva (2009) investiga a apropriação da expressão numérica por alunos de 5ª série do Ensino Fundamental, fazendo uso de um jogo didático. Sugere que as expressões podem ser mais do que métodos e regras para chegar a um valor sem sentido, mas também serve para modelar situações-problema, como uma ferramenta, com economia de esforço e tempo, minimizando o erro. A pesquisa de campo consistiu em duas etapas: a primeira com professores de 1ª a 4ª séries, e a segunda com alunos de uma turma de 5ª série. Os professores apresentaram dificuldades em perceber as expressões numéricas como modelo matemático, concebendo-as como "um aglomerado de regras que devem ser aplicadas, relacionadas a cálculos que devem 'obedecer' uma hierarquia de operações" (SILVA, 2009, p. 78). A respeito dos sinais de associação, os professores utilizaram parênteses para resolver as operações, mas não na escrita para mudança de ordem de prevalência nas operações.

As unidades de análise foram: registro da língua natural e registro das escritas algébricas e formais. Os estudantes apresentaram no pré-teste saber calcular expressões numéricas por meio da aplicação de regras, podendo errar em algumas propriedades operatórias, porém não resolvem situações que envolvem expressões numéricas, não realizando conversões do registro da língua natural para o registro numérico e vice-versa. Durante a intervenção, os pares interagiram e construíram as expressões numéricas convenientes para proporcionar a vitória no jogo, embora tenham colocado os parênteses para indicar qual operação queriam fazer primeiro, independente da ordem operatória. A conversão do registro material para a língua natural (falada) e do registro material para o registro numérico, foi constatada durante a aplicação. O pós-teste indicou que não houve mudanças significativas nos procedimentos de resolução e escrita simbólica das expressões numéricas; havendo aprimoramento do conhecimento sobre expressões numéricas, utilizando-as como ferramenta para modelar problemas, ou seja, produzindo a conversão do registro da língua natural para o registro da escrita numérica.

O capítulo 2 do livro escrito por Silva e Arruda (2011) complementa a pesquisa de Silva (2009), ao analisar uma intervenção realizada com 12 professores de primeira a quarta séries, a respeito de como um jogo didático influencia na reparadigmação docente, trabalhando com expressões numéricas. A pesquisa busca perceber quais as conversões realizadas pelos sujeitos para escrever e resolver as expressões numéricas.

Os grupos de professores tiveram reações diferentes ao jogo. Embora muitos apresentassem registros na língua falada coerentes às operações, no registro numérico isso nem sempre ocorreu. Sobre o uso de parênteses, participantes de um grupo não atribuíram significado ao uso dos parênteses, em outro, se esqueceram de usar, mas justificaram o possível uso.

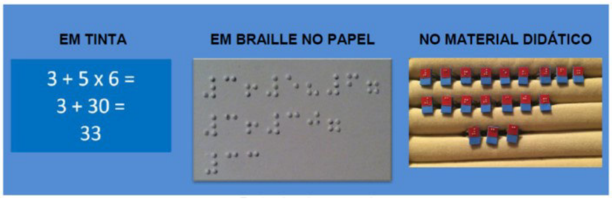
Além da aplicação do jogo, foram respondidas pelos professores quatro situações, e no estudo foram analisadas as respostas de uma participante. O uso de parênteses pelas professoras da pesquisa é realizado para organização, e não para a mudança de ordem de prevalência, o que as autoras consideram um obstáculo didático que relaciona as expressões intimamente ao cálculo. Apesar de saber fórmulas e ter noção de que o comportamento de estrutura matemática presente nos conteúdos não ser o mesmo, no estudo, as professoras participantes tiveram dificuldades em romper com tal obstáculo didático, compreendendo as expressões numéricas como um conjunto de regras que devem ser seguidas.

Sá (2013) relata uma experiência com dois jogos em uma turma do Programa Mais Educação, em dois encontros, com turmas de 5ª e 6ª séries, organizadas em duplas. O autor concluiu que durante as jogadas foram trabalhados tanto o cálculo mental quanto as expressões numéricas, e que os jogos contribuíram para a aprendizagem dos mesmos. Oliveira *et al*. (2013) relataram o trabalho realizado em uma turma do Programa PIBID, de 5º e 6º anos, com o uso de um jogo de bingo cujas cartelas tinham os resultados de expressões que eram "cantadas" por um dos participantes do jogo. As expressões continham sinais de associação e as operações de adição e subtração. Os autores afirmam ter detectado as dificuldades dos estudantes por meio do jogo e que o mesmo serve para motivação.

Silva e Moura (2019) apresentam uma proposta de jogo para o ensino de expressões numéricas, relatando a experiência realizada durante a disciplina de Estágio Curricular Supervisionado, em uma turma de 7º ano do Ensino Fundamental, com a intenção de tornar aulas atrativas e motivadoras com a utilização do jogo, de forma a possibilitar uma prática mais reflexiva e pedagógica. Os autores concluíram que o jogo serviu como motivação para os participantes, e contribuiu para a prática de docência no Estágio.

Tostes (2015) aborda expressões numéricas mediante um tabuleiro para pessoas com deficiência visual, como podemos observar na Figura 37. As expressões são escritas da forma clássica, mas montadas em um tabuleiro no qual o estudante pode manipular os sinais, movimentando-os e facilitando a escrita dos mesmos.

Figura 37 – Tabuleiro produzido por Tostes (2015)



Fonte: Tostes (2015, p. 23).

Os resultados e conclusões são a respeito da usabilidade do tabuleiro, indicando uma facilidade pelos usuários do material e a manipulação de símbolos matemáticos de forma mais dinâmica, facilitando os cálculos.

4.3.3 Expressões Numéricas como suporte para o estudo de padrões

Apresentam-se aqui estudos que se referem às expressões numéricas como resultado de generalização de padrões geométricos, expressão do sentido de número nas quatro operações, representação linguística da Matemática, padronização vinculada ao pensamento algébrico, bem como caracterizadora da imagem do professor de Matemática.

4.3.3.1 Estudos que utilizam expressões numéricas: generalização de padrões e sentido de Número e Operações

Gregolin (2002) realiza um estudo de caso, em duas turmas, uma de terceira e outra de quarta série. Acompanha as aulas de Matemática, sobre quatro operações, tendo enfoque analítico no conteúdo trabalhado. O autor classifica a análise das expressões numéricas e das sentenças matemáticas como complementos sobre operações. O exame das expressões numéricas ocorreu mediante a observação das aulas, comparação com os livros didáticos adotados, apreciação dos cadernos dos alunos e conversa com as professoras.

Inicia com a apresentação de expressões segundo o caderno de um aluno da terceira série, com regras de prevalência e sem sinais de associação, como segue:

> Expressão numérica é toda expressão que envolve uma ou mais operações com números. A expressão numérica representa uma única ideia de quantidade, isto é, tem um único resultado e, para obtê-lo, devemos proceder da seguinte forma: Primeiramente, efetuamos as multiplicações e divisões, obedecendo à ordem em que aparecem. A seguir, efetuamos as adições e subtrações, também obedecendo à ordem em que aparecem (caderno de um aluno em GREGOLIN, 2002, p. 120).

Os sinais de associação não aparecem na definição, mas foram utilizados pela professora da classe ao organizar uma expressão em sua forma simbólica (não como parte das expressões, apenas como separador). As resoluções chamaram-se simplificações, o que foi problematizado, pois uma simplificação pode levar a uma expressão mais curta, não necessariamente ao resultado composto por apenas um numeral. O conteúdo foi trabalhado com definição, exemplo e exercícios, nesta ordem.

Gregolin (2002) observou uma inconsistência no desenvolvimento de expressões numéricas ao agrupar de duas em duas as operações. O autor propõe uma discussão a respeito da ordem dos sinais de associação, a respeito da escrita de uma expressão cujos colchetes são internos aos parênteses e a impossibilidade da resolução de tal expressão respeitando-se a regra anterior. A solução proposta para o problema, utilizada em recursos de informática, como programas de computador e calculadoras científicas, é usar parênteses quantas vezes forem necessárias.

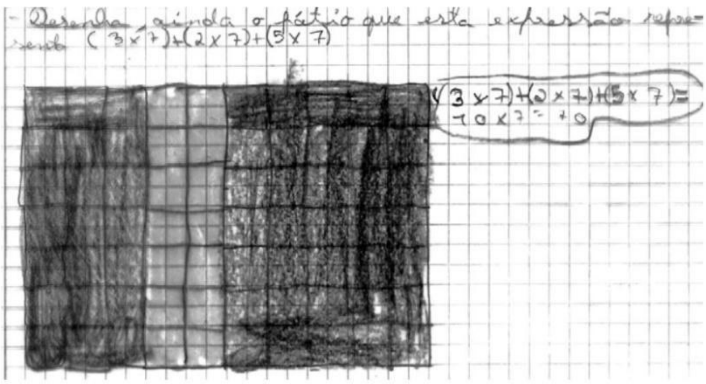
Oliveira (2004) estuda a produção de relações numéricas por alunos de uma quarta série do Ensino Fundamental. A autora busca entender como relações aritméticas podem ser produzidas com o auxílio do aspecto intuitivo da geometria. Conclui que os alunos apropriaram-se do conceito de área para construírem a multiplicação e as juntaram (adicionaram) em uma relação de parte-todo, dando significado às expressões numéricas.

Santiago (2011) investiga o pensamento matemático de alunos dos anos iniciais quanto à realização de operações aditivas simples e de interpretações individuais de resolução de problemas e de problemas não formulados. Os alunos criaram situações problema a partir de diferentes expressões numéricas contendo operações aditivas. Concluiu que a maior parte dos sujeitos formulou problemas de menor grau de complexidade e de maior facilidade lógico-matemática, com uso correto das estruturas cognitivas e das leis que as regem. Ocorreram dificuldades do sistema simbólico verbal, de ordem linguística, no que toca à transcrição de significados e suportes das operações matemáticas. A autora sugere que a estratégia de resolução de problemas não deve somente disponibilizar situações com os passos já formulados por meio da linguagem escrita, com modelos estereotipados e aplicação mecânica de técnicas, mas em aritmética, e sim levar os estudantes a formular perguntas contextualizadas.

Watabe (2012) estuda as competências linguísticas e matemáticas, de alunos de quarta série, a partir de instrumentos contendo problemas aditivos e multiplicativos, contemplando as classes organizadas por Vergnaud. A autora analisou as resoluções dos estudantes, tanto na compreensão matemática quanto em sintaxe e semântica. Concluiu que o esquema evocado pelos alunos para a resolução de problemas propostos foi o algoritmo convencional, e que as palavras-chave não tiveram grande influência na escolha das operações, também que o entendimento de enunciados é influenciado por estratégias de leitura.

Rocha e Menino (2009) estudam o desenvolvimento do sentido de número na multiplicação, em crianças de 7 e 8 anos, com base em um estudo de caso. Diante da necessidade de trabalhar os contextos e a progressão de níveis na multiplicação, propuseram uma intervenção em uma turma de segundo ano, em Portugal, na qual trabalharam um conjunto de tarefas referentes à disposição retangular. Os problemas versaram sobre a ideia de multiplicação e sua representação, trabalhando as propriedades aritméticas, a adição com parcelas iguais e diferentes representações para problemas multiplicativos provenientes de disposição retangular. Os problemas tratavam também da adição de ladrilhos para pavimentação de um pátio, resultando em expressões numéricas contendo adição, multiplicação e sinais de associação, como ilustrado na Figura 38.

Figura 38 – Resposta dada a uma tarefa de disposição retangular



Fonte: Rocha e Menino (2009, p. 129).

O contexto da tarefa permitiu trabalhar as propriedades aritméticas das operações, as relações entre os números e o cálculo e a visualização espacial. Os autores concluem que a estrutura retangular, associada ao contexto das tarefas, facilitou estratégias múltiplas, partindo da compreensão das propriedades aritméticas e desenvolvendo apetência para representações eficazes.

Fernandes, Correia e Guzmán (2010) propõem uma série de tarefas de combinatória, na forma de problemas, a estudantes do décimo segundo ano de uma escola de Portugal. Para cada conjunto de tarefas, os estudantes deveriam realizar as resoluções, e, depois de entregá-las, recebiam o resultado correto e deveriam refazer, explicitando o desenvolvimento da resolução. Os resultados indicam que os maiores erros encontrados estiveram nas representações de expressões numéricas, no entanto, houve evolução na resolução através da percepção do próprio erro, mediante análise das mesmas.

Barbosa e Magina (2014) analisaram, a partir da Teoria dos Campos Conceituais, como 22 estudantes de 6º ano resolvem situações no jogo de mensagem[20], utilizando diferentes estratégias relacionadas às expressões numéricas. As expressões numéricas eram multiplicativas, com três fatores, provenientes das representações das imagens nos cartões. Mediante análise das jogadas e dos registros dos alunos, as autoras descreveram tanto esquemas mobilizados pelos alunos no jogo quanto os conhecimentos em ação que compõem tais esquemas. Os alunos decifram a mensagem com procedimento de contagem um a um, contagem das bolinhas de cada círculo (adição repetida), contagem das bolinhas de cada

[20] Este jogo inspirou a produção do Instrumento 2 – Instrumento das Caixas, utilizado nesta pesquisa.

círculo e sua multiplicação pelo total de círculos, contagem do total de bolinhas de cada "pedaço", contagem das bolinhas de um pedaço e sua multiplicação pelo total de pedaços, concluindo que tais representações possibilitaram aos alunos a mobilização de esquemas úteis à decomposição de um número em fatores primos. A compreensão de que a ordem dos fatores pode implicar na representação de situações distintas, mesmo com a comutatividade da multiplicação.

Montenegro (2018) analisou expressões numéricas resultantes de situações provenientes de relações ternárias de eixo combinatório, buscando discutir o uso de diferentes registros de representação, tais como linguagem natural, listagens, árvore de possibilidades e expressões numéricas. No caso das crianças dos anos iniciais, as conversões para expressões numéricas não ocorrem de forma simples, e as originárias de problemas de combinatória requerem atenção por não poderem ser consideradas triviais ou transparentes.

Montenegro, Borba e Bittar (2020) analisam identificação, conversão e tratamento de registros em situações combinatórias, enfocando a conversão para as expressões numéricas, e a necessidade de representações intermediárias (árvore de possibilidades ou listagem sistematizada) entre os registros em língua natural e em expressões numéricas. Os resultados mostram que as maiores dificuldades estiveram nos problemas com situação de combinação e na conversão para a expressão numérica correspondente, havendo vantagens na utilização das representações intermediárias, tanto para o levantamento de possibilidades quanto para a expressão numérica.

Cebola e Brocardo (2019) analisam as estratégias e representações de um estudante de 6º ano (11 anos) a respeito de problemas de comparação multiplicativa. O estudante escreve e resolve diferentes expressões numéricas utilizando as propriedades aritméticas.

4.3.3.2 Linguagem e Expressões Numéricas

Kruzielski (2005) busca correlacionar o desempenho de alunos de 6ª série na resolução de exercícios aritméticos com o desempenho em tarefas envolvendo memória de trabalho. O autor utiliza as expressões numéricas como parte do teste padronizado de desempenho escolar, denominado Teste de Desempenho Escolar (TDE), envolvendo as quatro operações, potenciação, frações e expressões numéricas. A análise quantitativa da pesquisa encontrou correlação entre o desempenho na resolução de exercícios aritméticos e o desempenho em tarefas envolvendo memória de trabalho, principalmente ao envolver a Capacidade de Coordenação de informações numéricas.

Marcilese (2011) verificou se existia *priming* de estruturas recursivas entre o domínio matemático e linguístico, cujo público foi composto por adultos. A autora afirma que matemática e língua natural, no nível neural, são processadas de forma diferenciada, envolvem recursos compartilhados, como a memória verbal de trabalho, assim, pode ser traçado um paralelo entre algumas sentenças linguísticas e expressões numéricas, em uma correlação envolvendo *center embedding* (encaixamento no centro). Entre as expressões numéricas e as sentenças linguísticas, o *priming* sintático pode facilitar o processamento que ocorre quando uma dada sentença apresenta a mesma forma sintática que a sentença precedente. Conclui que, para o experimento que tem foco nas expressões numéricas, os dados não permitem uma correlação forte, o que está em consonância com pesquisas anteriores.

Almeida e Branco (2018) analisam erros contidos nas produções escritas de 68 alunos de 6º ano, em quatro tarefas que envolvem os números racionais e expressões numéricas, sendo dois problemas e duas expressões na forma algébrica. Concluem que os erros dos alunos são por falta de compreensão e domínio de procedimentos, como erros de prioridades nas operações e interpretação dos problemas. Embora alguns alunos consigam memorizar algoritmos e resolver corretamente longas expressões numéricas, não mobilizam tal conhecimento para a resolução de problemas elementares, e isso decorre da ênfase em símbolos desprovidos de contexto, sem compreensão de representação e modelos.

Vieira, Rios e Vasconcelos (2020) analisam as razões das dificuldades encontradas por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, quanto ao entendimento e utilização da simbologia matemática no processo de resolução de situações problema, contextualizadas ou não. Os resultados apontam que o ensino da Matemática ocorre de forma mecânica, no qual a maior parte dos conteúdos é apresentada como resolução de fórmulas descontextualizadas. Assim, faz-se necessário que o aluno consiga ler e interpretar situações problema, dominando diferentes tipos de linguagem, especificamente códigos e nomenclaturas da linguagem matemática, além de analisar, compreender e decidir quais estratégias utilizar para a resolução dos problemas. A maior parte das resoluções analisadas foi proveniente de cálculos mentais, cujos registros nos rascunhos continham, em alguns casos, expressões numéricas, sem a utilização de expressões algébricas ou equações, embora os mesmos conseguissem identificar qual equação serviu como representação da questão.

4.3.3.3 Estudos sobre padronização na forma de expressões numéricas e Geometria

Nakamura (2003) trabalhou com alunos de nono ano do Ensino Fundamental e buscou a generalização de padrões aritméticos, a partir de expressões aritméticas oriundas do cálculo das medidas de áreas de figuras geométricas para a construção de expressões algébricas. Atenta para possíveis discrepâncias no processo de construção de uma expressão algébrica sem validá-la, pois existem múltiplas representações possíveis [por expressões numéricas].

Em uma turma de 6ª série do Ensino Fundamental, durante 14 aulas, Modanez (2003) aplicou, em conjunto com a professora da turma, uma sequência didática com situações envolvendo geometria. Tal sequência utilizou os registros de representação figural, discursivo, numérico e algébrico, de tratamentos em um mesmo registro e da mudança de Quadros: do geométrico para o aritmético, e do aritmético para o algébrico. A autora conclui que se a sequência didática engajar o aluno na resolução de problemas, nos quais ele investigue padrões em sucessões numéricas e representações geométricas, identificando estruturas que possam descrevê-los simbolicamente, para assim construir noções algébricas pelas regularidades, então essa sequência pode proporcionar ao aluno a introdução do pensamento algébrico.

4.3.3.4 Estudos sobre expressões numéricas e pensamento algébrico

Freire (2011) investiga como ocorre o desenvolvimento de conhecimentos algébricos por professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, com uso de atividades manipulativas e recursos digitais. Os instrumentos são situações com Objetos de Aprendizagem como a balança, os problemas relativos à generalização e à incógnita. Os resultados indicam que, dentre as concepções de conhecimento algébrico das professoras, as relações entre as expressões numéricas e simbólicas favoreceram a compreensão do pensamento algébrico.

Mestre e Oliveira (2012) analisam como a exploração de estratégias de cálculo, a partir de expressões numéricas particulares, pode contribuir para a mobilização da capacidade de generalização matemática e para a sua expressão em linguagem natural e, ainda, para a iniciação à simbolização. Concluem que partir de diferentes estratégias de cálculo através de expressões numéricas particulares pode contribuir para a capacidade de generalização expressa em linguagem natural e em linguagem matemática.

Soares (2018) aborda a educação algébrica, considerando as expressões numéricas como parte da constituição do pensamento algébrico. Buscou identificar quais elementos relacionados ao pensamento algébrico são reconhecidos por professores em atividades com tal foco e que foram destinadas a alunos de sexto e de sétimo ano do Ensino Fundamental, concluindo que os professores afirmam conhecer o pensamento algébrico, ou da graduação ou de formação continuada, mas não apresentam conceitualização deste.

Santos, Pereira e Nunes (2017) buscam verificar quais características do modelo epistemológico de Álgebra são revelados na concepção de 23 professores de um curso de especialização. Afirmam que o modelo dominante da álgebra escolar é a aritmética generalizada, destacando que dentre os elementos mais significativos nas atividades de álgebra escolar estão a tradução da linguagem natural para a linguagem algébrica. Concluem que para os professores a Álgebra e seu ensino está ligada à operações com letras e números e generalização, partindo de um contexto numérico, da tradução de expressões numéricas para gerais.

4.3.3.5 Expressões numéricas como característica do professor de Matemática

Silva (2014) estuda através de Performances Matemáticas Digitais (PMD) a imagem do Matemático, e dentre as caracterizações de um Matemático se encontra a do professor de Matemática que resolve expressões numéricas difíceis. Em uma turma de extensão, composta por estudantes de graduação, o autor propõe a criação de duas PMD, resultando em uma canção e um vídeo, no qual a Matemática é vista como monstro a ser derrotado por super heróis: os matemáticos; esses representados por alguns estudantes como pesquisadores, e pela maioria como professores. O matemático foi visto também como mágico, pois os estudantes não produzem sentido a partir da comunicação matemática em sala de aula, vendo operações aritméticas e algébricas como passes de mágica.

4.4 Considerações

As expressões numéricas surgem da necessidade de comunicar ideias, de forma clara, simples e sem ambiguidades, para isso, os sinais de associação são usados como uma convenção. A escrita de uma expressão numérica se dá pela tradução de uma situação, da língua materna para a forma simbólica; no entanto, os livros analisados pelos autores que compuseram este levantamento priorizam a apresentação da escrita simbólica procedida pela aplicação em problemas padrão.

Os trabalhos estudados neste levantamento concluíram que as expressões numéricas são apresentadas nos livros didáticos como uma listagem de regras sem justificativa, priorizando a técnica. Sua introdução é realizada através de resolução de problemas semelhantes aos exercícios de aplicação, e os enunciados indicam os algoritmos a serem utilizados.

Em sala de aula, a resolução das expressões numéricas é tratada como regras, e embora propriedades das operações sejam trabalhadas no 5º e 6º ano, não são discutidas como justificativas para a ordem de prevalência. No entanto, afirmam que as expressões numéricas devam ser trabalhadas para além da arte de regras, técnicas e números em um ensino algorítmico. Deve, portanto, se organizar uma discussão que leve em conta a compreensão e o emprego das propriedades operatórias.

Assim, dificuldades relacionadas às expressões numéricas se estendem no percurso acadêmico, em virtude da ordem das operações, que, de modo geral, é decorada pelo aluno, ao invés de compreender o mecanismo de solução. Embora o domínio das regras de prioridade dos sinais de associação e da ordem na realização dos cálculos, e da destreza do aluno em operar com os números sejam fatores relevantes para o êxito acadêmico, as regras precisam fazer sentido, de nada adiantando decorá-las e resolver as expressões numéricas de forma mecânica.

Partindo dessas situações, sugere-se que sejam desenvolvidas expressões numéricas cada vez mais complexas, com a generalização de situações semelhantes, chegando ao uso de sinais de associação por agrupamento de conjuntos, por exemplo. Que se justifique a hierarquia das quatro operações por meio do sentido de número, e de casos com contra exemplos da aplicação das regras, que se trabalhe com propriedades aritméticas para justificar as regras, em forma de atividades, para os estudantes construírem o raciocínio estabelecendo conexões de um conteúdo a outro.

Dentre as propostas para o trabalho com expressões numéricas na forma de situações estão o trabalho com desafios, tabulação de dados de um problema monetário, no qual se organize junto aos estudantes uma expressão com o total de gastos, e analise o que os elementos da expressão numérica significam, para assim compreender os mecanismos de escrita e resolução; a apresentação e elaboração de histórias a partir de expressões numéricas, como também a elaboração de expressões numéricas a partir de histórias em quadrinhos, jogos de compra e venda com palitos coloridos e pontuados de forma a escrever e resolver expressões numéricas, cuja discussão de sentido da multiplicação e da adição possa ser promovida.

Assim, os trabalhos teóricos sobre expressões numéricas apresentam um ensino algoritmizado, mecanizado, e sem justificativas matemáticas, e sugerem que se organizem situações que discutam os significados das propriedades aritméticas, da hierarquia das operações, das regras de prevalência e do uso de sinais de associação. Reforça-se a necessidade da generalização de padrões para a compreensão das regras, bem como da produção de sentido nas operações matemáticas.

A respeito da escrita da expressão numérica, os trabalhos indicam que os sujeitos têm dificuldades a) em realizar a conversão das expressões numéricas para a língua materna, b) de interpretar dados e descobrir quais operações dão conta da situação apresentada, preferindo problemas convencionais e verbais e afirmando ser difícil identificar na representação dos enunciados a expressão numérica na forma simbólica. Constatou-se também que as dificuldades de compreensão das expressões numéricas não ocorrem após a elucidação passo a passo realizada pelas professoras.

Uma das propostas para trabalhar tais dificuldades de representação simbólica de uma expressão numérica é a oralidade da linguagem matemática, que necessita do suporte da língua materna, cuja verbalização deve ocorrer pela leitura interpretada, ao invés da recorrente leitura soletrada[21].

Os resultados apontaram que para as operações descontextualizadas, os estudantes erraram tanto na ordem de prevalência quanto nos cálculos das operações, e que os estudantes tiveram uma diminuição de erros significativa na representação da ordem de prevalência nas questões contextualizadas, bem como no cálculo das operações realizadas. Diante disso, apresenta-se a necessidade de um planejamento que leve em conta situações problema a serem resolvidas pelos estudantes com intervenções didáticas, com direcionamento às suas necessidades específicas.

Dentre as propostas de criação de situações destacaram-se o trabalho com tecnologias como o uso de calculadora, de vídeos, de jogos digitais e não digitais, e de outros objetos de aprendizagem como ferramenta útil para o ensino dos conteúdos: tanto como motivação, como de forma a gerar discussões matemáticas a respeito dos elementos que compõem uma expressão numérica.

A respeito dos discursos e das práticas sobre expressões numéricas, constatou-se que embora os professores afirmem a necessidade de trabalhar problemas e situações contextualizadas na construção do sentido das operações em uma expressão numérica, os

---

[21] "Na leitura soletrada, os operandos são identificados, traduzidos e interpretados separadamente; não existe uma interação entre os elementos. Desta forma, a mensagem que a sentença representa, isto é, seu sentido matemático, pode não ser percebida. Por exemplo, o termo $3x$ seria lido da seguinte forma: "três 'xis' " ou o termo 5/3 seria lido "cinco 'sobre' três"" (THOMÉ; VELASCO; CUNHA, 2019, p. 1).

mesmos têm dificuldade em percebê-la como modelo matemático, desconhecem sua utilidade e ensinam como um conjunto de regras e técnicas a serem aplicadas, o que dificulta a discussão sobre os sentidos de cada elemento em uma expressão numérica, como o uso dos sinais de associação e os significados das regras de prevalência.

As expressões numéricas e as expressões aritméticas foram utilizadas nos trabalhos como sinônimos. Ainda que no discurso encontrem-se argumentos ligados à resolução de problemas e da necessidade do estudante ser desafiado para construir tal conhecimento, os resultados das pesquisas indicaram que professores, estudantes e livros didáticos concebem as expressões numéricas como emaranhado de regras e técnicas, com fim em si mesmo.

As expressões numéricas podem ser vistas como uma escrita matemática de situações, e nos textos analisados elas serviram como suporte em estudos sobre generalização de padrões, nos quais as regularidades eram descritas na forma de expressões, como análise da escrita matemática, em comparação com a língua materna, no estudo aprofundado do sentido das operações, devido às propriedades e regras de prevalência de uma expressão, e por fim, na caracterização de um professor de Matemática.

Para o estudo das expressões e do sentido de número, a discussão sobre como se escreve, com ou sem sinais de associação, sobre o que ocorre caso os sinais de associação troquem de lugar (parênteses no lugar dos colchetes) e sua impossibilidade de resolução neste caso, levou à ideia da possibilidade de escrever somente com parênteses, repetindo-os, conforme linguagem computacional. A respeito do trabalho com expressões numéricas em sala de aula, chegou-se à conclusão que é realizado de forma expositiva, com uma declaração de regras a serem seguidas, embora a discussão sobre absurdos matemáticos tenha ocorrido, como no exemplo de resolver não seguindo as ordens de prevalência.

O trabalho sobre o sentido da multiplicação, seja por configuração retangular ou por agrupamentos, teve como meio de escrita expressões numéricas, que modelaram os problemas e traduziram as questões para sua resolução. Reparou-se aqui em dois momentos: o primeiro relativo à tradução do problema e à escrita da expressão numérica, e o segundo referente à resolução desta expressão, com a necessidade de seguir as regras de prevalência. O mesmo se deu nos trabalhos referentes à generalização do cálculo de medidas em Geometria: expressões numéricas serviram de suporte para a representação das generalizações do cálculo de área e volume.

Ainda sobre a escrita, os estudos que analisaram as expressões numéricas como linguagem, chegaram à conclusão que existe uma correlação entre a lógica da escrita e da resolução de problemas na língua materna e na linguagem matemática, bem como da necessidade de dar sentido aos contextos dos problemas, para que não ocorra simplesmente a memorização de regras.

Os estudos sobre pensamento algébrico abordaram as expressões numéricas tanto como um obstáculo, no sentido do estudante não conseguir diferenciar uma expressão numérica de uma expressão algébrica, quanto como uma etapa, na qual a generalização numérica é um passo na construção do pensamento algébrico.

As expressões numéricas como característica do professor de Matemática, reforçam a ideia da forma com a qual historicamente vem sendo trabalhado este conteúdo: um apanhado de regras apresentado por um professor, que detém os sentidos e os significados e não os partilha com os estudantes.

Os textos nos quais as expressões numéricas serviram como suporte para outras pesquisas, trabalham a ideia de expressão matemática de problemas, cujas regras são construídas mediante os significados dos números e das operações nesses problemas, indicando, assim, a necessidade de trabalhar expressões contextualizadas em situações com as quais seus elementos e regras possam ser interpretados e seu sentido construído.

4.5 Referências

ALMEIDA, L.; BRANCO, N. Erros cometidos pelos alunos de 6.º ano a operar com números racionais, **Revista da UIIPS –Unidade de Investigação do Instituto Politécnico de Santarém**, Santarém, v. 6, n. 1, p. 95-109, 2018. Disponível em: https://revistas.rcaap.pt/uiips/article/view/16115. Acesso em: 5 mai. 2021.

ARRAIS, U. B**. Expressões Aritméticas: Crenças, Concepções e Competências no entendimento do professor polivalente**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11095. Acesso em: 5 nov. 2020.

BARBOSA, G. S.; MAGINA, S. M. P. Construindo significado para expressões numéricas multiplicativas a partir do jogo de mensagem. **Zetetiké**, Campinas, v. 22, n. 1, p. 9-30, 2014. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646576. Acesso em: 28 out. 2020.

BATISTA JUNIOR, C. V. **A matemática nos períodos iniciais dos cursos técnicos e formas de abordagem**. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Rio de Janeiro, 2019. Disponível em: https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/4357. Acesso em: 10 mai. 2020.

BENDER, M. L. Order of operations in elementary arithmetic. **The arithmetic teacher,** Cleveland, v. 9, n. 5, 1962. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/41184625. Acesso em: 5 mai. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br. Acesso em: 14 ago. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação Básica** FNDE. Dados estatísticos. Brasília, 2017. Disponível em: https://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/dados-estatisticos. Acesso em: 14 ago. 2020.

BRASIL.Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.

CEBOLA, G.; BROCARDO, J. Estratégias, Representações e Flexibilidade na Resolução de Tarefas de Comparação Multiplicativa. **Bolema**, Rio Claro, v. 33, n. 64, p.568-590, 2019. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a06. Acesso em: 14 ago. 2020.

FERNANDES, J. A.; CORREIA, P. F.; GUZMAN, R. R. Aquisição das operações combinatórias por alunos pré-universitários através de uma intervenção de ensino. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Cidade do México, v.13, n.2, jul., 2010. Disponível em: https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362010000200005. Acesso em: 28 ago. 2020.

FIGUEIREDO, F. F.; GROENWALD, C. L. O; RECALCATI, L. A. A (re)formulação e resolução de problemas com o uso de recursos tecnológicos digitais na Educação Matemática Financeira. **Em Teia**, Fortaleza, v. 10, n. 2, 2019. Disponível em: https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/240121. Acesso em: 28 ago. 2020.

FIUZA, R. P**. Números decimais e o tema transversal trabalho e consumo: um experimento utilizando uma sequência didática eletrônica.** 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2015. Disponível em: http://www.ppgecim.ulbra.br/teses/index.php/ppgecim/article/view/238/225. Acesso em: 29 ago. 2020.

FREIRE, R. S. **Desenvolvimento de conceitos algébricos por professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2011. Tese. (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011. Disponível em: https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/3304. Acesso em: 25 mai. 2020.

FREITAS, H. S. **Expressões numéricas e suas abordagens em livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental adotados por uma escola pública de Cuiabá-MT.** 2014. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2014. Disponível em: https://ri.ufmt.br/handle/1/1916. Acesso em: 10 mai. 2020.

FUCHS, M. J. **Revistas na área da educação e educação matemática: espaços para socialização-discussão-aprendizado**. 2012. Disponível em: http://cursos.unipampa.edu.br/cursos/licenciaturaemmatematicaitaqui/files/2012/05/Mapeamento-de-Revistas-MARIELE-JOSIANE-FUCHS.1.pdf. Acesso em: 29 out. 2020.

GOULART, J.; FARIAS, L. Uma Leitura Utilizando a Lente da Teoria Antropológica do Didático acerca de uma Aula sobre Expressões Numéricas. **Bolema**, Rio Claro, v. 33, n. 65, p.1570-1594, 2019. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a28. Acesso em: 30 ago. 2020.

GREGOLIN, V. R. **O Conhecimento Matemático Escolar: Operações com Números Naturais (e adjacências) no Ensino Fundamental**. 2002. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2002. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/tese_gregolin.pdf. Acesso em: 10 jan. 2020.

GROENWALD, C. L. O. Design Instrucional desenvolvido com alunos de licenciatura em Matemática com a temática Expressões Numéricas. **Paradigma**, Maracay, v. 41, p.636-656, 2020. Disponível em: http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/812. Acesso em: 10 jun. 2021.

KRUSZIELSKI, L. **Resolução de exercícios aritméticos e memória de trabalho**. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2005. Disponível em: https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/6026. Acesso em: 15 mai. 2021.

LOPES, D. M. P. **Alternativas metodológicas para o ensino de expressões numéricas: estratégias para construção de aprendizagens significativas** 2010. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Ciências Exatas) - Fundação Vale do Taquari de Educação e Desenvolvimento Social, Lajeado, 2010. Disponível em: http://hdl.handle.net/10737/114. Acesso em: 18 mai. 2020.

LORENZI, R. M. P. L.; CHIES, R. P. Expressões numéricas: sugestões de histórias matemáticas para uso em sala de aula. **Revista do Professor**, Porto Alegre, v. 89, n. 23, p. 24-28, jan/mar 2007.

LOURENÇO, E.; OLIVEIRA, P. Congruência semântica e equivalência referencial em problemas envolvendo equações de 1º grau. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.20, n. 1, p. 84-109, 2018. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/35043. Acesso em: 10 jun. 2020.

MACIEL, T. P. **Desenvolvimento de competências e habilidades nas expressões numéricas por meio do desafio dos quatro algarismos para o 6º ano do Ensino Fundamental**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Tocantins, Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=2267671#. Acesso em: 08 jul. 2021.

MARCILESE, M. **Sobre o papel da língua no desenvolvimento de habilidades cognitivas superiores**. 2011. Tese (Doutorado em Letras) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011. Disponível em: https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/17819/17819_1.PDF. Acesso em: 10 mai. 2022.

MENDES, H. L. Análise praxeológica de livros didáticos de matemática: o caso dos números binários. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.19, n.1, p. 423-444, 2017. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/27191/pdf. Acesso em: 10 mai. 2022.

MENEZES JUNIOR, E. M. **O uso de vídeo-aulas de matemática como metodologia para a melhoria da qualidade do ensino nos anos iniciais na escola municipal Henrique Dias no município de Porto Velho - RO.** 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino) - Universidade Federal de Rondônia, Rio de Janeiro, 2013. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=449&id2=27868. Acesso em: 10 mai. 2021.

MESTRE, C. ; OLIVEIRA, H. A mobilização da capacidade de generalização através da exploração de estratégias de cálculo: um estudo com alunos do 4.º ano. **Interacções**, n. 20, p.9-36, 2012. Disponível em: https://revistas.rcaap.pt/interaccoes/article/view/484/438 Acesso em: 10 mai. 2021.

MODANEZ, L. **Das sequências de padrões geométricos à introdução do pensamento algébrico**. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11235. Acesso em: 10 mai. 2021.

MONTENEGRO, J. A. **Identificação, conversão e tratamento de registros de representações semióticas auxiliando a aprendizagem de situações combinatórias.** 2018. Tese (Doutorado Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/32446. Acesso em: 12 mai. 2021.

MONTENEGRO, J. A.; BORBA, R. E. S. R; BITTAR, M. Representações Intermediárias na Aprendizagem de Situações Combinatórias. **Educação e realidade**, Porto Alegre, v. 45, n. 1, p. 1-26, 2020. Disponível em: https://doi.org/10.1590/2175-623687693. Acesso em: 10 jun. 2021.

NAKAMURA, O. Y. A. **Generalização de Padrões Geométricos: caminho para a construção de Expressão Algébrica no Ensino Fundamental**. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

OLIVEIRA, C. A. V. **Relações lógicas estabelecidas por alunos de uma quarta série do Ensino Fundamental**. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004. Disponível em: https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/18477. Acesso em: 10 mai. 2021.

OLIVEIRA, D. H.; REISDOERFER, C.; MOURA, M. C.; COCCO, P. M.; GILLI, J. C. Bingo das expressões numéricas. *In*: Encontro Nacional de Educação Matemática, 11. , 2013, Curitiba. **Anais [...].** Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2013, p. 1-4. Disponível em: http://www.sbemrevista.com.br/files/XIENEM/pdf/2362_1355_ID.pdf. Acesso em: 15 jul. 2021.

OTTES, A B. **Expressão numérica: a hierarquia das quatro operações matemáticas**. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2016. Disponível em: https://repositorio.ufsm.br/handle/1/12435. Acesso em: 21 ago. 2020.

OTTES, A. B.; FAJARDO, R. Um olhar sobre a hierarquia das quatro operações aritméticas nas expressões numéricas**. Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 1, n. 2, maio/ago. 2017. Disponível em https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/30/20. Acesso em: 21 ago. 2020.

PAIM, M. A. S. **Um objeto de aprendizagem como proposta didática para a aprendizagem das expressões numéricas com decimais.** 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Gestão e Tecnologias Aplicadas à Educação) - Universidade do Estado da Bahia, Salvador, 2018. Disponível em: http://hdl.handle.net/20.500.11896/1049. Acesso em: 21 ago. 2020.

PARMEGIANI, R. Contextualizando o ensino das expressões numéricas no Ensino Fundamental. *In*: Congresso Nacional de Educação Matemática, 2., 2011. Ijuí. **Anais** [...]. Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul – Ijuí. Ed. Unijuí, 2011. Disponível em: http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cnem/cnem/principal/re/PDF/RE64.pdf. Acesso em: 10 mai. 2020.

RECALCATI, L. A.; FIGUEIREDO, F. F.; GROENWALD, C. L. O. A produção de enunciados de problemas para a proposta de (re)formulação e resolução com o uso de tecnologias digitais no ensino de expressões numéricas. *In*: Encontro Nacional de Educação Matemática, 13, 2019, Cuiabá. **Anais [...].** Cuiabá, 2019, p. 1-7. Disponível em: https://www.sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/2019/paper/view/997/1938. Acesso em: 15 mar. 2020.

ROCHA, M. I.; MENINO, H. A. Desenvolvimento do sentido do numero na multiplicação. Um estudo de caso com crianças de 7 /8 anos. **Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa,** Cidade do México**,** v. 12, n. 1, p. 103-132, mar. 2009. Disponível em: https://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v12n1/v12n1a5.pdf. Acesso em: 25 jun. 2020.

SÁ, L. C. Experiências promovidas pelos jogos "Cubra 12" e "Contig 60" para abordagem de cálculo mental e expressões numéricas no programa mais educação. *In*: Encontro Nacional de Educação Matemática, 11. , 2013, Curitiba. **Anais [...].** Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2013, p. 1-8. Disponível em: http://www.sbemrevista.com.br/files/XIENEM/pdf/197_1746_ID.pdf. Acesso em: 18 jun. 2020.

SALOMÃO, C. A. R. **A passagem de textos em língua materna para expressões aritméticas, mediada pelo uso de uma calculadora.** 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2013. Disponível em: https://repositorio.pgsskroton.com/bitstream/123456789/3532/1/CRISLAINE%20APARECIDA%20RIBEIRO%20SALOM%C3%83O.pdf. Acesso em: 10 jun. 2020.

SANTIAGO, I. **Formulação e resolução de problemas matemáticos: um estudo exploratório sobre o pensamento de crianças do Ensino Fundamental**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação) - Centro Universitário Moura Lacerda, Ribeirão Preto, 2011.

SANTOS, A. B. C; PEREIRA, J. C. S; NUNES, J. M. V. Concepções de professores de matemática do ensino básico sobre a álgebra escolar. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 19, n. 1, 2017, p. 81-103. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/28616. Acesso em: 10 ago. 2021.

SANTOS, M. M.; NASCIMENTO, E. S.; ATTIE, J. P. Processos de argumentação em livros didáticos: expressões numéricas. *In*: Encontro Nacional de Educação Matemática, 13, 2019, Cuiabá. **Anais [...].** Cuiabá, 2019, p. 1-7. Disponível em: https://www.sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/2019/paper/view/2212/1773. Acesso em: 10 nov. 2022.

SILVA, A. L. A.; OLIVEIRA, M. G. A vida por trás das expressões. *In*: Encontro Nacional de Educação Matemática, 11. , 2013, Curitiba. **Anais [...].** Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2013, p. 1-8. Disponível em: http://www.sbemrevista.com.br/files/XIENEM/pdf/513_213_ID.pdf. Acesso em: 17 ago. 2020.

SILVA, G. C. M. **O ensino e aprendizagem de expressões numéricas para 5ª série do Ensino Fundamental com a utilização do jogo CONTIG® 60.** 2009. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11382. Acesso em: 12 ago. 2020.

SILVA, G. C. M.; ARRUDA, M. R. M. F. As expressões numéricas, o Contig 60 e a formação de professores do ensino fundamental I. *In:* MONTEIRO, S. A. I.; RIBEIRO, R.; LEMES, S. S.; MUZZETI, L. R. (Org.). **Educação na contemporaneidade**: reflexões e pesquisa. São Carlos: Pedro e João, 2011, p. 23-42. Disponível em: https://pedroejoaoeditores.com.br/2022/wp-content/uploads/2022/01/educcontemporaneidade-1.pdf. Acesso em: 10 ago. 2020.

SILVA, J. S. C.; MOURA, P. R. S. Estágio supervisionado: uma proposta de trilha matemática para o ensino de expressões numéricas. *In*: Encontro Nacional de Educação Matemática, 13, 2019, Cuiabá. **Anais [...].** Cuiabá, 2019, p. 1-10. Disponível em: https://www.sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/2019/paper/view/884/1710. Acesso em: 10 ago. 2020.

SILVA, R. Narrativas Multimodais: a imagem dos matemáticos em performances matemáticas digitais. **Bolema**, Rio Claro, v. 28, v. 49, p. 950 – 973, ago 2014. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/vZrDKmSr3rqbwxXFykPDBZD/?lang=pt&format=pdf. Acesso em: 22 nov. 2021.

SOARES, N. N.; PIROLA, N. A. Resolução de problemas e expressões numéricas: o quadro dos quatro quatros e o nunca dois e números binários. **REMATEC. Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, Belém, v. 15, n. 15, p. 163-177, dez. 2020. Disponível em: https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/100. Acesso em: 10 jun. 2020.

SOARES, P. J. **O jogo como recurso didático na apropriação dos números inteiros: uma experiência de sucesso**. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11329. Acesso em: 10 mai. 2020.

SOARES, R. M. **Pensamento algébrico: quais elementos são identificados por professores de matemática em atividades com este foco?** 2018. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2018. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/21317. Acesso em: 10 mai. 2020.

SOUZA NETO, L. A. **Aritmética modular e criptografia no ensino básico**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Maranhão, Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=2235529#. Acesso em: 10 jun. 2020.

THOMÉ, M. S.; CUNHA, S.; VELASCO, J. Eliminando ambiguidades de expressões aritméticas com o uso correto do seu dialeto. *In*: Encontro Nacional de Educação Matemática, 13, 2019, Cuiabá. **Anais [...].** Cuiabá, 2019, p. 1-11. Disponível em: https://www.sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/2019/paper/view/1178/1816. Acesso em: 10 ago. 2020.

TOSTES, T. A. **Tabuleiro das Expressões: Um Auxiliador no Ensino da Matemática para Alunos com Deficiência Visual.** 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino das Ciências) - Universidade do Grande Rio – Prof. José de Souza Herdy, Duque de Caxias, 2015. Disponível em: https://tede.unigranrio.edu.br/handle/tede/270. Acesso em: 10 ago. 2020.

VIEIRA, A. L.; RIOS, P. S; VASCONCELOS, C. A linguagem simbólica e a resolução de problemas matemáticos no 8º ano do Ensino Fundamental. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 22, n. 1, p. 43-67, 2020. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/40954/pdf. Acesso em: 10 out. 2022.

VIEIRA, M. A. **(Re)Construindo Saberes: Uma Proposta De Portal Educacional Para Ingressantes no Ensino Superior**. 2019.Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino e suas Tecnologias) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Campos dos Goytacazes, 2019. Disponível em: https://educapes.capes.gov.br/handle/capes/553703. Acesso em: 10 out. 2021.

WATABE, L. **Características da resolução de problemas por alunos do 4º ano do ensino fundamental.** 2012. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2012. Disponível em: https://repositorio.pgsskroton.com/handle/123456789/3581. Acesso em: 10 ago. 2021.

5 SITUAÇÕES DE EXPRESSÕES NUMÉRICAS EM LIVROS DIDÁTICOS DE 6º ANO: UMA ANÁLISE SEGUNDO A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS[22]

5.1 Introdução

Este trabalho articula o tema das expressões numéricas e suas formas de apresentação nos livros didáticos. Ao longo dos anos, o livro didático se constituiu como um importante material no exercício da docência, se destacando como um dos recursos mais utilizados pelos docentes da Educação. Diante desse contexto, as circunstâncias em que o livro didático tem ocupado o papel central do planejamento pedagógico, ele deve ser compreendido como portador de escolhas do saber a ser ensinado e ser visto como um elemento a mais no diálogo entre os professores e os estudantes. O livro didático serve, portanto, como potencializador do processo investigativo dos estudantes de modo a ampliar, consolidar e integrar os conhecimentos; e para os professores, como subsídios para o aprimoramento de seu processo didático-pedagógico (SANTOS; LIMA, 2010, SANTOS; ALBUQUERQUE, 2014).

Por conseguinte, no campo da Matemática, em que significativa parte dos conhecimentos expostos nos livros didáticos são representados por símbolos, a utilização desse material se torna um aliado para contextualizar e integrar as diferentes representações matemáticas ao cotidiano dos estudantes. Além disso, a forma que os livros didáticos apresentam alguns conteúdos, bem como o desenvolvimento das atividades, pode contribuir para a compreensão dos estudantes sobre os processos que envolvem a tradução da linguagem natural à representação algébrica, diagramas, tabelas e outras representações presentes nas situações envolvendo expressões numéricas, as quais, no início dos anos finais do Ensino Fundamental, sintetizam o estudo das quatro operações aritméticas. O livro de Matemática do 6º ano inaugura a coleção do Ensino Fundamental - anos finais, etapa que se espera, dentre os conceitos aprendidos pelos estudantes, que as quatro operações façam parte de seu repertório de esquemas já organizados.

Salienta-se ainda que no 6º ano, após as quatro operações serem trabalhadas e antes da apresentação formal às equações, é o momento quando os estudantes ampliam seus conhecimentos acerca tanto dos procedimentos e regras operacionais quanto sobre as

[22] Capítulo publicado como RAMOS, R. C. S. S; SILVA, J. A, LUZ, V. S.; FIRME, S. M.; SARAIVA, D. R. Situações de expressões numéricas em livros didáticos de 6º ano: uma análise segundo a Teoria dos Campos Conceituais. **Bolema**, Rio Claro, v. 35, n. 71, p. 1294-1315, 2021. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a04. Acesso em 9 dez. 2022.

motivações e justificativas para tais (OTTES; FAJARDO, 2017), organizando esquemas necessários à construção de estratégias de resolução das expressões numéricas, as quais compreendemos, assim como Silva (2009, p.60), como sendo a "representação do valor de uma quantidade sobre a forma algébrica com ou sem a pontuação. Então, expressão numérica é toda expressão que envolve uma ou mais operações com números". Sendo o livro didático um aliado para o professor pensar o seu planejamento, interessa-nos investigar como as abordagens dadas às expressões numéricas se apresentam nos mesmos; assim, temos como objetivo analisar como as situações envolvendo expressões numéricas são retratadas nos livros didáticos do 6º ano do Ensino Fundamental, a partir do enfoque da Teoria dos Campos Conceituais. Para tal, o *corpus* da pesquisa se constituiu de livros didáticos utilizados nas escolas da rede pública de uma cidade do interior do Rio Grande do Sul. O estudo foi desenvolvido com base na análise documental, procurando evidenciar diferentes possibilidades de ensino.

5.2 Livro Didático

Partimos da reflexão de que o livro didático é um "compêndio especificamente organizado para fins de educação escolar e que pode ou não abranger diferentes áreas de conhecimento, com propósito formativo, segundo valores que se deseja que sejam veiculados" (CORRÊA, 2000, p.23). Dentre esses valores, destacamos as escolhas dos autores sobre a abordagem dos problemas nos capítulos ou itens que se referem à expressões numéricas.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca, para os anos finais do Ensino Fundamental, "a importância da comunicação em linguagem matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação" (BRASIL, 2018, p. 298), diferentes representações de um mesmo problema, e os livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental seguem tais orientações, contendo em seu corpo as propostas pedagógicas que os autores inserem, respeitando as legislações e propostas curriculares dos órgãos competentes[23]. Dentre os assuntos do 6º ano, as expressões numéricas são

[23] Diante da dimensão e funcionalidade do livro didático, foi criada uma política pública para legislar sobre as questões e regramentos concernentes ao livro didático. O Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) é destinado a avaliar e disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educativa, de forma sistemática, regular e gratuita, às escolas públicas de Educação Básica das redes federal, estaduais, municipais (MEC, 2018). Atualmente, a garantia do acesso ao livro didático é um direito do estudante brasileiro da Educação Básica, pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. De

tradicionalmente contempladas, por serem a síntese do estudo das quatro operações básicas da aritmética; anunciar uma escrita e resolução que envolve regras e passos específicos; e ser uma forma de comunicação em linguagem matemática.

5.3 Expressões Numéricas

Em Matemática podemos utilizar modelos para traduzir, descrever e expressar situações do cotidiano, os quais podem ser representados por expressões que envolvam uma ou mais operações matemáticas e que podem ou não estar agrupados por sinais de associação, resultando em uma quantidade numérica (FREITAS, 2014).

Nesse contexto, uma maneira de apresentar situações aritméticas é por meio das expressões numéricas, as quais compreendemos como o ato de expressar uma situação problema em linguagem matemática, podendo utilizar números, operações e sinais de associação, respeitando uma ordem de prevalência e propriedades operatórias, resultando em apenas um número, apresentando o problema de forma concisa, permitindo economia de esforço e tempo (ARRAIS, 2006; FREITAS, 2014; PAIM, 2018; SALOMÃO, 2013; SILVA; ARRUDA, 2011; SILVA, 2009).

Os enunciados de problemas de expressões numéricas trazem em si propostas de pensamento em estruturas de operações, que se diversificam na redação do problema, e envolvem passos que podem levar à construção correta da escrita da expressão na forma algébrica (forma simbólica da expressão numérica), bem como de sua resolução. A Teoria dos Campos Conceituais classifica tais estruturas e propõe um olhar minucioso que permite a análise das mesmas, como viés de pesquisa e ensino.

5.4 Teoria dos Campos Conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais é uma teoria didática e psicológica que leva em conta o desenvolvimento do sujeito, bem como a aprendizagem em longo prazo dos conhecimentos. Essa teoria compreende que o saber forma-se a partir de situações, as quais devem ser enfrentadas e representadas, sendo que para os alunos mudarem suas concepções inadequadas, eles precisam entrar em conflito com situações que tais concepções não

---

acordo com os dados estatísticos fornecidos pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), no ano de 2020, o PNLD distribui em todo país mais de 172 milhões de exemplares de livros didáticos, beneficiando mais de 32 milhões de estudantes de toda a Educação Básica (BRASIL, 2017).

permitem tratar, ou seja, para que as novas situações e conceitos tenham sentido para os alunos, precisam adaptá-los aos seus conhecimentos anteriores (VERGNAUD, 1986, 2017).

A conceitualização está no centro da Teoria dos Campos Conceituais, e consiste em identificar os objetos do mundo, suas propriedades, relações e transformações de forma a produzir uma construção de conhecimento (VERGNAUD, 2007), que está organizado em campos conceituais, definidos como "um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão" (VERGNAUD, 1986, p.90).

Assim, mediante uma tarefa (situação[24]), são postas em ação uma variedade de conceitos, e para a construção de cada conceito, uma variedade de situações são necessárias, sendo um conceito definido como uma terna de três conjuntos: "(S, I, R). O S: conjunto de situações que dão sentido ao conceito; I: o conjunto de invariantes que constituem as diferentes propriedades do conceito; R: o conjunto das representações simbólicas que podem ser utilizadas" (VERGNAUD, 1986, p. 83). Trazemos como enfoque os Campos Conceituais Aditivos e Multiplicativos e suas imbricações, por meio da análise de expressões numéricas.

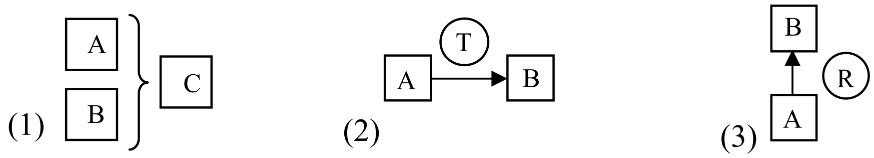
O campo conceitual aditivo, ou das estruturas aditivas, corresponde ao "conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias adições ou subtrações, e o conjunto de conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações como tarefas matemáticas". (VERGNAUD, 1990, p. 141), ou seja, "estruturas cujas relações em jogo são formadas exclusivamente por adições ou subtrações" (VERGNAUD, 2009, p. 197). Tais relações caracterizam classes de acordo com as ações subjacentes nas situações a serem resolvidas.

A classe dos problemas de composição envolve as ideias de juntar, separar ou completar partes entre si para compor o todo, ou ainda separar uma parte do todo para encontrar a outra parte. Seu diagrama é representado pela composição das partes para formar o todo, conforme Figura 39(1). A classe dos problemas de transformação envolve a ideia de acrescentar ou diminuir, em contextos em que a ideia temporal está sempre envolvida, com um estado inicial, que tem uma quantidade que se transforma, chegando ao estado final com outra quantidade, conforme Figura 39(2). A classe dos problemas de comparação, como o verbo indica, envolve a ideia de comparar duas quantidades: referente e referido, sendo a comparação entre dois grupos, parte-se do grupo de referência (referente) A, para chegar, mediante a relação de comparação, ao valor do outro grupo (referido) B, visto na Figura 44(3) (FUNDAÇÃO VALE, 2015; MAGINA, *et al*. 2008).

---

[24]Assim como Santana e Lima, "usamos o termo situação como sinônimo de problema, situação-problema e tarefa" (2017, p. 15).

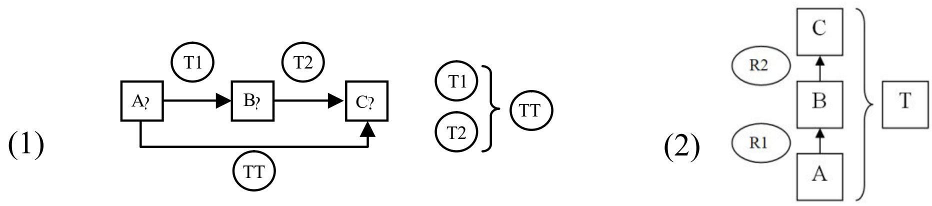
Figura 39–Diagrama da Estrutura Aditiva – Classes: Composição(1), Transformação (2) e Comparação (3)



Fonte: Vergnaud (2009).

As classes de composição, transformação e comparação permitem descrever a situação de um ponto de vista de estrutura representativa, no entanto, nem sempre uma situação aditiva possui apenas uma dessas classes, necessitando pensamentos mais elaborados para sua resolução. Um exemplo é a classe das composições de transformações, denominada problema complexo[25], com mais de uma transformação (T1, T2, ...), sendo a transformação total das mesmas (TT) uma composição de estados relativos. A Figura 40(1) apresenta, em duas partes, seu diagrama, sendo o primeiro o da transformação propriamente dita e o segundo da composição de suas relações. A classe de composição de comparações envolve múltiplas comparações entre as partes, sendo a junção das mesmas a composição que resulta no todo. A Figura 40(2) apresenta o diagrama que, além das relações de comparação (R1 e R2, apresentadas no interior das elipses), contempla a composição.

Figura 40– Diagrama da Estrutura Aditiva – Classe composição de transformações (1) e Classe composição de comparações (2)



Fonte: adaptado de Magina *et al.* (2018, p. 60).

O campo conceitual multiplicativo, ou estruturas multiplicativas, segundo Vergnaud (1990, p.142) compreende "tanto o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias multiplicações ou divisões e o conjunto de conceitos e teoremas que permitem analisar estas situações", contemplando relações ternárias e quaternárias, cujas classes são

[25]Magina *et al*. (2008) classificam como problemas mistos os que envolvem "mais de um raciocínio aditivo na mesma situação" (p. 61). Vergnaud (2009) denomina de problemas complexos aqueles que, dentro de uma estrutura, possuem mais de uma relação elementar envolvida, e de problema misto, o que envolve relações aditivas e multiplicativas ao mesmo tempo (p. 269). Arrais (2006) chama de estruturas mistas a uma classe particular de problemas, nos quais "teremos Estrutura Aditiva e Estrutura Multiplicativa ocorrendo concomitantemente" (p. 6). Nós seguiremos a nomenclatura de Vergnaud (2009).

esquematizadas no Quadro 4.

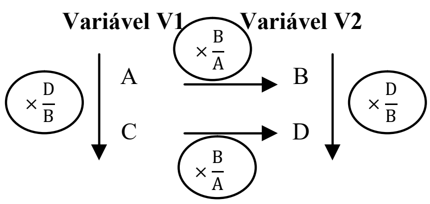
Quadro 4 – Síntese das Estruturas Multiplicativas elaboradas por Magina, Merlini e Santos

Estrutura multiplicativa							
Relações	Quaternária			Ternária			
Eixos	Proporção simples	Proporção dupla	Proporção múltipla	Comparação multiplicativa		Produto de medidas	
Classes	Um para muitos ou Muitos para muitos			Relação desconhecida	Referente ou referido desconhecido	Configuração retangular	Combinatória
Tipos	Discreto ou Contínuo			Discreto ou Contínuo		Contínuo	Discreto

Fonte: Magina, Merlini e Santos (2016, p. 69).

Relações quaternárias “entre quatro quantidades, duas medidas de um tipo e duas medidas de outro tipo” (VERGNAUD, 2009, p. 239), abrangem os eixos de proporção simples, no qual quatro medidas relacionam-se duas a duas; proporção dupla, no qual pelo menos três grandezas são comparadas, sendo duas independentes, relacionadas à terceira, e proporção múltipla, no qual pelo menos três grandezas se relacionam entre si. Ao se comparar medidas de mesma grandeza, obtém-se a constante de proporcionalidade chamada operador escalar, sem dimensão; e comparando-se duas grandezas diferentes, o operador funcional, com uma dimensão traduzida pela razão das que o compõem. No diagrama para a proporção simples, Figura 41, está ilustrada na vertical a razão que resulta no operador escalar e na horizontal, o operador funcional.

Figura 41 – Diagrama da Estrutura Multiplicativa – Eixo proporção simples



Fonte: adaptado de Vergnaud (2009).

O operador funcional terá a unidade v2/v1, e o operador escalar, por ser a razão entre duas medidas de mesma grandeza, não tem unidade, podendo ser pensado como estratégia (SANTOS, 2015).

Os problemas de relações ternárias englobam produto de medidas e comparação multiplicativa, cujas situações remetem a quantas vezes mais e quantas vezes menos, com referente, referido ou relação desconhecida. O diagrama é análogo à comparação aditiva, porém o sinal x ou ÷ aparece junto à relação. Os problemas de produto de medidas envolvem "três quantidades, das quais uma é o produto das outras duas ao mesmo tempo no plano numérico e dimensional" (VERGNAUD, 2009, p. 253). São divididas entre combinatória (discreto), a qual, segundo Magina, Merlini e Santos (2016, p. 75) trata da noção de produto cartesiano entre dois conjuntos disjuntos e configuração retangular (contínuo), cujos fatores remetem às medidas do lado de um retângulo.

Vergnaud (2009) chama de problemas mistos às situações que contemplam problemas multiplicativos e aditivos ao mesmo tempo, estes são formados, segundo Santos (2015), pelas classes, eixos e relações, contidas em cada estrutura.

5.5 Estudos que problematizaram as expressões numéricas e o livro didático

As expressões numéricas, além de aglutinar as operações conhecidas pelos estudantes em problemas, iniciam um caráter simbólico no qual as operações são escritas de forma algébrica e resolvidas como tal. A mudança na linguagem, na técnica de resolução e a necessidade de respeitar a hierarquia das operações são abordadas por pesquisas que estudam o livro didático e as expressões numéricas.

Costa, Nascimento e Santos (2019) identificaram as argumentações nos livros didáticos de Matemática de 4º, 5º e 6º anos a respeito de expressões aritméticas, identificando a argumentação explicativa ou justificativa. Concluíram que as coleções utilizaram a argumentação explicativa, não justificando os motivos da ordem das operações ou do uso dos sinais.

Freitas (2014) investigou a abordagem dada às expressões numéricas em livros de 6º ano de uma escola. Tratou as expressões numéricas como técnica de cálculo algébrico que pode ser usada para resolver diversas situações, e as analisou segundo o que chamou de dois gêneros de organização matemática: sendo o primeiro como os livros definiram a noção de expressões numéricas, concluindo que as expressões numéricas são apresentadas por problemas rotineiros, e o segundo como um "estudo específico das expressões numéricas com as quatro operações e os símbolos ( ), [ ] e { }" (FREITAS, 2014, p.103), no qual as técnicas de cálculo mental, resolução de problema e algoritmos foram as mais frequentes.

Ottes (2016) disserta a respeito da hierarquia das quatro operações matemáticas nas expressões numéricas, e aborda de forma sucinta como três coleções de livros desenvolvem a ideia de tal hierarquia, concluindo que as coleções analisadas não apresentam justificativa nem para a ordem das operações, nem para os sinais de associação.

Silva (2009) apresentou um pequeno relato a respeito de como os livros didáticos historicamente abordam as expressões numéricas, com exercícios de aplicação ou técnicas e regras a serem seguidas, o que, segundo a autora, impacta na prática dos professores, que majoritariamente utilizam o livro didático como ferramenta em sala de aula.

Este estudo se diferencia das pesquisas já realizadas, pois contempla, para além dos significados propostos, uma análise das situações dos capítulos de expressões numéricas, contidos em livros didáticos do 6º ano, sob a perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990). A Teoria dos Campos Conceituais é de grande relevância para a educação brasileira, em particular para a Educação Matemática, cujos estudos contemplando as Estruturas Aditivas e Multiplicativas servem de sustentáculo para grande parte do que hoje se pensa em ensino e aprendizagem de Matemática no Brasil. Projetos educacionais, livros didáticos e documentos oficiais, assim como pesquisas envolvendo estratégias de resolução de problemas por crianças e propostas de professores em sala de aula são largamente difundidas, e constantemente revisadas e ampliadas.

Este trabalho toma por aporte uma rede que se entrelaça nos movimentos referentes a essas produções, e visa ampliar a discussão no que se refere às representações das situações de expressões numéricas. Para além de organizar excertos de livros didáticos conforme suas possíveis estratégias de resolução, buscamos pensar sobre como as representações de situações na forma de expressões numéricas sintetizam o estudo de quatro operações, conquanto estas sofrem releituras permeadas de sentidos pela Teoria dos Campos Conceituais.

5.6 Método

O desenvolvimento da pesquisa ocorreu a partir da análise de livros didáticos de Matemática do 6º ano do Ensino Fundamental, sobre expressões numéricas. Dessa forma, caracteriza-se por um estudo descritivo/explicativo, de abordagem qualitativa quanto ao processo de investigação, pois objetiva descrever como as expressões numéricas são retratadas nos livros didáticos do 6º ano do Ensino Fundamental. Caracteriza-se como um estudo documental cujo *corpus* de análise compôs-se por livros didáticos utilizados do 6º ano do Ensino Fundamental referentes ao Programa Nacional do Livro Didático e Material 2020, das escolas da rede pública de um município do interior do Rio Grande do Sul.

Os títulos dos livros foram selecionados a partir de uma busca no Portal do Ministério da Educação (MEC) com os seguintes critérios: escolas municipais (44) e estaduais (32) do Município em estudo; livros didáticos de Matemática utilizados no 6º ano pelas escolas. A busca resultou nos títulos apresentados na Tabela 2. Para eleger as questões presentes nos livros didáticos, adotamos o seguinte critério: capítulo ou tópicos sobre expressão numérica nos livros.

Os livros apresentam as expressões numéricas no capítulo ou unidade referente a operações com os números naturais, com diferentes dinâmicas de desenvolvimento. As coleções Teláris e A Conquista da Matemática trazem um capítulo somente para expressões numéricas, sendo que a primeira aborda somente o formato algébrico, com exemplo e exercício, seguidos de outros capítulos com problemas sobre operações; e a segunda inicia com situações e as desenvolve passo a passo, com resolução comentada, seguida de exercícios e problemas, finalizando com questionamentos sobre a importância dos sinais de associação e regras de prevalência. As coleções Araribá, Bianchini, Trilhas e Compreensão e Prática abordam as expressões numéricas para cada operação, diluindo entre as seções, iniciando com situações, desenvolvidas através de exemplos nos quais são explicadas as regras de prevalência e os sinais de associação, e seguidas de problemas; a coleção Apoema menciona em um exemplo as expressões numéricas, em seu enunciado, com um balão explicativo, e segue um exercício com uma expressão na forma simbólica. Com isso, o *corpus* inicial para a análise foi de 271 excertos. A fim de delimitar o *corpus* de análise, foi realizada uma triagem, sendo listados os trechos que abordassem apenas as operações aritméticas fundamentais: adição, subtração, multiplicação e divisão, resultando em 186 excertos.

Tabela 2 – Síntese do delineamento do corpus

Sigla	Nome do Livros Didático	1ª Triagem	2ª Triagem
A	A Conquista da Matemática-Editora S. A	48	41
B	Araribá Mais – Matemática - Editora Moderna LTDA	43	34
C	Matemática – Bianchini - Editora Moderna LTDA	61	32
D	Matemática - Compreensão e Prática-Editora Moderna	47	41
E	Teláris Matemática- Editora Ática S.A	34	18
F	Trilhas da Matemática- Saraiva Educação S.A	35	17
G	Apoema- Editora do Brasil S.A	3	3
H	Matemática Essencial-Editora Scipione S.A	Não tivemos acesso	-
I	Matemática Realidade & Tecnologia- Editora FTD S.A	Não tivemos acesso	-
	Total	**271**	**186**

Fonte: dados da pesquisa.

A partir desse conjunto, classificamos os trechos em quatro tipos de classe: (a) definição/conceito/apresentação, (b) exemplos, (c) problemas e (d) exercícios. A classe (a) definição/conceito/apresentação, contemplou toda a parte escrita e buscou explicar ou contextualizar o que seriam as apresentações produzidas pelos autores sobre expressões numéricas. A classe (b) exemplo abarcou todas as explicações que se utilizaram de um modelo para explicar o pensamento ou a forma de resolução. As classes (c) problemas e (d) exercícios foram definidas com base nos estudos de Dante (2009), para o qual problema se diferencia de exercício, pois ao se deparar com um problema o estudante é confrontado por um obstáculo a ser resolvido, que lhe exigirá o pensar consciente requisitando o estabelecimento de relações para chegar a uma solução; enquanto que ao resolver um exercício o estudante geralmente é levado a aplicar um determinado algoritmo que pode ser resolvido passo a passo, com o objetivo de treinar habilidades para reforçar conhecimentos já explorados. O total de excertos a partir da pré-análise e classificação: (a) Definição/conceito/apresentação (18); (b) Exemplo (29); (c) Problema (55) e (d) Exercício (84).

Para compreender a abordagem das situações referentes às expressões numéricas nas coleções analisadas, a partir de diferentes estruturas das operações, definimos que as atividades analisadas seriam apenas as classificadas como (c) problemas. Esta escolha se justifica porque o foco do estudo são as situações, ou seja, os exercícios, exemplos e definições tornam-se menos interessantes por que prescindem de um contexto. Com isso, o *corpus* de análise resultou em um conjunto com 55 problemas selecionados, dos quais oito eram de manipulação matemática, restando 47 situações[26], as quais foram classificadas, em estruturas aditivas ou multiplicativas e problemas mistos, aqui denominados imbricações entre estruturas aditivas e estruturas multiplicativas. (VERGNAUD, 2009), mediante categorias *a priori*, conforme as operações necessárias para sua resolução. Além da figura que retrata cada um dos excertos e o código para identificar o mesmo, foram agrupados: a representação da expressão numérica em sua forma algébrica ou simbólica, o diagrama que representa a classe e a sua descrição, como apresentamos a seguir.

5.7 Resultados e discussão

As abordagens das expressões numéricas, nos livros analisados, são estruturadas através de exemplos de como resolver uma expressão, e da explicação passo a passo de como efetuar as operações, respeitando a ordem, tanto das regras de prevalência quanto dos sinais de associação. Elas são dispersas pelos livros de formas diferenciadas, algumas durante o desenvolvimento das operações, outras ao final do capítulo, com problemas, e ainda como

[26]Para essa sistematização foram criados códigos para identificar cada problema, de modo que o código foi constituído por uma letra em maiúscula do alfabeto latino para identificar o livro, seguido de um número indo arábico para indicar a ordem do excerto, mais um número em romano para identificar a classe e ainda um número indo arábico representando a página. Por exemplo B20III4, significa que o excerto é do livro Araribá, ocupa a 20ª posição, é classificado como problema e está na página 4 do livro.

procedimento a ser realizado, sem aplicação imediata em problemas.

Distinguimos que os livros didáticos apresentam mais atividades no formato de exercícios do que de problemas, corroborando com Freitas (2014) e Salomão (2013). A partir da Teoria dos Campos Conceituais, identificamos quais classes/eixos compõem as expressões numéricas nas atividades no formato de problemas. A Tabela 3 apresenta uma síntese dessa organização, cuja maior frequência se encontra nas situações de proporção simples para a multiplicação, principalmente nos problemas mistos.

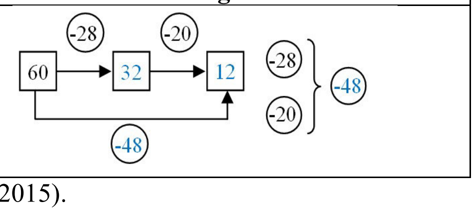
Tabela 3 – Síntese da classificação das situações

Estrutura Aditiva					Estrutura Multiplicativa					
Transformação	Composição	Comparação	Composição de transformações	Composição de comparações	Proporção simples	Proporção dupla	Proporção múltipla	Comparação multiplicativa	Combinatória	Fr
8	14	10	7	1	31	1	4	2	2	80
10%	17,5%	12,5%	8,75%	1,25%	38,75%	1,25%	5%	2,5%	2,5%	100%

Fonte: dados da pesquisa.

Nas situações aditivas classificadas como transformação simples, ocorreu a apresentação do estado inicial e estado final, para calcular a relação (transformação), como também a apresentação do dado em estado final, e a relação (transformação) para descobrir o estado inicial, em ambos os casos sendo necessário realizar a subtração. O Quadro 5 apresenta uma situação de composição de transformações, E153III130. Seu enunciado solicita tanto a representação da expressão numérica, quanto a solução da mesma. Seu estado inicial é conhecido assim como suas relações parciais. O estado intermediário e o estado final são desconhecidos. A relação composta (transformação total – TT) é desconhecida, oriunda de composição de dois estados relativos dados. As relações são menores que zero, na estrutura aditiva, ambas obtidas pelo verbo tirar, originando duas subtrações. Na composição dos estados relativos, obtém-se, a partir de duas relações menores que zero, a soma das mesmas, também menor que zero.

Quadro 5 – Representações da expressão numérica E153III130

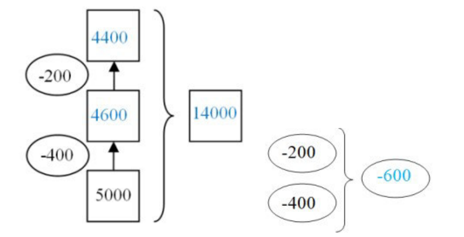
Situação	Expressão numérica	Diagrama
Na quitanda de Júlia, havia 60 peras no início do dia, e foram vendidas 28 peras de manhã e 20 à tarde. Quantas peras sobraram? Escreva as duas expressões numéricas que traduzem essa situação e calcule seus valores.	60-(28+20) 60-28-20	

Fonte: elaborado a partir de Dante (2015).

Para o Quadro 5, existem duas possibilidades de escolha, comparando o diagrama e a expressão numérica em sua forma simbólica: a primeira refere-se a uma repetição de procedimentos, a saber, primeiro retira 28 depois retira 20, como na parte superior do diagrama, resultando na expressão 60-28-20, e a segunda opção 60-(28+20); aqui temos, em comparação com a primeira expressão, a mudança de sinal dos números dentro dos parênteses (distributividade da multiplicação em relação à adição). Podemos observar na composição das transformações, presente na parte direita do diagrama, a operação feita à parte, resultando em uma transformação total de -48, possibilitando outro caminho de resolução da situação. Tais processos apontam para uma diversidade de opções para a resolução do mesmo problema, o que, segundo Magina et al (2008), é relevante ser considerado pelo professor para que haja o processo de aprendizagem.

O Quadro 6 traz uma composição de comparações, na qual conhecemos uma parte e as relações comparativas entre esta e as demais, e queremos saber o todo. A composição das relações resulta na relação de comparação entre a primeira e a última parte, mas não na composição das partes comparadas, chegando ao 4400, mas não ao 14000, pois as medidas são estáticas, característica das comparações.

Quadro 6 – Representações da expressão numérica A31III73

Situação	Expressão numérica	Diagrama
(UECE) Numa corrida de 5 000 metros, o primeiro colocado vence o segundo por 400 metros, e o segundo colocado vence o terceiro por 200 metros. Qual a soma das distâncias percorridas, em metros, pelos três corredores no instante em que o primeiro colocado atinge a marca de chegada? 14 000 metros.	5000+(5000-400)+[(5000-400)-200]	

Fonte: elaborado a partir de Giovanni Júnior (2018).

Para os problemas multiplicativos, encontramos cinco situações envolvendo a relação quaternária proporção simples, e uma situação envolvendo relação ternária produto de medidas – combinatória, cujo verbo de comando era identificar, como expresso no Quadro 7.

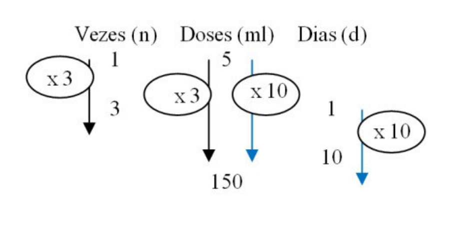
Quadro 7 – Representações da expressão numérica D145III68

Situação	Expressão numérica	Diagrama
Entre as situações a seguir, identifique as que correspondem a problemas que envolvem proporção. situações b e c a) Em uma sorveteria, estão disponíveis 6 sabores de sorvete e 2 sabores de calda (chocolate e caramelo). Dessa maneira, é possível escolher 12 possibilidades diferentes, sendo um sabor de sorvete e uma calda. b) Um ingresso de cinema custa R$ 24,00. Então, 3 ingressos custarão R$ 72,00.	a) 6 x 12 b) 24 x 3	a) Produto cartesiano $P_{6 \times 2}$(sorvete x calda) 6 x 2 = 12 b) Ingresso Preço x 3 1 24 x 3 3 72

Fonte: elaborado a partir de Silveira (2018).

Com base nas informações do Quadro 7 podemos compreender que no item a) temos uma situação ternária, produto de medidas, combinatória, sendo as mesmas os sabores de sorvete (6 possibilidades) e os sabores de calda (2 possibilidades), resultando em um produto cartesiano 6 x 2, com pares ordenados originando 12 possibilidades de montagem de sorvete, o que Santos (2015) relata com duas representações: a primeira por meio de uma árvore de possibilidades, causando aderência ao campo aditivo, por representar 6 + 6, ou a segunda como representação em produto cartesiano, causando ruptura com o campo aditivo. No item b) temos uma situação quaternária de proporção simples, um para muitos, discreta, com operador escalar 3 e operador funcional 24 reais por ingresso. A situação A30III72, disposta no Quadro 8, representa uma proporção múltipla.

Quadro 8 – Representações da expressão numéricaA30III72

<table>
<tr><th>Situação</th><th>Expressão numérica</th><th>Diagrama</th></tr>
<tr><td>(Vunesp-SP) Um determinado medicamento deve ser ministrado a um doente três vezes por dia, em doses de 5 mililitros cada vez, durante 10 dias. Se cada frasco contém 100 mililitros do medicamento, quantos frascos são necessários? Alternativa b.
a) 1 d) 4
b) 2 e) 5
c) 3</td><td>[(5x 3) x 10]
150 mL, sendo necessária a compra de dois frascos</td><td>
</td></tr>
</table>

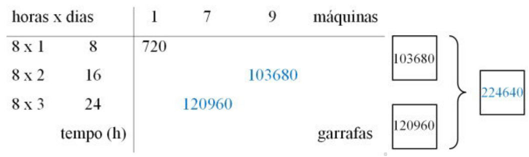
Fonte: elaborado pelos autores a partir de Giovanni Júnior (2018).

No Quadro 8, apresentamos um caso de proporção múltipla, a qual “envolve pelo menos duas proporções simples. Esse eixo refere-se às situações que envolvem uma situação quaternária entre mais de duas grandezas relacionadas duas a duas” (MAGINA; MERLINI; SANTOS, 2016, p.72). Neste eixo, conforme Santos (2015), todas as quantidades envolvidas possuem relação de dependência: doses por dia estão ligadas a doses e também ao dia, e a quantidade, em mL, do medicamento consumido por vez ao dia, depende do número de dias.

A análise dimensional dessa situação leva em conta as taxas com as quais a função opera, resultando em uma função linear descrita conforme a análise das taxas de grandeza: para uma dose em mL, para quantas vezes por dia essa dose é tomada: *vezes por dia*, representada por $\frac{vez}{dia}$ e para quantos mililitros a cada dose, ou seja, a cada vez que toma a medicação: *mililitros por vez*, representada por $\frac{mL}{vez}$: , resultando em uma função linear que relaciona a quantidade de medicamento necessária ao produto entre quantidade de vezes que deve ser tomado por dia (3) com a quantidade de medicamento que deve ser tomada em cada dose (5) e a quantidade de dias (10), ou seja, se d representa a quantidade de dias que o medicamento deve ser ministrado, então f(d)=3.5d para o problema dado.

O que diferencia uma proporção múltipla de uma proporção dupla é a relação entre as grandezas: enquanto na proporção múltipla todas as variáveis se relacionam entre si, na proporção dupla elas se relacionam duas a duas (MAGINA, MERLINI, SANTOS, 2016). Santos (2015) afirma que a proporção dupla é uma função bilinear, e que uma quantidade é diretamente proporcional a outras duas quantidades. Na situação exposta no Quadro 9, além da proporção dupla, temos uma composição, oriunda da fragmentação da resolução da situação em duas partes, a primeira referente aos dias em que as máquinas funcionam normalmente, e a segunda sobre os dias em que duas delas estão no conserto.

Quadro 9 – Representações da expressão numérica B75III55

Situação	Expressão numérica	Diagrama
Em uma fábrica há 9 máquinas para rotular garrafas de água mineral. Cada máquina rotula 720 garrafas por hora e funciona 8 horas por dia, durante 5 dias na semana. Em determinada semana, 2 dessas máquinas quebraram e ficaram em conserto durante 3 dias. Elabore uma expressão numérica para calcular quantas garrafas foram rotuladas nessa semana.	9x720x8x2+7x720x8x3	

Fonte: elaborado pelos autores a partir de Editora Moderna(org.), 2018.

Optamos por inserir no diagrama a análise que descreve as relações entre as variáveis tempo, máquinas e garrafas. Trata-se de uma função bilinear cuja descrição das relações pode ser escrita como g = 720.m.t, no qual g é a quantidade de garrafas, 720 é a quantidade de garrafas por hora, m a quantidade de máquinas trabalhando, e t o tempo em horas por dia.

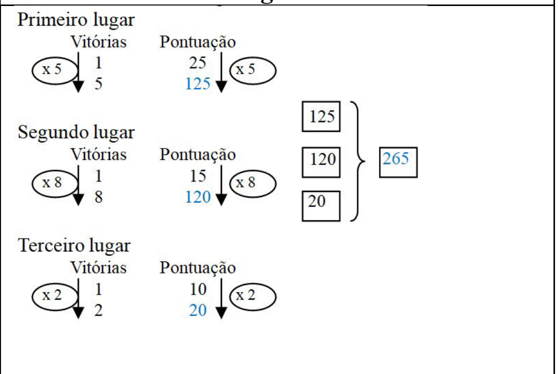
Neste caso, o tempo se relaciona com as garrafas, e as garrafas com o número de máquinas, mas o tempo não se relaciona com o número de máquinas, essa é a principal diferença entre a proporção múltipla e a proporção dupla. No caso da expressão numérica na forma simbólica, cabe dizer que, dentre várias possibilidades de escrevê-la, o uso dos parênteses pode deixá-la mais elegante, e expressar a organização do pensamento ao representar a situação: ao escrevermos (9x720x8x2)+(7x720x8x3) dizemos que durante dois dias as máquinas funcionaram completamente, e durante os outros três dias da semana (composta de 5 dias, pelo enunciado), sete máquinas funcionaram, e proceder uma composição na qual se conhece o valor das partes e se quer saber o todo. No entanto, se escrevermos (9x720x8x5)-(2x720x8x3), estamos afirmando que dos 5 dias em que as máquinas funcionam, precisamos retirar o número de garrafas que não são etiquetadas por 2 máquinas em 3 dias, procedendo uma composição na qual se sabe o todo e se quer conhecer uma das partes.

O suporte do operador escalar permite, através da construção da resolução, perceber o sentido de replicar (NUNES; BRYANT, 1997). Com a construção dos diagramas é possível perceber os passos dados para tal resolução, e a necessidade de compreendê-los separadamente resultando na expressão numérica na forma simbólica com a presença de sinais de associação ( ) e [ ]. Pode ser discutida a necessidade de tais sinais, pois dentro da mesma estrutura, não há regras de prevalência de operações, sendo as mesmas realizadas da esquerda para a direita na ordem em que aparecem (OTTES; FAJARDO, 2017), sendo a estrutura de organização visual baseada nos passos descritos no diagrama um facilitador para a compreensão da situação. Como a situação solicita a identificação da expressão numérica, tais passos apoiam esta tarefa.

Um exemplo de problema misto é o problema A21III70 apresentado no Quadro 10. O mesmo aborda uma composição, sendo que as partes são resultantes de proporção simples cujo escalar equivale à pontuação fixada na competição para cada partida. É um problema de composição cujas partes são conhecidas e se busca o valor do todo.

Quadro 10 – Representações da expressão numérica A21III70

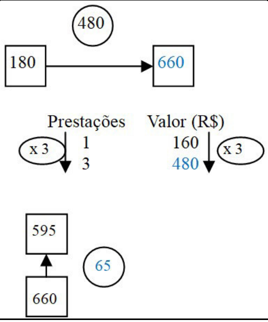
<table>
<tr><th>Situação</th><th>Expressão numérica</th><th>Diagrama</th></tr>
<tr>
<td>Veja o número de pontos que uma equipe marca de acordo com a sua classificação em cada fase de uma gincana:
<table>
<tr><th colspan="4">Pontuação por fase</th></tr>
<tr><td>Posição</td><td>1º lugar</td><td>2º lugar</td><td>3º lugar</td></tr>
<tr><td>Número de pontos</td><td>25</td><td>15</td><td>10</td></tr>
</table>
Fonte: Dados fictícios.
Nessa gincana a equipe azul chegou 5 vezes em 1º lugar, 8 vezes em 2º lugar e 2 vezes em 3º lugar.
Nessas condições:
a) Escreva uma expressão numérica para representar quantos pontos a equipe marcou nessa gincana. $5 \times 25 + 8 \times 15 + 2 \times 10$
b) Quantos pontos ela marcou? 265 pontos.</td>
<td>5x25+8x15+2x10

(5x25)+(8x15)+(2x10)</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Fonte: elaborado a partir de Giovanni Júnior (2018).

O problema apresenta relação quaternária de proporção simples com quarto elemento desconhecido, resultando em multiplicação. São três passos semelhantes conforme a pontuação de cada fase, cuja adição na classe de composição resulta no número de pontos da equipe. Como exemplo de um problema misto complexo apresentamos o problema C105III74, que é composto de uma transformação, uma comparação e uma proporção simples. No Quadro 11 apresentamos seu detalhamento.

Quadro 11 – Representações da expressão numérica C105III74

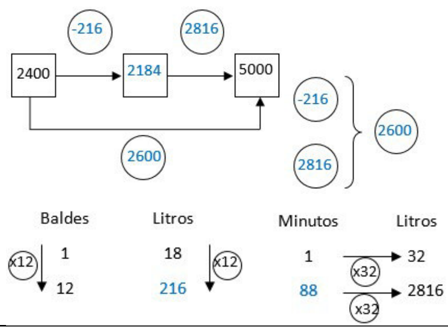
Situação	Expressão numérica	Diagrama
Isabel adquiriu um televisor em cores, pagando uma entrada de 180 reais e mais três parcelas de 160 reais. À vista, ela teria pago 595 reais. Qual é a diferença entre o preço a prazo e o preço à vista? 	180+3×160-595 {[180+(3x160)]-595}	

Fonte: elaborado a partir de Bianchini (2018).

Com as informações presentes no Quadro 11, compreendemos que o problema apresenta transformação com estado inicial e relação conhecida, maiores que zero, resultando em um referente maior que zero. Segundo passo necessário para a obtenção do valor total de prestações: relação quaternária de proporção simples um para muitos, com operador escalar 3 e operador funcional 160 reais por prestação. Quarto elemento desconhecido, o que leva à multiplicação. Terceiro passo necessário para calcular a diferença entre o preço à vista e o preço a prazo: comparação com referido e referente conhecidos e relação desconhecida, sendo necessária uma subtração.

Já o problema C92III74, apresentado no Quadro 12, traz uma situação de composição de transformações, cujas relações são dadas por proporções simples envolvendo os operadores funcional e escalar.

Quadro 12 – Representações da expressão numérica C92III74

Situação	Expressão numérica	Diagrama
Em um tanque havia 2.400 litros de água. Dele foram retirados 12 baldes com 18 litros cada um. Abriu-se, então, uma torneira que derrama 32 litros de água por minuto até que o tanque ficasse totalmente cheio, isto é, com 5.000 litros. a) Durante quantos minutos a torneira ficou aberta? b) Sabendo que 1 hora é igual a 60 minutos, determine quantas horas e quantos minutos essa torneira ficou aberta.	{[5000-(2400-12×18)]÷32} 60+ 88 – 60 = 60+ 28 1hora e 28 minutos	

Fonte: elaborado a partir de Bianchini (2018).

Com as informações presentes no Quadro 12, destacamos que a situação é de composição de transformações, com relação desconhecida e proporção simples. Relações parciais desconhecidas. Referente parcial desconhecido. Estado inicial e estado final conhecidos. Uma relação menor que zero e outra maior que zero. Na composição dos estados relativos, obtém-se, a partir de relações maiores que zero, resultando -48, resulta no estado um valor maior que zero. Relação quaternária, proporção simples, um para muitos, discreta, com operador escalar 12 e operador funcional 18 litros por balde. Relação quaternária, proporção simples, um para muitos, com operador escalar 88 e operador funcional 32 litros por minuto, com terceiro elemento desconhecido, necessitando de uma divisão para chegar ao resultado.

Embora nem todas as representações na forma algébrica dessas situações necessitem de sinais de associação, todas precisam de regras de prevalência, pois se trata de problemas mistos, compostos pelos campos conceituais aditivo e multiplicativo (VERGNAUD, 2009). O Quadro 8 apresenta uma transformação e uma proporção, descritas como duas etapas do problema, sendo a transformação que resulta no preço da TV, sendo o estado inicial o preço, a transformação a entrada e o estado final o saldo a pagar, este que será dividido em um número fixo de prestações, calculado pela proporção. A importância dos parênteses nessa expressão se dá pela necessidade de iniciar pela subtração e depois efetuar a divisão, contrariando as regras de prevalência que instituem que primeiro se faz a multiplicação e a divisão. Destacamos tal importância na perspectiva de ensino, pois tanto a representação por diagrama como a “conta armada” podem ser passos para a construção da forma simbólica, na análise e escrita da expressão numérica na forma algébrica para sua posterior resolução.

A representação do diagrama do Quadro 11 apresenta uma transformação, uma proporção simples e uma comparação (aditiva). Não há necessidade do uso de sinais de associação, assim tanto a primeira quanto a segunda expressão numérica estão corretas, observa-se, no entanto, que a segunda diferencia os passos necessários para a resolução da situação. A regra de prevalência de efetuar primeiro a multiplicação dá sentido multiplicativo ao número 3 como repetição do número de parcelas iguais (NUNES; BRYANT, 1997; SANTOS, 2005).

A situação do Quadro 12 envolve uma composição de transformações e duas proporções simples, sendo que os elementos presentes na transformação são oriundos tanto da composição das transformações quanto da proporção entre número de baldes e litros. O diagrama apresenta o passo a passo da resolução, sendo que o sentido dado a cada grandeza e às operações realizadas entre suas medidas é ponto de partida para pensar as regras de prevalência. O problema diz que “abriu-se uma torneira que derrama 32 litros de água por minuto” (BIANCHINI, 2018, p. 74) o que leva à percepção de uma grandeza formada por duas outras, que é o sentido do operador funcional em uma proporção simples. O problema tem os dados em litros e litros por minutos e pergunta sobre as horas, levando quem o resolve a buscar relações entre as grandezas. Os sentidos atribuídos a essas relações na escrita da expressão numérica exigem o uso de sinais de associação e de regras de prevalência.

Com a análise realizada identificamos que os problemas envolvendo as expressões numéricas apresentam distintas representações bem como exploram diferentes níveis de dificuldade, corroborando com os estudos de Vergnaud (2009) sobre o campo aditivo, em que o autor relata que existem diferentes tipos de relações aditivas e, consequentemente, diferentes níveis de dificuldades; e com a diversidade de situações os estudantes serão capazes de resolver diversos tipos de problemas.

5.8 Considerações

Com o estudo identificamos que as atividades envolvendo expressões numéricas são apresentadas nos livros didáticos na forma de exercícios e situações, sendo os primeiros bem mais frequentes. Ao direcionarmos a análise para as situações, classificamos as diferentes representações com base na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (2009), constatando que as estruturas apresentadas foram do campo multiplicativo e aditivo, e suas imbricações em problemas mistos, identificando mais situações simples do que complexas. Em relação às operações, apresentam maior quantidade de situações envolvendo a multiplicação, seguida da subtração, divisão e adição.

Há uma diversidade entre as classes dos Campos Conceituais, sendo que no Campo Conceitual Multiplicativo os problemas de proporção simples são consideravelmente mais frequentes, com quase 40%, e no Campo Conceitual Aditivo as situações mais freqüentes se dividiram entre Composição (17,5%), Comparação (12,5%) e Transformação (10%), sendo as porcentagens relativas ao conjunto das situações presentes nos livros didáticos.

Os livros didáticos apresentam uma variação na abordagem, e ainda que a maioria cumpra o itinerário explicação com exemplo, exercícios de calcular para depois inserir os problemas, a apresentação das expressões numéricas se dá também no corpo do capítulo, atrelada a situações sobre as quatro operações.

As escritas das expressões numéricas em situações ajudam a construir o pensamento envolvendo as regras de prevalência, pois as mesmas auxiliam na compreensão do sentido das operações, de forma que diante da organização da situação na expressão simbólica, há o dar-se conta de que o sentido da operação, e dos números envolvidos na mesma, precisam seguir regras nas quais as operações entre as grandezas sejam possíveis. Para que a operação na situação faça sentido, para as grandezas apresentadas no problema, tanto os sinais de associação na forma de separadores de operação, como as regras de prevalência, devem ser compreendidos. Assim como a organização das informações no diagrama possibilita perceber a sistematização da situação, de forma a auxiliar no processo de resolução, sendo possível uma análise separada de cada etapa.

As expressões numéricas são trabalhadas como síntese das quatro operações aritméticas fundamentais nos livros didáticos analisados, ainda que em grande parte sejam abordadas como exercícios, possuem grande quantidade e diversidade de situações com variadas classes referentes aos campos conceituais aditivo e multiplicativo, bem como suas imbricações. Como o livro didático é ferramenta fundamental nas práticas docentes e amplamente divulgado nas escolas, as expressões numéricas a partir das situações, cuja resolução envolva a construção de diversas representações, podem contribuir com a construção do conceito de operação e de número, apresentada pelas diversas classes de situações dos campos conceituais aditivo, multiplicativo e suas imbricações.

5.9 Referências

ARRAIS, U. B**. Expressões Aritméticas: Crenças, Concepções e Competências no entendimento do professor polivalente**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11095. Acesso em: 5 nov. 2020.

BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini.** São Paulo: Moderna, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br. Acesso em: 14 ago. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação Básica** FNDE. Dados estatísticos. Brasília, 2017. Disponível em: https://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/dados-estatisticos. Acesso em: 14 ago. 2020.

BRASIL.Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.

CORRÊA, R. L. T.. O livro escolar como fonte de pesquisa em História da Educação. **Cad. CEDES**, Campinas, v. 20, n. 52, p. 11-23, nov. 2000. Disponível em: https://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0101-32622000000300002&script=sci_abstract&tlng=pt. Acesso em: 14 ago. 2020.

COSTA, M. B. L.; NASCIMENTO, E. S.; SANTOS, M. M. Argumentação no processo de ensino e aprendizagem de expressões aritméticas nos livros didáticos. *In*: COLÓQUIO EDUCAÇÃO E CONTEMPORANEIDADE, EDUCON, 13., 2019.Sergipe. **Anais**[...]. Sergipe, 2019. p.1-11. Disponível em: https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/13178/49/48.pdf. Acesso em: 17 ago. 2020.

DANTE, L. R. **Formulação e resolução de problemas de matemática**: teoria e prática. São Paulo: Ática, 2009.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris**: Matemática/Ensino Fundamental. São Paulo: Ática, 2015.

EDITORA MODERNA (org.). **Araribá mais**: Matemática/ Manual do professor. Mara Regina Garcia Gay; Willian Raphael Silva(ed.). São Paulo: Moderna, 2018.

FREITAS, H. S. **Expressões numéricas e suas abordagens em livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental adotados por uma escola pública de Cuiabá-MT.** 2014. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2014. Disponível em: https://ri.ufmt.br/handle/1/1916. Acesso em: 10 mai. 2020.

FUNDAÇÃO VALE. **Formação de professores: Matemática Ensino Fundamental II**. Caderno Bimestral II. São Paulo: VALE, 2015. Disponível em: http://www.fundacaovale.org/Documents/CadernoMat-mat-efi-caderno-bimestral-ii-resolucao-problemas-campo-aditivo.pdf. Acesso em: 28 out. 2020.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R. **A conquista da matemática**. Ensino Fundamental: anos finais. São Paulo: FTD, 2018.

GITIRANA, V.; CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S. M. P.; SPINILLO, A. G. **Repensando a multiplicação e divisão**. Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM, 2014.

MAGINA, S. M. P.; MERLINI, V. L.; SANTOS, A. A estrutura multiplicativa à luz da Teoria dos Campos Conceituais: uma visão com foco na aprendizagem. *In*: CASTRO FILHO; J. A.; BARRETO, M. C.; BARGUIL, P. M.; MAIA, D. L.; PINHEIRO, J. L. **Matemática, cultura e tecnologia: perspectivas internacionais**. Curitiba: Editora CRV, 2016, p.66-82.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. M.; NUNES, T.; GITIRANA, V. **Repensando adição e a subtração**: contribuições da teoria dos campos conceituais. São Paulo: PROEM, 2008.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças Fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artmed, 1997.

OTTES, A B. **Expressão numérica: a hierarquia das quatro operações matemáticas**. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2016. Disponível em: https://repositorio.ufsm.br/handle/1/12435. Acesso em: 21 ago. 2020.

OTTES, A. B.; FAJARDO, R. Um olhar sobre a hierarquia das quatro operações aritméticas nas expressões numéricas**. Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 1, n. 2, maio/ago. 2017. Disponível em https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/30/20. Acesso em: 21 ago. 2020.

PAIM, M. A. S. **Um objeto de aprendizagem como proposta didática para a aprendizagem das expressões numéricas com decimais.** 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Gestão e Tecnologias Aplicadas à Educação) - Universidade do Estado da Bahia, Salvador, 2018. Disponível em: http://hdl.handle.net/20.500.11896/1049. Acesso em: 21 ago. 2020.

SALOMÃO, C. A. R. **A passagem de textos em língua materna para expressões aritméticas, mediada pelo uso de uma calculadora.** 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2013. Disponível em: https://repositorio.pgsskroton.com/bitstream/123456789/3532/1/CRISLAINE%20APARECIDA%20RIBEIRO%20SALOM%C3%83O.pdf. Acesso em: 10 jun. 2020.

SANTANA, E. R. S.; LIMA, D. C. Capítulo 1. *In*: LAUTERT, S. L.; CASTRO FILHO, J. A.; SANTANA, E. R. S. (org.). **Repensando Multiplicação e Divisão do 1º ao 3º ano**. Coletânea Cadernos E-Mult. Série Alfabetização Matemática, Estatística e Científica; Via Litterarum. Bahia, 2017. p. 15- 44. Disponível em: https://www.ufpe.br/documents/956358/956387/Ensinando+multiplica%C3%A7%C3%A3o+e+divis%C3%A3o+-+1%C2%BA+ao+3%C2%BA+ano.pdf/2fd00c0a-31b1-49de-9926-8b146ffb7701. Acesso em: 20 set. 2022.

SANTOS, A. **Formação de professores e as estruturas multiplicativas**: reflexões teóricas e práticas. Curitiba: Apris, 2015.

SANTOS, M. C; LIMA, P. F. Considerações sobre a matemática no Ensino Fundamental. *In*: Seminário Nacional Currículo em Movimento – Perspectivas atuais, 1., 2010, Belo Horizonte. **Anais** [...]. Belo Horizonte, 2010. p.1-19. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/dezembro-2010-pdf/7166-3-2-consideracoes-matematica-marcelo-camara-e-paulo/file. Acesso em: 14 ago. 2020.

SANTOS, V. M. A.; ALBUQUERQUE, A. R. C. O uso do livro didático como instrumento pedagógico para o ensino de Geografia. **Estação Científica (UNIFAP)**. Macapá, v. 4, n. 1, p. 63-77, jan.-jun. 2014. Disponível em:https://periodicos.unifap.br/index.php/estacao/article/view/1314. Acesso em: 17 ago. 2020.

SILVA, G. C. M. **O ensino e aprendizagem de expressões numéricas para 5ª série do Ensino Fundamental com a utilização do jogo CONTIG® 60.** 2009. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11382. Acesso em: 12 ago. 2020.

SILVA, G. C. M.; ARRUDA, M. R. M. F. As expressões numéricas, o Contig 60 e a formação de professores do ensino fundamental I. *In:* MONTEIRO, S. A. I.; RIBEIRO, R.; LEMES, S. S.; MUZZETI, L. R. (Org.). **Educação na contemporaneidade**: reflexões e pesquisa. São Carlos: Pedro e João, 2011, p. 23-42. Disponível em: https://pedroejoaoeditores.com.br/2022/wp-content/uploads/2022/01/educcontemporaneidade-1.pdf. Acesso em: 10 ago. 2020.

SILVEIRA, Ê. **Matemática:** compreensão e prática. São Paulo: Moderna, 2018.

VERGNAUD, G. ¿En qué sentido la Teoría de los Campos Conceptuales puede ayudarnos para facilitar Aprendizaje Significativo? **Investigações em Ensino de Ciências**, v.12, n. 2, p.285-302, 2007a. Disponível em: https://ienci.if.ufrgs.br/index.php/ienci/article/view/475. Acesso em: 21 dez. 2022.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar**. Curitiba: Editora da UFPR, 2009a.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didáctique des Mathématiques**, v. 10, n. 2, p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. Prenunciando a Teoria dos Campos Conceituais. *In*: VERGNAUD, G. **Piaget e Vygotski em Gérard Vergnaud: Teoria dos Campos Conceituais**. Porto Alegre: GEEMPA, p. 63 – 70, 2017.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didáctica das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, v. 1, p. 75-90, 1986. Disponível em: https://repositorio.ispa.pt/bitstream/10400.12/2150/1/1986_1_75.pdf. Acesso em: 22 nov. 2022.

6 ORDEM DAS EXPRESSÕES NUMÉRICAS EM UMA EXPRESSÃO SIMBÓLICA E EM UM PROBLEMA MISTO

6.1 Introdução

Este texto faz parte de uma pesquisa a respeito das expressões numéricas como imbricação entre os campos conceituais Aditivo e Multiplicativo. Trata de um estudo que considera as resoluções de expressões numéricas na forma simbólica e na escrita e resolução de um problema misto, realizado por vinte e cinco estudantes de 6º e 8º ano de escolas públicas de Pelotas-RS em período pandêmico, sob o código do Conselho de Ética da Universidade Federal de Rio Grande número 52737921.2.0000.5324. Os dados dos estudantes mantiveram-se em sigilo e os nomes atribuídos são fictícios.

Balizamo-nos pelas seguintes perguntas: quais os erros cometidos por estudantes ao resolver uma expressão numérica? Os erros cometidos no desenvolvimento de uma expressão numérica descontextualizada são os mesmos de uma resolução de problema misto? Como a prevalência operatória (ordem das operações e uso dos sinais de associação) é utilizada pelos estudantes na resolução de uma expressão numérica? As perguntas nos ajudam a compreender o sentido de número nas operações, por meio da ordem e das escolhas dos estudantes ao resolver as expressões numéricas e o problema misto.

6.2 Prevalência Operatória

Chamamos de prevalência operatória a ordem de resolução de uma expressão numérica. Nos livros didáticos é comum estar descrito que primeiro realizamos as multiplicações e divisões, na ordem em que aparecem, e depois as adições e subtrações, na ordem em que aparecem, e que primeiro devemos resolver o que há dentro dos parênteses, depois colchetes e depois chaves. No entanto, na prática, respeitando as propriedades aritméticas, podemos resolver uma adição antes da multiplicação, como o caso de 5+4+12-7x(2+3). A dupla 5+4 não faz parte de nenhuma multiplicação, portanto pode ser resolvida anteriormente. Claro que não podemos subtrair 7 de 12, pois o 7 multiplica (2+3). Nisto se diferencia a prevalência operatória: a multiplicação prevalece sobre a adição, mas não necessariamente é a primeira a ser operada na expressão numérica (RAMOS *et al.*, 2021, RAMOS; SILVA, 2022).

Bender (1962) explana sobre a ordem das operações em expressões numéricas, tanto em sua escrita quanto em sua resolução. Propõem que se quiséssemos escrever as expressões da esquerda para a direita, com a ordem consecutiva linear, poderíamos, mas teríamos que reensinar a todos os que aprenderam de outra forma. A segunda proposta é a de utilizar o PEMDAS, uma mnemônica bastante usada nos Estados Unidos, na qual devem ser resolvidos primeiro os parênteses, depois as exponenciais, a multiplicação, a divisão, a subtração e a adição, mas esclarece que há erros em considerar a multiplicação sempre antes da divisão, por exemplo. Por último, propõe o uso de sinais de associação, de forma a ordenar as operações sem ambiguidade.

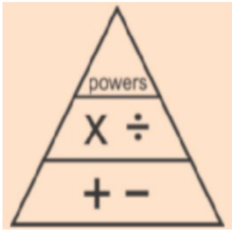
Ottes (2016) e Ottes e Fajardo (2017) concordam com Bender (1962) e analisam como a ordem das operações se apresenta em livros didáticos do Ensino Fundamental, dos quais resulta que as regras e algoritmos são o método utilizado para ensinar expressões numéricas. Por fim, sugerem que as propriedades das operações e a justificativa das regras sejam trabalhadas com os estudantes.

Ao estudar como estudantes de anos iniciais representam números na forma decimal e como efetuam operações utilizando a decomposição, Goodrow e Kidd (2018) encontram que as crianças utilizam as propriedades aritméticas de formas criativas para escrever como expressões numéricas a decomposição de números e as operações por meio de somas de dez.

Nunokawa (2012) analisa como uma criança da 5ª série compreendeu proporções e porcentagens com o uso da reta numérica, ao invés das expressões numéricas usualmente estudadas neste conteúdo. Concluiu que usar linhas duplas permitiu relacionar grandezas pela multiplicação, tanto em proporção quanto em porcentagem.

Ao estudar as dificuldades na aprendizagem inicial de Álgebra por estudantes indonésios, Jupri, Drijvers e Van den Heuvel (2014) constatam que a principal dificuldade dos estudantes é de traduzir para a forma simbólica o que o problema solicita, e que uma das dificuldades dos alunos é de respeitar as propriedades aritméticas nas expressões numéricas, no que diz respeito à ordem das operações, a qual é abordada por Ali Rahman *et al* (2016), em um estudo que compara o rendimento de alunos de 9º ano na resolução de expressões numéricas, em Brunei. Ao trabalhar com o triângulo de prioridades de Aimes, descrito na Figura 42, em substituição às mnemônicas PEMDAS ou BIDMAS ou BODMAS, conforme o país, os autores utilizam pré e pós-teste com intervenção de aproximadamente sete minutos, explicando a ordem das operações para o grupo teste e não para o grupo controle. O erro mais comum foi resolver uma expressão numérica da esquerda para a direita, não importando a ordem de prevalência das operações; seguido pela multiplicação errada por zero e pelo erro no cálculo de potenciação. O estudo conclui que a maior parte dos alunos utilizou o triângulo de prioridades de Aimes, observado na Figura 42, e que os estudantes com maior domínio conceitual das operações se saíram melhor na resolução utilizando a ordem das operações.

Figura 42 – Triângulo da hierarquia das operações de Aimes



Fonte: Ali Rahman *et al*. (2016, p. 410).

Wiberg (2017) estudou como os alunos estruturam expressões numéricas e usam regras para a ordem das operações ao calcular expressões, expressões que contêm várias operações, com expressões contendo mais de duas operações, dadas a alunos de 5as séries. Concluiu que alunos usam a ordem de operação e estruturam as expressões numéricas de várias maneiras diferentes, e que a forma mais comum de estruturar expressões é formar diferentes grupos. A análise dos cálculos dos alunos mostra que a maioria dos alunos parece saber que a multiplicação deve ser tratada antes da adição, mas há confusão sobre fazer a adição ou a subtração primeiro (WIBERG, 2017).

Karlsson (2019) afirma que a ordem das operações e a contagem da esquerda para a direita são duas regras comuns de aritmética que os alunos aprendem na escola, mas que os alunos também usam regras inventadas que geralmente não são usadas em Matemática. Em um estudo com 55 alunos, concluiu que além das convenções usuais da esquerda para a direita e da ordem das operações, os alunos usam tipos diferentes de regras de aritmética, baseadas no princípio de que os números são emparelhados de uma forma ou de outra, usando regras próprias que seguem estruturas lógicas. Em expressões estruturadas da mesma maneira, alunos optam por usar diferentes tipos de regras de aritmética (KARLSSON, 2019).

Unger (2021) chama as regras de prevalência de ordem de operadores aritméticos, que servem para as expressões numéricas não serem interpretadas de maneiras diferentes. Os alunos têm dificuldade em seguir regras aritméticas e estruturas em expressões matemáticas, e tendem a seguir regras não convencionais que são simplesmente construídas por eles mesmos. O pesquisador analisou 492 soluções para resolução de expressões numéricas de alunos 5º ano de escolas na Suécia e concluiu que as regras aritméticas foram seguidas de maneira qualitativamente diferentes e que houve muitas inconsistências, devido aos alunos carecerem de compreensão do sentido das estruturas matemáticas (UNGER, 2021).

Jonsson (2016) investiga como alunos do 5º ano calculam e estruturam expressões numéricas com várias operações, em um estudo que aborda expressões numéricas com três ou quatro operações. A análise dos dados revelou diferentes abordagens que os alunos usaram para estruturar e calcular as expressões aritméticas, particularmente quatro métodos foram usados em várias tarefas: calculando primeiro as multiplicações e depois as diferenças, utilizando a comutatividade de forma equivocada; formando pares sem importar qual a operação; calculando da esquerda para a direita, não importa a operação; regras de prevalência.

Mesmo em expressões numéricas provenientes de problemas mistos, os estudantes tendem a descrever a comutatividade concentrando-se na adição, nos termos ou na operação (HOLM, 2018).

Al-Ghamdi (1987) investigou como estudantes de Ensino Médio da Flórida utilizam a ordem das operações em expressões numéricas. O estudo foi motivado pela necessidade da utilização de regras de prevalência na programação de computadores, e da compreensão de tais regras pelos estudantes. O grupo experimental aprendeu as regras com o auxílio de computadores, e obteve maior sucesso. Al-Ghamdi (1987) percebeu que para expressões que envolviam numerais repetidos de diversas maneiras os estudantes encontraram maiores dificuldades.

Ao criticar o uso de truques e dicas que não promovem a compreensão da matemática conceitual, Karp, Bush e Dougherty (2014) listam treze ideias matemáticas que nem sempre funcionam, as quais nós podemos chamar de teoremas em ação que nem sempre são verdadeiros. Dois desses teoremas têm relação com as expressões numéricas. Um deles é o de multiplicar tudo dentro dos parênteses pelo número fora dos parênteses, devido à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, mas se dentro dos parênteses houver uma multiplicação, a regra não vale, como no exemplo verdadeiro $2(4+9) = 2 \times 4 + 2 \times 9$, e no falso $2(4 \times 9) \neq 2 \times 4 \times 2 \times 9$. O segundo não trata exatamente de um teorema, mas de uma mnemônica utilizada por países anglófonos, que traduzida fica: Por favor, desculpe minha querida tia Sally (PEMDAS). Neste caso, as autoras abordam três questões: a primeira sobre a crença de sempre fazer a multiplicação antes da divisão e a adição antes da subtração, a segunda, sobre a ordem não ser tão rígida, sendo possível realizar de outras formas de maneira correta, como em $32 - 4(2 + 7) + 8 \div 4$. Por último, os parênteses nem sempre são os primeiros, como os casos em que chaves, colchetes, raiz quadrada e a barra de fração horizontal teriam prioridade.

Urbina-Lilibach (2016) relata o trabalho com aulas flexíveis, nas quais os estudantes resolviam problemas conforme suas experiências, com mínimo auxílio do professor. Em uma classe de primeiro ano de uma faculdade comunitária nos EUA, a professora propôs uma expressão numérica, que após a simplificação resultou em 2+3(10) e os alunos chegaram a 50. Após discussões, uso de mnemônica e contextualização com grandezas de cunho monetário, os estudantes chegaram à solução 32.

Zazkis e Rouleau (2018) analisam como estudantes de licenciatura para o Ensino Fundamental do Canadá utilizam a ordem de resolução das operações quando resolvem expressões numéricas. Devido à frequente utilização do acrônimo ou mnemônica BODMAS nas classes de Matemática, os alunos trazem como conhecimentos anteriores a necessidade de primeiro operar a divisão, depois a multiplicação. As autoras concluíram que o acrônimo não deve ser utilizado, mas deve ser dado enfoque na ordem das operações como decisão necessária, não arbitrária, na resolução das expressões numéricas.

Dentre as dificuldades enfrentadas por alunos sobre como as expressões numéricas devem ser calculadas, existem equívocos sobre como as propriedades e regras aritméticas devem ser tratadas, falta de conhecimento de estruturas para expressões numéricas. Existem formas alternativas de ensinar as regras de prioridade usando, por exemplo, imagens. Para que os alunos compreendam melhor as leis da aritmética, eles também devem aprender sobre métodos alternativos de cálculo de expressões numéricas usando as leis da aritmética. (KARLSSON; LINDER, 2018)

Para Wiberg (2017), os alunos entendem mal e ignoram as regras e convenções que definem a estrutura das expressões numéricas. Dominar a Aritmética permite que os alunos tenham um melhor desempenho na matemática escolar. O conhecimento dos alunos sobre estrutura em expressões aritméticas é associado à aritmética básica (WIBERG, 2017). Esse domínio da Aritmética não está somente na resolução de cálculos simbólicos, mas na capacidade de resolver problemas ligados à Aritmética, e tais problemas são classificados segundo os esquemas que necessitamos mobilizar para resolvê-los. Não basta saber que cinco mais sete é doze. É preciso saber que se tenho cinco bolas e ganho sete bolas, fico com 12 bolas, que é um problema de transformação de medidas. Se tenho cinco bolas verdes e sete bolas azuis, tenho 12 bolas, que é um problema de composição de medidas. Se tenho 5 bolas e você tem 12 bolas, então você tem 7 bolas a mais que eu, e esse é um problema da classe de comparação de medidas. Estes exemplos aditivos são o que Vergnaud (2009) chama de classes de situações. Para cada uma dessas classes, e de seus protótipos, diferentes esquemas são mobilizados. Assim, não basta resolver com métodos e técnicas decoradas uma expressão numérica, é necessário construir conhecimentos para entender tais processos com o enfrentamento de situações de diferentes classes.

6.3 Teoria dos Campos Conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) é uma teoria cognitivista, que objetiva propor uma estrutura para compreender filiações e rupturas entre conhecimentos, fornecendo um quadro coerente e princípios que sirvam de base para o estudo do desenvolvimento e aprendizagem. Embora não seja uma teoria específica da Matemática, foi elaborada para estudar os processos de conceitualização progressiva principalmente de estruturas aditivas e multiplicativas, de modo que a conceitualização está no centro da Teoria dos Campos Conceituais, e consiste em identificar os objetos do mundo, suas propriedades, relações e transformações de forma a produzir uma construção de conhecimento (VERGNAUD, 1986, 2009).

O saber forma-se a partir de situações a dominar, tanto em aspectos práticos como teóricos e para as concepções erradas dos alunos mudarem verdadeiramente, precisam entrar em conflito com situações que elas não permitem tratar, ou seja, para que as novas situações e conceitos tenham sentido para os alunos, precisam adaptá-los aos seus conhecimentos anteriores (VERGNAUD, 1986). A união de todas as situações, esquemas, procedimentos, conceitos e conhecimentos relacionados entre si é chamada de campo conceitual.

O Campo Conceitual Aditivo ou Estruturas Aditivas consiste em todas as situações que necessitam de adição ou subtração para serem resolvidas, e as relações que ocorrem neste campo conceitual dizem respeito às partes e ao todo. As classes de situações do Campo Conceitual Aditivo estão descritas no Quadro 13, sendo as seis primeiras descritas por Vergnaud (2009) e as duas últimas por Magina *et al* (2008).

Quadro 13 – Classes de Problemas do Campo Conceitual Aditivo

Classe	Exemplo	Explicação
Transformação de Medidas	Tenho três canetas e ganho oito canetas. Com quantas canetas eu fico?	Uma transformação opera sobre uma medida para resultar em outra medida.
Composição de Medidas	No estojo amarelo tem três canetas e no estojo azul tem oito canetas. Quantas canetas têm nos dois estojos?	Duas medidas se compõem para resultar em uma terceira.

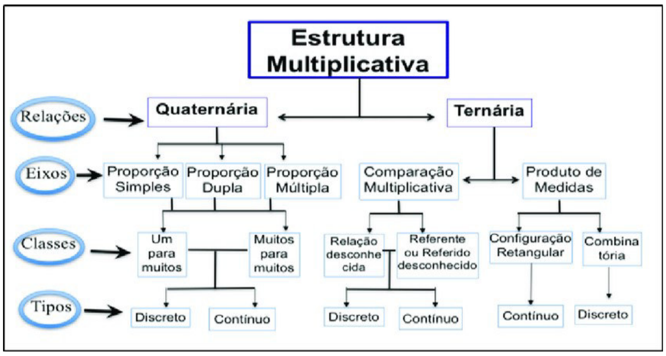
Comparação de Medidas	No estojo amarelo tem três canetas e no estojo azul tem oito canetas. Quantas canetas o estojo azul tem a mais que o estojo amarelo?	Uma relação liga duas medidas.
Composição de Transformações	Eu tinha três canetas, ganhei oito e perdi cinco. Com quantas canetas fiquei?	Duas transformações se compõem para resultar em uma transformação.
Transformação de Estados Relativos	Eu tinha três canetas, ganhei oito e perdi cinco. Quantas canetas eu ganhei ao total?	Uma transformação opera sobre um estado relativo (uma relação) para resultar em um estado relativo.
Composição de Estados Relativos	Eu ganhei três canetas. Você ganhou oito canetas. Quantas canetas nós ganhamos?	Dois estados relativos (relações) se compõem para resultar em um estado relativo.
Transformação de Composições	No estojo amarelo tinha três canetas e no estojo azul tinha oito canetas. Coloquei duas canetas no estojo amarelo e uma caneta no estojo azul. Quantas canetas tem agora nos dois estojos?	Duas medidas se compõem e resultam em uma terceira. A cada medida é operada uma transformação para resultar em duas novas medidas, que comporão uma 6ª.
Comparação com transformação de composições	No estojo amarelo tinha três canetas e no estojo azul tinha oito canetas. Coloquei duas canetas no estojo amarelo e uma caneta no estojo azul. Com quantas canetas o estojo azul ficou a mais que o estojo amarelo?	Duas medidas se compõem e resultam em uma terceira. A cada medida é operada uma transformação para resultar em duas novas medidas, que comporão uma quarta, e há uma relação entre a terceira e a 6ª medida.

Fonte: Magina *et al*. (2008), Vergnaud (2009).

Um sujeito não compreende todas as situações de uma classe de um campo conceitual de uma só vez, e em cada problematização o nível de dificuldade pode aumentar, conforme as quantidades envolvidas e as relações a serem consideradas. Na Teoria dos Campos Conceituais a aprendizagem se dá ao longo da vida, conforme as situações enfrentadas e os esquemas mobilizados para resolvê-las.

O Campo Conceitual Multiplicativo ou as Estruturas Multiplicativas compreendem todas as situações que necessitam de multiplicação ou divisão em sua resolução. Há uma ruptura com o Campo Conceitual Aditivo no sentido das relações deixarem de se estabelecer como parte-todo, para uma relação entre grandezas, tanto na forma de replicação quanto na co-variação ou taxa. Tal ruptura exige que o sujeito compreenda um novo sentido de número. As relações passam a ser ternárias (duas grandezas relacionadas por um número) e quaternárias (duas grandezas relacionadas duas a duas por um número), podendo compor novas grandezas (VERGNAUD, 2009). O esquema que segue foi elaborado por Magina, Merlini e Santos (2016) e sintetiza os eixos, classes e tipos de problemas encontrados no Campo Conceitual Multiplicativo.

Figura 43 – Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo elaborado por Magina, Santos e Merlini



Fonte: Magina, Merlini e Santos (2016, p. 69).

A proporção simples também é denominada isomorfismo de medidas; e a proporção múltipla trata da composição de duas ou mais proporções simples, com todas as grandezas relacionadas entre si. A proporção dupla ocorre quando em três grandezas distintas, uma delas está relacionada às outras duas, que são independentes entre si, como é o caso das regras de três compostas. Os casos de comparação multiplicativa envolvem ideias como quantas vezes mais, como dobros, metades (relações). O produto de medidas, também chamado de produto cartesiano, se divide em configuração retangular para grandezas de medidas contínuas, e combinatória para grandezas de medidas discretas (MAGINA *et al.*, 2008; VERGNAUD, 2009; GITIRANA *et al.*, 2014).

6.4 Problemas Mistos

Um problema misto necessita em sua resolução, ao mesmo tempo, de adição ou subtração, e de multiplicação ou divisão, desta forma, é composto por classes do Campo Conceitual Aditivo e do Campo Conceitual Multiplicativo (VERGNAUD, 2009). Miranda (2019) analisa, segundo o viés de função afim, problemas mistos presentes em livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio. Miranda (2019) encontra os problemas mistos das classes de proporção simples e composição de medidas; proporção simples e transformação de medidas; comparação multiplicativa e composição de medidas; comparação multiplicativa e comparação de medidas; proporção simples, composição de transformações e transformação de medidas; e comparação multiplicativa e proporção simples.

Ramos *et al.*(2021) identificam situações aditivas, multiplicativas e mistas sob o viés de expressões numéricas presentes em livros didáticos do 6º ano do Ensino Fundamental, analisando a ordem das operações, encontrando problemas mistos do tipo proporção dupla e composição de medidas; proporção simples e composição de medidas; transformação de medidas, proporção simples e comparação de medidas; composição de transformações, composição de estados relativos e proporção simples. A diversidade de classes de problemas que podemos desenvolver com os estudantes proporciona uma riqueza no sentido de abordar os conhecimentos das operações de formas variadas, e assim trabalhar as aproximações e rupturas dos diferentes campos conceituais.

Essa ruptura entre os campos conceituais e os sentidos de número que envolvem as operações influenciam diretamente nas expressões numéricas, e podemos dizer que deles derivam a ordem das operações, pois em uma mesma estrutura a ordem é da direita para a esquerda, mas em diferentes estruturas há que se observar a prevalência. Desta forma, pensar a ordem das operações a partir dos sentidos dados às relações nos diferentes campos conceituais exige que descrevamos as expressões numéricas como representações de uma situação (RAMOS *et al.*, 2021).

6.5 Expressões Numéricas como representação de uma situação

A forma simbólica ou algébrica é uma entre os vários sistemas de significantes que podem representar uma situação aritmética. Uma expressão numérica se caracteriza pela escrita e pelos procedimentos de resolução. É composta necessariamente por números e operações e pode conter sinais de associação, resultando em um único número (RAMOS; SILVA, 2022).

Para além das regras e técnicas de operação, uma expressão numérica pode representar uma situação problema contendo as quatro operações aritméticas. Pesquisas na área relatam que os estudantes compreendem melhor o sentido de número e as propriedades das operações ao representar e resolver situações. Assim, para a operacionalização das técnicas e regras, sua compreensão deve ser realizada sistematicamente por meio de resolução de problemas (ARRAIS, 2006, PARMEGIANNI, 2011; FREITAS, 2014).

Os invariantes dos conceitos presentes nas situações modeladas por expressões aritméticas[27] do cotidiano, de jogos ou em softwares são as Propriedades Aritméticas, a Estrutura Aditiva, a Estrutura Multiplicativa e a Prevalência Operatória (ARRAIS, 2006). Analisamos aqui a prevalência operatória, os procedimentos que os estudantes utilizaram ao resolver as expressões numéricas, bem como os erros cometidos no desenvolvimento da questão.

---

[27] Expressões aritméticas e expressões numéricas são sinônimas no entendimento deste trabalho.

6.6 Método

Foram entrevistadas 25 crianças do 6º e do 8º ano, de escolas públicas de Pelotas/RS. As idades variaram entre 10 e 17 anos, com média de 12,7 anos. Os estudantes do 8º ano tiveram aulas presenciais até o quinto ano, finalizando os anos iniciais do Ensino Fundamental, mas o 6º e o sétimo ano foram realizados por meio de aulas remotas. No caso dos estudantes do 6º ano, tiveram aulas presenciais até o terceiro ano, retornando à escola no 6º ano. Durante o período remoto, 10 alunos acompanharam as aulas pelo celular, 9 por material escrito pego na escola e 6 pelo computador. Os celulares e computadores eram compartilhados com os demais membros da família. Os professores afirmaram que os alunos tiveram contato com sinais de associação.

Buscamos verificar como estudantes estruturam a ordem das operações ao resolver uma expressão numérica na forma simbólica e como problema misto. Aplicamos individualmente dois instrumentos, em período escolar, para isso, por meio do Método Clínico Crítico Piagetiano, filmamos as entrevistas, realizamos anotações e obtivemos os protocolos dos estudantes. O primeiro instrumento consistiu em uma expressão numérica contendo colchetes, parênteses, multiplicação e adição, e o segundo instrumento um problema misto apresentado na forma oral, com apoio de material de suporte visual, aqui denominado problema das caixas. A expressão numérica do primeiro instrumento representava o problema das caixas, descrito como:

> Em uma caixa cabem oito embalagens, em cada embalagem está um conjunto com seis estojos azuis, e dez estojos amarelos. Em cada estojo azul estão três canetas azuis, duas canetas pretas, duas canetas vermelhas e uma caneta verde. Em cada estojo amarelo estão duas canetas roxas e uma caneta cor de rosa. Qual a quantidade de canetas na caixa?

Disponibilizamos uma caixa grande, dez estojos amarelos e seis estojos azuis dentro de uma embalagem. Em um dos estojos amarelos estavam as canetas descritas no problema, analogamente, em um dos estojos azuis. Os demais estojos e embalagens estavam vazios e fechados, mas foram manipulados pelos sujeitos.

Para a resolução do primeiro instrumento, os estudantes não tiveram acesso a celular, calculadora ou outro suporte, apenas lápis, borracha e a folha que disponibilizamos. Inicialmente resolveram a expressão numérica, por vezes nos questionando a respeito de como fazer, no que retornávamos com questões sobre como eles pensavam que deveria ser realizado o desenvolvimento. Para o problema das caixas, além de lápis, papel e borracha, os estojos, canetas e caixas eram acessados.

O problema das caixas pode ser classificado como proporção simples e composição de medidas; proporção múltipla e composição de medidas; composição de proporções múltiplas ou ainda como proporção simples, comparação de medidas, composição de medidas, conforme os processos escolhidos pelos alunos em sua resolução. Como problema misto, uma das possibilidades de representação é a de expressão numérica, a qual avaliamos neste estudo.

Realizamos a análise dos erros cometidos pelos estudantes, na resolução da expressão numérica do Instrumento 1 e na escrita e resolução das expressões numéricas elaboradas pelos estudantes no Instrumento 2, no que se refere à ordem das operações. Para esta avaliação, lemos os protocolos e as transcrições das entrevistas, registramos os erros encontrados no instrumento 1, agrupando conforme as resoluções dos estudantes. Categorizamos os erros encontrados no instrumento 2, selecionamos as respostas dadas na forma de escrita em linha e as classificamos segundo as operações utilizadas.

6.7 Dados e Discussão

A análise consiste em buscar compreender os erros presentes nas expressões numéricas e na resolução do problema das caixas, a fim de analisar como os estudantes estruturaram a ordem das operações.

6.7.1 Instrumento 1 – Expressão numérica em sua forma simbólica ou algébrica

Os erros cometidos pelos estudantes ao resolver uma expressão numérica foram classificados segundo a ordem das operações, conforme Tabela 4, foram semelhantes aos erros encontrados por Jonsson (2016).

Tabela 4 – Erros encontrados no desenvolvimento da expressão numérica do instrumento 1

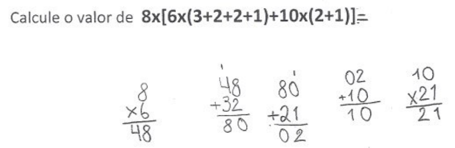
Critério	N
Não foi encontrado erro no desenvolvimento nem no resultado da questão.	1
Foi encontrado erro de cálculo (tabuada) no desenvolvimento da questão.	1
Respeitou a ordem das operações, mas ignorou os sinais de associação.	7
Ignorou a ordem das operações, mas respeitou os sinais de associação.	3
Ordem consecutiva linear.	4
Agrupou as operações de duas em duas.	4
Desenvolvimento idiossincrático.	5
Total	**25**

Fonte: dados da pesquisa.

6.7.1.1 Desenvolvimento idiossincrático

Dentre os desenvolvimentos idiossincráticos encontramos os que fizeram só duas operações e abandonaram a questão, os que produziram processos diferenciados, como alunos que aplicaram a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, mas inseriram números negativos no desenvolvimento, e com regras inventadas, à mesma maneira dos sujeitos estudados por Karlsson (2019) e Unger (2021).

Figura 44 – Excerto do protocolo de Laís



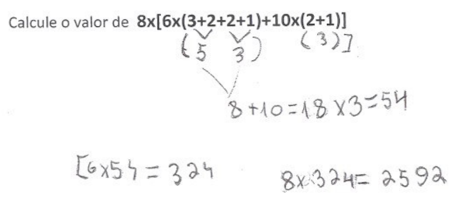
Fonte: dados da pesquisa.

Laís (6º ano, 13 anos), inicia pela ordem das operações, não levando em conta nem a prevalência das operações nem os sinais de associação, mas na segunda operação podemos notar que ao invés de somar “3” e “2”, Laís decidiu que na expressão numérica 3+2 poderia ler-se “32”. A incoerência mostra-se tanto no desrespeito ao Sistema de Numeração Decimal quanto na organização de diversas operações realizadas e desconectadas da expressão numérica como um todo. Percebe-se um agrupamento no cálculo de Laís. Agrupamentos de dois em dois foram realizados por outros colegas, mas de formas diferentes.

6.7.1.2 Agrupamento de operações de duas em duas

Realizar adições duas a duas, reduzir parcelas é uma atitude bastante comum em sala de aula. Da mesma maneira, quando fatoramos um número, por vezes reduzimos os produtos para simplificar os cálculos. Isso pode ser feito tranquilamente quando calculamos com operações que permitem a propriedade comutativa e associativa, mas ao misturarmos operações, a regra não se aplica.

Figura 45 – Excerto do protocolo de Igor



Fonte: dados da pesquisa.

Igor (6º ano, 12 anos) agrupou inicialmente o conteúdo dos parênteses, adicionando de dois em dois para resumir os cálculos a serem realizados. O agrupamento de operações de duas em duas, compreendido por Karlsson (2019) como emparelhamento de uma forma ou de outra, com regras próprias que seguem estruturas lógicas, também foi encontrado em Gregolin

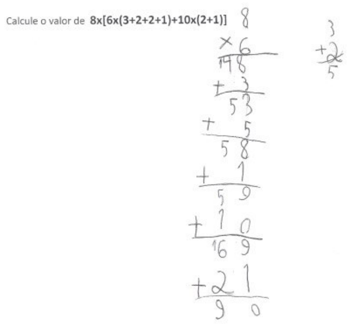
(2002), Wiberg (2017) e Jonsson (2016).

Esse agrupamento funciona bem ao se trabalhar apenas com uma operação como adição ou multiplicação, cuja propriedade comutativa garante a veracidade do processo, no entanto, para problemas mistos ou operações não comutativas tal norma passa a não funcionar. Pela expressão simbólica estar descolada de um problema, a argumentação matemática tem sentido, no entanto, para estudantes do Ensino Fundamental a justificativa atrelada a uma situação pode fazer mais sentido.

6.7.1.3 Ordem consecutiva linear

É a escrita da esquerda para a direita, na ordem em que aparecem as operações, ignorando as regras de prevalência, como o exemplo da Figura 46.

Figura 46 – Excerto do protocolo de Alan



Fonte: dados da pesquisa.

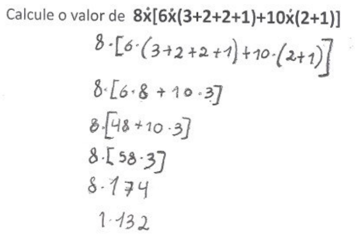
Alan (6º ano, 10 anos), resolve a expressão numérica com o recurso do sistema de significantes de conta armada. O desenvolvimento da questão é recursivo, utilizando o último resultado para calcular o seguinte, não levando em conta os sinais de associação ou a ordem de prevalência das operações. A ordem consecutiva linear, chamada por Bender (1962) a estratégia na qual os estudantes resolvem indiscriminadamente uma expressão numérica da esquerda para a direita, é relatada por Karlsson (2019).

Neste critério, nem a ordem das operações nem os sinais de associação são considerados. Em se tratando de um problema puramente com adições ou multiplicações, pelo caráter comutativo e associativo destas operações, esta estratégia não resulta em erro. Daí a necessidade de trabalhar problemas mistos com as crianças, para terem experiências com resolução de situações com diferentes operações, e criarem esquemas que lhes permitam solucionar questões envolvendo tais conhecimentos.

6.7.1.4 Ignorou a ordem das operações, mas respeitou os sinais de associação

Dos sujeitos que ignoraram a ordem das operações, mas respeitaram os sinais de associação, a maior parte se equivocou em um cálculo no qual aparecia uma adição seguida de multiplicação, como 48+10.3, no qual os estudantes fizeram 58.3, isso após eliminar os parênteses e escrever corretamente o restante da questão.

Figura 47 – excerto do protocolo de Tina


Calcule o valor de 8ẋ[6ẋ(3+2+2+1)+10ẋ(2+1)]
8·[6·(3+2+2+1)+10·(2+1)]
8·[6·8 + 10·3]
8·[48+10·3]
8·[58·3]
8·174
1·132

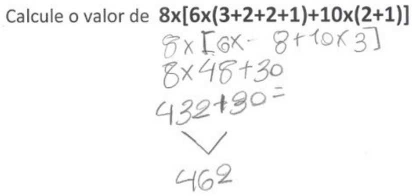
Fonte: dados da pesquisa.

Tina (8º ano, 13 anos) trocou os sinais de multiplicação para não confundir com a variável x. Eliminou os parênteses e ao chegar na linha 8.[48+10.3] se equivocou na ordem de prevalência da multiplicação sobre a adição, mas mesmo com resultado errado, seguiu a norma de eliminação de colchetes quando só resta um número em seu interior. Dentre os erros encontrados na resolução de expressões numéricas, a pesquisa de Jonsson (2016) aponta para o uso da comutatividade de forma equivocada, e no cálculo da esquerda para a direita: ambos os erros são comuns à resolução de Tina.

6.7.1.5 Respeitou a ordem das operações, mas ignorou os sinais de associação.

Desconhecer o uso dos sinais de associação ou não ter trabalhado com os mesmos pareceu o motivo dos estudantes os ignorarem, no entanto, está no programa que tal conteúdo foi trabalhado, tanto que uma das alunas aplicou a distributividade na resolução da expressão numérica. Assim, o uso de sinais de associação como ordenamento de classes pode ser trabalhado a partir de problemas, para que faça sentido em uma expressão. Dentre os erros de quem ignorou os sinais de associação, estão as respostas dos alunos que eliminaram os colchetes antes de finalizar os cálculos que havia em seu interior, como o caso de Luiz (8º ano, 14 anos).

Figura 48 – Excerto do protocolo de Luiz



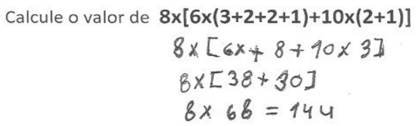
Fonte: dados da pesquisa.

Luiz leva em conta os parênteses, e efetua as operações em seu interior como prioridade, mas despreza os colchetes, seguindo a prevalência da multiplicação sobre a adição. Trabalhar as expressões numéricas partindo de problemas contextualizados pode contribuir para que os alunos entendam o significado dos sinais de associação como agrupamentos (ARRAIS, 2006, PARMEGIANNI, 2011, FREITAS, 2014).

6.7.1.6 Erro de cálculo (tabuada) no desenvolvimento da questão

Erros de tabuada foram frequentes em todas as resoluções, mas cabe registrar os processos corretos, como o caso de José (8º ano, 14 anos), que respeitou as prevalências operatórias, errando na multiplicação de 6 por 8 e de 8 por 68, o que nos leva a pensar sobre a possibilidade de trabalhar com situações para uma discussão mais concreta sobre os resultados de uma expressão numérica e sua validade.

Figura 49 – Excerto do protocolo de José



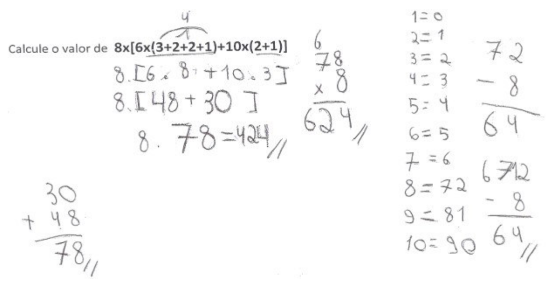
Fonte: dados da pesquisa.

Não podemos dizer que José desconhece os sentidos dos números e das operações, mas para além da patente necessidade de resolver problemas, é necessário trabalhar com os estudantes valores numéricos com os suportes possíveis para a construção de Tabelas de multiplicação e estratégias de cálculo (OLIVEIRA; SANTOS, 2017).

6.7.1.7 Ausência de erro no desenvolvimento e no resultado da questão

Compreender os sentidos dos números e das operações, bem como as regras dos sinais de associação, permite uma resolução correta da expressão numérica, como observado na Figura 50.

Figura 50 – Excerto do Protocolo de Olga



Fonte: dados da pesquisa.

Olga (8º ano, 13 anos) resolveu corretamente a expressão numérica, com erro de cálculo, o qual foi solicitado correção pela aluna depois de resolver o instrumento 2. Dentre todos os estudantes, somente Olga reconheceu a expressão numérica como resultado do problema das caixas, confirmando o que Parmegiani (2011) afirma, no sentido de significar as operações por meio de problemas.

6.7.2 Instrumento 2 – Expressões Numéricas resultantes do problema das caixas

A análise do problema das caixas foi realizada tanto quanto ao resultado quanto à representação e desenvolvimento das expressões numéricas ou nas tentativas de escrever uma expressão que traduzisse o problema.

Tabela 5 – Instrumento 2 – Quanto ao resultado numérico do problema das caixas

Critério	N
Não foi encontrado erro no desenvolvimento nem no resultado da questão.	7
Foi encontrado erro de cálculo (tabuada) no desenvolvimento da questão.	13
Idiossincrático	5
Total	25

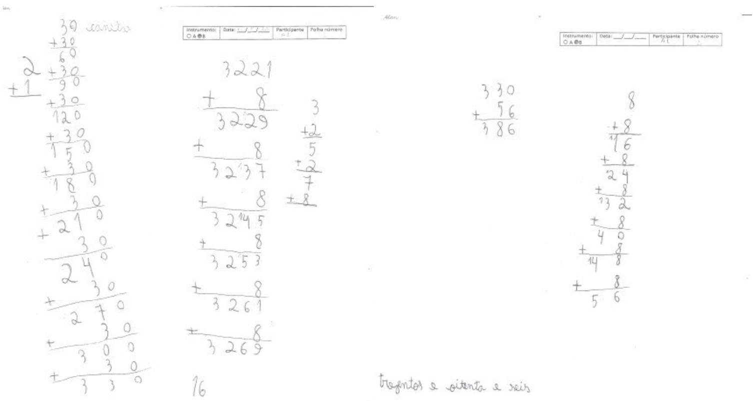
Fonte: dados da pesquisa.

Se contarmos os que acertaram e os que tiveram erros somente de cálculo no desenvolvimento (20), os estudantes, em sua maioria (13), conseguem desenvolver um processo adequado para a resolução do problema. O problema da caixa, ainda que complexo, permitiu que os estudantes encontrassem a solução a partir de diversos caminhos, como contas armadas e organogramas, nem todos ligados a expressões numéricas. A variedade de processos, representações e meios de expressão tem a potência de promover discussões ricas a respeito do sentido dos números e operações presentes no problema, e na sua escrita por meio de uma expressão numérica.

6.7.2.1 Processos idiossincráticos

Os processos idiossincráticos variaram entre os que apenas desenharam palitos, os que escreveram números sem relacioná-los, os que adicionaram grandezas diferentes, e os que inventaram formas em desacordo com as propriedades aritméticas para a resolução do problema.

Figura 51 – Excerto do protocolo de Alan



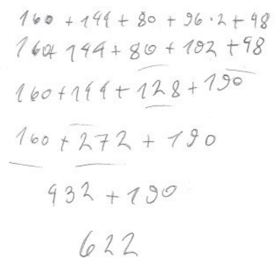
Fonte: dados da pesquisa.

Alan (6º ano, 10 anos), misturou a quantidade de canetas em uma embalagem (provenientes dos estojos azuis) e de canetas na caixa (provenientes dos estojos amarelos). Embora a grandeza seja canetas, não resulta na solução do problema. Alan desistiu da ideia de escrever a quantidade de canetas como 3221 durante a entrevista, mas ainda assim o 56 representava a quantidade de canetas dos estojos azuis em apenas uma embalagem e o 330 a quantidade de canetas dos estojos amarelos em oito embalagens, na caixa toda, apresentando incoerência.

6.7.2.2 Erro de cálculo (tabuada) no desenvolvimento da questão

Os erros de cálculo, em sua maioria, consistiram nas multiplicações, com erros "de tabuada", ou algum número copiado errado de uma linha para a outra. Os alunos compreenderam os processos, descreveram os passos e as operações corretamente, mas o resultado numérico não foi o adequado.

Figura 52 – Excerto do protocolo de Mara



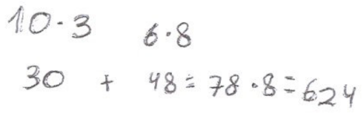
Fonte: dados da pesquisa.

Mara (8º ano, 13 anos) mudou o 192 para 190, da segunda linha para a terceira, ocasionando erro de cálculo. A estudante descreve uma expressão numérica majoritariamente aditiva e homomorfa à situação no sentido de representar a quantidade de canetas na caixa. Ao invés de somar as canetas dos estojos, Mara calcula a quantidade de caneta por cor na caixa e realiza o somatório.

6.7.2.3 Processos e resultados corretos

Os acertos tiveram diversos caminhos, tanto de expressões numéricas com ou sem sinais de associação, quanto em outras representações organizaram os dados do problema de forma homomorfa à situação.

Figura 53 – Excerto do protocolo de Tina



Fonte: dados da pesquisa.

Tina (8º ano, 14 anos) resolveu a questão calculando de forma separada cada quantidade de canetas nos estojos em uma embalagem, depois somando a quantidade de canetas em uma embalagem, e multiplicando pelo número de embalagens. Este processo foi realizado utilizando escrita em linha, ao invés de uma expressão numérica. Tina está em processo de aquisição das noções necessárias para escrita de uma expressão numérica homomorfa à situação das caixas. A estudante apresenta noção de quantidade, e dá sentido a cada operação, realizando na ordem correta.

Para entender a ordem das operações nas expressões numéricas resultantes do problema das caixas, identificamos quatro formas de escrita, conforme Tabela 6.

Tabela 6 – Instrumento 2 – Quanto à representação em expressão numérica e seu desenvolvimento

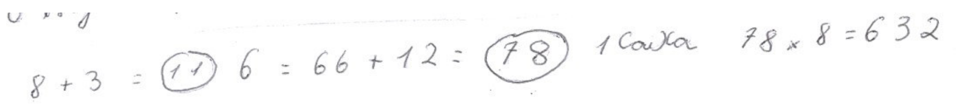
Critério	N
Expressão numérica com multiplicações e adições.	6
Expressão numérica somente com adições.	2
Expressão somente com multiplicações.	2
Presença de igualdade nas representações em linha.	5
Não representou o problema por meio de expressão numérica.	10
Total	**25**

Fonte: dados da pesquisa.

6.7.2.4 Presença de igualdade nas representações em linha.

A presença de igualdade na tentativa de escrita de uma expressão numérica aponta para a descrição das operações realizadas, ordenadas de forma temporal, a fim de constituir o registro do que foi produzido. No entanto, não apresenta uma expressão que represente numericamente o problema, assim, denominamos escrita em linha.

Figura 54 – Excerto do protocolo de Joel



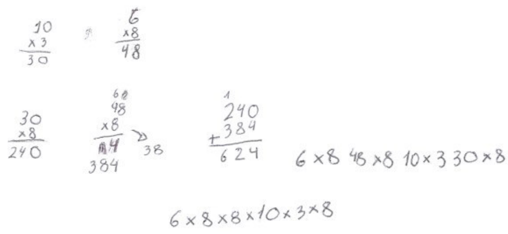
Fonte: dados da pesquisa.

O sinal de igualdade presente nestas resoluções tem o significado de operacional, ao invés de equivalência ou relacional (TRIVILIN; RIBEIRO, 2015), e está descrito de uma forma incorreta, pois a igualdade presume transitividade, o que não ocorre, pois 8+3 não é o mesmo que 11.6, que não é 78. Joel (8º ano, 13 anos) descreve o passo a passo dado para chegar na quantidade de canetas em uma caixa. Essa escrita em linha é um dos caminhos para chegar na expressão numérica correspondente à situação.

6.7.2.5 Expressão somente com multiplicações

Os estudantes que escreveram expressões numéricas somente com multiplicações erraram nesta representação, mas não necessariamente na organização dos dados em conta armada.

Figura 55 – Excerto do protocolo de Jane



Fonte: dados da pesquisa.

Jane (6º ano, 11 anos) calculou corretamente a quantidade de canetas na caixa por meio de conta armada, no entanto, quando tentou representar por uma expressão numérica sua resolução, escreveu as multiplicações realizadas e as uniu, em um cálculo incorreto. Jupri, Drijvers e Van den Heuvel (2014) defendem que a maior dificuldade dos estudantes é passar para a forma simbólica, ainda que saibam os processos para chegar nos resultados. Não escrever uma expressão numérica não significa que a estudante não compreendeu o problema, mas aqueles que escreveram e resolveram a expressão apresentaram outro nível de compreensão.

6.7.2.6 Expressão somente com adições

A escrita do último passo como expressão numérica que representa o problema, foi a percepção dos estudantes que registraram somente com adições seu registro. Tal adição repetida deve ser trabalhada para a ruptura da adição e da multiplicação.

Figura 56 – Excerto do protocolo de Alex

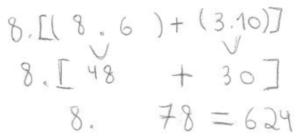
Fonte: dados da pesquisa.

Alex (6º ano, 13 anos) descreveu na forma de expressão o último passo dado para calcular a quantidade de canetas na caixa. O sentido de número neste caso é o de parte todo, sendo as 78 canetas nas embalagens parte das 564 (sic) canetas da caixa, ao invés da replicação de 78 canetas 8 vezes. Para Nunes e Bryant (1997), a ruptura entre o sentido de número de parte todo e o de replicação é necessária para operar no Campo Conceitual Multiplicativo.

6.7.2.7 Expressão numérica com multiplicações e adições

Expressões de um problema misto com adições e multiplicações foram organizadas tanto com sinais de associação quanto sem os mesmos, apresentando um caráter de desenvolvimento da escrita numérica, bem como a percepção do sentido de número para o problema realizado. Os alunos que responderam corretamente tanto a expressão escrita na forma simbólica quanto o problema das caixas mostraram que conhecem as regras de prevalência e os sinais de associação.

Figura 57 – Excerto do protocolo de Olga



Fonte: dados da pesquisa.

Olga (8º ano, 13 anos) representou corretamente o problema como expressão numérica, e o solucionou, tendo sucesso no desenvolvimento e resultado da expressão numérica simbólica, apresentando conhecimento do sentido de número e das operações nos campos conceituais trabalhados, com imbricação entre o Campo Conceitual Aditivo e Multiplicativo (NUNES; BRYANT, 1997, RAMOS; SILVA, 2022). Os alunos que obtiveram êxito na resolução da expressão numérica simbólica também obtiveram na resolução do problema das caixas. A distribuição dos erros entre a organização das operações na expressão numérica simbólica e na resolução do problema da caixa não foi uniforme.

Salvo os casos de Olga e de Alex, os alunos não relacionaram o problema à expressão numérica, da mesma forma que os sujeitos pesquisados por Silva e Oliveira (2003). Embora Alex não tenha resolvido por meio de expressão numérica, identificou as quantidades do problema na expressão simbólica, e Olga alterou o resultado da expressão numérica do instrumento 1 ao perceber o erro de cálculo, comparando com sua resposta na resolução do problema misto.

6.8 Considerações

Neste texto buscamos entender como estudantes de 6º e 8º anos operam com as ordens de prevalência em expressões numéricas. Para isso, inicialmente nos orientamos por pesquisas sobre o tema, as quais concluem que os erros comuns em expressões numéricas dizem respeito ao domínio da Aritmética e à interpretação das regras de prevalência.

Reconhecemos, a partir da Teoria dos Campos Conceituais, que o conhecimento é construído por meio da conceitualização, que exige o enfrentamento de situações de diversas classes em um Campo Conceitual para seu domínio. Descrevemos de forma muito breve as classes dos campos conceituais Aditivo e Multiplicativo, dos quais as expressões numéricas estudadas fazem parte, enfatizando os problemas mistos.

Com isso, propusemos a análise das respostas de estudantes frente a dois instrumentos: uma expressão numérica em sua forma simbólica e a resolução de um problema oral com suporte de material. Através do Método Clínico, realizamos entrevistas com os estudantes e buscamos responder: quais os erros cometidos por estudantes ao resolver uma expressão numérica? Os erros cometidos no desenvolvimento de uma expressão numérica descontextualizada são os mesmos de uma resolução de problema misto? Como a prevalência operatória (ordem das operações e uso dos sinais de associação) é utilizada pelos estudantes na resolução de uma expressão numérica?

Os erros cometidos por estudantes na resolução da expressão numérica em sua forma simbólica (descontextualizada) disseram respeito à ordem de prevalência, tanto por não levar em consideração os sinais de associação, quanto a respeito dos sentidos das operações e suas prioridades. A ordenação das operações de duas em duas e a resolução da esquerda para a direita fizeram parte desses equívocos.

Os erros na resolução do problema misto foram incoerências, como a adição de grandezas diferentes, regras inventadas pelos estudantes, representação errada com palitos ou incompreensão do Sistema de Numeração Decimal. Processos coerentes com erros de cálculo, como "tabuada" foram bastante frequentes na resolução do problema das caixas.

Na resolução do problema misto, a maior parte dos estudantes criou processos coerentes, os quais indicaram conhecimento do sentido das operações, bem como da ordem operatória. No entanto, as representações na forma de expressão numérica não corroboraram com o domínio apresentado pelos estudantes nas resoluções nas quais os mesmos utilizaram outros sistemas de significantes. Aqueles estudantes que representaram corretamente o problema como expressão numérica, e o solucionaram, também obtiveram sucesso na expressão numérica simbólica, apresentando conhecimento do sentido de número e das operações nos campos conceituais trabalhados, com imbricação entre o Campo Conceitual Aditivo e Multiplicativo.

A compreensão do ordenamento das operações por meio do problema foi consideravelmente superior ao êxito obtido na expressão numérica simbólica. Sugerimos, em conjunto com o referencial deste texto, que as regras de prevalência sejam trabalhadas por meio do enfrentamento de situações, e que a escrita das expressões numéricas provenha de problemas, para que assim tanto a ordem das operações quanto os sinais de associação tenham sentido para o estudante.

6.9 Referências

AL-GHAMDI, Y. A. S. **The effectiveness of using microcomputers in learning algebraic precedence conventions**. 1987. Tese (Doutorado em Filosofia). The Florida State University, Florida, 1987. proquest dissertations publishing, 8711707. Disponível em https://www.proquest.com/openview/d4d80fe9ab24ce152c98c7221f407cdd/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750&diss=y. Acesso em: 9 nov. 2022.

ALI RAHMAN, E. S.; SHAHRILL, M.; ABBAS, N. A.; TAN, A. The development of students' mathematical skills in the evaluation of numerical expressions involving order of operations, **The Eurasia Proceedings of Educational & Social Sciences (EPESS),** v. 4, p. 409-413, 2016. Disponível em: http://www.epess.net/tr/download/article-file/334286, Acesso em: 16 jan. 2022.

ARRAIS, U. B**. Expressões Aritméticas: Crenças, Concepções e Competências no entendimento do professor polivalente**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11095. Acesso em: 5 nov. 2020.

BENDER, M. L. Order of operations in elementary arithmetic. **The arithmetic teacher,** Cleveland, v. 9, n. 5, 1962. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/41184625. Acesso em: 5 mai. 2020.

DELVAL, J. **Introdução à Prática do Método Clínico**: descobrindo o pensamento das crianças. São Paulo: Artmed, 2002.

FREITAS, H. S. **Expressões numéricas e suas abordagens em livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental adotados por uma escola pública de Cuiabá-MT.** 2014. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2014. Disponível em: https://ri.ufmt.br/handle/1/1916. Acesso em: 10 mai. 2020.

GITIRANA, V.; CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S. M. P.; SPINILLO, A. G. **Repensando a multiplicação e divisão**. Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM, 2014.

GOODROW, A. M.; KIDD, K.."We All Have Something That Has to Do with Tens": Counting School Days, Decomposing Number, and Determining Place Value. **Teaching Children Mathematics** , [*s/l*], v. 15, n. 2, p. 74-79, set. 2018. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/41199220. Acesso em:.12 dez. 2022.

GREGOLIN, V. R. **O Conhecimento Matemático Escolar: Operações com Números Naturais (e adjacências) no Ensino Fundamental**. 2002. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2002. Disponível em:

http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/tese_gregolin.pdf. Acesso em: 10 jan. 2020.

HOLM, K. Hur elever resonerar om kommutativitet i numeriska uttryck. 2018. Dissertação (Independent thesis Advanced level - professional degree) - Jönköping University, School of Education and Communication, Swedish, 2018. Disponível em: http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:hj:diva-40122. Acesso em: 22 dez. 2022.

JONSSON, J. **Att strukturera och beräkna matematiska uttryck** : En studie om hur elever i årskurs 5 hanterar utvecklade aritmetiska uttryck. 2016. Dissertação (Independent thesis Advanced level - professional degree) - Jönköping University, School of Education and Communication, Swedish, 2016. Disponível em: http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:hj:diva-30590. Acesso em: 22 dez. 2022.

JUPRI, A.; DRIJVERS, P.; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. Difficulties in initial algebra learning in Indonesia. **Mathematics Education Research Journal**, v.26, n.4, p. 683-710, dez. 2014. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s13394-013-0097-0. Acessado em: 12 dez. 2022.

KARLSSON, R. Vi hör ihop : Hur elever beräknar numeriska uttryck med sina egenskapade räkneregler. 2019. Dissertação (Independent thesis Basic level - professional degree) - Jönköping University, School of Education and Communication. 2019. Disponível em: http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:hj:diva-44530. Acesso em: 21 dez. 2022.

KARLSSON, R.; LINDER, S. **Hur elever tillämpar räkneregler och räknelagar på numeriska uttryck.** 2018. Dissertação (Independent thesis Basic level - professional degree) - Jönköping University, School of Education and Communication, 2018. Disponível em: http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:hj:diva-39179. Acesso em: 21 dez. 2022.

KARP, K. S.; BUSH, S. B.; DOUGHERTY, B. J. .13 Rules That Expire. **Teaching Children Mathematics** , v. 21, n. 1 (August 2014), p. 18-25. 2014. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/10.5951/teacchilmath.21.1.0018. Acesso em: 21 dez. 2022.

MAGINA, S. M. P.; MERLINI, V. L.; SANTOS, A. A estrutura multiplicativa à luz da Teoria dos Campos Conceituais: uma visão com foco na aprendizagem. *In*: CASTRO FILHO; J. A.; BARRETO, M. C.; BARGUIL, P. M.; MAIA, D. L.; PINHEIRO, J. L. **Matemática, cultura e tecnologia: perspectivas internacionais**. Curitiba: Editora CRV, 2016, p.66-82.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. M.; NUNES, T.; GITIRANA, V. **Repensando adição e a subtração**: contribuições da teoria dos campos conceituais. São Paulo: PROEM, 2008.

MIRANDA, C. A. **Situações-problema que envolvem o conceito de função a-fim:** uma análise à luz da Teoria dos Campos Conceituais. 2019. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação) - Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2019. Disponível em: https://tede.unioeste.br/handle/tede/4671. Acesso em: 9 dez. 2022.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças Fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artmed, 1997.

NUNOKAWA, K..Multi-Relation Strategy in Students' Use of a Representation for Proportional Reasoning. **Eurasia Journal of Mathematics**, **Science & Technology Education**, v. 8, n. 4, p. 233-248, 2012. Disponível em: http://dx.doi.org/10.12973/eurasia.2012.842a. Acesso em: 12 dez. 2022.

OLIVEIRA, L.; SANTOS, E. S. C. Para que ensinar tabuada? observações sobre a necessidade e as "novas metodologias" para ensinar tabuada da revista do professor. *In:* Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisas em Educação Matemática, 11., 2017, Campo Grande. **Anais [...]** Campo Grande: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2017. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/sesemat/article/view/3696/3672. Acesso em: 16 de janeiro de 2023.

OTTES, A B. **Expressão numérica: a hierarquia das quatro operações matemáticas**. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2016. Disponível em: https://repositorio.ufsm.br/handle/1/12435. Acesso em: 21 ago. 2020.

OTTES, A. B.; FAJARDO, R. Um olhar sobre a hierarquia das quatro operações aritméticas nas expressões numéricas**. Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 1, n. 2, maio/ago. 2017. Disponível em https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/30/20. Acesso em: 21 ago. 2020.

PARMEGIANI, R. Contextualizando o ensino das expressões numéricas no Ensino Fundamental. *In*: Congresso Nacional de Educação Matemática, 2., 2011. Ijuí. **Anais** [...]. Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul – Ijuí. Ed. Unijuí, 2011. Disponível em: http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cnem/cnem/principal/re/PDF/RE64.pdf. Acesso em: 10 mai. 2020.

RAMOS, R. C. S. S; SILVA, J. A, LUZ, V. S.; FIRME, S. M.; SARAIVA, D. R. Situações de expressões numéricas em livros didáticos de 6º ano: uma análise segundo a Teoria dos Campos Conceituais. **Bolema**, Rio Claro, v. 35, n. 71, p. 1294-1315, 2021. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a04. Acesso em 9 dez. 2022.

RAMOS, R. C. S. S; SILVA, J. A. Estudo de revisão sobre expressões numéricas em textos acadêmicos - abordagens teóricas. *In:* Congresso Ibero-americano de Educação Matemática, 9, 2022b,São Paulo. **Anais [...],**online, São Paulo. Pontifícia Universidade Católica – São Paulo, 2022b. Disponível em: https://even3.blob.core.windows.net/processos/8b9539b36aea4c5a8f09.docx. Acesso em: 9 dez. 2022.

SILVA, A. L. A.; OLIVEIRA, M. G. A vida por trás das expressões. *In*: Encontro Nacional de Educação Matemática, 11. , 2013, Curitiba. **Anais [...].** Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2013, p. 1-8. Disponível em: http://www.sbemrevista.com.br/files/XIENEM/pdf/513_213_ID.pdf. Acesso em: 17 ago. 2020.

TRIVILIN, L. R.; RIBEIRO, A. J. Conhecimento Matemático para o Ensino de Diferentes Significados do Sinal de Igualdade: um estudo desenvolvido com professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática [online], v. 29, n. 51, p. 38-59, 2015. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a03. Acesso em: 21 nov. 2022.

UNGER, J. (2021). Vilka räknesätt har företräde? : **En studie om hur elever i årskurs 5 strukturerar och bokför beräkningar av numeriska uttryck.** 2021. Dissertação (Independent thesis Advanced level - professional degree) - Jönköping University, School of Education and Communication. 2021. Disponível em: http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:hj:diva-53770. Acesso em: 21 dez. 2022.

URBINA-LILBACK, R N. Snapshots of Equitable Teaching in a Highly Diverse Classroom. **The Mathematics Teacher** , v. 110, n. 2 , p. 126-132. 2016. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/10.5951/mathteacher.110.2.0126 . Acesso em: 21 dez. 2022.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar**. Curitiba: Editora da UFPR, 2009a.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didáctica das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, v. 1, p. 75-90, 1986. Disponível em: https://repositorio.ispa.pt/bitstream/10400.12/2150/1/1986_1_75.pdf. Acesso em: 22 nov. 2022.

WIBERG, J.. Att prioritera rätt : Hur elever i årskurs 5 går tillväga, gällande strukturering och prioritering, när de beräknar numeriska uttryck. 2017. Dissertação (Independent thesis Advanced level - professional degree) - Jönköping University, School of Education and Communication. 2017. Disponível em: http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:hj:diva-36384, 2017. Acesso em: 22 dez. 2022.

ZAZKIS, R.; ROULEAU, A. Order of operations: On convention and met-before acronyms. **Educational Studies in Mathematics**, v. 97, n.2, p. 143–162, 2008. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/45185421. Acessado em: 22 dez. 2022.

7 CLASSIFICAÇÕES, ESQUEMAS E EXPRESSÕES NUMÉRICAS: IMBRICAÇÃO ENTRE OS CAMPOS CONCEITUAIS ADITIVO E MULTIPLICATIVO EM UM PROBLEMA MISTO

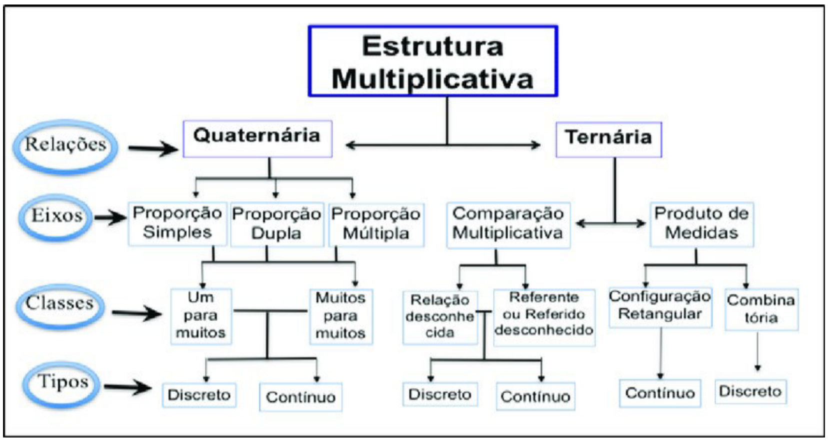
7.1 Introdução

Este texto é parte de uma pesquisa que analisa as imbricações entre os campos conceituais aditivo e multiplicativo, por meio da resolução de um problema misto e de sua representação como expressão numérica. Buscamos atender os seguintes objetivos: identificar como estudantes do Ensino Fundamental resolvem um problema misto, investigar quais as estratégias utilizadas por estes estudantes, descrever as expressões numéricas que resultam dos processos pelos quais os estudantes resolvem o problema, e caracterizar os diagramas que descrevem as estratégias dos estudantes ao resolver um problema de composição de medidas e proporção. Para atender os objetivos nos ancoramos na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, fizemos um breve levantamento sobre o que se entende por problemas mistos atualmente, sua classificação e diagramas, e analisamos as respostas dadas a um problema de proporção e composição de medidas.

Com o intuito de entender o desenvolvimento da aprendizagem, de forma mais específica os conhecimentos escolares, Vergnaud (1990) propõe que o conhecimento pode se dividir em subcampos da experiência, compostos de conjuntos estruturados de situações que o sujeito enfrente, denominado campos conceituais. Cada conceito é formado por um conjunto de situações, invariantes operatórios e representações relacionadas a ele, e cada situação movimenta um conjunto de conceitos para ser resolvida, sendo o campo conceitual composto por essa série de situações e ampliado ao longo do desenvolvimento do sujeito (VERGNAUD, 1990, 2007, 2009).

Toda situação que necessita de uma adição ou subtração para ser resolvida, faz parte do Campo Conceitual Aditivo (CCA), da mesma forma, toda situação que depende de uma multiplicação ou divisão para sua solução, pertence ao Campo Conceitual Multiplicativo (CCM), esquematizado em classes por Magina, Merlini e Santos (2016), conforme Figura 58.

Figura 58 – Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo elaborado por Magina, Merlini e Santos

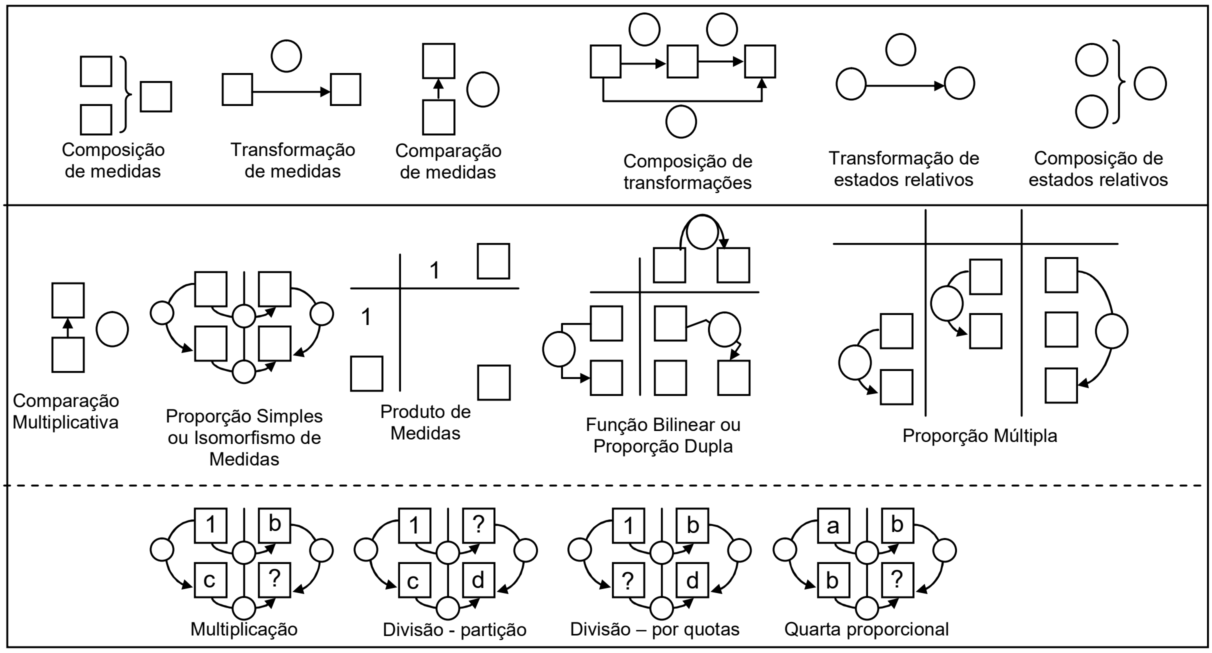


Fonte: Magina, Merlini e Santos (2016, p. 69).

As situações dos campos conceituais Aditivo e Multiplicativo são classificadas de forma relacional, conforme diagramas no Quadro 14, que apresentam tais classes (VERGNAUD, 2009, MAGINA; MERLINI; SANTOS, 2016), mais as subclasses correspondentes às proporções simples.

As proporções simples são chamadas de isomorfismo de medidas, as proporções múltiplas são a composição de duas ou mais proporções simples e as proporções duplas possuem uma grandeza relacionada a outras duas, as quais não são relacionadas entre si (VERGNAUD, 1983). Os problemas aritméticos compostos ao mesmo tempo de pelo menos uma adição ou subtração e de pelo menos uma multiplicação ou divisão são chamados por Vergnaud (2009) de problemas mistos, cujos diagramas são a composição das categorias ilustradas pelo Quadro 14.

Quadro 14 – Diagramas das situações do CCA e CCM



Fonte: adaptado de Vergnaud (1990; 2009a), Gitirana *et al.* (2014), Magina; Merlini; Santos (2016) e Miranda (2019).

Especificamente no caso de composição de medidas do Campo Conceitual Aditivo, as relações estão entre as partes e o todo. No Campo Conceitual Multiplicativo, a comparação multiplicativa tem como elementos o referente, o referido e a relação.

7.2 Problemas mistos

Em função da situação construída para compor o instrumento ser do tipo problema misto, sentimos a necessidade de compreender como os problemas mistos se organizam em textos acadêmicos, assim, procedemos um levantamento em duas fases, sendo a primeira uma busca no catálogo de periódicos da CAPES, na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, no Portal de Periódicos da CAPES, no portal Scielo, na Edubase, nas últimas cinco edições do Encontro Nacional de Educação Matemática e Seminário Internacional de Educação Matemática e no Google Acadêmico. O descritor utilizado foi "problemas mistos", conseguindo a seguinte quantidade de trabalhos:

Tabela 7 – Trabalhos sobre problemas mistos nos portais pesquisados

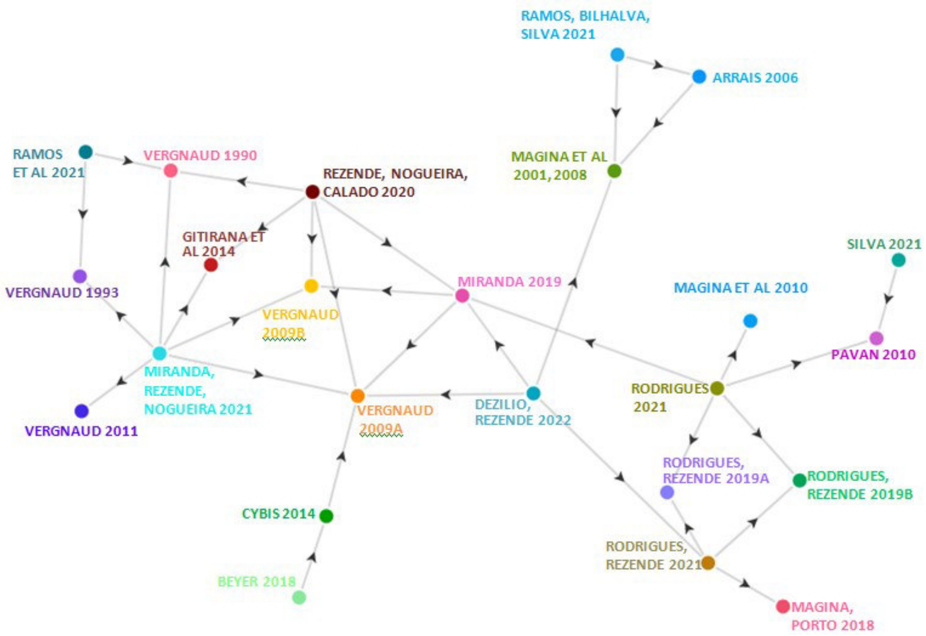
Portal	Total de trabalhos	**Utilizados**	Tese	Dissertação	Artigos	Evento
Catálogo CAPES	5	**2**	0	2	0	
BDTD	16	**2/0**	0	2/0	0	
Periódicos CAPES	8	**4**	0	0	4	
Google Acadêmico	195	**8/4**	1	3/2	3/1	1
TOTAL		**10**	1	3	5	1

Fonte: dados da pesquisa.

Nos portais Scielo e Edubase e nos eventos ENEM e SIPEM a busca não retornou artigos. A barra na Tabela 7 indica número de trabalhos selecionados/número de trabalhos que não estão nas linhas anteriores. No Google Acadêmico, dos 195 trabalhos, 30 versavam sobre o tema, mas 17 compreendiam os números mistos como classe de estruturas aditivas e 4 tiveram uma compreensão indefinida, restando 8 trabalhos de problemas mistos como situações que contemplam a multiplicação ou divisão e a subtração ou adição, conforme nossa filiação à Teoria dos Campos Conceituais. Portanto, na primeira etapa, foram selecionados 10 trabalhos, sendo eles: as dissertações de Beyer (2018), Miranda (2019) e Rodrigues (2021), a tese de Silva (2021), os artigos de Rodrigues e Rezende (2021), Rezende, Nogueira e Calado (2020), Miranda, Rezende e Nogueira (2021), Dezilio e Rezende (2022), Ramos *et al* (2021), e a comunicação em evento de Ramos, Bilhalva e Silva (2021).

A segunda etapa consistiu na coleta das referências que sustentaram os trabalhos da primeira etapa em relação aos números mistos, encontrando outros 15 textos, perfazendo o total de 25 textos, conforme Figura 59. A rede apresentada indica os textos e as referências que embasaram exclusivamente o capítulo ou item referente à noção de problemas mistos. As setas partem do autor para sua referência.

Figura 59 – Rede de textos acadêmicos que mencionam problemas mistos



Fonte: dados da pesquisa

Gitirana *et al* (2014) e Magina *et al*. (2001; 2008) não abordam especificamente problemas mistos, mas categorizam e pormenorizam as classificações propostas por Vergnaud (2009) para as classes de situações do Campo Conceitual Multiplicativo e do Campo Conceitual Aditivo, por meio de esquemas sagitais, organização das situações e exemplos. São dois livros que guiam boa parte dos estudos sobre Teoria dos Campos Conceituais, Estruturas Aditivas e Estruturas Multiplicativas no Brasil.

Magina *et al*. (2010) trabalham com problemas, cálculos relacionais, estratégias e respostas de alunos de primeiro ao quarto ano a respeito de problemas aditivos, concluindo que quanto mais complexo o problema aditivo, menor o número de acertos, a necessidade de reconsiderar o ensino de Matemática e o papel da pesquisa na formação do professor dos anos iniciais. Magina e Porto (2018) estudam estratégias utilizadas por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental ao resolverem três situações-problema que envolvem o conceito de função, das quais duas são problemas mistos. Os estudantes resolvem os problemas tanto da forma aditiva quanto multiplicativa. As autoras concluem que com professores conhecedores dos teoremas em ação subjacentes, é possível a formação conceitual de função neste nível de ensino.

É razoável que, ao menos indiretamente, todos os trabalhos que versam sobre a Teoria dos Campos Conceituais estejam embasados por textos de Vergnaud. No artigo de 1990, publicado na RDM, em francês, o autor apresenta a Teoria dos Campos Conceituais, definindo esquemas, conceitos em ação, teoremas em ação, conceito, significantes, situações, as relações aditivas e multiplicativas de base e relaciona tais elementos entre si. Em 1993 Vergnaud participa de um seminário no Rio de Janeiro, e seu texto, em língua portuguesa, aborda os elementos do artigo de 1990. Na edição de 1996 do livro de Jean Brun, Vergnaud publica um capítulo no qual pormenoriza as ideias de situação, e aprofunda as relações entre os sentidos, os simbolismos e como a Teoria dos Campos Conceituais os compreende.

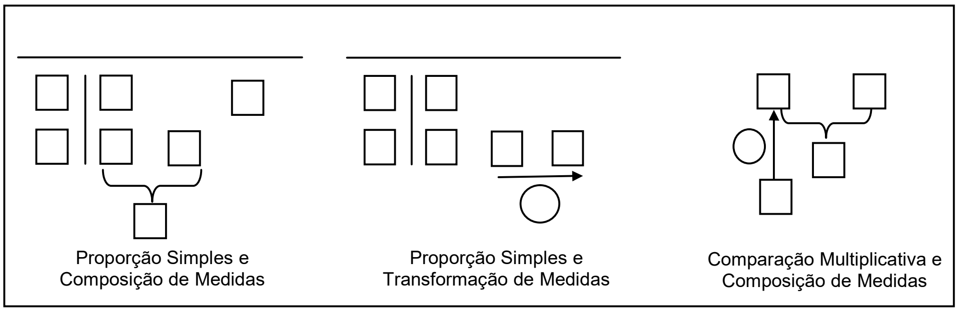
O livro publicado originalmente em 1981 e traduzido para a Língua Portuguesa em 2009, chamado a Criança, a Matemática e a Realidade, organiza, sistematiza e apresenta detalhadamente a Teoria dos Campos Conceituais, suas relações, elementos, representações, procedimentos e elementos que dela fazem parte. Além de abordar os Campos Conceituais aditivo e multiplicativo, como nos textos anteriores, Vergnaud (2009a) explicita o que entende por problemas mistos, consistindo em problemas que compreendem ao mesmo tempo operações dos campos aditivo e multiplicativo, dando exemplos e organizando o diagrama que utilizamos neste texto. No mesmo ano, o autor publica um capítulo no livro de Cristiano Muniz e Barbara Bittar, denominado O que é Aprender, e explicita o que entende por aprendizagem, trazendo as ideias de adaptação e esquema de Piaget, evidenciando a aprendizagem em situação e a partir das relações entre esquemas, invariantes operatórios, sistemas de significantes, representação, conceito e transposição, Vergnaud (2009b) define a aprendizagem por meio da Teoria dos Campos Conceituais.

Já nos textos anteriores, Vergnaud estabelece que a aprendizagem se dá ao longo da vida, por meio do enfrentamento de situações, e em 2011 diferencia a aprendizagem a longo prazo, com uma perspectiva de desenvolvimento, e a de curto prazo, pela resolução de situações propostas em sala de aula. Todos os textos contemplados nessa descrição trazem exemplos de estruturas aditivas e multiplicativas, situações e interpretações que relacionam os elementos da Teoria dos Campos Conceituais de forma didática, o que demonstra uma generosidade do autor para conosco.

Dos trabalhos analisados, dois têm como tema as expressões numéricas e a imbricação entre os campos conceituais aditivo e multiplicativo sob a forma da resolução de situações do tipo problemas mistos, sendo que Ramos *et al.* (2021) analisa livros didáticos contendo situações envolvendo expressões numéricas, e as classifica em aditivas ou multiplicativas puras ou problemas mistos, e Ramos, Bilhalva e Silva (2021) apresentam a pré-análise de um instrumento de pesquisa que consiste em um problema misto de proporção simples e transformação de medidas, a ser estudado sob o Método Clínico Piagetiano.

O grupo de pesquisa GEPeDiMa – Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática, da Universidade do Oeste do Paraná, investiga o estabelecimento do Campo Conceitual da Função Afim (REZENDE; NOGUEIRA; CALADO, 2020), firmados nesta proposta, os problemas mistos são vistos sob uma ótica funcional. A maior parte dos trabalhos versa sobre função afim e analisa os problemas mistos sob essa ótica. Miranda (2019) estuda problemas mistos em livros didáticos, descrevendo uma classificação de problemas mistos segundo seu papel funcional em funções afins, a partir das classes de estruturas aditivas e multiplicativas de Vergnaud (2009), compondo 30 possibilidades de problemas mistos, sendo que nas coleções estudadas, no Ensino Fundamental, dos 34 problemas, 17 são de Proporção Simples e Composição de Medidas, e no ensino Médio, dos 44 problemas, 15 são de Proporção Simples e Composição de Medidas, excedendo problemas puramente multiplicativos ou aditivos. No Quadro 15 podemos observar os diagramas produzidos por Miranda (2019) para as classes de problemas mistos presentes nos livros que fizeram parte do seu *corpus* de estudo.

Quadro 15 – Diagramas de problemas mistos



Fonte: adaptado de Miranda (2019).

Miranda, Rezende e Nogueira (2021) analisam estruturas de problemas de função afim encontrados em uma coleção de livros didáticos, e estabelecem sua classificação, em problemas mistos ou puramente multiplicativos. Das cinco situações, três são mistas, sendo uma do tipo proporção simples e composição de medidas e duas de proporção simples e transformação de medidas. Rezende, Nogueira e Calado (2020) identificaram como as ideias base de função são mobilizadas por estudantes brasileiros dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Analisaram as respostas de três problemas, dois de problemas mistos, sob o olhar das ideias de função, concluindo que há necessidade de trabalhar generalização com os estudantes.

Rodrigues (2021) analisou invariantes operatórios, associados ao conceito de função, mobilizados por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, na resolução de problemas mistos do tipo proporção simples e transformação de medidas. Os invariantes operatórios foram modelados na forma de teoremas em ação e explicitados como conceitos em ação. As ideias base de função foram mobilizadas como conceitos em ação, e percebeu-se que o mesmo teorema em ação pode ser manifestado em esquemas diferentes da mesma classe de problemas ou de classe diferente. Rodrigues e Rezende (2021) analisaram problemas mistos propostos em uma coleção de livros didáticos de matemática do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental, na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais, pelas possibilidades de classes de problemas mistos divulgadas por Miranda (2019). Dos 46 problemas mistos analisados, classificados em sete classes, desenvolvidas com os esquemas relacionais propostos por Miranda (2019) e Vergnaud (2009), a classe mais frequente foi a proporção simples e composição de medidas, com 19 questões.

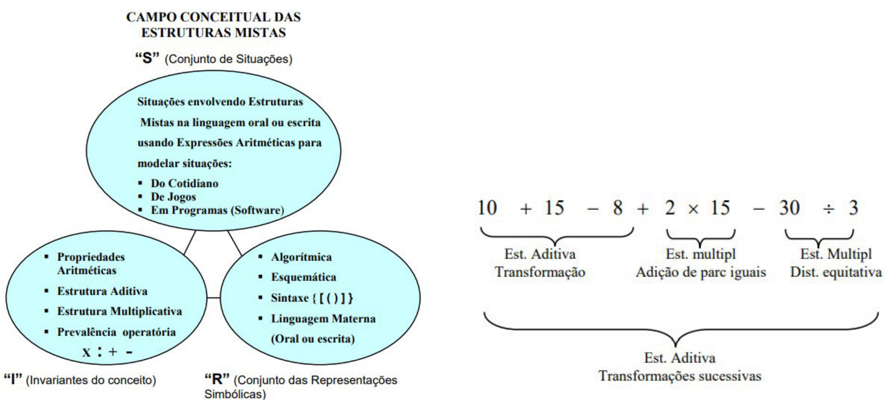
Dezilio e Rezende (2022) analisam quais as ideias de função, estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental, mobilizam ao resolverem problemas mistos envolvendo composição de medidas e proporção simples. As autoras discutem sobre os invariantes operatórios relacionados à função apresentados pelos estudantes em cada resolução, e identificam as ideias de correspondência, dependência, regularidade, variável, proporcionalidade, generalização e a modelação da função afim, concluindo com a defesa do trabalho de problemas mistos nos anos iniciais para a construção da ideia de função durante o período escolar.

Silva (2021) investigou que contribuições a implementação de uma sequência de problemas de estruturas multiplicativas proporciona para a compreensão das ideias base de função por alunos de quinto ano, por meio de vinte e dois problemas de estruturas multiplicativas e problemas mistos. Os grupos tiveram maior facilidade em manifestar a forma operatória do conhecimento que a forma predicativa. Conclui que quanto mais consciente o aluno estiver de sua forma operatória, mais condição terá para manifestar a forma predicativa, seja oralmente ou por escrito.

Beyer (2018) mapeou as pesquisas sobre Campo Conceitual Multiplicativo no Brasil. A autora produziu resenhas sobre 32 trabalhos, dentre os quais encontramos Cybis (2014), a qual trabalhou problemas multiplicativos e mistos com os estudantes, avaliando se os diagramas de barras e os processos heurísticos contribuiriam na aprendizagem de Matemática.

Embora Arrais (2006) assinale como problema misto um problema puramente aditivo, diferentemente de nossa compreensão, o autor propôs o duplo campo conceitual das estruturas mistas, para expressões aritméticas com as quatro operações, indicando os invariantes operatórios, situações e representações das mesmas, bem como a classificação conforme Vergnaud (2009), como pode ser observado na Figura 60.

Figura 60 – Diagrama e exemplo de caso do Campo Conceitual das Estruturas Mistas, segundo Arrais (2006)



Fonte: Arrais (2006, p. 11; 121).

Não compreendemos as expressões aritméticas ou expressões numéricas como duplo campo conceitual, mas como possibilidade de imbricação dos campos aditivo e multiplicativo, ao trabalhar com problemas mistos (MIRANDA, 2019; REZENDE; NOGUEIRA; CALADO, 2020). O caso de maior frequência nas pesquisas sobre problemas mistos evidenciadas anteriormente é o de proporção simples e composição de medidas. Apresentamos neste texto um caso que inicialmente foi pensado ser desta categoria, no entanto, os processos realizados pelos estudantes mostraram outras possibilidades de classificação.

Método

Este estudo faz parte de uma pesquisa sobre expressões numéricas como imbricação entre os campos conceituais aditivo e multiplicativo, na qual buscamos responder às seguintes perguntas: como estudantes do Ensino Fundamental resolvem um problema misto? Quais as estratégias utilizadas por estes estudantes? Quais expressões numéricas resultam dos processos pelos quais os estudantes resolvem o problema? Quais os diagramas que descrevem as estratégias dos estudantes ao resolver um problema de composição de medidas e proporção?

Para tal, analisamos os processos utilizados pelos alunos na resolução de um problema misto, realizado por 25 estudantes do 6º e do 8º anos de escolas públicas da região Sul do Brasil. A pesquisa foi registrada sob o código do Conselho de Ética da Universidade Federal de Rio Grande número 52737921.2.0000.5324. Os dados dos estudantes mantiveram-se em sigilo e os nomes atribuídos são fictícios. Inicialmente o instrumento visou compreender como as expressões numéricas sintetizam um problema misto, e se há imbricação nesta síntese. No entanto, para além das operações e representações, vislumbramos os processos que levaram os estudantes a resolver o problema, ainda que suas representações fossem variadas. A escolha dos caminhos se definiu em três casos. Buscamos, assim, detalhar os processos organizados por estudantes do Ensino Fundamental ao resolver uma situação de problema misto, com enfoque nas expressões numéricas;

Os processos de pensamento da resolução de uma situação do Campo Aditivo ou Multiplicativo podem ser descritos por meio dos diagramas expostos na Figura 1, e ao tratar de problemas mistos, Vergnaud (2019) sugere uma análise por meio de um quadro, contendo as grandezas que fazem parte do problema e seus atributos. Esta parte da pesquisa trata da análise das respostas dos estudantes, tanto nos trajetos escolhidos e expostos no quadro de problemas mistos, quanto nos diagramas de síntese das classes dos campos conceituais.

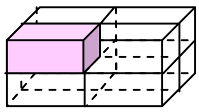
Por meio do Método Clínico Piagetiano, entrevistamos vinte e cinco estudantes, entre crianças e adolescentes de duas escolas públicas do Sul do Brasil, com idade média de 12,25 anos, sendo 14 estudantes do 6º ano e onze do 8º ano. O estudo consistiu em apresentar oralmente uma situação na forma de problema misto, com suporte visual:

> Em uma caixa cabem oito embalagens, em cada embalagem está um conjunto com seis estojos azuis, e dez estojos amarelos. Em cada estojo azul estão três canetas azuis, duas canetas pretas, duas canetas vermelhas e uma caneta verde. Em cada estojo amarelo estão duas canetas roxas e uma caneta cor de rosa. Qual a quantidade de canetas na caixa?

O material manipulável, uma caixa contendo 8 embalagens, e em uma das embalagens 6 estojos azuis e 10 estojos amarelos. Em um dos estojos azuis continha as canetas mencionadas no problema, o mesmo valendo para o estojo amarelo, conforme imagem esquematizada na Figura 61.

Cada estudante, individualmente, deveria responder e registrar como calcular a quantidade de canetas na caixa, podendo manipular livremente o material. Conforme o mesmo montava seus cálculos, nós questionávamos seus passos, em uma entrevista.

Figura 61 – Esquema do material manipulado no dia da entrevista



Fonte: dados da pesquisa.

A situação consistiu em um problema misto contendo adições e multiplicações, respondido individualmente. Os registros foram os protocolos e filmagens das resoluções, cujo detalhamento dos processos foi realizado a partir de Vergnaud (2009), que propõe que um problema misto possa ser analisado via quadro de grandezas, conforme Quadro 16.

Quadro 16 – Quadro de análise para um problema misto

	Estojo azul	Estojo amarelo	Estojo azul na embalagem (**6**)	Estojo amarelo na embalagem (**10**)	Embalagem	Embalagem na Caixa (**8**)	Canetas por estojo
Caneta vermelha	**A**		I		Q	Z	Γ
Caneta azul	**B**		J		R	Δ	
Caneta verde	**C**		K		S	Π	
Caneta preta	**D**		L		T	Σ	
Caneta rosa		**E**		N	U	Φ	Λ
Caneta roxa		**F**		O	V	Ψ	
Total de canetas	G	H	M	P	X		Ω

Fonte: adaptado de Vergnaud (2009a).

A análise compreendeu três grandes casos não ordenados, conforme os caminhos eleitos pelos sujeitos na resolução da situação. Os caminhos que os estudantes tomam para chegar no resultado são diversos, mas necessariamente passam pelas relações presentes no Quadro 16 e devem chegar ao resultado Ω, como podemos ver no Quadro 17.

Como os processos se diferenciam pelos caminhos e não pelo nível de conhecimento matemático dos estudantes, nem pelas operações mais avançadas, não foi possível uma categorização ordenada dos casos, portanto os descrevemos de forma a compreender as possibilidades de escolha encontradas pelos estudantes ao resolver o problema.

Os estudantes escolheram diversos caminhos. O Quadro 17 indica as quantidades de canetas, embalagens e estojos, e serve para analisar as possibilidades dos caminhos escolhidos pelos sujeitos.

Quadro 17 – Dados do problema na análise do problema misto

	Estojo azul (1)	Estojo amarelo (1)	Estojo azul na embalagem **(6)**	Estojo amarelo na embalagem **(10)**	Embalagem (1)	Embalagem na Caixa **(8)**	Canetas na caixa por estojo
Caneta vermelha	**2**		12		12	96	384
Caneta azul	**3**		18		18	144	
Caneta verde	**1**		6		6	48	
Caneta preta	**2**		12		12	96	
Caneta rosa		**1**		10	10	80	240
Caneta roxa		**2**		20	20	160	
Total de canetas	8	3	48	30	78		624

Fonte: dados da pesquisa.

O que está em negrito são os dados do problema, os demais números correspondem às medidas das grandezas presentes na situação, conforme cabeçalho do Quadro 17. O manejo dos dados da questão tem diversos caminhos, como por exemplo, aqueles que somam a quantidade de canetas de cada estojo, obtendo 8 e 3, multiplicam pela quantidade de estojos em uma embalagem, obtendo 48 e 30, juntam essas quantidades, obtendo 78 canetas em uma embalagem, e multiplicam pelo número de embalagens, obtendo 624 canetas em uma caixa. Este caminho segue GHMPXΩ. Outro caminho possível é somar a quantidade de canetas de cada estojo, obtendo 8 e 3, multiplicar pela quantidade de estojos, obtendo 48 e 30, multiplicar pela quantidade de embalagens, obtendo 384 e 240, e obter, mediante adição, a quantidade de canetas da caixa. Este caminho segue GHMΓΛΩ.

Os processos foram analisados segundo os diagramas dos Quadros 16 e 17, bem como os operadores utilizados na construção do desenvolvimento da questão e as classes dos campos conceituais Aditivo e Multiplicativo, utilizando os protocolos e as entrevistas gravadas. Refletem os caminhos e as estratégias elencadas pelos sujeitos, não necessariamente as representações escritas pelos mesmos. Foram divididos em três casos, conforme as relações entre as grandezas e as classes de situações utilizadas para a resolução do problema misto.

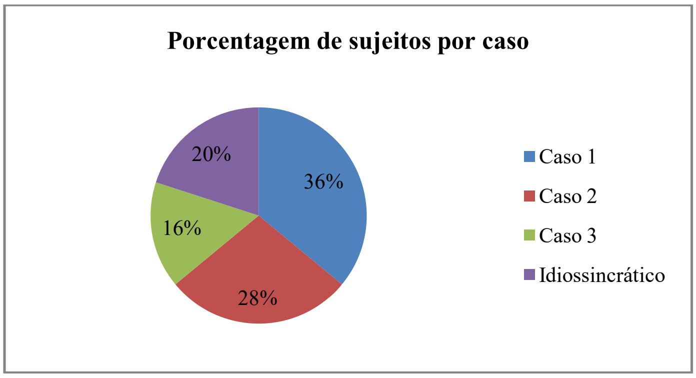
7.3 Resultados

A partir da fala dos estudantes e da representação da resolução, inferimos sobre os processos utilizados pelos estudantes e suas estratégias e organizamos os diagramas que possivelmente descrevem o caminho por eles utilizado.

Descrição dos Casos

As classes são as descritas por Vergnaud (2009a) e Gitirana *et al.* (2014). As respostas idiossincráticos, cujas representações não eram homomorfas à situação, por procedimentos desconexos, não foram analisadas segundo seus procedimentos, mas foram contabilizadas, conforme observado na Figura 62.

Figura 62– Porcentagem de sujeitos por caso



Fonte: dados da pesquisa.

O primeiro caso referiu-se ao agrupamento de canetas nos estojos, na composição desses agrupamentos e na proporção entre o número de canetas e embalagens, em outras palavras: juntou a quantidade de canetas dos estojos e multiplicou pelo número de embalagens. O segundo diz respeito ao agrupamento de forma separada entre a quantidade de canetas em cada tipo de estojo e embalagens, ou seja, calculou a quantidade de canetas para cada tipo de estojo nas embalagens e juntou os diferentes tipos. O terceiro caso agrupou as canetas por cor e após, por estojo e embalagem.

Os casos 1, 2, idiossincrático e 3, em ordem decrescente, foram os com maior frequência. Vale dizer que os sistemas de representação para cada caso foram diversos, variando entre contas armadas, organogramas e escritas lineares, e o que avaliamos foram as formas de percepção das operações em cada situação. Para o primeiro e o segundo casos consideramos a quantidade de canetas no estojo amarelo (C_{am}) e no estojo azul (C_{az}), a quantidade de estojos amarelos em uma embalagem (Est_{am}) ou de estojos azuis em uma embalagem (Est_{az}) e a quantidade de embalagens (Emb). Para o terceiro caso, além das variáveis anteriores, encontramos as que correspondem às cores das canetas nos estojos: para caneta vermelha (cvm), caneta verde (cvd), caneta preta (cpt), caneta azul (caz), caneta rosa (crs) e caneta roxa (crx).

7.3.1 Primeiro caso – Proporção Simples, Composição De Medidas, Proporção Simples

O primeiro conjunto de processos diz respeito à compreensão do problema como duas proporções simples, cujos resultados são operados como composição de medidas, e após novamente operados como proporção simples. Nove dos vinte e cinco estudantes optaram por esse caminho.

A) Primeiro processo - $[(Est_{az} \times C_{az}) + (Est_{am} \times C_{am})] \times Emb$

O procedimento de multiplicar a quantidade de canetas do estojo amarelo pela quantidade de estojos amarelos que havia em uma embalagem, fazer o mesmo com os estojos azuis, juntar a quantidade de canetas resultante e multiplicar pelo número de embalagens.

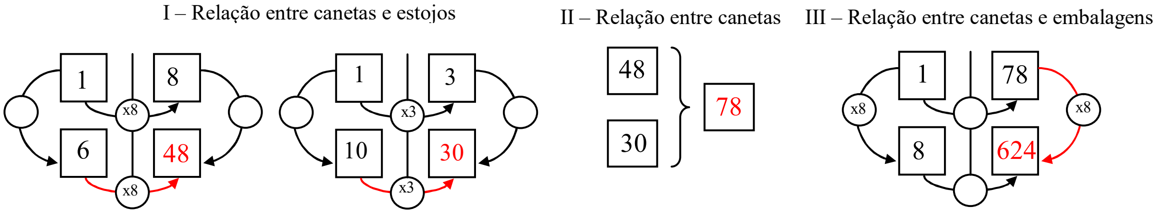
Figura 63 – Excerto do Protocolo de Laís

10 x3 30 6x8=48 10x3=30 48 +30 78 6 78 x 8 554	Laís - A gente vamo pegar todos os estojos amarelo, vamo contar cada um que tem no estojo amarelo e vamo contar o que tem no azul também, aí depois a gente vai pegar esses dois, somar tudo junto e fazer a resposta em toda a caixa pra ver quanto que dá todas as caixas Pesquisadora - Como é que a gente faz isso? Laís - Aí eu botei 48+30 Pesquisadora - Tá Laís - Que aí eu somei todos Pesquisadora - Somou todos, então tu somou todos aqui, beleza, e agora, tu já sabe quanto que têm nessa caixa, que que tu vai precisar fazer pra saber quanto que têm na caixa lá? Laís - Eu vou fazer o 78, oito vezes

Fonte: dados da pesquisa.

Não levamos em conta o erro de tabuada, no qual a estudante fez sete dezenas vezes oito unidades igual a 49 dezenas, mas a estratégia de juntar as canetas dos dois tipos de estojo antes de calcular o total nas embalagens. Embora Laís (6º ano, 13 anos) utilize o termo somar como sinônimo de efetuar, a estudante realizou multiplicações e adições. A expressão numérica que representa os cálculos de Laís é $[(6 . 8) + (10 . 3)] . 8$.

Figura 64 – Diagramas identificados no caso 1 – primeiro processo



Fonte: dados da pesquisa.

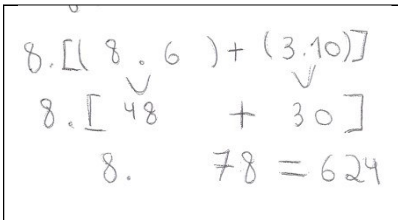
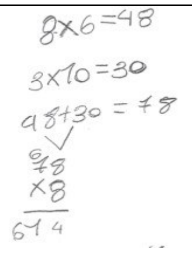
As representações tanto como conta armada como com expressão numérica, descrevem quais cálculos foram realizados e a ordem de realização, nos permitindo analisar os processos utilizados, em conjunto com a escuta dos vídeos gravados durante a resolução da situação.

Nas duas primeiras proporções simples, a ordem das operações indica que os sujeitos deste processo utilizaram o operador funcional, em um caso de proporção simples de multiplicação, resultando em 48 canetas para seis estojos azuis e 30 canetas para 10 estojos amarelos (com a grandeza caneta por estojo). Gitirana *et al.* (2014) chamam ao operador funcional de taxa de proporcionalidade ou coeficiente de dimensão, pois relaciona duas grandezas de naturezas diferentes. Os resultados foram adicionados, em uma composição de medidas, com o todo desconhecido, descobrindo, assim, o número de canetas em uma caixa. Escrevemos relação entre canetas porque tanto as partes quanto o todo tratam de canetas, e não de embalagens. A última proporção simples deste processo será recorrente nos demais deste caso. Os estudantes multiplicam o total de canetas por embalagem pelo número de embalagens, em uma proporção simples – multiplicação, obtendo o número de canetas na caixa.

B) Segundo processo - $[(C_{az} \text{ x } Est_{az}) + (C_{am} \text{ x } Est_{am})] \text{ x } Emb$

O que diferencia, à primeira vista, o processo anterior deste, é a ordem das operações dentro dos parênteses. Consiste na representação da situação cuja expressão numérica é [(8. 6) + (3 . 10)] . 8, no entanto, ao organizarmos o diagrama, vemos que trata do uso do operador escalar 6 multiplicado ao número de canetas do estojo azul, obtendo, assim, 48 canetas. O processo análogo foi feito para o número de canetas do estojo amarelo. A propriedade comutativa da multiplicação diferencia os dois caminhos e salvaguarda o processo como válido.

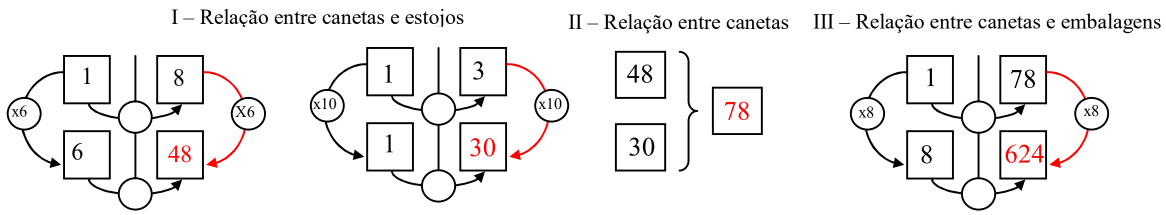
Figura 65 – Excertos dos Protocolos de Olga e Luiz

	Pesquisadora - 48 mais 30? Olga - (Pensando) essa daqui eu somei 48+30 Pesquisadora - Tá Olga - 78 Pesquisadora - E aqui? Olga - 8x78
	Luiz - Eu, a minha estratégia eu pensei em contar quantas canetas têm em estojos azuis e…amarelos e, depois fazer uma conta de vezes ou de soma, e depois pegar tudo isso e multiplicar por…8 aqui…por 8

Fonte: dados da pesquisa.

Olga (8º ano, 13 anos) organiza sua representação a partir de uma expressão numérica, enquanto Luiz (8º ano, 14 anos) utiliza também um sinal associativo para 48 e 30, e a conta armada, com um pequeno erro de tabuada. Duas representações diferentes apontam para o mesmo processo, descrito na forma de diagramas na Figura 66.

Figura 66 –Diagramas identificados no caso 1 – segundo processo



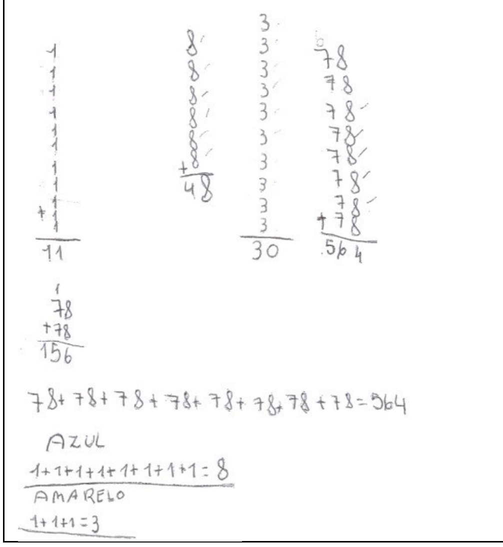
Fonte: dados da pesquisa.

O ato de replicar é o cerne do operador escalar, o qual não trabalha com grandezas diferentes, mas com a ideia de que existe uma constante pela qual, ao se multiplicar uma grandeza, a outra deve ser igualmente multiplicada. Este sentido de número diferencia da parte todo da adição e subtração, causando uma ruptura, e sendo necessário para operar no campo conceitual multiplicativo (NUNES; BRYANT, 1997).

C) Terceiro processo - $[(Est_{am} \times C_{am}) + (Est_{az} \times C_{az})] \times Emb$

Este caminho se diferencia do primeiro por mudar a ordem dos fatores contidos nos colchetes, o que é lícito pela propriedade comutativa da multiplicação. Sua expressão numérica representativa é [(10 x 3)+(6 x 8)] x 8. Entretanto, a representação do processo no diagrama de campos conceituais se diferencia, pois as estratégias de relação entre as grandezas mudam.

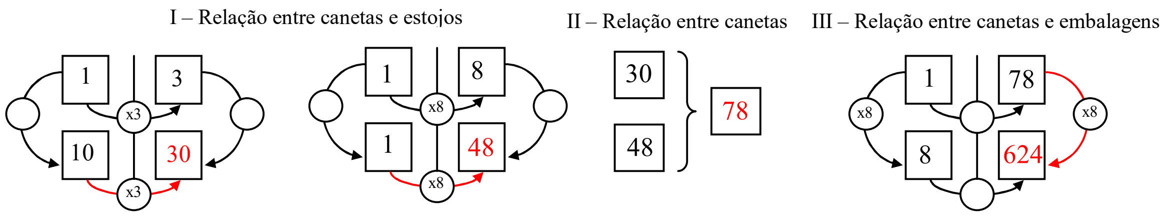
Figura 67 – Excerto do protocolo de Alex

Alex 	Alex – Pode contar assim, de uma em uma? A gente pode botar de um mais um mais um e vai calculando, depois bota o dos azul e depois o amarelo embaixo. Pesquisadora – Tá Alex – [vai montando as contas armadas e calculando com o suporte de contagem nos dedos]. 30 nos amarelos e 48 nos azuis. Pesquisadora – e quanto é que tem na caixona? Alex – tem que somar tudo. Tem 78 na caixinha. É, e eu vou fazer a mesma coisa aqui (apontando para o cálculo de conta armada).

Fonte: dados da pesquisa.

Alex (6º ano, 12 anos) realizou adições. Embora a ruptura entre o campo aditivo e multiplicativo ainda esteja em progresso, as escolhas dos passos elencada por Alex, principalmente na fala, nos revelam sua estratégia para calcular a quantidade de canetas na caixa grande. O processo de adições repetidas trata com as partes que formam o todo, e a proporção trata do sentido de replicar quando o operador escalar é utilizado, ou ainda de uma razão entre as grandezas do problema, gerando uma nova grandeza. (GITIRANA *et al.*, 2014) No entanto, o procedimento adotado por Alex relaciona de forma funcional as quantidades de canetas e estojos, conforme Figura 68, e de forma escalar as canetas (nos estojos) e embalagens.

Figura 68– Diagramas identificados no caso 3 – primeiro processo



Fonte: dados da pesquisa.

A representação da situação cuja expressão numérica é [(10 . 3) + (6 . 8)] . 8, trata do uso do operador funcional 3 multiplicado ao número de estojos amarelos, obtendo, assim, 30 canetas por estojo amarelo. O processo análogo foi feito para o número de canetas do estojo azul. Há, aqui, uma inversão no sentido do operador. Não se trata mais de um raciocínio de replicação, mas de um operador que relaciona duas grandezas (NUNES; BRYANT, 1997, VERGNAUD, 2009).

No estudo de Lautert, Schliemann e Leite (2017) a respeito do uso da regra de três para problemas de proporção múltipla, nenhum dos estudantes do Ensino Médio que respondeu a questão fez uso de regra de três composta, ao invés disso, decompuseram o problema em duas partes, trabalhando com uma ou duas regras de três. Ora, os estudantes que entrevistamos não utilizaram regra de três, mas da mesma forma criaram o caso um, aqui especificado, no qual os dados foram analisados segundo proporções simples, e depois amalgamados pela composição de medidas.

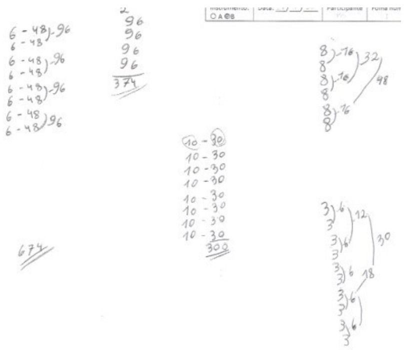
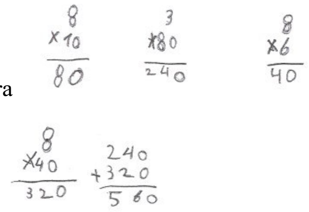
7.3.2 Segundo caso – proporção múltipla, composição de medidas

Diferentemente do primeiro caso, que tratou de diversas proporções simples, o segundo caso aborda proporções múltiplas. A proporção múltipla é compreendida como duas proporções simples ou ainda como a concatenação de duas proporções simples, sendo chamada de proporção simples composta (LEVAIN; VERGNAUD, 1994-1995, GITIRANA *et al.,* 2014, LEITE, 2016, ARAGÃO, LAUTERT, SCHLIEMANN, 2022). Em razão desse entendimento, é compreensível que os estudantes possam desenvolver o problema tanto como proporções simples separadas como em uma única proporção múltipla. Os dados encontrados no segundo caso refletem tal definição, e são classificados como composição de proporções múltiplas.

D) Quarto processo - $Emb \times Est_{am} \times C_{am} + Emb \times Est_{az} \times C_{az}$

A representação da situação cuja expressão numérica é 8 . 10 . 3 + 8 . 6 . 8, pode ser obtida da expressão do terceiro caso com o uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, à exceção da posição do 8, que deve ser comutado para a frente do colchete. A ordem do processo, neste caso, não é descobrir quantas canetas há nas embalagens e depois multiplicar pelo número de embalagens, mas já descobrir quantas canetas há nos estojos azuis e nos estojos amarelos nas embalagens, e depois somar.

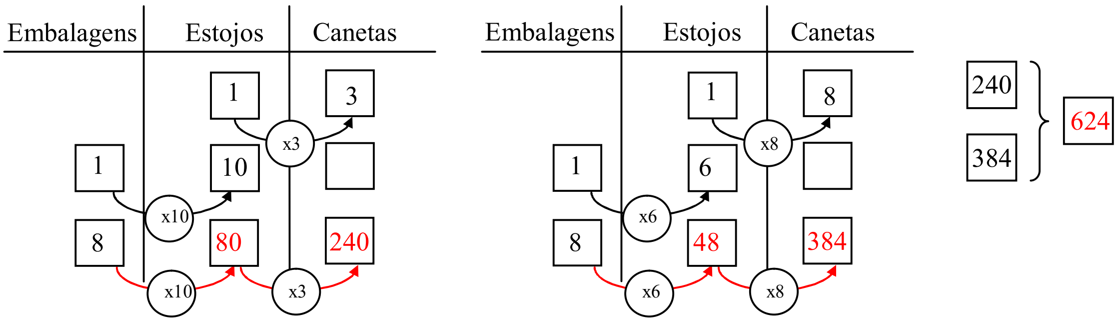
Figura 69 – Excerto dos protocolos de Lino e Iara

Lino 	Lino – 6 é os estojos e 48 é o que tem dentro dos 6 estojos, são as 8 canetas que tem dentro dos 6 estojos. Pesquisadora – Entendi. Lino - É o que tem dentro da caixa grande Pesquisadora – Tá, e o outro que tu fez? daí deu 374? Tá e aí, quanto que deu o total de canetas na caixa toda? Lino - Bah, tinha que fazer isso? Pesquisadora - É, é o que a gente quer saber, o total de canetas. Lino - [escreveu 674] Pesquisadora - Tah, 674. Tah bom.
Iara  	Iara - 6 estojos… vou fazer primeiro os estojos (escrevendo) Pesquisadora - Tá, esse 8x10, esse 8 é essa quantidade de canetas ou é essa quantidade de caixas? Iara - É… estojo (aponta para um estojo amarelo). Estojo e… 10 estojo amarelo vezes 8 caixas Pesquisadora - Vezes 8 caixas, aí tu consegue o número de quê? Iara - De quantos estojos têm no total? Iara - (Vou) somar a quantia de estojo com as canetas. Quantos estojos azul têm mesmo? Pesquisadora - Têm 6 (mostrando o material) Iara - (escreve 8x40 e 3x80) Pesquisadora - Tá aí é a quantidade de quê? Iara - De canetas… do estojo amarelo... E… do azul Pesquisadora - E quanto é que têm na caixa? Iara - Agora… somar essas duas. 560

Fonte: dados da pesquisa.

Embora os resultados obtidos por Iara (6º ano, 12 anos) e por Luiz (8º ano, 14 anos) não estejam corretos e nem sejam os mesmos, ambos procedem da mesma forma: multiplicam a quantidade de embalagens pela quantidade de cada tipo de estojo e depois o resultado pela quantidade de canetas dentro de cada tipo de estojo.

Figura 70– Diagramas identificados no caso 2 – quarto processo



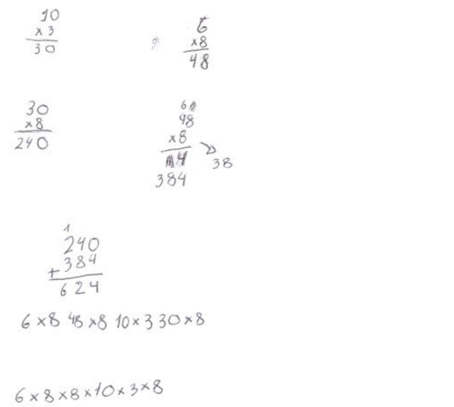
Fonte: dados da pesquisa.

Neste processo, o operador funcional está presente na proporção entre o número de canetas nos estojos, e números de canetas nos estojos nas embalagens. Onde antes tínhamos o “calcular as canetas do estojo azul e juntar com do amarelo em uma embalagem, e multiplicar pelo número de embalagens”, agora temos “calcular as canetas do estojo azul e multiplicar pelo número de embalagens, fazer o mesmo para as canetas do estojo amarelo, e juntar". São condutas diferentes para a mesma situação. A composição de medidas é a finalização do problema, unindo as classes de canetas dos estojos azuis e canetas dos estojos amarelos em 8 embalagens.

E) Quinto processo - Est_{am} x C_{am} x Emb + Est_{az} x C_{az} x Emb

Este caminho se diferencia do anterior em virtude da propriedade comutativa da multiplicação. A representação da situação cuja expressão numérica é 10 . 3 . 8 + 6 . 8 . 8, se deu por um fator funcional e um fator escalar, apresentando uma complexidade para o pensamento dos sujeitos.

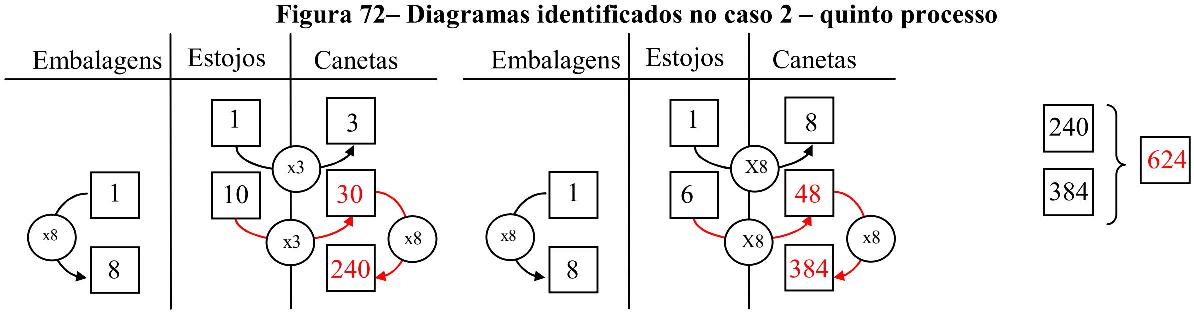
Figura 71 – Excerto do Protocolo de Jane

Jane 	Jane - Eu ia colocar tipo, [INAUDÍVEL] ficar colocando 8 até tipo dar o número de canetas, em cada caixa tem estojo… 6, acho que eu ia colocar o 6 oitos mais 6, em cada caixa Pesquisadora - Tipo, os resultados dos amarelos deu quanto? Jane - 240 Pesquisadora - E o dos azuis? Jane - 384 Pesquisadora - O que que tu fez com esses dois resultados pra conseguir o 624? Jane - Pode ser 240 mais 384

Fonte: dados da pesquisa.

O procedimento deste caso escrito por Jane (6º ano, 11 anos) prevê um agrupamento padrão: 10 vezes 3, para 10 estojos com 3 canetas cada, oriundo da primeira classe de proporção um para muitos: multiplicação.

Figura 72– Diagramas identificados no caso 2 – quinto processo



Fonte: dados da pesquisa.

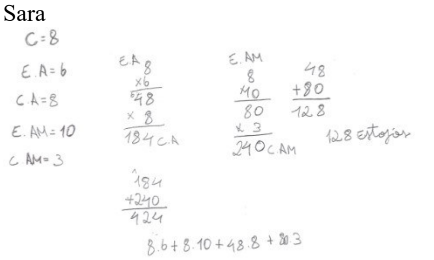
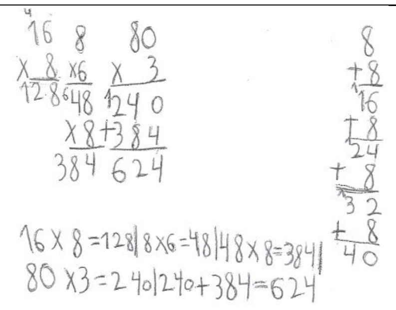
No mesmo problema, os estudantes utilizam o operador funcional e o operador escalar, conforme o caminho escolhido para o desenvolvimento. A composição de medidas deste caso tem as partes conhecidas e o todo desconhecido.

Leite (2016) estudou as proporções duplas e múltiplas, concluindo que a maior parte das resoluções para proporções múltiplas utilizam o operador escalar. Aragão, Lautert e Schliemann (2022) encontraram estratégias diversificadas na resolução de proporções duplas e múltiplas, chamando de estratégias mistas as que utilizavam tanto o operador escalar quanto o funcional na mesma resolução. Neste estudo encontramos tanto o operador escalar, quanto o operador funcional como ainda a configuração dos dois operadores na mesma resolução. A ampla gama de processos associados a uma situação corrobora a ideia do professor conhecer diferentes caminhos e trabalhar a partir de situações (MAGINA, SPINILLO, LAUTERT, 2020).

F) 6º Processo - Emb x Est_{az} x C_{az} + Emb x Est_{am} x C_{am}

A expressão numérica representativa deste processo é 8.6.8+8.10.3, e as representações realizadas pelos estudantes se diferenciam, mas se organizam de forma a contemplar a mesma ordem.

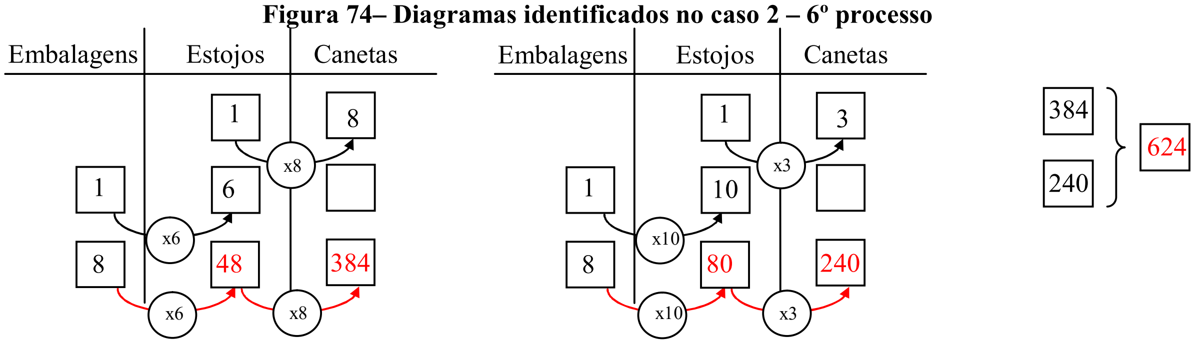
Figura 73 – Excertos do Protocolo de Sara

Sara  	Sara - Eu, primeiro eu fiz quantas canetas tinham em cada estojo azul, que eram 8 caixas, com 6 estojos azuis em cada, então fiz 8x6 que deu 48 e aí eu fiz quantos estojos amarelos tinha, que tinham 10 em cada caixa, então, são 8 caixas, então 8x10 que deu 80, depois eu somei o 48 mais 80 que deu o número de quantos estojos tinha na caixa, que era 128, aí depois eu fiz o número de…de estojo em caixa fiz vezes o número de cada caneta que tinha na caixa, de cada caneta que tinha em cada estojo, que 48 estojos, cada…cada estojo tinha 8 canetas, e aí deu 184 e aí aqui deu 240, mesma coisa, depois eu só somei, deu 200…e deu 424
 	Eder - Então aqui dá 48, então numa caixona, eu vou chamar de caixona e essas daqui vão ser as caixinhas Pesquisadora - Tá! Eder - Numa caixona tem 40… tem, peraí, 48 estojos azuis Pesquisadora - Azuis, tá Eder - 48 estojos azuis, que têm 8 canetas dentro, então x8, então, 8x8 64, 8x o 4… (contando em voz baixa) deu 32, 32+6 dá 38, então cada caixona dessas têm 6, cada caixinha dessas… cada caixona têm 48 estojos azuis Pesquisadora - Azuis, tá Eder - Vai ter 384 canetas dos estojos azuis Pesquisadora - Entendi! Eder - Agora vamos somar os dos amarelos Pesquisadora - Tá Eder - Cada caixa vem 10 amarelos, 10x8, 80 Pesquisadora - Aham Eder - Tá, então quanto, então, dentro desse tem 3 canetas, então 80x3, vou fazer aqui, 80x3, aqui dá, aqui dá 0, aqui dá 24 (escrevendo) tá, agora vamo somar, 24+384, aqui dá 4… então cada, em uma caixona vêm 624 canetas

Fonte: dados da pesquisa.

O sexto processo, exemplificado com as resoluções de Sara (8º ano, 14 anos) e Eder (6º ano, 11 anos) parte da grandeza mais ampla (embalagens) para a mais específica, de ordem menor (canetas). É idêntico ao quarto processo, à exceção da cor de estojos escolhida para ser calculada primeiro.

Figura 74– Diagramas identificados no caso 2 – 6º processo



Fonte: dados da pesquisa

Como uma proporção múltipla é a composição de duas ou mais proporções simples, os estudantes puderam realizar as proporções simples separadamente, juntar os resultados e depois realizar a outra proporção, ou fazer uso de suas proporções múltiplas. Trabalhar com relações entre quantidades em problemas de proporcionalidade múltipla pode colaborar para a compreensão de conceitos e representações matemáticas (LAUTERT, SCHLIEMANN; LEITE, 2017).

7.3.3 Terceiro caso – proporções simples, composição de medidas, e um processo utilizando comparação multiplicativa

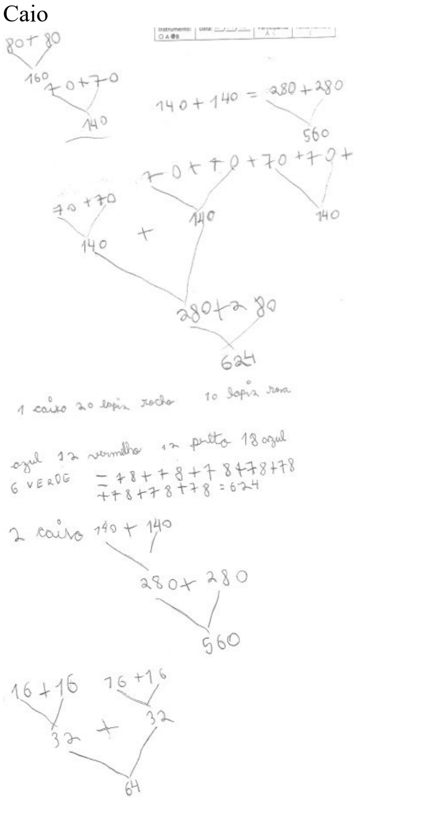
O problema tinha como dado que dentro de cada estojo azul havia 3 canetas azuis, 2 canetas vermelhas, 2 canetas pretas e 1 caneta verde, e dentro de cada estojo amarelo havia uma caneta cor de rosa e duas canetas roxas. O terceiro caso consiste em agrupamentos ordenados pela quantidade e cor de canetas em cada estojo, separadamente.

G) Sétimo processo - (Est_{az} x cvm+ Est_{az} x cvd+ Est_{az} x cpt+ Est_{az} x caz+ Est_{am} x crx+ Est_{am} x crs) x Emb

Neste processo o estudante ordenou cada cor de caneta com o estojo do qual a mesma pertencia, obtendo, com a soma de todos os tipos de caneta do problema, a quantidade de canetas em uma embalagem. Isso feito, multiplicou o total pela quantidade de embalagens.

A expressão numérica que representa este processo é (6.2+6.1+6.2+6.3+10.2+10.1).8. Esperávamos que os estudantes chegassem em 8.[6.(2+1+2+3)+10.(2+1)], o que se assemelha a esta expressão numérica pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, mas cujo processo diverge no sentido de quais elementos agrupar (RAMOS; SILVA, 2021).

Figura 75 – Excerto do protocolo de Caio

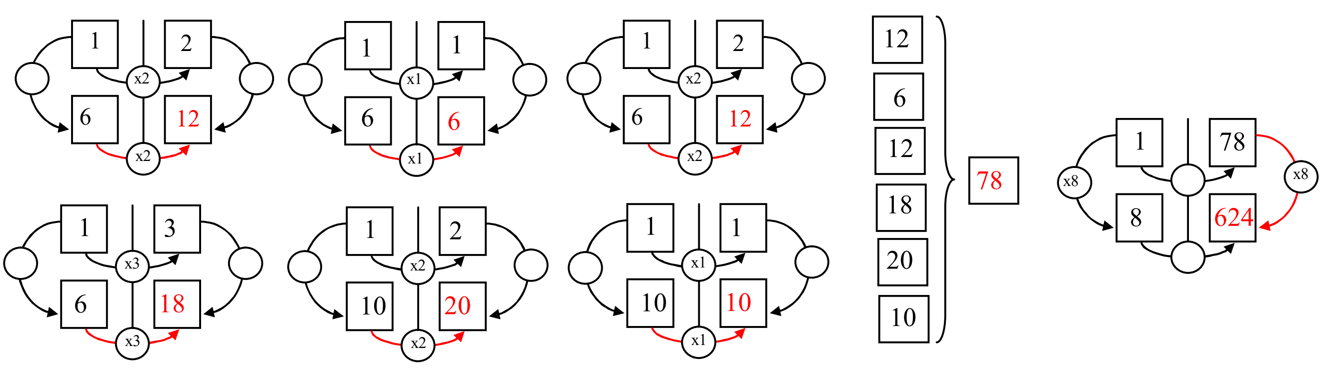
Caio 	Caio - a quantidade de canetas eu vou contando essa história e que tu já tirou aqui o roxo e rosa e aqui tem 20 não não então eu venho contando e aqui eu vou colocando rosa roxa então a quantidade que deu em cada em cada estojo não em cada caixa então vou colocar eu vou colocar 200 e 80, por mais 280 aqui com mais 280 aqui, aqui eu coloco mais 200 e 80 que aí eu formei todas as caixinhas aí vai dar 500 e 60 então aí então já foi todas com trinta Agora eu só vou 70 né então é complicado agora né. Não agora eu vou só contar minha 88 E - tem mais oito em cada uma dessas aqui né contou 70

Fonte: dados da pesquisa.

Caio (6º ano, 12 anos) agrupou as canetas por cor, e realizou as adições de forma a decompor as quantidades. Multiplicou a quantidade de canetas de cada cor pelo número de estojos, e as somou. Após obter a quantidade de 78 canetas, ainda organizou em 70+8, multiplicado por 8.

Figura 76– Diagramas identificados no caso 3 – sétimo processo

III – Relação entre canetas e embalagens



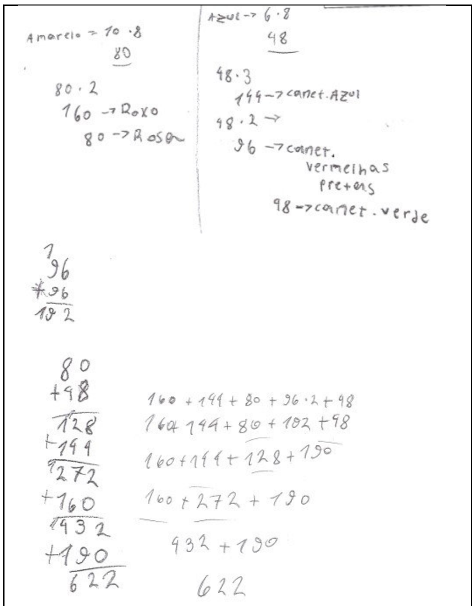
Fonte: dados da pesquisa.

Por mais longo que pareça esse processo, ele é simples por completar cada proporção com números menores e mais simples de calcular. Durante a resolução do problema, os estudantes que utilizaram esse caminho deram nome às parcelas, como caneta verde, por exemplo, para indicar a quantidade de canetas verdes no estojo referenciado. Este gesto se traduz pelo teorema de relação da proporcionalidade f(cA dB)=cf(A)+df(B), com c e d razões (números), que em ação representa um tipo de estratégia usada por alunos pequenos (GITIRANA at al., 2014). Neste caso, os alunos são do 6º ou 8º ano, mas vale lembrar que realizamos as entrevistas em 2022, ano no qual os estudantes retornaram ao ensino presencial, ficando dois anos em ensino remoto.

H) 8º processo - (Est_{am} x Emb) x crx+ (Est_{az} x Emb) x caz + (Est_{am} x Emb) x crs + 2 x (Est_{az} x Emb) x cvm + (Est_{az} x Emb) x cvd

A expressão numérica resultante deste processo é (10.8).2+(6.8).3+(10.8).1+2.(6.8).2+(6.8).1, e foi o caminho escolhido por um dos estudantes, que inicialmente calculou o valor fixo de estojo por embalagens, e após fez a proporção para cada uma das classes de canetas contidas nos estojos.

Figura 77 – Excerto do protocolo de Mara

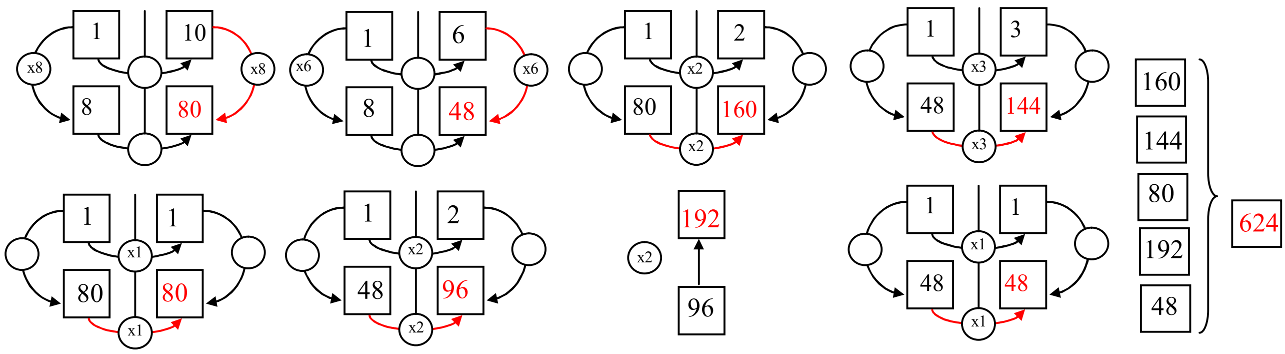


Mara - Aqui? Eu fiz o número de estojos vezes o número de caixas
Pesquisadora - Tá!
Mara - E aí deu 80
Pesquisadora - Deu 80 estojos?
Mara - Isso!
Pesquisadora - Tá!
Mara - Que…nos 80 estojos tinham 2 canetas roxas
Pesquisadora - Tinha… 2 roxas
Mara - Isso, então em cada 80 estojos têm 2 roxas
Pesquisadora - Tá!
Mara - E aí eu fiz a conta de multiplicação e deu 160
Pesquisadora - Tá!
Mara - Que daí são 160 canetas roxas e 80 rosas, já que é só 1 em cada
Mara - São 160 roxas, 80 rosas, ahn…144 azuis, 96 vermelhas e pretas e 48 verdes
Mara - Aí eu fiz primeiro a conta de multiplicação e depois eu fui somando… somando devagar assim, dos números menores pros maiores

Fonte: dados da pesquisa.

Embora a escrita da multiplicação realizada por Mara (8º ano, 13 anos) lembre o 6º processo, não se trata de uma proporção múltipla, pelo fato de o número resultante da operação contida nos parênteses ter sido calculado em separado, como proporção simples, e utilizado como quantidade nas outras proporções. Cabe aqui assinalar que o 2 presente no termo 2 x (Est_{az} x Emb) x cvm se deve ao sujeito perceber que a quantidade de canetas pretas é a mesma de canetas vermelhas, portanto poderia dobrar o número.

Figura 78 – Diagramas das identificados no caso 3 – 8º processo



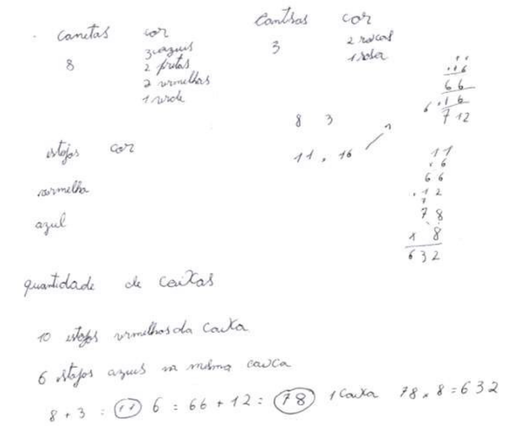
Fonte: dados da pesquisa.

Este caminho se diferencia do anterior em virtude da propriedade comutativa da multiplicação. A representação da situação cuja expressão numérica é 10 . 3 . 8 + 6 . 8 . 8, se deu por um fator funcional e um fator escalar, apresentando uma complexidade para o pensamento dos sujeitos. Tanto o 80 quanto o 48 serviram como taxa neste caso. As quantidades de canetas foram multiplicadas pela grandeza estojo por embalagem, resultando em canetas nos estojos nas embalagens (GITIRANA *et al.*, 2014).

I) Nono processo – {[Est_{az} x (C_{az}+ C_{am})]+ [(Est_{am} -Est_{az})x C_{am}]}xEmb

Este é o único processo no qual há subtração. O estudante primeiro adicionou as quantidades de canetas dos estojos amarelos e azuis, mas como havia mais estojos amarelos que azuis, sentiu a necessidade de completar com as canetas presentes nos estojos extras. Assim, há uma composição com todo conhecido e uma parte desconhecida, descrita por {[6.(8+3)]+[(10-6).3]}.8

Figura 79 – Excerto do Protocolo de Joel

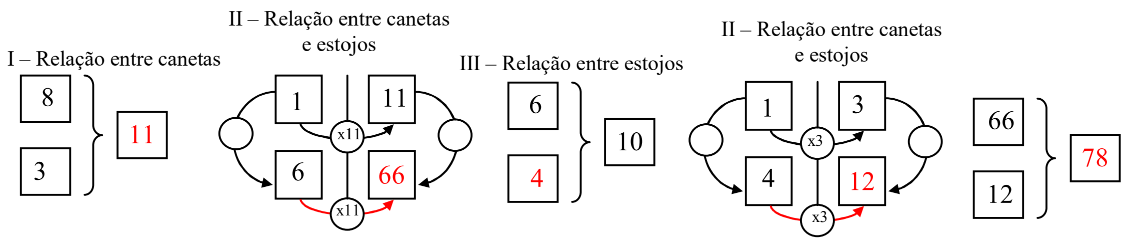


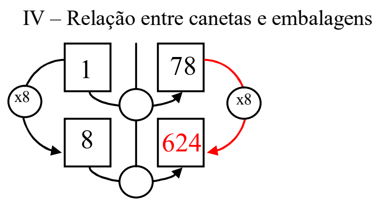
Joel - Eu pensei em… somar as duas quantidades e…exemplo dá 16, então, os estojos, 16, aí eu ia fazer a conta por partes, primeiro a quantidade total de cada caixa, depois multiplicar essa quantidade total por 8
Pesquisadora - Tá!
Joel - (Pensando) eu sei que aqui tem 8 caixas, em cada caixa, eu tenho que saber…eu sei quanto que tem cada caixa, e, tenho que fazer essa…essa Matemática, aí depois eu tenho que saber quantas canetas tem em cada estojo, já sei, e depois tem que somar

Fonte: dados da pesquisa.

Joel (8º ano, 13 anos) inicia seu procedimento anotando quantas canetas de cada cor estão nos estojos, organizando os dados de forma a compreender o problema, em classes que não compreendem as canetas dos estojos azuis ou dos estojos amarelos, mas dos dois estojos.

Figura 80– Diagramas das relações encontradas no caso 3 – nono processo

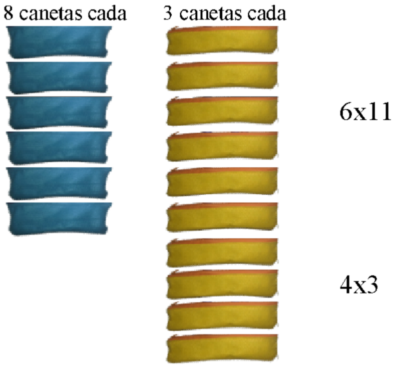




Fonte: dados da pesquisa.

O que o estudante fez foi iniciar por um procedimento errado e dar-se conta durante o processo. A ideia de juntar as canetas de um estojo azul e um amarelo, obtendo onze canetas, para depois multiplicar pelo número de estojos, foi bastante frequente, mas em geral era posta de lado ao ver que havia número diferente de canetas em cada estojo. Joel, no entanto, permaneceu com a ideia inicial e modificou a estratégia, conforme Figura 81.

Figura 81 – Material manipulado no dia da entrevista



Fonte: dados da pesquisa.

Joel contou as 11 canetas e multiplicou por 6, obtendo 66 canetas, mas percebeu que ainda havia estojos amarelos, então do total de 10 estojos, calculou que ainda faltavam 4, com 3 canetas cada, totalizando 12 canetas. Assim, chegou às 78 canetas em uma embalagem, e às 624 na caixa. O procedimento de Joel reforça a ideia de que professores devem estar atentos às estratégias dos estudantes, pois o caminho escolhido pelo aluno inicialmente não era coerente, mas ele refletiu sobre o problema e tomou decisões que repararam a estratégia, de forma a deixá-la coerente, com uma variante da ideia da complementação (MAGINA *et al*., 2008, MAGINA, LAUTERT, SANTOS, 2020).

Diante do exposto, foram configurados três casos: o primeiro caso consistiu em juntar as canetas dos estojos e multiplicar pelas embalagens. O segundo caso consistiu em calcular as canetas cujos estojos fossem da mesma cor, multiplicar pelo número de embalagens e juntar, determinando duas proporções múltiplas cujos resultados foram compostos. O terceiro caso consistiu em calcular as canetas por cor, ou realizar um procedimento semelhante ao primeiro caso, à diferença de juntar as canetas independentemente da cor de estojos, calcular o excedente, somar e multiplicar pelo número de embalagens. Estes processos variaram entre proporções com operadores escalares ou funcionais, entre proporções simples e compostas, com composição de medidas, tanto com parte desconhecida como com todo desconhecido, e ainda comparação multiplicativa com referido desconhecido.

Miranda (2019) organizou os diagramas para problemas mistos, mas o diagrama de proporção múltipla e composição de medidas não se aplicou neste estudo porque os resultados compreenderam composição de proporções múltiplas, no caso 2. Nos demais casos, tivemos uma sequência de proporções simples e composição de medidas, acrescida, em um caso, de uma comparação multiplicativa.

7.4 Considerações

Este texto visou responder como estudantes do Ensino Fundamental resolvem um problema misto. Quais as estratégias utilizadas por estes estudantes? Quais as expressões numéricas resultam dos processos pelos quais os estudantes resolvem o problema? Quais os diagramas que descrevem as estratégias dos estudantes ao resolver um problema de composição de medidas e proporção?

Vamos responder na ordem inversa. Os diagramas apresentados, bem como as expressões numéricas, são indícios do que os estudantes apresentaram no desenvolvimento da resolução do problema, tanto em sua representação escrita quanto gestual e falada, nas entrevistas.

A diversidade de procedimentos apresentados exprime algumas das diversas formas de raciocinar e de estabelecer relações entre os dados do problema pelos estudantes, no entanto, nada garante que um estudante pense em oito vezes 78 e escreva 78x8 na folha, em função da tradição de escrita, daí a necessidade das respostas dadas verbalmente, pois os esquemas não consistem na conduta observável, mas na organização invariante e no pensamento subjacente, desta forma, nos arriscamos a divulgar o que compreendemos dos esquemas elaborados pelos estudantes.

As expressões numéricas que traduziam o problema das caixas foram compostas de números, operações e sinais de associação. Para o primeiro caso, houve a necessidade do uso de parênteses 8(6.8+10.3), e suas versões comutativas, para o segundo caso, não necessariamente se aplicaram os parênteses, pois consistiram na aplicação da propriedade distributiva à expressão numérica do primeiro caso, 8.6.8+8.10.3 e suas versões comutativas.

O terceiro caso, embora não necessitasse dos sinais de associação nos processos sétimo e 8º, tiveram o uso dos parênteses para ilustrar o agrupamento de embalagem e estojos realizado inicialmente para cor de estojos, (10.8).2+(6.8).3+(10.8).1+2.(6.8).2+(6.8).1, e careceu do uso de parênteses, colchetes e chaves para ao agrupar as canetas em dois estojos e depois proceder a soma das complementares, resultando em um processo com mais operações e agrupamentos {[6.(8+3)]+[(10-6).3]}.8. Descrevemos tais expressões ao relatarmos os processos dos alunos, à exceção de Olga e Mara, que as escreveram em seus protocolos, os demais estudantes utilizaram outros sistemas de significantes para representar o desenvolvimento da questão. Não podemos afirmar que a expressão numérica que utiliza todos os sinais de associação é melhor matematicamente que as outras, pois é a menos econômica, ao mesmo tempo, todos os procedimentos realizados pelos estudantes tinham a potência de chegar ao resultado correto.

Assim, tivemos algumas boas surpresas neste trabalho. Na pré análise, classificamos a situação como proporção simples. Foi bastante motivador perceber que os sujeitos criaram caminhos diferentes do esperado, como proporção múltipla, e que embora os erros de tabuada tenham sido freqüentes, os processos criados para a resolução do problema foram coerentes, e desta forma reafirmamos a necessidade do professor reconhecer os processos realizados pelos estudantes, partindo das suas resoluções e socializando na classe os conhecimentos postos em ação pelos mesmos.

7.5 Referências

ARAGÃO, A. B. B. L.; LAUTERT, S. L.; SCHLIEMANN, A. D. Resolução de problemas de proporção dupla e múltipla nos anos finais do Ensino Fundamental. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 24, n.4, p. 183-206, 2022. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/download/6921/pdf_1. Acesso em: 31 jan. 2023.

ARRAIS, U. B**. Expressões Aritméticas: Crenças, Concepções e Competências no entendimento do professor polivalente**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11095. Acesso em: 5 nov. 2020.

BEYER, F. L. L. **Campo Conceitual Multiplicativo: um mapeamento das pesquisas produzidas no Brasil entre os anos de 1997 e 2016**. 2018. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2018. Disponível em https://tede2.pucsp.br/handle/handle/21721. Acesso em: 10 dez. 2022.

CYBIS, A. C. **Resolução de Problemas Multiplicativos: análise de processos heurísticos de alunos de 5º ano do Ensino Fundamental.** 2014. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2014. Disponível em: http://repositorio.pgsskroton.com/handle/123456789/3513. Acesso em: 19 nov. 2022.

DELVAL, J. **Introdução à Prática do Método Clínico**: descobrindo o pensamento das crianças. São Paulo: Artmed, 2002.

DEZILIO, K. REZENDE, V. Ideias de Função Afim e Problemas Mistos nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 24, n.6, p. 89-117, 2022. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/7282/pdf_1. Acesso em: 12 dez. 2022.

FREITAS, H. S. **Expressões numéricas e suas abordagens em livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental adotados por uma escola pública de Cuiabá-MT.** 2014. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Mato

Grosso, Cuiabá, 2014. Disponível em: https://ri.ufmt.br/handle/1/1916. Acesso em: 10 mai. 2020.

GITIRANA, V.; CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S. M. P.; SPINILLO, A. G. **Repensando a multiplicação e divisão**. Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM, 2014.

LAUTERT, S. L.; SCHLIEMANN, A. D.; LEITE, A. B. B. . Uso da regra de três e a compreensão das relações em problemas de proporção múltipla. *In*: Colóquio Internacional sobre a Teoria dos Campos Conceituais**,** 2., 2017, Porto Alegre. **Anais [...]** Porto Alegre: GEEMPA, 2017. p. 135-142. Disponível em: https://www.geempa.com.br/wp-content/uploads/2017/08/O-USO-DA-REGRA-DE-TR%C3%8AS-E-A-COMPREENS%C3%83O-DAS-RELA%C3%87%C3%95ES.pdf. Acesso em: 22 dez. 2022.

LEITE, A. B. B. **Resolução de problemas de proporção dupla e múltipla: um olhar para as situações que envolvem grandezas diretamente proporcionais.** 2016. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco. 2016. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/20233. Acesso em: 20 dez. 2022.

LEVAIN, J. P.; VERGNAUD, G. Proportionnalité Simple, Proportionnalité Multiple. **Grant**, n. 56, p. 55-66, 1994-1995. Disponível em: https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/56n5_1562850226137-pdf. Acesso em: 23 dez. 2022.

MAGINA, S. M. P.; LAUTERT, S. L.; SANTOS, E. M. Estratégias Exitosas de Alunos dos Anos Iniciais em Situações de Proporção. **Educação & Realidade**, Porto Alegre, v. 45, n. 4, p 1-24, 2020. Disponível em http://dx.doi.org/10.1590/2175-623696023. Acesso em: 17 jan. 2023.

MAGINA, S. M. P.; MERLINI, V. L.; SANTOS, A. A estrutura multiplicativa à luz da Teoria dos Campos Conceituais: uma visão com foco na aprendizagem. *In*: CASTRO FILHO; J. A.; BARRETO, M. C.; BARGUIL, P. M.; MAIA, D. L.; PINHEIRO, J. L. **Matemática, cultura e tecnologia: perspectivas internacionais**. Curitiba: Editora CRV, 2016, p.66-82.

MAGINA, S. M. P.; SANTANA, E. R. S.; CAZORLA, I. M.; CAMPOS, T. M. M. As estratégias de resolução de problemas das estruturas aditivas nas quatro primeiras séries do Ensino Fundamental. **Zetetiké**, v. 18, n. 34, p. 15-50. 2010. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646679. Acesso em: 22 dez. 2022.

MAGINA, S. M. P.; SPINILLO, A. G.; LAUTERT, S. L. Raciocínio multiplicativo discutido a partir da resolução e formulação de problemas. **REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, v 15, n. 36, p.78-94, 2020. Disponível em: http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/83. Acesso em: 30 jan. 2023.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. M.; NUNES, T.; GITIRANA, V. **Repensando adição e a subtração**: contribuições da teoria dos campos conceituais. São Paulo: PROEM, 2008.

MAGINA, S.; PORTO, R. S. O. É possível se ter raciocínio funcional no nível dos Anos Iniciais? Uma investigação com estudantes do 5º ano do ensino fundamental. *In:* Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 7., Foz do Iguaçu. **Anais [...]** Foz do Iguaçu, 2018. p. 1-12. Disponível em:

http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/SIPEM/VII_SIPEM/paper/view/357/246. Acesso em: 18 nov. 2022.

MIRANDA, C. A. **Situações-problema que envolvem o conceito de função a-fim:** uma análise à luz da Teoria dos Campos Conceituais. 2019. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação) - Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2019. Disponível em: https://tede.unioeste.br/handle/tede/4671. Acesso em: 9 dez. 2022.

MIRANDA, C. A.; REZENDE V.; NOGUEIRA, C. M. I. Uma Análise de Problemas de Função Afim Fundamentada na Teoria dos Campos Conceituais. **JIEEM,** v.14, n.4, p. 485-495, 2021. Disponível em: https://jieem.pgsskroton.com.br/article/view/9092. Acesso em: 9 dez. 2022.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças Fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artmed, 1997.

RAMOS, R. C. S. S; BILHALVA, A. S.; SILVA, J. A. Proposta de instrumento sobre expressões numéricas por meio do Método Clínico-Crítico Piagetiano. *In:* Encontro de Alfabetização Matemática do Extremo Sul. 2. 2021, Rio Grande. **Anais [...]** Rio Grande: Universidade Federal do Rio Grande, 2021, p. 149 - 160. Disponível em: https://repositorio.furg.br/bitstream/handle/123456789/10544/ALFAMAT%202021%20%20VERS%C3%83O%20REVIS%C3%83O%2030%20TEXTOS%20(1).pdf?sequence=1. Acesso em: 22 nov. 2022.

RAMOS, R. C. S. S; SILVA, J. A, LUZ, V. S.; FIRME, S. M.; SARAIVA, D. R. Situações de expressões numéricas em livros didáticos de 6º ano: uma análise segundo a Teoria dos Campos Conceituais. **Bolema**, Rio Claro, v. 35, n. 71, p. 1294-1315, 2021. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a04. Acesso em 9 dez. 2022.

RAMOS, R. C. S. S; SILVA, J. A. Expressões Numéricas sob o enfoque da Teoria dos Campos Conceituais: o que dizem os textos acadêmicos? *In*: Encontro Nacional de Educação Matemática, 14, 2022a, SBEM. **Anais [...],** online. Disponível em: https://even3.blob.core.windows.net/processos/15915ed7d8e2422289a7.docx. Acesso em: 9 dez. 2022.

REZENDE V.; NOGUEIRA, C. M. I; CALADO, T. V. Função Afim na Educação Básica: Estratégias e Ideias Base Mobilizadas por Estudantes Mediante a Resolução de Tarefas Matemáticas. **Alexandria – Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v. 13, n. 2, p. 25-50, nov. 2020. Disponível em: HTTP://dx.doi.org/10.5007/1982-5153.2020v13n2p25. Acesso em: 9 nov. 2022.

RODRIGUES, C. L. H. **Invariantes operatórios associados ao conceito de função mobilizados por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental**. 2021. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Campus Cascavel, Cascavel, 2021. Disponível em: https://tede.unioeste.br/bitstream/tede/5815/5/Carla_Rodrigues2021.pdf. Acesso em: 22 nov. 2022.

SILVA, L. D. C. P. **As formas operatória e predicativa do conhecimento manifestadas por alunos do 5º ano mediante problemas de estrutura multiplicativa**: uma investigação das ideias base de função. 2021. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação

Matemática, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Campus Cascavel, Cascavel, 2021. Disponível em: https://tede.unioeste.br/handle/tede/5773. Acesso em: 22 nov. 2022.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar**. Curitiba: Editora da UFPR, 2009a.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, Jean (org.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, p. 155 – 191.

VERGNAUD, G. Forma operatoria y forma predicativa del conocimiento. In: Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática, 1. , 2007b, Tandil. **Actas [...]** Argentina, Tandil, 2007b.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didáctique des Mathématiques**, v. 10, n. 2, p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. **Educar em Revista** [online], Curitiba, v. 27, Edição Especial, n.1, p. 15-27, 2011. [Acessado 24 Julho 2021]. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S0104-40602011000400002

VERGNAUD, G. O que é aprender? *In:* BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (Org.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais.** Curitiba: Editora CRV, 2009b. p. 13-36.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. In NASSER, L. (Ed.) *In:* Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro, 1., 1993, Rio de Janeiro. **Anais [...].** Rio de Janeiro, 1993. p. 1-26.

8 DA CONTAGEM ÀS EXPRESSÕES NUMÉRICAS: SISTEMAS DE REPRESENTAÇÕES DE ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL SOBRE UM PROBLEMA MISTO DO TIPO PROPORÇÃO E COMPOSIÇÃO DE MEDIDAS

8.1 Introdução

Este artigo é parte de um estudo mais amplo que investiga o ensino e a aprendizagem das expressões numéricas. Aqui descrevemos a pesquisa a respeito das representações. Esta etapa da investigação teve por objetivo analisar as representações realizadas por estudantes do Ensino Fundamental sobre um problema misto, de modo que foram classificadas em conta armada, escrita linear, organograma e outros. Estes últimos consistem na escrita de números sem operadores, e uma representação com palitos, ambos casos de processos não coerentes de resolução da situação proposta.

Para expressar em números as relações entre as quantidades (atributos) das grandezas presentes em uma situação matemática, necessitamos de operações entre esses números, e caso queiramos que essa expressão seja escrita em uma linha, necessitamos de sinais de associação e de regras de prevalência que impeçam ambiguidades nessa representação. Desta forma, uma expressão numérica relaciona números por meio de operações e os ordena conforme o sentido dos números na situação, necessitando por vezes de um suporte de parênteses, colchetes e chaves para que não existam ambivalências. Estudos teóricos sobre expressões numéricas concluem que o trabalho com essa representação é realizado de forma mecânica, através de regras e técnicas a decorar, e de exemplos resolvidos cujo enunciado apresenta a operação a ser realizada, e sugerem que as expressões numéricas sejam trabalhadas por meio de problemas, de modo a produzir sentido para as operações e os números presentes na situação (OTTES, 2016, WIBERG, 2017, ZAZKIS; ROULEAU, 2018, RAMOS; SILVA, 2022b).

A escrita linear, no sistema de significantes das representações algébricas, pode tanto descrever uma operação qualquer quanto representar homomorficamente uma situação. No último caso, trata-se de uma expressão algébrica ou numérica, esta última relacionando as quantidades das grandezas do problema e utilizando apenas números, operações e sinais de associação, e resultando em um único número. Temos por hipótese que a escrita de uma expressão numérica como representação de uma situação que envolve tanto o campo conceitual aditivo quanto o campo conceitual multiplicativo, sintetiza o significado de cada número e operação, imbricando os dois campos conceituais.

Neste texto partimos da ideia de que uma representação é o que apresenta a ação, isto é, é um representante da ação. A partir do senso comum, é possível pensar que uma representação pode ser avaliada pelo componente estético que a constitui, entretanto, do ponto de vista cognitivo, nos interessa a perspectiva de que melhores representações são aquelas que expressam melhor organização. Em outras palavras, o modo de organizar e de expressar revela a qualidade do aspecto cognitivo da representação e, consequentemente, da própria ação.

No mesmo sentido, a representação é um dos componentes do conceito, definido por Vergnaud (2008) como uma terna de conjuntos: "o conjunto das situações que dão sentido ao conceito, o conjunto dos invariantes operatórios que estruturam os esquemas de pensamento associados a estas situações, o conjunto das situações linguísticas e simbólicas que permitem representá-los" (2008, p. 39), sendo essencial para analisar a construção dos conceitos operatórios e os processos de transmissão dos conhecimentos. Uma representação funcional exerce um papel de regulação da ação e das expectativas do sujeito, e a ação exerce um papel decisivo na elaboração da representação (VERGNAUD, 1985, 2008).

Estudos sobre as representações em teorias cognitivistas apontam que a Teoria dos Campos Conceituais, a Diversidade Representacional e a Redescrição Representacional convergem em aspectos comuns entre cada representação e o seu referente, bem como entre representações de um mesmo referente, porém, sem total redundância entre eles. Outros aspectos comuns são a comunicação de indícios de representações mentais por meio de representações externas, as quais são essenciais para o desenvolvimento procedimental e cognitivo, a apropriação conceitual ser atrelada à coordenação das representações, a aprendizagem se caracterizar por ir além do saber fazer, para ser capaz de saber expressar o que se sabe e o que se sabe fazer, a linguagem verbal ter papel de destaque dentre as demais representações, e diferentes níveis cognitivos de representações não conscientes e acesso consciente nem sempre ser passível de ser exteriorizado (BONI; LABURÚ; CAMARGO FILHO, 2018, 2021). Embora as teorias supracitadas divirjam em aspectos epistemológicos, tais convergências solidificam a importância das representações em seus sistemas de análise.

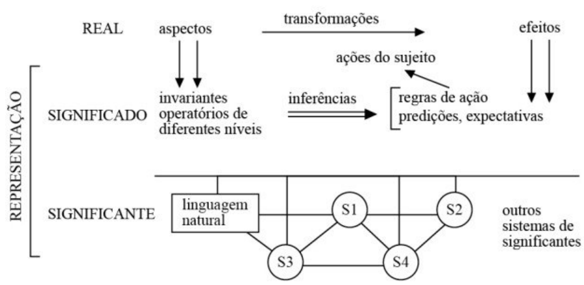
A Teoria dos Campos Conceituais é uma teoria cognitiva pós-construtivista, que busca compreender a construção de conhecimentos vinculados a conceitos específicos. Trata-se de uma teoria complexa que analisa as funcionalidades do pensamento na construção dos conceitos, bem como suas representações. Tendo como alicerces o construtivismo piagetiano, principalmente no que se refere aos esquemas mentais, e às ideias de representação linguística de Vygotsky, Vergnaud avança no sentido de pensar a cognição a partir dos esquemas criados pelo sujeito ao enfrentar situações em um campo conceitual (VERGNAUD, 1985, 1990, 2009a; SPINILLO; LAUTERT, 2006).

A aprendizagem se dá por meio da resolução de diferentes classes de situações vinculadas a um conceito, dos esquemas criados e ampliados neste processo, nos conhecimentos colocados em ação para a solução, e da expressão desses conhecimentos por meio de representações. Os esquemas atuam como guia, conduzindo as ações do indivíduo diante de uma situação. Um conceito é definido como um conjunto de situações, invariantes operatórios e representações ligadas a ele, e um campo conceitual é o conjunto estruturado de todas as situações ligadas a esse conceito. A união de todas as classes de situações vinculadas a um conceito, os procedimentos e representações que lhes são relativos, é denominada campo conceitual (VERGNAUD, 1985, SPINILLO; LAUTERT, 2006).

As representações possuem um papel fundamental na Teoria dos Campos Conceituais, de modo que tanto ao passar de uma situação real a uma representação, como ao passar de uma representação a outra e a ela retornar, consiste o pensar. Assim, a representação na Teoria dos Campos Conceituais é funcional, tendo uma relação homomórfica com a realidade e com outras representações da mesma situação. Como parte da tríade que define o conceito, a representação é o conjunto de situações linguísticas e simbólicas que permitem representar os conhecimentos. Para ser funcional, a representação precisa refletir aspectos da realidade e permitir ao pensamento operar sobre os significados e significantes (VERGNAUD, 2009a).

A mesma situação pode ser representada de diversas formas, como a oralidade, a linguagem gestual, desenhos, diagramas, escritas aritméticas e algébricas, bem como outros sistemas de significantes, que sejam um homomorfismo dos significados atribuídos pelos estudantes à situação. Além disso, o mesmo sujeito pode passar de uma representação para a outra, apresentando uma variabilidade e maior compreensão do problema, como os Sn, n= 1, 2, 3, 4, da Figura 82.

Figura 82 – Relações entre representação e realidade



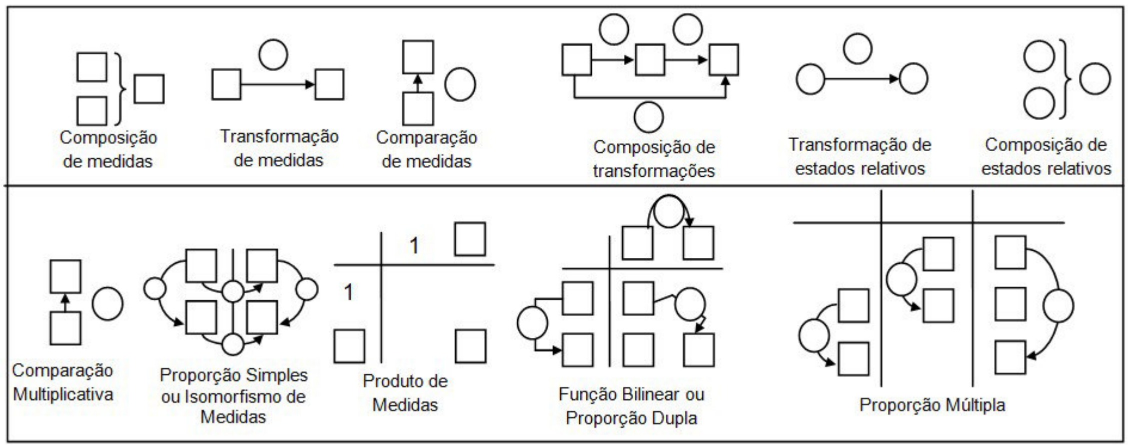
Fonte: Vergnaud (1985, p.8).

A representação não é somente repertório de conceitos e formas simbólicas, mas atividade. Embora nem toda representação explicite o pensamento, é dela que tiramos pistas para compreender os processos eleitos pelos estudantes na construção do seu raciocínio. A representação não se limita aos significantes, mas à relação entre os significados e os sistemas de significantes pertinentes à situação. São os invariantes operatórios que dão sentido ao problema, e a função da representação é a de conceitualizar o real a partir dos conhecimentos que a suportam, como um conjunto dinâmico de formas da organização da realidade (VERGNAUD, 2009a, 2009b).

Entender como as representações de um problema misto se manifestam em estudantes do Ensino Fundamental é interessante do ponto de vista docente, tanto no sentido de conhecer os níveis e processos que os sujeitos utilizam para resolver uma situação, como para ampliar as possibilidades de expressão dos estudantes, na medida em que expressam de diferentes formas os raciocínios a respeito do problema. Propomos aqui uma análise referente às representações de vinte e cinco estudantes do 6º e do 8º ano de duas escolas públicas de Pelotas/RS, de acordo com as ideias de Vergnaud (2009a), o qual propõe análise das noções e de suas tarefas de complexidade, dos erros e das tarefas escolares, dos procedimentos e das representações, vinculadas à Teoria dos Campos Conceituais.

Os campos conceituais pertinentes à situação estudada são os campos conceituais aditivo e multiplicativo e as escritas apresentadas ora entendem como operados disjuntamente, ora os imbricam em uma expressão única. Sendo os campos conceituais um conjunto estruturado de situações, tal estrutura se dá pelas classes de situações, as quais podem ser observadas na Figura 83.

Figura 83 – Diagramas das situações do CCA e CCM



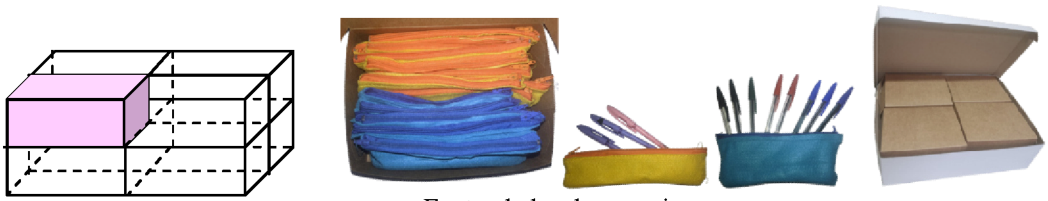
Fonte: adaptado de Vergnaud (2009), Gitirana *et al.* (2014) e Miranda (2019).

8.2 Método

Foram entrevistados, por meio do Método Clínico Piagetiano, 25 estudantes de duas escolas públicas de Pelotas/RS, de quatro turmas de 6º e 8º ano do Ensino Fundamental, em período pós-pandêmico. Cada sessão durou em média 40 minutos e os registros se deram tanto por vídeo e transcrição quanto pelos protocolos escritos pelos estudantes. A pesquisa se deu sob o código do Conselho de Ética da Universidade Federal de Rio Grande número 52737921.2.0000.5324. Os dados dos estudantes mantiveram-se em sigilo e os nomes atribuídos são fictícios.

O seguinte problema foi contado a cada estudante, com o material disponibilizado para manipulação, conforme Figura 84: Marta fez uma encomenda de canetas, que vieram em uma caixa. Na caixa cabem oito embalagens, em cada embalagem está um conjunto com seis estojos azuis, e dez estojos amarelos. Em cada estojo azul estão três canetas azuis, duas canetas pretas, duas canetas vermelhas e uma caneta verde. Em cada estojo amarelo estão duas canetas roxas e uma caneta cor de rosa. Marta comprou quantas canetas? Foi entregue uma folha de sulfite, um lápis e uma borracha, e se pediu que os alunos escrevessem e falassem como estavam pensando para resolver o problema.

Figura 84 – Material manipulado no dia da entrevista



Fonte: dados da pesquisa.

Tanto as gravações e as transcrições das entrevistas quanto os registros escritos pelos alunos, foram levados em conta para analisar as representações realizadas para o problema. A representação é funcional, não um reflexo imediato da ação do sujeito, e necessita ser analisada tanto em seus componentes funcionais simbólicos quanto procedurais (VERGNAUD, 1985). A análise dos processos nos permitiu compreender o problema de duas formas: proporção simples e composição de medidas, e proporção múltipla e composição de medidas. Esta duplicidade ocorre por se tratar de um problema misto, cujas combinações entre as classes de situações geram diferentes possibilidades de agrupamento.

8.3 Dados e discussão

Ao estudar os registros dos estudantes, juntamente com as transcrições das entrevistas, separamos as respostas coerentes segundo os sistemas de significantes aos quais pertenciam suas representações, a saber, conta armada, organograma e escrita linear, no entanto, a maior parte dos alunos usou mais de um sistema de representação, o que não nos permitiu separar em grupos disjuntos de categorias. As respostas idiossincráticos foram analisadas e categorizadas como outros, no entanto, uma delas apresentou conta armada, o que nos levou a uma intersecção com tal sistema.

Representar por múltiplos sistemas de significantes a mesma situação implica em um pensamento mais abrangente, e como o mesmo sujeito representou a situação com mais de um sistema de significantes, as classes possuem elementos em comum, e por isso não possamos criar categorias disjuntas, segundo o Método Clínico, descrevemos cada categoria de representação, iniciando pelos processos idiossincráticos, aos quais denominamos de outros, após, com processos válidos, cujas representações se deram com os sistemas de significante de organogramas, de algoritmos de contas armadas, em seguida, as escritas lineares e por último a união dos três sistemas de significantes (DELVAL, 2002)

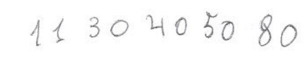
As diferentes formas de representação propostas pelos participantes do estudo foram processos idiossincráticos, contas armadas, organograma e escrita linear. As categorias aqui mencionadas dizem respeito às intersecções entre os conjuntos de sistemas de representação, e suas complementaridades. Inicialmente apresentamos as formas idiossincráticos de resolução, uma apenas com a escrita de números não conectados e a outra com a tentativa de apresentar um cálculo em conta armada. Após, unimos as representações apenas com organograma e as de organograma e tentativa de escrita linear, cujas resoluções utilizam agrupamento de quantidades com o auxílio de setas ou sinais de associação. A terceira classe consiste nas representações de estudantes que utilizaram exclusivamente conta armada, e embora 20 estudantes tenham resolvido a questão com o apoio de contas armadas, apenas sete utilizaram exclusivamente este sistema de representação no desenvolvimento da resposta. Estes sete estão na classe conta armada. A quarta e mais numerosa representação é a intersecção dos conjuntos conta armada e escrita linear, apresentando dez resoluções. A 5ª classe consiste nos trabalhos que apresentaram somente escrita linear. Vale dizer que não a nomeamos de expressão numérica porque alguns estudantes apresentaram o passo a passo de sua resolução, não expressando o problema inicial. Por último, descrevemos as resoluções que utilizam as três representações válidas.

8.3.1 Representações Idiossincráticas

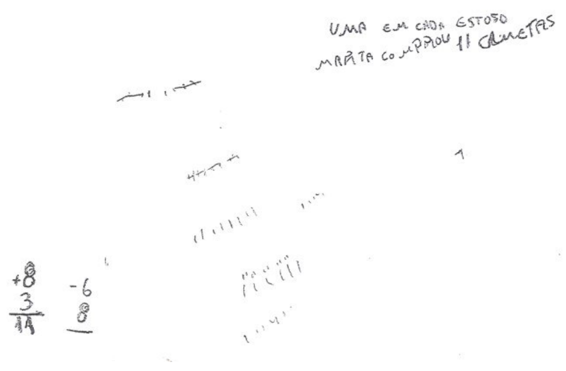
Quando a representação não reflete aspectos da situação, há uma quebra no esquema apresentado na Figura 82, o que observamos na classe que denominamos outros e outros com conta armada, as quais consistem nas representações não coerentes com o problema, como o caso de Edna (16 anos, 6º ano) e de Enzo (13 anos, 6º ano).

Figura 85 – Excertos do Protocolo de Edna e Enzo – outros

Edna



Enzo



Fonte: dados da pesquisa.

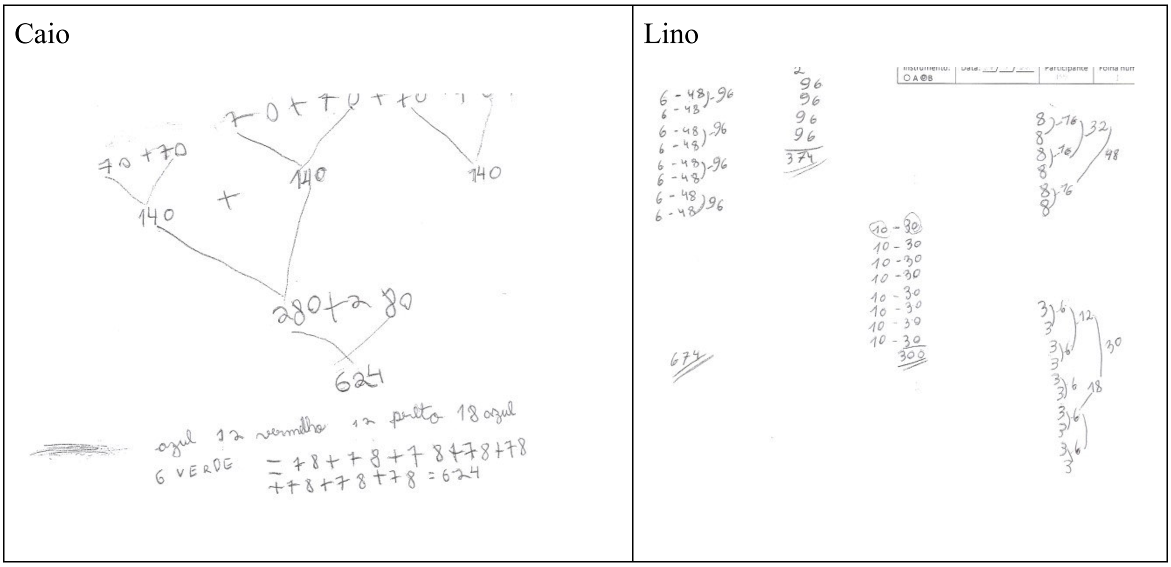
Edna escreveu números soltos que inicialmente refletiam algum dado do problema, como o 11, que é o número de canetas em um estojo azul e em um estojo amarelo, o 30 que é o número de canetas nos estojos amarelos, mas depois começou a fabular, "chutando" números maiores para a resposta da questão. Enzo chega a escrever que Marta comprou 11 canetas, mas segue no cálculo com palitos, que expressa em conta armada, mas logo depois começa a desenhar palitos e não conseguir continuar a resolução do problema.

Para uma representação ser funcional, precisa ser homomorfa a aspectos do problema. A representação de ambos iniciou com alguma funcionalidade, mas não deu conta dos aspectos necessários para a resolução. Ainda que Enzo passe do desenho de palitos para a conta armada, indicando um processo inicialmente válido, não segue, corroborando com Spinillo e Lautert (2006), quando afirmam que a eficiência de um suporte de representação não está no suporte, mas na sua ligação com o conceito e a situação apresentada.

8.3.2 Usando organogramas e tentando escrever seus resultados

Quatro dos estudantes, que não fizeram uso de conta armada para escrever sua resolução, tomaram como ferramenta de suporte a escrita por traços e segmentos de reta direcionados tanto na vertical quanto na horizontal, que aqui chamamos organograma, e que dispunha de um método de agrupar as quantidades para efetuar a adição. Este suporte permitiu tratar a representação de forma que as quantidades se mantivessem, como no caso de Lino (14 anos, 8º ano), que resume seis vezes o número 8 como adição de parcelas iguais e organiza tal operação de duas a duas parcelas, recursivamente.

Figura 86 – Excertos do Protocolo de Caio e Lino – somente organograma, organograma com escrita linear



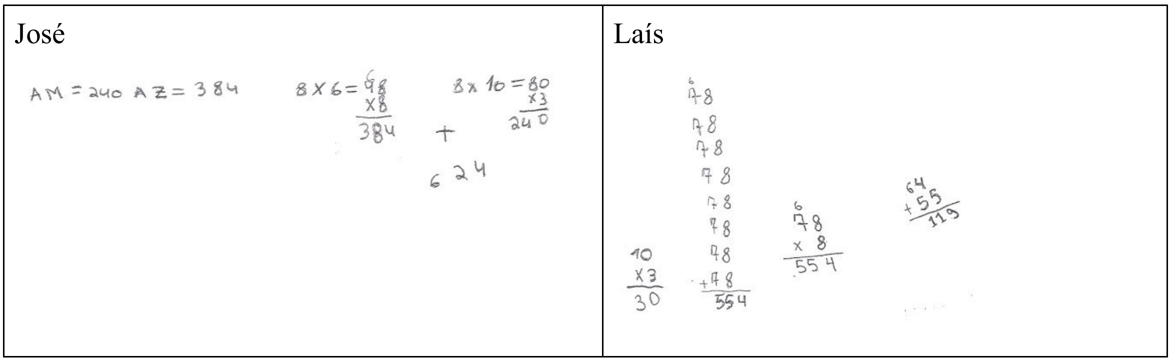
Fonte: dados da pesquisa.

Caio (12 anos, 6º ano), ao calcular 78 x 8, resolve decompor em parcelas de 70, e monta um organograma no qual vai adicionando as parcelas duas a duas, horizontalmente, até chegar no resultado esperado. Para além desse procedimento, ele representa em uma linha a adição de parcelas iguais que o levou ao resultado. Caio representa de duas formas diferentes a mesma situação, ambas com procedimentos que são coerentes com a situação, e com uma representação que além de apresentar homomorfismo com a situação, permite operações. Para além das representações escritas, Caio também bateu com o lápis na mesa, usando gestos para proceder a contagem e assim calcular a quantidade de canetas nos estojos. As formas de representação de Caio mostram que seu pensamento aproxima-se de alguma organização operatória, tal como uma estrutura de classe (KAMII, 1995). Entretanto, nota-se que ainda não domina os símbolos matemáticos próprios para uma construção com base em signos socialmente compartilhados. Parece-lhe faltar repertório representacional para expressar o modo como pensa. Essa limitação das representações nos permite supor que há relativo impacto na compreensão conceitual da situação e, consequentemente, dos campos conceituais imbricados que estão envolvidos. É possível supor que, caso o problema não admitisse imbricações de situações dos campos aditivo e multiplicativo, o sujeito teria mais mobilidade representacional da situação. Lino procede de maneira semelhante, mas a sua representação é vertical. À primeira vista parece uma conta armada, mas Lino resolve com um organograma adicionando as parcelas duas a duas. Gregolin (2002) alerta para o perigo deste tipo de procedimento ao trabalhar com operações não comutativas, mas como Caio e Lino estão adicionando números positivos, o processo é válido.

8.3.3 As clássicas contas armadas

O suporte de contas armadas foi o mais utilizado pelos estudantes, sendo o algoritmo usual para resolução de problemas aritméticos. Tal sistema de significantes permitiu representações que expressaram diferentes níveis de compreensão e operação da multiplicação, como a adição de parcelas iguais e o algoritmo euclidiano.

Figura 87 – Excertos dos Protocolos de José e Laís – somente conta armada



Fonte: dados da pesquisa.

José (14 anos, 8º ano) inicialmente multiplicou o número de estojos de cada cor pelo número de canetas e após somou os resultados. O estudante utilizou a multiplicação euclidiana e escreveu quantas canetas havia nos estojos azuis e amarelos nas embalagens. Laís (12 anos, 6º ano), optou pelo caminho de primeiro calcular o total de estojos em uma embalagem, para depois multiplicar pela quantidade de embalagens, mas ao invés de multiplicar com o algoritmo usual, resolveu adicionar parcelas iguais, e depois escrever o algoritmo com a soma descrita como produto. Tanto as representações de José quanto de Laís permitem acompanhar o pensamento dos estudantes na resolução da situação, suas hipóteses e regras de ação.

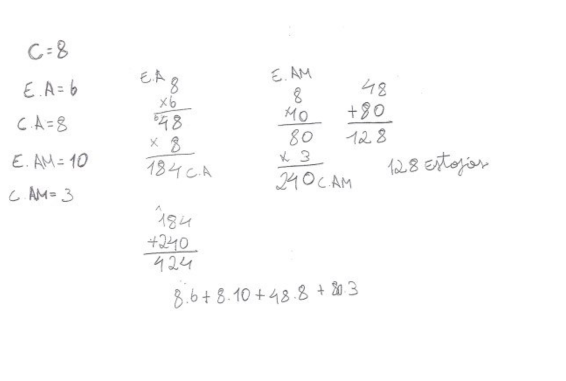
José realiza as operações separadamente, com o passo a passo bem determinado para resolver o problema. A representação de sua resolução é adequada, pois percebemos que ele calcula a quantidade de estojos azuis relacionando a quantidade de embalagens e de estojos por embalagem, fazendo 8x6=48, na continuidade, calcula a quantidade de canetas nos estojos azuis relacionando a quantidade de canetas em um estojo azul com o número de estojos azuis, fazendo 48x8=384. Procede de maneira análoga para os estojos amarelos. José realiza tais passos separadamente e os une com um sinal de adição cuja escrita nós conseguimos entender, mas não é a convencional. Desta forma, José realiza operações mentais, mas não consegue representar o encadeamento realizado. Assim, os cálculos são apresentados de forma independente, sem um fio associativo que os conecte.

8.3.4 Do clássico ao simbólico: a conta armada e sua descrição como escrita linear

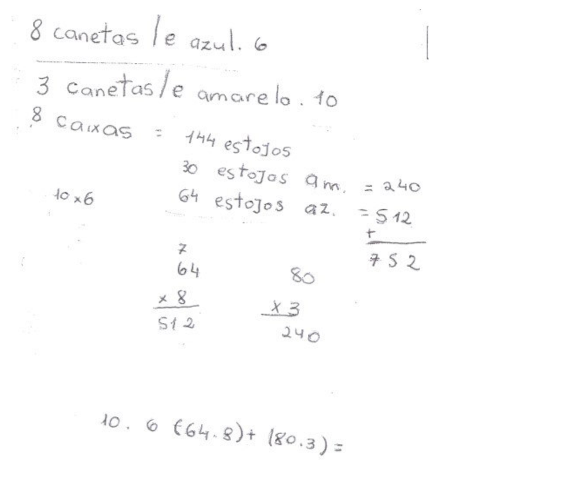
A escrita linear pertence ao sistema de significantes da representação algébrica, embora consista, no caso de problemas aritméticos, em expressões numéricas, as quais possuem elementos que são construídos socialmente, principalmente no que diz respeito ao uso de sinais de associação (OTTES, 2016). A síntese das quatro operações descrita em uma expressão numérica com multiplicações e adições implica na diferenciação das operações, e consequentemente, dos números que são operados, bem como seus sentidos. Como podemos observar na Figura 88, a representação em conta armada demanda esquemas diferentes da representação em escrita linear, e um sujeito pode representar adequadamente uma situação e estar em processo de representação coerente em outra.

Figura 88 – Excertos dos Protocolos de Sara e Vera – conta armada e escrita linear

Sara



Vera



Fonte: dados da pesquisa.

Pela organização dos cálculos, podemos constatar que Sara (14 anos, 8º ano) organizou as canetas por estojos, e depois os estojos de cada cor por embalagens, cometendo um erro no cálculo de 48x8, fazendo 40x8=120. A conta armada dá pistas do desenvolvimento do pensamento de Sara, atuando como uma representação que reflete os aspectos da realidade e que permite fazer relações, ou seja, é funcional. Salvo o erro de tabuada, Sara operou com um processo coerente em relação à representação de conta armada, no entanto, quando tentou representar em escrita linear, representou uma expressão numérica que não reflete o problema.

Vera (15 anos, 8º ano) percorreu um caminho semelhante ao de Sara, mas errou em dois cálculos: 8x6 e 64x8. Embora os processos não estejam errados, os cálculos são incorretos, isso pode ser visto porque Vera representou com coerência o problema em se tratando da conta armada. Para a expressão numérica, a estudante utilizou sinais de associação separando os cálculos, mas a representação não tem homomorfismo com a situação, então não é funcional. Destacamos a importância de representar de formas diferentes a mesma questão, e retornar de uma representação à outra, para testar hipóteses e fazer inferências sobre o próprio pensamento.

Tanto Sara quanto Vera utilizaram processos referentes às estruturas multiplicativas, as quais possuem dificuldades conceituais diferentes das estruturas aditivas, as primeiras com base de problemas de quatro termos, com relações de escalas, sem dimensão, como o fator proporcional que diz que, se em um estojo estão 3 canetas, é preciso multiplicar por 10 a quantidade de canetas para se obter as canetas de 10 estojos, resultando em 30, e quocientes de dimensões, difíceis de extrair, inverter e compor, como pensar que se em um estojo existem 3 canetas, então temos 3 canetas por estojo, e devemos multiplicar por 3 a quantidade de estojos para ter o número de canetas nos mesmos, sejam eles quantos forem. Esta última variação se trata de uma função descrita por f(x)=3x (VERGNAUD, 2001, MIRANDA, 2019).

8.3.5 Preparação para a simbolização algébrica: a escrita linear

Uma expressão numérica é uma representação de um problema aritmético que necessariamente possui números e operações, e pode conter sinais de associação, resultando em um único número. (RAMOS; SILVA, 2022a) Ora, desta definição a adição 78+78+78+78+78+78=624, escrita por Caio é uma expressão numérica. No entanto, ela reflete o último passo das operações realizadas pelo estudante. Quando representamos um problema na forma de expressão numérica, o que precisamos descrever é como as grandezas da situação se relacionam, e isso se dá mediante a representação algébrica, como a descrita corretamente por Olga (13 anos, 8º ano), observável na Figura 89.

Não expressar etapas do cálculo, mesmo operando corretamente, pode relacionar-se a dificuldades na capacidade de representar. Dessa maneira, o cálculo mental implícito em alguns problemas revela boas capacidades operatórias, mas limitações na linguagem e expressão das capacidades existentes.

Figura 89 – Excertos dos Protocolos de Tina e Olga – somente escrita linear

Tina	Olga
$10 \cdot 3 \quad 6 \cdot 8$ $30 + 48 = 78 \cdot 8 = 624$	$8.[(8.6)+(3.10)]$ $8.[48 + 30]$ $8. \quad 78 = 624$

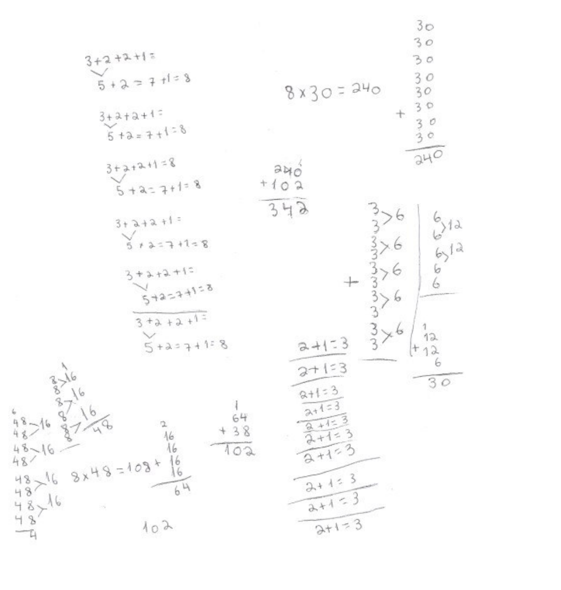
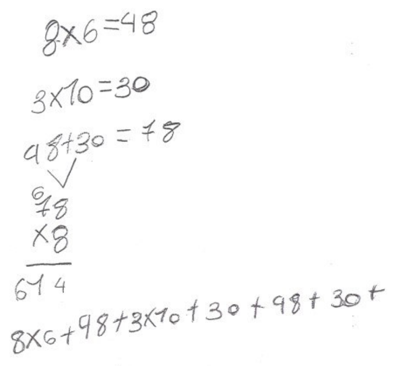
Fonte: dados da pesquisa.

Tina (13 anos, 8º ano) é econômica em sua escrita, a qual não está matematicamente correta, pois 30+48 não é igual a 78.8, mas representa os passos dados pela estudante na resolução da tarefa, a qual foi solucionada corretamente. Olga (13 anos, 8º ano), representa a situação com uma expressão numérica correta, e que dá conta matematicamente da questão por utilizar os sinais de associação e as propriedades aritméticas. Olga, em outro momento, escreve também contas armadas e organiza esquemas, mas sua escrita linear disjunta de outros sistemas de significantes dá conta de expressar sem ambivalências o pensamento homomórfico à situação. Ambas multiplicam a quantidade de canetas pela quantidade de estojos de cada cor, adicionam e multiplicam pelo total de embalagens, mas cada uma descreve de uma forma, tendo processos idênticos e representações no mesmo sistema de significantes (forma algébrica) diferentes.

8.3.6 Múltiplas representações: a conta, o simbólico e o organograma

Trabalhar em diferentes sistemas de significantes permite maior número de inferências sobre a construção da representação e da ação. Os processos descritos por Luiz e Igor descrevem os passos dados pelos mesmos, transitando por contas armadas, organogramas e escritas lineares, a ponto de Igor iniciar com representação em linha, juntar seus resultados através de um organograma, calcular pelo algoritmo da multiplicação, chegar em um resultado satisfatório e buscar a representação em expressão numérica. Esta última não sintetizou o problema, pois o que Igor não se deu conta que o processo utilizado é recursivo. Temos, portanto, uma representação correta para a situação (salvo erro de tabuada) e uma incorreta, produzida pelo mesmo sujeito.

Figura 90 – Excertos do Protocolo de Igor e Luiz – organograma, conta armada e escrita linear

Igor	Luiz
	

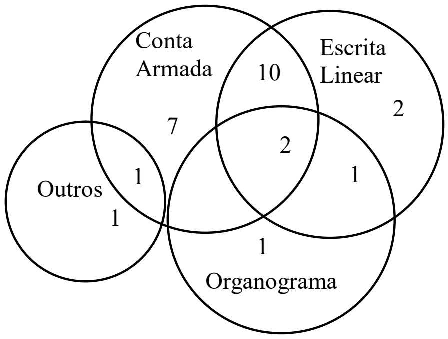
Fonte: dados da pesquisa.

Igor (12 anos, 6º ano) descreveu sua resolução com o uso de organogramas, conta armada e escrita horizontal, adicionando as canetas de cada estojo, repetidas vezes. O processo criado por Igor não foi econômico, mas representou com precisão seu raciocínio matemático. Luiz (14 anos, 8º ano) utilizou os mesmos recursos, mas de forma enxuta, com a multiplicação euclidiana. Igor errou ao calcular 8 x 48 como 102 e Luiz 78 x 8 como 614, mas os processos de ambos estão corretos, sendo que em cada sistema de significantes os estudantes representaram de forma diversa do outro. Outra característica da representação de Igor é a capacidade de operar corretamente com as contas armadas, mas de não exercer a função predicativa na forma de expressão numérica, cujos significantes pertencem a um sistema institucionalizado para a matematização de situações (VERGNAUD, 1985, 2007).

A situação das caixas permitiu passar de um sistema de representação para o outro (do organograma para a conta armada, para a escrita linear), combinando diferentes tipos de representação. Esse trânsito e integração entre as maneiras de representar a quantidade de canetas na embalagem serviram de suporte para que os estudantes expressassem seu pensamento. A representação é homomórfica ao pensamento, e ao mesmo tempo ler a própria representação permite mudar tal pensamento, em relação ao conceito (SPINILLO, LAUTERT, 2006).

A diversidade de representações para a mesma situação pode apresentar um raciocínio mais elaborado, ao mesmo tempo em que os conhecimentos postos em ação no momento da resolução impliquem em representações com uma variabilidade conforme os esquemas se combinem. Assim, encontramos como resultados representações diversas para a mesma situação, inclusive para casos individuais, como pode ser observado na Figura 91.

Figura 91– representações realizadas pelos estudantes para o problema misto



Fonte: dados da pesquisa.

Não é porque o sujeito representa em mais sistemas que o raciocínio é melhor matematicamente. Olga representou apenas com escrita linear, desenvolvendo uma expressão numérica elegante e pertinente, enquanto Igor representou em três sistemas de forma mais incipiente, porém pertinente à situação. Luiz escreve de forma correta seu pensamento no que se refere à conta armada e à junção de dados traçada por um organograma, no entanto ao escrever a expressão numérica, se perde o homomorfismo da representação com a situação.

8.3.7 Considerações

Nos processos válidos, os estudantes armaram as contas para desenvolvimento de cálculos com algoritmos, sejam eles de adição ou multiplicação, esquematizaram organogramas com segmentos de reta que indicavam os caminhos de pensamento que chegaram para solucionar a questão, e escreveram em linha horizontal seus cálculos, buscando representar a situação dada.

O homomorfismo entre a situação e a representação ocorreu de forma mais abrangente com as contas armadas, necessitando de uma habilidade de síntese maior para escrever a expressão numérica adequada ao problema. A maior parte dos estudantes representou com mais de um sistema de significante a situação, buscando descrever seu pensamento e calcular por meio da conta armada, e escrevendo em uma linha seus cálculos.

Embora os processos utilizados fossem pertinentes, os erros de cálculo foram frequentes, o que leva a crer que os estudantes compreendem o que precisam fazer e como precisam agir. Estas habilidades são mais poderosas que o trabalho com a tabuada, que é necessário, mas não o foco da aprendizagem matemática.

Percebemos uma possibilidade de atraso da representação do problema na forma de expressão numérica, em relação a ação operatória, isto é, tem mais participantes acertando a questão sem representá-la simbolicamente, apresentando uma forma operatória do conhecimento e ainda não predicativa em relação a este sistema de significantes. Outro fator importante é que as estruturas operatórias, especialmente a de estrutura de classe, parecem ter influência na organização das representações e por isso, diretamente, na qualidade dessas representações, e o cálculo mental implícito parece ser um dado que corrobora essa ideia.

Como este estudo ocorre em um período pós-pandêmico, no qual os jovens do 6º ano estudaram até o terceiro ano presencialmente e voltaram para a escola já no 6º ano, e analogamente os jovens do 8º ano estudaram até o 5º ano presencialmente e retornaram no 8º ano para o ensino presencial, é interessante ter um vislumbre para a docência ao ver os sujeitos descreverem seus processos de pensamento com diversidade de sistemas de significantes, escreverem expressões numéricas e criarem caminhos que permitam solucionar um problema.

8.3.8 Referências

BONI, K. T.; LABURÚ, C. E.; CAMARGO FILHO, P. S. A Teoria dos Campos Conceituais e a Diversidade Representacional: leituras convergentes para a Educação Matemática e Científica. **VIDYA**, v. 38, n. 1, p. 75-90, jan./jun., 2018. Disponível em https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/download/2163/2150. Acesso em: 9 dez. 2022.

BONI, K. T.; LABURÚ, C. E.; CAMARGO FILHO, P. S. Teoria dos Campos Conceituais, Diversidade Representacional e Redescrição Representacional: convergências teóricas a respeito do papel das representações para a aprendizagem conceitual. **Investigações em Ensino de Ciências**. v.26, n.2, p. 97-112, 2021. Disponível em: https://ienci.if.ufrgs.br/index.php/ienci/article/view/2389/pdf. Acesso em: 9 dez. 2022.

DELVAL, J. **Introdução à Prática do Método Clínico**: descobrindo o pensamento das crianças. São Paulo: Artmed, 2002.

GITIRANA, V.; CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S. M. P.; SPINILLO, A. G. **Repensando a multiplicação e divisão**. Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM, 2014.

GREGOLIN, V. R. **O Conhecimento Matemático Escolar: Operações com Números Naturais (e adjacências) no Ensino Fundamental**. 2002. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2002. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/tese_gregolin.pdf. Acesso em: 10 jan. 2020.

MAGINA, S. M. P.; MERLINI, V. L.; SANTOS, A. A estrutura multiplicativa à luz da Teoria dos Campos Conceituais: uma visão com foco na aprendizagem. *In*: CASTRO FILHO; J. A.; BARRETO, M. C.; BARGUIL, P. M.; MAIA, D. L.; PINHEIRO, J. L. **Matemática, cultura e tecnologia: perspectivas internacionais**. Curitiba: Editora CRV, 2016, p.66-82.

MIRANDA, C. A. **Situações-problema que envolvem o conceito de função a-fim:** uma análise à luz da Teoria dos Campos Conceituais. 2019. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação) - Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2019. Disponível em: https://tede.unioeste.br/handle/tede/4671. Acesso em: 9 dez. 2022.

OTTES, A B. **Expressão numérica: a hierarquia das quatro operações matemáticas**. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2016. Disponível em: https://repositorio.ufsm.br/handle/1/12435. Acesso em: 21 ago. 2020.

RAMOS, R. C. S. S; SILVA, J. A. Estudo de revisão sobre expressões numéricas em textos acadêmicos - abordagens teóricas. *In:* Congresso Ibero-americano de Educação Matemática, 9, 2022b,São Paulo. **Anais [...],**online, São Paulo. Pontifícia Universidade Católica – São Paulo, 2022b. Disponível em: https://even3.blob.core.windows.net/processos/8b9539b36aea4c5a8f09.docx. Acesso em: 9 dez. 2022.

RAMOS, R. C. S. S; SILVA, J. A. Expressões Numéricas sob o enfoque da Teoria dos Campos Conceituais: o que dizem os textos acadêmicos? *In*: Encontro Nacional de Educação Matemática, 14, 2022a, SBEM. **Anais [...],** online. Disponível em: https://even3.blob.core.windows.net/processos/15915ed7d8e2422289a7.docx. Acesso em: 9 dez. 2022.

SPINILLO, A. G., LAUTERT, S. L. O diálogo entre a Psicologia do Desenvolvimento Cognitivo e a Educação Matemática. *In*: MEIRA, L.; SPINILLO, A. G. (Eds.), **Psicologia Cognitiva: Cultura, desenvolvimento e aprendizagem**. Recife, PE: Editora da Universidade Federal de Pernambuco, 2006, p. 46-80. Disponível em: https://editora.ufpe.br/books/catalog/download/301/291/873?inline=1. Acesso em: 15 nov. 2022.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar**. Curitiba: Editora da UFPR, 2009a.

VERGNAUD, G. **Atividade humana e conceituação**. Porto Alegre: GEEMPA, 2008.

VERGNAUD, G. Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la répresentation. **Psychologie Française**, v. 30, p. 245-252, 1985. Traduzido por Maria Lucia Faria Moro, com revisão de Luca Rischbieter e Maria Tereza Carneiro Soares. Disponível em: https://vergnaudbrasil.com/wp-content/uploads/2021/03/2.1-CONCEITOS-E-ESQUEMAS-EM-UMA-TEORIA-OPERATORIA-DA-REPRESENTACAO.pdf. Acesso em: 9 dez. 2022.

VERGNAUD, G. Constructivisme et apprentissage des mathématiques. Actes du Colloque Constructivismes : Usages et Perspectives en Éducation. Genève: **Service de la Recherche en Education**, cahier n. 8, p. 143-155, 2001. Traduzido por Camila Rassi, com revisão de Luca Rischbieter, Maria Lucia Faria Moro e Maria Tereza Carneiro Soares. Disponível em https://vergnaudbrasil.com/wp-content/uploads/2021/03/4.4-CONSTRUTIVISMO-E-APRENDIZAGEM-DA-MATEMATICA.pdf. Acesso em: 9 dez. 2022.

VERGNAUD, G. Forma operatoria y forma predicativa del conocimiento. In: Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática, 1. , 2007b, Tandil. **Actas [...]** Argentina, Tandil, 2007b.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didáctique des Mathématiques**, v. 10, n. 2, p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didáctique des Mathématiques**, v. 10, n. 2, p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. O que é aprender? *In:* BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (Org.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais.** Curitiba: Editora CRV, 2009b. p. 13-36.

WIBERG, J. **Att prioritera rätt : Hur elever i årskurs 5 går tillväga, gällande strukturering och prioritering, när de beräknar numeriska uttryck**. 2017. Dissertação (Independent thesis Advanced level - professional degree) - Jönköping University, School of Education and Communication. 2017. Disponível em: http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:hj:diva-36384, 2017. Acesso em: 22 dez. 2022.

ZAZKIS, R.; ROULEAU, A. Order of operations: On convention and met-before acronyms. **Educational Studies in Mathematics**, v. 97, n.2, p. 143–162, 2008. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/45185421. Acessado em: 22 dez. 2022.

ZAZKIS, R.; ROULEAU, A. Order of operations: On convention and met-before acronyms. **Educational Studies in Mathematics**, v. 97, n.2, p. 143–162, 2008. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/45185421. Acessado em: 22 dez. 2022.

9 EXPRESSÕES NUMÉRICAS COMO IMBRICAÇÃO ENTRE O CAMPO CONCEITUAL ADITIVO E O CAMPO CONCEITUAL MULTIPLICATIVO

9.1 Introdução

As quatro operações são ensinadas, via de regra, iniciando pela adição, seguida da subtração, multiplicação e divisão, sendo que a multiplicação é comumente ensinada como adição de parcelas iguais. Trata-se de uma aproximação entre o Campo Conceitual Aditivo e o Campo Conceitual Multiplicativo, mas para compreender a multiplicação existe a necessidade de uma ruptura. Tal ruptura é fundamental para construir a ideia de um novo sentido de número, que não está presente em uma relação de parte-todo, mas de uma replicação de grandezas, por exemplo. Assim, as classes de situações presentes no Campo Conceitual Multiplicativo se diferenciam das do Campo Conceitual Aditivo (NUNES; BRYANT, 1997, VERGNAUD, 2009).

Uma situação que contemple, ao mesmo tempo, operações de adição ou subtração e de multiplicação ou divisão é denominada de problema misto (VERGNAUD, 2009). Um problema misto pode ser representado por uma expressão numérica, que é composta por números e operações, podendo conter sinais de associação e resulta em um valor numérico único. Sua resolução deve obedecer às propriedades aritméticas e às ordens de prevalência das operações e sinais de associação. A representação de uma situação de problema misto na forma de expressão numérica necessita da compreensão das regras de prevalência que provém das propriedades aritméticas e ao mesmo tempo do sentido de cada número na operação. Representar, pois, um problema misto na forma de expressão numérica requer que o sujeito compreenda o problema e as ordens das suas operações (ARRAIS, 2006, OTTES, 2017).

Além da escrita do problema, a resolução do mesmo demanda que a ordem de prevalência e o papel dos sinais de associação estejam claros. Embora se possa resolver uma expressão numérica somente pela memorização de regras e técnicas, se aponta a fragilidade de decorar um processo, como por exemplo resolver as operações contidas nos parênteses e ignorar os colchetes. Modelar um problema, representá-lo como expressão numérica e resolvê-lo requer que o sujeito opere com as relações aritméticas ligadas às classes dos Campos Conceituais Aditivo e Multiplicativo abordadas na situação.

Para que haja construção do conhecimento, segundo a Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud (2009), existe a necessidade do enfrentamento de classes estruturadas de situações relacionadas a um conceito, o conjunto dessas situações é denominado campo conceitual. Cada conceito é formado por um conjunto de situações, invariantes operatórios e representações. Uma situação é resolvida utilizando uma gama de conceitos, e um conceito é aprendido a partir da resolução de várias situações, ao longo da vida (VERGNAUD, 2009b).

Dentre os campos conceituais, destacam-se o Campo Conceitual Aditivo, composto por todas as situações que envolvem em sua resolução uma ou mais adições ou subtrações, e o Campo Conceitual Multiplicativo, cujas situações envolvem uma ou mais divisões ou multiplicações (VERGNAUD, 2009). O problema aqui apresentado foi classificado inicialmente como isomorfismo de medidas e composição de medidas, no entanto, os resultados apontaram também para a modelação do problema como proporção múltipla.

O objeto de estudo desta pesquisa é a construção da representação do problema misto como expressão numérica. Uma expressão numérica é a representação de um problema aritmético através da escrita simbólica em uma única linha, utilizando operadores, sinais de associação e números. Sua resolução depende das propriedades aritméticas e das regras de prevalência e seu resultado é um único número. Defendemos que a representação e resolução de uma expressão numérica é a síntese das quatro operações, no sentido de necessitar em seu desenvolvimento da compreensão dos sentidos dos números e operações, a fim de utilizar as regras de prevalência com significado.

O objetivo da pesquisa é analisar como os elementos de uma expressão numérica se movimentam na escrita na resolução de um problema misto, por estudantes do Ensino Fundamental, mediante Método Clínico Piagetiano. O instrumento proposto consiste em uma situação para a qual se solicitou a escrita da expressão numérica que a representa, bem como sua resolução.

9.2 Método

Trata-se de estudo qualitativo, cujo delineamento quanto ao objetivo é de pesquisa exploratória, quase-experimental, a partir do Método Clínico de base piagetiana, o qual busca acompanhar o pensamento em ação, por meio de entrevistas e situações abertas (DELVAL, 2002, GIL, 2002, 2008).

Conforme Termo de Consentimento Livre e Esclarecido e Termo de Assentimento Livre e Esclarecido, as entrevistas foram gravadas, e os registros em papel produzido pelos estudantes fizeram parte do corpus a ser analisado, bem como apontamentos da pesquisadora, escritos após cada entrevista. O público-alvo consistiu em estudantes de uma turma de 6º ano e três turmas de 8º ano de escolas públicas do sul do Brasil. Os alunos resolveram uma expressão numérica, e posteriormente uma tarefa, com o apoio de material visual. Durante cada resolução, utilizamos um roteiro guia, modificado conforme as estratégias dos estudantes.

O problema, que consiste em calcular a quantidade de canetas em uma caixa com embalagens de estojos, é descrito como: Marta fez uma encomenda de canetas, que vieram em uma caixa. Na caixa cabem oito embalagens, em cada embalagem está um conjunto com seis estojos azuis, e dez estojos amarelos. Em cada estojo azul estão três canetas azuis, duas canetas pretas, duas canetas vermelhas e uma caneta verde. Em cada estojo amarelo estão duas canetas roxas e uma caneta cor de rosa. Marta comprou quantas canetas? conforme Figura 92.

Figura 92 – Material manipulado no dia da entrevista

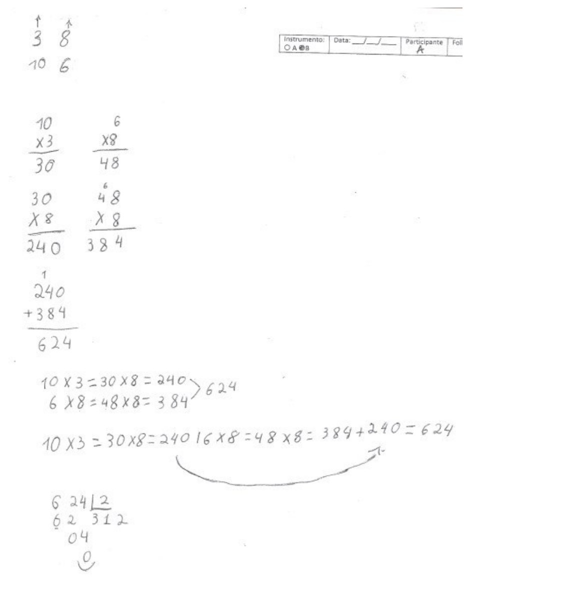
Fonte: dados da pesquisa.

Trata-se aqui de uma organização de conjuntos de conjuntos. A ordenação necessária é pertinente de observação principalmente na diferenciação entre o número de canetas no estojo azul e no amarelo, com a composição de medidas, e a proporção simples, como imbricação entre os campos aditivo e multiplicativo em um problema misto.

9.3 Teste Piloto

Procedemos a testagem piloto em uma escola pública de Pelotas, com seis adolescentes do 6º ano. A situação consistiu na resolução do problema das caixas, adicionada de perguntas que foram excluídas do teste final em função da falta de viabilidade e de não enriquecer o diálogo conforme previsto, não sendo concernente ao objetivo da pesquisa, são elas: Rozane comprou a metade da quantidade de canetas de Marta. Quantas canetas Rozane comprou? Quantas dessas canetas eram vermelhas? Os estudantes realizaram as tarefas em duplas, o que permitiu diálogo, mas não foi profícuo em relação à organização dos dados, pois um dos colegas ficou em silêncio, concordando com o outro, por isso as entrevistas posteriores foram individuais.

Figura 93 – Excerto do protocolo e da entrevista de Nico



Nico: eu peguei o quanto tem de cada uma, aí eu somei quantos estojos tem
Entrevistadora: O que que é esse 3 e o que que é esse 10, me conta.
Nico: Aqui tem 3 canetas em 10 estojos diferentes, e aqui tem 8 em 6 estojos azuis.

Fonte: dados da pesquisa.

Quanto à resolução, os alunos montaram uma conta armada para a resolução, sendo que Nico (10 anos, 6º ano), organizou com linhas a resolução das operações. Ao escrever a expressão numérica relacionada à situação, Nico utilizou o sinal de igualdade para separar as operações, fazendo uso incorreto do sentido operacional do sinal de igualdade, pois inseriu mais de uma vez o sinal de igual, para apresentar os passos de resolução. No caso de 10 x 3 = 30 x 8 = 240, a propriedade transitiva não se aplica, por exemplo. Nico escreve os passos dados: dez estojos com três canetas dá 30, vezes oito embalagens dá 240, esse “dá tanto” é um dos sentidos construídos para o sinal de igualdade no Ensino Fundamental, como local para colocar uma resposta (TRIVILIN; RIBEIRO, 2015).

9.4 Análise de dados

Para analisar como se dá a imbricação entre o Campo Conceitual Aditivo e o Campo Conceitual Multiplicativo na resolução de um problema misto, buscamos entender como os alunos manejavam a multiplicação e a adição em uma situação, quais caminhos seguiam e quais representações utilizavam na escrita e na resolução da mesma (TELES, 2008; MIRANDA, 2019). Categorizamos as respostas dos estudantes segundo os seguintes critérios: representação escrita da expressão numérica, processos utilizados para a resolução do problema e uso das operações aritméticas.

A escrita da expressão numérica foi considerada adequada se os sinais de associação, as regras de prevalência e as propriedades aritméticas fossem respeitadas, e se a expressão traduzisse a situação de forma correta (BENDER, 1962; ARRAIS, 2006). Os processos utilizados para a resolução de problema foram classificados coerentes quando descrevessem os procedimentos necessários para a resolução do problema. O uso das operações aritméticas para escrita e resolução do problema foi estudado segundo a operação utilizada (MAGINA, SANTOS, MERLINI, 2014).

Entendemos que para esta situação, manifestam a imbricação entre os Campos Conceituais Aditivo e Multiplicativo, os estudantes que escreveram uma expressão numérica adequada à situação e a resolveram corretamente, estando no Nível 3, sendo o Nível 3A descrito por expressões com o uso de regras de prevalência e o Nível 3B com regras de prevalência e sinais de associação.

Os estudantes que conseguiram resolver o problema, ainda que com erros de cálculo, mas com processos coerentes e respeitando as propriedades aritméticas, e que não escreveram uma expressão numérica adequada à situação, inserimos no Nível 2, classificado segundo as operações utilizadas na resolução, sendo o Nível 2A utilizando contagem, o Nível 2B utilizando adições e o Nível 2C multiplicações.

Os sujeitos cujos processos de resolução do problema foram idiossincráticos se classificaram no Nível 1, sendo o Nível 1A totalmente idiossincrático, com a presença de fabulação, e o Nível 1B com processos idiossincráticos, mas que não respeitaram as relações entre as grandezas presentes na situação.

Quadro 18 – Níveis na resolução do problema misto

Nível	**Subnível**
1 – Idiossincrático	1A – totalmente idiossincrático
	1B – processos idiossincráticos
2 - Descritivo – operacional	2A – operações com adição - contagem
	2B – operações com adição
	2C – operações com adição e multiplicação
3 - Expressão Numérica – imbricação	3A – expressões numéricas com regras de prevalência
	3B – expressões numéricas com sinais de associação e regras de prevalência

Fonte: dados da pesquisa.

A classificação dos níveis se deu pela coerência nos processos, no desenvolvimento da resolução do problema misto e na síntese da representação deste problema sob a forma de uma expressão numérica. A seguir apresentamos o quadro de análise dos participantes do estudo de acordo com os critérios evidenciados.

Quadro 19 – Classificação dos sujeitos segundo os critérios de análise, nomes fictícios.

Instrumento B – Caixas																									
Processo Coerente		X	X		X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X	X	X	X	
Multiplicação com algoritmo de Euclides						X		X	X	X	X						X	X		X	X	X		X	
Expressão Numérica adequada															X			X							
Resultado Correto			X			X			X					X			X	X					X		
Nível																									

Fonte: dados da pesquisa.

Com este *corpus* de vinte e cinco participantes divididos em três grandes níveis, a seguir apresentamos o processo de análise que permite essa organização.

9.4.1 Nível 1 – Processos Idiossincráticos

Os processos idiossincráticos são estratégias que não levam à solução do problema. Sem a compreensão do objetivo do problema, por exemplo, não é possível traçar metas e antecipar resultados. Ainda que se compreenda o que o problema pede, apresentar regras de ação eficazes exige um esforço para manter a organização do pensamento no sentido de buscar uma resposta pelo meio mais eficiente possível (VERGNAUD, 2009a).

9.4.1.1 Nível 1A

Neste subnível estão os sujeitos que têm processos cognitivos muito incipientes e aproximações da situação que não permitem uma abordagem razoável do problema proposto. Um exemplo é a estudante Edna (16 anos, 6º ano), que inicia com um processo válido, mas logo no início escreve alguns números no protocolo e arrisca outros, não conseguindo montar uma estratégia para a resolução do problema.

Figura 94 – Excerto do protocolo e da entrevista de Edna e Enzo

11 30 40 50 80	Entrevistadora - Como é que tu fez? Edna - Não sei, eu fiquei contando na cabeça vendo alguns números
+8 3 11	Entrevistadora - E aí como tu vai descobrir quantas canetas azuis tem numa caixa? Enzo – (conta as canetas e segue fazendo pares). Tem duas canetas em cada estojo.

Fonte: dados da pesquisa.

Na Figura 94 é possível evidenciar que não há um raciocínio coerente. O instrumento é composto de seis estojos azuis e dez estojos amarelos em cada embalagem, mas apenas um estojo azul pode ser aberto, e apenas um estojo amarelo. As canetas dentro dos outros estojos não são acessíveis. Edna conta as canetas dos estojos acessíveis e compõe a quantidade onze, para os dois estojos. A partir daí, infere sobre quantidades de forma pouco organizada, e ainda que façamos perguntas a respeito da quantidade de estojos e de canetas, a estudante não antecipa possíveis resultados de forma coerente.

A Figura 94 também exibe um excerto do protocolo de Enzo. Da mesma forma que Edna, o estudante Enzo (13 anos, 6º ano) soma o número de canetas de um estojo amarelo com um estojo azul e para. A partir deste momento, manipula as canetas na carteira e não desenvolve estratégias. Enzo não consegue desenvolver um procedimento para o cálculo das canetas na caixa. Neste caso, o aluno vai fazendo pares de caneta, de modo a não responder o que perguntamos na entrevista.

Enzo realiza o que chamamos de fabulação. Segundo Piaget (2008), a fabulação é uma estratégia adotada por crianças quando não há possibilidade de aproximação intelectual com a tarefa proposta. Assim, nota-se que Enzo não compreende exatamente o problema. Na conversa ele conta as canetas de dois estojos, mas não opera com as embalagens nem com os demais estojos, e passa a solicitar a resposta para a entrevistadora.

Tanto Edna quanto Enzo não desencadeiam uma sistematização de passos que levem a um resultado, por isso estão no Nível 1A. É interessante também notar os diferenciais dos procedimentos adotados por Rute, que atende aos critérios deste nível, mas avança nos processos construídos para a resolução do problema, como será visto no próximo subnível. A representação do problema traduz apenas o que pode ser visivelmente acessado mediante a contagem dos lápis dos estojos, por meio de manipulação do material. Ao calcular 3+8=11, os estudantes não cometem um erro, no entanto, tal conclusão não leva à solução de quantas canetas há na caixa. As regras de ação utilizadas pelos estudantes não são eficazes, levando a processos empregados inadequados.

Não podemos afirmar os pontos específicos em que os estudantes não compreenderam o problema, mas sim que a representação da situação realizada não apresentou um caráter operatório, não levando a um caminho de solução para o problema. A falta de eficácia desta representação se deu por não refletir a realidade e não se adequar-se a um cálculo relacional (VERGNAUD, 2009).

9.4.1.2 Nível 1B

Enquadramos neste subnível os sujeitos que descrevem um processo com encadeamento lógico, mas que não traduzem o problema de forma correta. A estudante Rute (14 anos, 8º ano) leva todas as grandezas em consideração, no entanto, na hora de resolver o problema, não conta o material que está em sua mão, contando (n-1) objetos. Ao ser questionada, afirma que “é mais fácil assim”, e para “este já está”.

Figura 95 – Excerto do protocolo e da entrevista de Rute e Alan

6 estojos azuis = 32 canetas 10 estojos amarelos = 27 cane 27 canetas 32 +24 56 x 4 353 4 x 8 32 353	Rute - O número de estojos, né, eu não contei o número de estojos que tinham as canetas, porque já era o número, então eu multipliquei, 4, 4 vezes 8. Entrevistadora - Por que que tu não contou? Rute - Por que eu não contei? Entrevistadora - É Rute - eu achei que seria mais fácil multiplicar **Rute - Eu multipliquei, eu juntei quanto tinha em cada um e aí eu multipliquei pelo número de caixas**.
330 + 56 386 8 + 8 16 + 8 24 + 8 32 + 8 40 + 8 48 + 8 56	Alan - são 6, tem 6 estojos, aí eu fiquei com dúvida se **tenho que fazer 6 mais 8 até chegar no resultado** Entrevistadora - seis mais oito? Alan - sim, que aí são 6 estojos, e eu tava calculando que era os estojos mais as canetas Entrevistadora - **por que tu tah fazendo 6+8?** Alan - **por causa do número de estojos e do número das canetas, aí eu faço seis vezes isso** Entrevistadora - Aí tu tah dizendo que vai fazer 6 vezes isso, mas **fazer 6 vezes isso é a mesma coisa que 6 mais isso**? Alan - eu… **se eu fizesse o seis, seis vezes com o oito seria seis vezes, aí nessa aqui seria… na outra eu fiz dez vezes**

Fonte: dados da pesquisa.

Rute produziu a idiossincrasia de não levar em consideração na contagem os estojos ou as embalagens que “estava usando”, por dizer que já era o número, realizando, assim, o cálculo de (n-1) estojos em (n-1) embalagens. A argumentação da aluna não foi suficiente, ao afirmar que era mais fácil de fazer as contas. Iniciou contando o número de canetas nos estojos azuis, e contando o número de estojos. Fez o mesmo procedimento para os estojos amarelos, e anotou. O processo de multiplicar a quantidade de canetas por estojo, adicionar esta quantidade e multiplicar pelo número de embalagens foi respeitado, salvo o teorema em ação falso na contagem dos objetos, que levou o processo a ser idiossincrático. Rute chega a iniciar um processo válido, no entanto, erra por não contar os estojos que possuem canetas em sua mão. Sua meta está bem definida, mas as regras de ação não permitem que produza um resultado satisfatório em seu processo. Enquanto Enzo, anteriormente, contou apenas as canetas que pode manipular, Rute não leva em conta o que manipula. Diferentemente de Rute, Alan (10 anos, 6º ano) não leva em consideração todas as grandezas envolvidas no problema (VERGNAUD, 2009).

No caso de Alan (10 anos, 6º ano), o estudante não leva em consideração a quantidade de embalagens, calculando apenas o número de canetas nos estojos. Descrevemos o processo no qual percebemos que ele multiplica repetidamente pelo número de estojos o primeiro termo, mas não pelas embalagens, as quais são suprimidas no segundo termo. Ele afirma que deve usar multiplicações e adições, no entanto, as estratégias utilizadas não dão conta da resolução da situação.

Por muito tempo compreender o problema foi relegado a questões de entendimento da língua materna, mas existe a necessidade de resolver situações variadas, para ampliar os esquemas que se referem àquele tipo de situação, e assim servir de suporte para próximas resoluções. Não se trata, portanto, de um problema de compreensão linguística, mas também da falta de experiência com a resolução de situações envolvendo aquele campo conceitual (VERGNAUD, 2009). A respeito da fala de Alan indicando que iria somar o seis oito vezes, nos deu pistas para compreender a forma de explicar o seis vezes oito, realizada por boa parte dos estudantes da pesquisa. Ainda que o processo criado por Alan não tenha sido de todo coerente com a questão, o sujeito apresenta habilidades superiores na resolução deste problema, em relação aos do Nível 1A.

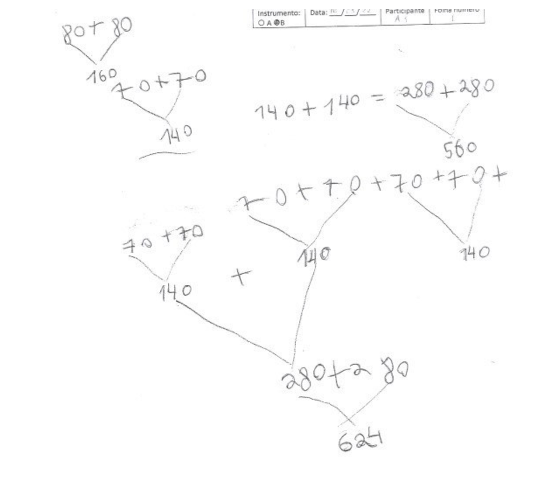
9.4.2 Nível 2 - Descritivo – operacional

Os sujeitos que já compreendem o problema e conseguem expressar modos coerentes de resolução do mesmo, independente do caminho escolhido, dizemos que produzem processos coerentes, e fazem parte do Nível 2. Neste nível estão os participantes do estudo que obtém êxito na tarefa, mas ainda não são capazes de produzir uma expressão numérica, seja ela com recursos aditivos ou multiplicativos, que sintetize a situação apresentada.

9.4.2.1 Nível 2A

Aqui estão classificados os sujeitos que apresentam êxito na solução da tarefa proposta, mas os processos que adotam para esta resolução são sustentados na adição, com o procedimento de contagem.

Figura 96 – Excerto do protocolo e da entrevista de Caio

	Caio – **140 mais 140 deu 200, tirando 80, deu 80 mais 80. 80, 90, 100, 130, 140, 160**. Da onde veio o 80? Dos dois 80, 200 em cima de 200, e os 80, 500, 560. Entrevistadora – Precisa fazer mais alguma coisa aí? Caio – Não, aqui tá feito. [...] Aqui eu já posso fechar. **Peraí, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16. 16.** Coloca mais duas aí (caixas) Entrevistadora – (empilhando as caixas). Caio – 32 e 32, 32 mais 16 mais 16, puxa aqui, 32 mais... 64 aqui então. Vai dar 624. Deu. Entrevistadora – muito obrigada.

Fonte: dados da pesquisa.

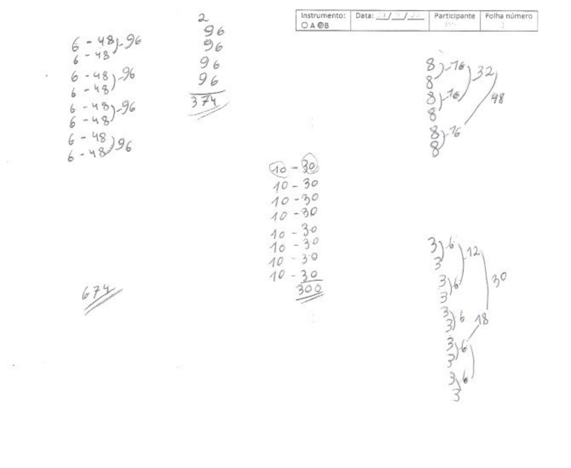
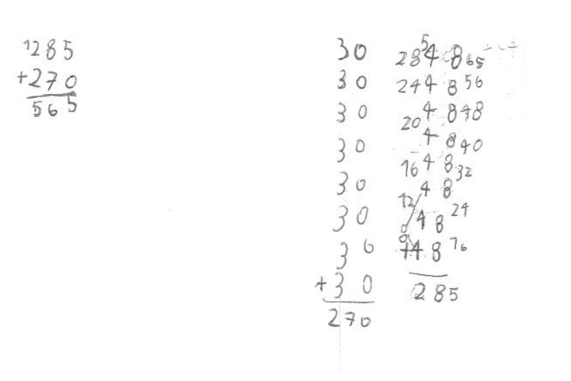
O estudante Caio (12 anos, 6º ano) elaborou diagramas para a resolução da questão, resolvendo-a por um processo que usa como variável a quantidade de canetas de cada cor. Para cada passo dado, o estudante une por meio de traços as quantidades, que de forma cumulativa vai adicionando. O procedimento que Caio utilizou para calcular foi de contagem, e decomposição.

Caio decompõe o 78 em 70 + 8, e faz adição de parcelas iguais, organizando-as em diagramas. A adição por contagem, batendo na mesa ou contando alto na entrevista aponta para a construção de processos iniciais que levam à adição. Esta batida na mesa serve como o gesto de contagem de palitos, mas o registro não se encontra na folha de respostas. Ao analisar o desempenho e estratégias de crianças a respeito de problemas multiplicativos, Magina, Santos e Merlini (2014) percebem que muitas das crianças desenham palitinhos ao invés de escrever os números. No caso de Caio, a representação não é escrita, mas gestual. A contagem é um procedimento válido para a resolução do problema, no entanto, exige raciocínios menos sofisticados que os dos próximos níveis.

9.4.2.2 Nível 2B

Neste subnível encontramos sujeitos que escrevem em conta armada suas adições, outros que fazem diagramas, e ainda alguns que além das adições, estão em um processo de escrita das multiplicações com o sinal de multiplicação, mas ainda sem o algoritmo euclidiano.

Figura 97 – Excerto do protocolo e da entrevista de Lino e Davi

	Lino – **6 é os estojos e 48 é o que tem dentro dos 6 estojos, são as 8 canetas que tem dentro dos 6 estojos.** Entrevistadora – Entendi. Lino - E ali eu só fiz ali e somei. Entrevistadora - Quantas vezes tu fez? Lino – 8 Entrevistadora - Por que 8? Lino - É o que tem dentro da caixa grande
	Davi - Pera… 8+8, aqui dá… 48, 8+8 dá 48 Entrevistadora - 8+8 dá quanto? Davi - 8+8 dá 48, se eu juntar todos esses 8 Entrevistadora - Ah… 8x8? Davi - Mais Entrevistadora - Mais? 8+8? Davi - Aham, dá 16 Davi - E vai seguindo Davi – 8 vezes **Davi - Pra dar 48, tipo, a conta que eu fiz, só que eu tenho seguido 6, 48 dividido, não, vezes, 6.**

Fonte: dados da pesquisa.

Nunes e Bryant (1997) explicam que na adição se opera com classes de grandezas de parte e todo, mas na multiplicação há um novo sentido para o número: o sentido de replicar. Quando se pensa que em um estojo azul contém oito canetas, e se pergunta quantas canetas há em seis estojos azuis, o número seis passa a ser a quantidade de vezes que o oito deve ser replicado. Este seis é chamado de escalar, um número sem grandeza. A dificuldade de lidar com esse sentido pode levar os estudantes a se firmarem na adição de parcelas iguais para a multiplicação, como Caio e Lino.

Com registro diferente de Caio, o estudante Lino (14 anos, 8º ano) dispõe as operações na forma de conta armada, e vai adicionando parcelas duas a duas, de modo a facilitar seus cálculos, trabalhando com o dobro. Salvo o caso do “oito vezes trinta”, o procedimento foi bastante coerente e produziu bons resultados. Lino desenvolve todos os raciocínios corretamente, mas comete um erro ao calcular 8 vezes 30 e resultar 300. Em um primeiro momento de análise pensamos que Lino tivesse repetido o modelo da primeira parte, e ao invés de somar oito parcelas de 30, ter somado dez, mas ao recorrer às gravações e contar que são oito parcelas de 30, reparamos que o erro foi no cálculo, e não no processo.

O sujeito é capaz de organizar a situação e agrupar estojos e caixas. Entretanto, na hora de realizar o cálculo notamos que ele se vale sempre da adição e em casos nos quais a multiplicação poderia ser empregada há uso da adição de parcelas. Tal procedimento utiliza o invariante de parte todo da adição, no entanto a construção do pensamento multiplicativo demanda a ruptura que gera a ideia de um número cujo sentido é de uma relação escalar entre duas grandezas.

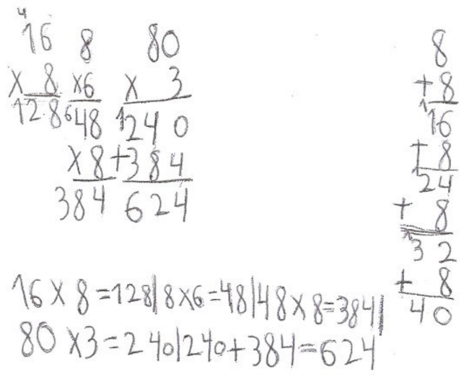
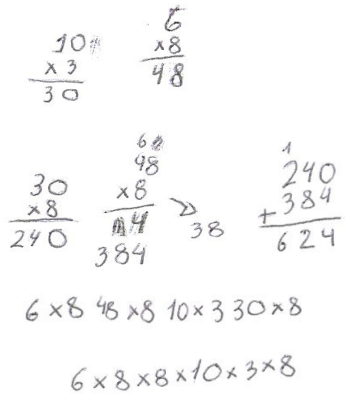
Assim, notamos que a hesitação de Lino em entrar no campo multiplicativo evidencia uma lacuna dentro dos processos que emprega, como uma transição do pensamento aditivo para o multiplicativo. A multiplicação é também a adição de parcelas iguais, mas não se reduz a esse processo, o qual pode levar estudantes a inferir que a multiplicação sempre aumenta o produto, o que não é verdadeiro. Existe, portanto, uma necessidade de trabalhar situações que provoquem rupturas entre o pensamento aditivo e multiplicativo (MAGINA, SANTOS, MERLINI, 2014).

Lino escreve um número abaixo do outro, não indicando a operação a ser realizada. Em Davi é possível ver um avanço interessante no sentido da escrita, ao inserir os sinais gráficos. O uso da escrita aditiva para todos os processos aponta para uma exposição do pensamento predicativo, e mostra que o estudante compreendeu o processo de multiplicação como adição de parcelas iguais. Pela situação de lidar com números inteiros, isso não é um problema, daí a necessidade da variabilidade de situações e de dados numéricos, para que haja criação dos esquemas necessários a pensar a multiplicação para além da soma de parcelas iguais, e adentrar no Campo Conceitual Multiplicativo.

9.4.2.3 Nível 2C

Aqui estão os participantes do estudo que têm êxito na resolução da tarefa, não constroem ainda uma expressão que sintetize a situação, mas apóiam-se no campo multiplicativo e utilizam o algoritmo euclidiano da multiplicação.

Figura 98 – Excerto do protocolo e da entrevista de Eder e Jane

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Eder - 48 estojos azuis, que têm 8 canetas dentro, então vezes 8, então, 8 vezes 8, 64, 8 vezes o 4… (contando em voz baixa) deu 32, 32 mais 6 dá 38, então cada caixona dessas têm 6, cada caixinha dessas… cada caixona têm 48 estojos azuis
Eder - Vai ter 384 canetas dos estojos azuis.
Eder - Agora vamos somar os dos amarelos. Cada caixa vem 10 amarelos, 10 vezes 8, 80.
Eder - Tá, então quanto, então, dentro desse tem 3 canetas, então 80x3, vou fazer aqui, 80x3, aqui dá, aqui dá 0, aqui dá 24 (escrevendo) tá, agora vamo somar, 240+384, aqui dá 4… então cada, em uma caixona vêm 624 canetas.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Jane - Tô pensando em fazer conta de vezes
Jane – seis (inaudível)
Entrevistadora - Seis vezes oito, o que que é o seis e o que que é o 8?
Jane - Seis é a quantidade de estojos e oito é as canetas (calculando as multiplicações e contando nos dedos por baixo da mesa).
[...]
Jane – Quantas caixinhas são?
Entrevistadora – São 8 (mostrando).</td>
</tr>
</table>

Fonte: dados da pesquisa.

Eder (11 anos, 6º ano) resolve o problema misto registrando as adições e as multiplicações separadamente, como passos da resolução da situação. Desenvolve os cálculos com o uso do algoritmo clássico da multiplicação euclidiana e a adição. O estudante tenta escrever a expressão numérica, mas ao invés de usar os sinais de associação, Eder utiliza barras, como separador de passos cumulativos. A horizontalização da conta armada é um passo comum que os sujeitos usaram na hora da tentativa de escrita da expressão. No caso de Jane (11 anos, 6º ano), inicialmente realiza o procedimento da horizontalização, utilizando espaço entre os cálculos, e após, escreve em uma única expressão, que não é coerente com o problema. Neste caso, há uma transição, um estádio intermediário no qual o sujeito já ascende uma representação, mas usando símbolos e não signos. Como no caso de Nico, que usa o sinal de igualdade, Eder usa barras, vai construindo símbolos próprios, descolando outros signos matemáticos de suas funções e recriando-os com outra funcionalidade.

Jane é capaz de resolver a situação, empregar diversos recursos do campo multiplicativo, entretanto no momento de representar a síntese das suas operações, escreve cada passo separado por um sinal de multiplicação, ignorando as adições, os sinais de associação e as regras de prevalência necessárias à escrita da expressão numérica que traduz a situação. Para este caso, Bender (1962) afirma que como os sinais de associação são uma convenção matemática, escrever a expressão na ordem em que é calculada poderia ser uma solução. O que vemos em Jane não é um erro sobre os sinais de associação, mas o uso de diversas expressões separadas e posteriormente a troca de um sinal de adição pelo de multiplicação.

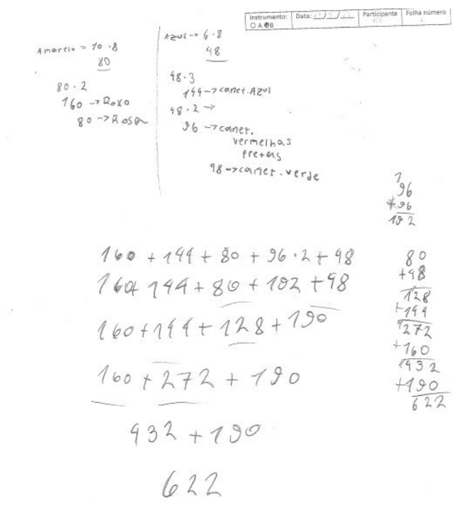
9.4.3 Nível 3 - Expressão Numérica – imbricação

Ainda que as estruturas multiplicativas dependam parcialmente de estruturas aditivas, elas possuem organização intrínseca que não é redutível a aspectos aditivos. Enquanto na adição os invariantes operatórios dão conta de operar na mesma classe, na multiplicação se trabalha com classes e subclasses, agrupamentos de agrupamentos, comparações entre diferentes grandezas e formação de novas grandezas, como estojos por caixa, por exemplo (VERGNAUD, 1985). Para além das estratégias pertinentes em multiplicação, os sujeitos categorizados no Nível 3 escrevem uma expressão numérica correta para o problema, e conseguem descrever de forma encadeada as operações que representam os passos da situação, que une processos aditivos e multiplicativos em um problema misto.

9.4.3.1 Nível 3A

Neste subnível os sujeitos escrevem uma expressão sintetizando o problema com uso de representações majoritariamente do campo aditivo, respeitando as regras de prevalência, sem o uso de sinais de associação, como o caso de Mara (13 anos, 8º ano).

Figura 99 – Excerto do protocolo e da entrevista de Mara



Mara - Aqui? Eu fiz o número de estojos vezes o número de caixas

Mara - Isso, então em cada 80 estojos têm 2 roxas

Mara - E aí eu fiz a conta de multiplicação e deu 160

Mara - Que daí são 160 canetas roxas e 80 rosas, já que é só 1 em cada

Entrevistadora - Tá! E aí nesse aqui…

Mara - No azul eu fiz a mesma coisa só muda os números

Entrevistadora - Tá, e quanto que deu?

Mara - Deu 6 estojos azuis em cada caixa roxa que daí as conta de vezes dariam (pensando, murmurando números) 48?

Mara - São 160 roxas, 80 rosas, ahn…144 azuis, 96 vermelhas e pretas e 48 verdes

Entrevistadora - Como é que tu fez a conta?

Mara - Eu…botei o número de cada…a quantidade de cada caneta e em vez de botar 2x96, eu botei 96x2 que tem…

Mara - …a mesma quantidade de vermelhas e pretas

Mara - Aí eu fiz primeiro a conta de multiplicação e depois eu fui somando…somando devagar assim, dos números menores pros maiores…ou, nessa ordem, não sei se é assim que faz

Fonte: dados da pesquisa.

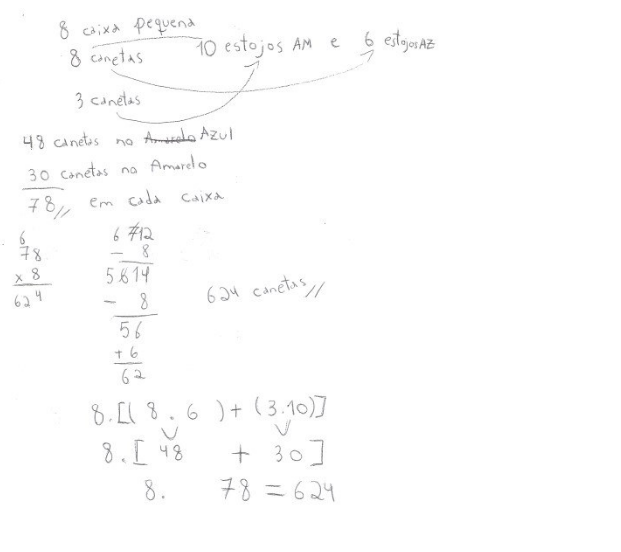
Notamos que há o emprego majoritário de operações aditivas nas representações, sendo os cálculos de multiplicação efetuados mentalmente, principalmente por se tratar de dobros, (KAMII, 2017). É possível supor que a participante empregue operações de proporcionalidade, entretanto, a representação ainda não expressa essa habilidade. A riqueza dessa representação está, dentre outros passos, uma minúcia na escrita do termo 96.2, no qual a participante percebe que o número de canetas vermelhas e pretas é o mesmo, dobrando a parcela. Além do cálculo proporcional para cada cor de caneta, a participante descreve uma comparação multiplicativa, juntando na mesma classe duas grandezas de mesmo valor.

A estudante escreve uma expressão numérica coerente para o problema, resolve-a com os processos corretos, se equivocando ao somar as parcelas que representavam o número de canetas de cada cor. Neste caso há um predomínio das representações do campo aditivo, mas em um único momento já aparece a introdução da multiplicação. Para Vergnaud (1985), encontrar sem erro a operação necessária para a resolução de uma tarefa exige competências distintas, cuja apropriação pelo aluno demanda um longo período, assim, embora a multiplicação não seja um recurso generalizado na representação de Mara, como no caso do sujeito do nível seguinte, evidencia a continuidade dos processos de construção da representação de um problema misto na forma de expressão numérica.

9.4.3.2 Nível 3B

A escrita de um problema misto na forma de uma expressão numérica respeitando sinais de associação e regras de prevalência representa este subnível. O uso de parênteses, colchetes e chaves auxilia na separação hierárquica das operações, dando um sentido de ordenamento. A redação de uma expressão numérica com o uso de tais sinais de associação previne uma ambiguidade na representação de um problema, principalmente se tratando de um problema misto (BENDER, 1962, OTTES, 2016).

Figura 100 – Excerto do protocolo e da entrevista de Olga

	Olga - (Escrevendo). (Tempo extenso de silêncio, OLGA registrando as operações contidas no protocolo) Olga - (Larga o lápis) Entrevistadora - Tu consegue fazer uma conta só, numa linha só, que dê essa… esse raciocínio que tu fez? Olga - Hmm…(toca com o lápis nas setas do protocolo e escreve a expressão numérica).

Fonte: dados da pesquisa.

A maior parte dos sujeitos representou corretamente as adições, como também as multiplicações, mas não chegou a escrever o problema em uma linguagem que resumisse a situação. Compreender que os sentidos atribuídos para os fatores diferem dos sentidos das parcelas exige perceber que a replicação se diferencia de ações entre o todo e as partes. No caso do número de canetas em cada estojo, por exemplo, estamos compondo diferentes partes e formando um todo, mas quando replicamos este número de canetas pela quantidade de estojos, trabalhamos com duas grandezas: canetas e estojos. Representar em uma mesma expressão operações cujos sentidos são múltiplos demanda um refinamento operatório (NUNES; BRYANT, 1996, MAGINA; SANTOS; MERLINI, 2014).

Neste caso, há uma diferenciação do campo aditivo e do campo multiplicativo na escrita do problema, e uma síntese da compreensão do mesmo, de forma imbricada[28], como no caso de Olga (13 anos, 8º ano). As relações escritas por Olga na expressão numérica 8.[(8.6)+(3.10)] respeitam tanto as regras de prevalência quanto comunicam de forma clara qual a ordem de realização das operações por meio dos sinais de associação. A relação de parte todo presente na adição entre os termos contidos nos parênteses pertence ao Campo Conceitual Aditivo, como composição de medidas, já a relação entre as quantidades contidas em cada um dos parênteses se classificam como proporções entre as grandezas presentes na situação (ARRAIS, 2006, TELES, 2008, VERGNAUD, 2009).

A resolução realizada por Olga, sinalizando as prevalências operatórias, indica que a estudante conhece cada etapa da resolução da expressão numérica, não por meio de regras e técnicas a decorar, como diagnosticado por Freitas (2014), mas por representação de uma situação de problema misto. Assim, as propriedades aritméticas postas em ação na resolução da expressão numérica indicam um domínio das classes de situação pertinentes, no Campo Conceitual Aditivo e no Campo Conceitual Multiplicativo, tanto nas regras de prevalência das operações quanto nas relações entre as grandezas contidas no problema misto.

9.5 Considerações

Os estudantes apresentaram, em sua maioria, procedimentos coerentes, ainda que com resultados equivocados. Para os níveis idiossincráticos, encontramos os totalmente idiossincráticos, com fabulação, e os idiossincráticos, os quais consistiram em agrupamentos incorretos e confusão entre as grandezas, ou ainda em processos inventados, mas com algum nível de organização matemática.

O processo descritivo-operacional diz respeito aos processos coerentes cujas representações utilizaram sistemas de significantes diferentes da representação simbólica. Sua subdivisão foi realizada de acordo com as operações e ações utilizadas para a resolução da

[28] “Com o termo “imbricações” caracterizamos um tipo de relação em que os campos conceituais se sobrepõem mutuamente, se articulam e a partir dessa “interconexão dinâmica” são gerados novos significados para os conteúdos matemáticos em foco. Procuramos pensar nas imbricações entre campos conceituais, articulando as dimensões epistemológica, cognitiva e didática. O tratamento de situações nas quais estão envolvidas fortes imbricações exige que os sujeitos naveguem de um campo conceitual para outros e que articulem seus conhecimentos para tratar de maneira pertinente os problemas postos” (TELES, 2008, p.1).

tarefa, dentre a adição com contagem, adição e adição e multiplicação. Os sentidos atribuídos aos números pelos estudantes tiveram repercussão nesta organização.

Os alunos que além de utilizar processos coerentes representaram a situação com expressões numéricas se encontram no nível de expressão numérica, associada à imbricação entre os campos aditivo e multiplicativo, sendo divididos entre os que organizaram sua representação com o uso das regras de prevalência ou com o uso de regras de prevalência e sinais de associação.

Tais movimentações dos elementos da expressão numérica indicam que os estudantes do Nível 3 compreenderam o sentido das operações de adição e multiplicação, as organizando de tal modo que para além dos processos aditivos e multiplicativos, em uma representação envolvendo os dois campos conceituais, de modo que estão imbricados.

Por meio da resolução de um problema misto na forma de uma situação oral, com suporte de material, os estudantes apresentaram diferentes níveis de aprendizagem. As respostas dos sujeitos variaram entre as que inventam estratégias, organizam-se com ideias de multiplicação como adição de parcelas iguais, as que estão em processo de construção de representações simbólicas, com uso inadequado da igualdade, por exemplo, e as que organizam de forma matematicamente correta uma expressão numérica, tanto na escrita quanto na resolução.

A união em uma só representação das diversas operações exige conhecimento sobre as propriedades de prevalência. Considerando 20 dos 25 estudantes representaram corretamente a situação em contas armadas, mas não conseguiu escrever nem resolver a expressão numérica correspondente, sugerimos que atividades com problemas mistos sejam trabalhadas com os estudantes, desde os anos iniciais, a fim de discutir sobre suas estratégias.

9.6 Referências

ARRAIS, U. B**. Expressões Aritméticas: Crenças, Concepções e Competências no entendimento do professor polivalente**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11095. Acesso em: 5 nov. 2020.

BARBOSA, G. S.; MAGINA, S. M. P. Construindo Significado para expressões numéricas multiplicativas a partir do jogo de mensagem. **Zetetiké**, Campinas, v. 22, n. 1, p. 9-30, 2014. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646576. Acesso em: 28 out. 2020.

BENDER, M. L. Order of operations in elementary arithmetic. **The arithmetic teacher,** Cleveland, v. 9, n. 5, 1962. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/41184625. Acesso em: 5 mai. 2020.

DELVAL, J. **Introdução à Prática do Método Clínico**: descobrindo o pensamento das crianças. São Paulo: Artmed, 2002.

FREITAS, H. S. **Expressões numéricas e suas abordagens em livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental adotados por uma escola pública de Cuiabá-MT.** 2014. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2014. Disponível em: https://ri.ufmt.br/handle/1/1916. Acesso em: 10 mai. 2020.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2002.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. São Paulo: Atlas, 2008.

KAMII, C. **Crianças pequenas continuam reinventando a aritmética**: séries iniciais - implicações da teoria de Piaget. São Paulo: Grupo A, 2017. E-book. ISBN 9788536318349. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788536318349/. Acesso em: 13 nov. 2022.

MAGINA, S. M. P.; MERLINI, V. L.; SANTOS, A. A estrutura multiplicativa à luz da Teoria dos Campos Conceituais: uma visão com foco na aprendizagem. *In*: CASTRO FILHO; J. A.; BARRETO, M. C.; BARGUIL, P. M.; MAIA, D. L.; PINHEIRO, J. L. **Matemática, cultura e tecnologia: perspectivas internacionais**. Curitiba: Editora CRV, 2016, p.66-82.

MAGINA, S. M. P.; SANTOS, A., MERLINI, V. L. O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciência e Educação**, Bauru, v. 20, n. 2, p. 517-533, 2014. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1516-73132014000200016. Acesso em: 10 jan. 2023.

MIRANDA, C. A. **Situações-problema que envolvem o conceito de função a-fim:** uma análise à luz da Teoria dos Campos Conceituais. 2019. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação) - Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2019. Disponível em: https://tede.unioeste.br/handle/tede/4671. Acesso em: 9 dez. 2022.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças Fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artmed, 1997.

OTTES, A. B. **Expressão numérica: a hierarquia das quatro operações matemáticas**. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2016. Disponível em: https://repositorio.ufsm.br/handle/1/12435. Acesso em: 21 ago. 2020.

PIAGET, J. **A construção do real na criança**. São Paulo: Editora Ática, 2008

TELES, R. A. M. . A Influência de Imbricações entre Campos Conceituais na Resolução de situações envolvendo fórmulas de área de figuras geométricas planas. *In*: Reunião Anual da Anped, 31., 2008, Caxambú - MG. **Anais [...]**. Caxambú: ANPED, 2008. p. 1-25. Disponível em: https://www.anped.org.br/sites/default/files/gt19-4277-int.pdf. Acesso em: 10 ago. 2020.

TRIVILIN, L. R.; RIBEIRO, A. J. Conhecimento Matemático para o Ensino de Diferentes Significados do Sinal de Igualdade: um estudo desenvolvido com professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática [online], v. 29, n. 51, p. 38-59, 2015. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a03. Acesso em: 21 nov. 2022.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar**. Curitiba: Editora da UFPR, 2009a.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar**. Curitiba: Editora da UFPR, 2009a.

VERGNAUD, G. Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la répresentation. **Psychologie Française**, v. 30, p. 245-252, 1985. Traduzido por Maria Lucia Faria Moro, com revisão de Luca Rischbieter e Maria Tereza Carneiro Soares, disponível em https://vergnaudbrasil.com/wp-content/uploads/2021/03/2.1-CONCEITOS-E-ESQUEMAS-EM-UMA-TEORIA-OPERATORIA-DA-REPRESENTACAO.pdf, acessado em 9 de dezembro de 2022.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didáctique des Mathématiques**, v. 10, n. 2, p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. O que é aprender? *In:* BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (Org.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais.** Curitiba: Editora CRV, 2009b. p. 13-36.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. In NASSER, L. (Ed.) *In:* Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro, 1., 1993, Rio de Janeiro. **Anais [...].** Rio de Janeiro, 1993. p. 1-26.

10 CONCLUSÃO

Para pesquisar sobre expressões numéricas, nos questionamos sobre o que a Ciência aponta e o que os livros didáticos apresentam sobre o assunto. De posse destes conhecimentos, produzimos uma investigação sobre como estudantes trabalham com expressões numéricas. Assim, esta pesquisa foi composta por três estudos: um levantamento realizado em 54 textos acadêmicos, cujos temas abordam ou perpassam as expressões numéricas, um estudo sobre os problemas matemáticos de expressões numéricas encontrados em sete coleções de livros didáticos do 6º ano, e um estudo com vinte e cinco alunos de 6º e 8ºs anos sobre como é a mobilização de estratégias e conhecimentos para a escrita e resolução de uma expressão numérica.

Apresentamos inicialmente os resultados obtidos no levantamento teórico e na pesquisa sobre as situações de expressões numéricas nos livros didáticos, os quais nos permitiram organizar um instrumento que buscasse de uma forma mais específica atender o objetivo da pesquisa. Os textos científicos brasileiros estudados na primeira parte desta pesquisa se subdividiram conforme a ação das pesquisas relatadas: em estudos teóricos sobre expressões numéricas, intervenções em sala de aula com o tema expressões numéricas e estudos sobre outros temas nos quais as expressões numéricas perpassavam suas argumentações.

Como resultados encontramos que as expressões numéricas surgem da necessidade de comunicar ideias, de forma clara, simples e sem ambiguidades, com sinais de associação usados como uma convenção. A hierarquia das operações, na escrita e resolução de expressões numéricas é ao mesmo tempo um conhecimento lógico, devido ao sentido dos números e operações presentes na expressão, quanto um conhecimento cultural/social, em virtude dos sinais de associação e de sua escrita.

Os estudos que compuseram esta pesquisa, afirmam que as dificuldades relacionadas às expressões numéricas se estendem no percurso acadêmico, em virtude da ordem das operações, que, de modo geral, são decoradas pelo aluno, ao invés de compreender o mecanismo de solução. Embora o domínio das regras de prioridade dos sinais de associação e da ordem na realização dos cálculos, e a destreza do aluno em operar com os números sejam fatores relevantes para o êxito acadêmico, as regras precisam fazer sentido, de nada adiantando decorá-las e resolver as expressões numéricas de forma mecânica.

A respeito da escrita da expressão numérica, os trabalhos indicam que os sujeitos têm dificuldades tanto em realizar a conversão das expressões numéricas para a língua materna, quanto de interpretar dados e descobrir quais operações dão conta da situação apresentada, preferindo problemas convencionais e verbais e afirmando ser difícil identificar na representação dos enunciados a expressão numérica na forma simbólica. Constatou-se também que as dificuldades de compreensão das expressões numéricas não ocorrem após a elucidação passo a passo realizada pelas professoras.

Os trabalhos estudados no levantamento concluíram que as expressões numéricas são apresentadas nos livros didáticos como uma listagem de regras sem justificativa para a ordem de prevalência, priorizando a técnica. Sua introdução é realizada através de resolução de problemas semelhantes aos exercícios de aplicação, e os enunciados indicam os algoritmos a serem utilizados.

Os trabalhos teóricos sobre expressões numéricas apresentam um ensino algoritmizado, mecanizado, e sem justificativas matemáticas, e sugerem que se organizem situações que discutam os significados das propriedades aritméticas, da hierarquia das operações, das regras de prevalência e do uso de sinais de associação. Reforçam a necessidade da generalização de padrões para a compreensão das regras, bem como da produção de sentido nas operações matemáticas.

Os textos sugerem que a partir de situações sejam desenvolvidas expressões numéricas cada vez mais complexas, com a generalização de situações semelhantes, chegando ao uso de sinais de associação por agrupamento de conjuntos. Que se justifique a hierarquia das quatro operações por meio do sentido de número, e de casos com contra exemplos da aplicação das regras, que se trabalhe com propriedades aritméticas para justificar as regras, em forma de atividades, para os estudantes construírem o raciocínio estabelecendo conexões de um conteúdo a outro. Uma das propostas para trabalhar as dificuldades de representação simbólica de uma expressão numérica é a oralidade da linguagem matemática, que necessita do suporte da língua materna, cuja verbalização deve ocorrer pela leitura interpretada, ao invés da recorrente leitura soletrada.

Os estudos sugerem que as regras de prevalência sejam trabalhadas por meio do enfrentamento de situações, e que a escrita das expressões numéricas provenha de problemas, para que assim tanto a ordem das operações quanto os sinais de associação tenham sentido para o estudante. Os textos nos quais as expressões numéricas serviram como suporte para outras pesquisas trabalham a ideia de expressão matemática de problemas, cujas regras são construídas mediante os significados dos números e das operações nesses problemas, indicando, assim, a necessidade de trabalhar expressões contextualizadas em situações com as quais seus elementos e regras possam ser interpretados e seu sentido construído.

Das teses, dissertações e artigos estudados no levantamento, encontramos que o principal erro relacionado às expressões numéricas é quanto à hierarquia das quatro operações, não operando com a ordem de prevalência e os sinais de associação de forma adequada. A apresentação em livros didáticos e outros materiais é descontextualizada, trabalhando as expressões numéricas como regras e técnicas a serem memorizadas e aplicadas. As sugestões abordadas são de maior contextualização, com situações que fomentem nos alunos indagações sobre os porquês do uso de tais regras. Dentre as propostas, encontramos o uso de diferentes metodologias e suportes, como resolução de problemas, história em quadrinhos, desafios e uso de tecnologia. Os textos também sugerem que os sentidos das operações e dos números sejam trabalhados, para dar significado à representação de um problema como expressão numérica.

Entendendo como os textos científicos brasileiros compreendem as expressões numéricas, buscamos uma visão mais próxima do ensino na Educação Básica. Para isso, nossa ação foi descrever como as situações envolvendo expressões numéricas são retratadas nos livros didáticos do 6º ano do Ensino Fundamental, a partir do enfoque da Teoria dos Campos Conceituais.

As coleções de livros didáticos estudadas apresentaram situações e exemplos que deveriam ser modelados com a representação de expressões numéricas. Os livros didáticos apresentam uma variação na abordagem quanto às classes e eixos dos Campos Conceituais Aditivo e Multiplicativo, e ainda que a maioria cumpra o itinerário: explicação com exemplo, exercícios de calcular para depois inserir os problemas, a apresentação das expressões numéricas se dá também no corpo do capítulo, atrelada a situações sobre as quatro operações.

Ao direcionarmos a análise das questões de expressões numéricas para as situações, constatamos que as estruturas apresentadas foram dos Campos Conceituais Multiplicativo e Aditivo, e em problemas mistos, identificando mais situações simples do que complexas. Em relação às operações, apresentam maior quantidade de situações envolvendo a multiplicação, seguida da subtração, divisão e adição.

A terceira parte do estudo consistiu na produção, aplicação e análise de uma situação contemplando um problema misto, mediante Método Clínico. Os sujeitos da pesquisa foram estudantes do 6º e 8ºs anos de escolas públicas de Pelotas/RS. Analisamos como os sujeitos escreveram e resolveram expressões numéricas no que concerne à ordem das operações e utilização dos sinais de associação, aos processos utilizados e às representações. Por fim, classificamos as resoluções conforme as operações utilizadas e sua representação.

Em virtude da maior dificuldade apontada pelo levantamento ser a ordem das operações, iniciamos a terceira parte do estudo buscando verificar como estudantes estruturam a ordem das operações ao resolver uma expressão numérica na forma simbólica e como problema misto. Em virtude dos textos trazerem como maior erro a resolução de expressões numéricas descontextualizadas, nesta parte da pesquisa propusemos como tarefa a resolução de uma expressão numérica na forma simbólica antes do desenvolvimento do problema misto contextualizado.

Os resultados apontaram que para as operações descontextualizadas, os estudantes erraram tanto na ordem de prevalência quanto nos cálculos das operações, e que os estudantes tiveram uma diminuição de erros significativa na representação da ordem de prevalência nas questões contextualizadas, bem como no cálculo das operações realizadas. Existe, portanto, a necessidade de dar sentido aos contextos dos problemas, para que não ocorra simplesmente a memorização de regras.

Os erros cometidos na resolução da expressão numérica em sua forma simbólica (descontextualizada) foram a respeito da ordem de prevalência, tanto por não levar em consideração os sinais de associação, quanto aos sentidos das operações e suas prioridades. A ordenação das operações de duas em duas e a resolução da esquerda para a direita fizeram parte desses equívocos.

As escritas das expressões numéricas em situações ajudam a construir o pensamento envolvendo as regras de prevalência, pois as mesmas auxiliam na compreensão do sentido das operações, de forma que diante da organização da situação na expressão simbólica, há o dar-se conta de que o sentido da operação, e dos números envolvidos na mesma, precisam seguir regras nas quais as operações entre as grandezas sejam possíveis. Para que a operação na situação faça sentido, para as grandezas apresentadas no problema, tanto os sinais de associação na forma de separadores de operação como as regras de prevalência devem ser compreendidos. Assim como a organização das informações no diagrama possibilita perceber a sistematização da situação, de forma a auxiliar no processo de resolução, sendo possível uma análise separada de cada etapa.

Considerando que os estudantes organizam de forma diferenciada a resolução de uma tarefa na forma simbólica e na forma de situação contextualizada, e que os sentidos de número e operações dá sentido aos elementos de uma expressão numérica, analisamos os protocolos e transcrições das respostas dos estudantes quanto às estratégias, desenhando os diagramas, descrevemos as expressões resultantes de seus procedimentos representados e procuramos detalhar os processos organizados por estudantes do Ensino Fundamental ao resolver uma situação de problema misto, com enfoque nas expressões numéricas.

Organizamos os processos dos estudantes segundo os diagramas, expressões numéricas resultantes e eixos e classes dos Campos Conceituais. Os sujeitos resolveram o problema de diversas formas, utilizando estratégias que puseram em ação diferentes conhecimentos. A análise dos processos encontrados na resolução do problema nos permitiu perceber uma variedade de caminhos escolhidos pelos estudantes, inclusive de variedade de eixos no Campo Conceitual Multiplicativo, em proporção simples e proporção múltipla.

Os estudantes apresentaram, em sua maioria, procedimentos coerentes, ainda que com resultados equivocados. A diversidade de procedimentos apresentados exprime algumas das diversas formas de raciocinar e de estabelecer relações entre os dados do problema pelos estudantes. Embora os processos utilizados fossem pertinentes, os erros de cálculo foram frequentes, o que leva a crer que os jovens compreendem o que precisam fazer e como precisam agir. Estas habilidades são mais poderosas que o trabalho com a tabuada, que é necessário, mas não o foco da aprendizagem matemática.

As expressões numéricas que traduziam o problema das caixas foram compostas de números, operações e sinais de associação. Dentre as estratégias cujas expressões numéricas traduziram o problema, puderam ser observadas as que necessariamente utilizaram sinais de associação, as que em virtude de sua organização utilizaram apenas a prevalência operatória, e ainda suas versões comutativas, associativas e distributivas. Vários caminhos elencados pelos sujeitos foram potencialmente corretos, e a estruturação das operações e das relações entre as grandezas renderam uma diversidade de processos, os quais puderam ser representados por diferentes sistemas de significantes. Diante disso, buscamos identificar como estudantes do 6º ao 8º ano do Ensino Fundamental representam um problema misto mediante uma situação dada, a fim de compreender as imbricações entre os campos conceituais aditivo e multiplicativo.

A respeito das representações produzidas pelos estudantes na resolução da situação de problema misto, o homomorfismo entre a situação e a representação ocorreu de forma mais abrangente com as contas armadas, necessitando de uma habilidade de síntese maior para escrever a expressão numérica adequada ao problema. A maior parte dos estudantes representou com mais de um sistema de significante a situação, buscando descrever seu pensamento e calcular por meio da conta armada, e escrevendo em uma linha seus cálculos.

Percebemos uma possibilidade de atraso da representação do problema na forma de expressão numérica, em relação à ação operatória, com mais adolescentes respondendo de forma correta e representando com sistemas de significantes diferentes da expressão numérica, apresentando uma forma operatória do conhecimento e ainda não predicativa em relação a este sistema de significantes. Outro fator importante é que as estruturas operatórias, especialmente a de estrutura de classe, parece ter influência na organização das representações e por isso, diretamente, na qualidade dessas representações, e o cálculo mental implícito parece ser um dado que corrobora essa ideia.

A maior parte dos estudantes criou processos coerentes, os quais indicaram conhecimento do sentido das operações, bem como da ordem operatória. No entanto, as representações na forma de expressão numérica não corroboraram com o domínio apresentado pelos estudantes nas resoluções nas quais os mesmos utilizaram outros sistemas de significantes. Aqueles estudantes que representaram corretamente o problema como expressão numérica, e o solucionaram, também obtiveram sucesso na expressão numérica simbólica, apresentando conhecimento do sentido de número e das operações nos campos conceituais trabalhados, com imbricação entre o Campo Conceitual Aditivo e Multiplicativo.

De posse dos ordenamentos, procedimentos e representações utilizadas pelos estudantes na resolução da situação, procuramos analisar como os elementos de uma expressão numérica se movimentam na escrita e na resolução de um problema misto, por estudantes do Ensino Fundamental, mediante Método Clínico Piagetiano. Organizamos as respostas dadas por meio dos protocolos, transcrição das entrevistas e nossas anotações, e ordenamos em níveis conforme a coerência, as operações e as representações dos estudantes em relação ao problema misto.

Dividimos os níveis em idiossincrático, descritivo-operacional e expressões numéricas – imbricação. No primeiro nível registramos os estudantes cuja resposta era de fabulação ou com idiossincrasia. Para o segundo nível os estudantes que utilizaram processos coerentes, mas cujas representações não chegaram ao nível simbólico de expressão numérica. Por último, as expressões numéricas, tanto com o uso somente das regras de prevalência quanto as que organizaram sua representação com sinais de associação.

Embora os estudantes do nível descritivo-operacional tenham entendido o que o problema pedia e resolvido de forma coerente, sua organização não reuniu em uma só representação todos os elementos que constituíam o problema, assim, as regras de prevalência não necessariamente foram levadas em conta como estrutura de uma expressão numérica.

As movimentações dos elementos da expressão numérica, tanto no sentido da escrita do problema quanto em sua resolução, indicam que os estudantes do terceiro nível compreenderam o sentido das operações de adição e multiplicação, as organizando de tal modo que para além dos processos aditivos e multiplicativos, haja uma imbricação entre os Campos Conceituais Aditivo e Multiplicativo.

Assim, ao analisar as estratégias e processos de pensamento de estudantes de 6º ano e 8º ano em uma situação que pode ser representadas por expressões numéricas, por meio do Método Clínico, a fim de compreender como pode se dar a imbricação entre os Campos Conceituais Aditivo e Multiplicativo, podemos dizer que as expressões numéricas, como imbricações dos campos conceituais aditivo e multiplicativo, são compreendidas por estudantes de Ensino Fundamental quando suas situações são representadas em linguagem simbólica e solucionadas nos diferentes significados que esses campos conceituais contemplam, e assim tanto as relações de ordem quanto de operacionalização são melhor compreendidas pelos estudantes.

Como este estudo ocorre em um período pós-pandêmico, no qual as adolescentes do 6º ano estudaram até o terceiro ano presencialmente e voltaram para a escola já no 6º ano, e analogamente os jovens do 8º ano estudaram até o quinto ano presencialmente e retornaram no 8º ano para o ensino presencial, é interessante ter um vislumbre para a docência ao ver os sujeitos descreverem seus processos de pensamento com diversidade de sistemas de significantes, escreverem expressões numéricas e criarem caminhos que permitam solucionar um problema.

A união em uma só representação das diversas operações exige conhecimento sobre as propriedades de prevalência. Considerando que parte importante dos estudantes representou corretamente a situação em contas armadas, mas não conseguiu escrever nem resolver a expressão numérica correspondente, sugerimos que atividades com problemas mistos sejam trabalhadas com os estudantes, a fim de discutir sobre suas estratégias, e que novas pesquisas envolvendo outras classes de problemas mistos possam ser realizadas, para compreendermos mais profundamente as relações de imbricação entre os campos conceituais delas constituintes.

As implicações educacionais desta tese se dão no sentido de repensar o ensino das expressões numéricas, não somente como conjunto de regras e técnicas, mas como suporte na compreensão do sentido das operações. Ao trabalhar as expressões numéricas a partir de problemas mistos, esperamos que este trabalho possa servir de apoio à reflexão das imbricações presentes nas situações que contemplam tanto o Campo Conceitual Aditivo quanto o Campo Conceitual Multiplicativo.

Para a continuidade da pesquisa, sugerimos a investigação com situações de problemas mistos contemplando outras classes, bem como a análise dos invariantes operatórios presentes nas resoluções dos participantes ao resolver uma expressão numérica proveniente de um problema misto. Recomendamos também a análise pormenorizada da influência da forma operatória e da forma predicativa na construção de uma expressão numérica e na significação dos números e operações.

REFERÊNCIAS

AL-GHAMDI, Y. A. S. **The effectiveness of using microcomputers in learning algebraic precedence conventions**. 1987. Tese (Doutorado em Filosofia). The Florida State University, Florida, 1987. proquest dissertations publishing, 8711707. Disponível em https://www.proquest.com/openview/d4d80fe9ab24ce152c98c7221f407cdd/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750&diss=y. Acesso em: 9 nov. 2022.

ALI RAHMAN, E. S.; SHAHRILL, M.; ABBAS, N. A.; TAN, A. The development of students' mathematical skills in the evaluation of numerical expressions involving order of operations, **The Eurasia Proceedings of Educational & Social Sciences (EPESS),** v. 4, p. 409-413, 2016. Disponível em: http://www.epess.net/tr/download/article-file/334286. Acesso em: 16 jan. 2022.

ALMEIDA, L.; BRANCO, N. Erros cometidos pelos alunos de 6.º ano a operar com números racionais, **Revista da UIIPS –Unidade de Investigação do Instituto Politécnico de Santarém**, Santarém, v. 6, n. 1, p. 95-109, 2018. Disponível em: https://revistas.rcaap.pt/uiips/article/view/16115. Acesso em: 5 mai. 2021.

ALVES, A. M. M. **Livro didático de matemática: uma abordagem histórica (1943-1995).** 2005. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2005. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/189343?show=full. Acesso em: 5 mai. 2021.

ANDRINI, Á. **Ensino Objetivo de Matemática**: 5ª. Série. São Paulo: Editora do Brasil, 1975.

ANDRINI, Á. **Praticando Matemática:** 5ª série. São Paulo: Editora do Brasil, 1989.

ANDRINI, Á.; VASCONCELOS, M. J. **Novo Praticando Matemática:** 6º ano. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

ARAGÃO, A. B. B. L.; LAUTERT, S. L.; SCHLIEMANN, A. D. Resolução de problemas de proporção dupla e múltipla nos anos finais do Ensino Fundamental. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 24, n.4, p. 183-206, 2022. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/download/6921/pdf_1. Acesso em: 31 jan. 2023.

ARRAIS, U. B**. Expressões Aritméticas: Crenças, Concepções e Competências no entendimento do professor polivalente**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11095. Acesso em: 5 nov. 2020.

BARBOSA, G. S.; MAGINA, S. M. P. Construindo Significado para expressões numéricas multiplicativas a partir do jogo de mensagem. **Zetetiké**, Campinas, v. 22, n. 1, p. 9-30, 2014. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646576. Acesso em: 28 out. 2020.

BATISTA JUNIOR, C. V. **A matemática nos períodos iniciais dos cursos técnicos e formas de abordagem**. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede

Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Rio de Janeiro, 2019. Disponível em: https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/4357. Acesso em: 10 mai. 2020.

BENDER, M. L. Order of operations in elementary arithmetic. **The arithmetic teacher,** Cleveland, v. 9, n. 5, 1962. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/41184625. Acesso em: 5 mai. 2020.

BEYER, F. L. L. **Campo Conceitual Multiplicativo: um mapeamento das pesquisas produzidas no Brasil entre os anos de 1997 e 2016**. 2018. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2018. Disponível em https://tede2.pucsp.br/handle/handle/21721. Acesso em: 10 dez. 2022.

BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini.** São Paulo: Moderna, 2018.

BONI, K. T.; LABURÚ, C. E.; CAMARGO FILHO, P. S. A Teoria dos Campos Conceituais e a Diversidade Representacional: leituras convergentes para a Educação Matemática e Científica. **VIDYA**, v. 38, n. 1, p. 75-90, jan./jun., 2018. Disponível em https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/download/2163/2150. Acesso em: 9 dez. 2022.

BONI, K. T.; LABURÚ, C. E.; CAMARGO FILHO, P. S. Teoria dos Campos Conceituais, Diversidade Representacional e Redescrição Representacional: convergências teóricas a respeito do papel das representações para a aprendizagem conceitual. **Investigações em Ensino de Ciências**. v.26, n.2, p. 97-112, 2021. Disponível em: https://ienci.if.ufrgs.br/index.php/ienci/article/view/2389/pdf. Acesso em: 9 dez. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br. Acesso em: 14 ago. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação Básica** FNDE. Dados estatísticos. Brasília, 2017. Disponível em: https://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/dados-estatisticos. Acesso em: 14 ago. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.

BÚRIGO, E. Z. A modernização possível e necessária da Matemática escolar segundo Osvaldo Sangiorgi. *In:* VALENTE, W. R. (Org**.). Osvaldo Sangiorgi: um professor moderno**. São Paulo: Editora Annalumbre; Brasília: CNPq; GHEMAT, 2008. p. 43-67.

CAMPOS, C. R.; PERIN, A. P.; PITA, A. P. G. Reflexiones sobre el impacto de la pandemia de covid-19 en la educación. **Prometeica - Revista de Filosofía y Ciencias**, [S. l.], n. 24, p. 143–156, 2022. DOI: 10.34024/prometeica.2022.24.13141. Disponível em: https://periodicos.unifesp.br/index.php/prometeica/article/view/13141. Acesso em: 1 mar. 2023.

CEBOLA, G.; BROCARDO, J. Estratégias, Representações e Flexibilidade na Resolução de Tarefas de Comparação Multiplicativa. **Bolema**, Rio Claro, v. 33, n. 64, p.568-590, 2019. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a06. Acesso em: 14 ago. 2020.

CHEVALLARD, Yves. L' analise des pratiques enseignantes en théorie antropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble: La Pensée Sauvage Editions, v.19, n.2, p.221-265, 1999. Disponível em: https://revue-rdm.com/1999/la-sensibilite-de-l-activite/. Acesso em: 5 mai. 2020.

CORRÊA, R. L. T.. O livro escolar como fonte de pesquisa em História da Educação. **Cad. CEDES**, Campinas, v. 20, n. 52, p. 11-23, nov. 2000. Disponível em: https://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0101-32622000000300002&script=sci_abstract&tlng=pt. Acesso em: 14 ago. 2020.

COSTA, M. B. L.; NASCIMENTO, E. S.; SANTOS, M. M. Argumentação no processo de ensino e aprendizagem de expressões aritméticas nos livros didáticos. *In*: COLÓQUIO EDUCAÇÃO E CONTEMPORANEIDADE, EDUCON, 13., 2019.Sergipe. **Anais**[...]. Sergipe, 2019. p.1-11. Disponível em: https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/13178/49/48.pdf. Acesso em: 17 ago. 2020.

CYBIS, A. C. **Resolução de Problemas Multiplicativos: análise de processos heurísticos de alunos de 5º ano do Ensino Fundamental.** 2014. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2014. Disponível em: http://repositorio.pgsskroton.com/handle/123456789/3513. Acesso em: 19 nov. 2022.

DANTE, L. R. **Formulação e resolução de problemas de matemática**: teoria e prática. São Paulo: Ática, 2009.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris**: Matemática/Ensino Fundamental. São Paulo: Ática, 2015.

DELVAL, J. **Introdução à Prática do Método Clínico**: descobrindo o pensamento das crianças. São Paulo: Artmed, 2002.

DEZILIO, K. REZENDE, V. Ideias de Função Afim e Problemas Mistos nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 24, n.6, p. 89-117, 2022. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/7282/pdf_1. Acesso em: 12 dez. 2022.

DOMINGUES, H. H; IEZZI, G. **Álgebra moderna**. São Paulo: Editora Saraiva, 2018.

ECHEVERRÍA, M. P. P.; POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. *In*: POZO, J. I. (Org.). **A solução de problemas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

EDITORA MODERNA (org.). **Araribá mais**: Matemática/ Manual do professor. Mara Regina Garcia Gay; Willian Raphael Silva(ed.). São Paulo: Moderna, 2018.

FERNANDES, J. A.; CORREIA, P. F.; GUZMAN, R. R. Aquisição das operações combinatórias por alunos pré-universitários através de uma intervenção de ensino. **Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa**, Cidade do México, v.13, n.2, jul., 2010. Disponível em: https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362010000200005. Acesso em: 28 ago. 2020.

FIGUEIREDO, F. F.; GROENWALD, C. L. O; RECALCATI, L. A. A (re)formulação e resolução de problemas com o uso de recursos tecnológicos digitais na Educação Matemática

Financeira. **Em Teia**, Fortaleza, v. 10, n. 2, 2019. Disponível em: https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/240121. Acesso em: 28 ago. 2020.

FIUZA, R. P**. Números decimais e o tema transversal trabalho e consumo: um experimento utilizando uma sequência didática eletrônica.** 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2015. Disponível em: http://www.ppgecim.ulbra.br/teses/index.php/ppgecim/article/view/238/225. Acesso em: 29 ago. 2020.

FREIRE, R. S. **Desenvolvimento de conceitos algébricos por professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2011. Tese. (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011. Disponível em: https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/3304. Acesso em: 25 mai. 2020.

FREITAS, H. S. **Expressões numéricas e suas abordagens em livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental adotados por uma escola pública de Cuiabá-MT.** 2014. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2014. Disponível em: https://ri.ufmt.br/handle/1/1916. Acesso em: 10 mai. 2020.

FUCHS, M. J. **Revistas na área da educação e educação matemática: espaços para socialização-discussão-aprendizado**. 2012. Disponível em: http://cursos.unipampa.edu.br/cursos/licenciaturaemmatematicaitaqui/files/2012/05/Mapeamento-de-Revistas-MARIELE-JOSIANE-FUCHS.1.pdf. Acesso em: 29 out. 2020.

FUNDAÇÃO VALE. **Formação de professores: Matemática Ensino Fundamental II**. Caderno Bimestral II. São Paulo: VALE, 2015. Disponível em: http://www.fundacaovale.org/Documents/CadernoMat-mat-efi-caderno-bimestral-ii-resolucao-problemas-campo-aditivo.pdf. Acesso em: 28 out. 2020.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2002.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. São Paulo: Atlas, 2008.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R. **A conquista da matemática**. Ensino Fundamental: anos finais. São Paulo: FTD, 2018.

GITIRANA, V.; CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S. M. P.; SPINILLO, A. G. **Repensando a multiplicação e divisão**. Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM, 2014.

GOODROW, A. M.; KIDD, K.."We All Have Something That Has to Do with Tens": Counting School Days, Decomposing Number, and Determining Place Value. **Teaching Children Mathematics** , [*s/l*], v. 15, n. 2, p. 74-79, set. 2008. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/41199220. Acesso em:.12 dez. 2022.

GOULART, J.; FARIAS, L. Uma Leitura Utilizando a Lente da Teoria Antropológica do Didático acerca de uma Aula sobre Expressões Numéricas. **Bolema**, Rio Claro, v. 33, n. 65, p.1570-1594, 2019. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a28. Acesso em: 30 ago. 2020.

GRECA, I. M.; MOREIRA, M. A. Do saber fazer ao saber dizer: uma análise do papel da resolução de problemas na aprendizagem conceitual de Física. **Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências**, Belo Horizonte, v. 5, n. 1, p. 52-67, 2003. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1983-21172003050106. Acesso em: 25 nov. 2019.

GREGOLIN, V. R. **O Conhecimento Matemático Escolar: Operações com Números Naturais (e adjacências) no Ensino Fundamental**. 2002. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2002. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/tese_gregolin.pdf. Acesso em: 10 jan. 2020.

GROENWALD, C. L. O. Design Instrucional desenvolvido com alunos de licenciatura em Matemática com a temática Expressões Numéricas. **Paradigma**, Maracay, v. 41, p.636-656, 2020. Disponível em: http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/812. Acesso em: 10 jun. 2021.

GROSSI, E. P. **Democracia e Educação em Tempos de Caos**. Porto Alegre: GEEMPA, 2017.

HOLM, K. **Hur elever resonerar om kommutativitet i numeriska uttryck**. 2018. Dissertação (Independent thesis Advanced level - professional degree) - Jönköping University, School of Education and Communication, Swedish, 2018. Disponível em: http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:hj:diva-40122. Acesso em: 22 dez. 2022.

JONSSON, J. **Att strukturera och beräkna matematiska uttryck** : En studie om hur elever i årskurs 5 hanterar utvecklade aritmetiska uttryck. 2016. Dissertação (Independent thesis Advanced level - professional degree) - Jönköping University, School of Education and Communication, Swedish, 2016. Disponível em: http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:hj:diva-30590. Acesso em: 22 dez. 2022.

JUPRI, A.; DRIJVERS, P.; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. Difficulties in initial algebra learning in Indonesia. **Mathematics Education Research Journal**, v.26, n.4, p. 683-710, dez. 2014. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s13394-013-0097-0. Acessado em: 12 dez. 2022.

KAMII, C. **Crianças pequenas continuam reinventando a aritmética**: séries iniciais - implicações da teoria de Piaget. São Paulo: Grupo A, 2017. E-book. ISBN 9788536318349. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788536318349/. Acesso em: 13 nov. 2022.

KAMII, C. **Desvendando a aritmética:** Implicações da teoria de Piaget. Campinas, SP: Papirus, 1995.

KARLSSON, R. **Vi hör ihop : Hur elever beräknar numeriska uttryck med sina egenskapade räkneregler.** 2019. Dissertação (Independent thesis Basic level - professional degree) - Jönköping University, School of Education and Communication. 2019. Disponível em: http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:hj:diva-44530. Acesso em: 21 dez. 2022.

KARLSSON, R.; LINDER, S. **Hur elever tillämpar räkneregler och räknelagar på numeriska uttryck.** 2018. Dissertação (Independent thesis Basic level - professional degree)

- Jönköping University, School of Education and Communication, 2018. Disponível em: http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:hj:diva-39179. Acesso em: 21 dez. 2022.

KARP, K. S.; BUSH, S. B.; DOUGHERTY, B. J. .13 Rules That Expire. **Teaching Children Mathematics** , v. 21, n. 1 (August 2014), p. 18-25. 2014. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/10.5951/teacchilmath.21.1.0018. Acesso em: 21 dez. 2022.

KRUSZIELSKI, L. **Resolução de exercícios aritméticos e memória de trabalho**. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2005. Disponível em: https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/6026. Acesso em: 15 mai. 2021.

LAUTERT, S. L.; SCHLIEMANN, A. D.; LEITE, A. B. B. . Uso da regra de três e a compreensão das relações em problemas de proporção múltipla. *In*: Colóquio Internacional sobre a Teoria dos Campos Conceituais**,** 2., 2017, Porto Alegre. **Anais [...]** Porto Alegre: GEEMPA, 2017. p. 135-142. Disponível em: https://www.geempa.com.br/wp-content/uploads/2017/08/O-USO-DA-REGRA-DE-TR%C3%8AS-E-A-COMPREENS%C3%83O-DAS-RELA%C3%87%C3%95ES.pdf. Acesso em: 22 dez. 2022.

LEITE, A. B. B. **Resolução de problemas de proporção dupla e múltipla: um olhar para as situações que envolvem grandezas diretamente proporcionais.** 2016. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco. 2016. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/20233. Acesso em: 20 dez. 2022.

LEVAIN, J. P.; VERGNAUD, G. Proportionnalité Simple, Proportionnalité Multiple. **Grant**, n. 56, p. 55-66, 1994-1995. Disponível em: https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/56n5_1562850226137-pdf. Acesso em: 23 dez. 2022.

LONGEN, A. **Apoema**: Matemática 6. Manual do Professor: Coleção Apoema. São Paulo: Editora do Brasil, 2018.

LOPES, D. M. P. **Alternativas metodológicas para o ensino de expressões numéricas: estratégias para construção de aprendizagens significativas.** 2010. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Ciências Exatas) - Fundação Vale do Taquari de Educação e Desenvolvimento Social, Lajeado, 2010. Disponível em: http://hdl.handle.net/10737/114. Acesso em: 18 mai. 2020.

LORENZI, R. M. P. L.; CHIES, R. P. Expressões numéricas: sugestões de histórias matemáticas para uso em sala de aula. **Revista do Professor**, Porto Alegre, v. 89, n. 23, p. 24-28, jan/mar 2007.

LOURENÇO, E.; OLIVEIRA, P. Congruência semântica e equivalência referencial em problemas envolvendo equações de 1º grau. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.20, n. 1, p. 84-109, 2018. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/35043. Acesso em: 10 jun. 2020.

MACIEL, T. P. **Desenvolvimento de competências e habilidades nas expressões numéricas por meio do desafio dos quatro algarismos para o 6º ano do Ensino Fundamental**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Tocantins, Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=2267671#. Acesso em: 08 jul. 2021.

MAGINA, S. M. P.; LAUTERT, S. L.; SANTOS, E. M. Estratégias Exitosas de Alunos dos Anos Iniciais em Situações de Proporção. **Educação & Realidade**, Porto Alegre, v. 45, n. 4, p 1-24, 2020. Disponível em http://dx.doi.org/10.1590/2175-623696023. Acesso em: 17 jan. 2023.

MAGINA, S. M. P.; MERLINI, V. L.; SANTOS, A. A estrutura multiplicativa à luz da Teoria dos Campos Conceituais: uma visão com foco na aprendizagem. *In*: CASTRO FILHO; J. A.; BARRETO, M. C.; BARGUIL, P. M.; MAIA, D. L.; PINHEIRO, J. L. **Matemática, cultura e tecnologia: perspectivas internacionais**. Curitiba: Editora CRV, 2016, p.66-82.

MAGINA, S. M. P.; SANTANA, E. R. S.; CAZORLA, I. M.; CAMPOS, T. M. M. As estratégias de resolução de problemas das estruturas aditivas nas quatro primeiras séries do Ensino Fundamental. **Zetetiké**, v. 18, n. 34, p. 15-50. 2010. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646679. Acesso em: 22 dez. 2022.

MAGINA, S. M. P.; SANTOS, A., MERLINI, V. L. O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciência e Educação**, Bauru, v. 20, n. 2, p. 517-533, 2014. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1516-73132014000200016. Acesso em: 10 jan. 2023.

MAGINA, S. M. P.; SPINILLO, A. G.; LAUTERT, S. L. Raciocínio multiplicativo discutido a partir da resolução e formulação de problemas. **REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, v 15, n. 36, p.78-94, 2020. Disponível em: http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/83. Acesso em: 30 jan. 2023.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. M.; NUNES, T.; GITIRANA, V. **Repensando adição e a subtração**: contribuições da teoria dos campos conceituais. São Paulo: PROEM, 2008.

MAGINA, S.; PORTO, R. S. O. É possível se ter raciocínio funcional no nível dos Anos Iniciais? Uma investigação com estudantes do 5º ano do ensino fundamental. *In:* Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 7., Foz do Iguaçu. **Anais [...]** Foz do Iguaçu, 2018. p. 1-12. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/SIPEM/VII_SIPEM/paper/view/357/246. Acesso em: 18 nov. 2022.

MARCILESE, M. **Sobre o papel da língua no desenvolvimento de habilidades cognitivas superiores**. 2011. Tese (Doutorado em Letras) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011. Disponível em: https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/17819/17819_1.PDF. Acesso em: 10 mai. 2022.

MENDES, H. L. Análise praxeológica de livros didáticos de matemática: o caso dos números binários. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.19, n.1, p. 423-444, 2017. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/27191/pdf. Acesso em: 10 mai. 2022.

MENEZES JUNIOR, E. M. **O uso de vídeo-aulas de matemática como metodologia para a melhoria da qualidade do ensino nos anos iniciais na escola municipal Henrique Dias no município de Porto Velho - RO.** 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino) - Universidade Federal de Rondônia, Rio de Janeiro,

2013. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=449&id2=27868. Acesso em: 10 mai. 2021.

MESTRE, C. ; OLIVEIRA, H. A mobilização da capacidade de generalização através da exploração de estratégias de cálculo: um estudo com alunos do 4.º ano. **Interacções**, n. 20, p.9-36, 2012. Disponível em: https://revistas.rcaap.pt/interaccoes/article/view/484/438 Acesso em: 10 mai. 2021.

MILLER, B. N., RANUM, D. L. **Problem Solving with Algorithms and Data Structures Using Python**. 2011. Disponível em: https://panda.ime.usp.br/panda/static/pythonds_pt/ . Acesso em: 22 nov. 2022.

MIRANDA, C. A. **Situações-problema que envolvem o conceito de função a-fim:** uma análise à luz da Teoria dos Campos Conceituais. 2019. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação) - Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2019. Disponível em: https://tede.unioeste.br/handle/tede/4671. Acesso em: 9 dez. 2022.

MIRANDA, C. A.; REZENDE V.; NOGUEIRA, C. M. I. Uma Análise de Problemas de Função Afim Fundamentada na Teoria dos Campos Conceituais. **JIEEM,** v.14, n.4, p. 485-495, 2021. Disponível em: https://jieem.pgsskroton.com.br/article/view/9092. Acesso em: 9 dez. 2022.

MODANEZ, L. **Das sequências de padrões geométricos à introdução do pensamento algébrico**. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11235. Acesso em: 10 mai. 2021.

MONTENEGRO, J. A. **Identificação, conversão e tratamento de registros de representações semióticas auxiliando a aprendizagem de situações combinatórias.** 2018. Tese (Doutorado Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/32446. Acesso em: 12 mai. 2021.

MONTENEGRO, J. A.; BORBA, R. E. S. R; BITTAR, M. Representações Intermediárias na Aprendizagem de Situações Combinatórias. **Educação e realidade**, Porto Alegre, v. 45, n. 1, p. 1-26, 2020. Disponível em: https://doi.org/10.1590/2175-623687693. Acesso em: 10 jun. 2021.

MORAIS, I. S.; LEON, J. F.; SARAIVA, M. O.; VETTORAZZO,A. S.; CÓRDOVA JÚNIOR,, R. S. **Algoritmo e programação** (engenharia). Porto Alegre: SAGAH, 2018.

MUNIZ, C. A. O conceito de “esquema” para um novo olhar para a produção matemática na escola: as contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. *In*: BITTAR, M; MUNIZ, A. C (Orgs). **A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais**. Curitiba: Editora CVR, 2009.

NAKAMURA, O. Y. A. **Generalização de Padrões Geométricos: caminho para a construção de Expressão Algébrica no Ensino Fundamental**. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças Fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artmed, 1997.

NUNOKAWA, K..Multi-Relation Strategy in Students' Use of a Representation for Proportional Reasoning. **Eurasia Journal of Mathematics**, **Science & Technology Education**, v. 8, n. 4, p. 233-248, 2012. Disponível em: http://dx.doi.org/10.12973/eurasia.2012.842a. Acesso em: 12 dez. 2022.

OLIVEIRA, C. A. V. **Relações lógicas estabelecidas por alunos de uma quarta série do Ensino Fundamental**. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004. Disponível em: https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/18477. Acesso em: 10 mai. 2021.

OLIVEIRA, D. H.; REISDOERFER, C.; MOURA, M. C.; COCCO, P. M.; GILLI, J. C. Bingo das expressões numéricas. *In*: Encontro Nacional de Educação Matemática, 11. , 2013, Curitiba. **Anais [...]** Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2013, p. 1-4. Disponível em: http://www.sbemrevista.com.br/files/XIENEM/pdf/2362_1355_ID.pdf. Acesso em: 15 jul. 2021.

OLIVEIRA, L.; SANTOS, E. S. C. Para que ensinar tabuada? observações sobre a necessidade e as "novas metodologias" para ensinar tabuada da revista do professor. *In:* Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisas em Educação Matemática, 11., 2017, Campo Grande. **Anais [...]** Campo Grande: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2017. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/sesemat/article/view/3696/3672. Acesso em: 16 de janeiro de 2023.

OTTES, A B. **Expressão numérica: a hierarquia das quatro operações matemáticas**. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2016. Disponível em: https://repositorio.ufsm.br/handle/1/12435. Acesso em: 21 ago. 2020.

OTTES, A. B.; FAJARDO, R. Um olhar sobre a hierarquia das quatro operações aritméticas nas expressões numéricas**. Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 1, n. 2, maio/ago. 2017. Disponível em https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/30/20. Acesso em: 21 ago. 2020.

PAIM, M. A. S. **Um objeto de aprendizagem como proposta didática para a aprendizagem das expressões numéricas com decimais.** 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Gestão e Tecnologias Aplicadas à Educação) - Universidade do Estado da Bahia, Salvador, 2018. Disponível em: http://hdl.handle.net/20.500.11896/1049. Acesso em: 21 ago. 2020.

PARMEGIANI, R. Contextualizando o ensino das expressões numéricas no Ensino Fundamental. *In*: Congresso Nacional de Educação Matemática, 2., 2011. Ijuí. **Anais** [...]. Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul – Ijuí. Ed. Unijuí, 2011. Disponível em: http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cnem/cnem/principal/re/PDF/RE64.pdf. Acesso em: 10 mai. 2020.

PAVAN, L. R. **A mobilização das ideias básicas do conceito de função por crianças da 4ª série do Ensino Fundamental em situações-problema de estruturas aditivas e/ou multiplicativas.** 2010. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) -

Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Maringá. Maringá, 2010. Disponível em: http://repositorio.uem.br:8080/jspui/handle/1/4378. Acesso em: 22 nov. 2022.

PIAGET, J. **A construção do real na criança**. São Paulo: Editora Ática, 2008

PINTO; R. A.; PRESTES, L. P.; SERPA, M. S.; COUTO, J. M. C.; BIANCO, C. M. D.; NUNES, P. C. M. **Estrutura de dados**. Porto Alegre: SAGAH, 2019.

PLAISANCE, É. VERGNAUD, G. **As Ciências da Educação**. São Paulo: Edições Loyola, 2003.

RAMOS, R. C. S. S; BILHALVA, A. S.; SILVA, J. A. Proposta de instrumento sobre expressões numéricas por meio do Método Clínico-Crítico Piagetiano. *In:* Encontro de Alfabetização Matemática do Extremo Sul. 2. 2021, Rio Grande. **Anais [...]** Rio Grande: Universidade Federal do Rio Grande, 2021, p. 149 - 160. Disponível em: https://repositorio.furg.br/bitstream/handle/123456789/10544/ALFAMAT%202021%20%20VERS%C3%83O%20REVIS%C3%83O%2030%20TEXTOS%20(1).pdf?sequence=1. Acesso em: 22 nov. 2022.

RAMOS, R. C. S. S; SILVA, J. A, LUZ, V. S.; FIRME, S. M.; SARAIVA, D. R. Situações de expressões numéricas em livros didáticos de 6º ano: uma análise segundo a Teoria dos Campos Conceituais. **Bolema**, Rio Claro, v. 35, n. 71, p. 1294-1315, 2021. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a04. Acesso em 9 dez. 2022.

RAMOS, R. C. S. S; SILVA, J. A. Estudo de revisão sobre expressões numéricas em textos acadêmicos - abordagens teóricas. *In:* Congresso Ibero-americano de Educação Matemática, 9, 2022b,São Paulo. **Anais [...],** online, São Paulo. Pontifícia Universidade Católica – São Paulo, 2022b. Disponível em: https://even3.blob.core.windows.net/processos/8b9539b36aea4c5a8f09.docx. Acesso em: 9 dez. 2022.

RAMOS, R. C. S. S; SILVA, J. A. Expressões Numéricas sob o enfoque da Teoria dos Campos Conceituais: o que dizem os textos acadêmicos? *In*: Encontro Nacional de Educação Matemática, 14, 2022a, SBEM. **Anais [...],** online. Disponível em: https://even3.blob.core.windows.net/processos/15915ed7d8e2422289a7.docx. Acesso em: 9 dez. 2022.

RECALCATI, L. A.; FIGUEIREDO, F. F.; GROENWALD, C. L. O. A produção de enunciados de problemas para a proposta de (re)formulação e resolução com o uso de tecnologias digitais no ensino de expressões numéricas. *In*: Encontro Nacional de Educação Matemática, 13, 2019, Cuiabá. **Anais [...].** Cuiabá, 2019, p. 1-7. Disponível em: https://www.sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/2019/paper/view/997/1938. Acesso em: 15 mar. 2020.

REZENDE V.; NOGUEIRA, C. M. I; CALADO, T. V. Função Afim na Educação Básica: Estratégias e Ideias Base Mobilizadas por Estudantes Mediante a Resolução de Tarefas Matemáticas. **Alexandria – Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v. 13, n. 2, p. 25-50, nov. 2020. Disponível em: HTTP://dx.doi.org/10.5007/1982-5153.2020v13n2p25. Acesso em: 9 nov. 2022.

ROCHA, M. I.; MENINO, H. A. Desenvolvimento do sentido do número na multiplicação. Um estudo de caso com crianças de 7 /8 anos. **Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa,** Cidade do México**,** v. 12, n. 1, p. 103-132, mar. 2009. Disponível em: https://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v12n1/v12n1a5.pdf. Acesso em: 25 jun. 2020.

RODRIGUES, C. L. H. **Invariantes operatórios associados ao conceito de função mobilizados por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental**. 2021. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Campus Cascavel, Cascavel, 2021. Disponível em: https://tede.unioeste.br/bitstream/tede/5815/5/Carla_Rodrigues2021.pdf. Acesso em: 22 nov. 2022.

RODRIGUES, C. L. H.; REZENDE, V. Problemas mistos em livros didáticos: uma classificação com base na teoria dos campos conceituais. **Amazônia - Revista de Educação em Ciências e Matemática**, v.17, n. 39, p. 271-287, 2021. Disponível em: https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/10713. Acesso em: 10 nov. 2022.

RODRIGUES, C. L. H; REZENDE, V. Problemas do campo conceitual multiplicativo em livros didáticos de matemática dos anos iniciais. *In*: Encontro Nacional de Educação Matemática, 13., 2019a, Cuiabá. **Anais [...]** Cuiabá: Universidade Federal do Mato Grosso, 2019a. Disponível em: https://www.sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/2019/paper/view/1599/1809. Acesso em: 20 nov. 2022.

RODRIGUES, C. L. H; REZENDE, V. Problemas mistos nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: contribuições da teoria dos campos conceituais. In: Encontro Paranaense de Educação Matemática. 15., 2019b, Londrina. **Anais [...]** Londrina: Universidade Estadual de Londrina e Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2019b. p. 1-15. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XV_EPREM/paper/viewFile/1074/734. Acesso em: 20 nov. 2022.

ROSEN, K. H. **Matemática discreta e suas aplicações**. Porto Alegre: AMGH, 2010.

SÁ, L. C. Experiências promovidas pelos jogos “Cubra 12” e “Contig 60” para abordagem de cálculo mental e expressões numéricas no programa mais educação. *In*: Encontro Nacional de Educação Matemática, 11. , 2013, Curitiba. **Anais [...].** Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2013, p. 1-8. Disponível em: http://www.sbemrevista.com.br/files/XIENEM/pdf/197_1746_ID.pdf. Acesso em: 18 jun. 2020.

SALOMÃO, C. A. R. **A passagem de textos em língua materna para expressões aritméticas, mediada pelo uso de uma calculadora.** 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2013. Disponível em: https://repositorio.pgsskroton.com/bitstream/123456789/3532/1/CRISLAINE%20APARECIDA%20RIBEIRO%20SALOM%C3%83O.pdf. Acesso em: 10 jun. 2020.

SANTANA, E. R. S.; LIMA, D. C. Capítulo 1. *In*: LAUTERT, S. L.; CASTRO FILHO, J. A.; SANTANA, E. R. S. (org.). **Repensando Multiplicação e Divisão do 1º ao 3º ano**.

Coletânea Cadernos E-Mult. Série Alfabetização Matemática, Estatística e Científica; Via Litterarum. Bahia, 2017. p. 15- 44. Disponível em: https://www.ufpe.br/documents/956358/956387/Ensinando+multiplica%C3%A7%C3%A3o+e+divis%C3%A3o+-+1%C2%BA+ao+3%C2%BA+ano.pdf/2fd00c0a-31b1-49de-9926-8b146ffb7701. Acesso em: 20 set. 2022.

SANTIAGO, I. **Formulação e resolução de problemas matemáticos: um estudo exploratório sobre o pensamento de crianças do Ensino Fundamental**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação) - Centro Universitário Moura Lacerda, Ribeirão Preto, 2011.

SANTOS, A. B. C; PEREIRA, J. C. S; NUNES, J. M. V. Concepções de professores de matemática do ensino básico sobre a álgebra escolar. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 19, n. 1, 2017, p. 81-103. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/28616. Acesso em: 10 ago. 2021.

SANTOS, A. **Formação de professores e as estruturas multiplicativas**: reflexões teóricas e práticas. Curitiba: Apris, 2015.

SANTOS, M. C; LIMA, P. F. Considerações sobre a matemática no Ensino Fundamental. *In*: Seminário Nacional Currículo em Movimento – Perspectivas atuais, 1., 2010, Belo Horizonte. **Anais** [...]. Belo Horizonte, 2010. p.1-19. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/dezembro-2010-pdf/7166-3-2-consideracoes-matematica-marcelo-camara-e-paulo/file. Acesso em: 14 ago. 2020.

SANTOS, M. M.; NASCIMENTO, E. S.; ATTIE, J. P. Processos de argumentação em livros didáticos: expressões numéricas. *In*: Encontro Nacional de Educação Matemática, 13, 2019, Cuiabá. **Anais [...].** Cuiabá, 2019, p. 1-7. Disponível em: https://www.sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/2019/paper/view/2212/1773. Acesso em: 10 nov. 2022.

SANTOS, V. M. A.; ALBUQUERQUE, A. R. C. O uso do livro didático como instrumento pedagógico para o ensino de Geografia. **Estação Científica (UNIFAP)**. Macapá, v. 4, n. 1, p. 63-77, jan.-jun. 2014. Disponível em:https://periodicos.unifap.br/index.php/estacao/article/view/1314. Acesso em: 17 ago. 2020.

SILVA, A. L. A.; OLIVEIRA, M. G. A vida por trás das expressões. *In*: Encontro Nacional de Educação Matemática, 11. , 2013, Curitiba. **Anais [...].** Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2013, p. 1-8. Disponível em: http://www.sbemrevista.com.br/files/XIENEM/pdf/513_213_ID.pdf. Acesso em: 17 ago. 2020.

SILVA, G. C. M. **O ensino e aprendizagem de expressões numéricas para 5ª série do Ensino Fundamental com a utilização do jogo CONTIG® 60.** 2009. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11382. Acesso em: 12 ago. 2020.

SILVA, G. C. M.; ARRUDA, M. R. M. F. As expressões numéricas, o Contig 60 e a formação de professores do ensino fundamental I. *In:* MONTEIRO, S. A. I.; RIBEIRO, R.; LEMES, S. S.; MUZZETI, L. R. (Org.). **Educação na contemporaneidade**: reflexões e pesquisa. São Carlos: Pedro e João, 2011, p. 23-42. Disponível em: https://pedroejoaoeditores.com.br/2022/wp-content/uploads/2022/01/educcontemporaneidade-1.pdf. Acesso em: 10 ago. 2020.

SILVA, J. A. Repetição e desafio nos exercícios escolares: dois lados de uma mesma moeda. **Schème**, Marília, v.1, n.1, p. 95 – 107, jan – jul. 2008. Disponível em: https://doi.org/10.36311/1984-1655.2008.v1n1.p95-107. Acesso em: 12 ago. 2020.

SILVA, J. A.; BERTOLUCCI, C. C. Epistemologias e Metodologias em Entrevistas com Crianças sobre Conhecimentos Matemáticos: uma Perspectiva Construtivista. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.22, n.3, p.343-372, 2021. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/50480/pdf. Acesso em: 12 ago. 2020.

SILVA, J. S. C.; MOURA, P. R. S. Estágio supervisionado: uma proposta de trilha matemática para o ensino de expressões numéricas. *In*: Encontro Nacional de Educação Matemática, 13, 2019, Cuiabá. **Anais [...].** Cuiabá, 2019, p. 1-10. Disponível em: https://www.sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/2019/paper/view/884/1710. Acesso em: 10 ago. 2020.

SILVA, L. D. C. P. **As formas operatória e predicativa do conhecimento manifestadas por alunos do 5º ano mediante problemas de estrutura multiplicativa**: uma investigação das ideias base de função. 2021. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Campus Cascavel, Cascavel, 2021. Disponível em: https://tede.unioeste.br/handle/tede/5773. Acesso em: 22 nov. 2022.

SILVA, R. Narrativas Multimodais: a imagem dos matemáticos em performances matemáticas digitais. **Bolema**, Rio Claro, v. 28, v. 49, p. 950 – 973, ago 2014. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/vZrDKmSr3rqbwxXFykPDBZD/?lang=pt&format=pdf. Acesso em: 22 nov. 2021.

SILVEIRA, Ê. **Matemática:** compreensão e prática. São Paulo: Moderna, 2018.

SOARES, N. N.; PIROLA, N. A. Resolução de problemas e expressões numéricas: o quadro dos quatro quatros e o nunca dois e números binários. **REMATEC. Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, Belém, v. 15, n. 15, p. 163-177, dez. 2020. Disponível em: https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/100. Acesso em: 10 jun. 2020.

SOARES, P. J. **O jogo como recurso didático na apropriação dos números inteiros: uma experiência de sucesso**. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11329. Acesso em: 10 mai. 2020.

SOARES, R. M. **Pensamento algébrico: quais elementos são identificados por professores de matemática em atividades com este foco?** 2018. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2018. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/21317. Acesso em: 10 mai. 2020.

SOUZA NETO, L. A. **Aritmética modular e criptografia no ensino básico**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Maranhão, Rio de Janeiro, 2014. Disponível em:

https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=2235529#. Acesso em: 10 jun. 2020.

SOUZA, M. A. F.; GOMES, M. M.; SOARES, M. V.; CONCÍLIO, R. **Algoritmos e lógica de programação**: um texto introdutório para a engenharia. São Paulo: Cencage, 2019.

SPINILLO, A. G., LAUTERT, S. L. O diálogo entre a Psicologia do Desenvolvimento Cognitivo e a Educação Matemática. *In*: MEIRA, L.; SPINILLO, A. G. (Eds.), **Psicologia Cognitiva: Cultura, desenvolvimento e aprendizagem**. Recife, PE: Editora da Universidade Federal de Pernambuco, 2006, p. 46-80. Disponível em: https://editora.ufpe.br/books/catalog/download/301/291/873?inline=1. Acesso em: 15 nov. 2022.

TELES, R. A. M. . A Influência de Imbricações entre Campos Conceituais na Resolução de situações envolvendo fórmulas de área de figuras geométricas planas. *In*: Reunião Anual da Anped, 31., 2008, Caxambú - MG. **Anais [...]**. Caxambú: ANPED, 2008. p. 1-25. Disponível em: https://www.anped.org.br/sites/default/files/gt19-4277-int.pdf. Acesso em: 10 ago. 2020.

THOMÉ, M. S.; CUNHA, S.; VELASCO, J. Eliminando ambiguidades de expressões aritméticas com o uso correto do seu dialeto. *In*: Encontro Nacional de Educação Matemática, 13, 2019, Cuiabá. **Anais [...].** Cuiabá, 2019, p. 1-11. Disponível em: https://www.sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/2019/paper/view/1178/1816. Acesso em: 10 ago. 2020.

TOSTES, T. A. **Tabuleiro das Expressões: Um Auxiliador no Ensino da Matemática para Alunos com Deficiência Visual.** 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino das Ciências) - Universidade do Grande Rio – Prof. José de Souza Herdy, Duque de Caxias, 2015. Disponível em: https://tede.unigranrio.edu.br/handle/tede/270. Acesso em: 10 ago. 2020.

TRIVILIN, L. R.; RIBEIRO, A. J. Conhecimento Matemático para o Ensino de Diferentes Significados do Sinal de Igualdade: um estudo desenvolvido com professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática [online], v. 29, n. 51, p. 38-59, 2015. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a03. Acesso em: 21 nov. 2022.

UNGER, J. (2021). Vilka räknesätt har företräde? : **En studie om hur elever i årskurs 5 strukturerar och bokför beräkningar av numeriska uttryck.** 2021. Dissertação (Independent thesis Advanced level - professional degree) - Jönköping University, School of Education and Communication. 2021. Disponível em: http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:hj:diva-53770. Acesso em: 21 dez. 2022.

URBINA-LILBACK, R N. Snapshots of Equitable Teaching in a Highly Diverse Classroom. **The Mathematics Teacher** , v. 110, n. 2 , p. 126-132. 2016. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/10.5951/mathteacher.110.2.0126 . Acesso em: 21 dez. 2022.

VERGNAUD, G. ¿En qué sentido la Teoría de los Campos Conceptuales puede ayudarnos para facilitar Aprendizaje Significativo? **Investigações em Ensino de Ciências**, v.12, n. 2, p.285-302, 2007a. Disponível em: https://ienci.if.ufrgs.br/index.php/ienci/article/view/475. Acesso em: 21 dez. 2022.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar**. Curitiba: Editora da UFPR, 2009a.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, Jean (org.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, p. 155 – 191.

VERGNAUD, G. **Atividade humana e conceituação**. Porto Alegre: GEEMPA, 2008.

VERGNAUD, G. **Lev Vygostski**: Pedagogo e Pensador do Nosso Tempo. Porto Alegre: GEEMPA, 2004.

VERGNAUD, G. Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la répresentation. **Psychologie Française**, v. 30, p. 245-252, 1985. Traduzido por Maria Lucia Faria Moro, com revisão de Luca Rischbieter e Maria Tereza Carneiro Soares. Disponível em: https://vergnaudbrasil.com/wp-content/uploads/2021/03/2.1-CONCEITOS-E-ESQUEMAS-EM-UMA-TEORIA-OPERATORIA-DA-REPRESENTACAO.pdf. Acesso em: 9 dez. 2022.

VERGNAUD, G. Constructivisme et apprentissage des mathématiques. Actes du Colloque Constructivismes : Usages et Perspectives en Éducation. Genève: **Service de la Recherche en Education**, cahier n. 8, p. 143-155, 2001. Traduzido por Camila Rassi, com revisão de Luca Rischbieter, Maria Lucia Faria Moro e Maria Tereza Carneiro Soares. Disponível em: https://vergnaudbrasil.com/wp-content/uploads/2021/03/4.4-CONSTRUTIVISMO-E-APRENDIZAGEM-DA-MATEMATICA.pdf. Acesso em: 9 dez. 2022.

VERGNAUD, G. Forma operatoria y forma predicativa del conocimiento. In: Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática, 1. , 2007b, Tandil. **Actas [...]** Argentina, Tandil, 2007b.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didáctique des Mathématiques**, v. 10, n. 2, p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. **Educar em Revista** [online], Curitiba, v. 27, Edição Especial, n.1, p. 15-27, 2011. [Acessado 24 Julho 2021]. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S0104-40602011000400002

VERGNAUD, G. O que é aprender? *In:* BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (Org.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais.** Curitiba: Editora CRV, 2009b. p. 13-36.

VERGNAUD, G. O que é aprender? Por que a Teoria dos Campos Conceituais? In: VERGNAUD, G. **O que é aprender? O iceberg da conceitualização**. Porto Alegre: GEEMPA, 2017a, p. 15-51.

VERGNAUD, G. Prenunciando a Teoria dos Campos Conceituais. *In*: VERGNAUD, G. **Piaget e Vygotski em Gérard Vergnaud: Teoria dos Campos Conceituais**. Porto Alegre: GEEMPA, p. 63 – 70, 2017b.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didáctica das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, v. 1, p. 75-90, 1986. Disponível em: https://repositorio.ispa.pt/bitstream/10400.12/2150/1/1986_1_75.pdf. Acesso em: 22 nov. 2022.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. In NASSER, L. (Ed.) *In:* Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro, 1., 1993, Rio de Janeiro. **Anais [...].** Rio de Janeiro, 1993. p. 1-26.

VERGNAUD, G. The nature of mathematical concepts. *In:* NUNES, T.; BRYANT, P. (org). **Learning and teaching mathematics, an international perspective**. Hove (East Sussex): Psychology Press Ltd, 1997, p. 5-28.

VIEIRA, A. L.; RIOS, P. S; VASCONCELOS, C. A linguagem simbólica e a resolução de problemas matemáticos no 8º ano do Ensino Fundamental. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 22, n. 1, p. 43-67, 2020. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/40954/pdf. Acesso em: 10 out. 2022.

VIEIRA, M. A. **(Re)Construindo Saberes: Uma Proposta De Portal Educacional Para Ingressantes no Ensino Superior**. 2019.Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino e suas Tecnologias) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Campos dos Goytacazes, 2019. Disponível em: https://educapes.capes.gov.br/handle/capes/553703. Acesso em: 10 out. 2021.

WATABE, L. **Características da resolução de problemas por alunos do 4º ano do ensino fundamental.** 2012. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2012. Disponível em: https://repositorio.pgsskroton.com/handle/123456789/3581. Acesso em: 10 ago. 2021.

WIBERG, J. **Att prioritera rätt : Hur elever i årskurs 5 går tillväga, gällande strukturering och prioritering, när de beräknar numeriska uttryck**. 2017. Dissertação (Independent thesis Advanced level - professional degree) - Jönköping University, School of Education and Communication. 2017. Disponível em: http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:hj:diva-36384, 2017. Acesso em: 22 dez. 2022.

ZANELLA, M. S.; BARROS, R. M. O. **Teoria dos Campos Conceituais**: situações problema da estrutura aditiva e multiplicativa de naturais. Curitiba: Editora CRV. 2014

ZAZKIS, R.; ROULEAU, A. Order of operations: On convention and met-before acronyms. **Educational Studies in Mathematics**, v. 97, n.2, p. 143–162, 2008. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/45185421. Acessado em: 22 dez. 2022.

APÊNDICE A

TEXTOS CIENTÍFICOS SOBRE EXPRESSÕES NUMÉRICAS DE 2000 A 2020

Fase	**Tipo de trabalho**	**Ano**	**Título**	**Autor**
A	The arithmeticteacher	1962	Orderofoperations in elementaryarithmetic.	Bender (1962)
A	Tese	2002	O Conhecimento Matemático Escolar: Operações com Números Naturais (e adjacências) no Ensino Fundamental	Gregolin (2002)
A	Dissertação	2003	Das sequências de padrões geométricos à introdução ao pensamento algébrico	Modanez (2003)
A	Dissertação	2003	Generalização de padrões geométricos: Caminho para a construção de expressões algébricas no Ensino Fundamental.	Nakamura (2003)
A	Dissertação	2004	Relações lógicas estabelecidas por alunos de uma quarta série do Ensino Fundamental	Oliveira (2004)
A	Dissertação	2005	Resolução de exercícios aritméticos e memória de trabalho	Kruzielski (2005)
A	Dissertação	2006	Expressões Aritméticas: Crenças, Concepções e Competências no entendimento do Professor Polivalente	Arrais (2006)
A	Revista do Professor	2007	Expressões numéricas: sugestões de histórias matemáticas para uso em sala de aula	Lorenzi; Chies (2007)
A	Dissertação	2008	O jogo como recurso didático na apropriação dos números inteiros: uma experiência de sucesso	Soares (2008)
A	Dissertação	2009	O Ensino e aprendizagem das expressões numéricas para 5ª série do Ensino Fundamental com a utilização do jogo Contig 60	Silva (2009)
A	Dissertação	2010	Alternativas metodológicas para o ensino de expressões numéricas: estratégias para construção de aprendizagens significativas	Lopes (2010)
A	Tese	2011	Desenvolvimento de conceitos algébricos por professores dos anos iniciais do ensino fundamental	Freire (2011)
A	Tese	2011	Sobre o papel da língua no desenvolvimento de habilidades cognitivas superiores: representação, recursividade e cognição numérica	Marcilese (2011)
A	CNEM	2011	Contextualizando o ensino das expressões numéricas no ensino fundamental	Parmegianni (2011)
A	Dissertação	2011	Formulação e resolução de problemas matemáticos: um estudo exploratório sobre o pensamento de crianças do ensino fundamental	Santiago (2011)
A	Capítulo de livro	2011	As expressões numéricas, o Contig 60® e a formação de professores do Ensino Fundamental I	Silva; Arruda (2011)
A	Dissertação	2012	Características da resolução de problemas por alunos do 4º ano do ensino fundamental	Watabe (2012)
A	Dissertação	2013	O uso de vídeo-aulas de matemática como metodologia para a melhoria da qualidade do ensino nos anos iniciais na escola municipal Henrique Dias no município de Porto Velho - RO.	Menezes Junior (2013)
A	Dissertação	2013	A passagem de textos em língua materna para expressões aritméticas, mediada pelo uso de uma calculadora	Salomão (2013)

A	Dissertação	2014	Expressões numéricas e suas abordagens em livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental adotados por uma escola pública de Cuiabá-MT	Freitas (2014)
A	Dissertação	2014	Desenvolvimento de competências e habilidades nas expressões numéricas por meio do desafio dos quatro algarismos para o 6º ano do ensino fundamental	Maciel (2014)
A	Dissertação	2014	Aritmética modular e criptografia no ensino básico	Souza Neto (2014)
A	Dissertação	2015	Números decimais e o tema transversal trabalho e consumo: um experimento utilizando uma sequência didática eletrônica	Fiuza (2015)
A	Dissertação	2015	Tabuleiro das Expressões: Um Auxiliador no Ensino da Matemática para Alunos com Deficiência Visual	Tostes (2015)
A	Dissertação	2016	Expressão numérica: a hierarquia das quatro operações matemáticas	Ottes (2016)
A	Dissertação	2018	Contribuições da resolução de problemas em aulas de reforço de Matemática para alunos do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública municipal de Teixeira de Freitas/BA	Alves (2018)
A	Tese	2018	Identificação, conversão e tratamento de registros de representações semióticas auxiliando a aprendizagem de situações combinatórias	Montenegro (2018)
A	Dissertação	2018	Um objeto de aprendizagem como proposta didática para a aprendizagem das expressões numéricas com decimais	Paim (2018)
A	Dissertação	2018	Pensamento algébrico: quais elementos são identificados por professores de matemática em atividades com este foco?	Soares (2018)
A	Dissertação	2019	A matemática nos períodos iniciais dos cursos técnicos e formas de abordagem	Batista Junior (2019)
A	Dissertação	2019	(Re)Construindo Saberes: Uma Proposta De Portal Educacional Para Ingressantes No Ensino Superior	Vieira (2019)
B	ENEM	2013	A vida por trás das expressões	Silva; Oliveira (2013)
B	ENEM	2013	Bingo das expressões numéricas	Oliveira *et al*. (2013),
B	ENEM	2013	Experiências promovidas pelos jogos “Cubra 12” e “Contig 60” para abordagem de cálculo mental e expressões numéricas no programa mais educação	Sá (2013)
B	ENEM	2019	A produção de enunciados de problemas para a proposta de (re)formulação e resolução com o uso de tecnologias digitais no ensino de expressões numéricas	Figueiredo, Groenwaldt e Recalcati (2019),
B	ENEM	2019	Estágio supervisionado: uma proposta de trilha matemática para o ensino de expressões numéricas	Silva e Moura (2019)
B	ENEM	2019	Processos de argumentação em livros didáticos: expressões numéricas	Santos, Nascimento e Attie (2019)
B	ENEM	2019	Eliminando ambiguidades de expressões aritméticas com o uso correto do seu dialeto	Thomé, Cunha e Velasco (2019)

C	Zetetiké	2014	Construindo significado para expressões numéricas multiplicativas a partir do jogo de mensagem	Barbosa; Magina (2014)
C	Bolema	2019	Uma Leitura Utilizando a Lente da Teoria Antropológica do Didático acerca de uma Aula sobre Expressões Numéricas[29]	Goulart; Farias (2019)
C	Paradigma	2020	Diseño instruccional desarrollado con estudiantes de pregrado en Matemáticas con el tema Expresiones numéricas	Groenwaldt (2020)
D	Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa	2009	Desenvolvimento do sentido do numero na multiplicação. Um estudo de caso com crianças de 7 /8 anos.	Rocha; Menino (2009)
D	Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa	2010	Aquisição das operações combinatórias por alunos pré-universitários através de uma intervenção de ensino.	Fernandes; Correia; Guzmán (2010)
D	Interacções	2012	A mobilização da capacidade de generalização através da exploração de estratégias de cálculo: um estudo com alunos do 4.º ano	Mestre; Oliveira (2012)
D	Bolema	2014	Narrativas Multimodais: a imagem dos matemáticos em performances matemáticas digitais	Silva (2014)
D	Educação Matemática Pesquisa	2017	Concepções de professores de matemática do ensino básico sobre a álgebra escolar	Santos; Pereira; Nunes (2017)
D	Educação Matemática Pesquisa	2017	Análise praxeológica de livros didáticos de matemática: o caso dos números binários	Mendes (2017)
D	Educação Matemática Debate	2017	Um olhar sobre a hierarquia das quatro operações aritméticas nas expressões numéricas.	Ottes; Fajardo (2017)
D	Educação Matemática Pesquisa	2018	Congruência semântica e equivalência referencial em problemas envolvendo equações de 1º grau	Lourenço; Oliveira (2018)
D	Revista da UIIPS – Unidade de Investigação do Instituto Politécnico de Santarém	2018	Erros cometidos pelos alunos de 6.º ano a operar com números racionais	Almeida; Branco (2018)
D	Em Teia	2019	A (re)formulação e resolução de problemas com o uso de recursos tecnológicos digitais na Educação Matemática Financeira	Figueiredo; Groenwald; Recalcati (2019)
D	Bolema	2019	Estratégias, Representações e Flexibilidade na Resolução de Tarefas de Comparação Multiplicativa	Cebóla; Brocardo (2019)
D	Educação Matemática Pesquisa	2020	A linguagem simbólica e a resolução de problemas matemáticos no 8º ano do Ensino Fundamental	Vieira; Rios; Vasconcelos (2020)
D	REMATEC. Revista de Matemática, Ensino e Cultura	2020	Resolução de problemas e expressões numéricas: o quadro dos quatro quatros e o nunca dois e números binários	Soares; Pirola (2020)
D	Educação e realidade	2020	Representações Intermediárias na Aprendizagem de Situações Combinatórias	Montenegro; Borba; Bittar (2020)

[29] Presente também na Fase D

APÊNDICE B

TERMO DE CONSENTIMENTO |LIVRE E ESCLARECIDO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE - FURG PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS-PPGEC

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Meu nome é **Rita de Cássia de Souza Soares Ramos**, sou aluna de **doutorado** do curso de **Pós-graduação em Educação em Ciências – Química da Vida e Saúde** da Universidade Federal do Rio Grande, e estou realizando esta pesquisa intitulada "**Situações com expressões numéricas: imbricações dos campos conceituais aditivo e multiplicativo**", sob orientação do professor **Dr. João Alberto da Silva**.

Após realizar o processo de consentimento com você e seu (pessoa menor de 18 anos), gostaria de seu consentimento para ele(ela) participar do estudo, respondendo a uma entrevista que será gravada. Os dados coletados serão usados somente nesta pesquisa, que possui o objetivo de **analisar os processos de pensamento de estudantes de 6º ano em situações que podem ser representadas por expressões numéricas, por meio do método clínico, a fim de compreender como se estruturam as generalizações dos procedimentos algorítmicos a partir da conceitualização**. Dessa maneira, a pesquisa trará benefícios como **possibilitar condições de ensino e aprendizagem de expressões numéricas a partir da análise das concepções dos estudantes, bem como de seus processos de pensamento na resolução de situações com as quatro operações.** Os riscos da pesquisa são **interferência na vida e na rotina dos sujeitos, embaraço de interagir com estranhos, e com a presença da câmera**. Frente a estes riscos o pesquisador se compromete em garantir para o(a) participante a assistência imediata, integral e gratuita. A participação dele(a) é livre de despesas pessoais e de compensação financeira. Se existir qualquer despesa adicional, será absorvida pelo orçamento da pesquisa. É garantido o direito de se manter informado(a) sobre os resultados parciais e finais, os quais serão publicados em eventos e periódicos científicos, mantendo-se o anonimato do participante. Garante-se também a liberdade de retirada do consentimento e do assentimento em qualquer etapa da pesquisa, sem prejuízo à continuidade do atendimento pela instituição. Para tanto, você poderá solicitar a retirada da participação de seu(sua) (pessoa menor de idade), entrando em contato comigo (endereço: **Rua Princesa Isabel, 85, email: ritamatematica@gmail.com, telefone: (53) 981183013**) ou pelo CEP-FURG (endereço: segundo andar do prédio das pró-reitorias, carreiros, avenida Itália, Km 8, bairro Carreiros, Rio Grande-RS, e-mail: cep@furg.br, telefone: 3237.3011). O CEP/FURG é um comitê responsável pela análise a aprovação ética de todas as pesquisas desenvolvidas com seres humanos, assegurando o respeito pela identidade, integridade, dignidade, prática da solidariedade e justiça social. Você receberá uma via deste termo e outra ficará com o(a) pesquisador(a). Você aceita participar?

Eu ____ concordo em consentir a

participação do(a) ____ nesta pesquisa.

____

Assinatura do(a) responsável.

Data ___/____/____

____

Assinatura do(a) pesquisador(a) responsável.

Data ___/____/___

APÊNDICE C

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE - FURG PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS-PPGEC

Termo de Assentimento Livre e Esclarecido

Você está sendo convidado para participar da pesquisa **Situações com expressões numéricas: imbricações dos campos conceituais aditivo e multiplicativo**. Seus pais permitiram que você participe. Queremos **analisar os processos de pensamento de estudantes de 6º ano em situações que podem ser representadas por expressões numéricas, por meio do método clínico, a fim de compreender como se estruturam as generalizações dos procedimentos algorítmicos a partir da conceitualização.**

As crianças que irão participar dessa pesquisa têm de **10 a 14 anos** de idade. Você não precisa participar da pesquisa se não quiser, é um direito seu, não terá nenhum problema se desistir. A pesquisa será feita na sua escola, onde as crianças irão **responder algumas perguntas e jogar alguns jogos**. Para isso, serão usados **jogos e materiais didáticos**. O uso dos **jogos didáticos** é considerado seguro, mas é possível ocorrer **interferência na vida e na rotina dos sujeitos, embaraço de interagir com estranhos, e com a presença da câmera**.

Caso aconteça algo errado, você pode nos procurar pelo telefone **(53)981183013** da pesquisadora **Rita de Cássia de Souza Soares Ramos**, ou do CEP da FURG **(53) 3237.3011.** O CEP/FURG é um comitê responsável pela análise a aprovação ética de todas as pesquisas desenvolvidas com seres humanos, assegurando o respeito pela identidade, integridade, dignidade, prática da solidariedade e justiça social. Mas há coisas boas que podem acontecer como **ajudar outras crianças, com o benefício de possibilitar condições de ensino e aprendizagem de expressões numéricas a partir da análise das concepções dos estudantes, bem como de seus processos de pensamento na resolução de situações com as quatro operações**. Se você morar longe **de Pelotas**, nós daremos a seus pais dinheiro suficiente para transporte, para também acompanhar a pesquisa. Ninguém saberá que você está participando da pesquisa, não falaremos a outras pessoas, nem daremos a estranhos as informações que você nos der. Os resultados da pesquisa vão ser publicados, mas sem identificar as crianças que participaram da pesquisa. Quando terminarmos a pesquisa **nós vamos publicar uma tese com os resultados**. Se você tiver alguma dúvida, você pode me perguntar. Eu escrevi os telefones na parte de cima desse texto.

Eu ___________________________________ aceito participar da pesquisa **Situações com expressões numéricas: imbricações dos campos conceituais aditivo e multiplicativo**, que tem o objetivo de analisar **os processos de pensamento de estudantes de 6º ano em situações que podem ser representadas por expressões numéricas, por meio do método clínico, a fim de compreender como se estruturam as generalizações dos procedimentos algorítmicos a partir da conceitualização**. Entendi as coisas ruins e as coisas boas que podem acontecer. Entendi que posso dizer "sim" e participar, mas que, a qualquer momento, posso dizer "não" e desistir que ninguém vai ficar furioso. A pesquisadora tirou minhas dúvidas e conversou com os meus responsáveis.

Recebi uma cópia deste termo de assentimento e li e concordo em participar da pesquisa.

____

Assinatura do(a) menor.

Data ___/____/____

____

Assinatura da pesquisadora.

Data ___/____/___

CEP-FURG - Endereço: segundo andar do prédio das Pró-reitorias, Carreiros, Avenida Itália, Km 8, bairro Carreiros, Rio Grande-RS
e-mail: cep@furg.br, telefone: 3237.3011