



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE – FURG  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS  
EXATAS - PPGECE

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA:  
POSSIBILIDADES DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO  
GEOMÉTRICO NO QUINTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL EM  
CENÁRIOS PARA INVESTIGAÇÃO

CARLA JORDANA RÖNNAU

ORIENTADOR: PROF. DR. FERNANDO KOKUBUN

SANTO ANTÔNIO DA PATRULHA, RS  
2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS  
EXATAS – PPGECE

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA:  
POSSIBILIDADES DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO  
GEOMÉTRICO NO QUINTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL EM  
CENÁRIOS PARA INVESTIGAÇÃO

CARLA JORDANA RÖNNAU

Dissertação apresentada ao  
Programa de Pós-Graduação em  
Ensino de Ciências Exatas, da  
Universidade Federal do Rio  
Grande – FURG, Campus Santo  
Antônio da Patrulha, como parte da  
exigência para obtenção do grau de  
Mestre em Ensino de Ciências  
Exatas, na linha de pesquisa Ensino  
e Aprendizagem.

Prof. Dr. Fernando Kokubun  
Orientador

Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Patrícia Ignácio  
Coorientadora

SANTO ANTÔNIO DA PATRULHA, RS  
2023

Ficha catalográfica

|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| R773e | <p>Rönnau, Carla Jordana</p> <p>Educação matemática crítica : possibilidades de desenvolvimento do pensamento geométrico no quinto ano do ensino fundamental em cenários para investigação / Carla Jordana Rönnau. – 2023.</p> <p>132 f.</p> <p>Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, Santo Antônio da Patrulha/RS, 2023.</p> <p>Orientador: Dr. Fernando Kokubun.</p> <p>Coorientadora: Dra. Patrícia Ignácio.</p> <p>1. Ensino fundamental 2. Educação básica 3. Quinto ano<br/>I. Kokubun, Fernando II. Ignácio, Patrícia III. Título.</p> <p>CDU 37:51</p> |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## **FOLHA DE APROVAÇÃO**

Dissertação defendida por Carla Jordana Rønnau e aprovada em 20/12/2023  
pela comissão examinadora constituída pelos professores:

---

Prof. Dr. Fernando Kokubun  
Universidade Federal do Rio Grande (FURG)

---

Prof. Dra. Patrícia Ignácio  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)

---

Prof. Dra. Suelen Assunção Santos  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)

---

Prof. Dra. Claudianny Amorim Noronha  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)

---

Prof. Dr. Lucas Ogliari  
Universidade Federal do Rio Grande (FURG)

*Dedico essa pesquisa aos  
meus filhos; Minha mãe; E aos  
queridos colegas e amigos, que  
me acompanharam nessa  
caminhada.*

## AGRADECIMENTOS

A satisfação é indescritível em estar nesse momento escrevendo os agradecimentos. Enfim, viver a experiência da pesquisa no mestrado foi gratificante e transformador. Nesses vinte e nove meses de pesquisa muitas situações ocorreram, mas nada me fez desistir dessa certificação, amparada em Deus sempre a cada exaustão, a Ele meu maior agradecimento.

O agradecimento especial faço ao Professor Skovsmose, ao responder gentilmente o email enviado em meio a dúvidas do caminho a seguir em se tratando do Cenários para investigação envolvendo a geometria e as questões ambientais

Agradeço aos meus filhos Pablo Vinícius Bomerich e João Pedro Rønnau da Rosa pelo companheirismo e apoio, e não esquecendo os cafés, muitos cafés. Obrigada filhos amados por estarem comigo em mais essa caminhada, agora vencida.

A minha mãe Iara Terezinha Novo Rønnau por todo incentivo que tudo iria dar certo no tempo certo, bastava confiar e continuar dedicada na pesquisa. Gratidão mãe!

Ao meu pai, Sérgio Luiz Rønnau que deixou esse plano antes mesmo do meu ingresso no mestrado, mas que contribuiu com seus conhecimentos matemáticos e geométricos envolvidos no trabalho braçal que realizava. Mesmo nunca tendo frequentado os bancos escolares, muito sabia em torno de cálculos matemáticos, principalmente em área, perímetro, entre outros. Envolto no conhecimento do Teorema de Pitágoras, para a construção de casas, o que me envolvia para descobrir como calcular as medidas do chamado *esquadro da casa*, sendo a ajudante de pedreiro com meus sete, oito anos de idade.

Ao meu querido orientador Professor Dr. Fernando Kokubun por ter me acolhido no Programa do PPGECE e por guiar meu caminho pela pesquisa. Agradeço ao livro *Diálogo e aprendizagem em Educação Crítica* (ALRO; SKOVSMOSE, 2021), importante instrumento que auxiliou na construção da pesquisa.

A minha querida Professora Dr<sup>a</sup> Patrícia Ignácio pelo aceite de ser a coorientadora desta pesquisa. E ser responsável por essa certificação, a partir de um convite em meados de 2019, para adentrar como aluna especial no Programa do

PPGECE, estando cursando a Pedagogia/FURG, minha segunda formação na graduação.

Aos participantes da banca de qualificação, Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Suelen e Prof. Dr. Lucas Nunes Ogliari, meu agradecimento pelas valorosas contribuições para a continuação e conclusão da pesquisa.

Ao meu querido amigo Dionata Gustavo Schöenardie que a FURG me presenteou durante a pesquisa. Também é meu colega professor no município de Taquara/RS, desde 2021. Que tenho um apreço por seu companheirismo.

Aos professores da FURG, do Campus Santo Antônio da Patrulha e, em especial, aos do Programa de Pós-graduação em Ciências Exatas, pelos momentos de aprendizagem nas diferentes disciplinas cursadas.

Aos amigos que me acompanham de longa data e aqueles que selaram a amizade no caminhar da pesquisa. Obrigada pelo ombro amigo, abraços de conforto nos momentos de aflição e palavras de carinho.

A todos, meu 'muito obrigado! E amo vocês!

*“Ensinar não é transferir conhecimento,  
mas criar possibilidades  
para a sua própria produção  
ou a sua construção.”*

***Paulo Freire***

## RESUMO

A matemática necessita seguir caminhos que a tornem um movimento crítico nas salas de aula, sendo necessárias aprendizagens que possibilitem desenvolver habilidades nos estudantes de forma a contribuir para com a construção de uma sociedade mais crítica e autônoma, ultrapassando os muros da escola, rompendo com aprendizagens mecânicas que levam a atitudes e pensamentos limitados. Para tanto a Educação Matemática Crítica (EMC), segundo Skovsmose (2000, 2001, 2008, 2014, 2017) traz para a discussão uma possibilidade, através dos Cenários para investigação, o sentido de desenvolver atividades por meio dos diferentes ambientes de aprendizagens propostos por essa abordagem, e, pensando no estudante como sujeito de ação. Um dos seus propósitos, considera o diálogo na qualidade de uma proposta de ensino e aprendizagem, voltado à participação efetiva do estudante na construção da argumentação pedagógica em torno da prática produzida pela interlocução com o professor através do convite ao diálogo (ALRO; SKOVSMOSE, 2021; MILANI, 2020). Aliado a essa discussão, a pesquisa busca na geometria, um campo didático com possibilidades de conexão com os Cenários para investigação, no intuito de aprimorar o pensamento geométrico voltado para as práticas pedagógicas em torno da EMC, embasados nos estudos de Pavanello (1989, 1993, 1995); Lorenzato (1995, 2006, 2008, 2015); Kaleff (1994, 2007, 2009); Pais (1996). Trata-se, portanto, de uma pesquisa qualitativa, caracterizada como pesquisa participante, realizada com estudantes do 5º ano de uma escola municipal, situada no Vale do Paranhana. A coleta de dados ocorreu por meio de áudios que foram transcritos e escritas espontâneas dos 27 estudantes participantes da pesquisa, além do caderno de campo da professora pesquisadora. Coletânea de dados derivada das proposições dos Cenários para investigação, em cinco encontros de 2 períodos, durante uma semana. A análise de conteúdo, conforme Bardin (2016), foi a utilizada para apreciar os dados coletados. E, como resultado, emergiu em um produto educacional através da criação de um Guia Didático que servirá de ferramenta aos professores do Ensino Fundamental na proposta de Cenários para investigação na aprendizagem de geometria, e também de uso para a comunidade acadêmica.

**Palavras-chaves:** Quinto ano; Ensino Fundamental; Educação Básica.

## ABSTRACT

Mathematics needs to follow paths that make it a critical movement in the classroom, requiring learning that makes it possible to develop skills in students in order to contribute to the construction of a more critical and autonomous society, going beyond the walls of the school, breaking with learning mechanics that lead to limited attitudes and thoughts. To this end, Critical Mathematics Education (CME), according to Skovsmose (2000, 2001, 2008, 2014, 2017) brings to the discussion a possibility, through Scenarios for Investigation, the sense of developing activities through the different learning environments proposed by this approach, and, thinking of the student as a subject of action. One of its purposes considers dialogue as a teaching and learning proposal, aimed at the effective participation of the student in the construction of pedagogical argumentation around the practice produced by the dialogue with the teacher through the invitation to dialogue (ALRO; SKOVSMOSE, 2021; MILANI, 2020). Allied to this discussion, the research seeks geometry, a didactic field with possibilities of connection with Scenarios for Investigation, in order to improve geometric thinking focused on pedagogical practices around CME, based on the studies of Pavanello (1989, 1993, 1995); Lorenzato (1995, 2006, 2008, 2015); Kaleff (1994, 2007, 2009); Pais (1996). This is, therefore, a qualitative research, characterized as participatory research, carried out with 5th year students from a municipal school, located in Vale do Paranhana. Data collection occurred through audios that were transcribed and spontaneous writings from the 27 students participating in the research, in addition to the research teacher's field notebook. Collection of data derived from the propositions of the Scenarios for Investigation, in five meetings of 2 periods, during one week. Content analysis, according to Bardin (2016), was used to evaluate the data collected. And, as a result, an educational product emerged through the creation of a teaching guide, which will serve as a tool for elementary school teachers in proposing Scenarios for Investigation in geometry learning, and also for use by the academic community.

**Keywords:** Fifth year; Elementary School; Basic education.

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                |     |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 1– Formação do pensamento geométrico conforme Pais.....                 | 47  |
| Figura 2 - Processo de Comunicação.....                                        | 71  |
| Figura 3 - Esboço do processo da Análise de Conteúdo.....                      | 74  |
| Figura 4 - Questionamento enviado para as famílias.....                        | 79  |
| Figura 5 - Foto da situação ao questionamento.....                             | 81  |
| Figura 6 - Resposta ao questionamento.....                                     | 82  |
| Figura 7 - Registro em desenho representativo da condição das estradas.....    | 83  |
| Figura 8- Imagem convite elaborada a partir de um questionamento.....          | 89  |
| Figura 9 - Representação do trajeto da escola até a casa do (E08).....         | 94  |
| Figura 10 - Representação do trajeto da escola até a casa do (E15).....        | 95  |
| Figura 11 - Estudante navegando pelo aplicativo Google Earth.....              | 99  |
| Figura 12 - Estudante (E24) observando e contornando a malha quadriculada..... | 101 |

## LISTA DE QUADROS

|                                                                              |     |
|------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Quadro 1 – Ambientes de aprendizagem.....                                    | 27  |
| Quadro 2 - Ambiente de aprendizagem do tipo (1).....                         | 28  |
| Quadro 3 - Descrição dos níveis da Teoria de Van Hiele.....                  | 50  |
| Quadro 4 - Resultado da pesquisa .....                                       | 56  |
| Quadro 5 - Instrumentos da coleta de dados .....                             | 69  |
| Quadro 6 - As etapas da Análise de Conteúdo .....                            | 72  |
| Quadro 7 - Unidade Temática geometria 5º ano do EF.....                      | 76  |
| Quadro 8- Planejamento das proposições em aprendizagem em geometria.....     | 84  |
| Quadro 9 - Compreensão dos estudantes da <i>imagem convite</i> .....         | 90  |
| Quadro 10 - Recorte das falas pertinentes a categorização.....               | 92  |
| Quadro 11 - Levantamento das opiniões <sup>1</sup> de como se localizar..... | 97  |
| Quadro 12 - Elementos observados em diálogo.....                             | 100 |

---

<sup>1</sup> Estão citadas somente as falas com maior relevância para a pesquisa.

## SUMÁRIO

|                                                                                                                                          |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>1 INTRODUÇÃO.....</b>                                                                                                                 | <b>16</b>  |
| <b>2 CONCEITUANDO A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA (EMC).....</b>                                                                           | <b>21</b>  |
| 2.1 O que e como se constitui a Educação Matemática Crítica.....                                                                         | 21         |
| 2.2 Adentrando nos Cenários para investigação.....                                                                                       | 25         |
| 2.3 Um convite aos Cenários para investigação é um convite ao diálogo.....                                                               | 33         |
| 2.4 Backgrounds: as vivências.....                                                                                                       | 34         |
| 2.5 Foregrounds: uma maneira de como vivenciar situações.....                                                                            | 37         |
| <b>3 APORTES TEÓRICOS QUE EMBASAM A GEOMETRIA E O PENSAMENTO GEOMÉTRICO.....</b>                                                         | <b>41</b>  |
| 3.1 Conhecendo a geometria do passado para refletir sobre o presente.....                                                                | 41         |
| 3.2 A geometria e o desenvolvimento de habilidades.....                                                                                  | 43         |
| 3.3 Pensamento geométrico e a busca por uma definição.....                                                                               | 47         |
| 3.4 A Teoria de Van-Hiele no desenvolvimento do pensamento geométrico.....                                                               | 51         |
| <b>4 CENÁRIOS PARA INVESTIGAÇÃO E A GEOMETRIA: O QUE DIZEM AS PESQUISAS... 56</b>                                                        |            |
| <b>5 PERCURSOS METODOLÓGICOS: um caminho para elaborar Cenários para investigação.....</b>                                               | <b>65</b>  |
| 5.1 Caracterização da Pesquisa Participante.....                                                                                         | 65         |
| 5.2 Caracterização da região, comunidade e dos sujeitos de pesquisa.....                                                                 | 66         |
| 5.2.1 O porquê da região escolhida para a pesquisa.....                                                                                  | 66         |
| 5.3 Descrição da Escola da pesquisa.....                                                                                                 | 67         |
| 5.4 Descrição dos Participantes da Pesquisa.....                                                                                         | 69         |
| 5.5 Definição dos instrumentos para Coleta de Dados.....                                                                                 | 70         |
| 5.6 Caracterização da Análise de Dados.....                                                                                              | 71         |
| <b>6 DELINEAMENTO DAS PROPOSIÇÕES DE CENÁRIOS PARA INVESTIGAÇÃO NA APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA POR MEIO DO CONVITE PARA O DIÁLOGO.....</b> | <b>77</b>  |
| 6.1 Proposições de Cenários para investigação na aprendizagem de Geometria no Quinto ano.....                                            | 80         |
| <b>7 ELEMENTOS NECESSÁRIOS PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO A PARTIR DE UM CONVITE AOS CENÁRIOS PARA INVESTIGAÇÃO....</b> | <b>87</b>  |
| 7.1 A leitura de uma imagem por meio de um convite ao diálogo e a relação com o pensamento geométrico.....                               | 88         |
| 7.2 Os entendimentos de localização num cenário para investigação e o pensamento geométrico.....                                         | 94         |
| 7.2.1 Descrição do mapa do trajeto do estudante (E08) da escola x casa.....                                                              | 95         |
| <b>8 PRODUTO EDUCACIONAL.....</b>                                                                                                        | <b>103</b> |
| 8.1 Guia Didático - GEODERA - Geometria da Nova Era.....                                                                                 | 103        |
| <b>9 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>                                                                                                       | <b>106</b> |
| <b>REFERÊNCIAS.....</b>                                                                                                                  | <b>110</b> |
| <b>APÊNDICES.....</b>                                                                                                                    | <b>118</b> |
| <b>APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE).....</b>                                                               | <b>119</b> |
| <b>APÊNDICE B – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TALE).....</b>                                                                | <b>123</b> |

|                                                                                                                 |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>APÊNDICE C – TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA GRAVAÇÃO DE VOZ E/OU REGISTRO DE IMAGENS (FOTOS E/OU VÍDEOS).....</b> | <b>127</b> |
| <b>APÊNDICE D – CARTA DE ANUÊNCIA DA ESCOLA.....</b>                                                            | <b>128</b> |
| <b>APÊNDICE E – MODELO DE DIÁRIO DE CAMPO.....</b>                                                              | <b>130</b> |
| <b>ANEXO.....</b>                                                                                               | <b>131</b> |
| <b>ANEXO A.....</b>                                                                                             | <b>132</b> |

## 1 INTRODUÇÃO

Vivemos no século XXI e, para tanto, são necessárias atitudes e reflexões muito rápidas, além de uma postura crítica para a compreensão das inúmeras informações que recebemos constantemente. Nesse sentido, são necessárias aprendizagens que possibilitem desenvolver habilidades nos sujeitos para contribuir com a construção de uma sociedade mais autônoma, ultrapassando os limites das salas de aula, rompendo com aprendizagens mecânicas que levam a atitudes e pensamentos limitados.

Segundo Pavanello (1993, p.16), a geometria “[...] pode proporcionar o desenvolvimento de um pensamento crítico e autônomo”, um pensamento mais elaborado para o enfrentamento das adversidades do cotidiano, e estruturado para tomada de decisão frente aos obstáculos. Pensar com a capacidade de raciocinar, como aponta Lorenzato (1995), é observar que a geometria exige que os estudantes tenham uma forma específica de raciocínio.

A geometria e suas diferentes nuances estão presentes na vida da pesquisadora, com destaque desde os seus estudos no Ensino Fundamental, a partir da exploração de atividades como a localização pelo nascer do sol, marcando com o braço direito estendido o ponto cardeal leste e na outra extremidade do corpo, com o braço esquerdo o ponto oeste. Também está guardado nas memórias de infância, a construção de desenhos em perspectiva usando a simetria nos traçados de círculos com o uso de compasso, régua e medidas. Todos esses assuntos aguçaram a curiosidade para o conhecimento geométrico, que na infância nem sabia realmente que se tratava de estudos elencados à geometria, e que, ao longo da vida de estudante, pesquisadora e docente, despertaram o interesse pelas diferentes esferas do conhecimento geométrico.

O interesse por esse campo de conhecimento ressurgiu durante a graduação de Licenciatura de Matemática, ao cursar disciplinas referentes ao desenvolvimento de atividades em torno do conhecimento geométrico, que resgatam memórias descritas anteriormente, e que puderam ser relacionadas com o estudo da geometria.

A pesquisadora, logo que concluiu a graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Luterana do Brasil (ULBRA/2006) e antes mesmo da formatura, ingressou no curso de Especialização em Geometria Analítica e Espacial

pelo Complexo de Ensino Superior de Cachoeirinha (CESUCA), Faculdade INEDI, no ano de 2006, concluindo este em 2008.

Sendo assim, é necessário refletir sobre nossa prática docente diária e as diferentes manifestações nos processos de ensino e de aprendizagem que anulam o pensamento crítico do estudante, conforme Freire (2005), privando-o de colocar as suas opiniões a respeito do assunto abordado. Retratando, infelizmente, um ensino centrado no professor, na maioria das escolas brasileiras, deixando de lado contribuições riquíssimas dos estudantes.

Partindo de uma pesquisa elaborada para o trabalho de conclusão do curso (TCC) de Pedagogia da FURG, ocorrido no primeiro semestre de 2021, tendo como resultado a produção escrita do TCC intitulado 'Percepções de Professores sobre o Ensino de Geometria no Quinto Ano no Ensino Fundamental'. Notou-se a necessidade de aprofundar a pesquisa na esfera da aprendizagem de geometria nos Anos Iniciais, especificamente no quinto ano do Ensino Fundamental. Justificada pelos dados coletados em torno de uma geometria atrelada ao reconhecimento de figuras, caracterizando a aprendizagem no estágio inicial dos Níveis de Van Hiele (KALEFF, 1994). O estudo descrito trouxe pela Análise de Conteúdo (BARDIN, 2016), a conclusão de um ensino de geometria ligado aos conteúdos e metodologias encontradas nos livros didáticos. Centrado basicamente na exploração de figuras geométricas, dando a entender que os professores pouco exploram os conteúdos de geometria pelo desconhecimento do potencial deste para o desenvolvimento do pensamento, segundo Pavanello (1993), mais autônomo e atrelado ao raciocínio apurado, denominado como pensamento geométrico.

Desenvolver atividades de ensino em geometria, mediante momentos de investigação e exploração lúdica com diferentes materiais é romper com barreiras alicerçadas em torno de uma aprendizagem tradicional e depositante, (FREIRE, 2005). Isso porque, "[...] quando o professor permite a manipulação ou a construção do objeto, sua percepção espacial pode ser mais completa" (LORENZATO, 2015, p.55).

Pensando no estudante como sujeito de ação, um dos propósitos dos Cenários para investigação (SKOVSMOSE, 2014) é convidar os estudantes a se envolverem no processo de exploração, buscando soluções através do diálogo. Os cenários para investigação, na qualidade de uma proposta de ensino, está voltado à participação efetiva do estudante na construção da argumentação pedagógica em

torno de uma prática construída pela interlocução. Alguns questionamentos elencados pela pesquisadora e docente para a justificativa dessa pesquisa, foi a preocupação em resgatar a localização espacial a partir de si. Pois, o corpo é o centro do sujeito que necessita e precisa ser desenvolvido, inicialmente na idade da Educação Infantil, para seguir a edificação de suas estruturas cognitivas e mentais na elaboração do pensamento e do raciocínio mais apurados, refletindo na organização espacial na totalidade.

Para respaldar a pesquisa, foram usados aportes teóricos embasados em estudos como os de Pavanello (1989, 1993, 1995); Lorenzato (1995, 2006, 2008, 2015); Kaleff (1994, 2007, 2009), corroborando com a pesquisa no quesito do conhecimento geométrico. Estudos de Skovsmose (2000, 2014) alicerçam os Cenários para investigação, metodologia de fundamentação para apoiar a Educação Matemática Crítica (EMC) no roteiro da investigação, sendo apoiada por Freire (2005) na perspectiva dialógica e autônoma.

O referencial teórico está alicerçado nos autores citados anteriormente e a base da metodologia se encontra embasada na abordagem qualitativa, do tipo pesquisa-participante, por meio de um convite ao diálogo. A partir do convite ao diálogo (ALRO e SKOVSMOSE, 2021) foram proporcionados momentos para o desenvolvimento dos Cenários para investigação aos estudantes da turma de 5º ano com a participação da pesquisadora como agente da ação docente. E com a pretensão de obter dados por meio dos instrumentos de coleta para formar a análise sistemática e os subsídios para a construção e elaboração do produto educacional.

Com o intuito de responder à pergunta de pesquisa, a presente dissertação estrutura-se em nove capítulos, descritos a seguir.

O primeiro capítulo trata da *Introdução*, acompanhada da pergunta de pesquisa *"De que modo os Cenários para investigação podem por meio de um convite ao diálogo contribuir para o desenvolvimento do pensamento geométrico em uma turma do quinto ano do Ensino Fundamental?"*. Do objetivo geral de *avaliar as possibilidades de desenvolver o pensamento geométrico a partir de um convite aos Cenários para investigação, em uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental*. E dos objetivos específicos projetados para a pesquisa, *apresentar, mediante literatura específica, os pressupostos que fundamentam os Cenários para investigação, problematizando-o a partir do ensino de geometria; mapear, por meio dos documentos oficiais e orientadores, os conhecimentos de geometria considerados*

*necessários ao 5º ano do ensino fundamental; analisar os estudos que propõe Cenário para Investigação na aprendizagem de geometria; sistematizar estratégias de aprendizagem no 5º ano do Ensino Fundamental por meio de Cenários para investigação que propiciem o desenvolvimento do pensamento geométrico; elaborar um Guia Didático para apoio aos professores do Ensino Fundamental na aprendizagem e desenvolvimento da geometria.*

O segundo capítulo, refere-se ao referencial teórico que respalda a pesquisa com a apresentação da discussão dos conceitos de Educação Matemática Crítica, Cenários para investigação, Convite ao diálogo, *Background* e o *Foreground*.

No terceiro capítulo, encontram-se sob o título *Aportes teóricos que embasam a geometria e o pensamento geométrico*, o aporte teórico que descreve um breve histórico da geometria no Brasil, sua importância para a formação do sujeito e apresenta os conceitos do pensamento geométrico e a Teoria de Van Hiele.

O quarto capítulo intitulado *Cenários para investigação e a geometria: o que dizem as pesquisas*, apresenta um conjunto de estudos resultantes de pesquisas que corroboram para o entendimento da importância e da relevância dos estudos em geometria nos Cenários para investigação pelo convite ao diálogo. Buscou-se em estudos apresentados na plataforma de 'Catálogo de Teses e Dissertações da Capes', na 'Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações' (BDTD), no repositório da FURG e no 'Google Acadêmico'.

*Tem-se, no quinto capítulo, Percursos Metodológicos: um caminho para elaborar Cenários para investigação, a metodologia adotada para a presente pesquisa com a caracterização de uma pesquisa participante; a descrição da região, da escola e do público-alvo; os instrumentos de coleta de dados; e a sistemática adotada para a análise dos dados coletados.*

*Para o sexto capítulo, Delineamento das proposições em Cenários para investigação na aprendizagem da geometria por meio do convite ao diálogo*, consta a descrição da proposta do Cenário para investigação com as proposições e suas etapas.

No sétimo capítulo, *Elementos necessários para o desenvolvimento do pensamento geométrico a partir de um convite aos Cenários para investigação*, temos a análise dos dados coletados, sob Análise de Conteúdo de Bardin (2016).

O oitavo capítulo, *Produto Educacional*, explica o produto educacional elaborado, o qual é um Guia Didático, que servirá de ferramenta de consulta para professores do Ensino Fundamental e comunidade acadêmica.

Finalizamos esta pesquisa no capítulo 9 com as *Considerações Finais* refletindo por meio dos objetivos projetados se foram alcançados e os resultados obtidos.

## 2 CONCEITUANDO A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA (EMC)

Neste capítulo apresento os aportes teóricos que fundamentam esta pesquisa. O capítulo apresenta um conjunto de estudos como resultado das pesquisas que corroboram para o entendimento da importância e relevância dos conceitos de Educação Matemática Crítica (SKOVSMOSE, 2001), ponto central da discussão desta pesquisa, sendo uma tendência vinculada a métodos diferenciados de ensinar e aprender matemática. Aprofundando o discurso com os conceitos de Cenários para investigação e o uso do convite ao diálogo como ferramentas diferenciadas ao contexto escolar. Conceitos importantes para o entendimento da participação do estudante, por meio de situações vividas, os *backgrounds*, na busca pela constituição de *foregrounds*.

### 2.1 O que e como se constitui a Educação Matemática Crítica

A matemática é uma ciência perfilada nos princípios do raciocínio lógico e na representação simbólica de resultados. E, por ser dita como exata, afasta-se da ideia do princípio social, essência de transformação dos aspectos políticos e sociais. Para tanto, o ensino de matemática necessita seguir caminhos que possibilitem o desenvolvimento de uma postura crítica dos professores e estudantes na e a partir da sala de aula. Esse debate trilha os caminhos da Educação Matemática Crítica (EMC).

Segundo Skovsmose (2001, p. 7), a EMC “[...] se preocupa fundamentalmente com aspectos políticos da Educação Matemática”, além disso, o autor defende a ideia de que “para ser crítica precisa reagir a contradições sociais”, complementa o autor (p.101). Assim, percebe-se que o papel da matemática é fazer dessa ciência um instrumento para além da absorção de conceitos, dando sentido ao aprendizado na conexão com problemas sociais e vividos no cotidiano.

A EMC é procedente da Educação Crítica, movimento estudantil de 1968 que questionou a neutralidade e objetividade da ciência e o formato de currículo conduzido pelo professor na educação superior. O movimento procurou formar a possibilidade de os estudantes participarem na decisão dos conteúdos do currículo, na busca de formar uma educação voltada para resolução de problemas e elaboração de projetos. Não levou muito tempo para o movimento da Educação

Crítica se expandir para a Educação Básica, alavancando projetos, trabalhos em grupos e abordagens temáticas. A educação baseada em problemas teve maior enfoque nas ciências humanas e sociais e a abordagem interdisciplinar se projeta até as exatas (SKOVSMOSE, 2008).

De acordo com Skovsmose (2008), a EMC edificou-se em estudos que não foram desenvolvidos especificamente para o estudo da Matemática, mas que a inspiraram. O primeiro deles está alicerçado em Freire (2005) que defende que por meio do diálogo entre estudante e professor pode ser feita a definição dos temas a serem trabalhados. Nesse sentido, o estudante é parte integrante do processo e o aprendizado ocorre a partir dos conhecimentos prévios, os quais são resultantes do seu convívio social e servem de alicerce para a construção de novos conhecimentos. O segundo apontado por Skovsmose (2008) foi a Teoria Crítica da Escola de Frankfurt, que propunha que as ciências sociais oferecessem contribuição ativa na emancipação do estudante. O desenvolvimento da Teoria Crítica e as preocupações com as relações entre matemática e desenvolvimento, propiciaram a ebulição de novas ideias no campo da Educação Matemática. Esta vislumbra a possibilidade de apropriação da matemática para o contexto social, sustentados pelos objetivos da democracia e construção de uma educação política com vistas à igualdade de direitos e à solidariedade coletiva.

A Educação Matemática Crítica tem em seus preceitos a preocupação não apenas no domínio dos conteúdos matemáticos e suas aplicações, mas também em como a Matemática pode interferir nos modelos sociais impostos pela sociedade. Por meio de um ensino voltado para a resolução de exercícios que não condiz com a realidade vivenciada pelos estudantes e que apresenta em sua estrutura apenas uma forma de resolução, acabamos por ter um processo que distância os estudantes da realidade na qual estão inseridos, afastando a possibilidade de agregar ao conhecimento matemático uma janela para a construção de um pensamento (FREIRE, 2019) crítico e autônomo.

Fazendo do conhecimento não somente um ato de mera transferência, mas de construção por meio de atividades que incluam o estudante como protagonista, a EMC preza por um processo de aprendizagem que traga o estudante para uma postura crítica frente à realidade que o envolve, possibilitando sua participação ativa, valorizando seus modos de agir e pensar perante sua cultura e expectativas.

Nessa pesquisa, a proposta é a de aproximar o sujeito inserido em sua realidade, buscando sua participação no processo de aprendizagem da geometria. É preciso que nas aulas de Matemática se discuta, além das possibilidades que a Matemática oferece, os limites que essa mesma Matemática pode ter (SKOVSMOSE, 2001). Em EMC, precisamos pensar em uma sala de aula onde professores e estudantes estejam envolvidos em um processo de diálogo e, para tanto, os estudantes precisam participar ativamente dos processos educacionais, mostrando por que, por exemplo, um modelo matemático leva em conta determinados fatores e não outros.

Sobre currículo, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN) retomam e afirmam que essa precisa possibilitar que “o estudante transcenda um modo de vida restrito a um determinado espaço social e se torne ativo na transformação de seu ambiente” (BRASIL, 1997, p. 28). Fazer do conhecimento não somente um ato de mera transferência, mas de construção por meio de atividades que incluam o estudante como protagonista, é um desafio e a possibilidade da EMC tem de munir o estudante com ferramentas para compreender e agir sobre as realidades nas quais está inserido.

A construção curricular impõe que sejam considerados aspectos relacionados aos contextos que dão sentido às ferramentas matemáticas e aos seus usos. Skovsmose (2001, p. 56) defende a ideia de se desenvolver nos estudantes uma competência democrática que seria “uma característica socialmente desenvolvida da competência que as pessoas a serem governadas devem possuir, de modo que possam ser capazes de julgar os atos das pessoas encarregadas de governar”.

O método tradicional de ensino da matemática ainda é, de modo geral, o mais comum nas escolas, onde o professor apresenta o conteúdo, faz alguns exemplos e passa exercícios, sem se preocupar com o processo de ensino e aprendizagem e o papel do aluno. Segundo Skovsmose (2001), a educação matemática tradicional ocorre quando a aula é baseada principalmente em exercícios pré-selecionados e organizados pelo professor, onde há apenas uma resposta correta.

[...] a educação matemática tradicional se enquadra no paradigma do exercício. Geralmente, o livro didático representa as condições tradicionais da prática de sala de aula. Os exercícios são formulados por uma autoridade externa à sala de aula. Isso significa que a justificação da relevância dos exercícios não é parte da aula de matemática em si. Além disso, a premissa central do paradigma do exercício é que existe uma, e somente uma resposta correta (SKOVSMOSE, 2000, p. 68-69).

Nesse perfil de aula, os exercícios são pensados com um comando externo para o processo de aprendizagem em aula, seguindo o livro didático, restringindo os espaços para perguntas que podem sair de um contexto de diálogo.

Assim, muitas vezes, o ensino de Matemática torna-se sem sentido para os estudantes que acabam por não enxergar as aplicações da Matemática no dia a dia. Skovsmose (2000) reflete que essa forma de ensino encontra-se no paradigma do exercício e que não há espaço nesse tipo de ensino para discussões ligadas à Educação Matemática Crítica.

A Educação Matemática Crítica envolve a capacidade de usar matemática e técnicas formais, enraizadas em um espírito crítico, para permitir que os estudantes entendam e transformem a sociedade, o que é essencial para o desenvolvimento da democracia em microssociedades ou sociedades na totalidade. A matemática pode tanto formatar quanto fornecer modelos normativos que podem ser usados para intervir nas relações sociais.

Segundo Skovsmose (2014, p. 11), “[...] não se reduz a uma subárea da educação matemática; assim como ela não se ocupa de metodologias e técnicas pedagógicas ou conteúdos programáticos. A Educação Matemática Crítica é a expressão de preocupações a respeito da educação matemática”. Sabemos que essa teoria é enquadrada por preocupações com situações críticas que envolvem autonomia, liberdade e justiça social. Entendemos como um campo educacional que visa ir além do que está incluído nos programas de estudos existentes nas instituições de ensino, ou seja, é um campo do conhecimento que tem como premissa básica oportunizar o desenvolvimento de processos de aprendizagem autônomos nas disciplinas envolvidas com o intuito de desenvolver o pensar criticamente.

Ao refletir sobre os princípios básicos da Educação Matemática Crítica, para a matemática em movimento, é possível para mim solidificar a certeza e o desejo de trazer esse ambiente crítico para minha sala de aula e por meio das disciplinas envolvidas promover o diálogo entre elas. Principalmente, me fez olhar para o público-alvo desse ambiente, os estudantes, através de seus diálogos de início de aula e semelhanças no relato de situações cotidianas enfrentada no caminho percorrido até a escola. E tentar entender como as situações vividas pelos estudantes têm relação com as aulas de matemática, assim oportunizando outras formas de ensinar.

Com relação a alguns dos conceitos teóricos descritos, pode-se observar que não são apenas as mudanças nos perfis dos estudantes que desencadeiam os problemas que enfrentamos em sala de aula, na educação e principalmente na disciplina de matemática na questão propriamente abordada aqui no campo da geometria. Há um passado que precisa ser revisto e analisado para que possamos entender a origem dos problemas e buscar possíveis soluções diante de uma realidade diferente.

Dessa forma, aprendemos que pode ser mais seguro manter os professores dentro da previsibilidade de sua zona de conforto seguindo de perto o que está previsto no plano de aula. Por outro lado, entendemos que trabalhar em zonas de risco, mesmo que os professores consigam lidar com o desconforto da imprevisibilidade, pode ser uma surpresa, pois acontecimentos não planejados podem enriquecer não só os estudantes como também o professor, construindo-se novas possibilidades de conhecimento. Entendemos que a sala de aula, não apenas a matemática, pode promover o crescimento do estudante, não apenas no próprio estudante, mas como parte integrante de uma sociedade em constante mudança. Numa sala de aula onde só a voz do professor é dominante, os estudantes são meros espectadores, e numa forma secular como a conhecemos, uma forma tradicional com exercícios intermináveis, pode deixar de proporcionar a oportunidade de questionar e prequestionar o mundo à sua volta.

## **2.2 Adentrando nos Cenários para investigação**

Na busca por uma matemática que ultrapasse as paredes e muros da escola, que esteja alinhada ao protagonismo do estudante e desenvolvimento da autonomia, propiciando meios e condições para uma aprendizagem ligada às diferentes situações do cotidiano e não só as usuais aulas tradicionais de matemática, a abordagem da EMC converge para os Cenários para investigação.

Skovsmose (2000) descreve os Cenários para investigação como um ambiente favorável à aprendizagem, pois coloca os estudantes como atores principais da proposta, que são convidados a participarem de atividades a serem desenvolvidas por sua aceitação ou não. O trabalho pedagógico por meio dos Cenários para investigação pode colaborar para a formação de cidadãos mais

críticos, tendo em vista que coloca o estudante na situação de atuante no processo de aprendizagem, além de tornar as aulas de Matemática mais significativas.

Entendemos que as salas de aula e as aulas de matemática podem proporcionar ao professor um ambiente onde ele possa pensar fora da caixa, ou seja, pensar em propostas de trabalho que despertem nos estudantes o interesse pelo aprendizado e interesse por ela nos estudantes, onde ocorre esse despertar, na busca do conhecimento. Portanto, de acordo com Skovsmose (2014), tomamos ambientes de aprendizagem baseados em Cenários para investigação para realizar as atividades deste estudo.

Skovsmose (2014) descreve Cenários para investigação como um ambiente onde as atividades de ensino e aprendizagem acontecem sem a possibilidade de prever eventos futuros e evitar listas de práticas mecanizadas e interiorizadas. Os caminhos percorridos nas propostas de Cenários para investigação são imprevisíveis, e as escolhas e possíveis resultados não podem ser conhecidos, ou mesmo se serão alcançados.

Com base no conceito de cenários de pesquisa apresentado pelo autor, entendemos que é um ambiente que convida os estudantes a participarem de atividades, formularem perguntas e buscarem respostas com base em temas que fazem parte de seus interesses e alcancem os objetivos propostos para essa pesquisa.

Sobre Cenários para investigação, Skovsmose (2000, p. 73) diz que é “[...] um ambiente que pode dar suporte a um trabalho de investigação”, “[...] um Cenário para investigação é aquele que convida os estudantes a formularem questões e procurarem explicações”. Nesse ambiente não é possível prever os acontecimentos com detalhes, pois é um ambiente onde o professor não pode utilizar a previsibilidade nas atividades e ações prescritas em seu manual de aula.

Os Cenários para investigação para acontecerem, necessitam de professores dispostos a saírem de sua zona de conforto e de sua comodidade metodológica para romperem com paradigmas construídos, solidificados e absorvidos. Nesse seguimento, mediante a colaboração com professores e projetando um processo de ensino e aprendizagem mediante situações que convidem a participação, Skovsmose (2014, p. 45) aponta os Cenários para investigação como “[...] um terreno sobre o qual as atividades de ensino e aprendizagem acontecem”, ou seja,

“[...] um ambiente que pode dar suporte a um trabalho de investigação”, complementa o autor (p. 2).

Em Cenários para investigação, os estudantes devem ser envolvidos nas atividades sugeridas. Skovsmose (2014, p. 46) sustenta que o convite é necessário, mas afirma que “[...] podemos convidar, mas nunca obrigar, os estudantes a participar das atividades em torno de um Cenário para investigação”.

Os Cenários para investigação constituem-se em diferentes ambientes de aprendizagem “[...] que convidam os estudantes a formularem questões e procurarem explicações [...]” (SKOVSMOSE, 2000, p. 6). A ideia de Cenários para investigação denota uma imagem de algo mirabolante, extraordinário, impactante. O que não é verdade, pois uma atividade matemática que busque a participação do estudante para fazer parte do processo de soluções, instigando a produzir seu entendimento, terá diferentes caminhos em busca da solução, não havendo uma única solução nesse campo. Portanto, cada pessoa tem habilidades de raciocinar diferentemente um do outro, trazendo ao contexto diferentes respostas para a mesma situação ou atividade.

Em relação à prática em sala de aula, Skovsmose (2000) argumenta que as listas de exercícios e Cenários para investigação são opostas. Além disso, reflete que os estudantes podem fornecer diferentes tipos de referências, em primeiro lugar, as perguntas à matemática e só à matemática. Em segundo lugar, pode referir-se a uma semirrealidade, que não é um fato que “realmente” observamos, mas sim um fato formulado, por exemplo, por um autor de um livro didático de matemática.

Por fim, estudantes e professores podem trabalhar com tarefas que remetem a situações da vida real (SKOVSMOSE, 2000). Assim, combinando práticas de sala de aula e tipos de referência, encontramos a tabela a seguir, que descreve seis tipos de ambientes de aprendizagem, descritos por Skovsmose (2014) e que apresentaremos detalhadamente a seguir.

Os ambientes de aprendizagem são combinações evidenciadas nos estudos de Skovsmose (2014) das três situações de referências com os paradigmas de atividades: listas de exercícios e Cenários para investigação.

As referências classificadas por Skovsmose (2008) se reportam à matemática pura (somente a matemática), à semirrealidade (realidade construída/situações hipotéticas) e à realidade (situações da vida real). Com essas três referências distintas, combinadas com os dois paradigmas de prática em sala de aula, lista de

exercícios e Cenários para investigação elaborou seis tipos de ambientes<sup>2</sup> de aprendizagem, exemplificados no Quadro 1 (SKOVSMOSE, 2014).

**Quadro 1 – Ambientes de aprendizagem**

|                                  | Lista de exercícios | Cenários para investigação |
|----------------------------------|---------------------|----------------------------|
| Referências à Matemática Pura    | (1)                 | (2)                        |
| Referências a uma Semirrealidade | (3)                 | (4)                        |
| Referências à vida real          | (5)                 | (6)                        |

Fonte: Skovsmose (2014, p. 54).

Segundo Skovsmose (2014, p. 65) o conceito moderno da matemática é bastante amplo, de modo que ele o caracteriza em três grupos de ideia:

[...] de que a matemática é essencial para a compreensão da natureza; de que a matemática é um catalisador da inovação tecnológica; e, de que a matemática é uma racionalidade pura, que funciona quase como um jogo mental, separado de todas as demais atividades humanas.

Skovsmose (2014, p. 65) alerta que a concepção moderna da matemática não deve ser vista como base para a formulação de questionamentos “[...] sensíveis à matemática crítica”. Durante a Revolução Científica a ciência foi vista como prenúncio do progresso, e Kepler contribuiu para que a matemática ocupasse uma posição de destaque: “A matemática era a linguagem que permitia expressar os projetos de Deus para a criação do mundo”, fundamenta Skovsmose (2014, p. 66).

Após a Revolução Científica, a matemática passou a integrar a física e outras ciências naturais, de modo que nenhuma teoria física seria formulada sem ele, o que a colocou em posição de destaque na linguagem das ciências naturais, determinando-a como forma sublime para a compreensão da natureza (SKOVSMOSE, 2014).

As concepções advindas com a Revolução Científica evidenciaram a possibilidade de a vida na Terra ser melhorada, relacionando o progresso científico ao social. Francis Bacon *apud* Skovsmose (2014) trouxe o conhecimento como gerador de poder, ao considerar a compreensão sobre a natureza uma aliada à técnica, estabelecendo desta forma a invenção tecnológica baseada na matemática.

Estabeleceu-se então, entre os séculos XIX e XX, de acordo com Skovsmose (2014, p. 70), “[...] a concepção de matemática absolutamente pura, ao passo que a

<sup>2</sup> O uso da palavra ambientes se faz em substituição a palavra original milieus.

matemática se tornava indispensável para a ciência e para a tecnologia”. Partiu-se, portanto, para a ideia da matemática como disciplina pura, ao longo da Modernidade, a partir de três elementos característicos, de acordo com Skovsmose (2014, p. 70): “[...] desenvolvimento de base axiomática de alcance total; interpretação dos conceitos matemáticos que dispensava qualquer forma de objeto matemático metafísico; e interpretação da verdade matemática como uma propriedade formal pura”.

Para Skovsmose (2014) uma sentença matemática identifica-se como uma capacidade a ser provada por uma teoria formal, de modo que qualquer concepção acima de verdade matemática é totalmente dispensável, e, portanto, a matemática, enquanto disciplina pura, é um formalismo ou racionalidade incontestável.

A partir de 1950, de acordo com Skovsmose (2014) passa a surgir a matemática moderna, diante da sua importância no desenvolvimento da tecnologia e das ciências, principalmente no tocante ao aumento às escolas de engenharia, onde ela foi reconhecida como base tecnológica, ou seja, integrante da tecnologia e do progresso, destacando:

A educação matemática moderna também valorizou a arquitetura lógica da matemática com vistas a seus próprios interesses. Sustentou-se que o currículo de matemática deveria seguir as estruturas lógicas dela. As características mais puras da matéria deveriam ser ensinadas como tópicos principais na escola. (SKOVSMOSE, 2014, p. 74).

“A educação matemática moderna apresenta a matemática como ferramenta indispensável para a compreensão da natureza e para a realização de todos os projetos tecnológicos, além de valorizá-la em sua forma pura”, de modo que Skovsmose (2014, p. 75), denota à matemática uma ferramenta essencial para o mundo moderno, onde a sua concepção a impõe lugar de soberania nas Ciências, exaltando sua total e absoluta confiança aos números e sua racionalidade.

Assim, o Quadro 2 apresenta um ambiente de aprendizagem do tipo (1), fazendo referência à Matemática Pura e no modelo paradigma do exercício. O livro didático está repleto de exemplos desse tipo de ambiente que abrangem assuntos de matemática pura.

**Quadro 2 - Ambiente de aprendizagem do tipo (1)**

| <b>nº</b> | <b>Enunciado</b>     |
|-----------|----------------------|
| (a)       | “Reduza a expressão” |
| (b)       | “Resolva a equação”  |

| nº  | Enunciado |
|-----|-----------|
| (c) | "Calcule" |

Fonte: SKOVSMOSE (2014, p. 55).

No ambiente do tipo (2) constata-se que, apesar de estabelecer referência a matemática pura, pode favorecer considerações por parte dos estudantes em relação aos conceitos matemáticos. Skovsmose (2000) retrata que uma amostra para esse ambiente pode ser a "translação de figuras geométricas numa tabela de números" (p. 8).

Os ambientes dos tipos (3) e (4) referem-se a uma semirrealidade, quando os dados encontrados no exercício não são reais e são usados apenas para ajudar os estudantes a resolver as situações dadas. Como exemplo de um ambiente tipo (3) pertencente ao paradigma listas de exercícios, Skovsmose (2014, p. 55) propõe o seguinte problema:

Uma loja fornece maçãs ao preço de R\$ 0,12 a unidade, ou R\$ 2,80 por uma cesta de 3 quilos (um quilo corresponde a 11 maçãs). Calcule quanto Pedro economizaria se ele comprasse 15 quilos de maçãs, pagando o preço por cesta em vez de pagar o preço por unidade.

Nesse sentido, a situação contextualizada não é uma situação real, mesmo que os dados estejam descritos dando a entender que a situação possa acontecer todos os dias, e que seja real. Tal situação evidencia a semirrealidade, pois não há evidências da autenticidade dos dados, ou seja, torna-se uma situação artificial.

O ambiente do tipo (4) encontra-se em uma semirrealidade em Cenário para Investigação. Para esse ambiente, Skovsmose (2014, p. 56) apresenta como exemplo o "programa de simulação Simcity4<sup>3</sup>". O programa é estruturado como um jogo e simula o planejamento da cidade, convidando os estudantes a desempenhar o papel de prefeito da cidade. Os estudantes devem refletir e tomar decisões sobre questões relacionadas ao governo municipal, como "sistemas de saúde, escolas, poluição, mercado imobiliário, transporte, áreas de lazer, leis, abastecimento de água, serviços de energia e serviço de esgoto". Observam que, em algumas dessas simulações, os estudantes podem se deparar com situações envolvendo resolução de cálculos.

<sup>3</sup> O Simcity4 simula um jogo sendo parte do Projeto Planejamento Urbano, sendo lançado em 2003 pela Eletronic Arts (EA Games).

Os ambientes dos tipos (5) e (6) estão em ambientes de aprendizagem e criam referências à vida real, tanto por meio de Listas de Exercícios quanto ao Cenários para investigação, que podem refletir problemas relacionados a situações reais, bem como situações relacionadas à realidade específica dos estudantes. Para o ambiente do tipo (5), Skovsmose (2014, p. 56) remete a situações da vida real que inclui o Paradigma do Exercício, e podem ser vistas como exemplo, situações-problema, envolvendo notícias de jornais e revistas e dados de institutos de pesquisa, fazendo referência à vida real.

Para o ambiente de aprendizagem do tipo (6), que se encontra no Cenário para Investigação, as atividades envolvendo projetos podem ser um bom exemplo, desde que os estudantes sejam convidados a participarem de todo o processo, como, por exemplo, a escolha do tema e como fazer para colocá-lo em prática, fazendo dos estudantes os protagonistas da aprendizagem por meio da interação com situações que fazem referência a vida real (SKOVSMOSE, 2014).

Não se pode presumir que um ambiente de aprendizagem funcione melhor do que outro, mas é importante entender que o deslocamento entre diferentes ambientes de aprendizagem pode ser uma forma de envolver os estudantes na ação de refletir, e assim dar à matemática uma dimensão crítica no contexto escolar (SKOVSMOSE, 2000).

Como a prática do exercício ainda é a mais comum no dia a dia escolar, o trabalho com os Cenários para investigação sugere um esforço maior por parte do professor, exigindo que, por vezes, saia de sua zona de conforto e adentre na zona de risco, assim citadas por Skovsmose (2000, 2014) como ambientes de aprendizagem. Tal posicionamento pode gerar uma certa insegurança por parte do professor, além de requerer mais tempo tanto na preparação das aulas, como na aplicação e desenvolvimento em sala.

Nesse contexto, Skovsmose (2000, p. 18) reflete que “a tarefa é tornar possível que os estudantes e o professor sejam capazes de intervir em cooperação dentro da zona de risco, fazendo dessa uma atividade produtiva e não uma experiência ameaçadora”. Além de auxiliar a prática do professor na sala de aula, os ambientes de aprendizagem podem ser também um recurso avaliativo importante.

Os Cenários para investigação, em suas diferentes propostas, buscam aproximar o estudante de sua realidade e de sua transformação a partir de atividades envolvendo fatos de sua vivência.

O exercício é apontado como um paradigma dominante na educação matemática tradicional. No paradigma do exercício, o estudante centra-se na resolução de cálculos e os exercícios são formulados por pessoas extraclasse, tendo como premissa apenas uma única resposta certa para o exercício da matemática (SKOVSMOSE, 2000). Esse paradigma se diferencia dos Cenários para investigação “[...], no qual os estudantes são convidados a se envolverem em processo de exploração e argumentação justificada” (SKOVSMOSE, 2000, p. 66).

O próprio termo aponta indicações de colocar o estudante como produtor de significados para o conhecimento geométrico. Fazer o convite aos estudantes para o estudo do plano cartesiano, por exemplo, por meio de Cenários para investigação, pode permitir ao estudante um aprendizado por investigação do conhecimento, sendo conforme Freire (2011), o protagonista de sua aprendizagem.

Além disso, observam-se as contribuições que este ambiente de aprendizagem pode proporcionar para a reelaboração das perspectivas de futuro do indivíduo, uma vez que os estudantes terão a oportunidade de discutir e estudar sobre algo de seu interesse de maneira ativa no que se refere a sua aprendizagem. Nestes ambientes une-se a intencionalidade, presente no fato de o estudante influenciar na escolha dos temas para a pesquisa, e a ação, presente no desenvolver da investigação, favorecendo a ocorrência da aprendizagem com significado, quando a entendemos como uma ação, assim como Skovsmose (2008).

Devido ao sentido que as atividades matemáticas podem proporcionar ao indivíduo, no que se refere a uma aprendizagem com significado, observam-se os Cenários para investigação, portanto, como ambientes favoráveis para que o estudante pondere sobre suas possibilidades de futuro, permitindo um estado de reflexão, que pode culminar na reelaboração de suas perspectivas de futuro.

Nessa direção, a presente pesquisa pretende estabelecer um cenário para investigação com os estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental caracterizado pelo ambiente de aprendizagem (6), ou seja, com referência à realidade, no intuito de, além de proporcionar um ambiente propício para o desenvolvimento da EMC, mobilize os estudantes na reelaboração de suas perspectivas de futuro perante a problemática do meio que estão inseridos.

### 2.3 Um convite aos Cenários para investigação é um convite ao diálogo

O diálogo é constituído de múltiplas facetas e defini-lo é uma tarefa um tanto quanto difícil. Segundo Milani (2020, p. 1052) o diálogo é constituído de '[...] participação, discussão, incerteza, movimentos, investigação.' O diálogo é participativo, pois convida os sujeitos da situação a participarem por meio do envolvimento para a discussão, momento de atribuir suas colocações sobre os fatos que geram incerteza. Mas pelo movimento de busca de resposta, o diálogo é também investigativo.

Fazemos uso do diálogo para diferentes situações, como um simples cumprimento de boas-vindas, ou até mesmo um bate-papo descontraído com familiares, amigos ou colegas de trabalho. O diálogo é muito mais que uma troca de informações ou conversa entre pessoas. Pode se dizer que uma ferramenta de acordos para diferentes contextos, inclusive no meio pedagógico, é através do diálogo que muitos acordos são estabelecidos, por meio da participação dos envolvidos no contexto que se encontra inserido.

É a partir das relações interpessoais (FREIRE, 1997) que o diálogo constitui-se como, corrobora Alrø e Skovsmose (2021, p. 13) '[...] um encontro entre pessoas [...]', sendo este '[...] um elemento fundamental para a liberdade de aprender'. Por meio do diálogo os sujeitos se fazem convidados a opinarem sobre o que sabem e o que acham de determinado assunto ou situação.

Quando estamos num diálogo, somos participantes igualmente do processo com nossa opinião que nem sempre é a mesma compartilhada pelos outros participantes, assim arriscamos sermos contrariados e não compreendidos neste processo visto que "dialogar compreende realizar uma investigação, correr riscos e promover a igualdade" (ALRO E SKOVSMOSE, 2021, p. 127).

Para o exercício da cidadania, pelo processo democrático, o diálogo é uma arma poderosa, pois alicerça o processo político de participação na busca de melhoria para situações vividas em diferentes contextos.

É pelo diálogo (SKOVSMOSE, 2001) que os estudantes participam ativamente dos processos educacionais, inclusive na escolha dos conteúdos que serão por eles vivenciados ao serem convidados a fazerem parte da proposta planejada pelo professor. Em Educação Matemática Crítica, precisamos pensar em uma sala de aula onde professores e estudantes estejam em condições semelhantes

de aprendizagem e envolvidos em um processo de diálogo. A educação tem, segundo Freire (1997), um papel político de envolvimento humano na medida que está inserida em todos os meios sociais e econômicos.

Para realizar ações baseadas em cenários de pesquisa, é necessário que a proposta apresentada pelo professor seja do interesse dos estudantes. Portanto, é necessário que o estudante aceite o convite do professor para participar da atividade.

Quando há um encontro entre a intencionalidade do aprendiz e a proposta de atividade, uma gama de sentidos se abre. Mas muitas surpresas podem estar ocultas nesse leque. Não há fórmulas nem roteiros para uma educação significativa, nem para se prever as intencionalidades dos estudantes (SKOVSMOSE, 2014, p. 44).

Sabemos que as salas de aula estão cada vez mais lotadas, diversas e heterogêneas. Diante de toda a diversidade desse ambiente escolar, torna-se cada vez mais difícil atender às necessidades e interesses desses estudantes em sala de aula. Milani (2015, p. 18) descreve que: “Existe uma intenção e uma atitude de curiosidade que move os participantes. Eles controlam o processo e são responsáveis por conduzir as atividades; trata-se de uma propriedade compartilhada”. Seguindo o contexto dos Cenários para investigação na proposta de um convite ao diálogo, a presente pesquisa propõe a participação dos estudantes por meio da interação a partir de contextos vividos.

## **2.4 Backgrounds: as vivências**

Segundo o dicionário Michaelis (2000) a palavra “*background*” significa “[...] segundo plano; motivo, acontecimento que explica fatos posteriores; prática, experiência, conhecimento [...]” (MICHAELIS, 2000, p. 51). Porém, D’Ambrósio (1990) amplia o significado deste termo e o designa como a bagagem cultural de um indivíduo, aquilo que lhe é familiar, seus costumes. Também é utilizado por Skovsmose (2001, 2008) significando experiências passadas, influências culturais e sócio-políticas que o indivíduo experienciou, assim o *background* de um indivíduo se refere a tudo o que este vivenciou, diferenciando-se de *foreground*, conceito relacionado ao que o indivíduo pode vivenciar.

Sobre *background*, Skovsmose (2008, 2014) esclarece que apesar de se tratar de coisas já vivenciadas no passado, estas vivências não se encontram

exatamente cristalizadas, visto que as interpretações do indivíduo sobre suas experiências vividas podem mudar, e assim altera-se o *background*.

[...] ainda que mesmo o *background* só seja possível a partir de interpretações. Do mesmo modo como cada um pode perceber possibilidades de diferentes maneiras, também pode-se interpretar e reinterpretar antecedentes e experiências passadas. Em determinadas situações essa é uma estratégia valiosa, em outras é um obstáculo para a continuidade da vida (SKOVSMOSE et al., 2008, p. 243).

Nesse aspecto, observa-se a influência do *background* do indivíduo na busca deste por melhores condições de vida. Indivíduos que apresentam *backgrounds* desfavoráveis, por exemplo, crianças nascidas em famílias pobres que moram em favelas, que muitas vezes não possuem acesso a uma educação de qualidade e que sofrem, ou são passíveis de sofrer, discriminações da sociedade ao longo de sua vida, sejam de ordem racial ou devido às condições econômicas, sem dúvidas possuem mais chances de desistir de seus estudos ou aspirações de futuro mais facilmente do que outras nascidas em melhores condições.

Como ilustra Skovsmose (2014) ao descrever indivíduos em situações sociais econômicas, políticas e culturais opostas, estatísticas alertam para a grande influência de seus *backgrounds* em seus futuros, porém, os indicadores socioeconômicos não são os únicos fatores que influenciam na formação da perspectiva de futuro do indivíduo, pois “[...] o modo como as pessoas interpretam suas possibilidades de futuro também é importante.” (SKOVSMOSE, 2014, p. 35).

Biotto Filho (2015) esclarece que o *background* do indivíduo oferece tendências para suas perspectivas de futuro, porém este não predetermina tais perspectivas, nesse sentido, observa-se a relevância em investigar e interpretar o *background* dos indivíduos quando se pretende investigar suas perspectivas de futuro (*foreground*). Em outras palavras, o que uma pessoa pensa sobre suas expectativas de futuro tem forte ligação com suas experiências passadas, e deve ser levado em consideração quando se visa investigar *foregrounds*, porém não se pode considerar apenas as vivências do indivíduo como determinantes para caracterizar o *foreground*, existe ainda a percepção deste sobre tais vivências e seus anseios de mudança deste contexto.

D’Ambrósio (2007) apresenta dentre outras discussões, a necessidade de considerar o *background* dos estudantes para uma educação matemática com mais significado. Sem dúvidas, a contextualização de atividades matemáticas com relação

ao *background* dos educandos, em termos de sua cultura, costumes e vivências, pode fornecer meios de oferecer mais significado às aulas da disciplina de Matemática, porém é necessário ter cautela, pois como Skovsmose (2008, p. 109) alerta, “[...] uma ‘apreciação’ do *background* na educação também pode ser uma expressão de certas tendências de exclusão”. Tal situação pode ser elucidada conforme o exemplo:

É possível produzir atividades envolvendo o contexto rural, tais como área de terrenos, venda de produtos agrícolas ou transporte de mercadorias. Neste caso, o professor estaria utilizando os *backgrounds* dos estudantes. Suponhamos ainda que, nesta cidade, muitas crianças possuem um forte desejo de um dia vir a morar em um grande centro urbano. Por esse motivo, em vez de se interessarem em atividades sobre assuntos rurais, talvez os estudantes se interessem em temas urbanos, tais como metrô, edifícios, shoppings ou grandes atrações culturais. Neste caso, tais atividades estariam associadas aos seus *foregrounds* (BIOTTO FILHO, 2015, p. 67, grifo do autor).

Neste exemplo citado por Biotto Filho (2015), além de permitir ilustrar a diferenciação entre *background* e *foreground* quando referenciados no contexto escolar, também possibilita compreender a importância do *foreground* dos estudantes para que as atividades matemáticas contextualizadas pelo professor tenham mais chances de garantir um aprendizado com mais significado aos estudantes.

Na busca por significado em atividades escolares na disciplina de Matemática, Skovsmose (2006, p. 113) alerta aos educadores matemáticos que “[...] não temos que considerar apenas o *background* dos educandos. Nós também temos que considerar as suas esperanças e aspirações. Nós temos que considerar onde eles querem ir”.

De fato, não é suficiente considerar apenas o *background* dos indivíduos no contexto do ensino da Matemática, afinal desta maneira podemos orientar os estudantes em seus *backgrounds*, sem levar em consideração os assuntos de interesse, o desejo de mudar, de experimentar novas oportunidades de conhecimento e de vislumbrar novas perspectivas de vida. Podemos deixar de oferecer um ambiente democrático quanto aos anseios dos educandos e ainda promover o que se caracteriza como uma tendência a um tipo de exclusão, conforme citado por Skovsmose (2006) anteriormente.

## 2.5 *Foregrounds*: uma maneira de como vivenciar situações

Ao compreender a aprendizagem como uma forma de ação, considera-se que este processo está carregado de intenções e motivos. Neste sentido, ao se tratar de aprendizagem é necessário considerar a intencionalidade dos indivíduos envolvidos (SKOVSMOSE, 2014).

A intencionalidade dos indivíduos está intrinsecamente relacionada às suas perspectivas quanto ao seu futuro. A esta noção de perspectiva Skovsmose et al. (2012, p. 235) chamam de *foreground* e o definem para uma pessoa “[...] como suas interpretações das oportunidades de vida em relação ao que parece ser aceitável e estar disponível no contexto sócio-político dado”.

Neste sentido, observa-se que o ‘*foreground*’ de um indivíduo também é influenciado pelo seu *background* o qual segundo Skovsmose et al. (2009, p. 240) “refere-se às raízes culturais e sócio-políticas de um indivíduo ou grupo humano”. Portanto, para ser possível a compreensão do *foreground* aspectos do *background* podem se caracterizar como essenciais.

Apesar de o *background* influenciar no *foreground* dos indivíduos, chama-se atenção para um detalhe decisivo à condição “promissora”, ou não, de um *foreground*, trata-se da maneira como o indivíduo interpreta suas possibilidades de futuro, afinal o *foreground* caracteriza algo que ainda não se materializou ou aconteceu. Assim, pode-se encontrar em um indivíduo características de um *background* não favorável, porém o *foreground* pode ser regado de expectativas de melhora para o futuro.

Nesse sentido, Skovsmose (2014) destaca a importância de *foregrounds* promissores no que tange a intenção de aprendizagem dos indivíduos, sendo que, em contrapartida, indivíduos com *foregrounds* arruinados, ou seja, sem boas perspectivas de futuro podem não apresentar motivos suficientes para aprender, inclusive os conteúdos escolares.

Um *foreground* fragilizado é caracterizado quando o indivíduo parece não visualizar oportunidades atrativas e realistas para o seu futuro. E mesmo que não se encontre fragilizado, um *foreground* pode estar em uma posição de risco, pode estar enfraquecido, se o indivíduo visualiza e considera poucas possibilidades atraentes em seu contexto de vida (BIOTTO FILHO, 2015).

Quanto aos *foregrounds* em posições de risco, estes são muitas vezes o produto do contexto social em que estes estudantes estão inseridos, o que pode limitar suas perspectivas de futuro. Skovsmose et al. (2009) e Skovsmose et al. (2012) investigam *foregrounds* de estudantes indígenas e de uma favela brasileira, e concluem que estes estão em uma posição de fronteira. A posição de fronteira é identificada como a situação em que “[...] o indivíduo pode ver suas atuais condições de vida em relação a outras possibilidades de vida” (SKOVSMOSE, 2012, p. 236).

As pesquisas citadas mostram que indivíduos nestas condições podem obter diversas experiências, as quais podem contribuir tanto para a melhora de suas condições de vida quanto para uma triste realidade de limitação, pois ao passo que obtém a experiência de contato com a diversidade também podem limitar seus *foregrounds* por sentir que algumas opções estão fora do alcance.

Em Skovsmose (2012), no qual relata a realização de uma investigação acerca das perspectivas de futuro de jovens de uma escola localizada em um bairro periférico de Barcelona, é possível observar uma das decorrências de *foregrounds* arruinados, trata-se do que o autor chamou de sonhos em gaiolas. Essa expressão imprime a ideia de uma perspectiva de futuro arruinada, na qual os estudantes investigados não se permitiam sonhar com profissões prestigiadas pelo sentimento de dor que isso poderia causar a eles. Esta condição conduz a exclusão e ao aprisionamento de sonhos, limitando possíveis perspectivas de futuro.

De acordo com as situações destacadas e em relação ao contexto escolar, verifica-se que *foregrounds* em posições de risco, assim como *foregrounds* arruinados, tornam-se obstáculos para a aprendizagem. Skovsmose (2006, p. 103), destaca que “tornar-se consciente do fato de que o *foreground* dos educandos pode ser arruinado por processos sócio-políticos da globalização, significa restabelecer a política de obstáculos para aprendizagem”. Daí a importância não apenas da consideração dos *foregrounds* dos indivíduos em atividades de aprendizagem, como discutido no item anterior e defendido por Skovsmose (2006) sobre a busca por significado em atividades escolares, mas também a articulação entre tais atividades e possibilidades de reelaboração dos *foregrounds*.

Diante disso, é importante ressaltar as características voláteis e contraditórias de um *foreground*. Biotto Filho (2015, p. 24) explica que “o *foreground* de uma pessoa não é totalmente claro, nítido ou transparente, antes é configurado de modo complexo em uma rede de experiências e emoções que envolvem a imaginação”.

Portanto, o *foreground* de uma pessoa não se caracteriza como algo translúcido e simplista. Além disso, *foregrounds* podem ser múltiplos, em outras palavras, os indivíduos podem visualizar diferentes possibilidades de futuro concomitantemente segundo a perspectiva assumida. Indo mais além, *foregrounds* podem ser coletivos, pois podem representar as possibilidades de um determinado grupo de pessoas, ou até mesmo, “podem incluir interpretações coletivas de possibilidades” (BIOTTO FILHO, 2015, p. 74). Em uma conversa entre dois jovens, por exemplo, quando falam sobre suas perspectivas de futuro, estes podem estar cultivando seus *foregrounds* coletivamente por meio da troca de opiniões e ideias que podem gerar a germinação de possibilidades de futuros aos indivíduos.

Outra particularidade atribuída a *foregrounds* trata-se de sua dinamicidade, em outras palavras, “[...] estão em constante mudança, mesmo que não haja alterações no contexto sociopolítico” (BIOTTO FILHO, 2015, p. 24), assim os *foregrounds* não podem ser encarados como algo imutável, ou seja, os indivíduos podem reelaborar seus *foregrounds* de acordo com suas experiências de vida, visões de mundo, expectativas e interpretações de suas perspectivas de futuro. “*Foregrounds* contêm experiências, interpretações, esperanças e frustrações, que se forjam no exercício contínuo da convivência humana, em cada interação, em cada ato comunicativo” (SKOVSMOSE, 2014, p. 36).

Diante disso, visualiza-se a (SKOVSMOSE, 2014) possibilidade de desenvolver meios para o favorecimento de reelaborações de *foregrounds*. Para tanto, são essenciais estudos e pesquisas que tratem da reelaboração de *foregrounds*, sobretudo sobre as possibilidades destas reelaborações em ambientes educacionais.

Assim, ao considerar os *foregrounds* dos estudantes e relacioná-los às suas intenções em aprender, em um contexto escolar, estaremos considerando não apenas as habilidades desenvolvidas ou habilidades a serem desenvolvidas, como se fosse algo pré-determinado e imutável. Mas buscaremos “[...] procurar entender como sua visão de futuro fornece, ou não, motivos para estudar matemática” como sugere Biotto Filho (2015, p. 19). Com isso, talvez possamos, enquanto educadores, compreender os *foregrounds* dos estudantes e oferecer possibilidades de reelaborações por meio de atividades de aprendizagem. Acredita-se que a possibilidade de oferecer ambientes de aprendizagem que proporcionem a reelaboração de *foregrounds*, propicia não apenas o favorecimento da

aprendizagem, mas também dá esperança de um futuro melhor para estes indivíduos. Afinal, como sintetiza D'Ambrósio (2005, p. 105) “[...] só se justifica insistirmos em educação para todos se for possível conseguir, através dela, melhor qualidade de vida e maior dignidade da humanidade como um todo”.

### **3 APORTES TEÓRICOS QUE EMBASAM A GEOMETRIA E O PENSAMENTO GEOMÉTRICO**

Neste capítulo, apresentamos ideias sobre a importância do estudo da geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental e sua trajetória pela educação brasileira. E na busca por uma definição apropriada para o conceito do pensamento geométrico, evidenciamos que diferentes autores dissertam sobre. Para tanto se faz necessário, portanto, a constituição deste capítulo para sustentar a referida pesquisa. E assim construir uma descrição do pensamento geométrico que dialogue com os objetivos da pesquisa, usando como fundamentação os estudos de alguns pesquisadores, para assim respaldar e fundamentar as análises posteriores.

#### **3.1 Conhecendo a geometria do passado para refletir sobre o presente**

A Geometria no Brasil possui uma trajetória (LEME DA SILVA, 2022) histórica interessante, com suas raízes na época colonial e se desenvolveu também através do exército. Durante o período colonial, a geometria era ensinada de maneira limitada, principalmente para a elite branca nas escolas jesuítas.

No entanto, após a independência do Brasil, houve uma maior valorização do ensino da geometria, principalmente no contexto militar. O Exército Brasileiro desempenhou um papel fundamental na difusão e desenvolvimento da geometria no país. O ensino de disciplinas matemáticas, incluindo a geometria, (GARNICA, 2016; MENDES, 2020) era uma parte essencial da formação dos oficiais militares, desde o Império até os dias atuais. A estruturação do ensino de geometria no exército envolvia uma abordagem prática e aplicada, com foco no desenvolvimento de habilidades voltadas para a construção de fortificações e demais obras militares.

No entanto, (PAVANELLO, 1989, 1993) sob a influência de um movimento que ganhava força no Brasil e em outros países, de trazer para o ensino escolar aspectos de rigorosa formalização da linguagem matemática conhecido como o Movimento da Matemática Moderna (MMM) a geometria passou por uma transformação em sua abordagem. O MMM, iniciado na década de 1960, propunha uma nova forma de ensino de matemática, incluindo a geometria, baseada em princípios de construção do conhecimento pelos alunos. A geometria no contexto do

MMM passou a ser vista como uma disciplina que explorava as ideias e conceitos fundamentais, permitindo a compreensão dos elementos geométricos de forma mais profunda e abstrata.

Importante constar que há uma nova perspectiva sobre o ensino de geometria e o MMM no Brasil, com indícios suficientes para sugerir que o ensino de geometria no MMM não deve ser apenas focado nas transformações geométricas como parte do currículo. As transformações geométricas foram abordadas de forma isolada, e parece que não foram integradas efetivamente nas aulas de matemática. Ao não discutir (LEME DA SILVA, 2022) o ensino de geometria e o MMM, e como essa abordagem foi incorporada na cultura escolar, arrisca nos impedir de compreender verdadeiramente a trajetória do ensino de geometria durante o MMM. Com base nos novos estudos da História da Educação Matemática (HEM), não parece correto afirmar que a geometria foi abandonada pelo MMM.

Na pesquisa (LEME DA SILVA, 2022) mostra que a geometria dedutiva, teoremas e demonstrações foram assuntos de debate e preocupação nos Congressos Nacionais na década de 1950. Com o início do MMM na década de 1960 no Brasil, houve uma diminuição da ênfase na geometria dedutiva, que era característica de períodos anteriores. Pode-se argumentar que as propostas modernizadoras tentaram revitalizar o ensino de geometria com uma abordagem mais experimental e intuitiva, em resposta aos debates nos Congressos Nacionais. No entanto, em meio à valorização da álgebra e da Teoria dos Conjuntos, essa abordagem pode ter passado despercebida pela comunidade.

Sendo assim é necessário reconhecer e compreender por que o ensino da geometria seguiu um caminho diferente de outros conceitos matemáticos, como as estruturas algébricas, que mesmo sem serem dominadas pelos professores, foram incluídas diretamente nos manuais escolares e nos programas de formação docente.

Para tanto, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs, 1997), estabelecidos na década de 1990, trouxeram diretrizes detalhadas e abrangentes para a inclusão da geometria em diferentes etapas de ensino, valorizando não apenas o conhecimento geométrico em si, mas também o desenvolvimento do pensamento geométrico (KALEFF, 1994) e a resolução de problemas relacionados a essa área do conhecimento. Essas diretrizes buscam garantir que os estudantes tenham uma formação sólida em geometria, capacitando-os a compreender e aplicar conceitos geométricos ao longo de toda a sua trajetória educacional.

Atualmente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018) busca fortalecer a aprendizagem da geometria, propondo sua inclusão desde os anos iniciais da educação básica. A BNCC enfatiza a formação de estudantes capazes de analisar, interpretar e representar o espaço e suas formas, além de desenvolver habilidades de raciocínio lógico e argumentação geométrica. Dessa forma, a trajetória da geometria no Brasil, desde a colonização até os dias atuais, mostra um processo de evolução e valorização desta disciplina, que vai além das fronteiras das ferramentas práticas e aplicadas, buscando instigar a compreensão e o pensamento crítico por parte dos estudantes.

Além disso, a ênfase dada pela BNCC (2018) à formação de estudantes capazes de desenvolver raciocínio lógico e argumentação geométrica é de extrema importância. Isso porque essas habilidades não apenas ajudam os estudantes a resolver problemas matemáticos e geométricos, mas também são essenciais para o desenvolvimento de habilidades cognitivas mais amplas. Habilidades como a capacidade de analisar situações complexas, formular argumentos sólidos e tomar decisões fundamentadas.

Assim, ao longo da história da geometria no Brasil (PAVANELLO, 1989, 1993; MENEZES, 2007; MENDES, 2020), desde os tempos da colonização até os dias atuais, podemos observar um processo de evolução e valorização desta disciplina.

A geometria deixou de ser vista apenas como uma ferramenta prática e aplicada e passou a ser reconhecida como uma área de conhecimento com o poder de instigar a compreensão e o pensamento crítico por parte dos estudantes. Isso reflete a importância que a sociedade brasileira tem dado à formação de cidadãos críticos (FREIRE, 2019), reflexivos e capazes de lidar com desafios complexos em seu cotidiano.

### **3.2 A geometria e o desenvolvimento de habilidades**

Ao longo do tempo, o conhecimento geométrico acompanhou a evolução humana e surgiu da necessidade, segundo Kaleff (1994), do ser humano compreender melhor o ambiente em que estava inserido. Sendo importante ao longo da constituição histórica, em vários aspectos, facilitando a vida humana. Conforme Santos e Nacarato (2020) a geometria é um elemento essencial na formação da

cidadania, pois a sociedade utiliza cada vez mais o conhecimento científico e tecnológico, e tudo isso tem a ver com a geometria.

Entende-se que a geometria pode contribuir para o desenvolvimento de novas competências, novos conhecimentos para diferentes tecnologias e linguagens, necessários ao ser humano para o mundo globalizado. Sendo o pensamento lógico (NASSER, 1990), derivado das competências da geometria, importante para a construção da sociedade, utilizando cada vez mais o conhecimento científico e os recursos tecnológicos para melhorar a vida cotidiana.

De maneira geral, a exploração da geometria aumenta nossa capacidade de compreender e resolver problemas facilitando nosso pensamento analítico e criativo. Através dessa prática constante, desenvolvemos uma perspectiva geométrica mais apurada, que pode ser aplicada em várias áreas da vida. Portanto, é importante valorizar e aperfeiçoar nossa capacidade de visualizar e interpretar informações visuais relacionadas à geometria.

Segundo Fonseca (2009), a geometria está ligada à formação humana porque promove valores culturais e estéticos, o que nos leva a compreender e apreciar as contribuições arquitetônicas e artísticas do homem e da natureza implicadas.

Conforme Fainguelernt (1999), é importante desenvolver um treinamento visual adequado e analisar as diferentes representações que surgem na solução de uma mesma proposição. Portanto, o ensino da geometria não deve ser desenvolvido por métodos e operações de memorização ou de processos formalizados baseados em elevado rigor, abstração e generalização. A visualização (CROWLEY, 1996) refere-se às aptidões de perceber, representar, transformar, descobrir e refletir sobre as informações vistas; envolve processos mentais necessários e pode ser transferido para outras partes da matemática ou outras áreas do conhecimento.

Ainda segundo Fainguelernt (1999), o processo de ensino e aprendizagem de geometria depende da interação do estudante com o ambiente, pois o ambiente desempenha um papel ativo no mesmo processo de aprendizagem.

A geometria oferece ao campo educacional oportunidades de conexão com outros conteúdos matemáticos. Com a geometria, segundo Lorenzato (1995), o estudante consegue edificar conhecimentos com maior ênfase, por meio de situações concretas que envolvem a manipulação e visualização de objetos.

O estudo da geometria é importante no desenvolvimento (LORENZATO, 2008) das crianças e deve ser oferecido desde cedo, pois as mesmas são capazes

de aprender os conceitos da geometria, uma vez que manipula objetos e os agrupa de acordo com características semelhantes. Lida com objetos que rolam, objetos que se encaixam, objetos da mesma cor e outras formas de características.

Segundo Lorenzato (2006, p. 136), é importante estimular o desenvolvimento da cognição espacial nas crianças, pois “tal desenvolvimento será fundamental à aprendizagem da geometria no ensino fundamental e, acima de tudo, porque possibilitará à criança um conjunto de conhecimentos e de habilidade que outras matérias não conseguem suprir”. Os estudos (Ibid, 1995) defendem um ensino de geometria voltado para as práticas pedagógicas com a exploração do corpo, materiais concretos e imagens. O que obriga o sujeito a explorar diferentes situações e materiais para a construção do conhecimento, apresentados através de suas construções e desenhos.

O nosso corpo está em contato direto com a natureza desde o nascimento, sendo o caminho de análise, exploração e interação com os espaços e objetos que nos rodeiam. Ao utilizar o corpo (LORENZATO, 2008) para ensinar geometria, utilizamos um recurso natural específico de cada ser. As atividades de movimentar o corpo para se localizar no espaço estão presentes em toda a formação dos estudantes desde a primeira infância até o final da primeira infância.

Importante, também, é dar sentido ao trabalho de lateralidade para o estudante vivenciar, a partir do corpo (LORENZATO, 2008), situações variadas. A lateralidade é o lado predominante ou dominante do nosso corpo para a realização das atividades, podendo ser o lado direito ou lado esquerdo, ou respectivos membros, evidenciando que os lados direito e esquerdo não são semelhantes. Conforme o estudante desenvolve atividades corporais, vai ajustando e definindo a predominância da lateralidade.

Para Lorenzato (1995, p.9), o sujeito inicia o processo de “senso espacial” quando consegue usar o corpo para “exercer algum domínio das relações dinâmicas”. As relações dinâmicas permitem aprender conceitos de localização espaciais baseadas no próprio corpo como ponto de referência. E ao propor uma atividade de localização usando o corpo como ponto de referência, estamos possibilitando isso ao estudante.

A geometria, segundo Fainguelernt (1999), é empregada como um instrumento na compreensão, descrição e interação com o meio que habitamos, sendo a parte mais intuitiva e concreta da matemática que tem ligação com a

realidade. Uma ciência que permite ao estudante se basear em ambientes reais para compreender o pensamento geométrico, ajudando a aprimorar o raciocínio e a representação, de forma organizada, do mundo em que vive, sendo assim necessária para a formação do sujeito.

Os conhecimentos geométricos atribuídos ao campo geométrico, contribuem para o raciocínio lógico e mesmo assim seu ensino foi deixado de lado e muitas vezes desprezado nas escolas. Segundo Fonseca (2009), essa situação é excitada a partir do momento em que a geometria é isolada e colocada como campo de saber.

As aplicações práticas dos conceitos geométricos (PASSOS, 2000) estão em toda parte, desde a arquitetura dos prédios que vemos diariamente até mesmo nos objetos e utensílios que utilizamos em nosso cotidiano. Portanto, ao compreender e trabalhar de forma autônoma com as formas e figuras, o estudante estará se tornando um pensador crítico e criativo, capaz de extrapolar os limites da sala de aula e aplicar seus conhecimentos de geometria em seu dia a dia.

Para Fonseca (2009), o conhecimento da geometria é essencial para o desenvolvimento de competências e aptidões, melhor percepção e compreensão da resolução de problemas. Porque oferece uma grande oportunidade para o estudante olhar, comparar, mensurar, generalizar e abstrair, desenvolvendo assim o raciocínio lógico. Para que a aprendizagem ocorra, a geometria deve ter significado para o estudante, deve conduzi-lo a uma compreensão teórica e fazê-lo refletir sobre os conhecimentos prévios e aplicá-los consoante a natureza do problema.

Ao explorar a geometria de diferentes maneiras, as crianças desenvolvem uma compreensão visual e tátil das formas, podendo identificar suas características distintas, como número de faces, vértices e arestas. Além disso, ao resolver problemas práticos relacionados a formas geométricas, como empilhar blocos (LORENZATO, 2008; 2015) ou construir casas com peças de encaixe, as crianças aprendem a pensar de forma mais abstrata, identificando as propriedades e relações entre as diferentes formas com mais clareza e precisão. Esse processo de resolução de problemas não apenas fortalece suas habilidades matemáticas, mas também as prepara para enfrentar desafios complexos em outras áreas do conhecimento.

### 3.3 Pensamento geométrico e a busca por uma definição

Estimulando os estudantes (LORENZATO, 2008; 2015) a observar e manipular objetos tridimensionais e resolver problemas relacionados a formas, estamos estimulando o desenvolvimento do pensamento geométrico.

O pensamento geométrico é uma habilidade cognitiva que envolve a capacidade de entender e manipular as formas geométricas, bem como os princípios que as regem. Essa forma de pensar é fundamental na resolução de problemas matemáticos e na compreensão do mundo ao nosso redor. O pensamento geométrico (KALEFF, 1994) nos ajuda a visualizar e analisar objetos e suas propriedades.

A capacidade do pensamento geométrico vai além de visualizar formas e figuras no espaço. Ele nos permite não apenas perceber as relações espaciais entre esses objetos, mas também identificar regularidades e padrões que surgem a partir dessas interações. Ao explorar o pensamento geométrico (NASSER e SANT'ANNA, 2010), somos capazes de desenvolver uma compreensão mais profunda dos conceitos e teoremas geométricos. Essa compreensão, por sua vez, é fundamental para a validação lógica das afirmações matemáticas.

Conforme Nasser (1990), o pensamento geométrico nos habilita a provar as propriedades matemáticas através do uso de raciocínio lógico, construindo uma base sólida para nosso conhecimento matemático. No entanto, as aplicações práticas do pensamento geométrico vão muito além do mundo abstrato da matemática. Ele nos auxilia a solucionar problemas do mundo real, como a medição de áreas e volumes. Por exemplo, ao calcular a área de um campo ou o volume de um recipiente, nosso pensamento geométrico nos ajuda a determinar as medidas necessárias com precisão.

Além disso, o pensamento geométrico, segundo Kaleff (1994) também nos possibilita encontrar caminhos mais curtos. Pense na busca pela rota mais eficiente para chegar a um destino. Ao considerar diferentes ângulos e distâncias, podemos utilizar o pensamento geométrico para encontrar o caminho mais curto entre dois pontos, economizando tempo e recursos. Em resumo, o pensamento geométrico não apenas nos permite visualizar formas e figuras no espaço, mas também desempenha um papel fundamental na compreensão de conceitos matemáticos e na

validação de teoremas. Além disso, ele possui aplicações práticas em diversas áreas, como medição, roteamento e resolução de problemas do mundo real.

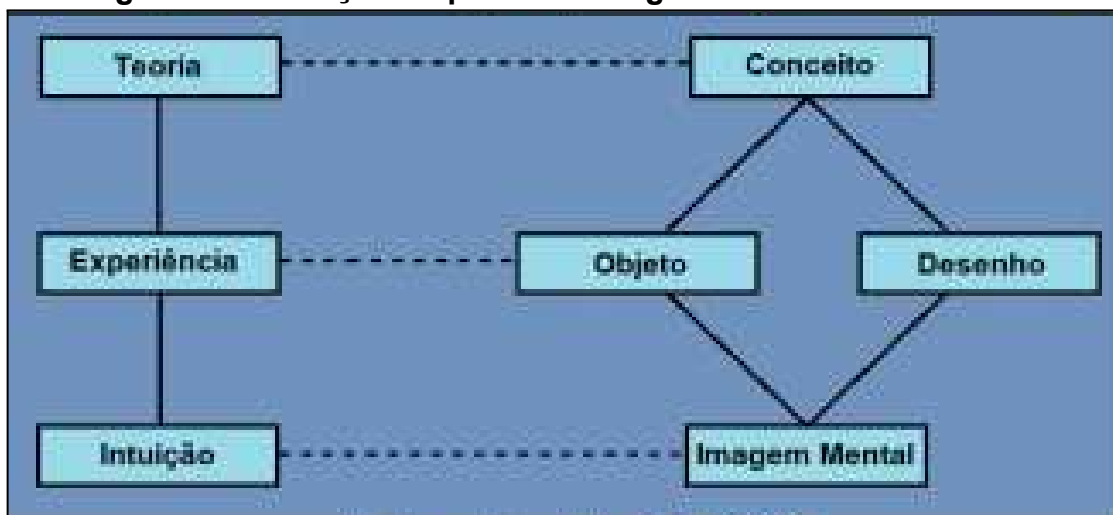
Baseada no conceito de resolução de problemas, a Teoria de Pais (1996), incentiva os estudantes a investigarem e explorarem diferentes situações geométricas. Por meio de atividades desafiadoras, os estudantes são estimulados a formular hipóteses, justificar suas respostas e desenvolver seu pensamento (FREIRE, 2019) crítico.

Um dos pilares da Teoria de Pais (1996) é o uso de instrumentos concretos e semióticos, como réguas, compassos e desenhos, para auxiliar na construção do conhecimento geométrico. Ao explorar o espaço físico e visual, os estudantes são capazes de visualizar e experimentar os conceitos geométricos, contribuindo para a consolidação do pensamento geométrico.

Pais (1996) nos apresenta uma visão detalhada sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico, utilizando como base a análise epistemológica da Geometria Espacial proposta por Gonseth (1945). Seguindo essa abordagem, o autor destaca três aspectos fundamentais que compõem o conhecimento geométrico: o intuitivo, o experimental e o teórico.

Para ilustrar a Teoria de Pais (1996) apresentamos um esquema que articula os três aspectos fundamentais do conhecimento geométrico (a intuição, a experiência e a teoria) aos quatro componentes básicos à aprendizagem geométrica (o objeto, o desenho, a imagem mental e o conceito). A correlação entre eles constitui o pensamento geométrico, como ilustrado a seguir na Figura 1.

**Figura 1– Formação do pensamento geométrico conforme Pais**



Fonte: Adaptado de Pais (1996).

O conhecimento intuitivo (PAIS, 1996) é entendido como aquele adquirido naturalmente, por meio das ações e percepções do indivíduo no ambiente ao seu redor. Trata-se de uma forma primitiva de entendimento da geometria, que se desenvolve desde a infância e está relacionada à intuição espacial, à capacidade de distinguir formas e à noção de distância e tamanho. Nesse sentido, a experiência prática ao explorar objetos e espaços é fundamental para a construção desse conhecimento intuitivo.

Por sua vez, o conhecimento experimental (PAIS, 1996) é adquirido por meio da manipulação e observação de objetos e fenômenos geométricos. Ele envolve a realização de experiências, medições e a coleta de dados, permitindo a verificação de hipóteses e a formulação de conjecturas. O conhecimento experimental é fundamental para a compreensão dos princípios e propriedades da geometria, bem como para a familiarização com os instrumentos e técnicas de medida.

Já o conhecimento teórico (PAIS, 1996) é adquirido por meio do estudo sistemático da Geometria, baseado em conceitos, definições, teoremas e demonstrações. Ele envolve a compreensão dos fundamentos e da estrutura da geometria, assim como a sua relação com outras áreas do conhecimento matemático. O conhecimento teórico permite a formalização rigorosa dos resultados geométricos, garantindo sua validade universal e sua aplicabilidade em diferentes contextos.

No entanto, é importante destacar que essas três formas de conhecimento geométrico (PAIS, 1996) interagem entre si e se complementam. O conhecimento intuitivo fornece as bases para o desenvolvimento do conhecimento experimental, uma vez que as experiências práticas estão relacionadas aos conceitos intuitivos já estabelecidos. Da mesma forma, o conhecimento experimental é o ponto de partida para o desenvolvimento do conhecimento teórico, uma vez que as observações e medições realizadas empregam conceitos geométricos que serão posteriormente aprofundados e formalizados.

Conforme a visão de Pais (1996), o desenvolvimento do pensamento geométrico ocorre por meio da interação contínua entre essas três formas de conhecimento, em um processo progressivo e cumulativo. A partir do conhecimento intuitivo, passando pelo conhecimento experimental e chegando ao conhecimento teórico, o indivíduo adquire habilidades e competências geométricas cada vez mais

sofisticadas, que lhe permitem compreender e utilizar a geometria de forma mais ampla e abstrata.

Em resumo, o pensamento geométrico pela Teoria de Pais (1996) é uma abordagem que visa promover o aprendizado da geometria de forma significativa, incentivando a investigação, a exploração e a argumentação entre os estudantes. Através do uso de instrumentos concretos e semióticos, da valorização da linguagem e da comunicação, essa teoria contribui para o desenvolvimento do pensamento crítico e das habilidades geométricas dos estudantes.

Portanto, é fundamental reconhecer a importância e a complementaridade entre o conhecimento intuitivo, experimental e teórico (PAIS, 1996) na construção do pensamento geométrico. Essa compreensão contribui para uma abordagem mais abrangente e eficaz no ensino e aprendizagem da geometria, promovendo uma maior compreensão dos conceitos e uma maior capacidade de aplicação dos mesmos em diferentes contextos.

Ao desenvolver e utilizar o pensamento geométrico (CROWLEY, 1996), ampliamos nossa capacidade de compreensão e resolução de questões complexas. Ele também é essencial para profissões que envolvem design, arquitetura, engenharia e ciência da computação. Ao desenvolver e aprimorar o pensamento geométrico, é importante utilizar ferramentas como desenhos, modelos tridimensionais, cálculos e representações visuais. Com a prática regular, podemos aperfeiçoar nossa capacidade de visualizar, analisar e resolver problemas geométricos de maneira eficiente.

Em resumo, o pensamento geométrico (KALEFF, 1994) desempenha um papel fundamental e essencial no desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático e na compreensão aprofundada do mundo ao nosso redor, oferecendo-nos uma perspectiva única e abrangente. É uma habilidade valiosa e indispensável que nos capacita a explorar minuciosamente as formas e relações geométricas complexas, proporcionando-nos uma visão multidimensional do universo matemático e suas aplicações práticas. Resolver problemas matemáticos complexos torna-se mais eficaz e acessível quando aplicamos o pensamento geométrico em conjunto com outras técnicas e ferramentas, que incluem desenhos elaborados e precisos, modelos tridimensionais altamente detalhados, cálculos matemáticos precisos e representações visuais meticulosamente construídas em cada passo do processo.

### 3.4 A Teoria de Van-Hiele no desenvolvimento do pensamento geométrico

A Teoria de Van Hiele é um modelo teórico (VILLIERS, 2010) que descreve o desenvolvimento do pensamento geométrico em estudantes. Elaborada pelos educadores holandeses Pierre e Dina Van Hiele na década de 1950, essa teoria é amplamente utilizada para entender como os estudantes aprendem e progridem em geometria.

A Teoria de Van Hiele divide o processo de aprendizagem geométrica (CROWLEY, 1996) em cinco níveis e cada nível avança seguindo as fases distintas. Cada nível representa um estágio no desenvolvimento do pensamento geométrico e possui características específicas que os estudantes devem superar antes de progredir para o próximo nível. No Quadro 3 temos uma descrição dos níveis da Teoria de Van Hiele, conforme Crowley (1996).

**Quadro 3 - Descrição dos níveis da Teoria de Van Hiele**

| Nível 0      | Nível 1 | Nível 2          | Nível 3        | Nível 4 |
|--------------|---------|------------------|----------------|---------|
| Visualização | Análise | Dedução Informal | Dedução Formal | Rigor   |

Fonte: Adaptado de Crowley (1996).

Conforme Crowley (1996), o Nível 0 (zero), conhecido como "Nível de Visualização", os estudantes se baseiam em sua percepção visual para identificar e descrever formas e figuras. Nesse nível, a geometria é abordada principalmente como uma coleção de imagens e objetos visuais, permitindo que os estudantes explorem e reconheçam suas características visuais distintas. Segundo Nasser (2010), os estudantes são encorajados a examinar cuidadosamente as formas e figuras, prestando atenção aos detalhes, como número de lados, ângulos e outras características visuais.

Já no Nível 1, chamado de "Nível da Análise" (CROWLEY, 1996), os estudantes começam a desenvolver uma compreensão mais aprofundada das propriedades das formas e figuras. São incentivados, nesse nível, a explorar as relações entre os elementos geométricos e a fazer conexões entre diferentes figuras. Durante este nível (NASSER, 2010), os estudantes podem começar a classificar as formas com base em suas propriedades, como a presença de ângulos retos ou

linhas paralelas. Também podem começar a investigar as congruências e semelhanças entre figuras, explorando conceitos de perímetro e área.

À medida que progredirem nesses dois níveis (CROWLEY, 1996), os estudantes desenvolvem habilidades fundamentais em geometria, como a capacidade de visualizar e descrever formas, além de analisar suas propriedades. Essas habilidades são essenciais para avançar em níveis mais complexos de geometria, onde os estudantes podem aplicar suas compreensões para resolver problemas práticos, como cálculos de área e volume, ou para explorar conceitos avançados, como geometria tridimensional.

Em resumo, ao dividir o estudo da geometria em níveis de visualização e análise (NASSER, 1990), os estudantes são guiados em sua jornada de compreensão geométrica, passando de uma apreciação visual básica para uma compreensão mais profunda das propriedades e relações das formas e figuras. Percebendo as figuras e seus elementos constituintes, bem como a relacionar essas propriedades entre si.

Essa abordagem gradativa permite que os estudantes desenvolvam uma base sólida em geometria, preparando-os para desafios futuros e aplicações práticas não só em matemática, mas nas demais disciplinas, que demandam a habilidade de raciocínio.

O Nível 2, segundo Crowley (1996) é o "Nível da Dedução Informada", no qual os estudantes começam a usar sua capacidade de raciocínio lógico e dedutivo para entender as propriedades e relações geométricas de maneira mais abstrata.

Para o Nível 3, conhecido como "Nível da Dedução Formal", os estudantes aprofundam seu entendimento de conceitos geométricos (CROWLEY, 1996) e começam a trabalhar com provas formais. Nesse momento, eles demonstram uma capacidade evoluída de analisar e extrair conclusões lógicas a partir dos princípios já estabelecidos. Isso é feito por meio da compreensão aprofundada de conceitos geométricos e da aplicação desses conceitos em raciocínios formais.

Os estudantes desenvolvem a habilidade (VILLIERS, 2010) de generalizar suas descobertas e aplicá-las a diferentes contextos geométricos. E não apenas exploram a geometria em um único cenário, mas são capazes de transferir suas conclusões para uma variedade de situações que envolvem formas e relações espaciais. Essa habilidade de generalização demonstra sua solidez no domínio da geometria e seu poder de abstração.

Além disso, ao trabalharem com provas formais, os estudantes adquirem uma compreensão mais detalhada dos princípios fundamentais que regem a geometria. Eles aprofundam sua apreciação pelas estruturas lógicas subjacentes e pela importância de fundamentar suas conclusões em raciocínios sólidos. Com a prática contínua, eles se tornam proficientes em expressar e justificar suas ideias de forma rigorosa e metódica, construindo assim uma base sólida para o estudo avançado da geometria e áreas relacionadas.

Em resumo, o nível 3 é por assim dizer um nível de abstração (NASSER e SANT'ANNA, 2010) e proporciona aos estudantes a oportunidade de desenvolver uma visão mais ampla da geometria e sua aplicação em diversas situações. Para tanto são capazes de argumentar com base em evidências e raciocínio lógico, expandindo seu entendimento e habilidades para além das propriedades geométricas básicas. Esse aprofundamento no pensamento abstrato (NASSER, 2010), na aplicação de provas formais, representa um marco importante no desenvolvimento dos estudantes no campo da geometria.

Por fim, o Nível 4 é o "Nível do Rigor" segundo Crowley (1996), no qual os estudantes desenvolvem uma visão mais sofisticada da geometria como um sistema axiomático. Os estudantes podem compreender e aplicar conceitos avançados e justificar teoremas complexos utilizando estruturas formais e provas completas.

Adentrando a Teoria de Van Hiele, para que ocorra a progressão do estudante de um nível ao próximo, implica em percorrer as cinco fases (KALEFF, 1994) sequenciais de aprendizagem da mesma teoria. As fases de aprendizagem são etapas de graduação e organização das atividades desenvolvidas pelos estudantes para adquirirem experiências que os possibilitem elevar os seus níveis de pensamento geométrico. O processo de elevação de níveis depende mais da instrução recebida pelo aprendiz do que de sua idade. Desta forma, cabe salientar a importância do método, dos conteúdos e materiais, da organização e do que é oferecido aos estudantes.

Cada uma dessas fases contribui, de maneira proposital e planejada, a exploração, a discussão e a integração dos conhecimentos adquiridos em cada nível. As fases de aprendizagem são:

*a - Informação;*

*b - Orientação dirigida;*

*c - Explicação;*

*d - Orientação livre;*

*e - Integração.*

Para auxiliar os estudantes no processo de elevação de um nível ao seguinte, se deve trabalhar as cinco fases. Segundo Sant'Anna (2001, p. 67), “com exceção da última fase, as outras podem ocorrer em diversas ordens ou até simultaneamente”.

A Fase 1, independente do nível da Teoria de Van Hiele do pensamento geométrico que se encontra o estudante, é a *Fase da Informação*. Nessa fase, o professor e estudantes dialogam e desenvolvem atividades sobre os objetivos de estudo para este nível. Esse momento permite ao professor se informar a respeito dos conhecimentos prévios dos estudantes sobre os tópicos abordados. Durante as observações e questionamentos, é introduzido o vocabulário específico para cada nível.

Na Fase 2, conhecida como *Fase de Orientação Dirigida*, os estudantes exploram o tópico abordado utilizando o material organizado pelo professor. As atividades devem possibilitar de maneira progressiva e efetiva que os novos conceitos e estruturas matemáticas estabelecidas possam ser compreendidos, pois, este produto de pensamento será o objeto de pensamento do próximo nível. Nesta fase, a maioria dessas atividades devem possibilitar respostas específicas e diretas.

A Fase 3 é caracterizada como de *Fase da Explicação*. Com base em experiências anteriores, dentro ou fora da sala de aula, é importante que o professor incentive os estudantes a expressarem oralmente suas observações, para promover diálogos de defesa e contestações de ideias, para impulsionar o desenvolvimento do raciocínio deles. Nessa fase, o papel do professor se limita a incentivá-los a isso e a orientar o uso da linguagem adequada.

Subsequente, a Fase 4 é a de *Orientação Livre*, onde são propostas, aos estudantes, atividades mais complexas exigindo entrelaçamento de todo conhecimento adquirido. O professor deve planejar atividades diferentes das tradicionais, com mais de uma forma de resolução ou final aberto, que exijam do estudante o domínio da rede de relações do assunto estudado e o possibilitem explorar a própria capacidade de raciocínio, de investigação e decisão nas estratégias de solução.

Chegando a Fase 5, a chamada de *Fase da Integração*, os estudantes elaboram uma síntese com os objetos e relações dos tópicos abordados. O

professor deve auxiliar na construção da síntese, estimulando uma visão geral de tudo que foi estudado, lembrando que esse produto de pensamento será o objeto de pensamento para o próximo nível. Nada de novo deve aparecer na síntese, apenas os tópicos que foram estudados.

Segundo a Teoria de Van Hiele, para que o estudante alcance um nível superior de raciocínio e assim progrida no pensamento geométrico, o planejamento estruturado pelo professor deve perpassar por todas as fases de aprendizagem. De acordo com Crowley (1996, p. 8), ao final da fase de integração o novo conhecimento construído durante o processo substitui o antigo, possibilitando que o estudante alcance um novo nível de pensamento, o que pode torná-lo apto para recomeçar as fases de aprendizagem no nível seguinte.

#### **4 CENÁRIOS PARA INVESTIGAÇÃO E A GEOMETRIA: O QUE DIZEM AS PESQUISAS**

O capítulo apresenta um conjunto de pesquisas que corroboram para o entendimento da importância e relevância dos conceitos de Educação Matemática Crítica, uma tendência de ensinar e aprender matemática. Destacando os conceitos de Cenários para investigação e o uso do diálogo como ferramenta diferenciada ao contexto escolar na busca da participação do estudante, dando ênfase ao contexto vivido por cada estudante. Além disso, apresento ideias sobre a importância do estudo da geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental e no campo da Geometria, além de averiguar o que tem-se produzido no meio acadêmico.

Para tanto, um dos movimentos da pesquisa foi averiguar nas dissertações e teses disponíveis nas plataformas 'Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações' (BDTD), 'Catálogo de Teses e Dissertações' (CAPES), 'Repositório FURG' e 'Google Acadêmico' de como se tem dado os estudos do campo da Geometria em Cenários para investigação, na abordagem da Educação Matemática Crítica. Consideramos para compor essa pesquisa os estudos produzidos no intervalo dos anos de 2012 a 2022.

A busca por estudos para contribuir com a pesquisa na BDTD com os descritores 'Cenários para investigação' e 'Geometria', resultou em diferentes estudos, que ao serem analisados e aproximados ao tema de pesquisa pela leitura do resumo, com olhar de refinamento, optou-se por um estudo com ligação ao foco desta pesquisa.

Partimos para uma nova pesquisa em outra plataforma, desta vez na plataforma CAPES. A pesquisa usou os mesmos descritores 'Cenários para investigação' e 'Geometria' e o período descrito, surgindo cinco estudos que, ao serem analisados, percebeu-se que um dos estudos coincidiu com o adotado na BDTD, restando quatro estudos com permissão de acesso.

Para compor o aporte teórico, mergulhamos no Repositório da FURG, e a partir dos descritores "Educação Matemática Crítica" o resultado foi a contribuição de quatro dissertações que fazem parte do Programa de Mestrado ao qual esta pesquisa está inserida.

Seguimos para a pesquisa na Plataforma Google Acadêmico, com os descritores inicialmente mencionados. Esta trouxe uma gama de estudos dos mais variados como: artigos, dissertações, teses, citações, revistas, entre outros. Nessa plataforma a pesquisa foi facilitada por trazer os descritores no corpo da escrita do estudo, assim, numa rápida procura obtivemos estudos alinhados à temática. Ao analisar os estudos por leitura dos resumos contidos em cada um, excluímos os estudos que não davam ênfase aos descritores, bem como os que não traziam informações conforme os aportes teóricos adotados. Nos estudos escolhidos, percebemos que dois encontram-se selecionados em outras plataformas anteriores, sendo um na BDTD e CAPES e, outro na CAPES. Selecionamos então cinco estudos para compor a análise. Também se fez presente na busca o livro '*Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática*' (ALRØ E SKOVSMOSE, 2021), que compõem os aportes teóricos desta pesquisa.

O resultado da pesquisa totalizou quatorze estudos e, para a apreciação dos mesmos, elaboramos um quadro contendo o local da pesquisa, título do estudo, tipo de estudo, instituição, último nome do autor e ano da publicação, e o link do estudo. Consta no Quadro 4, o ano da publicação em ordem crescente, conforme o intervalo estipulado para a pesquisa.

**Quadro 4 - Resultado da pesquisa**

| Local da pesquisa           | Título do estudo                                                                                                   | Tipo de Estudo | Instituição | Último nome Autor/Ano | Link do Estudo                                                                                                                                                                                                        |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|-------------|-----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| BDTD/CAPES/Google Acadêmico | Geometria nos anos iniciais: uma proposta de formação de professores em Cenários para investigação.                | Dissertação    | UNIVATES    | RABAIOLLI (2013)      | <a href="https://www.univates.br/bduserver/api/core/bitstreams/80dc9f6d-d268-49b4-bb2b-f3bfd829b8bf/content">https://www.univates.br/bduserver/api/core/bitstreams/80dc9f6d-d268-49b4-bb2b-f3bfd829b8bf/content</a>   |
| CAPES                       | Abordando geometria por meio da investigação matemática: um comparativo entre o 5º e 9º anos do Ensino Fundamental | Dissertação    | UNIVATES    | SCHMITT (2015)        | <a href="https://www.univates.br/bduserver/api/core/bitstreams/2a67cb4-d707-40e7-a76e-2559b2f39637/content">https://www.univates.br/bduserver/api/core/bitstreams/2a67cb4-d707-40e7-a76e-2559b2f39637/content</a>     |
| CAPES/Google Acadêmico      | Isometrias e congruência: uma investigação no Ensino Fundamental                                                   | Dissertação    | UFRGS       | BROCKER (2016)        | <a href="https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/150246/001008089.pdf?sequence=1&amp;isAllowed=y">https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/150246/001008089.pdf?sequence=1&amp;isAllowed=y</a>               |
| CAPES                       | Práticas Investigativas No Ensino De Geometria: Contribuições Para Ação Docente                                    | Dissertação    | UFPA        | MATOS (2017)          | <a href="https://www.repositorio.ufpa.br/bitstream/2011/10512/1/Dissertacao_PraticasInvestigativasEnsino.pdf">https://www.repositorio.ufpa.br/bitstream/2011/10512/1/Dissertacao_PraticasInvestigativasEnsino.pdf</a> |

| Local da pesquisa | Título do estudo                                                                                                                                                                                                 | Tipo de Estudo | Instituição | Último nome Autor/Ano                | Link do Estudo                                                                                                                                                                                                            |
|-------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|-------------|--------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Google Acadêmico  | Utilização do Geogebra com smartphone: Geometria Dinâmica por meio de um cenário para investigação                                                                                                               | Artigo         | IFRS        | MENEZES (2018)                       | <a href="https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/2685/2059">https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/2685/2059</a>                                                                 |
| Google Acadêmico  | GeoGebra em Dispositivos Móveis: o ensino de geometria na perspectiva da Educação Matemática Crítica                                                                                                             | Artigo         | PUCSP       | BAGGIOTTO; BERNARDI; GREGOLIN (2020) | <a href="https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/49776/pdf">https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/49776/pdf</a>                                                                               |
| Google Acadêmico  | Atividades de Modelagem Matemática na perspectiva sociocrítica: contribuições para o desenvolvimento crítico de estudantes do ensino fundamental utilizando como pano de fundo a geometria e o tema desmatamento | Monografia     | UFOP        | CRUZ (2020)                          | <a href="https://monografias.ufop.br/bitstream/35400000/2863/6/MONOGRAFIA_AtividadesModelagemMatem%ca1tica.pdf">https://monografias.ufop.br/bitstream/35400000/2863/6/MONOGRAFIA_AtividadesModelagemMatem%ca1tica.pdf</a> |
| CAPES             | Tarefas investigativas para o ensino da geometria no 5º ano do ensino fundamental                                                                                                                                | Dissertação    | UNIVATES    | VIAN (2020)                          | <a href="https://www.univates.br/bduserver/api/core/bitstreams/1ea5b951-6106-4a07-91a0-b553ee14d1ac/content">https://www.univates.br/bduserver/api/core/bitstreams/1ea5b951-6106-4a07-91a0-b553ee14d1ac/content</a>       |
| Google Acadêmico  | Cenários para investigação no ensino de medidas de comprimento e superfície: uma proposta colaborativa entre professor e estudante                                                                               | Dissertação    | UTFPR       | OLIVEIRA (2020)                      | <a href="http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/24099/1/cenario_sinvestigacaoensino_medidas.pdf">http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/24099/1/cenario_sinvestigacaoensino_medidas.pdf</a>         |
| Repositório FURG  | Cenários para investigação no ensino fundamental sob a perspectiva da educação matemática crítica                                                                                                                | Dissertação    | FURG/PP GCE | LACERDA (2020)                       | <a href="https://sistemas.furg.br/sistemas/sab/arquivos/bdtd/ce47d2fdef60d0b6f578fd2d444957aa.pdf">https://sistemas.furg.br/sistemas/sab/arquivos/bdtd/ce47d2fdef60d0b6f578fd2d444957aa.pdf</a>                           |
| Repositório FURG  | Educação matemática crítica e os jogos digitais: Uma possibilidade de convite aos Cenários para investigação                                                                                                     | Dissertação    | FURG/PP GCE | MILANO (2021)                        | <a href="https://sistemas.furg.br/sistemas/sab/arquivos/bdtd/851ada373e428dcbc423ff693ea999e1.pdf">https://sistemas.furg.br/sistemas/sab/arquivos/bdtd/851ada373e428dcbc423ff693ea999e1.pdf</a>                           |
| Google Acadêmico  | Uma atividade investigativa sobre polígonos: reflexões sobre imprevisibilidades que promoveram aprendizagens                                                                                                     | Artigo         | USP         | RUBIM; FERNANDES; MILANI (2021)      | <a href="https://www.revistas.bemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/437/239">https://www.revistas.bemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/437/239</a>                                                         |
| Repositório FURG  | O livro-jogo no ensino da matemática: um convite aos Cenários para investigação                                                                                                                                  | Dissertação    | FURG/PP GCE | NERI (2021)                          | <a href="https://sistemas.furg.br/sistemas/sab/arquivos/bdtd/ada2f21d49693ae90c2c37d2508d5aa2.pdf">https://sistemas.furg.br/sistemas/sab/arquivos/bdtd/ada2f21d49693ae90c2c37d2508d5aa2.pdf</a>                           |
| Repositório FURG  | Educação matemática crítica: reflexões sobre ambientes de aprendizagem matemática na educação do campo em uma turma do quinto ano do ensino fundamental                                                          | Dissertação    | FURG/PP GCE | CASTILHOS (2022)                     | <a href="https://sistemas.furg.br/sistemas/sab/arquivos/bdtd/d60d4358e76ea2bb9e571a4bc8683e7a.pdf">https://sistemas.furg.br/sistemas/sab/arquivos/bdtd/d60d4358e76ea2bb9e571a4bc8683e7a.pdf</a>                           |

Fonte: Própria autora (2022).

No decorrer da busca, algo que chamou atenção percorrendo pelas diferentes plataformas adotadas, foi o fato de muitos estudos ao tratarem da temática 'Cenários

para investigação’, descritor atribuído a Educação Matemática Crítica do autor Skovsmose (2000), traziam estudos entrelaçados com a matemática financeira.

De posse dos estudos e analisando seus contextos, a análise sistemática levou em conta os conceitos de geometria no contexto dos Cenários para investigação da Educação Matemática Crítica e, baseou-se nos seguintes estudos: Schmitt (2015), Brocker (2016), Menezes (2018), Baggiotto (2020), Cruz (2020), Vian (2020), Oliveira (2020) e Rubim (2021) pela relevância ao tratarem de assuntos que se aproximam da presente pesquisa como: o estudante protagonista do processo, diálogo entre os participantes, autonomia na aprendizagem, entre outros.

Trazemos nessa seção o comentário dos estudos citados anteriormente e resultantes da busca nas plataformas CAPES e Google Acadêmico, dada sua contribuição para a proposta de pesquisa, levando em conta as seguintes categorias: Aprendizagem de geometria, Cenários para investigação.

Schmitt (2015) refere-se em seu estudo *‘Abordando geometria por meio da investigação matemática: um comparativo entre o 5º e 9º anos do Ensino Fundamental’* a investigação matemática em atividades de geometria. A pesquisa desenvolveu-se em duas escolas públicas do Vale do Taquari/RS, sendo uma da rede municipal e outra estadual. O público alvo da pesquisa envolveu uma turma de 5º ano e outra de 9º de cada escola participante. As escolas escolhidas fazem parte do projeto Observatório da Educação intitulado “Estratégias metodológicas visando à inovação e reorganização curricular no campo da Educação Matemática no Ensino Fundamental”. Os embasamentos teóricos empregados estão apoiados nos escritos de Palhares (2004), Dante (2009), Polya (1978) e Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) que fundamentam o uso de atividades de investigação matemática para incentivar o estudante à descoberta de novos saberes, por meio de problemas abertos que possam ser matematicamente registrados. O foco da investigação proposto estabeleceu cinco atividades que aproximavam variados assuntos de geometria, possibilitando situações de autonomia e trabalho em grupo, favorecendo a socialização de aprendizagens. Os instrumentos para a coleta de dados da pesquisa constituiu-se de diário de campo dos estudantes e também do professor e filmagens das aulas, por se tratar de um estudo de caso. Usou-se a Análise de Conteúdo como método de análise dos dados por categorias produzidas a partir das diferenças e semelhanças que foram surgindo ao longo da intervenção. Nos resultados, percebeu-se a dificuldade dos estudantes participantes da pesquisa no manuseio da

régua e do transferidor. Identificou-se que ao expressar a aprendizagem de forma escrita, os estudantes não conseguiam relatar o que realmente sabiam.

O estudo de Brocker (2016), sob o título de *'Isometrias e congruência: uma investigação no Ensino Fundamental'*, traz uma experiência com os conceitos de congruência de figuras planas, no Ensino Fundamental, desempenhado em uma turma de nono ano em uma escola pública da rede municipal de Parobé/RS, com o intuito de investigar as transformações isométricas. O estudo embasou-se na influência do modelo de cooperação investigativa de Skovsmose (2021), e propôs ações de natureza exploratória e investigativa com questões abertas ao diálogo entre os participantes da pesquisa fazendo uso de materiais concretos e de um software de geometria dinâmica e estudos de Duval (2012). A pesquisa usou da metodologia de uma pesquisa-ação para contemplar a investigação da aprendizagem dos estudantes na construção dos conceitos de congruência, possibilitados pelo diálogo entre os pares na busca por soluções para os problemas propostos sob a menor interferência do professor e pesquisador no papel de observador e orientador. Os dados com as soluções propostas pelos estudantes e as discussões realizadas durante o desenvolvimento das atividades foram coletados via produções escritas dos estudantes, das gravações em áudios e vídeos e, arquivos elaborados no ambiente do software GeoGebra. Pelas análises dos registros pode-se averiguar que os estudantes assimilaram o conceito de congruência de figuras planas através da exploração e da discussão sobre as transformações isométricas.

Menezes (2018), em seu estudo *'Utilização do Geogebra com smartphone: Geometria Dinâmica por meio de um cenário para investigação'*, relata a experiência de uma possibilidade para a elaboração de um ambiente de aprendizagem para desenvolver o aprendizado de Geometria, por meio de um cenário para investigação permitindo que o estudante seja protagonista do processo. O estudo ocorreu em uma turma de estudantes do 3º ano do Ensino Médio de uma escola estadual, que não dispõem de laboratório de informática e acesso gratuito aos estudantes. Para desenvolver a pesquisa usaram-se os smartphones dos próprios estudantes e na falta deste as atividades foram feitas em duplas, dando oportunidade a todos de participarem. O objetivo foi apresentar o aplicativo GeoGebra como uma ferramenta de ajuda na resolução de problemas de geometria. Através da exploração do aplicativo, os estudantes foram capazes de observar características, estabelecer

relações, formular questões e procurar explicações, proporcionando um ambiente de aprendizagem nos moldes de Cenários para investigação. O aporte teórico apresentado embasou-se em Skovsmose (2000) e Basso e Notare (2012). Percebeu-se que a cada atividade desenvolvida no aplicativo os estudantes faziam suas observações e conclusões por meio da participação no diálogo, compartilhando seus entendimentos com os demais e vice-versa.

No estudo *‘GeoGebra em Dispositivos Móveis: o ensino de geometria na perspectiva da Educação Matemática Crítica’*, Baggiotto (2020), apresenta uma pesquisa de abordagem bibliográfica desenvolvida sob o objetivo de investigar e descrever probabilidades de aplicação do GeoGebra para dispositivos móveis no caso smartphones para o ensino de geometria, na perspectiva da Educação Matemática Crítica embasada nos estudos de Skovsmose (2001, 2008). As atividades foram propostas para estudantes da educação básica alicerçadas em três proposições desenvolvidas para o GeoGebra em smartphones: a construção de um triângulo, investigação do círculo e exemplo 3D. O estudo permitiu concluir que o Cenário para Investigação se apresenta como um ambiente de aprendizagem inovador que contempla a autonomia do estudante diante da construção do seu conhecimento matemático, mobilizando o seu protagonista nesse processo. E que o professor desempenha um papel importante de propor desafios aos estudantes e interferir o mínimo possível nas estratégias de uso do GeoGebra.

A presente pesquisa de Cruz (2020) *‘Atividades de Modelagem Matemática na perspectiva sociocrítica: contribuições para o desenvolvimento crítico de estudantes do ensino fundamental utilizando como pano de fundo a geometria e o tema desmatamento’*, teve como principal objetivo desvelar possíveis contribuições que atividades de Modelagem Matemática na perspectiva sociocrítica podem trazer para o desenvolvimento dos estudantes na sociedade, tornando-os cidadãos mais críticos. A pesquisa foi sustentada pelo aporte teórico de Alrø e Skovsmose (2006), Skovsmose (2000), Pavanello (1993) e Freire (2000). A pesquisa foi desenvolvida com estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública estadual da cidade de Ouro Preto, Minas Gerais. Por meio de gravações em áudio, anotações produzidas pelos estudantes no desenvolvimento das atividades, fotografias e observação por parte do pesquisador das interações dos estudantes, se deu a coleta de dados. No quesito metodologia, se adotou a pesquisa qualitativa com a coleta, análise e a interpretação de dados. E a pesquisa trouxe contribuições das

experiências dos estudantes na organização e desenvolvimento dos conhecimentos de geometria em situações reais, além das vivências em Cenários para investigação que auxiliaram na construção da autonomia.

O estudo de Vian (2020), *'Tarefas investigativas para o ensino da geometria no 5º ano do ensino fundamental'*, investigou a participação de sete estudantes de uma turma de 5º ano de uma Escola Municipal, situada no Vale do Taquari, envolvidos em uma prática de 16 horas/aulas divididas em diferentes momentos. O objetivo idealizado foi analisar estratégias e conjecturas elaboradas pelos estudantes ao realizarem tarefas investigativas envolvendo o trabalho coletivo. A coleta de dados, deu-se a partir de um diário de campo, que cada estudante participante recebeu para registrar as resoluções das tarefas propostas e percepções no decorrer da prática pedagógica, além de áudios e vídeos. As atividades propostas aos estudantes envolveram a construção e planificação de sólidos geométricos, sequências, deslocamento e localização de pessoas, desenhos de polígonos, áreas e perímetros, por meio da Investigação Matemática. Pode-se perceber que os estudantes além de desenvolverem a capacidade de ouvir e de respeitar opiniões diferentes, colaboraram uns com os outros e auxiliando os que apresentavam maiores dificuldades, permitindo a participação ativa na busca da autonomia de sua aprendizagem.

Oliveira (2020) no seu estudo intitulado *'Cenários para investigação no ensino de medidas de comprimento e superfície: uma proposta colaborativa entre professor e estudante'*, traz o uso de Cenários para investigação como uma proposta diferenciada e colaborativa para o ensino de matemática sob a abordagem da Educação Matemática Crítica (EMC). A pesquisa de cunho qualitativa sob a abordagem interpretativa foi realizada com 30 estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental de um colégio da rede privada de Ponta Grossa, estado do Paraná, que aceitaram o convite para fazer parte de um processo de ensino por meio dos Cenários para investigação, para o estudo de medidas de comprimento e de superfície. Para verificar a compreensão acerca do conteúdo trabalhado foi realizada uma avaliação diagnóstica, antes e depois do desenvolvimento das atividades matemáticas. A coleta de dados ocorreu pelas anotações da professora pesquisadora em um diário de bordo, bem como as anotações dos estudantes participantes da pesquisa. Referencial teórico baseado em Skovsmose (2001), referência para EMC e Cenários para investigação. Os resultados da pesquisa com

os Cenários para investigação dialogam com a prática dos professores e a boa relação entre os estudantes e a disciplina de matemática. Como produto educacional, produziu-se um livro em formato digital com os procedimentos, encaminhamentos, relatos e atividades, bem como as reações dos estudantes e os resultados em relação à aprendizagem do conteúdo, além da postura do professor em relação ao estudante e vice-versa.

*‘Uma atividade investigativa sobre polígonos: reflexões sobre imprevisibilidades que promoveram aprendizagens’* de Rubim (2021) é um estudo que traz o relato de experiência de uma atividade de exploração e investigação envolvendo o estudo de polígonos. O público alvo da pesquisa foram os estudantes de uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública em São Paulo. O objetivo principal era caracterizar uma aula de Matemática em que os estudantes estivessem envolvidos em situações de investigação, exploração e descobrimento. A pesquisa usou da metodologia de observação participante e a coleta de dados ocorreu pelo diário de campo da pesquisadora. O aporte teórico amparou-se nos estudos de Ponte (2003), Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) com ênfase nas investigações nas aulas de Matemática e nos estudos de Skovsmose (2000), sob as abordagens de cenário de investigação, zona de risco e zona de conforto. O estudo apontou que há situações de imprevisibilidade no contexto das atividades de matemática, colocando o professor numa zona de risco. Mas tais situações contribuem para o desenvolvimento de um ambiente de aprendizagem colaborativo entre professor e estudantes.

Ao analisar os estudos de Bocker (2016), Menezes (2018) e Baggiotto (2020), notamos que os mesmos implicam na temática da geometria. Salientando que as investigações nos Cenários para investigação, nesses estudos, estão intimamente ligadas ao uso do aplicativo Geogebra.

Os estudos apontam que os Cenários para investigação podem ser usados para a aprendizagem da geometria em diferentes anos escolares da educação básica. Sendo necessário, pelo pouco número de estudos, explorar nos anos iniciais a aprendizagem de geometria através da EMC em Cenários para investigação. Observamos que o diário de campo foi o instrumento mais citado para coletar dados, tanto para os estudantes nas observações como para o pesquisador registrar suas escritas. Em relação aos resultados, os estudos citam que a proposta de Cenários para investigação sob a abordagem da EMC, contribuem para o desenvolvimento de

ambientes de aprendizagem mais desafiadores e colaborativos aos estudantes e professores. Proporcionando aos estudantes um ambiente propício para o protagonismo e autonomia de sua aprendizagem.

Pela análise dos estudos percebe-se que os seguintes autores: Skovsmose (2000, 2001, 2008, 2021); Palhares (2004); Dante (2009); Polya (1978); Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, 2016); Ponte (2003); Basso e Notare (2012); Duval (2012); Alrø e Skovsmose (2006); Pavanello (1993) e Freire (2000). Sustentam a discussão da presente pesquisa em atribuir ao contexto da geometria as questões da Educação Matemática Crítica, os Cenários para investigação e o convite ao diálogo.

Vale ressaltar que nos estudos de Schmitt (2015) e Vian (2020), ambos fazem uso do termo “investigação” que está atrelado à “investigação matemática”, conceito desenvolvido por João Pedro da Ponte e outros. O conceito de “investigação matemática” é diferente do conceito de Skovsmose “cenários para investigação”, base dessa pesquisa.

## 5 PERCURSOS METODOLÓGICOS: um caminho para elaborar Cenários para investigação

Para compreender melhor os percursos metodológicos adotados nesta pesquisa, retomamos o contexto em que ocorreu. Desse modo, tem-se que ela foi desenvolvida em uma escola pública do município de Taquara/RS, com uma turma de quinto ano do ensino fundamental, no ano de 2023. Através da realização de atividades baseadas em Cenários para investigação, com o objetivo geral de *Avaliar as possibilidades de desenvolver o pensamento geométrico a partir de um convite aos Cenários para investigação, em uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental*, tendo a pesquisadora como professora pesquisadora.

### 5.1 Caracterização da Pesquisa Participante

Para a realização da presente pesquisa, procuramos os caminhos da pesquisa qualitativa numa abordagem de Pesquisa Participante que busca envolver o sujeito para a importância de ser o agente de sua própria aprendizagem, conforme Brandão (2007). Os fundamentos da Pesquisa Participante derivam de preceitos Marxistas, sob a ideologia dos “novos paradigmas” assim como os Cenários para investigação imbuídos da Educação Matemática Crítica (SKOVSMOSE, 2014; FREIRE, 2011), buscam uma interação do sujeito na construção de sua autonomia. Para Brandão (2007, p. 56)

[...] Na pesquisa participante, sempre importa conhecer para formar pessoas populares motivadas a transformar os cenários sociais de suas próprias vidas e destinos, e não apenas para resolverem alguns problemas locais restritos e isolados[...]

A Pesquisa Participante sugestiona ser usada como meio de estimular e instigar o sujeito para o conhecimento. Sustentados por estes argumentos, deu-se a escolha do método de Pesquisa Participante na perspectiva de fomentar a pesquisa nos moldes da criticidade e autonomia (FREIRE, 2011).

## **5.2 Caracterização da região, comunidade e dos sujeitos de pesquisa**

Antes de abordarmos sobre o desenvolvimento das proposições de atividades em Cenários para investigação realizadas com os estudantes do 5º ano da turma 151, faremos, nas subseções a seguir, uma breve descrição da região e as comunidades em que estudantes e a professora pesquisadora estão inseridos e, na sequência, a caracterização dos sujeitos da pesquisa.

### **5.2.1 O porquê da região escolhida para a pesquisa**

Os contextos que escolhemos para desenvolver algo com significado em nossa vida, nos remetem a uma esfera já conhecida, nos fazendo um pouco mais confortáveis ao enfrentamento de possíveis adversidades que uma pesquisa em Cenários para investigação nos remete. Nesse entendimento, a pesquisadora optou pelo município de Taquara<sup>4</sup>, na região do Vale do Paranhana, por ser onde estão a sua moradia e trabalho.

A região do Vale do Paranhana é uma microrregião do estado do Rio Grande do Sul, formada pelos municípios de Igrejinha, Taquara, Parobé, Riozinho, Rolante e Três Coroas, banhados pelos rios dos Sinos, Paranhana e Rolante, colonizada na primeira metade do século XIX pelo fluxo migratório de etnia alemã e italiana. A economia baseia-se na agricultura, hortigranjeiros e calçadista, com expansão para o setor moveleiro, cervejeiro e produção de vinhos. O Vale do Paranhana é referência no turismo de Aventura Nacional com diferentes modalidades, e possui pontos turísticos importantes como: o Centro Busdista Chagdud Khadro Ling em Três Coroas; Igrejas Católica e Evangélica em Taquara; Cascata das Andorinhas em Rolante; Cascata do Chuvisqueiro em Riozinho; Casa de Pedra em Igrejinha; e Igreja de Santa Cristina do Pinhal em Parobé.

A professora pesquisadora é filha do município de Taquara e conhecedora da região rural e de suas características próprias, a qual tem extensão territorial bastante ampla, dividida em seis distritos: Rio da Ilha, Padilha, Entrepelado, Fazenda Fialho, Santa Cruz da Concórdia e Pega Fogo. A sua morada localiza-se

---

<sup>4</sup> Segundo dados do IBGE (2021) a cidade de Taquara pertence à Região Metropolitana de Porto Alegre e está a cerca de 70 km da capital. Possui uma população estimada de 57.740 habitantes. E seu território é de aproximadamente 452,572 km<sup>2</sup>. A colonização da cidade é predominantemente de origem alemã.

no Distrito de Fazenda Fialho, mesmo da escola foco da pesquisa, de modo que esta é uma simbologia afetiva significativa para a professora pesquisadora, descrita na próxima sessão. O Distrito compõe-se por localidades cujas comunidades, à época deste estudo, sobrevivem por meio da exploração da mineração, mais especificamente da retirada em blocos de diferentes formas e tamanhos de pedras de arenito, formação rochosa ligada ao aquífero Guarani<sup>5</sup>.

### **5.3 Descrição da Escola da pesquisa**

A Escola Municipal de Ensino Fundamental Emílio Leichtveis (EMEL), escolhida para esta pesquisa, está localizada na zona rural do município de Taquara, no Distrito de Fazenda Fialho e desde o ano de 2006 atende a demanda de estudantes dos anos finais do ensino fundamental, oriundos de diferentes localidades dos Distritos de Fazenda Fialho e Santa Cruz da Concórdia. Quanto à estrutura física da instituição, esta é composta por três prédios denominados como prédio A, B e C.

O setor administrativo e pedagógico, fica centralizado no prédio A, composto por secretaria e sala da equipe diretiva, com almoxarifado; sala de professores para planejamento com computador, impressora e acesso à internet. Ainda encontramos neste prédio, os banheiros de professores e funcionários masculino e feminino; a cozinha com refeitório com seu estoque de itens diversos de alimentos; a biblioteca com televisor smart; a sala de informática com 20 computadores e acesso à internet; a Sala de Recursos e a sala de aula do 5º ano.

No prédio B, estão os banheiros de uso dos alunos feminino, masculino e um adaptado para Atendimento Educacional Especializado (AEE); tem-se também 05 salas de aula temáticas (Arte, Língua Portuguesa, Geografia, Matemática e História). E a cada ano as salas estão sendo constituídas por mais elementos, conforme a temática da disciplina.

No prédio C tem-se o Ginásio, usado para práticas esportivas e para abrigo em dias de chuva, tanto na chegada quanto no horário do recreio (15 minutos), pois

---

<sup>5</sup> O Sistema Aquífero Guarani resulta de diversas formações geológicas originadas na era do Triássico e do Jurássico. Os arenitos do Triássico têm origem fluviolacustre e alcançam uma porosidade média de 16%, em razão dos elevados índices de argila, o que dificulta o fluxo de água no interior da rocha. Os arenitos do Jurássico têm origem eólica e uma porosidade média de 17% e são os melhores reservatórios de água do sistema.

os estudantes chegam em torno das 7 horas e o início das aulas se dá às 7 horas e 35 minutos. Ao fundo do ginásio, com acesso externo, tem-se quatro salas de aula, sendo três delas temáticas (Língua Inglesa, Ensino Religioso e Ciências), e a quarta abriga o grupo de aceleração, composto por estudantes em idade de distorção série/ano, denominado como Grupo de Aprendizagem em Metodologias Ativas (GAMA), atendido por uma professora unidocente.

A escola EMEL dispõe de equipe diretiva composta por diretora, vice-diretora; supervisora; secretária. O corpo docente é formado por professores de Matemática (02), Ciências (02), Língua Portuguesa (02) e um professor para cada disciplina de Arte, História, Geografia, Ensino Religioso, Língua Inglesa e Educação Física. O quadro de funcionários é composto por dois merendeiros; cinco serventes; um vigia; e uma professora para substituição, atendimento na biblioteca e informática. Ainda, compõem o quadro, as professoras unidocentes para o 5º ano e para o GAMA. Para atendimento de apoio aos estudantes com Necessidades Educacionais Especiais (NEE), a escola EMEL tem três professoras auxiliares distribuídas nos turnos da manhã e da tarde.

A gestão da escola esteve sob os cuidados administrativos e pedagógicos da pesquisadora deste estudo no ano de 2022. Outro fato é que a caminhada de formação, desde os anos iniciais da pesquisadora, foi perpassada nesta escola, iniciada no ano de 1984 num prédio conhecido como 'Brizoleta' formado por uma única sala de aula. A partir desse ano escolar (1984) a necessidade de escolarização nessa comunidade ficou latente e evidente, quando então deu-se início a um processo junto aos órgãos públicos municipais. Na época, com a justificativa de que a comunidade necessitava de expansão e ampliação, tanto para a construção de prédio, quanto para a implementação de novos anos escolares, visto que até àquele momento tinha-se apenas a '4ª série'. Deu-se, a partir daí, a ampliação de escolarização com a conquista dos anos escolares subsequentes a cada ano de implementação dos anos finais, e para isso, foi necessária a construção de uma estrutura física, que aos poucos, foi a cada ano se constituindo, chegando ao seu estágio atual.

#### 5. 4 Descrição dos Participantes da Pesquisa

Os participantes dessa pesquisa foram os estudantes do 5º ano, os quais formaram a Turma 151 da EMEF Emílio Leichtveis no ano de 2023, e a professora pesquisadora. Essa turma foi a segunda a fazer parte da esfera educacional, tendo em vista que desde o ano de 2006, a escola estava atendendo somente os Anos Finais do Ensino Fundamental (6º a 9º anos). A primeira turma de 5º ano recebida pela referida escola foi no ano de 2022, após anos de trabalho pedagógico somente com os anos finais. Devido à escola de origem da turma do 5º ano não possuir mais espaço físico para contemplar a sua escolarização.

Visto que essa etapa segue nos domínios da EMEF EMEL, em 2023, e pela pesquisadora querer que mais essa parte da sua história em educação estivesse vinculada a esse espaço escolar, deu-se neste a aplicação das atividades de proposições em Cenários para investigação e coleta de dados para análise.

A turma do 5º ano selecionada para a pesquisa foi a única e composta por 27 (vinte e sete) estudantes, sendo 10 (dez) meninas (34%) e 17 (dezesete) meninos (63%). Com idades entre dez e doze anos, sendo 23 estudantes com 10 anos, 03 estudantes com 11 anos e 01 estudante com 12 anos. Inseridos no contexto da escola desde o início do ano letivo, mais precisamente desde o mês de fevereiro de 2023, no turno da tarde (das 12 horas e 30 minutos às 16 horas e 30 minutos). Por não estarem acostumados com a rotina de uma escola de anos finais, os estudantes têm o recreio em horário diferenciado e antecipado ao dos anos finais. Todos os estudantes dispõem de transporte escolar municipal gratuito.

Segundo informações da professora regente da turma, os estudantes são participativos e apreciam as propostas e atividades planejadas pela professora, demonstrando adorar as atividades de educação física no ginásio.

Atendendo aos aspectos éticos da pesquisa, apresentamos para os estudantes da turma do 5º ano, o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido para realização da pesquisa (TALE). O modelo deste termo, encontra-se no Apêndice B. Além do Termo de Assentimento Livre e Esclarecido, foi coletado o Termo de Autorização para Gravação de Voz e/ou Registro de Imagens (Fotos e Vídeos), modelo encontra-se no Apêndice C.

Convém ressaltar que foi deixado explícito aos participantes, que os dados pessoais obtidos não serão divulgados publicamente, sendo que pais e professora pesquisadora assinaram um termo legal, denominado Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), em que consta a aceitação em participar da pesquisa. No TCLE, que consta como APÊNDICE A, fica claro que, ao participar da pesquisa, essa não trará qualquer prejuízo, bem como qualquer ganho pessoal.

### 5.5 Definição dos instrumentos para Coleta de Dados

Para auxiliar na tarefa da obtenção dos dados com o máximo de autenticidade, a pesquisadora esteve inserida na pesquisa como agente de ação e de observação ao mesmo tempo. Descrevemos conforme o Quadro 5, os instrumentos adotados para o levantamento e a coleta dos dados da presente pesquisa.

**Quadro 5 - Instrumentos da coleta de dados**

| Nº | Instrumentos                                                                                             |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a  | As produções escritas em texto e/ou desenhos dos estudantes, sendo essa escrita espontânea e individual; |
| b  | Gravações em áudio das proposições aplicadas;                                                            |
| c  | Registros fotográficos dos encontros, demonstrando os estudantes envolvidos nas atividades;              |
| d  | Registros do diário de campo da professora pesquisadora.                                                 |

Fonte: Própria autora (2023).

A partir da delimitação dos instrumentos para a coleta dos dados, organizou-se os encontros e a sequência da proposta de Cenários para investigação.

Para os quatro primeiros encontros pré-determinados no delineamento da proposta de Cenários para investigação, os estudantes foram convidados a formar grupos, os quais, ao fim de cada encontro, fariam a elaboração da escrita em cartazes com participação de todos os seus integrantes; ainda cada grupo fez a escrita de seus entendimentos de cada aula, e, no dia seguinte, apresentou o que escreveu, fazendo assim, uma análise dos entendimentos sobre o contexto da aula vivenciada.

No último encontro, para finalizar a proposta de Cenários para investigação, a asserção foi convidar os estudantes a escreverem espontaneamente, e individualmente, os seus entendimentos sobre o que vivenciou na semana, no contexto da geometria, em folha identificada com o cabeçalho padrão da escola.

Ressalta-se que foi esclarecido para os participantes da pesquisa, que os dados pessoais coletados não serão divulgados publicamente, e todos assinaram um termo legal próprio, conhecido como Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), que consta no apêndice C, incluindo a aceitação em participar do estudo. Neste documento, fica claro que participar da pesquisa não causará danos, nem haverá qualquer benefício pessoal. Frisamos que este projeto foi encaminhado ao Comitê de Ética da Universidade Federal do Rio Grande o qual obteve aprovação para seguir com a aplicação e coleta de dados, sob número de Certificado de Apresentação de Apreciação Ética (CAAE) nº 61501622.1.0000.5324, de 23 de fevereiro de 2023.

## **5.6 Caracterização da Análise de Dados**

Para a análise dos dados coletados nessa pesquisa de dissertação adotamos a Análise de Conteúdo (BARDIN, 2016). A análise de conteúdo é um aglomerado de estratégias transmitidas e aplicadas para analisar dados qualitativos, explicam Cavalcante, Calixto e Pinheiro (2014), que averiguam as informações com o propósito de investigar o conteúdo da coleta de dados observado pelo pesquisador, permitindo, de modo sistemático, descrever as mensagens e atitudes conexas, e ainda inferir sobre os dados coletados.

Minayo (2023) adverte que a análise de conteúdo permite a descoberta daquilo que está por trás dos conteúdos devidamente manifestados, e, por isso, vai além do que aparenta ser, demonstrando o que realmente quer ser comunicado:

Os pesquisadores que buscam a compreensão dos significados no contexto da fala, em geral, negam e criticam a análise de frequências das falas e palavras como critério de objetividade e cientificidade e tentam ultrapassar o alcance meramente descritivo da mensagem, para atingir, mediante inferência, uma interpretação mais profunda (MINAYO, 2023, p. 307).

Assim, a escolha deste método dá-se em razão da contribuição para necessidade de se ultrapassar as incertezas que surgem em virtude das hipóteses e do que se pressupõe, enriquecendo, desta forma, a leitura através da compreensão das significações, e da necessidade de demonstrar como as relações se estabelecem, indo além das falas propriamente ditas, conforme ensinam Cavalcante, Calixto e Pinheiro (2014).

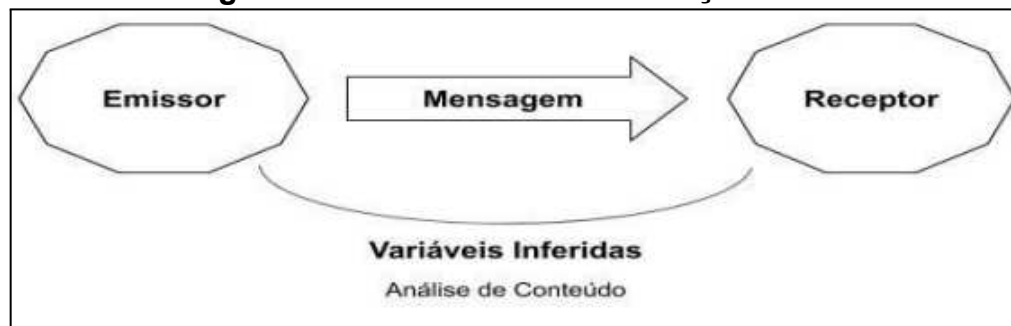
Desta forma, a análise de conteúdo contribuiu para que não ocorresse somente um debruço sobre os dados, e uma análise simples, mas sim para que se alcançasse uma significação mais aprofundada que os textos escritos contêm, o que foi feito através da interpretação de mensagens com duplo sentido, subliminares ou obscuras, para que se pudesse atingir a significação após a observação feita cuidadosamente.

Portanto, tem-se em Bardin (2016), que a análise de conteúdo é também uma análise de significados e significantes, a qual é possível por meio de procedimentos sistemáticos adotados decodificar mensagens. Assim, a análise dos dados desta pesquisa, definiu-se a partir do que propõe Bardin (2016, p. 142), que a define como

[...] um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição de conteúdo de mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitem a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens.

Amparado no excerto, a Análise de Conteúdo pode ser determinada como uma reunião e técnicas de análises de comunicações, com a finalidade de entendimento do que foi escrito, dito ou desenhado entre emissor e receptor de uma informação, segundo a Figura 2.

**Figura 2 - Processo de Comunicação**



Fonte: BARDIN (2016).

Bardin (2016) aponta que a análise de conteúdo, sendo “um conjunto de técnicas de análise de comunicações”, ocorre em três fases distintas: pré-análise, exploração do material e o tratamento dos resultados, quando se faz a inferência e a interpretação. Podemos acompanhar os passos da Análise de Conteúdo conforme o Quadro 6, a seguir:

**Quadro 6 - As etapas da Análise de Conteúdo**

| <b>nº</b>  | <b>Descrição das etapas da Análise de Conteúdo</b>                                      |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>i</b>   | pré-análise: leitura flutuante do estudo;                                               |
| <b>ii</b>  | exploração do material: categorização por unidades de registro;                         |
| <b>iii</b> | análise reflexiva e crítica: tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação. |

Fonte: BARDIN (2016).

A primeira fase, a pré-análise, foi o momento da escolha dos documentos a serem analisados, incorporando a formulação das hipóteses e objetivos para a realização dos critérios que embasam a interpretação final. Se objetivou a organização das percepções iniciais dos documentos selecionados nessa fase, e sendo necessário também a organização para sistematizar e operacionalizar as ideias advindas a partir do referencial teórico, estabelecendo então, indicadores para a interpretação das informações coletadas, através da leitura do material coletado e selecionado, e dos áudios transcritos.

Tendo em vista as diferentes etapas da Análise de Conteúdo, conforme Bardin (2016), a presente pesquisa iniciou o processo de análise por uma leitura flutuante para conhecer o que as respostas traziam de informação. Seguindo para o corpus com a exploração das principais ideias por afinidade ou semelhanças ao mesmo assunto. Para finalizar o processo, realizou-se o registro escrito do resultado da pesquisa por segmento de categorização.

Para iniciar o processo de análise, se faz necessário a leitura flutuante como reconhecimento do material a ser aprofundado. É o momento de conhecer os textos, áudios transcritos e produções escritas que asseguram as análises, “deixando-se invadir por impressões e orientações” (BARDIN, 2016, p. 96). Posterior as navegações nas impressões e orientações, ocorreu a definição do *corpus* de análise, que é “o conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos

procedimentos analíticos” (*ibid*, p. 96), que no caso desta pesquisa foram as falas das participações dos estudantes e entrevistada que se fizeram parte das proposições e os artigos, dissertações, teses e livros elencados nas referências.

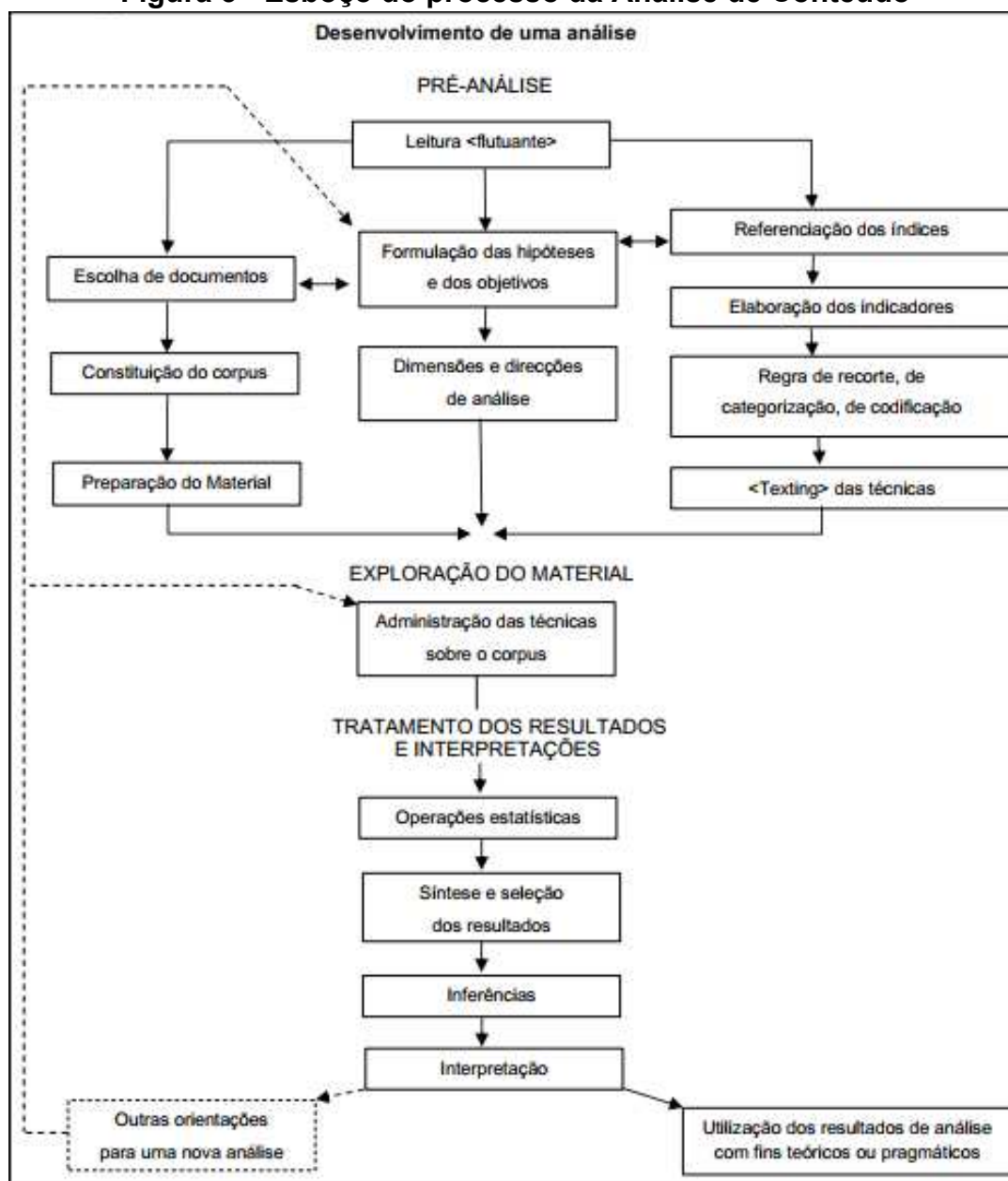
Na presença do *corpus* de análise, contando com parte *a priori* e parte *a posteriori*, deu-se a elaboração das hipóteses que podem ser validadas ou não, a submeter dos dados obtidos e objetivos que se projeta alcançar por meio do *corpus* de análise. A elaboração das hipóteses não é uma etapa imposta para ocorrer a pré-análise, pois, “algumas análises efetuam-se ‘as cegas’ e sem ideias pré-concebidas” (BARDIN, 2016, p. 98), em razão de, uma ou várias estratégias são apontadas *a priori*, para chegar nas preliminares do material a ser analisado.

Ao concluir a elaboração das hipóteses e objetivos, tratou-se em estabelecer os índices, que podem ser a menção explícita de um tema numa mensagem (BARDIN, 2016, p. 100). Estes foram a base para a elaboração dos indicadores, sendo o recorte dos registros requeridos para análise e que tomamos como moldes para apreciar os dados coletados.

Findada a etapa de pré-análise, iniciou-se a análise do material, que representa, “essencialmente de operações de codificação, desconto ou enumeração, em função de regras previamente formuladas” (BARDIN, 2016, p. 101). Fazendo o entendimento, representa a definição das unidades de codificação, contemplou a nomeação das unidades de recorte, da enumeração, e das categorias de distribuição e aglomeração.

Na etapa de tratamento, inferência e interpretação, “os resultados brutos são tratados de maneira a serem significativos (‘falantes’) e válidos” (BARDIN, 2016, p.101). Ou melhor, é a etapa da percepção, argumentação e do posicionamento apoiados nos instrumentos codificados. A Figura 3 representa o esboço do processo da Análise de Conteúdo.

**Figura 3 - Esboço do processo da Análise de Conteúdo**



Fonte: BARDIN (2016).

Seguindo o que a Figura 3 que apresenta sobre o esboço das etapas da Análise de Conteúdos de Bardin (2016), percorrida neste subcapítulo, esta interpreta a metodologia da Análise de Conteúdo, como um processo mesclado pelas etapas: pré-análise, exploração do material e de tratamento dos resultados, inferência e interpretação, as quais apontam a análise das informações coletadas.

O público alvo das vivências nos Cenários para investigação na aprendizagem de geometria através de um convite ao diálogo foram 27 estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental da EMEF Emílio Leichtweis do município de Taquara/RS, que participaram das 05 proposições descritas no capítulo 6.

Quanto às transcrições, evitou-se a correção dos erros gramaticais e a omissão de gírias ou vícios de linguagem, a fim de caracterizar mais fielmente os estudantes em suas falas. Baseado no trabalho de Miskulin e Mendes (2017), os erros gramaticais, gírias ou vícios de linguagem são códigos, que visam orientar e enriquecer a transcrição das locuções realizadas pelos estudantes pesquisados, fornecendo elementos que denotam mais significado a conotação das palavras ao leitor.

A identidade dos participantes da pesquisa foi omitida e substituída pela legenda (E), que indica estudante, seguida de numeração respectiva. As nomeações ocorrem desde (E01) a (E27) por tratar-se de 27 estudantes pesquisados. Para as falas da professora pesquisadora adotou-se a legenda (PP).

## 6 DELINEAMENTO DAS PROPOSIÇÕES DE CENÁRIOS PARA INVESTIGAÇÃO NA APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA POR MEIO DO CONVITE PARA O DIÁLOGO

Neste capítulo apresentamos as correlações entre os conceitos mencionados, de maneira a compreender como poderão desenvolver um sujeito autônomo, crítico, criativo e competente. De modo a fazer uma leitura coerente do mundo, posicionando-se como protagonistas ativos na construção da sua aprendizagem, ampliando e construindo assim, o seu conhecimento.

Quando nos deparamos com situações em que sujeitos adultos não demonstram noções de espaço, ilustrado pela tentativa de colocar no porta malas de um carro popular, uma geladeira de 700 litros, temos um exemplo de que o pensamento geométrico ficou à deriva na aprendizagem escolar deste sujeito. Essa é só uma situação para ilustrar a importância na organização espacial e das dificuldades produzidas em função da geometria não ter sido trabalhada de maneira integral e interdisciplinar, haja vista que muitas habilidades estão interligadas com outros conhecimentos matemáticos que estão fragmentados nos currículos.

Em se tratando de conhecimentos em geometria para serem desenvolvidos no 5º ano do EF, conforme Quadro 7, temos como documento norteador a BNCC (2018), representada pela pelos seguintes itens: Unidade Temática; Objetos de Conhecimento e Habilidades.

**Quadro 7 - Unidade Temática geometria 5º ano do EF**

| Unidade temática | Objetos de Conhecimento                                                                                       | Habilidades                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Geometria</b> | Plano cartesiano: coordenadas cartesianas (1º quadrante) e representação de deslocamentos no plano cartesiano | <p><b>(EF05MA14)</b> Utilizar e compreender diferentes representações para a localização de objetos no plano, como mapas, células em planilhas eletrônicas e coordenadas geográficas, a fim de desenvolver as primeiras noções de coordenadas cartesianas.</p> <p><b>(EF05MA15)</b> Interpretar, descrever e representar a localização ou movimentação de objetos no plano cartesiano (1º quadrante), utilizando coordenadas cartesianas, indicando mudanças de direção e de sentido e giros.</p> |

| Unidade temática | Objetos de Conhecimento                                                                                                                                       | Habilidades                                                                                                                                                                                                                     |
|------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                  | Figuras geométricas espaciais: reconhecimento, representações, planificações e características                                                                | <b>(EF05MA16)</b> Associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos.                                                                         |
|                  | Figuras geométricas planas: características, representações e ângulos                                                                                         | <b>(EF05MA17)</b> Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais.                                                       |
|                  | Ampliação e redução de figuras poligonais em malhas quadriculadas: reconhecimento da congruência dos ângulos e da proporcionalidade dos lados correspondentes | <b>(EF05MA18)</b> Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando tecnologias digitais. |

Fonte: BNCC (2018).

A unidade temática da geometria na BNCC (2018), conforme o Quadro 7, traz diferentes objetivos a serem alcançados aos estudantes do 5º ano. Para tanto, os ambientes de aprendizagem (SKOVSMOSE, 2014) apontam situações que percorrem os tradicionais exercícios do tipo “Pinte o triângulo” até os que instigam os estudantes a buscar conhecimento específico da geometria, por meio de situações de aprendizagem envolvendo a matemática pura, semirrealidade e a vida real.

Para dar sentido à aprendizagem geométrica se necessita, além de conhecimento prévio dos conceitos, um ambiente propício para os estudantes se sentirem desafiados a querer aprender. Sendo assim, os Cenários para investigação (Skovsmose, 2000) têm importante sentido nesta pesquisa, propondo pelos diferentes ambientes de aprendizagem<sup>6</sup>, a proposta de atividades desta pesquisa, ou seja, as características das atividades investigativas realizadas e que serão apresentadas a seguir. Entendemos que as proposições estão, intimamente, ligadas ao conceito apresentado por Skovsmose (2000), sobre Cenários para investigação.

Cabe aqui um adendo dos caminhos e posicionamentos imbricados na escola dos Cenários para investigação e como envolver na geometria. No início da elaboração da escrita do delineamento das proposições, as dúvidas eram muitas em torno de envolver as questões ambientais no contexto da geometria e os Cenários

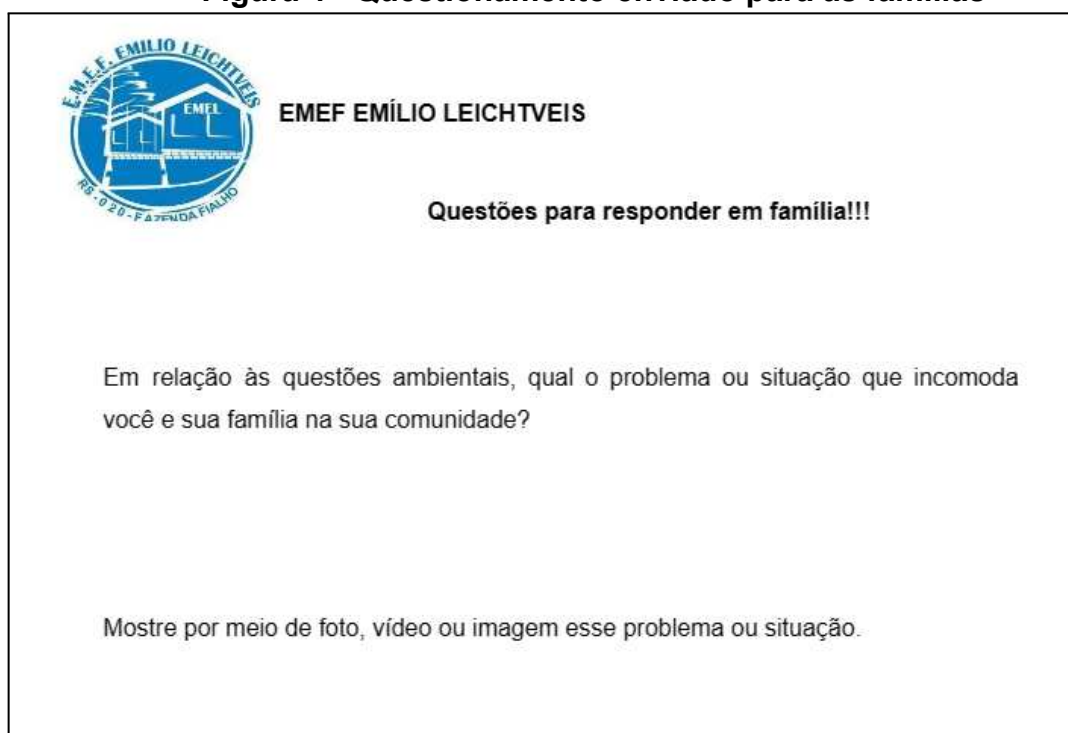
<sup>6</sup> A descrição dos seis ambientes de aprendizagem de Skovsmose estão descritos no Quadro 1.

para investigação. Para além das leituras do aporte teórico que embasam a referida pesquisa e dos estudos elencados na busca pelos repositórios, foi necessário consultar a pessoa com todo o entendimento em torno do Cenários para Investigação. Assim, logo após a qualificação dessa pesquisa, fui em busca do email do Professor Skovsmose, que gentilmente respondeu, estando este email nos anexos (ANEXO A) dessa pesquisa. E a resposta reforçou o caminho que tomamos em torno das questões ambientais para a pesquisa.

Como em toda pesquisa, há um projeto inicial, uma ideia que se torna o ponto de partida e um roteiro para dar início às atividades. Todavia, reforçamos que por se tratar de uma atividade baseada em Cenários para investigação, esses primeiros passos poderiam assumir um novo formato, conforme as necessidades e intenções dos participantes.

Sobre a proposição destinada ao início da pesquisa, a professora pesquisadora, inicialmente, solicitou aos estudantes que trouxessem de casa uma resposta ao questionamento que consta na Figura 4: ***Em relação às questões ambientais, qual o problema ou situação que incomoda você e sua família na sua comunidade?***

**Figura 4 - Questionamento enviado para as famílias**



The image shows a questionnaire form from EMEF EMÍLIO LEICHTVEIS. It includes the school's logo, name, and a request for family responses to environmental questions. The text on the form is as follows:

**EMEF EMÍLIO LEICHTVEIS**

**Questões para responder em família!!!**

Em relação às questões ambientais, qual o problema ou situação que incomoda você e sua família na sua comunidade?

Mostre por meio de foto, vídeo ou imagem esse problema ou situação.

Fonte: Própria autora (2023).

As proposições de Cenários para investigação foram construídas, baseadas em ambientes de aprendizagem do tipo (6), no intuito de impactar na aprendizagem da geometria, transpassados com a realidade trazida pelos estudantes no questionamento descrito. A elaboração das proposições foram os próximos passos a construirmos e se deram por cinco encontros sucessivos ao longo de uma semana, assim envolvendo os estudantes no desenvolvimento dos Cenários para investigação.

### **6.1 Proposições de Cenários para investigação na aprendizagem de Geometria no Quinto ano**

Para a realização das proposições na aprendizagem de geometria em Cenários para investigação os estudantes receberam informações da professora pesquisadora do que se tratava a pesquisa assim como quem era a professora pesquisadora. Informados sobre os termos TCLE (Termo de Consentimento Livre e Esclarecido) e o TALE (Termo de Assentimento Livre e Esclarecido) que permeiam a pesquisa no meio escolar proporcionando atividades de encontro ao Cenário para Investigação como possibilidade de desenvolvimento do pensamento geométrico. Para isso foi necessário realizar um convite ao diálogo com a possibilidade de um ambiente de aprendizagem real, considerado seguro, mas sendo possível ocorrer eventuais desconfortos.

Esclarecido que o motivo que nos leva a fazer este estudo é para entender como uma abordagem pode influenciar no contexto escolar e na vida do aluno, através da experimentação de um ambiente de aprendizagem em Cenários para investigação, com referência à vida real (ambiente (6)) e pautado na perspectiva da EMC, com vistas para a reelaboração de *foregrounds*.

Para a investigação do *background* dos estudantes participantes da pesquisa foram usadas as respostas ao questionamento enviado as famílias, imbricado como sendo o primeiro convite ao diálogo, questionamentos sobre o local que moram e as características ambientais que observaram.

Para o convite ao diálogo, os assuntos em questão foram explorados em meio a diálogos estabelecidos de forma que os estudantes pudessem sentir-se à vontade para expressar suas opiniões, experiências e pontos de vista.

Salientamos que os participantes da pesquisa residem em diversas localidades pertencentes a diferentes distritos, localizados na zona rural do município de Taquara. Para informar suas localidades, em geral, os estudantes abreviaram na fala e na escrita seus locais de moradia, como 'Fialho' ao invés de Fazenda Fialho, 'Paredão' ao invés de 'Paredão Baixo', 'Freguesia' ao invés de 'Freguesia do Mundo Novo' e 'Santa Cruz' ao invés 'Santa Cruz da Concórdia'. Dos 27 estudantes, 14 moram no distrito e localidade ao qual a escola pertence e 13 vivem em comunidades pertencentes a outros distritos e localidades afastadas, e os estudantes consideram que moram longe da escola.

A maioria dos estudantes relata gostar do local que mora por ser calmo, sem muito movimento e também no sentido de não existir muita sujeira ou lixo pelas lixeiras. Na sondagem que foi respondida pelos estudantes e seus familiares, retornou que as estradas são seus maiores problemas, pois estão constantemente mal cuidadas e esburacadas, ocasionando desconforto, percebido conforme Figura 5 do registro em foto que o estudante E02 trouxe de resposta ao questionamento.

**Figura 5 - Foto da situação ao questionamento**



Fonte: Família do E022 (2023).

Os estudantes trazem as aflições das suas famílias quando a escola busca através de um simples questionamento, com a pretensão de mapear as questões ambientais que incomodam num geral o estudante, sua família e a comunidade. O questionamento, conforme Figura 6, reflete as respostas referente às aflições das situações vividas pelos familiares dos estudantes da pesquisa. Sendo por meio deste, uma possibilidade das famílias de se ter vez e voz, visto o distanciamento como os órgãos públicos municipais.

**Figura 6 - Resposta ao questionamento**

**EMEF EMÍLIO LEICHTVEIS**

**Questões para responder em família!!!**

Em relação às questões ambientais, qual o problema ou situação que incomoda você e sua família na sua comunidade?

*que tirei é sobre a nossa estrada principal que incomoda a comunidade e nós.*

*Tá tivemos acidentes exemplo o meu marido que foi dar lado para outro carro e a moto pegou de lado do buraco e ele quebrou o pé que sempre abre cada vez mais por causa da chuva, então mesmo tema em família temer essa situação faz muito tempo na estrada de chão não é feita e sempre desce de lado.*

*é também não é feita mais a viaçada na beira da estrada então está sendo um problema a comunidade. é também na foto podem ver não tem sinalização as pessoas andam como loucos.*

Mostre por meio de foto, vídeo ou imagem esse problema ou situação.

Fonte: Família do E02 (2023).

O excerto a seguir contribui por meio da escrita da família do estudante E02, o relato sobre a foto E02 de como se encontra a estrada que dá acesso a residência da família e sua angústia por essa situação ser corriqueira.

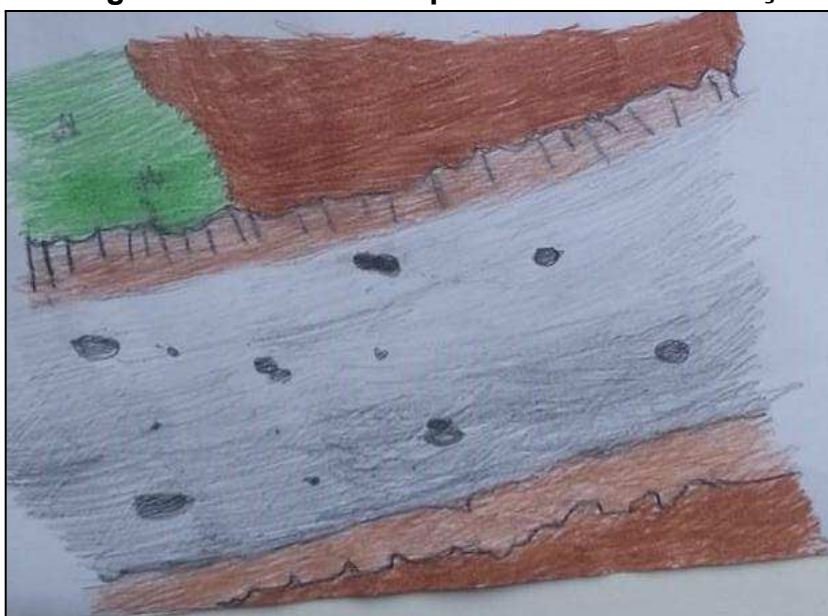
Para melhor acompanhamento da resposta da família do estudante (E02), ao questionamento: “Em relação às questões ambientais, qual o problema ou situação que incomoda você e sua família na sua comunidade?”, este constará na íntegra a seguir.

*[...] Em relação ambientais a nossa foto que tirei é sobre a nossa estrada principal que incomoda a comunidade e nós. [...] Tá tivemos acidentes exemplo o meu marido que foi dar lado para outro carro e a moto pegou de lado do buraco e ele quebrou o pé... [...] que sempre abre cada vez mais*

*por causa da chuva então nosso tema em em família temos essa situação faz muito tempo na estrada de chão não é feita é sempre deixada de lado. [...] E também não é feita mais a roçada na beira da estrada então está sendo um problema a comunidade. E também na foto podem ver não tem sinalização as pessoas andam como loucos. (E02).*

A problemática das estradas e suas condições precárias de conservação por serem sem pavimentação, teve no desenho feito pelo estudante E06, Figura 7, a representação da condição da estrada do aluno.

**Figura 7 - Registro em desenho representativo da condição das estradas**



Fonte: Estudante E06 (2023).

Com tais propósitos, foram desenvolvidas cinco proposições de atividades envolvendo o diálogo como convite ao Cenário para investigação com a participação de 27 estudantes da EMEF Emílio Leichtveis do município de Taquara/RS no ano de 2023.

Partimos para convidar os estudantes a entrarem na sala de aula que já estava com as mesas posicionadas em formato de quatro integrantes por grupos, no máximo. Os estudantes foram recebidos na porta da sala pela professora pesquisadora, que estava de posse de uma caixinha com tirinhas de eva coloridos. Cada estudante retirou um pedacinho de eva colorido e adentrou a sala e sentou onde encontrou um lugar que gostaria. Após, a professora pesquisadora, convidou os estudantes a procurarem os outros estudantes com a mesma cor da tirinha e formarem o grupo pela cor.

Assim sendo, inicialmente foi proposto a partir do convite ao diálogo investigar a situação trazida pelos questionamentos das condições das estradas usadas pelos estudantes e seus familiares, conforme segue no Quadro 8, que descreve o planejamento das proposições em aprendizagem em geometria em cenário para investigação.

**Quadro 8- Planejamento das proposições em aprendizagem em geometria**

| <b>Etapas<sup>7</sup></b>                                | <b>Questionamentos<sup>8</sup></b>                                                                                                                                                                            | <b>Período</b> | <b>Materiais</b>                                                                                               | <b>Objetivos</b>                                                                                                                                                       |
|----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Introdução do Cenários para investigação                 | Por que a estrada da <i>imagem convite</i> está assim?                                                                                                                                                        | 2              | Lápis, borracha, caneta, lápis de cor, giz de cera, canetinha, folha A4, Data show.                            | Despertar o interesse dos estudantes para investigar sobre o mundo que os cerca.                                                                                       |
| Constituição dos Cenários para investigação <sup>9</sup> | Os desenhos vindos de casa retratam o que foi solicitado?<br><br>Os trajetos são a representação do que é vivido por todos que trafegam por estradas?<br><br>Como, realmente, estão as estradas no seu olhar? | 6              | Lápis, borracha, caneta, lápis de cor, giz de cera, canetinha, folha A4, régua, malha quadriculada, Data show. | Explorar malha quadriculada e aplicativos.<br><br>Mapear os trajetos dos estudantes no quesito da trafegabilidade das estradas que percorrem diariamente até a escola. |
| Reflexões                                                | Explorar o aplicativo Google Earth desde o ponto inicial da escola até a casa de cada estudante, perceber elementos atribuídos às condições das estradas e sua trafegabilidade?                               | 1              | Aplicativo Google Earth, computador, internet, data show.                                                      | Explorar o caminho da escola até a sua casa por meio do aplicativo Google Earth.                                                                                       |
| Conclusões                                               | O que podemos fazer para melhorar a situação das estradas esburacadas?                                                                                                                                        | 1              | Lápis de escrever, lápis de cor, canetinha, giz de cera, borracha, cola, caderno, folha A4.                    | Comunicar a situação das estradas ao setor municipal responsável pela manutenção .                                                                                     |

Fonte: Própria autora (2023).

<sup>7</sup> Etapas elencadas a título de organização.

<sup>8</sup> Os questionamentos que conduziram a constituição dos Cenários para investigação pertinentes a esta pesquisa, serviram de protótipo para a elaboração do Produto Educacional, originado das experiências obtidas com esta pesquisa, o qual intitula-se Guia Didático - **GEODERA - Geometria da Nova Era**.

<sup>9</sup> Sugere-se, assim como Alrø e Skovsmose (2010), o conceito de investigação para referir-se aos processos de exploração de Cenários para investigação.

Os registros relativos aos questionamentos propostos, foram úteis para a organização dos estudantes e professora pesquisadora frente às proposições desenvolvidas. Sendo assim, também, se constituíram como fonte de dados para a verificação das possíveis contribuições do respectivo Cenário para investigação quanto às reelaborações no *foreground* na perspectiva da geometria e desenvolvimento do pensamento geométrico.

Foram dedicadas as proposições mencionadas 10 períodos horas-aula conforme respectivamente, o estipulado no planejamento inicial (Quadro 8).

Na aula inicial, sugeriu-se para os alunos participantes da pesquisa a temática a ser investigada a fim de introduzir e constituir o Cenário para investigação.

Para isso, foi realizada a apresentação dos questionamentos norteadores e suas peculiaridades, a fim de que os alunos compreendessem a proposta de cenário para investigação sugerida e esclarecessem possíveis dúvidas.

Dentre as informações relativas à proposição, destaca-se a orientação de que os alunos deveriam considerar um contexto realístico de sua vida cotidiana frente ao tema das estradas e suas condições de trafegabilidade e manutenção das mesmas.

Quanto à organização da turma, apesar de a atividade se configurar como individual, devido à necessidade de a pesquisa buscar aspectos do *foreground* de cada indivíduo, orientou-se que durante a realização das investigações poderiam se reunir em grupos. Dessa maneira, a troca de ideias e informações entre os alunos foi viabilizada, no sentido de estabelecer diálogos favoráveis para interações que favorecessem a investigação, conforme orientam Alrø e Skovsmose (2010).

Por meio da apresentação, buscou-se instigar e motivar os estudantes a pensar em ideias para constituir seu cenário para investigação de acordo com seus interesses, destacando o aspecto democrático da referida proposta, o qual se apresenta em acordo com o exposto por Skovsmose (2000) quando se refere à promoção da educação matemática como suporte da democracia. Ao mesmo tempo foi o momento destinado a verificar as primeiras impressões dos alunos quanto às atividades propostas mediante a observação de suas reações durante a apresentação das mesmas, afinal, a aceitação ao convite da professora pesquisadora é considerada fundamental para que o Cenário para investigação se constitua e a aprendizagem como ação ocorra, conforme Skovsmose (2014).

No que se refere a identificação da aceitação de uma turma com relação a um Cenário para investigação proposto, esta não é imediata, assim sendo, sua

confirmação ocorre por meio da constatação do envolvimento dos alunos no processo de exploração das possibilidades relativas ao cenário no sentido da investigação (ALRØ E SKOVSMOSE, 2021). Contudo, foi possível observar atitudes e comentários dos estudantes que podem fornecer informações importantes ao professor sobre a possibilidade de aceitação dos estudantes quanto ao Cenário para investigação.

Para o caso da constatação de uma possível não aceitação da turma quanto à tarefa ou temática proposta, sugere-se ao professor estabelecer um diálogo com os alunos, a fim de que, por meio de negociações, estabeleçam adaptações ou outras temáticas adequadas aos interesses de ambas as partes para a constituição dos Cenários para investigação.

No caso desta experiência, os estudantes demonstraram entusiasmo, interesse e curiosidade pela proposta recém apresentada, inclusive deram início a discussão de como a estrada de cada um estava em quantidade de buracos o que indicou uma condição favorável para o aceite da turma em relação ao Cenário para investigação a ser constituído.

Nesse sentido, também se apresentam alguns excertos de comentários realizados pelos estudantes no início da criação das discussões em torno da temática, por exemplo, e o estudante (E12) comenta, *“A nossa estrada tá só buraco”* e o aluno E04 reflete denotando *“A estrada tem tanto buraco... [...] que o ônibus sacode mais que o liquidificador e tem um barulho de coisa velha, parece parafuso solto...”*

## 7 ELEMENTOS NECESSÁRIOS PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO A PARTIR DE UM CONVITE AOS CENÁRIOS PARA INVESTIGAÇÃO

O presente capítulo contempla o que se produziu em torno das proposições na aprendizagem de geometria, para atingir o objetivo principal dessa pesquisa de *avaliar as possibilidades de desenvolver o pensamento geométrico a partir de um convite aos cenários para investigação, em uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental*. Tendo assim subsídios para a elaboração do ‘*Guia Didático - GeoDera: A geometria da Nova Era*’, a partir do propósito de contribuir com a prática docente dos professores do quinto ano do Ensino Fundamental. Bem como servir para a comunidade acadêmica interessada no desenvolvimento da geometria nas salas de aula.

As categorias elencadas, serviram de base para responder à seguinte pergunta norteadora, a qual desencadeou essa pesquisa:

*De que modo os Cenários para investigação podem por meio de um convite ao diálogo contribuir para o desenvolvimento do pensamento geométrico em uma turma do quinto ano do Ensino Fundamental?*

Na primeira categoria, **“A leitura de uma imagem por meio de um convite ao diálogo e a relação com o pensamento geométrico”** são explanadas as diferentes leituras, a partir do diálogo, perante às provocações que a *imagem convite*<sup>10</sup> fomentou entre os estudantes. Refletindo na trajetória diária dos estudantes por seus caminhos percorridos até a escola. Ademais, apresenta as possibilidades de criação de meios para comunicar ao poder público municipal o estado de conservação das vias e suas urgências em determinados trechos para o conserto imediato destas.

Enquanto a segunda categoria **“Os entendimentos de localização em um cenário para investigação e o pensamento geométrico”** discorre acerca do entendimento do grupo de estudantes do quinto ano do Ensino Fundamental, participantes deste estudo, sobre o que compreendem por localização. E os elementos e conhecimentos usados pelos estudantes no mapeamento dos pontos da *imagem convite*.

---

<sup>10</sup> Essa imagem foi usada como convite aos estudantes para adentrar os Cenários para investigação na perspectiva da EMC, conceitos descritos na seção 2.

### 7.1 A leitura de uma imagem por meio de um convite ao diálogo e a relação com o pensamento geométrico

Na categoria aqui descrita, muitas foram as contribuições trazidas ao contexto do Cenário para investigação a partir do diálogo, por meio da leitura da *imagem convite* que cada estudante, de posse de seu *background* (SKOVSMOSE; 2006, 2009), descreveu por sua percepção visual.

Conforme Skovsmose (2014, p. 35), “o *background* da pessoa refere-se a tudo o que ela já viveu, enquanto o seu *foreground* refere-se a tudo que pode vir a acontecer com ela”. Portanto, aspectos do *background* dos estudantes envolvidos na pesquisa foram investigados de maneira a constituir elementos que enriqueçam a investigação dos respectivos *foregrounds*.

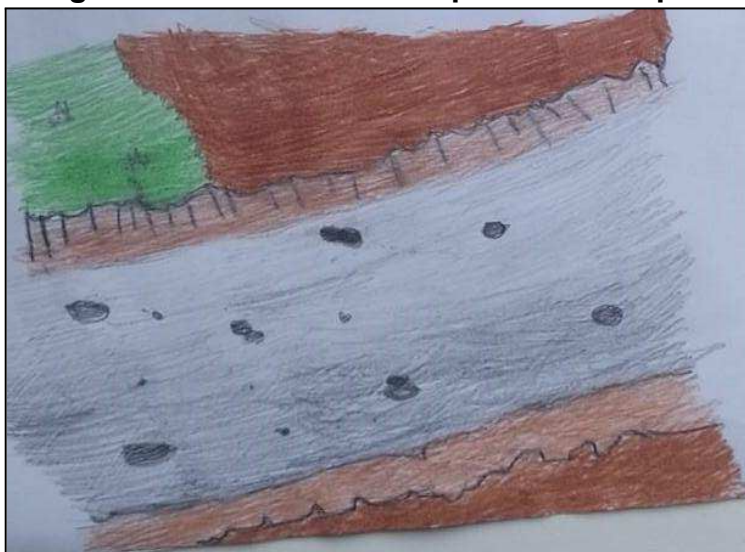
Nessa categoria está implicado o que o convite ao diálogo se propôs, ao colocar os estudantes frente à problemática da *imagem convite*. Apresenta uma situação da vida real (SKOVSMOSE, 2014), por meio de um recorte de um trecho de uma via percorrida por um estudante, que trouxe como resposta ao questionamento enviado para as famílias como proposta para desencadear o convite dialógico ao cenário para investigação. Pois, as vias percorridas pelos diferentes estudantes da pesquisa, retratam o que a imagem representa para quem vive em ambientes rurais com estradas de terra, sem pavimentação que geram desconfortos aos moradores, por suas condições de trafegabilidade deficiente com muitos buracos.

Ao observarmos uma imagem, seja ela uma pintura, uma fotografia ou qualquer outra representação visual, somos convidados a fazer uma leitura por meio dos elementos que a compõem, para interpretar sua representação. Assim somos guiados pela aparência visual. A habilidade de visualização, segundo a Teoria de Van Hiele (KALLEF, 1994) é o primeiro nível, o nível inicial do pensamento geométrico.

Segundo Nasser (1990, 1993) os sujeitos na construção do pensamento geométrico evoluem por meio de processos de pensamentos. Tais processos de pensamentos estão intrinsecamente atrelados ao modo de como pensamos e quais os tipos de ideias geométricas produzimos. Assim a Teoria de Van Hiele nos guia para a aprendizagem e para a avaliação das habilidades dos estudantes em geometria.

Ao adentrarem a sala de aula, os estudantes convidados a formarem grupos, receberam uma *imagem convite*, disponibilizada por meio de cópia xerografada. A professora pesquisadora solicitou que cada estudante observasse a *imagem convite*. Ao mesmo tempo, a professora pesquisadora projetou, com auxílio do retroprojeto, a *imagem convite*, na parede da sala para que os estudantes a observassem a

**Figura 8- Imagem convite elaborada a partir de um questionamento**



Fonte: E01, 2023

O questionamento iniciou em torno do que a ***imagem convite*** representava para cada estudante. Diferentes informações foram expressas pelos estudantes. Como podemos acompanhar pelos excertos a seguir dos estudantes (E02, E18 e E27):

**(PP)** O que vocês enxergam nessa imagem?

**(E12)** Parece a parte da cabeça de um jacaré e sua boca com dentes.

**(PP)** Alguém enxerga algo diferente?

**(E18)** (...) na grama parece ter um cachorro descansando.

**(E27)** Estou vendo tipo de uma montanha dentro.

Ao investigar uma imagem, os estudantes são incentivados a formular hipóteses, a levantar questões e a buscar evidências para sustentar suas conclusões. Dessa forma, a leitura de uma imagem projetada atua como uma

plataforma para a promoção do pensamento crítico e reflexivo dos estudantes. O Quadro 6 transcreve as falas dos estudantes na compreensão da *imagem convite*.

**Quadro 9 - Compreensão dos estudantes da *imagem convite***

| Estudante                                        | Temática                                                                                            |
|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| E02; E18; E07; E24; E21; E14; E23; E19; E01; E22 | (...) parece um rio com pedras no meio e dos lados terra e grama (...)                              |
| E05                                              | (...) eu achei que era um rio cheio de rochas e com esgoto na parte de baixo (...)                  |
| E08                                              | Uma floresta com árvores e buracos escavados.                                                       |
| E17                                              | Parece uma fatia de bolo com algum recheio no meio.                                                 |
| E12                                              | Parece a parte da cabeça de um jacaré e sua boca com dentes.                                        |
| E18                                              | (...) na grama parece ter um cachorro descansando.                                                  |
| E25                                              | (...) uma cobra comendo um monte de peixes.                                                         |
| E10                                              | Vi um circo, os palitos parecia a estrutura.                                                        |
| E15                                              | Uma estrada com cerca (...) e achei que passou uma caçamba com pedras.                              |
| E13; E06; E20                                    | Uma estrada com pedras.                                                                             |
| E11; E26; E03                                    | Uma estrada com buracos.                                                                            |
| E09                                              | Uma cachoeira.                                                                                      |
| E04                                              | Duas ilhas com um monte de barcos.                                                                  |
| E16                                              | Uma horta, aquelas folhas verdes salada de alface, do lado uma terra e do lado um ninho de formiga. |
| E27                                              | (...) estou vendo tipo de uma montanha dentro (...)                                                 |

Fonte: Própria autora (2023).

No entendimento de onze estudantes (E02, E18, E07, E24, E21, E14, E23, E19, E01, E22) a *imagem convite* ilustra, conforme o excerto "Parece um rio com pedras no meio e dos lados terra e grama". Observando a *imagem convite* (Figura 1), numa rápida leitura visual, pode assim dizer que se assemelha. Podemos perceber o que os estudantes visualizaram, ao observar a *imagem convite* sem uma análise mais profunda e adoção de critérios de significado ao contexto diário dos estudantes. O estudante (E05) em sua fala, "(...) eu achei que era um rio cheio de rochas e com esgoto na parte de baixo (...)" relacionou a imagem convite com um rio com esgoto, como consta no Quadro 6.

Acompanhando as diferentes falas dos estudantes em torno do imaginário, muitas foram as colocações das mais diversas hipóteses do que a *imagem convite* representava. Elas podem ser descritas e relacionadas com o imaginário de cada estudantes: floresta (E08), fatia de bolo (E17), cabeça de um jacaré (E12), cachorro descansando (E18), cobra comendo peixes (E25), circo (E10), caçamba com pedras (E15), estrada com pedras (E13, E06 e E20), cachoeira (E09), ilhas (E04), horta (E16), montanha (E27).

Afinal, em casos nos quais as respostas são óbvias para os alunos, não se considera uma investigação, conforme os Cenários para investigação preveem, segundo Alrø e Skovsmose (2010). Sendo, portanto, papel do professor dialogar com o aluno em termos das temáticas escolhidas e sobre a problemática estabelecida, ou a ser estabelecida, a fim de que se perceba possibilidades de investigação, nas quais os estudantes não dispunham de respostas óbvias e possam desenvolver um possível plano de investigação.

Após essa interação entre os estudantes, instigando-os a perceberem o que realmente a *imagem convite* representa na sua essência, a professora pesquisadora realiza um convite. Um convite pelo diálogo para adentrar ao cenário para investigação. No excerto a seguir, segue a fala da professora pesquisadora realizando o convite pelo diálogo aos estudantes, no intuito de quererem investigar o que a *imagem convite* significa ou do que se trata.

*(PP) Pessoal, olha só, vou fazer um convite pra vocês, tá? Vocês tão dispostos a descobrir o que está retratado nessa imagem?*

*(TODOS) Sim*

*(PP) Mas, por quê?*

*(E12) Porque teve várias respostas diferentes e a gente quer saber o que que realmente é.*

*(PP) Fala de novo!*

*(E12) Porque teve várias respostas diferentes, a gente quer saber o que realmente é.*

*(PP) Muito bem, teve várias respostas diferentes e agora vocês ficaram?*

*(E02) Curiosos e em dúvida pra saber realmente o que é.*

*(PP) Topam então? Vamos fazer essa investigação?*

*(TODOS) Vamos!*

Ao apreciarem a *imagem convite*, com uso de uma análise mais profunda, levando em conta as características e critérios do que cada estudante tem em comum, morando na zona rural e percorrendo caminhos por estradas sem pavimentação. Os estudantes (E11, E26 e E03) trouxeram para o contexto, através da leitura da imagem, por meio de uma análise aprofundada que se tratava de ‘uma estrada com buracos’.

Fazer os estudantes perceberem, através de seus olhares, a própria situação vivida diariamente para chegarem até a escola, coloca os mesmos de frente à sua própria realidade (SKOVSMOSE, 2017). Uma realidade conhecida e vivida pelos moradores de comunidades rurais. Que não é algo que se vê em livros ou que se assemelha a imagens aleatórias de outras realidades sociais e ambientais.

Assim, os estudantes, ao se depararem com a imagem convite, apresentada pela professora pesquisadora, criaram um imaginário onde o excerto dito espontaneamente, *“Por onde nós passamos pra ir embora tem muito mais buracos que nessa imagem.”* (E22). E na fala do E34 retrata o trajeto percorrido de ônibus escolar, expresso em *“... o ônibus sacode tanto que parece que vai se desmanchar.”*

Nos relatos que foram dados, conforme o diálogo foi se construindo em torno da problemática das estradas esburacadas, os estudantes iam se familiarizando com o contexto e notando que o seu problema em torno das estradas percorridas também era de seus colegas, mesmo daqueles de outros transportes escolares por outros caminhos.

Os diálogos entre os estudantes demonstraram uma evolução em torno da discussão provocada, seguindo para uma esfera da preocupação com a criação e definição de meios para aproximar o poder público da urgência pelo conserto das estradas. O levantamento de soluções dadas pelos estudantes para aproximar o poder público ao estado precário das estradas, conforme Quadro 10, respalda a preocupação em se fazer ser ouvido pelos órgãos públicos competentes do setor municipal pela manutenção.

**Quadro 10 - Recorte das falas pertinentes a categorização**

| <b>Estudantes</b> | <b>Recorte e falas</b>                                                                                                                                                 |
|-------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>E01</b>        | “...seria tipo uma câmera ao vivo que se locomove.”                                                                                                                    |
| <b>E12</b>        | “...uma imagem ao vivo.”                                                                                                                                               |
| <b>E11</b>        | “Será que não dava pra usar drone”; “Pra poder tipo para fazer uma imagem ao vivo pra poder sabe onde é que tem buraco.”                                               |
| <b>E05</b>        | “A gente pensou em usar um drone para gravar as estradas ao vivo e criar um site para as imagens. Assim é só a prefeitura entrar no site e ver onde é preciso ir.”     |
| <b>E18</b>        | “...como podíamos localizar os buracos da estrada para ficar mais fácil das pessoas que arrumam os buracos”... “fazerem seu trabalho com mais facilidade e rapidez...” |
| <b>E19</b>        | “...colocar um drone para ver os locais com buracos da estrada para saber onde tem que arrumar mas para isso é necessário verba.”                                      |
| <b>E22</b>        | “...ajuda do drone para ele gravar...as ruas...as imagens...mandar para as pessoas que arrumam as ruas...”                                                             |

Fonte: Própria autora (2023).

Quando o estudante E11 coloca sua possibilidade de estratégia para aproximar o poder público de sua ideia em "*fazer uma imagem ao vivo pra poder sabe onde é que tem buraco*", remete a um conhecimento estratégico importante à "*resolução de problemas*" (FONSECA, 2009). Os problemas a serem resolvidos podem estar na esfera escolar ou em qualquer outra situação. Um pensamento (PAVANELLO, 1993) com aptidão para raciocinar e procurar soluções às diferentes e diversas situações enfrentadas em meio aos problemas de viver em áreas rurais, sem a segurança das políticas públicas básicas mantidas à população. Perante à situação provocada por meio da *imagem convite*, o estudante E11 reforça a ideia da construção do pensamento geométrico. Onde usa o raciocínio ao imaginar uma possível solução para captar os buracos em determinados trechos das estradas.

Já a fala do estudante (E05) - "*A gente pensou em usar um drone para gravar as estradas ao vivo e criar um site para as imagens. Assim é só a prefeitura entrar no site e ver onde é preciso ir*" - remete à construção de um *foreground* (MILANO, 202, p. 93) '*um espaço para se pensar que existem diferentes contextos, estimulando o desenvolvimento de um olhar crítico perante a sociedade*', nesse caso ao problema das estradas.

A leitura de uma *imagem convite* permite aos alunos desenvolverem habilidades de observação e análise crítica, conforme Pais (1996) a habilidade mental a partir da 'imagem mental' construída, possibilita o desenvolvimento da geometria. Em suma, a leitura de uma *imagem convite* é fundamental para o desenvolvimento das habilidades geométricas (FIORENTINI; LORENZATO, 2012) dos estudantes, promovendo o raciocínio espacial, a análise crítica e a compreensão do espaço e das formas, assim estimulando o desenvolvimento do pensamento geométrico (KALEFF; 1994, 2007).

Além disso, os Cenários para investigação (SKOVSMOSE, 2000) proporcionaram reflexões e posicionamentos críticos por parte dos alunos, bem como possibilitaram a verificação de indícios quanto à reelaboração e manutenção de seus *foregrounds*.

## 7.2 Os entendimentos de localização num cenário para investigação e o pensamento geométrico

De acordo com Pais (1996), os registros gráficos e escritos e, até mesmo, com fotos, são muito importantes para compor a imagem mental dos estudantes frente ao aprendizado da localização e da locomoção, além das problematizações, para que eles percebam aspectos, como: objetos mais distantes, desenhos menores, importância dos pontos de referência, ideias de escala, linhas horizontais, verticais, entre outros. Atividades com mapeamento inseridas no cotidiano escolar conseguem estabelecer relações entre a linguagem simbólica presente nos mapas e auxiliam na compreensão de pequenas escalas, sendo ponto de partida para a cartografia.

Para esse conceito de Pais (1998), a proposição foi a construção do mapa do trajeto da escola até a casa dos estudantes. Percebemos na Figura 9 e na Figura 10, a representação do trajeto dos estudantes (E08 e E15), respectivamente, que descreveram, por meio de áudio, sua trajetória. Em suas falas, focam no aspecto da estrada e suas condições de trafegabilidade, além de citar os pontos de referência.

**Figura 9 - Representação do trajeto da escola até a casa do (E08)**



Fonte: E08 (2023).

### 7.2.1 Descrição do mapa do trajeto do estudante (E08) da escola x casa

**E08** - Aqui, é de onde eu pego o ônibus, entro aqui numa estrada de terra aqui. Aí passo um buraco assim que é de ponta a ponta, na estrada. Aí tem um buraco aqui que é dos 2 lados. Que o ônibus dá até uns pula ali. Daí, depois eu entro aqui na minha rua, tem um buraco que ele não é muito bem, um buraco. Ele quer imitar pedra. Ele é para cima. Aí depois, passando, ele tem uns buracão aqui, aí aqui o ônibus me larga, pego de carro aqui e vou. Aí tem 3 buracos aqui, mas daí o resto mesmo é tudo pedra.

**Figura 10 - Representação do trajeto da escola até a casa do (E15)**



Fonte: E15 (2023).

### Descrição do mapa do trajeto do estudante (E15) da escola x casa

**(E15)** - A gente sai da escola, daí segue a faixa, daí perto da igreja de pedras a gente entra e tem um monte de buraco assim os valo. A gente vai faz uma curva. Daí eu tenho um vizinho, a gente segue reto, faz outra curva, daí tem um tipo um valão bem grande. Foi onde que meu padastro quebrou a perna. Daí tem a casa da Raíra, segue reto, daí tem a minha casa.

A partir de questionamentos e problematizações, os estudantes não só foram estimulados a identificar, mas também a representar sua localização com os elementos que os rodeiam, trazidos nas falas dos estudantes quando observam como pontos de referência a igreja e a casa. Cabe destacar que, ao ver os estudantes E08 e E15, fazendo a descrição de seus trajetos projetados na malha quadriculada, esses se caracterizam como conhecimentos em geometria para o 3º e 4º anos com referência às habilidades da BNCC (2018) em:

Descrever e representar, por meio de esboços de trajetos ou utilizando croquis e maquetes, a movimentação de pessoas ou de objetos no espaço, incluindo mudanças de direção e sentido, com base em diferentes pontos de referência<sup>11</sup>. Descrever deslocamentos e localização de pessoas e de objetos no espaço, por meio de malhas quadriculadas e representações como desenhos, mapas, planta baixa e croquis, empregando termos como direita e esquerda, mudanças de direção e sentido, intersecção, transversais, paralelas e perpendiculares<sup>12</sup>.

A BNCC (BRASIL, 2018, p.268), considera que “os diferentes campos que compõem a Matemática reúnem um conjunto de ideias fundamentais que produzem articulações entre eles: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação”. Para tanto, propõe e espera que em suas ideias fundamentais, o estudante desenvolva o pensamento geométrico e o transforme em objetos de conhecimento, podendo assim aplicar seus conhecimentos em outras áreas.

Aproximando, segundo a Teoria de Van Hiele (NASSER, 1993, 2010), para o nível 2, ou seja, o nível da análise, e para tanto dá-se a consolidação das fases de aprendizagem, que acompanha a referida teoria.

Conforme Nasser&Sant’anna (1998), as fases da Teoria de Van Hiele são fundamentais para a consolidação de cada nível do pensamento geométrico, sendo a fase da informação, a primeira a ser desenvolvida, por meio da apresentação do que será estudado, seguido das propostas e proposições.

Assim, para seguir o desenvolvimento dessa fase foi necessário realizar a sondagem dos conhecimentos prévios dos estudantes com relação ao objeto do conhecimento, localização e movimentação, descrito para o 5º ano do EF em *‘Interpretar, descrever e representar a localização ou movimentação de objetos no plano cartesiano (1º quadrante), utilizando coordenadas cartesianas, indicando mudanças de direção e de sentido e giros’* (BNCC, 2018).

Consoante a BNCC (2018) entre os principais objetos de conhecimento de geometria que o documento prevê, estão a localização e movimentação de objetos e de pessoas no espaço, utilizando-se de diversos pontos de referência e vocabulário apropriado mediado pelo professor.

Os excertos das falas dos estudantes do Quinto ano do EF, participantes desta pesquisa, as quais são apresentadas no Quadro 11, a seguir, revisitam evidências de um processo do levantamento das opiniões dos mesmos em torno do

---

<sup>11</sup> (EF03MA12)

<sup>12</sup> (EF04MA16)

diálogo de como se localizar “*com o corpo usando leste, oeste, norte e sul*” (E02), também “*pelo sol ou pela lua ou pelas as estrelas*” (E05).

**Quadro 11 - Levantamento das opiniões<sup>13</sup> de como se localizar**

| Estudante | Extrato da fala                                                                                                      |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| E01       | (...) podemos se localizar pelos pontos cardeais (...)                                                               |
| E02       | (...) dá para se localizar com o corpo (...) usando leste, oeste, norte e sul, como os pontos cardeais. <sup>1</sup> |
| E09       | (...) localização com o sol e com o corpo (...) pelo GPS, usando o celular (...)                                     |
| E11       | (...) se localizar, ex: satélites e pontos cardeais.                                                                 |
| E12       | (...) localizar com o corpo (...)                                                                                    |
| E16       | (...) que também tem outro jeito de localização, tem o satélite para nos localizarmos, o GPS e outros (...)          |
| E17       | (...) se localizar com o mapa, com o sol (...)                                                                       |
| E05       | (...) para se localizar quando não tem um celular, ou ir pelo sol ou pela lua ou pelas estrelas.                     |

Fonte: Própria autora (2023).

Conforme Lorenzato (1995, p.9), a construção da localização a partir de seu próprio corpo precisa ser construída desde os primeiros anos da escolarização. Para assim, quando os estudantes chegarem no EF já possuírem os conhecimentos e conceitos básicos da geometria nos quesitos de localização. Os excertos acima sustentam que os estudantes possuem apropriação sobre localizarem-se a partir do corpo. Os estudantes E02, E09 e E12, por exemplo, trazem em suas contribuições pelo diálogo, a presença do corpo como um meio de localizar-se no espaço.

Conforme a BNCC (BRASIL, 2018), as habilidades de localização a partir do corpo, necessitam ser desenvolvidas desde o início da escolarização (LORENZATO, 2008, 2015), utilizando-se do próprio corpo.

Ao tratar de localização com pontos cardeais, alguns estudantes (E01, E02 e E11) trouxeram, por meio de suas falas, a referência a estes conhecimentos. Assim podemos acompanhar nos excertos (E01) (...) podemos se localizar pelos pontos cardeais (...), (E02) (...) dá para se localizar com o corpo usando leste, oeste, norte e sul, como os pontos cardeais, e (E11) (...) se localizar, ex: (...) pontos cardeais. Segundo Pais (1996) a geometria espacial está correlacionada com os

<sup>13</sup> Estão citadas somente as falas com maior relevância para a pesquisa.

conhecimentos de natureza topológica (TOLEDO & TOLEDO, 1997). Assim, explorando a linguagem verbal e não verbal e movimentos, como em frente, para trás, direita, esquerda, entre outros, a fim de desenvolver o pensamento geométrico (KALLEF, 1994; SANT'ANNA, 2001; VILLIERS, 2010) segundo os níveis da Teoria dos Van Hiele.

Os entendimentos a respeito de como se localizar foram diversificados, abrangendo uma esfera de conhecimento amplo. A exemplo, citam-se os estudantes E17 e E05, os quais colocaram seus entendimentos de usar o sol como um meio para se localizar. O estudante E05 usou, também, a referência de se localizar pela lua ou até mesmo pelas estrelas. A preocupação do estudante E05 em encontrar um meio de se localizar vem ao encontro de uma fala sua demonstrando preocupação em *“como uma pessoa cega faria para saber onde está”* se a mesma é cega e não possui um celular para ajudar a se localizar. Por meio desse diálogo, o estudante E09 mencionou a importância do celular para se localizar através de aplicativos com funções de GPS, citado pelo estudante E016 como meio de localização. A professora pesquisadora, observando os grupos, suas falas e discussões em torno do assunto localização, surge pelos estudantes (E11 e E16) o satélite como meio de se localizar.

Usando deste entendimento, os estudantes, no laboratório de informática, exploraram o aplicativo Google Earth. Por meio do aplicativo Google Earth, é possível, de forma gratuita, localizar ruas, prédios, cidades ou países, com imagens de cima para baixo, movimentar para aplicar zoom ou distanciar.

Nesse encontro, percebeu-se a curiosidade dos estudantes diante da ferramenta e de como navegar. Isso se observa por meio da Figura 11, e no seguinte diálogo: (E11) *“Eu vi o carrinho do Google fazendo filmagem esses dias. Profe, (...) vou procurar se tem a imagem da nossa escola e se a gente consegue se ver!”*.

**Figura 11 - Estudante navegando pelo aplicativo Google Earth**



Fonte: Própria autora (2023).

Descrevendo as diferentes respostas dos estudantes ao questionamento de como localizar os pontos existentes na imagem de uma estrada esburacada. Tema central da discussão do Cenário para investigação mediante um convite ao diálogo. Percebe-se que os estudantes têm elaborado o pensamento geométrico classificado segundo Van Hiele (NASSER, 1990; 1993) no Nível 1, ou melhor dizendo, Nível de Reconhecimento, para tanto assemelha-se às habilidades da BNCC que contemplam os dois primeiros anos de escolarização do EF, em geometria, respectivamente. As habilidades da BNCC que representam os dois primeiros anos escolares estão descritas pelos códigos alfanuméricos e as seguintes descrições:

- (EF01MA11) *Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço em relação à sua própria posição, utilizando termos como à direita, à esquerda, em frente, atrás;*
- (EF01MA12) *Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço segundo um dado ponto de referência, compreendendo que, para a utilização de termos que se referem à posição, como direita, esquerda, em cima, em baixo, é necessário explicitar-se o referencial;*
- (EF02MA12) *Identificar e registrar, em linguagem verbal ou não verbal, a localização e os deslocamentos de pessoas e de objetos no espaço, considerando mais de um ponto de referência, e indicar as mudanças de direção e de sentido.*

Para o contexto relacionado ao mapa, como meio de localização, este entrou no enredo pela fala do estudante E17, também possuem legendas com as localizações, então, o estudante pode encontrar sua escola, casa ou qualquer outro lugar, endereço ou evento do seu interesse. Fala, que se assemelha ao descrito pelo (E15), anteriormente.

E para tanto, estar no nível 2, ou seja, no nível de análise, traduz que os estudantes percorreram todas as fases de aprendizagem (NASSER & SANT'ANNA, 2010) da Teoria de Van Hiele, e como consequência há uma nova internalização e unificação de um novo nível do pensamento geométrico. Dando assim sequência para um novo nível do pensamento geométrico a ser adquirido, seguindo novamente as cinco fases de aprendizagem da Teoria de Van Hiele (CROWLEY, 1996).

No andar das proposições, os estudantes foram trocando informações do que achavam que era a *imagem convite*. A partir da interação nos grupos, os estudantes foram observando elementos como as linhas e as colunas, que formavam os quadradinhos. Assim, construindo hipóteses de que assunto estavam adentrando, sem saber que tais conhecimentos estão relacionados a geometria.

Muitas percepções e entendimentos foram destacados através do convite ao diálogo (SKOVSMOSE, 2001). Citamos no Quadro 12, as principais colocações dos estudantes em torno dos elementos geométricos que perceberam ao observarem a *imagem convite* sob uma malha quadriculada.

**Quadro 12 - Elementos observados em diálogo**

| <b>Estudantes</b> | <b>Recorte de falas em torno de elementos</b>                                                                                                                      |
|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>E18</b>        | Parece um monte de quadradinhos.                                                                                                                                   |
| <b>E17</b>        | Folha quadriculada para fazer a escala de alguma coisa (...)                                                                                                       |
| <b>E04</b>        | (...) a folha quadriculada é pra montar prédio ou casa, que eles botam aqui a imagem e vão formando os tetos, casas, parede o tamanho que irá fazer tipo uma casa. |
| <b>E02</b>        | Pode ser usada pra desenhos. Minha mãe desenhava dentro. Era mais fácil de fazer um desenho usando os quadradinhos, era o que ela dizia.                           |
| <b>E03</b>        | (...) a gente contornar todas as linhas e os quadrados eu acho que a gente vai ter que ver quantos quadradinhos tem (...)                                          |
| <b>E24</b>        | Quando a linha e a coluna se cruzaram, se juntaram e tiveram um filho, um Quadrado. Aliás, muitos quadradinhos.                                                    |
| <b>E11</b>        | (...) a linha e a coluna, elas se juntaram, fizeram a cruz da dição.                                                                                               |

| Estudantes | Recorte de falas em torno de elementos                                                                                           |
|------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| E07        | Quando linhas e colunas se juntam tem Ponto. Vários pontos.                                                                      |
| E06        | (...) a gente traçou linhas e colunas formou um desenho quadriculado.                                                            |
| E23        | Pras linhas a gente pode colocar letras. E pras colunas número.                                                                  |
| E19        | Criamos um código!                                                                                                               |
| E01        | Cada pedacinho do buraco está num quadradinho diferente. Tipo: K vinte e um; K vinte e dois; L vinte e um; L vinte e dois; isso? |
| E27        | Pegando a letra e o número e juntando, descobri que é um buraco, ou melhor um ponto.                                             |
| E21        | Quando meu irmão estudava (...), ele disse que linhas e colunas. Era o plano cartesiano (...)                                    |
| E13        | Nessa folha temos muitos encontros de linhas e colunas. Então, são muitos os pontos.                                             |

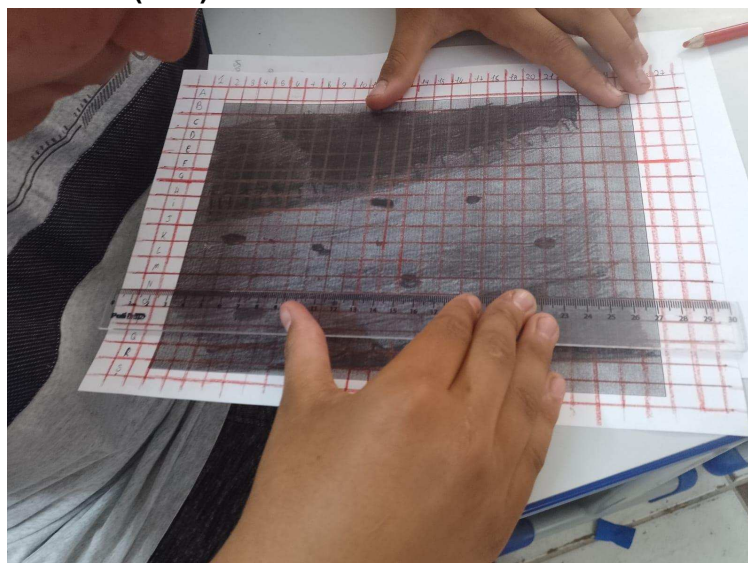
Fonte: Própria autora (2023).

As observações dos estudantes circularam em torno das linhas e das colunas da *imagem convite* e o que isso significava, pois como estavam bem envolvidos na proposição do cenário para investigação, o foco era descobrir, como se fosse um enigma, cada atividade que a professora pesquisadora propunha.

Na Figura 12, o estudante (E24), de posse de uma régua, para auxiliar no contorno das linhas e colunas, observa atentamente e comenta:

**(E24)** *Quando a linha e a coluna se cruzaram, se juntaram e tiveram um filho, um Quadrado. Aliás, muitos quadradinhos.*

**Figura 12 - Estudante (E24) observando e contornando a malha quadriculada**



Fonte: Própria autora (2023).

Sutilmente, os estudantes por meio de suas hipóteses adentraram em atividades envolvendo o plano cartesiano e localização de forma espontânea pelo uso do diálogo nos grupos formados. Destacado pela Teoria de Pais (1996), é a valorização da argumentação e da comunicação entre os estudantes. Através da discussão e da troca de ideias, os estudantes são incentivados a construir justificativas e a aprimorar seu raciocínio lógico, essenciais para o desenvolvimento do pensamento geométrico. As falas dos estudantes conforme observado no Quadro 11, foram as mais diversas num contexto de descobertas do que estariam realizando com uso de régua, traçando linhas e colunas na representação da *imagem convite*.

Enquanto realizavam a atividade de traçar as linhas e colunas com uso da régua (Figura 12) na *imagem convite*, os estudantes identificam pontos pelo encontro das linhas e colunas. E na fala de (E23) podemos acompanhar a identificação de colocar letras para as linhas e números para as colunas. Na fala de (E19) a descoberta das letras e números são usados como um código. Já na fala dos estudantes (E07), (E27) e (E01) acompanhamos que o encontro das letras e números formam um ponto. E cada ponto tem seu código, sua localização, percebendo que cada buraco é um ponto. O diálogo (ALRO e SKOVSMOSE, 2021) é fundamental para a aprendizagem de novos conhecimentos, percebe-se isso na fala de (E21), em que a atividade está relacionada com o plano cartesiano.

Ao explorar o plano cartesiano de forma prática e contextualizada, os estudantes não apenas adquirem habilidades essenciais para a análise e a resolução de problemas geométricos, mas também desenvolvem um entendimento mais profundo dos conceitos fundamentais da geometria. Essas atividades contribuem para o desenvolvimento do pensamento geométrico, estimulando habilidades como a percepção espacial, a visualização e a análise de informações.

## 8 PRODUTO EDUCACIONAL

Para explicar o que é um Produto Educacional e qual sua utilidade para a pesquisa é preciso consultar autores que embasam a discussão. No caso, estamos falando do Produto Educacional vinculado ao processo de dissertação do curso de mestrado em Ensino de Ciências Exatas do Programa de Mestrado Profissional da Universidade Federal do Rio Grande (PPGECE/FURG). O Produto Educacional produzido é um desdobramento da pesquisa com a intencionalidade de apresentar ao leitor a experiência vivida durante o processo. Assim, Gomes e Berg (2013, p. 248) corrobora com o posicionamento de que

o Mestrado Profissional em Educação ou Ensino privilegia as relações sociais a partir do momento em que convida o pesquisador a este olhar investigativo para o outro, visando não apenas às discussões teóricas, mas também à solução de problemas na Educação Básica. Afinal, a teoria também é importante, mas pode provocar certo distanciamento entre a pesquisa realizada nas universidades e a realidade da escola.

Consta a seguir a descrição do Produto Educacional intitulada ***Guia Didático - GEODERA - Geometria da Nova Era*** para uso dos professores da educação básica, mais precisamente para os professores que lecionam no quinto ano do Ensino Fundamental e comunidade acadêmica. Sendo um instrumento potente ao ensino e aprendizagem da geometria em Cenários para investigação para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

### 8.1 Guia Didático - GEODERA - Geometria da Nova Era

A proposta de Produto Educacional é um produto educativo viável e aplicável, que possa ser usado por professores do quinto ano do Ensino Fundamental como meio de ensino e aprendizagem da geometria em Cenários para investigação por meio do Convite ao Diálogo. E assim respondendo o objetivo proposto de *elaborar um Guia Didático para apoio aos professores do Ensino Fundamental na aprendizagem e desenvolvimento da geometria*.

O Produto Educacional ***Guia Didático - GEODERA - Geometria da Nova Era***, desenvolvido na plataforma Canva, tem a possibilidade de ser impresso no formato PDF, para aqueles que assim desejarem ter em meio físico por opção ou por falta de acesso à internet.

No ***Guia Didático - GEODERA - Geometria da Nova Era***, estão os conceitos e as atividades desenvolvidas na pesquisa da Dissertação intitulada “**Educação Matemática Crítica: Possibilidades de desenvolvimento do pensamento geométrico no quinto ano do Ensino Fundamental em Cenários para investigação**”, proposta de estudo alinhada à Educação Matemática Crítica na abordagem dos Cenários para Investigação.

Segue descrição para melhor entendimento das seções que compõem o Guia Didático, seguindo o sumário.

### **Sumário**

Apresentação

1 Educação Matemática Crítica (EMC)

2 Cenários para investigação

3 Convite ao diálogo

4 Breve histórico da geometria no Brasil

5 Importância da geometria na formação do sujeito

6 O pensamento geométrico

7 Proposições de Cenários para investigação na aprendizagem de Geometria no quinto ano do Ensino Fundamental

7.1 Proposição 1 - Introdução ao Cenários para investigação

7.2 Proposição 2 - Constituição dos Cenários para investigação

7.3 Proposição 3 - Constituição dos Cenários para investigação

7.4 Proposição 4 - Reflexões

7.5 Proposição 5 -

Conclusões

Considerações

Referências

O Guia Didático está organizado por seções e cada seção tem em seu campo específico os respectivos conceitos. Iniciando pelos conceitos de: Educação Matemática Crítica (EMC) Skovsmose (2001, 2008, 2014), Cenários para investigação e Convite ao diálogo, segundo Skovsmose (2000). Trazendo um pouco da abordagem da ECM para o contexto da geometria pelo viés dos Cenários para Investigação. Consta a abordagem ao contexto do Convite ao diálogo (MILANI, 2020; ALRØ e SKOVSMOSE, 2021) trazendo para o leitor o entendimento e a importância do diálogo na aprendizagem. Com uma linguagem de fácil compreensão para os professores do quinto ano do Ensino Fundamental. Sendo uma ferramenta de suporte aos professores do EF que por ventura possam interessar-se pela abordagem EMC, Cenários para investigação e Convite ao diálogo para adentrar suas salas de aula.

Seguindo, os escritos de um breve histórico da geometria e sua importância para a formação do sujeito conforme estudos de Pavanello (1989, 1993), Kaleff (1994) que corroboram a pesquisa, entre outros. Assim como autores que estão alinhados aos estudos do desenvolvimento do pensamento geométrico, segundo Kaleff (1994, 2007, 2009), Nasser (1990, 1993), Crowley (1996), entre outros.

Na sequência constam as proposições de Cenários para Investigação, desenvolvidas no contexto da geometria a partir de uma *imagem convite*, por meio do aceite a partir do convite ao diálogo, para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

O Guia Didático será divulgado aos professores, gestores e demais participantes de comunidades escolares que atuam em turmas de Ensino Fundamental da rede municipal selecionada, assim como para a comunidade acadêmica.

## 9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Estar entre os estudantes como professora pesquisadora nessa pesquisa trouxe vivências únicas e marcantes. Únicas pois cada momento vivido entre os estudantes, podendo por meio dos diálogos entre estes nas colocações sobre seus entendimentos.

Nesse sentido, considero ter adentrado em uma zona de risco, conforme Borba e Skovsmose (2008), atentam, na qual as incertezas podem tomar conta do ambiente. Sendo assim, considero que essas incertezas se manifestaram tanto para a professora pesquisadora quanto para os estudantes. Porém é importante destacar as possibilidades de aprendizagem criadas por meio dos novos padrões de comunicação entre os atores envolvidos conforme relatado, corroborando com Alrø e Skovsmose (2010), o convite ao diálogo.

Além disso, os Cenários para investigação proporcionaram reflexões e posicionamentos críticos por parte dos estudantes, bem como possibilitaram a verificação de indícios quanto à reelaboração e manutenção de seus *foregrounds*.

A aprendizagem da geometria é um elemento essencial na formação de estudantes, e é importante que o ensino desta disciplina seja abordado de maneira efetiva e engajadora. Para alcançar isso, é crucial que as atividades propostas envolvam a discussão e a argumentação entre os estudantes, pois isso cria um ambiente de aprendizagem colaborativa, no qual eles são encorajados a expressar suas ideias e a explicar seus raciocínios de maneira clara e persuasiva. Durante essas trocas de ideias, os estudantes têm a oportunidade de aprimorar sua compreensão dos conceitos geométricos, assim como a clareza na comunicação matemática. Portanto, é fundamental que na aprendizagem da geometria se incluam atividades interativas e colaborativas, nas quais os estudantes sejam incentivados a participar ativamente, compartilhando suas ideias, ouvindo as perspectivas dos colegas e construindo conhecimento de forma coletiva. Desse modo, a aprendizagem da geometria se torna mais significativa e duradoura, preparando os estudantes para enfrentar os desafios do mundo real, nos quais a compreensão e a aplicação dos conhecimentos geométricos desempenham um papel fundamental.

Essa prática também estimula o pensamento crítico, pois os estudantes são desafiados a justificar suas respostas e a encontrar diferentes soluções para um mesmo problema. O desenvolvimento do pensamento geométrico é uma habilidade

crucial, pois permite compreender e trabalhar com formas e figuras de maneira lógica e precisa. Essa habilidade, que consiste na compreensão de conceitos geométricos, não se limita apenas ao campo da matemática, mas também possui uma vasta gama de aplicações em diversas áreas do conhecimento. Por exemplo, arquitetos e engenheiros utilizam esses conceitos para projetar estruturas e construções, considerando ângulos, linhas e formas. Da mesma forma, designers e artistas aplicam princípios geométricos em suas criações, buscando harmonia e equilíbrio visual.

A importância dessa habilidade não se restringe apenas à aplicação prática em áreas específicas, mas também está diretamente relacionada ao desenvolvimento do pensamento crítico e criativo dos estudantes. Ao explorarem os conceitos geométricos, eles são desafiados a solucionar problemas de forma autônoma, desenvolvendo habilidades de resolução de problemas e capacidade de análise. Além disso, a capacidade de aplicar conceitos geométricos em diferentes contextos é fundamental no mundo atual, onde a interdisciplinaridade e a integração de conhecimentos são cada vez mais valorizadas.

A geometria não se resume a fórmulas e teoremas, mas sim a uma maneira de pensar e compreender o mundo ao nosso redor. Ao desenvolver essa habilidade, os estudantes não apenas adquirem conhecimentos práticos e teóricos, mas também são capazes de interpretar e analisar informações visuais de forma mais profunda. Eles se tornam capazes de reconhecer e utilizar as formas e padrões presentes em diversas situações, seja na natureza, na arquitetura ou nas obras de arte.

Portanto, ao ampliar a compreensão e aplicação dos conceitos geométricos, os estudantes se tornam pensadores críticos e criativos, capazes de analisar e resolver problemas complexos de forma autônoma e inovadora. Essa habilidade é uma poderosa ferramenta para explorar e compreender o mundo ao nosso redor, enriquecendo não apenas o conhecimento acadêmico, mas também a capacidade de apreciar a beleza e o equilíbrio presentes nas formas geométricas.

Em suma, a aprendizagem do pensamento geométrico desde cedo é fundamental para o desenvolvimento cognitivo das crianças. Ao estimulá-las a observar, explorar e resolver problemas relacionados a formas tridimensionais, bem como promover a discussão e a argumentação em sala de aula, estamos

contribuindo para sua formação como pensadores críticos e criativos, capazes de utilizar o pensamento geométrico em diversas áreas do conhecimento.

Em resumo, o pensamento geométrico desempenha um papel fundamental e essencial no desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático e na compreensão aprofundada do mundo ao nosso redor, oferecendo-nos uma perspectiva única e abrangente. É uma habilidade valiosa e indispensável que nos capacita a explorar minuciosamente as formas e relações geométricas complexas, proporcionando-nos uma visão multidimensional do universo matemático e suas aplicações práticas. Resolver problemas matemáticos complexos torna-se mais eficaz e acessível quando aplicamos o pensamento geométrico em conjunto com outras técnicas e ferramentas, que incluem desenhos elaborados e precisos, modelos tridimensionais altamente detalhados, cálculos matemáticos precisos e representações visuais meticulosamente construídas em cada passo do processo.

É crucial respeitar e considerar o ritmo individual de cada estudante, fornecendo atividades desafiadoras e adequadas ao seu nível de desenvolvimento em geometria. Em resumo, a Teoria de Van Hiele oferece aos educadores uma estrutura abrangente e precisa para o ensino e a aprendizagem dessa matéria, permitindo que eles acompanhem de perto o progresso dos estudantes e promovam um entendimento mais profundo e um domínio sólido nesse campo essencial da matemática. Dessa forma, esse método proporciona não apenas conhecimento e habilidades geométricas, mas também contribui para o desenvolvimento cognitivo e intelectual dos estudantes, estimulando a capacidade de visualizar, analisar e resolver problemas de forma geométrica. Eles podem compreender e aplicar conceitos avançados e justificar teoremas complexos utilizando estruturas formais e provas completas.

Além disso, a Teoria de Van Hiele oferece aos educadores ferramentas essenciais para compreender o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes em diferentes fases. A capacidade de adaptação das estratégias de ensino por parte dos professores de acordo com as necessidades individuais de cada estudante é algo que traz inúmeras vantagens. Ao garantir um ensino eficaz, é de extrema importância que os educadores respeitem o ritmo de aprendizado de cada estudante, oferecendo atividades desafiadoras e adequadas ao seu nível de desenvolvimento. Dessa forma, a Teoria de Van Hiele surge como uma ferramenta

valiosa para promover uma estrutura abrangente no ensino e na aprendizagem da geometria.

Diante disso, conclui-se que é possível, por meio das atividades propostas pela professora pesquisadora, estabelecer Cenários para investigação, com referências à vida real (ambiente 6) e pautados na perspectiva de ensino da EMC, para a aprendizagem da geometria, alinhados aos interesses do estudante. Isto permitiu de maneira mais espontânea o aceite e engajamento dos estudantes quanto às investigações, promovendo a intencionalidade e a viabilidade de uma aprendizagem da geometria com mais significado.

## REFERÊNCIAS

- ALRO, H. e SKOVSMOSE, O. **Diálogo e aprendizagem em educação matemática**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2021.
- BAGGIOTTO, C. C., BERNARDI, L. dos S., & GREGOLIN, V. M. **GeoGebra em Dispositivos Móveis: o ensino de geometria na perspectiva da Educação Matemática Crítica**. *Ensino Da Matemática Em Debate*, 7(3), 349–375, 2020. <https://doi.org/10.23925/2358-4122.2020v7i3p349-375>
- BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2016.
- BIOTTO FILHO, Denival. **Quem não sonhou em ser um jogador de futebol? Trabalho com projetos para reelaborar *foregrounds***. 234f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015.
- BRANDÃO, C. R; STRECK, D. R. **Pesquisa Participante: A partilha do saber**. 2. ed. Aparecida: Ideias & Letras, 2007.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 142p, 1997.
- BROCKER, Mosael Juliano. **Isometrias e congruência: uma investigação no Ensino Fundamental**. Dissertação Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Matemática e Estatística. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2016. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/150246>.
- CALDATTO, M. E. & PAVANELLO, R. M. **O Processo de Inserção das Geometrias Não Euclidianas no Currículo da Escola Paranaense: A Visão dos Professores Participantes**. *Bolema*, 28 (48), 42–63, 2014.
- CALDATTO, M., & PAVANELLO, R. **Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais**. *Quadrante*, 24(1), 103–128, 2015. <https://doi.org/10.48489/quadrante>.
- CARVALHO, J.B., P. **Euclides Roxo e as polêmicas sobre a modernização do ensino da matemática**. In: W. R. Valente (org.). *Euclides Roxo e a modernização do ensino de Matemática no Brasil*, pp. 85–149. Brasília: Editora da UnB, 2004.
- CASTILHOS, Adriana da Costa. **Educação matemática crítica: reflexões sobre ambientes de aprendizagem matemática na educação do campo em uma turma do quinto ano do ensino fundamental**. 105f. Dissertação (mestrado). Universidade Federal do Rio Grande - FURG. Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Exatas. Santo Antônio da Patrulha/RS, 2022.

<https://sistemas.furg.br/sistemas/sab/arquivos/bdtd/d60d4358e76ea2bb9e571a4bc8683e7a.pdf>

CAVALVANTE, R. B.; CALIXTO, P.; PINHEIRO, M. M. K. **Análise de Conteúdo:** considerações gerais, relações com a pergunta de pesquisa, possibilidades e limitações do método. *Informação & Sociedade*. João Pessoa, v.24, n.1, p. 13-18, jan./abr. 2014. Disponível em: [https://www.brapci.inf.br/repositorio/2015/12/pdf\\_ba8d5805e9\\_0000018457.pdf](https://www.brapci.inf.br/repositorio/2015/12/pdf_ba8d5805e9_0000018457.pdf)

CROWLEY, M. L. **O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico.** In LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. A. (org.). *Aprendendo e ensinando geometria*. São Paulo: Atual, p.1-19. 199.

CRUZ, Rodrigo de Menezes. **Atividades de Modelagem Matemática na perspectiva sociocrítica:** contribuições para o desenvolvimento crítico de estudantes do ensino fundamental utilizando como pano de fundo a geometria e o tema desmatamento. 51 f. Monografia (Graduação em Matemática Licenciatura) - Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2020.

D'AMBRÓSIO, U. **História da Matemática no Brasil:** uma visão panorâmica até 1950. *Saber y Tiempo: Revista de Historia de la Ciencia*, 2 (8), 7–37, 1999.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática.** Elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

FAINGUELERNT, Estela K. **Educação Matemática:** Representação e Construção em Geometria. Porto Alegre: Artmed, 1999.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigações em Educação Matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2012.

FONSECA, Maria da Conceição F.R., LOPES, Maria da Penha, BARBOSA, Maria das Graças Gomes, GOMES, Maria Laura Magalhães, DAYRELL, Mônica Maria Machado S. S. **O ensino da geometria na escola fundamental:** Três questões para formação do professor de matemática dos ciclos iniciais. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa.** 74ª ed. São Paulo: Paz e Terra, 2019.

FREIRE, Paulo. **Educação como prática da liberdade.** 53º ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2019.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do oprimido.** 84ª ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2019.

GARNICA, A. V. M. (org.). **Pesquisa em História da Educação Matemática no Brasil:** sob o signo da pluralidade. Livraria da Física, 2016.

GAZIRE, E. S. **O não resgate das geometrias**. Campinas. Tese de Doutorado (Doutorado em Educação). UNICAMP. Lima, L. O. Estórias da Educação no Brasil: de Pombal a Passarinho. Rio de Janeiro: Editora Brasília, 2000.

GOMES, M. L. M. **História do Ensino da Matemática**: uma introdução. CAEDUEMG, Minas Gerais, 2012.

GOMES, Luciana M. J. Baptista; BERG, Rosana da Silva. **Mestrado Profissional: reflexão e ação na educação básica**. **Polyphonia**, Goiânia, v. 24, n. 2, p. 19-28, 2013. Disponível em: <<https://www.revistas.ufg.br/sv/article/download/37936/19054/>>. Acesso: 05/06/2022.

GUTIERREZ, A, JAIME, A. **Estudio de las características de los niveles de van Hiele**. Proceedings of The 11th PME conference , vol 3, p. 131 – 7. Montreal, 1987.

HIELE, P. M. **Structure and insight: a theory of mathematics education**. Orlando, USA: Academic Press, 1986. 134

HOFFER, A. **Geometry is More Than Proof**. Mathematics Teacher, 74 (January), p.11- 18, 1981.

KALEFF, A. M. M. R. . **Do fazer concreto ao desenho em geometria**: ações e atividades desenvolvidas no laboratório de ensino de geometria da Universidade Federal Fluminense. In: Sergio Lorenzato. (Org.). O laboratório de ensino de matemática na formação de professores. 2 ed.Campinas: Autores Associados, 2009, v. 1, p. 113-134.

KALEFF, A. M. M. R. **Reflexões sobre o caminho desde o concreto ao abstrato no ensino da geometria**: vivências no Laboratório de Ensino de geometria da Universidade Federal Fluminense.. In: SAGULA, J e outros. (Org.). Memórias del 9no Simposio de Educación Matemática.. 1ed.Buenos Aires: Edumat, 2007, v. 1, p. 48-59.

KALEFF, A. M. M. R. **Desenvolvimento do Pensamento Geométrico – O Modelo de Van Hiele**. Bolema, Rio Claro – SP, v. 9, n. 10, 1994.

LACERDA, Deise H. de. **Cenários para investigação no ensino fundamental sob a perspectiva da educação matemática crítica**. 140f. Dissertação (mestrado). Universidade Federal do Rio Grande - FURG. Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Exatas. Santo Antônio da Patrulha/RS, 2020. <https://sistemas.furg.br/sistemas/sab/arquivos/bdtd/ada2f21d49693ae90c2c37d2508d5aa2.pdf>. Acesso em: 28 jun. 2023.

LEME DA SILVA, M. C. **Abandono do ensino de geometria e a matemática moderna: uma revisão histórica**. Zetetike, Campinas, SP, v. 30, n. 00, p. e022030, 2022. DOI: 10.20396/zet.v30i00.8665149. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8665149>. Acesso em: 3 mar. 2024.

LEME DA SILVA, M. C. **Um breve panorama sobre a História da Educação Matemática no Brasil**. Revista de História da Educação Matemática, [S. l.], v. 8, p. 1–17, 2022. Disponível em: <https://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/536>. Acesso em: 10 nov. 2023.

LEME DA SILVA, M. C. & PINTO, T. P (orgs.). **História da Educação Matemática e Formação de Professores: aproximações possíveis**. Editora Livraria da Física, 2020.

LORENZATO, S. **Os “Por quês matemáticos dos estudantes” e as respostas dos professores**. Pró-posições, 4 (1), 73–76. Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até aos dias atuais 127, 1993.

LORENZATO, Sérgio Aparecido. **Por que não ensinar geometria?**. In: Educação Matemática em Revista. São Paulo: v. 3, n. 4, p. 3-13, 1995.

LORENZATO, Sérgio Aparecido. **Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis**. In: LORENZATO, Sérgio (org.). O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, p. 3-38, 2006.

LORENZATO, Sérgio Aparecido. **Educação infantil e percepção matemática**. 2. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2008.

LORENZATO, Sérgio Aparecido. **Aprender e ensinar geometria**. Campinas, SP: Mercado das Letras, 2015.

MATOS, Maria Dulce Gonçalves de. **Práticas investigativas no ensino de geometria: contribuições para ação docente**. 128 f. Dissertação (Mestrado em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas) - Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará. Belém, 2017. Disponível em: <http://repositorio.ufpa.br/jspui/handle/2011/10512>. Acesso em: 22 jun. 2022.

MENDES, R. M.; MISKULIN, R. G. S. **A análise de conteúdo como uma metodologia**. Cadernos de Pesquisa, São Paulo, v. 47, n. 165, p. 1044-1066, 2017.

MENDES, I. A. & GONÇALVES, F. D. S. **Caracterização da pesquisa brasileira em Dissertações e Teses sobre História da Educação Matemática (1990 - 2010)**. Revista Colombiana de Matemática Educativa, 5, 55 - 69, 2020.

MENESES, Ricardo Soares de. **Uma história da geometria escolar no Brasil: de disciplina a conteúdo de ensino**. 2007. 172 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

MENEZES, B. S. de. **Utilização do Geogebra com smartphone: geometria Dinâmica por meio de um cenário para investigação**. REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 4, n. 1, p. 68–77, 2018. DOI: 10.35819/remat2018v4i1id2685. Disponível em:

<https://www.periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/2685>. Acesso em: 22 jun. 2022.

MILANI, Raquel. **Diálogo em Educação Matemática e suas Múltiplas Interpretações**. Rio Claro, SP: Bolema, 2020.

MILANO, Thomas B. **Educação Matemática Crítica e os jogos digitais: uma possibilidade de convite aos cenários para investigação**. 164f. Dissertação (mestrado). Universidade Federal do Rio Grande - FURG. Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Exatas. Santo Antônio da Patrulha/RS, 2021. <https://sistemas.furg.br/sistemas/sab/arquivos/bdtd/851ada373e428dcbc423ff693ea999e1.pdf>. Acesso em: 28 jun. 2023.

MINAYO, Maria Cecília de Souza. **Pesquisa social. Série Manuais Acadêmicos: teoria, método e criatividade**. São Paulo: Vozes. ISBN 9788532642127. 1 ed., 2023. Disponível em: <https://plataforma.bvirtual.com.br/Leitor/Publicacao/209501/epub/0?code=cYePYzvOgoAZDwWYScjHwL1i/QQVpqjcg1mNQQQra4P+VSHopbglgkIHEfZoQY6jJMxQawFKPfiH9T0b0Fm4kg==>. Acesso em: 28 jun. 2023.

MIORIM, M. A. **Introdução à História da Educação Matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

MIORIM, M. A. & Miguel, A.; Fiorentini, D. **Ressonância e dissonância do movimento pendular entre álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro**. Zetetiké, 1 (1), 19–39, 1993.

NACARATO, A. M.; PASSOS C. L. B. **A geometria nas séries iniciais: uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores**. São Carlos: EdUFScar, 2003.

NASSER, L. **O desenvolvimento do raciocínio em geometria**. Boletim GEPEM (USU) Rio de Janeiro, v. 27, p. 93-99, 1990.

NASSER, L. **A Teoria de Van Hiele para o Ensino de Geometria – Pesquisa e Aplicação**. Rio de Janeiro: UFRJ, 1993.

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. F. P. **Geometria segundo a Teoria de van Hiele**. 2. ed. Editora do IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2010.

NERI, Sarafago Pinto. **O livro-jogo como recurso didático-pedagógico no desenvolvimento da Educação Matemática Crítica**. 119f. Dissertação (mestrado). Universidade Federal do Rio Grande - FURG. Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Exatas. Santo Antônio da Patrulha/RS, 2021. <https://sistemas.furg.br/sistemas/sab/arquivos/bdtd/ada2f21d49693ae90c2c37d2508d5aa2.pdf>. Acesso em: 28 jun. 2023.

OLIVEIRA, Bianca Aparecida Holm de. **Cenários para investigação no ensino de medidas de comprimento e superfície: uma proposta colaborativa entre professor**

e estudante. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Tecnologia) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2020.

PAIS, L. C. **Intuição, experiência e teoria geométrica**. Zetetike, Campinas, SP, v. 4, n. 2, p. 65–74, 1996. DOI: 10.20396/zet.v4i6.8646739. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646739>. Acesso em: 24 set. 2023.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e consequências**. In Zetetiké, v. 1, n. 1, 1993.

PAVANELLO, R. M. **Formação de possibilidades cognitivas em noções geométricas**. 166f. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP, 1995. Disponível em: <<http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/253025>>. Acesso em: 21 abr. 2022.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino de geometria: uma visão histórica**. (Dissertação em Educação), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989. Disponível em: <<http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/252057>>. Acesso em: 09 fev. 2022.

PASSOS, C. L. B. **Representações, interpretações e prática pedagógica: a geometria na sala de aula**. Campinas. Tese de Doutorado (Doutorado em Educação). UNICAMP, 2000.

PEREZ, G. **Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicas da pesquisa participante no ensino de geometria para as camadas populares**. Campinas, Tese de Doutorado (Doutorado em Educação). UNICAMP, 1991.

PIAGET, J. **Observaciones sobre la educacion matematica**. In: Hernández, J. (org). La enseñanza de las matemáticas modernas. 3ª ed. Madrid: Alianza Editorial, 1986.

RABAIOLLI, Leonice Ludwig. **Geometria nos anos iniciais: uma proposta de formação de professores em cenários para investigação**. 2013. Dissertação (Mestrado) – Curso de Ensino de Ciências Exatas, Universidade do Vale do Taquari - Univates, Lajeado, 13 jul. 2013. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10737/340>.

RIBEIRO, M. L. S. **História da educação brasileira**. Campinas: Autores Associados, 2003.

ROXO, E. **A matemática e o curso secundário**. In: W. R. Valente (org.), Euclides Roxo e a modernização do ensino de Matemática no Brasil, pp. 151–179 Brasília: Editora da UnB, 2004.

RUBIM, A.; FERNANDES, M.; MILANI, R. **Uma atividade investigativa sobre polígonos: reflexões sobre imprevisibilidades que promoveram aprendizagens**. Revista de Educação Matemática, v. 18, p. e 021006, 31 jan., 2021.

SANT'ANNA, N. F. P. **Aplicação da teoria de Van Hiele no acompanhamento da mudança curricular no ensino médio no colégio Pedro II.** 160f. Dissertação. (Mestrado em Matemática). Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 2001.

SANTOS, C. A. dos; NACARATO, Adair Mendes. **Aprendizagem em geometria na educação básica:** a fotografia e a escrita em sala de aula. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2020.

SCHMITT, Fernanda Eloisa. **Abordando geometria por meio da investigação matemática:** um comparativo entre o 5º e 9º anos do Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado) – Curso de Ensino de Ciências Exatas, Universidade do Vale do Taquari - Univates, Lajeado, 2015. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10737/831>.

SCHUBRING, G. **Análise histórica de livros de matemática:** notas de aulas. Campinas: Autores Associados, 2003.

SCHUBRING, G. **O Primeiro Movimento Internacional de Reforma Curricular em Matemática e o papel da Alemanha.** In: Valente, W. R. (org.) Euclides Roxo e a modernização do ensino de Matemática no Brasil, pp. 11–43. Brasília: Editora UnB, 2004.

SKOVSMOSE, O. **Cenários para Investigação.** Rio Claro, SP: Bolema, 2000.

SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática Crítica: a questão da democracia.** Campinas, SP: Papirus, 2001.

SKOVSMOSE, O. **Desafios da reflexão em Educação Matemática Crítica.** Campinas: Papirus editora, 2008.

SKOVSMOSE, O. **Um Convite à Educação Matemática Crítica.** Campinas: Papirus, 2014.

SKOVSMOSE, O. **O que poderia significar a Educação Matemática Crítica para diferentes grupos de estudantes?** Revista Paranaense de Educação Matemática (RPEM), Campo Mourão, PR; v.6, n.12, p.18-37, jul-dez.2017.

TOLEDO, Marília & Toledo, Mauro. **Como dois e dois.** São Paulo, FTD, 1997.

VALENTE, W. R. **Uma história da matemática escolar no Brasil (1730–1930).** 1. ed. São Paulo: Annablume, 1999.

VALENTE, W. R. (Org.). **O nascimento da matemática do ginásio.** São Paulo: Annablume, 2004a.

VALENTE, W. R. **Euclides Roxo e o movimento internacional de modernização da matemática escolar.** In: W. R. Valente, (org.). Euclides Roxo e a modernização do ensino de Matemática no Brasil, pp. 45–3. Brasília: Editora da UnB, 2004b.

VASCONCELLOS, M. **A diferenciação entre figuras geométricas não-planas e planas:** o conhecimento dos estudantes das séries iniciais do ensino fundamental e o ponto de vista dos professores. Zetetiké, 16 (30), 77–106, 2008.

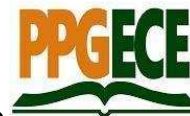
VIAN, Joseane Marta. **Tarefas investigativas para o ensino da geometria no 5º ano do ensino fundamental.** 118 f. Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas instituição de ensino: fundacao vale do taquari de educacao e desenvolvimento social - FUVATES, Lajeado Biblioteca Depositária: Biblioteca Digital da Univates, 2020.

VILLIERS, M. **Algumas reflexões sobre a Teoria de van Hiele.** Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.12, n.3, p. 400-431, 2010.

## **APÊNDICES**

**APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)**

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE - FURG**  
**Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas**



**TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TCLE**  
**(Res.510/2016-CNS)**

**Esclarecimentos**

Este é um convite para participarem da pesquisa ***EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA: POSSIBILIDADES DE APRENDIZAGENS EM GEOMETRIA NO QUINTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL EM CENÁRIOS PARA INVESTIGAÇÃO PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO***, que tem como pesquisadora responsável **CARLA JORDANA RÖNNAU**.

Esta pesquisa pretende perceber como o Cenário para Investigação possibilita o desenvolvimento do pensamento geométrico por meio do convite ao diálogo, em uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental.

O motivo que nos leva a fazer este estudo é para entender como uma abordagem da Educação Matemática Crítica pode influenciar no contexto escolar e na vida do estudante .

Durante a realização da pesquisa poderão ocorrer eventuais desconfortos e possíveis riscos ínfimos à integridade moral, intelectual e emocional. Seu(sua) filho(a) pode se sentir desconfortável ao ser filmado/fotografado. Contudo, nada é obrigatório e não existe punição quanto à não participação. Todas as imagens serão editadas para minimizar o risco de identificação. A pesquisa não visa denegrir os participantes, não necessita de materiais físicos ou ações físicas que pressuponham o uso de EPI (Equipamento de Proteção Individual). Segundo as Resoluções 510/2016, em todo projeto de pesquisa existem riscos. Esses riscos poderão ser minimizados com as medidas de organização e esclarecimento para os estudantes do uso consciente de materiais e espaços escolares.

Como benefícios da pesquisa, o menor terá contato com uma prática de abordagem metodológica que trabalha a partir de um convite para participar de atividades pelos diferentes espaços escolares.

Em caso de algum desconforto, complicações ou danos à saúde que o menor possa ter relacionado com a pesquisa, a pesquisadora é responsável por garantir o direito à assistência integral, imediata e gratuita.

Durante todo o período da pesquisa você poderá tirar suas dúvidas ligando para **CARLA JORDANA RÖNNAU**, rua Citral Paredão Baixo, nº 2060, Fazenda Fialho, Taquara/RS, [profajojo@gmail.com](mailto:profajojo@gmail.com), 51 986543448.

Você tem o direito de não autorizar ou retirar o seu consentimento da participação do menor em qualquer fase da pesquisa, sem nenhum prejuízo para o mesmo.

Os dados que o menor irá fornecer serão confidenciais e serão divulgados apenas em congressos ou publicações científicas, sempre de forma anônima, não havendo divulgação de nenhum dado que possa lhe identificar. Os dados resultantes dessa investigação (impresso e digital), serão mantidos na Universidade Federal do Rio Grande, no Campus Santo Antônio da Patrulha, sob a guarda e responsabilidade do orientador Prof<sup>o</sup> Dr<sup>o</sup>. Fernando Kokubun e coorientadora Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Patrícia Ignácio, dessa pesquisa. Os dados coletados serão utilizados exclusivamente para a execução dessa pesquisa e serão guardados pelo período mínimo de 5 anos. Sendo de responsabilidade da pesquisadora Carla Jordana Rönnau fazer o *download* dos dados coletados para um dispositivo eletrônico local, apagando todo e qualquer registro de qualquer plataforma virtual, ambiente compartilhado ou "nuvem". Isso também será feito com os registros de consentimento livre e esclarecido e com as gravações de áudio e/ou filmagem.

As informações geradas somente serão divulgadas de forma anônima, não sendo usadas iniciais ou quaisquer outras indicações que possam identificar os participantes da pesquisa e a Instituição. E os participantes têm garantia de acesso aos resultados da pesquisa.

Alguns gastos pela sua participação nessa pesquisa, eles serão assumidos pelo pesquisador e reembolsado para vocês. Se o menor sofrer qualquer dano decorrente desta pesquisa, sendo ele imediato ou tardio, previsto ou não, o menor será indenizado.

Qualquer dúvida sobre a ética dessa pesquisa você deverá ligar para o Comitê de Ética em Pesquisa FURG (CEP - FURG) – instituição que avalia a ética das pesquisas antes que elas comecem, assim forneçam proteção aos participantes

das mesmas – da Universidade Federal do Rio Grande, nos telefones (53) 3237-3013 ou e-mail cep@furg.br. Você ainda pode ir pessoalmente à sede do CEP, no prédio das Pró-Reitorias segundo andar-Propesp, disponível nas segundas-feiras das 8 às 12h, nas terças-feiras das 09 às 13h, nas quartas-feiras das 13h30min as 17h30min, nas quintas-feiras das 9 às 17h30min, ou em outros horários mediante agendamento, Universidade Federal do Rio Grande (FURG), Avenida Itália, Km 08 - Campus Carreiros - Caixa Postal 474 - Rio Grande/RS - CEP: 96203-900.

Este documento foi impresso em duas vias. Uma ficará com você e a outra com a pesquisadora responsável **CARLA JORDANA RÖNNAU**.

### ***Consentimento Livre e Esclarecido***

Eu, \_\_\_\_\_, representante legal do menor \_\_\_\_\_, autorizo sua participação na pesquisa **“Cenários para Investigação: possibilidades de aprendizagens em geometria no quinto ano do ensino fundamental para além da sala de aula”**.

Esta autorização foi concedida após ter sido esclarecido sobre os objetivos, a importância e o modo como os dados serão coletados nessa pesquisa, além de conhecer os riscos desconfortos e benefícios que ela poderá trazer para o jovem e também por ter compreendido todos os direitos que ele(a) terá como participante e eu como seu representante legal.

Autorizo, ainda, a publicação das informações por ele(a) em congressos e/ou publicações científicas, desde que os dados apresentados não possam identificá-lo(a). Declaro que concordo que meu filho(a) participe da pesquisa.

Taquara/RS, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

\_\_\_\_\_  
**Assinatura do participante da pesquisa/responsável legal**

### ***Declaração do pesquisador responsável***

Como pesquisadora responsável pelo estudo **Cenários para Investigação: possibilidades de aprendizagens em geometria no quinto ano do ensino fundamental para além da sala de aula**, declaro que assumo a inteira responsabilidade de cumprir fielmente os procedimentos metodológicos garantir os direitos que foram esclarecidos e assegurados ao participante desse estudo, assim como manter sigilo e confidencialidade sobre a identidade do mesmo.

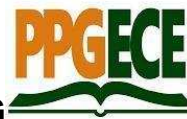
Declaro ainda estar ciente que na inobservância do compromisso ora assumido infringirem as normas e diretrizes propostas pela Resolução 466/12 do Conselho Nacional de Saúde – CNS, que regulamenta as pesquisas envolvendo o ser humano.

Taquara, dia, mês e ano.

\_\_\_\_\_  
**Assinatura da pesquisadora responsável**

**APÊNDICE B – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TALE)**

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE - FURG**  
**Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas**

**TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TALE)**

Você está sendo convidado a participar da pesquisa **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA: POSSIBILIDADES DE APRENDIZAGENS EM GEOMETRIA NO QUINTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL EM CENÁRIOS PARA INVESTIGAÇÃO PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO**, coordenada pela pesquisadora **CARLA JORDANA RÖNNAU**, mestranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de Rio Grande - FURG, orientado pelo Profº. Drº. **FERNANDO KOKUBUN** e coorientado pela Profª. Drª **PATRÍCIA IGNÁCIO**. Onde seus pais permitiram que você participasse.

Esta pesquisa pretende perceber como o Cenário para Investigação possibilita o desenvolvimento do pensamento geométrico por meio do convite ao diálogo, em uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental.

Você só precisa participar da pesquisa se quiser, é um direito seu e não terá nenhum problema se desistir. As crianças que irão participar desta pesquisa têm de 10 a 12 anos de idade.

A pesquisa será feita onde você estuda e irá realizar atividades utilizando o Cenário para Investigação como possibilidade de desenvolvimento do pensamento geométrico. Para isso, será realizado por meio de um convite ao diálogo a possibilidade de um ambiente de aprendizagem real, considerado seguro, mas é possível ocorrer eventuais desconfortos. Caso aconteça algo errado, você pode nos procurar pelo telefone (51) 986543448.

Você irá participar de encontros, com duração de 2 (duas) horas cada, onde serão desenvolvidas atividades em sala de aula, usando metodologias diferenciadas, envolvendo o Convite ao diálogo. Durante esse período as atividades poderão ser gravadas/filmadas/fotografadas e serão utilizados diários de bordo.

A partir da análise do material colhido, serão produzidos textos acadêmicos sobre os resultados alcançados usando tais metodologia.

Durante a realização da pesquisa poderão ocorrer eventuais desconfortos e possíveis riscos ínfimos à integridade moral, intelectual e emocional. Você poderá se sentir desconfortável ao participar das atividades ou ao ser filmado/fotografado. Contudo, nada é obrigatório e não existe punição quanto à não participação. Todas as imagens serão editadas para minimizar o risco de sua identificação. A pesquisa não visa denegrir os participantes, não necessita de materiais físicos ou ações físicas que pressuponham o uso de EPI (Equipamento de Proteção Individual).

Há coisas boas que podem acontecer como propiciar a você uma melhor aprendizagem de conteúdos Matemáticos, além de contribuir para a melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática em um contexto geral, bem como para a coleta de dados relevantes para a produção acadêmica.

Você não terá despesas nem compensações financeiras ao participar da pesquisa, mas, caso houver alguma despesa, será garantido o seu ressarcimento.

Os dados resultantes dessa investigação (impresso e digital), serão mantidos na Universidade Federal do Rio Grande, no Campus Santo Antônio da Patrulha, sob a guarda e responsabilidade do orientador e da coorientadora desta pesquisa. Os dados coletados serão utilizados exclusivamente para a execução dessa pesquisa e serão guardados pelo período mínimo de 5 anos. Sendo de responsabilidade da pesquisadora fazer o *download* dos dados coletados para um dispositivo eletrônico local, apagando todo e qualquer registro de qualquer plataforma virtual, ambiente compartilhado ou "nuvem". Isso também será feito com os registros de consentimento livre e esclarecido e com as gravações de áudio. As informações geradas somente serão divulgadas de forma anônima, não sendo usadas iniciais ou quaisquer outras indicações que possam identificar os participantes da pesquisa e a Instituição.

Ninguém saberá que você está participando da pesquisa; não falaremos a outras pessoas, nem daremos a estranhos as informações que você nos der. Os resultados da pesquisa vão ser publicados em trabalho de conclusão do mestrado e em artigos, sem identificar as crianças que participaram.

=====

**CONSENTIMENTO PÓS INFORMADO**

Eu \_\_\_\_\_ aceito participar da pesquisa **“CENÁRIOS PARA INVESTIGAÇÃO: POSSIBILIDADES DE APRENDIZAGENS EM GEOMETRIA NO QUINTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL PARA ALÉM DA SALA DE AULA”**.

Entendi as coisas ruins e as coisas boas que podem acontecer.

Entendi que posso dizer “sim” e participar, mas que, a qualquer momento, posso dizer “não” e desistir e que ninguém vai ficar com raiva de mim.

Os pesquisadores tiraram minhas dúvidas e conversaram com os meus responsáveis.

Recebi uma via deste termo de assentimento. A outra via ficará com a pesquisadora responsável Carla Jordana Rönnau. Li o documento e concordo em participar da pesquisa.

Taquara, dia, mês e ano.

---

Assinatura do menor

---

Assinatura do pesquisador

## APÊNDICE C – TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA GRAVAÇÃO DE VOZ E/OU REGISTRO DE IMAGENS (FOTOS E/OU VÍDEOS)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE - FURG  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas



### TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA GRAVAÇÃO DE VOZ E/OU REGISTRO DE IMAGENS (FOTOS E/OU VÍDEOS)

#### Esclarecimentos

Este é um convite para você participar da pesquisa **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA: POSSIBILIDADES DE APRENDIZAGENS EM GEOMETRIA NO QUINTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL EM CENÁRIOS PARA INVESTIGAÇÃO PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO**, que tem como pesquisadora responsável **CARLA JORDANA RÖNNAU**. Esta pesquisa pretende perceber como o Cenário para Investigação no 5º ano do Ensino Fundamental possibilita o desenvolvimento do pensamento geométrico por meio do convite ao diálogo. O motivo que nos leva a fazer este estudo é para entender como uma abordagem da Educação Matemática Crítica pode influenciar no contexto escolar e na vida do estudante. Gostaríamos de solicitar sua autorização para efetuar a gravação de voz e/ou o registro de fotos e/ou vídeos, concedida mediante o compromisso dos pesquisadores acima citados com os seguintes direitos:

1. Ter acesso às fotos e/ou vídeos e/ou à gravação e transcrição dos áudios;
2. Ter a garantia que as fotos e/ou vídeos e/ou áudios coletadas serão usadas exclusivamente para gerar informações para a pesquisa aqui relatada e outras publicações dela decorrentes, quais sejam: revistas e eventos científicos;
3. Não ter a identificação revelada em nenhuma das vias de publicação das informações geradas, utilizando mecanismos para este fim (tarjas, distorção da imagem, distorção da voz, entre outros).
4. Ter as fotos e/ou vídeos e/ou áudios obtidos de forma a resguardar a privacidade e minimizar constrangimentos;
5. Ter liberdade para interromper a participação na pesquisa a qualquer momento e/ou solicitar a posse das fotos e/ou vídeos.

Você não é obrigado a permitir o uso das suas fotos e/ou vídeos e/ou áudios, porém, caso aceite, será de forma gratuita mesmo que imagens sejam utilizadas em publicações de livros, revistas ou outros documentos científicos.

As fotos e/ou vídeos e/ou áudios coletados serão: (esclarecer e descrever o tipo (foto e/ou vídeo e/ou áudio), estimativa de quantidade (número de fotos, horas de gravação, etc.).

#### Consentimento de Autorização de Uso de Imagens (fotos e/ou vídeos)

Após ter sido esclarecido sobre as condições para a minha participação no estudo, eu, \_\_\_\_\_ autorizo o uso de:

- ( ) Minhas imagens (fotos e/ou vídeos)  
( ) minha voz  
( ) minhas imagens (fotos e/ou vídeos) e minha voz

Taquara, dia, mês e ano.

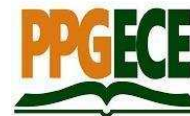
\_\_\_\_\_  
Assinatura do participante da pesquisa

\_\_\_\_\_  
Assinatura do pesquisador responsável

## APÊNDICE D – CARTA DE ANUÊNCIA DA ESCOLA



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE - FURG  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas



### CARTA DE ANUÊNCIA

#### Esclarecimentos

Esta é uma solicitação para realização da pesquisa intitulada ***EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA: POSSIBILIDADES DE APRENDIZAGENS EM GEOMETRIA NO QUINTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL EM CENÁRIOS PARA INVESTIGAÇÃO PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO***, a ser realizada na Escola Municipal de Ensino Fundamental Emílio Leichtveis, pela pesquisadora **CARLA JORDANA RÖNNAU**, que utilizará a seguinte metodologia qualitativa por meio da abordagem de pesquisa participante sob os objetivos principais de Perceber como o Cenário para Investigação no 5º ano do Ensino Fundamental possibilita o desenvolvimento do pensamento geométrico por meio do convite ao diálogo, necessitando portanto da concordância e autorização institucional para a realização da etapa de interação com os estudantes do 5º ano para aplicação de cinco encontros sob a abordagem da Educação Matemática Crítica, Cenários para investigação por meio do Convite ao diálogo. Nesses encontros serão produzidas imagens e coletados dados através de escritas espontâneas dos estudantes que servirão para os dados a serem analisados por Análise Textual Discursiva.

Ressaltamos que os dados coletados serão mantidos em absoluto sigilo, de acordo com as Resoluções nº 510/2016 - Conselho Nacional de Saúde/Ministério da Saúde que tratam da Pesquisa envolvendo Seres Humanos. Salientamos ainda que tais dados serão utilizados tão somente para realização deste estudo.

---

**CARLA JORDANA RÖNNAU**  
**CPF 660.440.810-87**

#### Consentimento

Por ter sido informado verbalmente e por escrito sobre os objetivos e metodologia desta pesquisa, concordo em autorizar a realização da mesma nesta Instituição que represento. EMEF Emílio Leichtveis, situada na RS 020, S/N, Fazenda Fialho, Taquara/RS, 51 991100731, [escolaemel@gmail.com](mailto:escolaemel@gmail.com), [escola.emel@edu.taquara.rs.gov.br](mailto:escola.emel@edu.taquara.rs.gov.br)

Esta Instituição está ciente de suas responsabilidades como instituição coparticipante do presente projeto de pesquisa, dispondo de infraestrutura necessária para realização das etapas supracitadas.

Esta autorização está condicionada à aprovação prévia da pesquisa acima citada por um Comitê de Ética em Pesquisa e ao cumprimento das determinações éticas das Resoluções nº 510/2016 - Conselho Nacional de Saúde/Ministério da Saúde e suas complementares. O descumprimento desses condicionamentos assegura-me o direito de retirar minha anuência a qualquer momento da pesquisa.

Taquara, dia, mês e ano.

---

**Assinatura do responsável pela instituição**  
**Nome completo do responsável pela Instituição**  
**Carimbo responsável da Instituição\***  
**CNPJ da instituição**



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE - FURG**  
**Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas**



**TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA GRAVAÇÃO DE VOZ E/OU  
 REGISTRO DE IMAGENS (FOTOS E/OU VÍDEOS)**

**Esclarecimentos**

Este é um convite para você participar da pesquisa: **CENÁRIOS PARA INVESTIGAÇÃO: POSSIBILIDADES DE APRENDIZAGENS EM GEOMETRIA NO QUINTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL PARA ALÉM DA SALA DE AULA**, que tem como pesquisadora responsável **CARLA JORDANA RÖNNAU**. Esta pesquisa pretende perceber como o Cenário para Investigação no 5º ano do Ensino Fundamental possibilita o desenvolvimento do pensamento geométrico por meio do convite ao diálogo. O motivo que nos leva a fazer este estudo é para entender como uma abordagem da Educação Matemática Crítica pode influenciar no contexto escolar e na vida do estudante. Gostaríamos de solicitar sua autorização para efetuar a gravação de voz e/ou o registro de fotos e/ou vídeos, concedida mediante o compromisso dos pesquisadores acima citados com os seguintes direitos:

1. Ter acesso às fotos e/ou vídeos e/ou à gravação e transcrição dos áudios;
2. Ter a garantia que as fotos e/ou vídeos e/ou áudios coletadas serão usadas exclusivamente para gerar informações para a pesquisa aqui relatada e outras publicações dela decorrentes, quais sejam: revistas e eventos científicos;
3. Não ter a identificação revelada em nenhuma das vias de publicação das informações geradas, utilizando mecanismos para este fim (tarjas, distorção da imagem, distorção da voz, entre outros).
4. Ter as fotos e/ou vídeos e/ou áudios obtidos de forma a resguardar a privacidade e minimizar constrangimentos;
5. Ter liberdade para interromper a participação na pesquisa a qualquer momento e/ou solicitar a posse das fotos e/ou vídeos.

Você não é obrigado a permitir o uso das suas fotos e/ou vídeos e/ou áudios, porém, caso aceite, será de forma gratuita mesmo que imagens sejam utilizadas em publicações de livros, revistas ou outros documentos científicos.

As fotos e/ou vídeos e/ou áudios coletados serão: (esclarecer e descrever o tipo (foto e/ou vídeo e/ou áudio), estimativa de quantidade (número de fotos, horas de gravação, etc.).

**Consentimento de Autorização de Uso de Imagens (fotos e/ou vídeos)**

Após ter sido esclarecido sobre as condições para a minha participação no estudo, eu, \_\_\_\_\_ autorizo o uso de:

- ( ) Minhas imagens (fotos e/ou vídeos)  
 ( ) minha voz  
 ( ) minhas imagens (fotos e/ou vídeos) e minha voz

Taquara, dia, mês e ano.

Assinatura do participante da pesquisa

\_\_\_\_\_  
 Assinatura do pesquisador responsável

## APÊNDICE E – MODELO DE DIÁRIO DE CAMPO



**FURG**  
UNIVERSIDADE FEDERAL  
DO RIO GRANDE

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE - FURG

## Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas



## ANOTAÇÕES DIÁRIAS SOBRE AS ATIVIDADES EM SALA DE AULA

TURMA: \_\_\_\_\_ DATA: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

ATIVIDADE DO DIA: \_\_\_\_\_

QUAIS SUAS PERCEPÇÕES SOBRE A AULA DE HOJE?

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

## **ANEXO**

## ANEXO A



Carla Jordana Rønnau &lt;profajojo@gmail.com&gt;

## Dissertação

3 mensagens

Carla Jordana Rønnau &lt;profajojo@gmail.com&gt; 20 de setembro de 2022 às 15:53 Para: osk@ikl.aau.dk

Boa tarde!!!!

É uma satisfação imensa estar escrevendo este e-mail para o Profº Drº Ole Skovsmose e agradeço imensamente pela atenção.

Bom, sou a Carla Jordana Rønnau, mestranda do Curso de Pós graduação em Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas da FURG Campus Santo Antônio da Patrulha no Rio Grande do Sul/Brasil, tenho como orientador o Profº Drº Fernando Kokubun e coorientadora a Profª Drª Patrícia Ignácio.

Estou a pesquisar sobre Cenários para Investigação na Aprendizagem de Geometria, especificamente no Quinto ano do Ensino Fundamental.

A proposta é criar um ambiente de aprendizagem 6, fazendo referência ao real.

Gostaria muito de sua riqueza de conhecimento para compor essa dissertação que será defendida no primeiro semestre de 2023.

Obrigada pela atenção

Carla Jordana Rønnau

Tradução

Good afternoon!!!!

It is an immense satisfaction to be writing this e-mail to Prof. Drº Ole Skovsmose and I thank him immensely for his attention.

Well, I'm Carla Jordana Rønnau, Master's student of the Professional Master's Postgraduate Course in Teaching Exact Sciences at FURG Campus Santo Antônio da Patrulha in Rio Grande do Sul/Brazil, I have Prof. Patricia Ignacio.

I am researching Scenarios for Research in Geometry Learning, specifically in the Fifth year of Elementary School.

The proposal is to create a learning environment 6, making reference to the real.

I would love your wealth of knowledge to compose this dissertation that will be defended in the first half of 2023.

Thanks for listening

Carla Jordana Rønnau

Ole Skovsmose <osk@ikl.aau.dk>  
Para: Carla Jordana Rønnau <profajojo@gmail.com>

26 de setembro de 2022 às 16:47

Dear Carla,

Thank you very much for your mail.

It is definitely an important challenge to create landscapes of investigation related to geometry. Such landscapes can be of type 2, 4, and 6. I find it important to develop landscapes of all different types.

A landscape of type 2 could, for instance, be developed around the relationship between the surface and volume of different geometric figures. One can consider a cube, and also a cube of the double size. (And what precisely can be meant by “double size”?). What are the relationships between these figures’ surfaces and volumes? Instead of a cube one can consider a ball, a pyramid, any geometric figure. What are the relationships between these figures’ surfaces and volumes? The whole discussion could lead towards an insight about the relationships between the scale-factor, the area-factor, and the volume factor.

.

In the book *An Invitation to Critical Mathematics Education* (translated into Portuguese) I have presented an investigation with respect to “small animals”. One can take this presentation as inspiration for creating environments of the type 4 related to geometry.

A landscape of type 6 can, for instance, be created around the task of reading and making maps. It could be maps of the city or of the neighborhood where the school is located. Such maps open for more technical discussions, as for instance about the significance of scales. But just as important is that the reading of maps opens for a discussion of what the maps do reveal. In South Africa, for instance, such maps will reveal much about the brutality of the Apartheid regime that, even if abandoned in 1994, still forms the geometry of cities: Where are the historical black neighborhoods located? Where are the historical white neighborhoods located? Maps of cities around the world might reveal the “geometry of pollution”: polluting industries will be located in poorer neighborhoods, etc.

Such possibilities can be acted out in a classroom, but also through interactions between different classrooms. It does not need to be classrooms from the same school, nor from the same city. Working with maps could include cooperations between classrooms in Brazil, Portugal, Mozambique, Angola. What the students might come to recognise we cannot even guess about.

Exploring landscape are interactive processes.

Good luck with everything.

Ole

[Texto das mensagens anteriores oculto]

---

Carla Jordana Rønnau <profajojo@gmail.com>  
Para: Ole Skovsmose <osk@ikl.aau.dk>

26 de setembro de 2022 às 21:21

Boa Noite!!!

Quero agradecer imensamente pelo email em resposta as duvidas sobre Cenários para Investigação na aprendizagem de geometria. As sugestões são de grande importância para minha pesquisa de dissertação.

E a sugestão do ambiente de aprendizagem (6) contribuiu ricamente com a proposta que já vinha elaborando timidamente.

Novamente, agradecida por sua generosa atenção.

Atenciosamente, Carla Jordana Rønnau,

Mestranda em Ensino de Ciências Exatas - FURG

TRADUÇÃO

Good evening!!!

I want to thank you immensely for the email in response to doubts about Scenarios for Research in Geometry Learning. The suggestions are of great importance to my dissertation research.

And the suggestion of the learning environment (6) contributed richly to the proposal that had already been timidly elaborated.

Thanks again for your generous attention.

Sincerely, Carla Jordana Rønnau,

Master's Student in Teaching Exact Sciences - FURG

[Texto das mensagens anteriores oculto]