

Universidade Federal do Rio Grande  
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional

UM ESTUDO SOBRE A INFLUÊNCIA DO REGIME TRANSIENTE NA FORMAÇÃO  
DE ESTRUTURAS DE FLUXO COM BASE NA TEORIA CONSTRUCTAL

Thiago Alves Teixeira

Dissertação de Mestrado

Rio Grande - RS  
2023

Thiago Alves Teixeira

**“UM ESTUDO SOBRE A INFLUÊNCIA DO REGIME TRANSIENTE NA FORMAÇÃO DE ESTRUTURAS DE FLUXO COM BASE NA TEORIA CONSTRUCTAL”**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande - FURG, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área de concentração: Modelagem Computacional.

Aprovada em:

**BANCA EXAMINADORA**



Documento assinado digitalmente  
**JEFERSON AVILA SOUZA**  
Data: 29/12/2023 10:21:11-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Jeferson Avila Souza (Orientador – FURG)

**Emanuel da  
Silva Diaz  
Estrada:0007  
9780067**

Digitally signed by Emanuel da  
Silva Diaz Estrada:00079780067  
DN: CN=Emanuel da Silva Diaz  
Estrada:00079780067, OU=  
FURG - Universidade Federal do  
Rio Grande, O=ICPEdu, C=BR  
Date: 2024.01.03  
20:35:24  
-03'00'

---

Prof. Dr. Emanuel da Silva Diaz Estrada (Coorientador- FURG)



Documento assinado digitalmente  
**ELIZALDO DOMINGUES DOS SANTOS**  
Data: 29/12/2023 16:51:23-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Elizaldo Domingues dos Santos (FURG)



Documento assinado digitalmente  
**GILL VELLEDA GONZALES**  
Data: 29/12/2023 13:22:47-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Gill Velleda Gonzales (IFSul)

---

Prof. Dr. Marcelo Risso Errera (UFPR)

Rio Grande - RS  
2023

## Ficha Catalográfica

T266e Teixeira, Thiago Alves.

Um estudo sobre a influência do regime transiente na formação de estruturas de fluxo com base na teoria constructal / Thiago Alves Teixeira. – 2023.

63 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Rio Grande/RS, 2023.

Orientador: Dr. Jeferson Avila Souza.

Coorientador: Dr. Emanuel da Silva Diaz Estrada.

1. Teoria constructal 2. Caminhos condutivos 3. Regime transiente  
I. Souza, Jeferson Avila II. Estrada, Emanuel da Silva Diaz III. Título.

CDU 004

Catálogo na Fonte: Bibliotecária Vanessa Ceiglinski Nunes CRB 10/2174

Dedico à minha mãe.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus por me dar a oportunidade de realizar este trabalho e por me sustentar nos momentos de dificuldade. Agradeço à minha família, em especial à minha falecida mãe, que sempre me incentivou a estudar e a buscar conhecimento. Dedico esta dissertação à sua memória.

Também agradeço aos meus orientadores, Prof. Jeferson Avila Souza e Prof. Emanuel da Silva Diaz Estrada, pela confiança, orientação, paciência e amizade ao longo de todo o processo de pesquisa e escrita desta dissertação.

Não posso deixar de agradecer aos membros da banca pelas contribuições e sugestões que enriqueceram o meu trabalho.

Agradeço ainda ao apoio financeiro da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e do CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) que financiaram essa pesquisa, me concedendo uma bolsa de estudo.

Por último, agradeço a todos os meus colegas e amigos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

## RESUMO

Este estudo busca compreender melhor o fenômeno da evolução das estruturas de fluxo dos sistemas naturais, com base na Teoria Constructal. Na literatura científica, vários pesquisadores desenvolveram algoritmos/heurísticas para construir estruturas de fluxo de sistemas naturais, no entanto, até o momento, nenhum deles considerou o regime transiente no processo de evolução/construção das formas das estruturas de fluxo. Todos os algoritmos existentes produzem estruturas em regime permanente, quando o sistema já está em equilíbrio, sem levar em consideração as perturbações que ocorrem no estado transiente (ou no tempo). Neste estudo, um novo algoritmo/heurística que considera o regime transiente foi desenvolvido para construir estruturas para caminhos condutivos, a fim de analisar se há diferenças entre as estruturas construídas considerando o tempo no processo evolutivo, e as que não consideram, como é comum na literatura. A análise dos resultados mostrou a relevância do regime transiente na formação/construção das estruturas de fluxo. Do ponto de vista fenomenológico, uma maior vascularização foi observada quando o regime transiente é considerado, enquanto, do ponto de vista da otimização, as estruturas construídas em regime permanente se mostraram mais eficientes, a priori. Este estudo destaca a importância da consideração do tempo quando se quer estudar os sistemas de um ponto de vista fenomenológico, e buscar por estruturas altamente vascularizadas. Além disso, também indica a necessidade de pesquisas futuras para explorar essa questão mais profundamente e avaliar o comportamento evolutivo das configurações das estruturas dos sistemas de fluxo para diferentes relações entre as suas diversas propriedades físicas e estruturais.

**Palavras-chave:** Teoria Constructal, Caminhos condutivos, Regime transiente.

## ABSTRACT

This study seeks to better understand the phenomenon of the evolution of flow structures in natural systems based on Constructal Theory. In the scientific literature, several researchers have developed algorithms/heuristics for constructing flow structures in natural systems. However, so far, none of them have considered the transient regime in the evolution/construction process of flow structures. All existing algorithms produce structures in a steady-state when the system is already in equilibrium, without taking into account the disturbances that occur in the transient state (or over time). In this study, a new algorithm/heuristic that considers the transient regime was developed to construct structures for conductive pathways, in order to analyze whether there are differences between structures built considering time in the evolutionary process and those that do not, as is common in the literature. The analysis of the results showed the relevance of the transient regime in the construction of flow structures. From a phenomenological perspective, increased vascularization was observed when the transient regime is considered, while from an optimization standpoint, structures built in a steady-state were shown to be more efficient a priori. This study highlights the importance of considering time when studying systems from a phenomenological perspective and seeking highly vascularized structures. Furthermore, it also indicates the need for future research to explore this issue more deeply and assess the evolutionary behavior of flow system structure configurations for different relationships between their various physical and structural properties.

**Keywords:** Constructal Theory, Conductive pathways, Transient regime.

# SUMÁRIO

|                                                              |           |
|--------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1 Introdução .....</b>                                    | <b>1</b>  |
| 1.1 Problema e Motivação.....                                | 2         |
| 1.2 Objetivos.....                                           | 5         |
| Organização da Dissertação.....                              | 5         |
| <b>2 Revisão da Literatura .....</b>                         | <b>6</b>  |
| 2.1 Teoria Constructal .....                                 | 6         |
| 2.2 Estudos Relacionados.....                                | 17        |
| 2.3 Contribuição ao Estado da Arte .....                     | 26        |
| <b>3 Detalhamento do Problema.....</b>                       | <b>27</b> |
| 3.1 Problema dos Caminhos Condutivos.....                    | 27        |
| 3.2 Modelo Físico-Matemático .....                           | 28        |
| 3.3 Algoritmo de Construção.....                             | 33        |
| 3.4 Considerações Finais.....                                | 37        |
| <b>4 Implementação Computacional .....</b>                   | <b>38</b> |
| 4.1 Implementação do Modelo Computacional .....              | 38        |
| 4.2 Verificação e Independência do Modelo Computacional..... | 39        |
| 4.3 Considerações Finais.....                                | 41        |
| <b>5 Resultados e Discussões .....</b>                       | <b>43</b> |
| 5.1 Considerações Metodológicas.....                         | 43        |
| 5.2 Apresentação e Discussão dos Resultados.....             | 45        |
| 5.3 Considerações Finais.....                                | 56        |
| <b>6 Conclusões .....</b>                                    | <b>58</b> |
| <b>Referências .....</b>                                     | <b>60</b> |

## NOMENCLATURAS

|                  |                                                           |         |
|------------------|-----------------------------------------------------------|---------|
| $A$              | Área                                                      | $m^2$   |
| $b$              | Dimensão do dissipador                                    | $m$     |
| $c$              | Calor específico                                          | $J/kgK$ |
| $d$              | Dimensões de largura e altura de um Constructal Elementar | $m$     |
| $D$              | Dimensões de largura e altura do volume                   | $m$     |
| $F$              | Tempo adimensional, Número de Fourier                     | —       |
| $\Delta F$       | Intervalo de tempo adimensional                           | —       |
| $\Delta F^\circ$ | Intervalo de tempo de construção adimensional             | —       |
| $k$              | Condutividade térmica                                     | $W/mK$  |
| $n$              | Divisão dos elementos de área em volumes finitos          | —       |
| $N$              | Divisão do domínio computacional em volumes finitos       | —       |
| $q$              | Fluxo de calor                                            | $W/m^2$ |
| $Q$              | Geração volumétrica interna de calor                      | $W/m^3$ |
| $i$              | Quantidade de Constructais Elementares adicionados        | —       |
| $r$              | Resistencia térmica                                       | $K/W$   |
| $R$              | Resolução                                                 | —       |
| $t$              | Tempo                                                     | $s$     |
| $T$              | Temperatura                                               | $K$     |
| $V$              | Volume                                                    | $m^3$   |
| $W$              | Espessura do volume                                       | $m$     |
| $x$              | Coordenada Cartesiana no eixo das abscissas               | $m$     |
| $y$              | Coordenada Cartesiana no eixo das ordenadas               | $m$     |

### Símbolos gregos

|          |                                |          |
|----------|--------------------------------|----------|
| $\alpha$ | Difusividade térmica           | $m^2/s$  |
| $\eta$   | Relação entre as difusividades | —        |
| $\rho$   | Massa específica               | $kg/m^3$ |
| $\tau$   | Relação entre os tempos        | —        |
| $\phi$   | Relação entre as áreas         | —        |

## Índices

|     |                                  |   |
|-----|----------------------------------|---|
| ~   | Valor adimensional               | — |
| P   | Valores do presente estudo       | — |
| L   | Valores de outros estudos        | — |
| l   | Baixa condutividade — <i>low</i> | — |
| h   | Alta condutividade — <i>high</i> | — |
| MAX | Valor máximo                     | — |
| MED | Valor médio                      | — |

# 1 INTRODUÇÃO

Ao observar com atenção a natureza, é possível constatar a existência de um típico padrão de ramificação sendo compartilhado por diferentes sistemas. Esse padrão se manifesta em estruturas com dimensões que vão desde às grandes circulações planetárias, até às menores escalas. Do mesmo modo que se manifesta em sistemas considerados animados, tanto quanto em sistemas considerados inanimados (i.e., biológicos e não biológicos). Exemplos desses padrões de ramificação podem ser observados em sistemas geofísicos, como nas correntes oceânicas, nas descargas elétricas atmosféricas, nas bacias hidrográficas, em diversos cristais dendríticos, etc. Assim como, também podem ser observados em sistemas biológicos, como nas nervuras de uma folha, nas copas e nas raízes de uma árvore, nos sistemas cardiovascular, respiratório e nervoso dos animais, e em uma grande diversidade de outros sistemas que possam ser imaginados (Bejan 1996, 1997, 2020).

Em meados da década de 1990, o professor Adrian Bejan, da *Duke University*, nos Estados Unidos, propôs a Teoria Constructal buscando explicar o surgimento desses padrões na natureza. A proposta de Bejan, trouxe luz a uma nova perspectiva determinística para a compreensão da evolução dos sistemas naturais, que ia de encontro ao pensamento científico e filosófico vigente. Em Teoria Constructal, considera-se que as configurações das estruturas que vemos na natureza são o resultado de um fenômeno da física, não da aleatoriedade, visto que o entendimento é que os sistemas naturais evoluem seguindo um princípio universal da física (Bejan 1996, 1997, 2020).

Um exemplo simples que ilustra bem esse conceito é a formação das descargas elétricas atmosféricas, ou em termos mais simples, dos raios. Um raio sempre inicia com uma configuração simples, um único ramo, e à medida que se propaga ao longo da atmosfera desenvolve ramos adjacentes — como as raízes ou galhos de uma árvore — se ramificando e aumentando sua complexidade. Com base na Teoria Constructal, é possível compreender que esse comportamento ocorre porque as descargas elétricas de um raio se propagam buscando os “caminhos mais fáceis”, que são os caminhos que facilitam sua propagação

evitando/desviando das resistências impostas pela atmosfera. Esse comportamento, tende a produzir naturalmente, espontaneamente, estruturas que facilitam os acessos dos raios com “configurações ideais” que aumentam os acessos de suas descargas elétricas e as mantêm se propagando no tempo (Bejan 1996, 1997, 2020; Ravok e Uman 2007).

Embora esse conceito possa parecer simples, e até mesmo óbvio, compreender a evolução dos sistemas naturais de maneira determinística trouxe diversas possibilidades, e também implicações significativas. A Teoria Constructal tem um caráter interdisciplinar, e por conta disso propiciou aplicações nas ciências naturais e médicas, nas engenharias, nas ciências sociais e econômicas, e em diversas outras áreas do conhecimento. Assim como, também tem se mostrado ser uma ponte com potencial de unir o animado ao inanimado, a biologia à física (Bejan 2020; Chen 2012).

Em diversos estudos sobre a temática presentes na literatura científica, os pesquisadores têm usado a capacidade preditiva da Teoria Constructal para buscar sistemas de engenharia mais eficientes e, principalmente, para compreender melhor e aprofundar o conhecimento sobre os diferentes processos de formação das muitas estruturas observadas na natureza (veja e.g., Chen 2012). Este trabalho está relacionado e se concentra exatamente nesses dois pontos principais, buscando estruturas otimizadas para sistemas termodinâmicos e uma compreensão mais profunda do processo de formação/evolução dessas estruturas de uma perspectiva puramente fenomenológica.

## **1.1 PROBLEMA E MOTIVAÇÃO**

Em 1998, os professores Marcelo R Errera e Adrian Bejan publicaram um estudo que replicou os padrões observados em bacias hidrográficas. Neste estudo, os pesquisadores demonstraram que os padrões ramificados/dendríticos formados por canais de baixa resistência em bacias de drenagem fluvial são reproduzíveis. Em outras palavras, podem ser deduzidos como base em um princípio de minimização das resistências impostas, facilitando o acesso dos fluxos d’água que escoam formando as estruturas de drenagem de baixa resistência, conforme previsto pela Teoria Constructal (Errera e Bejan 1998).

O modelo desenvolvido nesse estudo consiste em uma área porosa, homogênea e quadrada, como um tamanho fixo, cujo fluxo do fluido é descrito pela Lei de Darcy. A área é subdividida em diversos quadrados de mesmo tamanho, formando uma grade de elementos/células de área com uma permeabilidade inicial, uniforme. Um pequeno sumidouro é posicionado em uma de suas extremidades, causando uma diferença de pressão que provoca em um escoamento d'água em sua direção. Para formar/construir os canais de baixa resistência que facilitam e direcionam os escoamentos d'água que vão ao encontro do sumidouro, os pesquisadores aplicaram um algoritmo de decisão, com características que lembram um algoritmo guloso, fundamentado nos princípios da Teoria Constructal (Cormen et al. 2009; Errera e Bejan 1998).

Esse “algoritmo constructal” segue passos simples que se repetem até que a construção dos canais de baixa resistência esteja completa. A sequência lógica desses passos pode ser resumida em: resolver o sistema físico em regime permanente; calcular os gradientes de pressão dos elementos de área adjacentes ao sumidouro e a outros elementos de baixa resistência já adicionados; identificar o elemento mais erodível do domínio; aumentar a permeabilidade do elemento mais erodível, tornando esse elemento um novo elemento de baixa resistência; retornar ao primeiro passo, repetindo o processo continuamente até que os canais de baixa resistência estejam totalmente construídos (Errera e Bejan 1998).

Através desse algoritmo, foram obtidas estruturas ramificadas que lembram a ramificação dos galhos e das raízes das árvores, ou como ilustram os pesquisadores, lembram os padrões dendríticos comumente observados em sedimentos, como nos sedimentos formados pelo pó de café na superfície côncava de uma xícara. Segundo os pesquisadores, esse resultado corrobora a Teoria Constructal e, acima de tudo, reforça sua perspectiva determinística da natureza (Errera e Bejan 1998).

Xu et al. (2007), publicaram um estudo que empregou uma metodologia semelhante à desenvolvida por Errera e Bejan (1998). No entanto, neste trabalho, os pesquisadores empregaram um algoritmo para construir caminhos condutivos, que é um modelo teórico fundamental comumente empregado no contexto de resfriamento de encapsulamentos eletrônicos miniaturizados. O modelo dos caminhos condutivos é problema de otimização

frequentemente encontrado na literatura relacionada à Teoria Constructal, o qual será abordado com mais detalhes ao longo deste trabalho. Do mesmo modo que no estudo de Xu et al. (2007), as estruturas obtidas para os caminhos condutivos também apresentaram configurações com típicos padrões de ramificação, quando aplicado o conceito base de maximização do acesso aos fluxos de calor, ou, de maneira equivalente, de minimização das resistências impostas aos fluxos de calor.

Vianna et al. (2018) também contribuíram para essa investigação, publicando um estudo semelhante aos anteriores. No entanto, neste caso, o algoritmo desenvolvido foi empregado na construção de cavidades isotérmicas. As cavidades isotérmicas representam a cavidade entre aletas de refrigeração — aletas são componentes comumente encontrados em dispositivos resfriadores, como radiadores. Os resultados obtidos foram semelhantes aos resultados dos estudos anteriores, uma vez que nesse trabalho as estruturas construídas igualmente apresentaram padrões tipicamente ramificados.

Na literatura científica, ainda existem uma variedade de outros estudos que empregam modelos semelhantes aos mencionados anteriormente, utilizando diferentes algoritmos para construir estruturas de fluxos, todos fundamentados no conceito de minimização da resistência impostas aos fluxos dos sistemas estudados. Em todos os casos, as estruturas resultantes também apresentaram configurações com padrões de ramificação comuns as estruturas encontradas na natureza (veja, Chen 2012).

O estudo desenvolvido nesta dissertação contribui para a literatura científica também se propondo a investigar essa questão. Assim como nos estudos mencionados anteriormente, neste estudo também será aplicado um algoritmo para construir estruturas de fluxo em um sistema físico, que neste caso, em específico, é um sistema que envolve o fenômeno de difusão térmica. No entanto, o diferencial deste estudo é a inclusão do tempo no algoritmo de construção, com o objetivo de avaliar as possíveis diferenças entre as estruturas construídas em um modelo que considera o regime transiente e aquelas construídas ao considerar apenas o regime permanente, como nos estudos citados anteriormente. Além disso, também é importante destacar que este estudo busca compreender as implicações dessas diferenças tanto ponto de vista da aplicação em sistemas de engenharia quanto,

principalmente, do ponto de vista do fenômeno relacionado a formação/geração do design das estruturas de fluxo dos sistemas observados na natureza.

## **1.2 OBJETIVOS**

O objetivo desta dissertação é desenvolver uma nova heurística para construir estruturas que facilitam o acesso dos fluxos de um sistema físico, levando em consideração o tempo no processo de construção/evolução. Em outras palavras, trata-se de um algoritmo que usa essa heurística para reduzir a resistência térmica local em um problema de difusão de calor, favorecendo o fluxo de calor. O algoritmo será capaz de gerar estruturas com padrões de organização, para diversos passos de integração no regime transiente, que evoluirão ou não para os padrões esperados, como os padrões naturais de ramificação.

Conforme já mencionado, este estudo foca em um problema de difusão do calor, que será obtido pelo modelo teórico dos caminhos condutivos. Além disso, é importante ressaltar que o modelo desenvolvido é semelhante aos modelos dos estudos citados anteriormente. Assim como, também tem semelhanças com outros algoritmos e heurísticas desenvolvidos por diversos outros pesquisadores na literatura científica, que serão apresentados e melhor analisados ao longo deste trabalho.

É importante reiterar que, o objetivo do desenvolvimento dessa nova heurística é investigar as diferenças entre as estruturas de fluxo construídas em regime transiente (considerando o tempo no modelo físico-matemático) e aquelas construídas somente considerando o regime permanente, com o intuito de avaliar as implicações dessas diferenças.

## **ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO**

Esta dissertação está dividida em seis seções principais, conforme o seu desenvolvimento. Esta primeira seção ofereceu uma breve introdução à temática da pesquisa e aos seus objetivos, discutindo os principais motivos que levaram à sua realização. Nas demais seções são apresentados na sequência: uma revisão da literatura sobre o tema, o detalhamento do trabalho, a implementação computacional do modelo estudado, os resultados obtidos e as respectivas discussões, e as conclusões sobre este estudo.

## **2 REVISÃO DA LITERATURA**

Nesta segunda seção, será apresentada uma revisão da literatura abordando os principais conceitos e fundamentos teóricos para a presente dissertação, bem como os trabalhos mais relevantes da literatura científica. É importante destacar que, não é pretendido aqui fazer uma revisão completa e minuciosa sobre todas as nuances relacionadas a temática deste trabalho. O principal intuito desta seção é situar a presente dissertação no contexto da literatura, de modo a esclarecer e destacar suas contribuições e diferencial.

Em vista disso, a seção está organizada em três subseções principais. A Seção 2.1 revisa a história, os conceitos e fundamentos mais importantes da Teoria Constructal, enquanto a Seção 2.2 expõe e discute os principais estudos relacionados a presente dissertação, com o propósito de dar suporte a Seção 2.3, que conclui apresentando e esclarecendo melhor a contribuição deste trabalho ao estado da arte, em detrimento a Seção 1.

### **2.1 TEORIA CONSTRUCTAL**

Não é errado afirmar que a história da Teoria Constructal nasceu a partir de uma simples observação prática. Como já foi comentado, ao observar as diversas estruturas presentes na natureza, é fácil constatar a existência de diferentes padrões de organização em suas configurações. Especialmente, de um típico padrão de ramificação, muitas vezes chamado na literatura científica de padrão dendrítico ou de padrão vascular. Através dos exemplos mostrados na Figura 2.1, é possível perceber com ainda mais clareza a onipresença desse padrão em diferentes sistemas. O que traz a conclusão, de certo modo, que mesmo sendo tão distintos, muitos dos sistemas que são observados na natureza apresentam uma certa semelhança nas configurações de suas estruturas devido à existência de um aparente “fenômeno de ramificação” (Bejan 2020).

Em 1995, em uma conferência na França, o prêmio Nobel de química, professor Ilya Prigogine discutia sobre a possível origem desses padrões de ramificação observados na natureza. Em sua argumentação, Prigogine defendeu a tese de que o surgimento dessas

configurações em diferentes estruturas é, na verdade, o resultado de um fenômeno totalmente aleatório e imprevisível, e que as semelhanças observadas são apenas meras coincidências. Em discordância a tese levantada por Prigogine, Bejan se viu conjecturando a hipótese de que talvez, pudesse haver algum princípio físico subjacente responsável por esse fenômeno (Lage et al. 2018).

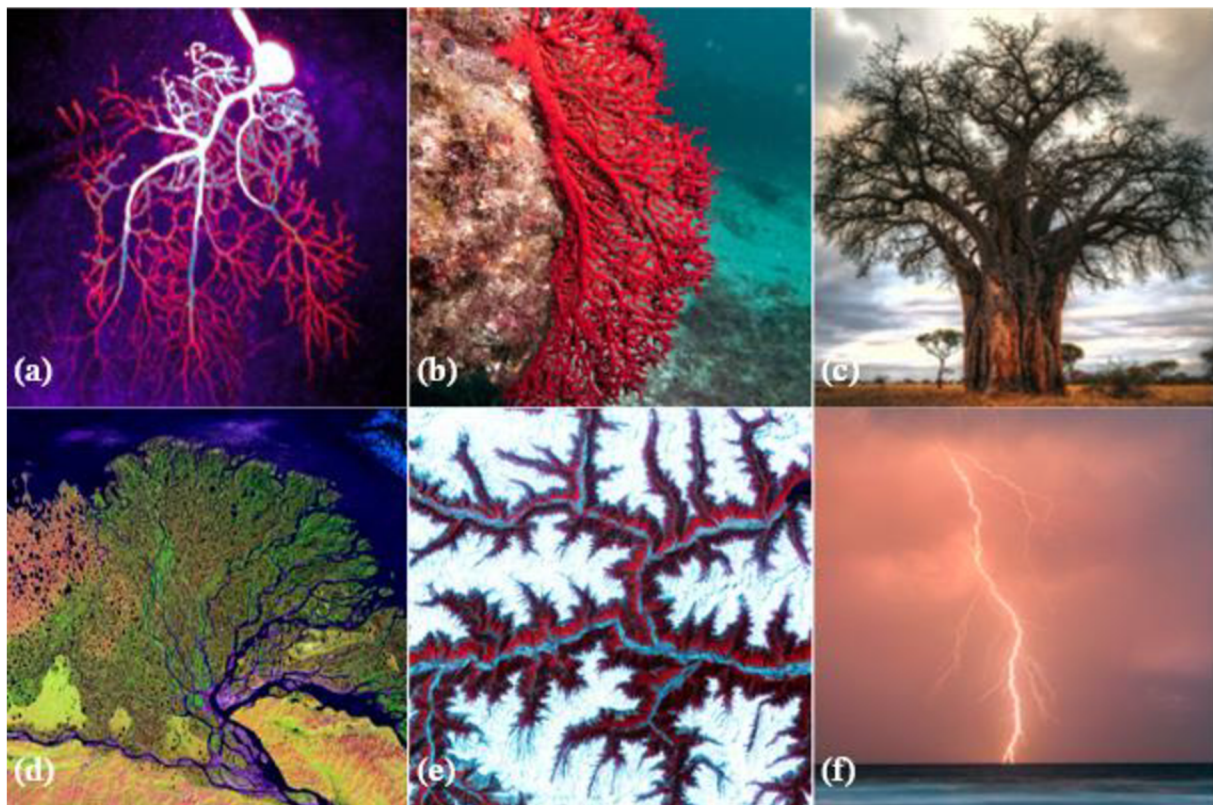


**Figura 2.1.** Na natureza existem padrões de ramificação que podem ser claramente observados em (a) células, (b) animais, (c) plantas, e em muitos outros organismos. Assim como, também podem ser observados em fenômenos geofísicos, com na formação de uma (d) bacia hidrográfica ou na formação da (e) cordilheira de uma montanha, ou ainda, no fenômeno de propagação de uma (f) descarga elétrica na atmosfera, por exemplo (Bejan 2020).<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Compilado e adaptado pelo Autor.

Créditos das imagens para:

(a) Dana Simmons, Ph.D., neurocientista, <https://www.dana-simmons.com>;

(b) John Turnbull, fotógrafo, <https://www.marineexplorer.org>;

(c) Anne Mckinnell, fotógrafa, <https://annemckinnell.com>;

(d) Satélite Landsat 7, jul. 2000, <https://earthobservatory.nasa.gov>;

(e) Satélite Aster, abr. 2001, <https://earthobservatory.nasa.gov>;

(f) Jason Weingart, fotógrafo, <https://www.jasonrweingart.com>.

Acessos em 2023.

No ano seguinte, ao trabalhar nessa hipótese, Bejan publicou um primeiro estudo onde investiga os padrões formados pelos cruzamentos das ruas e avenidas de uma cidade, semelhantes aos mostrados na Figura 2.2. Neste estudo, Bejan percebeu que a mobilidade urbana, de um modo geral, tem duas velocidades: uma lenta, como a velocidade do caminhar dos pedestres; e uma rápida, como a dos veículos. Esta percepção trouxe à Bejan a conclusão de que a configuração ramificada — formada pelas distribuições, disposições, dimensões e irregularidades — das vias de uma cidade, se dá por um longo processo de evolução no tempo que considera essas duas velocidades em simultâneo, e resulta em uma velocidade média ótima para o deslocamento urbano (Bejan 1996).



**Figura 2.2.** Mapas urbanos das cidades de (a) Barcelona, na Espanha; (b) Belfast, na Irlanda do Norte; e (c) Nova Iorque, nos Estados Unidos.<sup>2</sup>

O modelo desenvolvido neste estudo simula de maneira simplificada o deslocamento urbano, dentro de uma área de tamanho finito que representa uma cidade. Nessa simulação, todos os moradores situados na cidade (i.e., dentro da área) devem se deslocar do seu ponto de residência (um ponto qualquer situado na área, ou em sua extremidade) até outro ponto específico pré-definido, aleatoriamente. Um método de otimização matemática foi aplicado para construir as vias de deslocamento para os pedestres e para os veículos da cidade. A construção dessas vias começou com uma única forma retangular simples, dita elementar, que foi se tornando mais complexa com o tempo, gerando uma

---

<sup>2</sup>Compilado e adaptado pelo Autor.

Créditos das imagens para Michael Tompsett, <https://michael-tompsett.pixels.com>.

Acesso em 2023.

configuração visivelmente ramificada (e muito semelhante a uma árvore) que se distribui ao longo de toda a área, conforme mostra a Figura 2.3 (Bejan 1996).

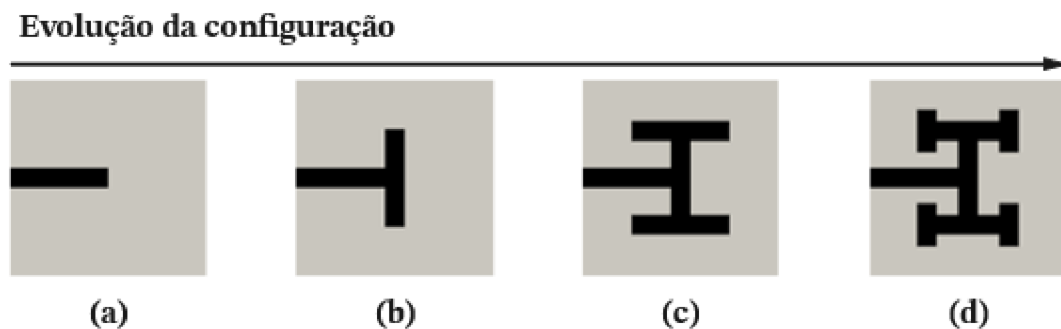


**Figura 2.3.** Evolução da estrutura obtida por Bejan, em 1996, da (a) forma elementar, até as demais formas chamadas, (b) primeira construção e (c) segunda construção, as quais evoluem até uma (d) forma cuja a configuração tende a se ramificar cada vez mais (Bejan 1996, 1997).

A obtenção dessa configuração mostrou que os fluxos de pessoas e veículos desse sistema de organização social tende a evoluir sua estrutura naturalmente, espontaneamente, em um padrão de ramificação sempre que há maximização dos seus acessos. Como esse comportamento pode ser observado em diversos outros sistemas naturais, Bejan concluiu que esse fenômeno de ramificação pode ser compreendido como sendo um fenômeno físico, determinístico, ao invés de aleatório ou imprevisível. Usando esse resultado como base, Bejan propôs uma nova visão determinística para a evolução das estruturas de fluxos presentes na natureza, intitulada de “Teoria Constructal” (Bejan 1996).

A Teoria Constructal é uma nova teoria universal da física. É o entendimento de que o fenômeno responsável pela auto organização das estruturas de fluxos presentes nos sistemas naturais pode ser compreendido como sendo um fenômeno da física, regido por um princípio físico (Bejan 2020).

O termo “constructal” é um neologismo cunhado por Bejan que tem origem do verbo latino “construere”, que significa “construir”. A concepção desse termo foi inspirada no termo “fractal” cunhado em 1975 por Benoît B Mandelbrot, matemático francês de origem judaico-polonesa, pioneiro do desenvolvimento da geometria fractal. O termo fractal

também tem sua origem advinda do latim, no entanto do verbo “frangere” que significa literalmente “fracionar” (Bejan 1996; Mandelbrot 1982).

É interessante salientar que apesar de ambas, a Teoria Constructal e a geometria fractal, tratarem de um processo de “geração geométrica” que vai desde uma pequena forma até uma complexa configuração ramificada, ou até uma configuração que se divide em partes iguais, às duas, a priori, nada tem a ver uma com a outra. A geometria fractal é um ramo da matemática que estuda os fractais — objetos geométricos não clássicos que podem, ou não, existirem na natureza — através de uma lógica matemática descritiva. Não há um princípio físico subjacente em um fractal. Por outro lado, na Teoria Constructal essa “geração das geometrias” das estruturas naturais é entendida como sendo o resultado de um fenômeno físico, regido por um princípio físico (Bejan 1996).

Após propor a Teoria Constructal, Bejan continuou sua investigação ao realizar um novo estudo, publicado em 1997, em que essa visão determinística — de “maximização do acesso aos fluxos” de um sistema — foi aplicada em um problema fundamental de resfriamento de encapsulamentos eletrônicos miniaturizados, cujo modelo geral é muito semelhante ao modelo do estudo anterior (Bejan 1997).

Neste problema, chamado comumente na literatura científica de problema dos “caminhos condutivos” (em inglês, *conductive pathways*), é proposta uma alternativa as técnicas de resfriamento empregadas à encapsulamentos eletrônicos miniaturizados. Um caminho condutivo pode ser descrito como sendo um pequeno dissipador térmico construído de um material de alta condutividade que, quando inserido no interior de um encapsulamento eletrônico direciona o calor gerado em seu interior para fora. O intuito principal ao se estudar este problema é sempre buscar por uma configuração (i.e., geometria e dimensões) ótima para os caminhos condutivos, de modo a reduzir a temperatura interna dos encapsulamentos de maneira eficiente e com uma quantidade limitada pré-definida de material condutor (Bejan 1997).

Ao aplicar novamente um método de otimização matemática, porém para construir caminhos condutivos, Bejan obteve nesse estudo um resultado muito semelhante, ou

praticamente igual ao resultado do estudo anterior. As configurações ótimas encontradas para os caminhos condutivos foram as mesmas encontradas para os cruzamentos das ruas e avenidas das cidades, mostradas na Figura 2.3. Tendo esse resultado em mãos, Bejan propôs a “Lei Constructal”, o princípio físico subjacente a Teoria Constructal que busca descrever de maneira determinística a formação/evolução das estruturas dos sistemas naturais. Em outras palavras, busca descrever o fenômeno de auto organização que, possivelmente, ocorre na natureza (Bejan 1997).

A Lei Constructal é o princípio fundamental a partir do qual se deduzem fenômenos de auto organização — das configurações das estruturas dos fluxos — dos sistemas observados na natureza, e afirma que:

Para que um sistema de fluxo de tamanho finito (não infinitesimal, uma partícula ou subpartícula) persista no tempo (i.e., mantenha-se vivo), deve haver evolução com liberdade de modo a proporcionar um acesso mais fácil e maior a todos os seus fluxos (Bejan 1997, 2020).<sup>3</sup>

Os termos “fluxo” e “sistema de fluxo” têm amplos significados e seus conceitos são fundamentais para a compreensão da Lei Constructal, bem como para a compreensão da Teoria Constructal como um todo.

É bem difundido — não só em senso comum — que fluxos são quaisquer movimentos contínuos de algo que segue um curso. Os fluxos resultam dos estados de não-equilíbrio dos sistemas e se manifestam comumente em três naturezas distintas: matéria ou energia, ou também como informação. Nas Figuras 2.1, 2.2 e 2.3, são mostrados sistemas com fluxos de matéria, como fluxos d’água, de pessoas, etc., e também de energia como os fluxos elétricos. Enquanto, na Figura 2.4, é mostrado um exemplo de um fluxo de informação, uma rede de distribuição e informação ramificada/vascularizada formada pelos diversos cabos submarinos de fibra ótica espalhados no fundo do oceano para transmitir dados dos

---

<sup>3</sup>Tradução e adaptação do Autor. No original: *For a finite size flow system (not infinitesimal, one particle, or subparticle) to persist in time (to live) it must evolve with freedom such that it provides easier and greater access to what flows* (Bejan 2020).

sistemas de telecomunicações e internet em alta velocidade. Existem ainda, diversos outros exemplos de fluxos de informação que podem ser lembrados, como a própria Internet, ou como as Inteligências Artificiais baseadas em redes neurais, entre outros (Rocha et al. 2017).



**Figura 2.4.** Esquema mostrando parte dos cabos submarinos de fibra óptica que ligam a América do Sul e a América do Norte.<sup>4,5</sup>

Por sua vez, um sistema de fluxo é qualquer sistema que apresente um ou mais fluxos. É uma região de tamanho finito (não infinitesimal) isolada, ou não, que abriga o movimento de uma entidade em relação à outra. É um plano de fundo, descrito de acordo com a natureza dos fluxos que transporta, como e quanto transporta, e também de acordo com a disposição dos seus fluxos em seu fundo (Rocha et al. 2017).

Ao isolar conceitualmente, por exemplo, o sistema de organização social que ocorre em uma cidade estudado por Bejan em 1996, é possível compreender melhor os conceitos de fluxo e de sistema de fluxo. Nesta situação o algo que flui, o fluxo, são os pedestres e os veículos em suas distintas velocidades. E o sistema de fluxo, o plano de fundo, é a cidade propriamente dita, com sua configuração ramificada formada pelos cruzamentos das suas ruas e avenidas. Esse experimento mental, se aplica a quaisquer outros sistemas que possam ser imaginados, desde que esses sistemas estejam igualmente em um estado de não-equilíbrio, apresentando algum fluxo (Bejan 1996, 1997; Rocha et al. 2017).

---

<sup>4</sup>Referência em TeleGeography, <https://www2.telegeography.com>.

<sup>5</sup>Figura adaptada de Submarine Cable Map, <https://www.submarinecablemap.com>.  
Acessos em 2023.

Os sistemas de fluxos incluem todos os sistemas mostrados nas Figuras 2.1 a 2.4, e incluem muitas outras categorias de sistemas e subsistemas, animados ou inanimados, naturais ou artificiais, e também diferentes processos, dinâmicas, dispositivos e uma gama muito vasta de outros exemplos. Em contra partida, os fluxos podem ser correntes térmicas, elétricas, magnéticas, ou também escoamentos de fluidos, escoamentos de massa, ou fluxos de pessoas, de mercadorias, financeiro, etc (Rocha et al. 2017).

Um sistema de fluxo pode, ou não, apresentar um padrão de ramificação. As configurações ramificadas, como as mostradas nas Figuras 2.1 a 2.4, são definidas em Teoria Constructal no conceito intitulado “vascularização”. A vascularização é, de modo simplificado, a tendência que um sistema de fluxo tem de se organizar e de organizar os seus fluxos para chegar a uma estrutura vascular, ramificada, fracionada, dendrítica, etc. Uma configuração vascular consiste em um ou mais fluxos que, ligando-se cada um, a um ponto, área ou volume, originam uma estrutura com uma configuração que se assemelha em muito as raízes e galhos de uma árvore, por exemplo (Rocha et al. 2017).

Agora, quando nos referimos a “acesso mais fácil e maior” e a “persistência no tempo”, estamos falando, na verdade, de otimização, ou melhor, de “otimização global na presença de restrições e imperfeições locais”. Ou seja, dá tendência natural que os sistemas de fluxo têm de evoluir buscando um desempenho ótimo, que na prática, significa buscar por uma resistência térmica, elétrica ou a escoamentos mínima, ou ainda, uma geração de entropia mínima, uma velocidade mais rápida, um custo mínimo de transporte, uma taxa máxima de lucro, e assim por diante (Rocha et al. 2017).

É interessante salientar que, isso não significa que há uma estrutura final com uma configuração final ótima. Na verdade, isso significa que os sistemas de fluxo evoluem e adaptam suas estruturas de acordo com o estado que se encontram, desenvolvendo configurações que maximizam o acesso para os seus fluxos. Caso esse estado mude, os sistemas de fluxo mudam, pois a evolução é contínua e nunca para (Bejan 2020).

Embora organismos biológicos sejam considerados sistemas animados, e os fenômenos de organização social, fenômenos geofísicos, e os fluxos de informação, sejam considerados

inanimados (Figuras 2.1a–c, 2.2, 2.1d–f e 2.4, respectivamente), a evolução de ambos é descrita pela Lei Constructal. Rocha et al. (2017), entendem que o fato de haver esta semelhança e um princípio em comum entre essas distintas categorias de sistemas, infere em um novo conceito ao que é entendido como “vida”. Em Teoria Constructal, é considerado “vivo”, ou um “sistema vivo”, todo aquele sistema que tem duas características principais, universais. A primeira, flui, possui um ou mais fluxos estando constantemente em um estado de não-equilíbrio, e a segunda, adapta-se, evolui buscando se configurar de modo a “persistir no tempo”, ou “manter-se vivo”.

Além disso, também infere a existência de um possível “design” na natureza. Em outras palavras, infere que o fenômeno de auto organização e otimização das estruturas de fluxo é algo que vai muito além da ideia básica de “produção máxima de entropia” (i.e., aumento da complexidade de um sistema devido ao aumento dos seus microestados), visto que há uma direção estabelecida por um princípio físico que orienta a evolução de todos os sistemas presentes na natureza (Bejan 2016, 2020).

Não é difícil observar a presença de design na natureza, e também compreender o design como um fenômeno físico. Para isso, é necessário primeiro lembrar que a Termodinâmica descreve o comportamento de quaisquer sistemas termodinâmicos a partir de duas leis principais. A primeira lei, que define o princípio de conservação da energia que há em todos e quaisquer sistemas, e a segunda lei, que define o fato de que há sempre presença de irreversibilidades e geração de entropia nos sistemas — evidentemente, o fluxo de qualquer sistema flui, por si só, sempre de cima para baixo (Bejan 2020).

As leis da Termodinâmica trazem em si uma generalidade extrema. Em Termodinâmica, o “qualquer sistema” é uma caixa ou um objeto fictício sem forma, ou melhor, é um volume de controle sem uma configuração definida, é uma simples “caixa preta”. Às duas leis são afirmações globais sobre o equilíbrio ou desequilíbrio dos fluxos que fluem para dentro e para fora destas caixas pretas, e vice-versa. No entanto, a natureza não é feita de volumes sem forma ou estrutura, e sem configuração. Os sistemas naturais têm uma configuração bem definida, com um possível e aparente design. Assim como, também têm dimensões macroscópicas ou microscópicas (não-infinitesimais) com um tamanho mensurável, e são

reconhecíveis a partir de suas diversas outras características que vão além da configuração, como ritmo, aparência, comportamento, vibração, natureza, etc (Bejan 2020).

Bejan, formulou e propôs a Lei Constructal com o intuito de expandir a Termodinâmica considerando o design dos sistemas naturais. O entendimento principal é que todos os sistemas Termodinâmicos são sistemas de fluxo, e que todos têm configuração; quando não têm, então adquirem com o tempo. Para Bejan, a Lei Constructal complementa as duas leis da Termodinâmica, sendo uma “lei de geração da configuração dos fluxos”. A Figura 2.5 elucida isso um pouco melhor através de um esquema, como a Lei Constructal expande o conceito de sistema termodinâmico para o conceito de sistema de fluxo, ou melhor, para o conceito de “sistema de fluxo termodinâmico” (Bejan 2020).

A Teoria Constructal entende sistemas naturais como “motores termodinâmicos” que se organizam com o tempo buscando se tornarem cada vez mais eficientes. Na Figura 2.5, o fluxo de energia ou calor  $Q_E$ , em J, que entra no motor gera um trabalho  $W$  e uma energia  $Q_S$  “desperdiçada” que sai do motor, ambos em J. Um sistema termodinâmico (Figura 2.5a) não considera a configuração dos fluxos dentro desse motor, em contrapartida, um sistema de fluxo termodinâmico (Figura 2.5b) considera. A Lei Constructal define como a estrutura de escoamentos dos fluxos e concebida durante o processo de evolução da configuração das estruturas dos sistemas (Bejan 2016, 2020).

Em diversos estudos encontrados na literatura científica, os pesquisadores têm empregado esforços com o intuito de validar a Teoria Constructal e a sua relação direta com as leis da Termodinâmica. A Lei Constructal, sendo preditiva, pode ser testada experimentalmente, numericamente, e até mesmo matematicamente. De fato, sua aplicação foi bem-sucedida em prever as características de alguns sistemas naturais. Alguns exemplos relevantes são algumas relações alométricas e de dimensionamento dos animais, a configuração e as dimensões do sistema respiratório humano, e também as leis matemáticas que descrevem a formação das bacias hidrográficas (Bejan 2020; Chen 2012).<sup>6</sup>

---

<sup>6</sup>Alometria é um ramo da biologia que analisa as relações de escala entre atributos morfológicos, fisiológicos, ecológicos e comportamentais dos organismos em relação aos seus tamanhos (Gayon 2000).

Os resultados obtidos nesses estudos são alguns poucos exemplos que mostram que é factível considerar a Teoria Constructal como sendo uma teoria sólida, e que o design aparentemente se faz presente na natureza. Além disso, também mostra que a Teoria Constructal propicia diversas possibilidades, tanto em relação a sua vasta gama de aplicações na engenharia, biologia, medicina, física, sociologia, economia, etc, quanto em relação as diversas lacunas que ainda existem para serem investigadas, e novas descobertas que ainda existem para serem feitas (Bejan 2020; Chen 2012).

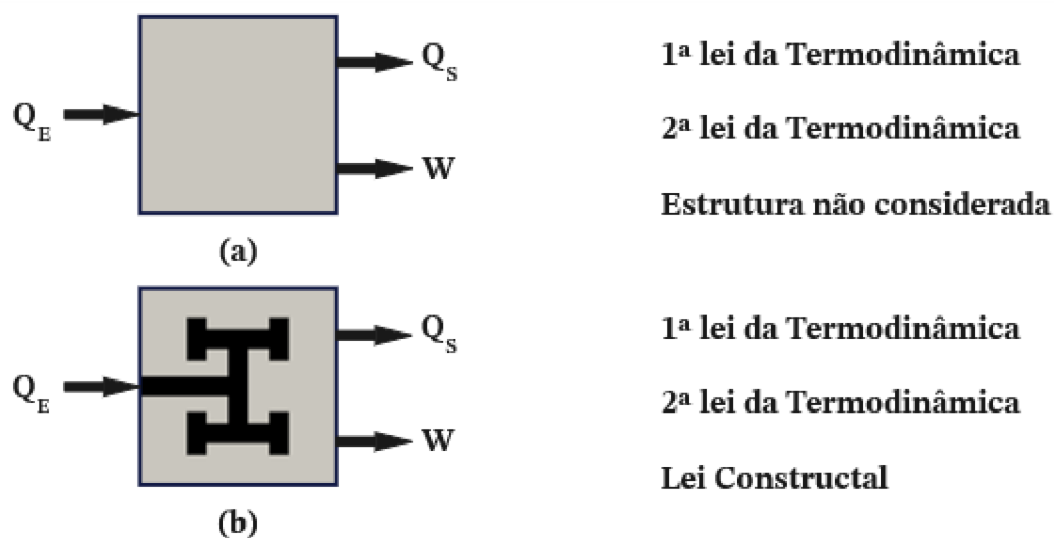


**Figura 2.5.** Interpretação de um sistema de fluxo a partir da Teoria Constructal: (a) sistema termodinâmico, não considera a configuração dos fluxos; (b) sistema de fluxo termodinâmico, considera a configuração dos fluxos (Bejan 2016, 2020).

No entanto, pode-se ir ainda mais longe e constatar que a universalidade do design é bem mais abrangente do que já foi comentado no texto acima. Ao revisar a história evolutiva da vida no planeta Terra e representá-la em um esquema, conforme é mostrado na Figura 2.6, percebe-se que a vascularização também está presente.

Basicamente, na Figura 2.6 é mostrada a Árvore Filogenética da Evolução da vida na Terra, que traduz a posição de cada organismo em relação aos seus antepassados. A árvore divide a vida em três grandes domínios (Eukarya, Bacteria e Archaea) que se ramificam em outros grupos com diferentes características celulares e metabólicas, de acordo com a história evolutiva desses grupos. Ao observar árvore a filogenética da vida na Terra, também é

possível notar uma configuração ramificada/vascularizada formada pela evolução dos organismos no tempo (Bejan 2020; Lecointre e Le Guyader 2006).

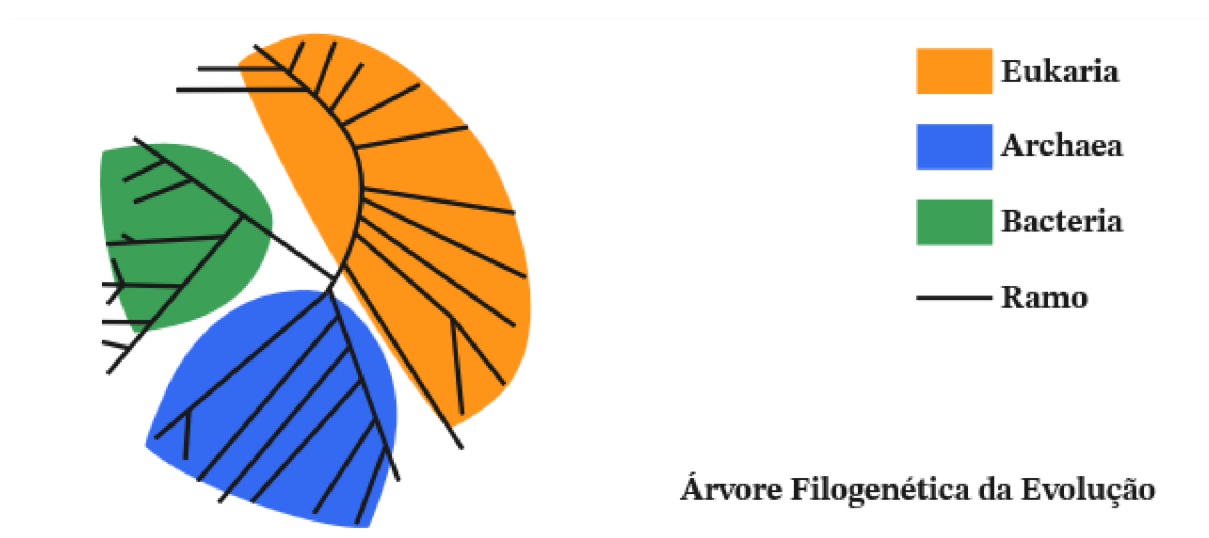


**Figura 2.6.** Árvore Filogenética da Evolução da vida na Terra.<sup>7</sup>

Portanto, a partir disso, é possível inferir que, possivelmente, essa nova visão determinística da natureza proposta por Bejan talvez esteja de fato presente na evolução do universo e, como consequência, na evolução de todos os sistemas que o pertencem (Bejan 2020).

## 2.2 ESTUDOS RELACIONADOS

É possível dizer que os dois primeiros estudos publicados por Bejan, em 1996 e 1997, serviram de base para o surgimento de diversos outros estudos. O modelo desenvolvido nesses dois trabalhos originou uma nova área de pesquisa cujo intuito principal é avaliar as configurações das estruturas de sistemas quaisquer, buscando sistemas de engenharia mais eficientes ou, muitas vezes, buscando compreender o fenômeno de vascularização que ocorre nos sistemas de fluxo (Bejan 1996, 1997; Chen 2012).

Bejan, generalizou o modelo utilizado para construir vias urbanas e para projetar caminhos condutivos eficientes em um modelo que ficou conhecido na literatura científica como modelo “volume-para-ponto”. O modelo volume-para-ponto não se limita somente a problemas de organização social ou a problemas de condução térmica, visto que pode ser

---

<sup>7</sup>Figura adaptada de iTOL: Interactive Tree Of Life, <https://itol.embl.de>. Acesso em 2023.

aplicado em diversos outros sistemas com outras naturezas de fluxo. De fato, é possível encontrar na literatura outros estudos que aplicam o modelo volume-para-ponto em problemas que envolvem fenômenos de convecção térmica, de escoamentos de fluídos, de escoamentos de fluídos em meios porosos, e também, que envolvem fluxos elétricos, magnéticos e diversos outros exemplos (Bejan 1996, 1997; Chen 2012).

O modelo volume-para-ponto se utiliza de duas das principais propriedades de um sistema de fluxo definidas pela Lei constructal — fluxo e resistência ao fluxo. É possível resumir esse modelo da seguinte maneira:

Considere um volume de tamanho finito (não-infinitesimal) que representa um sistema de fluxo qualquer. O volume é totalmente isolado, como um volume de controle, e é dividido em duas regiões constituídas de matéria, energia e/ou de informação. A primeira e maior região, resiste aos fluxos que entram e saem do domínio do volume, através de um ponto localizado em uma de suas extremidades. A segunda e menor região, de baixa resistência, facilita o acesso dos fluxos que entram e saem do domínio. Quais são as melhores formas e qual a melhor estrutura para a região de baixa resistência do volume? Ou melhor, qual é a configuração ideal para essa região, a que facilita ao máximo possível o acesso dos fluxos? Considerando que essa região tem um tamanho limitado (Bejan 1996, 1997).<sup>8</sup>

No entanto, uma maneira de compreender melhor o modelo volume-para-ponto é através de exemplos de aplicação. Na literatura científica há diversos estudos, alguns deles já citados anteriormente, que ilustram bem o modelo.

Portanto, antes de qualquer coisa, primeiro considere o esquema simplificado do modelo volume-para-ponto mostrado na Figura 2.7. Nesta, o esquema mostra um modelo-para-ponto bidimensional simplificado, em que a área ilustrada em cor cinza representa o volume que resiste aos fluxos, e a área ilustrada em cor preta representa a região do volume que facilita o acesso dos fluxos. Além disso, as arestas ilustradas em cor preta representam

---

<sup>8</sup>Tradução e adaptação do autor.

o fato de o volume ser isolado de maneira semelhante a um volume de controle, e a aresta ilustrada em cor vermelha representa o ponto de entrada e/ou saída para fluxos de matéria, energia ou informação que acessam o volume (Bejan 1996, 1997).

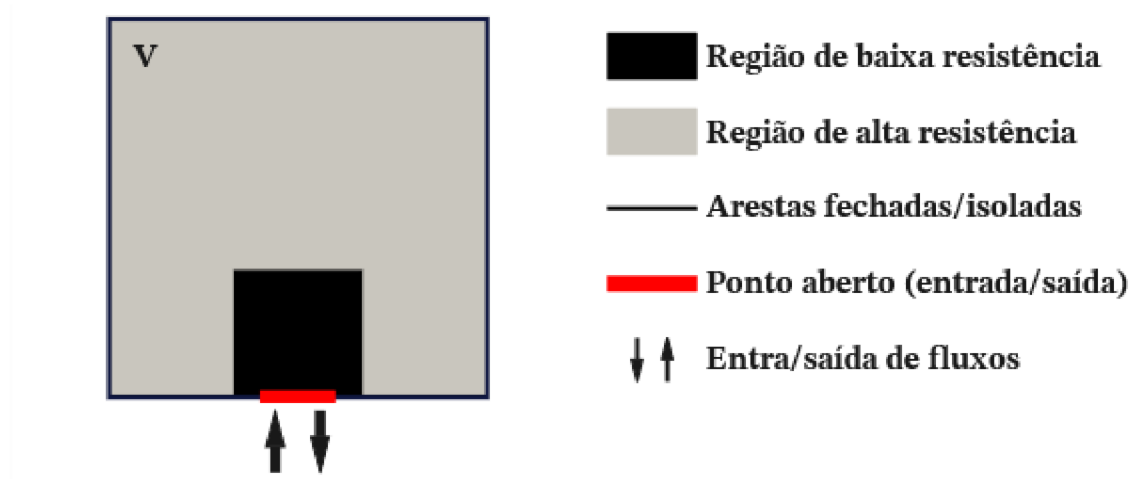


**Figura. 2.7.** Esquema do modelo volume-para-ponto, também chamado área-para-ponto em casos bidimensionais (Bejan 1996, 1997).

Ao observar o esquema da Figura 2.7 e pensar novamente no problema de organização social, pode-se considerar que o volume é a cidade que representa a resistência ao fluxo de pessoas e veículos que entram e saem por uma entrada em sua extremidade, e que as ruas e as avenidas são as estruturas que facilitam o acesso desse fluxo de pessoas e veículos. Neste caso a questão levantada é: quais as melhores dimensões e qual é a melhor distribuição para as vias dessa cidade? Agora, pensando no problema dos caminhos condutivos, o volume representa um encapsulamento eletrônico miniaturizado que é construído de um material de baixa condutividade térmica, enquanto o caminho condutivo é a estrutura que facilita o escoamento do calor gerado no interior do encapsulamento até um ponto em sua extremidade (até o dissipador). Do mesmo modo, a questão levantada é: qual é a melhor geometria para o caminho condutivo? (Bejan 1996, 1997).

Ainda é possível pensar em outros estudos, relacionados a outros problemas, além desses dois primeiros realizados por Bejan, em 1996 e 1997.

Um primeiro exemplo são os estudos sobre os problemas fundamentais de cavidades convectivas e isotérmicas, já comentados anteriormente na Seção 1.1. Relembrando, as

cavidades representam aletas de refrigeração — dispositivos utilizados para resfriar outros dispositivos quaisquer. Neste caso, o volume representa o dispositivo que se quer resfriar, e a estrutura que facilita o resfriamento do volume é uma cavidade construída no volume que, quando isotérmica tem temperatura constante, e quando convectiva tem um fluido refrigerante que troca calor com o volume. De modo análogo aos problemas anteriores, principalmente o problema de caminho condutivos, a questão aqui é: qual é a melhor geometria para as cavidades? (Biserni et al. 2004, 2007).

Finalmente, um último exemplo que pode ser citado são os estudos sobre escoamentos de fluídos em meios porosos, comumente aplicados para investigar a formação de bacias hidrográficas. Neste problema, também já comentado na Seção 1.1, o volume do modelo volume-para-ponto representa um material poroso, e a estrutura por onde escoar o fluxo d'água presente no volume representa um material de alta permeabilidade que forma um caminho de baixa resistência facilitando os escoamentos d'água até um sumidouro na extremidade do volume. Neste estudo, investiga-se as diferentes estruturas dendríticas formadas por esses canais de baixa resistência (Errera e Bejan 1998).

Como nesses estudos os pesquisadores buscam avaliar as configurações das formas das estruturas dos sistemas investigados. Na literatura, diferentes formas pré-definidas foram propostas e construídas. As abordagens mais comuns para obter formas otimizadas são métodos matemáticos, ou a modelagem computacional a partir da implementação de diferentes algoritmos como busca-exaustiva, algoritmos genéticos, evolutivos, ou algoritmo de recozimento simulado, autômatos celulares, redes neurais, e muitos outros algoritmos heurísticos ou meta-heurísticos (Chen 2012).

As primeiras formas obtidas por Bejan, em 1996 e 1997, passaram a ser referenciadas na literatura como letras de alfabeto. A forma elementar, a primeira construção e a segunda construção, mostradas na Figura 2.8, passaram a ser referidas através das letras I, T e H, respectivamente. Essas três primeiras formas básicas, foram aplicadas e avaliadas em diversos outros problemas, e também foram um ponto de partida para a proposição de outras formas mais complexas (Bejan 1996, 1997; Chen 2012; Biserni et al. 2004, 2007; Lorenzini et al. 2016, 2017).

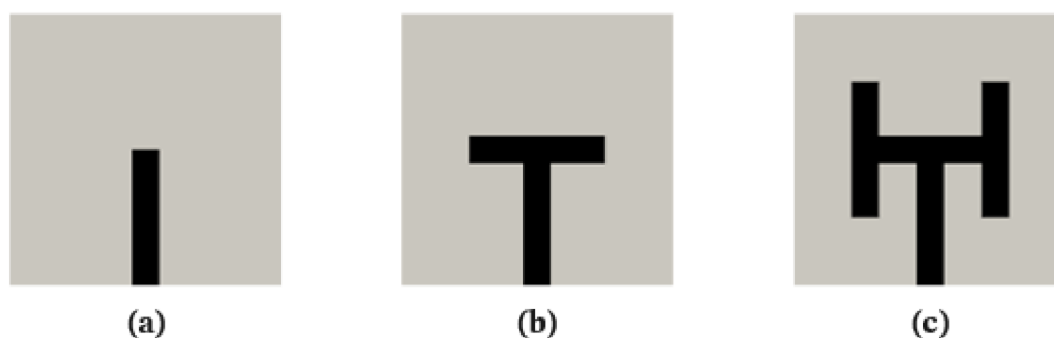


**Figura 2.8.** As formas mais elementares I, T e H (a–c, respectivamente) (Biserni et al. 2004, 2007; Lorenzini et al. 2016, 2017).

Alguns exemplos de estudos que aplicaram as formas I, T e H são os estudos sobre cavidades isotérmicas dos pesquisadores Biserni et al. (2004, 2007), que avaliaram as três formas, e os estudos dos pesquisadores Lorenzini et al. (2016, 2017), que avaliaram as formas I e T para o problema de caminhos condutivos. De modo resumido, os resultados desses estudos mostraram que a forma H é mais eficiente que a T, e que a forma T é mais eficiente que a I. A partir desses resultados, também é possível concluir que formas mais ramificadas são mais eficientes no que se refere a dissipação térmica.

Como já dito, as formas I, T e H, foram um ponto de partida para a proposição de outras formas. A partir dessas, outras formas referidas com outras letras foram avaliadas na literatura científica, em diferentes problemas. Alguns exemplos, são as formas Y, as variações do H e as formas X,  $\Phi$ ,  $\Psi$  e Y-T, mostrados na Figura 2.9 (veja os estudos dos pesquisadores Horbach et al. 2014; Hajmohammadi 2018; Lorenzini et al. 2013; Hajmohammadi et al. 2014; e, Lorenzini e Rocha 2009).

Os estudos sobre a investigação e avaliação de diferentes formas começaram a surgir na literatura científica por meados do início dos anos 2000. No entanto, antes disso, em meados do final da década 1990, muito se investigou também sobre a construção de estruturas com configurações em formas que lembram árvores (veja, e.g., os estudos dos pesquisadores Ledezma et al. 1997, Dan e Bejan 1998; Neagu e Bejan 1999). A otimização de estruturas arborescentes, também se deu através do modelo volume-para-ponto, porém

em conjunto com diferentes métodos matemáticos de otimização. A Figura 2.10 mostra três exemplos de estruturas arborescente que podem ser encontradas na literatura.

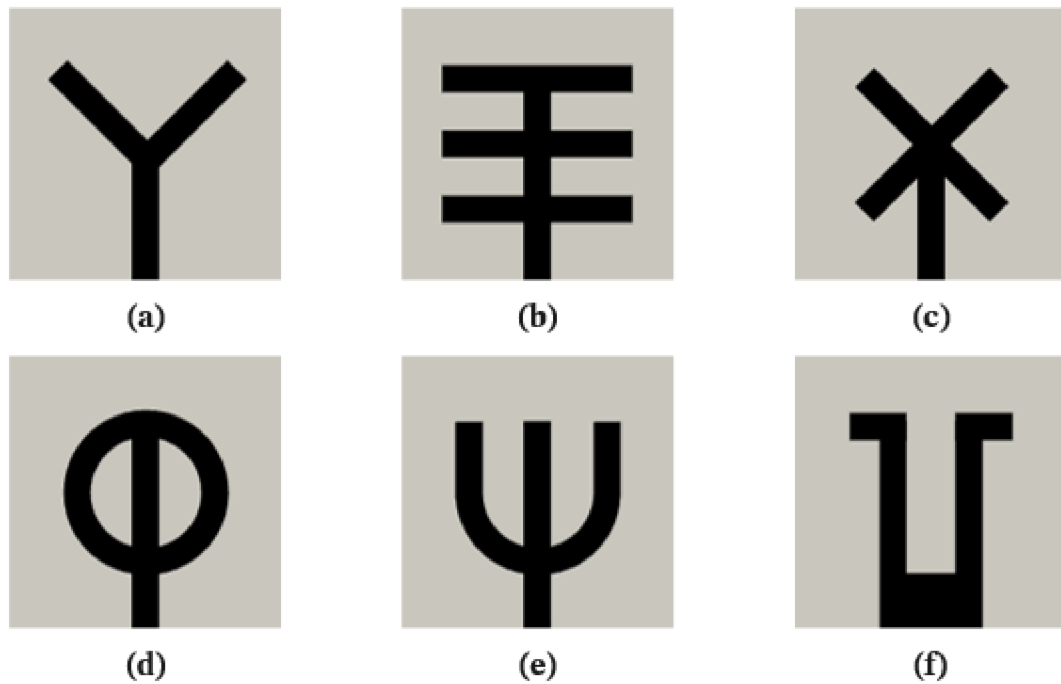


**Figura 2.9.** Alguns exemplos de configurações em forma de letras: Y, variação do H, X,  $\Phi$ ,  $\Psi$  e Y-T (a–f, respectivamente); desenvolvidas por (a) Horbach et al. (2014), (b) Hajmohammadi (2018), (c) Lorenzini et al. (2013), (d–e) Hajmohammadi et al. (2014) e (f) Lorenzini e Rocha (2009).

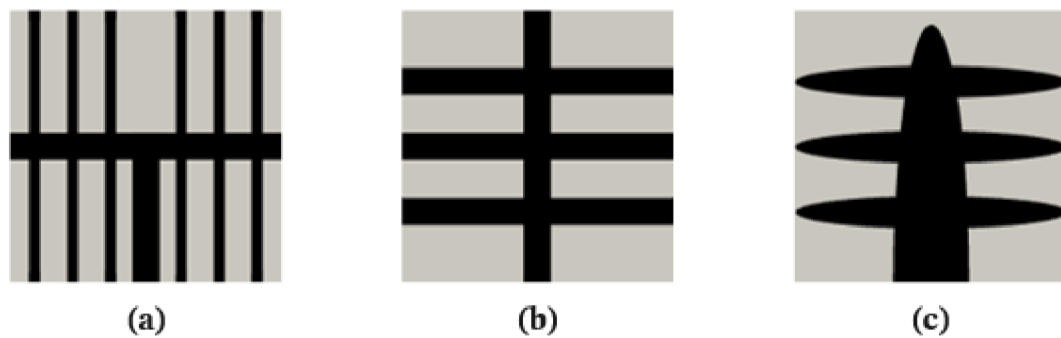


**Figura 2.10.** Três exemplos de estruturas com configuração arborescente: (a) Ledezma et al. (1997), (b) Dan e Bejan (1998) e (c) Neagu e Bejan (1999).

Entre meados dos anos 2015–2020, o professor Adrian Bejan juntamente com o professor Luiz AO Rocha, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, no Brasil, e com a professora Sylvie Lorente, do *Institut National Des Sciences Appliquées de Toulouse*, na França, compilaram as técnicas de avaliação das configurações das formas comumente

estudadas na literatura científica através do emprego do modelo volume-para-ponto, desenvolvendo, cunhando e explicando um método intitulado de “método do design constructal” (Rocha et al. 2017).

O método do design constructal tem diversas etapas de execução, porém pode ser resumido em três etapas simples: primeiro, deve-se escolher o modelo para o problema que será estudado (o modelo volume-para-ponto, ou outro modelo), e definir o sistema de fluxo e os fluxos que serão estudados; segundo, deve-se escolher a forma que facilitara o acesso dos fluxos dos sistemas de fluxo, e as dimensões que serão avaliadas; terceiro, deve-se escolher e empregar algum algoritmo, heurística, meta-heurística, e/ou método matemático para obter uma forma ou estrutura otimizada (Rocha et al. 2017).

No entanto, algoritmos de construção inspirados em heurísticas normalmente tem se mostrados mais adequados para a investigar o fenômeno formação (auto organização e auto otimização) das estruturas de fluxo dos sistemas naturais. Por conta disso, neste trabalho será utiliza um algoritmo desse tipo para construir estruturas de fluxo em um problema de difusão térmica (Ledezma et al. 1997).

É possível dizer que, o primeiro algoritmo desse tipo foi utilizado para construir estruturas de sistemas de fluxo foi desenvolvido em 1998, pelo professor Adrian Bejan e pelo professor Marcelo R Errera, da Universidade Federal do Paraná, no Brasil (Errera e Bejan 1998).

Neste trabalho, já comentado anteriormente, os pesquisadores estudaram a formação dos padrões dendríticos em bacias de drenagem fluvial. O modelo aplicado neste estudo é o modelo volume-para-ponto, porém a estratégia aplicada se difere a estratégia aplicada na avaliação de formas ou estruturas pré-definidas. Ao invés de haver uma forma ou estrutura pré-definida, o volume (ou área, quando bidimensional) é dividido em diversos quadrados formando uma grade de elementos de volume. De início, todos os elementos de volume são elementos resistentes aos fluxos que entram e saem do seu domínio, e a partir do momento em que o algoritmo de construção é aplicado, elementos de alta resistência aos fluxos se tornam elementos de baixa resistência, formando estruturas de escoamento que podem resultar na otimização do sistema (Errera e Bejan 1998).

Errera e Bejan (1998), utilizaram a permeabilidade do material poroso para representar as regiões de alta e baixa resistência, e os gradientes de pressão para avaliar o comportamento dos fluxos d'água. O algoritmo de construção empregado nesse estudo resultou nas estruturas mostrados na Figura 2.11, e em diversas outras estruturas que podem ser vistas no estudo publicado pelos pesquisadores.

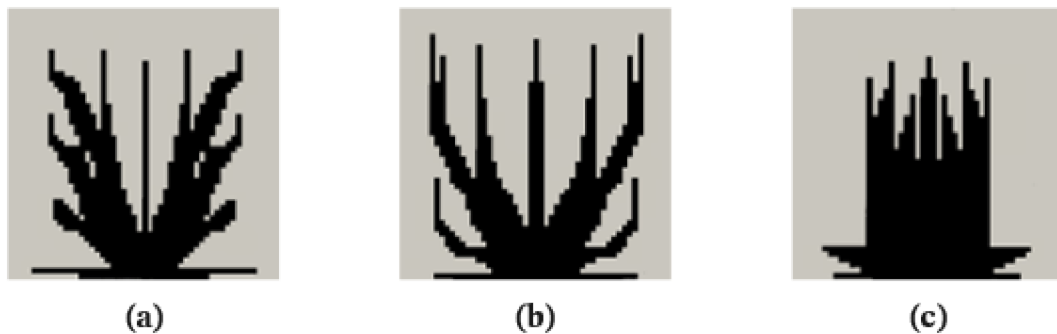


**Figura 2.11.** Solução obtida com o algoritmo heurístico desenvolvido por Errera e Bejan para modelagem de bacias de drenagem fluvial (a–c, respectivamente) (Errera e Bejan 1998).

Outros estudos na literatura científica aplicam essa mesma estratégia de discretização do volume em diversos elementos, em modelos diferentes regidos por outros fenômenos físicos e com algoritmos de construção diferentes.

Por exemplo, em problemas de caminhos condutivos podem ser citados o estudo realizado pelos pesquisadores Xu et al. (2007), que utilizaram um algoritmo de recozimento simulado em conjunto com um algoritmo genético, aplicando como critério de troca o elemento que apresentar a temperatura máxima. O estudo de Souza e Ordonez (2013), que utilizaram um algoritmo semelhante ao um algoritmo de busca gulosa, selecionando os elementos como máximo gradiente de temperatura. Assim como, também é possível citar os estudos de Avendaño et al. (2018) e de Hajmohammadi e Rezaei (2019), que aplicaram um algoritmo genético e um algoritmo de localização recursiva, respectivamente, em conjunto com o critério de máxima temperatura. Como último exemplo, é possível citar o estudo dos pesquisadores Manuel e Lin (2017), em que foi aplicada otimização topológica para construir diferentes estruturas condutoras. A Figura 2.12a–e mostra exemplos das estruturas construídas pelos pesquisadores nesses estudos.

Em relação aos problemas de cavidades convectivas/isotérmicas podemos citar os trabalhos desenvolvidos pelos pesquisadores Vianna et al. (2018), que construíram cavidades isotérmicas, como a mostrada na Figura 2.12f. O algoritmo desenvolvido neste estudo também é semelhante a um algoritmo guloso ou míope, e o critério aplicado se baseia na escolha dos elementos com maior temperatura e também mais distantes do ponto dissipador. É interessante comentar que neste estudo os pesquisadores definiram os elementos de volume, que dividem o volume em uma grade de elementos, cunhando o termo “Constructal Elementar (EC)” (do inglês, *Elemental Constructal*). Esse termo, de certo modo, traz um acréscimo a definição do modelo volume-para-ponto, e facilita a definição de novos algoritmos de construção.

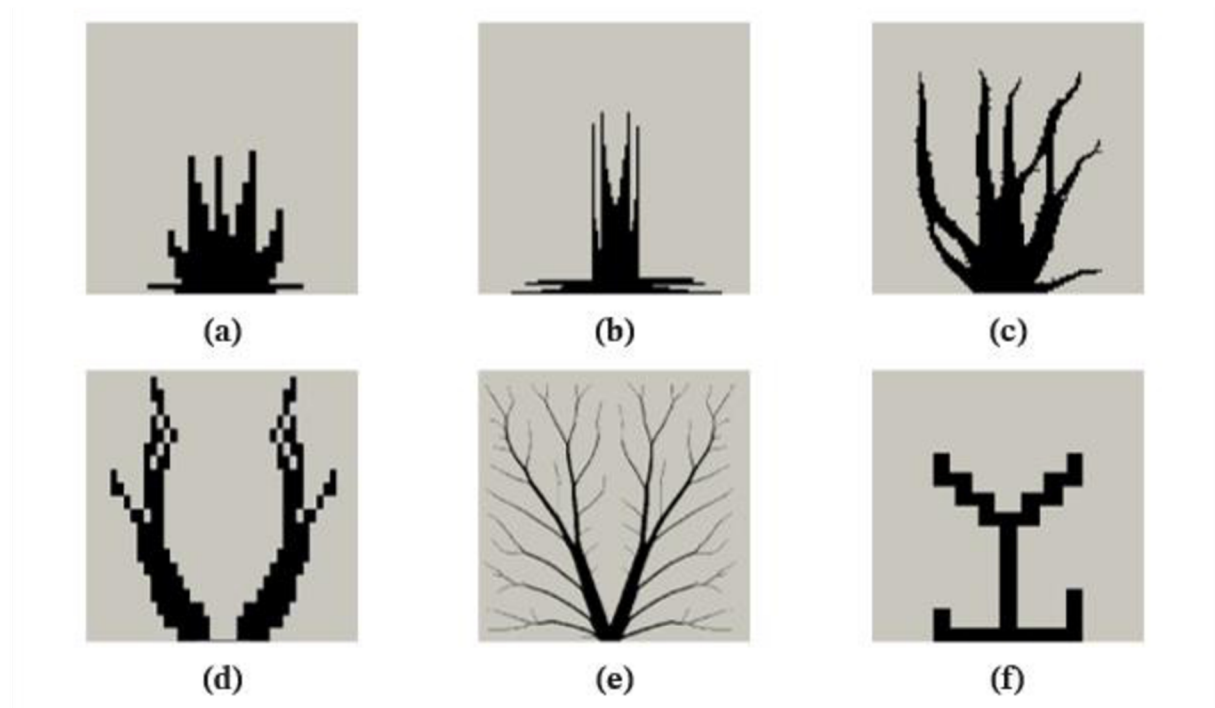


**Figura 2.12.** Diferentes estruturas obtidas através dos algoritmos propostos por (a) Xu et al. (2007), (b) Souza e Ordóñez (2013), (c) Avendaño et al. (2018), (d) Hajmohammadi e Rezaei (2019), (e) Manuel e Lin (2017), e (f) Vianna et al. (2018).

Na literatura científica, existem ainda muitos outros estudos que se utilizam de diferentes algoritmos de construção, e também de diferentes métodos para construir estruturas de fluxos em sistemas naturais. Não compete a este trabalho citar todos os outros diversos estudos existentes, porém compete comentar que as estruturas de fluxos reportadas na

literatura sempre apresentam vascularização quando os algoritmos empregados se baseiam nos conceitos e definições da Lei Constructal, comentadas na Seção 2.1.

## **2.3 CONTRIBUIÇÃO AO ESTADO DA ARTE**

Nas duas primeiras seções, Seção 2.1 e 2.2, foi mostrada a Teoria constructal e como os pesquisadores tem aplicado seus fundamentos para buscar estruturas de fluxo que são observadas na natureza. Até aqui, a Lei Constructal vem sendo aplicada através da consideração de dois aspectos principais: primeiro, há um sistema de fluxo e fluxos entram e/ou saem de seu domínio; segundo, há uma estrutura de fluxos que facilita os acessos dos fluxos e se otimiza quando tem liberdade para se transformar. No entanto, nenhum estudo considerou o aspecto do tempo, ou seja, a evolução no tempo.

Como já comentado anteriormente, de acordo com a Teoria Constructal, as estruturas de fluxo dos sistemas naturais modificam suas configurações de modo a aumentarem o acesso dos seus fluxos no meio que estão inseridos. Isso significa que, conforme as propriedades físicas de um sistema que resistem aos seus fluxos mudam no tempo, as configurações das suas estruturas também mudam se adaptando/evoluindo para melhorar/facilitar os seus escoamentos. Até este trabalho, os estudos presentes na literatura científica não consideram esse fato. Os algoritmos aplicados para construir estruturas de fluxos resolvem o fenômeno físico em regime permanente/estacionário e constroem as configurações para as estruturas de fluxos em passos separados, não considerando que esse processo de adaptação/evolução é contínuo e simultâneo.

Portanto, é justamente essa lacuna na literatura que motiva a presente dissertação. O estudo desenvolvido neste trabalho se propõe a investigar esta questão, desenvolvendo um novo algoritmo/heurística de construção que considera o tempo, construindo estrutura ainda no regime transiente.

### **3 DETALHAMENTO DO PROBLEMA**

Nesta terceira seção, será apresentado o detalhamento do estudo desenvolvido na presente dissertação. As duas seções anteriores, Seções 1 e 2, problematizaram e justificaram este trabalho de modo a esclarecer suas contribuições científicas. Nesta seção, será mostrado o modelo que foi elaborado e empregado para investigar a formação de estruturas de fluxos em problemas de caminhos condutivos, considerando o tempo.

#### **3.1 PROBLEMA DOS CAMINHOS CONDUTIVOS**

Nas Seções 1 e 2, o problema dos caminhos condutivos foram citados diversas vezes, porém em nenhum momento o tema foi aprofundado. Antes de tudo, é interessante apresentar melhor este problema e comentar sobre suas principais aplicações e objetivos, visto que este trabalho o empregará para realizar a investigação proposta.

Como anteriormente comentado, diversos estudos sobre caminhos condutivos são encontrados na literatura relacionada a Teoria Constructal. Este é um problema fundamental de condução térmica volume-para-ponto, proposto com o intuito de ser uma alternativa as atuais técnicas de resfriamento comumente aplicadas a refrigeração de encapsulamentos eletrônicos miniaturizados. Em resumo, é um problema que se situa no campo da otimização de sistemas térmicos (Lorenzini et al. 2016, 2017).

Com o advento da computação e da necessidade de processar grandes quantidade de dados e instruções, desde meados da década de 1960 muitos esforços vêm sendo realizados para aumentar a integração de circuitos eletrônicos, buscando reduzir o tempo de execução operacional individual de microprocessadores. Como consequência disso, o tamanho de encapsulamentos eletrônicos tem se tornado cada vez menor com densidades cada vez maiores, causando um aumento expressivo na geração interna de calor nesses dispositivos. Por conta disso, o resfriamento de encapsulamentos eletrônicos miniaturizados se tornou um problema relevante a ser estudado na engenharia, principalmente, no contexto das ciências térmicas e de materiais (Lorenzini et al. 2016, 2017).

Os métodos convencionais de resfriamento empregados nesses dispositivos se baseiam comumente em convecção-forçada através do uso de dispositivos *coolers* (ou traduzindo do inglês, dispositivos resfriadores). No entanto, esse método pode não mais satisfazer as necessidades de resfriamento requeridas, que variam tipicamente entre 85–100 °C. Uma alternativa possível seria resfriar internamente esses dispositivos através de um método baseado na convecção-condução, porém esse método é impraticável devido ao tamanho dos dutos que teriam que ser introduzidos no interior dos encapsulamentos para levar um fluido refrigerante até os circuitos de silício. Em vista disso, uma alternativa seria um método baseado puramente na condução térmica, sendo os caminhos condutivo um método proposto para superar esse problema (Lorenzini et al. 2016, 2017).

Um caminho condutivo é sempre feito de um material condutor de alta eficiência, como diamante ou grafeno. Esse problema é claramente um problema de otimização, quanto levamos em consideração que a quantidade de material condutor inserida no interior dos circuitos é limitada, devido aos seus tamanhos, aos custos de fabricação, e também aos custos desses materiais. Por conta disso, a avaliação da forma do caminho condutor é importante, e é estudada em Teoria Constructal (Xu et al. 2007).

No entanto, neste trabalho o objetivo principal não é avaliar as diferentes configurações possíveis para a forma de um caminho condutivo e buscar caminhos condutivos altamente eficientes, mas sim utilizar este problema já muito estudado na literatura científica como uma ferramenta para realizar a investigação proposta.

### **3.2 MODELO FÍSICO-MATEMÁTICO**

Primeiramente é necessário definir o modelo fundamental volume-para-ponto aplicado ao problema de caminhos condutivos, considerado o regime transiente. Portanto, considere o esquema simplificado mostrado na Figura 3.1.

No esquema da Figura 3.1, é mostrado um sólido quadrado de volume total  $V$ , em  $m^3$ , que representa o volume do modelo volume-para-ponto. Esse sólido tem dimensões de largura e altura representadas por  $D$ , em m, e tem espessura  $W$ , em m. Com o objetivo de simplificar

o problema, será considerado uma espessura  $W = 1$  m, tornando o modelo bidimensional. Por conta disso, o modelo não será desenvolvido e descrito a partir do volume,  $V$ , mas sim, a partir da área total,  $A$ , em  $m^2$ , do volume.

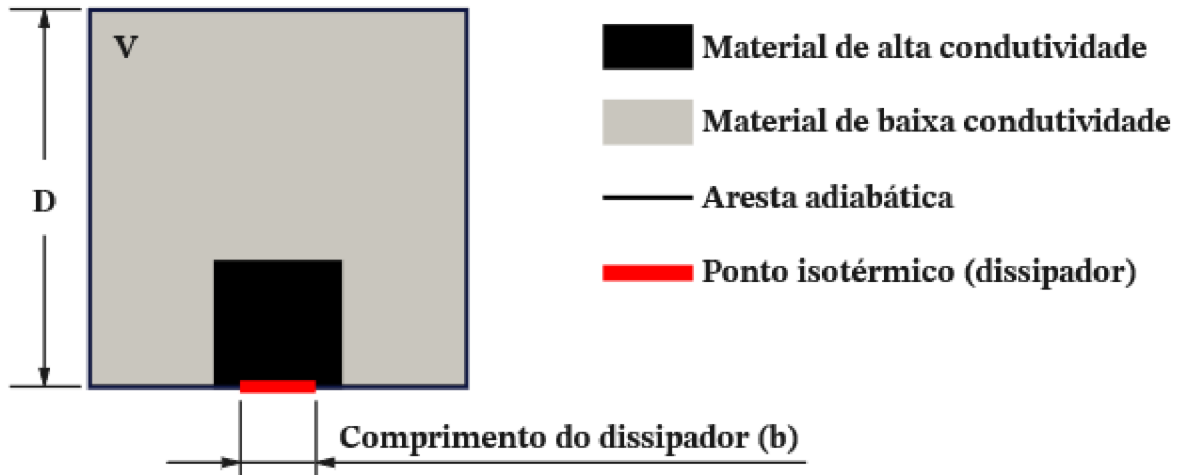


**Figura 3.1.** Representação esquemática do modelo.

Como se trata de um problema de caminhos condutivos, a área total,  $A$ , é dividida em duas áreas com materiais diferentes. A primeira área,  $A_l$ , na cor cinza na Figura 3.1, representa o material de baixa condutividade térmica, e a segunda área,  $A_h$ , na cor preta, representa o material alta condutividade térmica. Os dois subíndices,  $l$  e  $h$ , advém das palavras *low* e *high*, que traduzidas do inglês e significam baixo e alto, e são usados para representar as dimensões e as propriedades físico-químicas dos materiais de baixa e alta condutividade térmica, respectivamente.

A área mostrada na Figura 3.1, é totalmente isolada termicamente, conforme representa as arestas ilustradas na cor preta. No entanto, em uma de suas extremidades há um pequeno dissipador mantido a temperatura constante, representado pela aresta ilustrada na cor vermelha, que tem dimensão  $b$ , em m. Neste estudo em particular, a dimensão do dissipador foi escolhida tendo 20% da dimensão da largura do volume,  $b = 0.2D$ , por motivos de simplificação da modelagem computacional.

Como esse problema está relacionado ao fenômeno de difusão térmica, o modelo matemático que descreve esse fenômeno físico é definido pela equação de difusão térmica, também chamada equação do calor. De modo resumido, a equação de calor é aplicada,

essencialmente, na modelagem da difusão/condução do calor em sólidos e também em fluidos estacionários. Neste estudo a equação do calor precisa ser descrita para ambos os materiais de baixa e alta condutividade (Bergman et al. 2011).

As equações ficam da seguinte maneira:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_l \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{Q}{\rho_l c_l (A - A_h) W} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_h \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (3.2)$$

A Equação 3.1 é resolvida para o material de baixa condutividade e a Equação 3.2 é resolvida para o material de alta condutividade.

Nas Equações 3.1 e 3.2, a variável  $T = T(x, y, t)$  representa o campo de temperatura do sólido, em K, em função das coordenadas Cartesianas e do tempo. A variável  $t$ , representa o tempo, em s, as variáveis  $x$  e  $y$  representam as Coordenadas Cartesianas, em m, e as variáveis  $\alpha$ ,  $\rho$ , e  $c$  representam as propriedades termo físicas dos materiais: a difusividade térmica, em  $m^2/s$ , a massa específica, em  $kg/m^3$ , e o calor específico, em  $J/kgK$ , respectivamente. É importante salientar que,  $\alpha_l$ ,  $\rho_l$ ,  $c_l$  são as propriedades do material de baixa condutividade, e que  $\alpha_h$ ,  $\rho_h$ ,  $c_h$  são as propriedades do material de alta condutividade (Bergman et al. 2011).

Além disso, também é importante lembrar que  $\alpha = k/\rho c$  e que  $k$  é a condutividade térmica de ambos materiais, de baixa e alta condutividade, em  $W/mK$ , os quais tem condutividades térmicas representadas por  $k_l$  e  $k_h$ . A condutividade térmica será utilizada no decorrer desta seção para definir e explicar o algoritmo construção (Bergman et al. 2011).

Por fim, na Equação 3.2,  $Q$  representa a geração de calor interna, em  $W/m^3$ , que simula a geração de calor causada pelo excessivo aquecimento de um circuito eletrônico no interior de um encapsulamento, quando se considera o problema dos caminhos condutivos. Como na literatura científica, os estudos comumente consideram que essa geração de calor ocorre

somente na região do material de baixa condutividade térmica, neste estudo também será adotada essa abordagem (Bergman et al. 2011).

Apesar dessas duas definições, Equações 3.1 e 3.2, serem suficientes, é muito comum na literatura científica os pesquisadores estudarem este problema através de um modelo adimensional. Em vista disso, neste estudo também será adotada a adimensionalização do modelo matemático.

Portanto, considere as seguintes variáveis adimensionais:

$$\tilde{T} = k_1 W \left( \frac{T - T_0}{Q} \right) \quad (3.3)$$

representa a adimensionalização da temperatura. A variável  $T_0$  é uma constante representa a temperatura inicial da área  $A$ , em K, é uma temperatura mínima pré-definida — que comumente é a temperatura do ambiente, 15–25 °C.

Na sequência, a variável

$$F = \frac{\alpha_1}{A} t \quad (3.4)$$

é o Número de Fourier e representa a adimensionalização do tempo, e

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{(x, y)}{\sqrt{A}} \quad (3.5)$$

representa a adimensionalização das dimensões do modelo. Todas as dimensões do modelo,  $D$ ,  $b$ , e outras que serão definidas na sequência desta seção, se presentes no plano Cartesiano, são sempre adimensionalizadas através dessa relação.

Por fim,

$$\phi = \frac{A}{A_h} \quad (3.6)$$

$$\eta = \frac{\alpha_l}{\alpha_h} \quad (3.7)$$

representam a relação entre as áreas, e a relação entre as difusividades térmicas dos materiais de baixa e alta condutividade, respectivamente. Em outras palavras, representa o quanto de material condutor é inserido no interior do volume, e relação de proporção entre as difusividades do material condutor e o material do volume.

Neste estudo,  $\phi$  é o mesmo para todas as avaliações feitas. O valor máximo escolhido para esta variável é  $\phi = 0.1$ , um valor que também é comumente empregado pelos pesquisadores em estudos relacionados aos modelo volume-para-ponto (veja, Xu et al. 2007).

Definidas as variáveis adimensionais, é fácil mostrar que:

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial F} = \eta \left( \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} \right) \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial F} = \left( \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} \right) + \frac{1}{1 - \phi} \quad (3.9)$$

Com ambas as equações adimensionais definidas, também é preciso definir as condições iniciais e de contorno do modelo.

A única condição inicial é a condição de temperatura inicial. Como já comentado, no instante em que  $t = 0$  a temperatura inicial é uma temperatura mínima pré-definida, que para o modelo adimensional é  $\tilde{T}_0 = 0$ .

As condições de contorno são duas. A primeira é a condição de contorno de Dirichlet para o dissipador, aresta ilustrada na cor vermelha na Figura 3.1, que é a condição de temperatura constante prescrita. Neste modelo, a temperatura do dissipador é igual a temperatura inicial do volume (i.e., a temperatura do dissipador é  $\tilde{T}_b = 0$ ). A segunda condição de contorno é a condição de contorno de Neumann para as arestas ilustradas na cor preta na Figura 3.1, o que significa que as arestas são isoladas, implicando em fluxos de calor nulos nas direções verticais e horizontais ( $\partial \tilde{T} / \partial \tilde{x} = 0$  para as arestas na direção

vertical, e  $\partial \tilde{T} / \partial \tilde{y} = 0$  para as arestas na direção horizontal). Isso é feito, principalmente, para que todo o calor gerado no sólido escoamento para o dissipador, que funciona como um único ponto sumidouro (Bergman et al. 2011).

### 3.3 ALGORITMO DE CONSTRUÇÃO

Com o modelo matemático definido, é possível definir o algoritmo de construção que será empregado neste estudo. Portanto, primeiro considere o esquema da Figura 3.2.

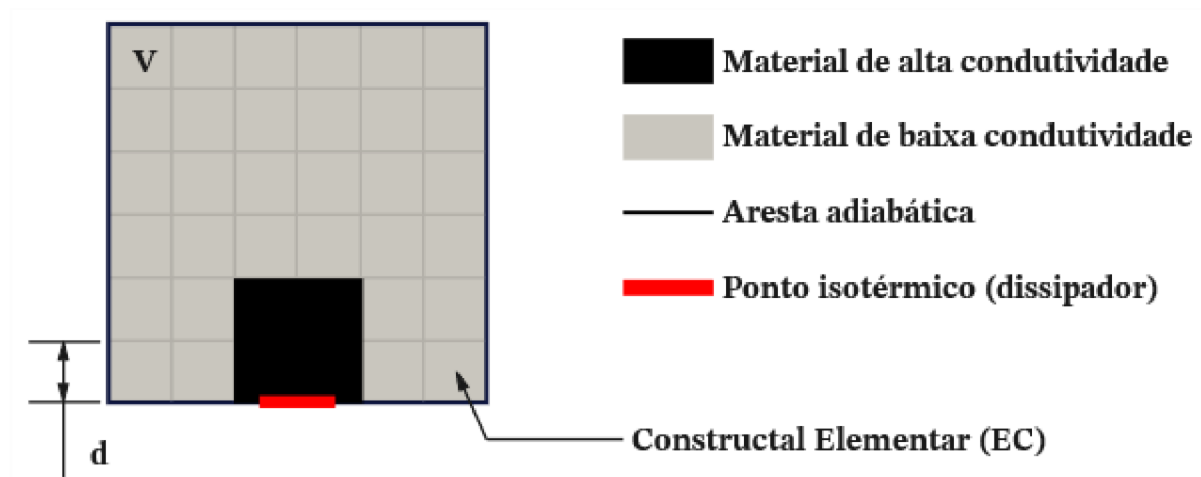


**Figura 3.2.** Discretização do domínio em Constructais Elementares (EC).

Na Figura 3.2, o esquema mostrado é o mesmo mostrado na Figura 3.1, porém o domínio da área total está dividido em vários elementos de área que são Constructais Elementares (ECs), conforme a definição de Vianna et al. (2018).

A definição dos ECs é o primeiro passo para desenvolver o algoritmo de construção. Neste estudo, os ECs têm as mesmas dimensões,  $d$ , em m, de largura e altura, conforme mostrado na Figura 3.2.

Vianna et al. (2018) chamaram de “resolução” e representaram com  $R$ , o número de divisões  $R \times R$  do domínio da área total em ECs. O esquema mostrado na Figura 3.2 é dividido em  $6 \times 6$  ECs, portanto, neste caso  $R = 6$ . Levando em consideração que neste estudo o modelo tem uma área quadrada com as mesmas dimensões de largura e altura,  $D$ , seguindo a maior parte dos estudos presente literatura científica, a resolução adotada é a mesma nas direções vertical e horizontal.

É interessante comentar que também existem estudos com dimensões de largura e altura diferentes para a área total e/ou para os elementos de área. Nestes casos, a resolução é comumente definida para ambas as direções, veja por exemplo, o estudo desenvolvido pelos pesquisadores Hajmohammadi e Rezaei (2019).

O algoritmo de construção proposto neste estudo, tem no instante  $F = 0$  todos os ECs definidos como sendo um material de baixa condutividade. À medida que o tempo é incrementado em  $\Delta F$ , o problema físico é solucionado, e após ter se passado um tempo  $\Delta F' = \tau \Delta F$  um EC de baixa condutividade é substituído por um EC de alta condutividade, para construir o caminho condutivo. A variável  $\tau$  é um adimensional que define a relação entre os tempos. É possível dizer que há dois regimes transientes, um para a evolução do fenômeno físico e outro para a evolução da estrutura do caminho condutivo, que são representados através de  $F$  e de  $F'$ , respectivamente.

Na Figura 3.3, é mostrado um esquema que ilustra melhor como os dois regimes transientes se comportam, em simultâneo.

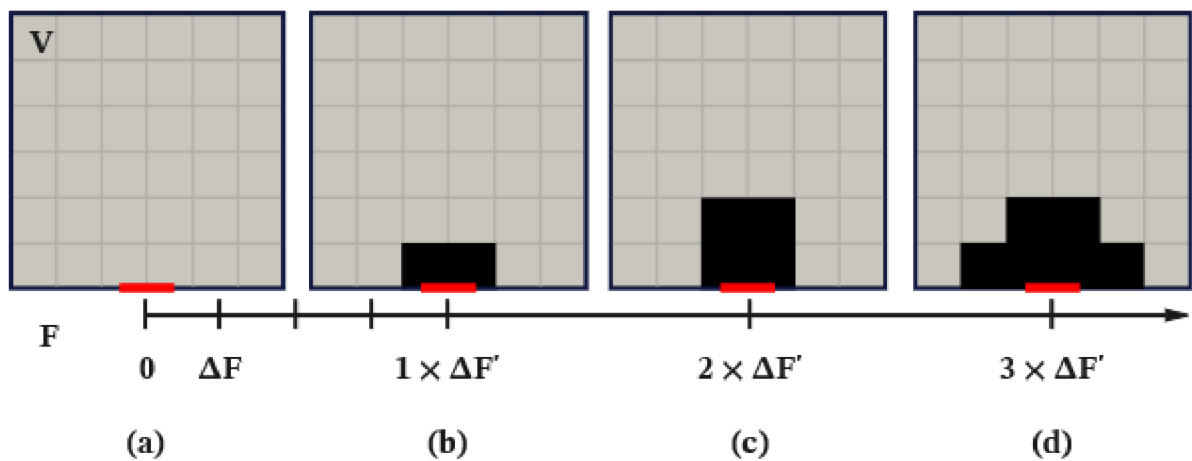


**Figura 3.3.** Ilustração do processo de construção em regime transiente.

Na Figura 3.3, existem dois transientes: uma para o fenômeno físico e outro para a construção do caminho condutivo. De início, (a) todo o domínio é constituído de um material de baixa condutividade e, a cada passo de  $\Delta F'$ , um elemento de alta condutividade é adicionado ao EC escolhido (Figuras 3.3 b, c e d, respectivamente).

Devido a construção gradual dos caminhos condutivos no tempo, a relação entre as áreas é variável, e considerar isso é importante para o cálculo do termo de geração calor presente na Equação 3.8. Como o modelo é adimensional, é possível escrever a relação entre as áreas como sendo  $\phi = i/R^2$ , em que  $i$  representa a quantidade total de ECs de alta condutividade adicionados e  $R^2$  é a quantidade total de ECs.

No esquema da Figura 3.3, o número total de elementos de área é  $R^2 = 36$ . Conforme o tempo avança a partir do instante 0, nos instantes  $1 \times \Delta F$ ,  $2 \times \Delta F$  e  $3 \times \Delta F$ , são adicionados 2, 4, e 6 elementos de alta condutividade e, portanto, as relações entre as áreas mudam de  $\phi = 0$  para  $\phi = 2/36$ ,  $\phi = 4/36$  e  $\phi = 6/36$ , respectivamente. A construção do caminho condutivo é iterada, e os elementos de alta condutividade são adicionadas, até que um valor máximo pré-definido de  $\phi$  seja alcançado. Lembrando que, neste estudo, o valor máximo escolhido é  $\phi = 0.1$ . Além disso, também é importante comentar que o modelo é simétrico e, por conta disso, são sempre adicionados pares de ECs de alta condutividade como 2, 4 e 6, conforme exemplificado.

Ainda é preciso definir o critério de troca para os elementos de área — quais os elementos de baixa condutividade serão substituídos por elementos de alta condutividade.

Portanto, para isso primeiro é preciso lembrar que o fluxo de calor, quando há diferença de temperatura entre dois pontos, é definido como

$$q = -\frac{kA}{L} \Delta T \quad (3.10)$$

em que,  $q$  é o fluxo de calor, em  $W/m^2$ , e o grupo  $kA/L$  é a condutância térmica. Além disso, também é preciso lembrar que o inverso da condutância térmica é

$$r = \frac{L}{kA} \quad (3.11)$$

e que  $r$  é a resistência térmica, em  $K/W$  (Rocha et al. 2017).

A partir das Equações 3.10 e 3.11, é possível perceber que os fluxos de calor são inversamente proporcionais as resistências térmicas ( $q \sim 1/r$ ). Em outras palavras, quanto menor são as resistências térmicas, maiores são fluxos de calor (Rocha et al. 2017).

Portanto, como o objetivo é aumentar o acesso dos fluxos de calor até a aresta de dissipação, conforme a definição da Lei Constructal, serão aumentadas as condutividades térmicas, e consequentemente, diminuídas as resistências, dos elementos de área com os maiores gradientes médios de temperatura (Souza e Ordóñez 2013).

Em resumo, o critério de troca empregado no algoritmo de construção é a escolha do EC com o maior  $|\overline{\partial \tilde{T} / \partial \tilde{x}}|$  ou com o maior  $|\overline{\partial \tilde{T} / \partial \tilde{y}}|$ , adjacente ao dissipador ou a outros elementos de alta condutividade, já adicionados (Souza e Ordóñez 2013).

É interessante comentar que até o momento, o único estudo na literatura científica que aplicou esse critério de troca para elementos de área em um algoritmo de construção foi o desenvolvido pelos pesquisadores Souza e Ordóñez (2013).

Por fim, é possível resumir o algoritmo de construção nos seguintes passos:

1. Definir o  $\Delta F^*$  e  $\phi = 0$ , em  $F = 0$  e  $F^* = 0$ ;
2. Calcular o valor  $\phi$  a partir dos ECs de alta condutividade ( $\phi = 0$ , quando  $F = 0$ );
3. Verificar se  $\phi$  alcançou seu o valor máximo pré-definido;
4. Se  $\phi$  alcançou seu valor máximo, pular para o passo 12;
5. Resolver o problema físico (i.e., Equações 3.8 e 3.9);
6. Definir os ECs candidatos;
7. Calcular  $|\overline{\partial \tilde{T} / \partial \tilde{x}}|$  e  $|\overline{\partial \tilde{T} / \partial \tilde{y}}|$  para todos os ECs candidatos;
8. Escolher o EC com o maior  $|\overline{\partial \tilde{T} / \partial \tilde{x}}|$  ou maior  $|\overline{\partial \tilde{T} / \partial \tilde{y}}|$ ;
9. Trocar a difusividade térmica ( $\alpha$ ) do EC escolhido;
10. Incrementar  $F^*$  para avançar no tempo de construção;
11. Voltar ao passo 2;
12. Resolver o problema físico sem adicionar novos elementos de alta condutividade até atingir o regime permanente.

É importante comentar que no passo 5, ao resolver o problema físico,  $F$  é naturalmente incrementado avançado no tempo, proporcionalmente a  $\Delta F$  (passo de integração). Além disso, também é importante comentar que  $\phi = 0$  significa que ainda não há nenhum EC de alta condutividade adicionado no domínio.

### **3.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Esta seção proporcionou uma visão detalhada do problema abordado neste estudo, bem como da metodologia empregada para a realização da pesquisa proposta.

A escolha do problema dos caminhos condutivos se revelou eficaz como ferramenta para facilitar e conduzir a investigação proposta. O emprego de um modelo físico-matemático bidimensional e adimensionalizado, como comumente reportado na literatura científica, também se mostrou eficaz, facilitando o estudo.

Ademais, a adimensionalização desenvolvida na Seção 3.2 aplicadas ao modelo matemático do modelo volume-para-ponto, no âmbito dos caminhos condutivos, é passível de ser considerado uma contribuição. Esta particularidade se destaca pela carência, na literatura científica atual, de um modelo que considere o regime transiente, tanto em problemas de caminhos condutivos quanto em outros problemas.

Em resumo, esta seção desempenhou um papel importante ao evidenciar a importância do problema dos caminhos condutivos, no contexto do resfriamento de encapsulamentos eletrônicos miniaturizados, e ao detalhar as particularidades do problema desenvolvido no presente estudo.

## 4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Nesta seção, será brevemente apresentada a metodologia empregada na implementação do modelo computacional e quais ferramentas foram utilizadas. A seção está dividida em três subseções, as quais apresentam, na sequência, a implementação do modelo computacional, a sua validação, e também algumas considerações finais.

### 4.1 IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO COMPUTACIONAL

A solução do modelo físico-matemático se deu através de um solucionador implementado na linguagem de programação C++, como o auxílio do framework de desenvolvimento de aplicações CFD (acrônimo do inglês para *Computational Fluid Dynamics*), OpenFOAM na versão 7. Além disso, também foi necessário utilizar o software GMSH na versão 4, para construir a geometria e fazer sua discretização, afim de criar o domínio computacional que apresenta o volume do modelo volume-para-ponto.<sup>9</sup>

As Equações 3.8 e 3.9, são escritas no código fonte utilizando o OpenFOAM em uma única expressão de solução

```
fvm::ddt(T) - fvm::laplacian(D, T) == Q
```

em que T, D e Q são matrizes do tipo `volScalarField` contendo a temperatura, a difusividade térmica e a geração interna de calor de cada um dos volumes finitos que constituem o domínio computacional.

As matrizes D e Q são definidas de acordo com a relações entre as áreas ( $\phi$ ) dependendo da quantidade de elementos de alta condutividade adicionados. É por esse motivo que, não é necessário definir as Equações 3.8 e 3.9 separadamente.

---

<sup>9</sup>Referências:

<https://isocpp.org>;

<https://openfoam.org>;

<https://gmsh.info>.

Acessos em 2023.

A geometria foi construída através do script nativo do GMSH, com extensão GEO, usado para descrever geometrias 2D ou 3D. O script desenvolvido neste estudo define como principais parâmetros de controle a resolução ( $R$ ) e a quantidade total de volume finitos do domínio computacional.

Em resumo, primeiro a geometria mostrada na Figura 3.1, da Seção 3, é discretizada em uma malha computacional com  $N \times N$  volumes finitos, em que  $N$  representa a divisão das dimensões de largura e altura ( $D$ ) do volume. Como consequência, cada EC também tem suas dimensões de largura e altura ( $d$ ) divididas em  $n$  volumes finitos, e têm  $n \times n$  volume finitos. Portanto, para descrever a malha computacional foram usadas duas relações entre a resolução, as dimensões de largura e altura do domínio computacional e dos ECs, e a quantidade de volumes finitos total e em cada EC ( $R$ ,  $D$ ,  $d$ ,  $N$  e  $n$ , respectivamente) que são dados por  $D = dR$  e  $N = nR$ .

O objetivo do uso dessas relações é manter sempre a mesma quantidade de volumes finitos no domínio computacional, independente da resolução adotada. Essa metodologia foi adotada para que seja possível comparar resultados de análises feitas com resoluções diferentes para a mesma validação do modelo computacional.

#### **4.2 VERIFICAÇÃO E INDEPENDÊNCIA DO MODELO COMPUTACIONAL**

Para atestar a corretude dos resultados do modelo computacional, foi necessário realizar dois testes comum. O primeiro é o teste de independência de malha, e o segundo é o teste de independência de passo do tempo de integração ( $\Delta F$ ), cujos resultados são mostrados na Tabela 4.1 e 4.2.

Assim como, também foram realizadas comparações dos resultados do presente modelo com os resultados de outros estudos da literatura científica. Essas comparações permitem verificar se o modelo produz resultados consistentes, aumentando sua confiabilidade.

Em primeiro lugar, o teste de independência de malha, mostrado na Tabela 4.1, precisou ser resolvido no regime permanente, visto que o passo de tempo de intergeração independente ainda não é conhecido. O parâmetro usado como base para a discretização

do domínio foi a quantidade de volumes finitos dos elementos de área ( $n$ ). A temperatura média foi usada para analisar o desvio percentual entre as sucessivas soluções discretizadas, aumentando o valor de  $n$  a partir de uma sequência com um padrão de multiplicação por 2. Além disso, um valor pré-definido qualquer para a resolução também teve que ser escolhido. O valor escolhido,  $R = 10$ , não influencia no resultado, porém facilita o cálculo da quantidade total de volumes finito do domínio, já que não há adição de ECs de alta condutividade nesse teste.

O valor para a independência de malha escolhido foi quando o desvio alcançou um valor menor que 5%, como pode ser visto na linha grifada em negrito da Tabela 4.1.

**Tabela 4.1.** Independência de malha.

| <b>i</b> | <b>n</b>  | $\tilde{T}_{MED}$ | <b>Desvio (%)</b> |
|----------|-----------|-------------------|-------------------|
| 1        | 2         | 0.02686           | 495.40            |
| 2        | 4         | 0.02826           | 361.53            |
| 3        | 8         | 0.02932           | 210.35            |
| 4        | 16        | 0.02995           | 53.14             |
| <b>5</b> | <b>32</b> | <b>0.03011</b>    | <b>3.32</b>       |
| 6        | 64        | 0.03012           | —                 |

$$\text{Desvio (\%)} = 100 \times (\tilde{T}_{i+1} - \tilde{T}_i) / \tilde{T}_{i+1}$$

**Tabela 4.2.** Independência do passo de tempo.

| <b>i</b> | $\Delta F$     | $\tilde{T}_{MED}$ | <b>Desvio (%)</b> |
|----------|----------------|-------------------|-------------------|
| 1        | 0.001          | 0.02767           | 229.52            |
| 2        | 0.0001         | 0.02832           | 21.14             |
| <b>3</b> | <b>0.00001</b> | <b>0.02838</b>    | <b>3.52</b>       |
| 4        | 0.000001       | 0.02839           | —                 |

$$\text{Desvio (\%)} = 100 \times (\tilde{T}_{i+1} - \tilde{T}_i) / \tilde{T}_{i+1}$$

A partir da determinação da malha independente regime permanente, foi possível atestar o passo de tempo para as simulações. Na Tabela 4.2, é mostrado em negrito que o valor escolhido para o passo de tempo,  $\Delta F = 0.00001$ . Assim como no teste de independência de

malha, esse valor também apresentou um desvio percentual menor que 5%, o que do ponto de vista numérico é um desvio aceitável.

Em resumo, a quantidade total de volume finitos de domínio computacional para uma malha independente é 102400, usando a relação  $N = nR$ , e o valor do independente para o passo de tempo é  $\Delta F = 0.00001$ .

Finalmente, a Tabela 4.3 mostra a comparação entre as temperaturas máxima encontradas por diferentes pesquisadores na literatura científica ( $\tilde{T}_L$ ) com as temperaturas máximas do modelo numérico desenvolvido no presente trabalho ( $\tilde{T}_P$ ).

**Tabela 4.3.** Comparação entre as temperaturas máximas.

| —                       | Forma | $\tilde{T}_L$ | $\tilde{T}_P$ | Desvio (%) |
|-------------------------|-------|---------------|---------------|------------|
| Lorenzini et al. (2013) | X     | 0.08410       | 0.08315       | 1.13       |
| Lorenzini et al. (2016) | I     | 0.22000       | 0.21560       | 2.00       |
| Lorenzini et al. (2017) | T     | 0.10110       | 0.10008       | 1.01       |
| Horbach et al. (2014)   | Y     | 0.15000       | 0.14396       | 4.03       |

$$\text{Desvio (\%)} = 100 \times (\tilde{T}_L - \tilde{T}_E) / \tilde{T}_L$$

É importante comentar que para fazer essas comparações, precisou serem reproduzidas cada uma das formas/geometrias ótimas encontradas pelos pesquisadores, que também são mostradas Tabela 4.3. Além disso, para ser possível fazer as comparações, os resultados foram resolvidos no regime permanente.

As discrepâncias encontradas entre os valores das temperaturas máximas foram da ordem entre 1–5%, o que representa uma diferença muito pequena e aceitável, confirmando a verificação bem-sucedida do presente modelo numérico.

#### 4.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O modelo numérico desenvolvido para simular com processo de construção/evolução dos caminhos condutivos considerando o tempo (regime transiente) se mostrou eficaz, no que compete a investigação proposta no presente estudo.

A validação bem-sucedida, tanto no teste de independência de malha quanto no teste de independência de passo de tempo, torna os resultados obtidos a partir do modelo numérico desenvolvido confiáveis. Assim como, a comparação das temperaturas máximas obtidas com estudos anteriores presentes na literatura científica verificou o modelo, com pequenas discrepâncias (1–5%) consideradas aceitáveis.

Além disso, a abordagem de manter sempre constante a quantidade de volumes finitos independentemente da resolução, facilitou as comparações dos resultados para os diferentes valores de resolução avaliados.

A integração entre o OpenFOAM e o GMSH, aliada à implementação do modelo numérico em C++, se mostrou fundamental para ser possível simular o fenômeno físico de difusão do calor em regime transiente, juntamente com o processo de construção/evolução do algoritmo/heurística de construção proposto. Em outras palavras, essa integração tornou possível implementar os dois transientes no modelo, conforme explicado na Seção 3.3.

Em resumo, o modelo numérico desenvolvido se mostrou eficaz na simulação do processo de construção/evolução dos caminhos condutivos em regime transiente. A implementação do solucionador em C++, a partir da integração entre OpenFOAM e GMSH se mostrou eficaz, e validação do modelo garantiu confiabilidade aos resultados, com pequenas discrepâncias consideradas aceitáveis.

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta penúltima seção, os resultados obtidos a partir do modelo desenvolvido e detalhado nas Seções 3 e 4 serão apresentados e discutidos. À vista disso, a seção está dividida em três subseções principais. A primeira, Seção 5.1, abordará as considerações necessárias para simplificar o presente estudo, permitindo assim a investigação proposta. Em seguida, nas Seções 5.2 e 5.3, serão apresentados e discutidos os resultados, e também as considerações finais, respectivamente.

### 5.1 CONSIDERAÇÕES METODOLÓGICAS

Antes de qualquer coisa, é necessário fazer algumas considerações que são fundamentais para a realização da simulação numérica de construção de caminhos condutivos, conforme o modelo proposto e detalhado nas Seções 3 e 4.

Em primeiro lugar, é importante ressaltar que a análise proposta e realizada no presente estudo se restringe apenas à avaliação da evolução das estruturas dos caminhos condutores em regime transiente. Portanto, não serão consideradas as inúmeras variações possíveis para as relações entre as áreas e entre as difusividades que poderiam ser avaliadas. A razão para essa abordagem se deve ao fato de que avaliar todas essas variações resultaria em um número excessivamente grande de simulações numéricas, e também sairia totalmente fora do escopo de investigação deste estudo. Diante disso, foram definidos valores fixos para essas duas variáveis adimensionais.

A relação entre as áreas e a relação entre as difusividades foram escolhidas com base na análise de diversos resultados de diferentes simulações numéricas feitas. Para a relação entre as áreas, o valor escolhido é  $\phi = 0.4$ , o que possibilita a construção de estruturas condutoras complexas e razoavelmente vascularizadas. Quanto à relação entre as difusividades, o valor escolhido é  $\eta = 10$ , um valor que permite a avaliação de diferentes intervalos de tempo de construção  $\Delta F^*$ , antes do regime permanente, e também permite a construção e a avaliação de diversas estruturas para os caminhos condutivos.

Além disso, também é necessário estabelecer os valores de resolução que serão avaliados neste estudo. Esses valores se limitam às dimensões de largura e altura da área no modelo físico-matemático e computacional. A análise é iniciada com  $R = 20$  e, em seguida, os valores de  $R$  são dobrados até atingirem um valor máximo escolhido ( $R = 160$ ), conforme mostrado na Tabela 5.1.

**Tabela 5.1.** Resoluções escolhidas.

| <b>R</b> | <b>n</b> | <b>N</b> |
|----------|----------|----------|
| 20       | 16       | 320      |
| 40       | 8        | 320      |
| 80       | 4        | 320      |
| 160      | 2        | 320      |

Conforme pode ser visto na Tabela 5.1, os valores de resolução escolhidos para avaliação incluem 20, 40, 80 e 160. Resoluções abaixo de 20 concebem estruturas com configurações pouco vascularizadas, cujos resultados destoam consideravelmente dos resultados contidos no intervalo entre 20–160. Por outro lado, resoluções acima de 160 levam a simulações numéricas excessivamente demoradas. Portanto, valores de resolução acima e abaixo da faixa de valores entre 20–160 foram excluídos das análises deste estudo.

Por fim, com o objetivo é avaliar a evolução de estruturas construídas em regime transiente a partir do intervalo de tempo de construção ( $\Delta F^*$ ), também é necessário definir a sequência de variação em que  $\Delta F^*$  será avaliado, de um valor inicial até um valor final.

O primeiro valor a ser avaliado corresponde sempre a quando  $\Delta F^*$  é igual a  $\Delta F$ . Em seguida, são avaliados outros valores que são múltiplos desse valor, obtidos incrementando  $\Delta F$  de dez em dez unidades. Dessa forma, são geradas sequências com  $\Delta F^* = \Delta F, 10 \times \Delta F, 20 \times \Delta F, 30 \times \Delta F, 40 \times \Delta F$  e assim por diante, até que o intervalo de tempo de construção alcance o regime permanente.

É importante destacar que, devido à natureza da modelagem numérica, não é possível avaliar o modelo até um intervalo de tempo infinito,  $\Delta F^* \rightarrow \infty$ . Na prática, a avaliação é realizada até um valor máximo para o intervalo de construção, no qual o resultado converge

para o resultado do regime permanente. Após a análise de diversos resultados de diferentes simulações, o valor de  $\Delta F^*$  para o qual todas as simulações convergem para o regime permanente é encontrado como  $\Delta F^* = 0.1$ .

Em resumo,  $\Delta F^*$  será avaliado no intervalo que varia de  $\Delta F^* = \Delta F$  a  $\Delta F^* = 0.1$ . É importante lembrar que o valor definido para  $\Delta F$  na Seção 4 é  $\Delta F = 0.00001$ .

## 5.2 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Com todas as considerações necessárias definidas, os resultados das simulações numéricas do modelo que constrói os caminhos condutivos por meio do algoritmo de construção proposto na Seção 3 podem ser apresentados e discutidos nesta subseção.

Antes de tudo, os resultados das simulações numéricas obtidos para a primeira resolução escolhida, que é  $R = 20$ , são apresentados na Tabela 5.2.

**Tabela 5.2.** Resultados para resolução  $R = 20$ .

| $\Delta F^*$ | $\tilde{T}_{\text{MAX}}$ | $\tilde{T}_{\text{MED}}$ |
|--------------|--------------------------|--------------------------|
| 0.00001      | 0.41854                  | 0.26567                  |
| 0.00020      | 0.40110                  | 0.24676                  |
| 0.00040      | 0.38374                  | 0.23468                  |
| 0.00200      | 0.37323                  | 0.22891                  |
| 0.00330      | 0.35759                  | 0.22245                  |
| 0.00540      | 0.34462                  | 0.21990                  |

Na Tabela 5.2, os resultados apresentados compreendem as temperaturas adimensionais máximas e médias ( $\tilde{T}_{\text{MAX}}$  e  $\tilde{T}_{\text{MED}}$ ) do domínio para diferentes  $\Delta F^*$  avaliados. Em essência,  $\tilde{T}_{\text{MAX}}$  corresponde a temperatura de um único volume-finito do domínio, cujo valor é o maior entre todos os volumes-finitos, enquanto  $\tilde{T}_{\text{MED}}$  corresponde à média aritmética simples das temperaturas de todos os volumes-finitos.

A Tabela 5.2 mostra os valores de  $\Delta F^*$  que correspondem as variações nas configurações das estruturas construídas para caminhos condutivos. Em outras palavras, o primeiro valor sempre corresponde a  $\Delta F^* = \Delta F$  ou a 0.00001, e a uma estrutura com uma configuração

que permanece inalterada até  $\Delta F^*$  alcançar o segundo valor subsequente, 0.00020. Conforme  $\Delta F^*$  aumenta, os valores subsequentes mostrados na Tabela 5.2, 0.00001, 0.00020, 0.00040, 0.00200, 0.00330 e 0.00540, indicam pontos intermediários nos quais as configurações das estruturas mudam totalmente. Entre esses valores, 0.00001 e 0.00020, 0.00020 e 0.00040, 0.00040 e 0.00200, etc, não há mudança nas configurações das estruturas construídas para os caminhos condutivos.

O último valor de  $\Delta F^*$  mostrado na Tabela 5.2 corresponde ao ponto em que a estrutura atinge o estado de regime permanente, e que não ocorrem mais alterações nas configurações das estruturas construídas. De fato, esse valor corresponde à estrutura em estado de regime permanente propriamente dita. É importante comentar que o estado de regime permanente foi encontrado, neste caso para  $R = 20$ , em  $\Delta F^* = 0.00540$ , um valor muito abaixo do valor máximo de avaliação  $\Delta F^* = 0.1$ , definido na Seção 5.1.

Em resumo, cada valor de  $\Delta F^*$ , mostrado na Tabela 5.2, corresponde a uma configuração específica de uma estrutura construída, juntamente com suas temperaturas adimensionais máximas e médias correspondentes ( $\tilde{T}_{MAX}$  e  $\tilde{T}_{MED}$ ).

A Figura 5.1 apresenta as seis estruturas para  $R = 20$  e os seus campos de temperaturas correspondentes, para cada  $\Delta F^*$  listado na Tabela 5.2.

Como explicado anteriormente, na Figura 5.1 cada estrutura mostrada corresponde a um ponto em que há uma variação em sua configuração. Na esquerda, ilustrado nas cores preto e cinza claro, é mostrado a relação entre as difusividades térmicas ( $\eta$ ), em que  $\eta = 1$  corresponde ao material de baixa condutividade e  $\eta = 10$  ao material de alta condutividade, enquanto na direita é mostrado o campo de temperaturas com valores de  $\tilde{T}$  variando entre o intervalo de 0–0.42, para cada valor de  $\Delta F^*$ .

A Figura 5.1 mostra as estruturas finais obtidas para os para intervalos de construção  $\Delta F^*$  mostrados na Tabela 5.2. Essas estruturas são o resultado do processo de construção proposto na Seção 4, que troca o material de baixa condutividade de um Constructal Elementar por material de alta condutividade toda vez que o valor de  $\Delta F^*$  é incrementado

seguindo, a sequência  $1 \times \Delta F^*$ ,  $2 \times \Delta F^*$ ,  $3 \times \Delta F^*$ , e assim por diante, até que a estrutura dos caminhos condutivos esteja finalizada.

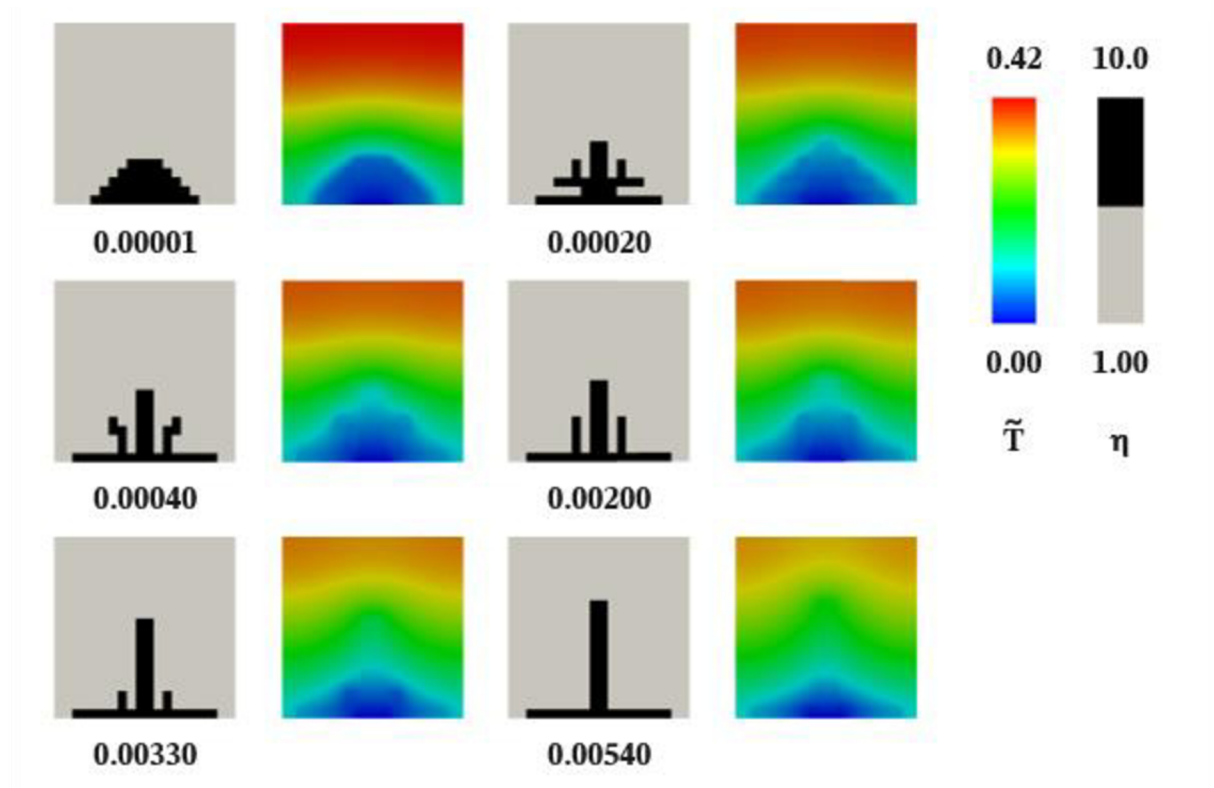


**Figura 5.1.** Estruturas construídas para resolução  $R = 20$ .

A Figura 5.2, ilustra com maior clareza o comportamento das temperaturas  $\tilde{T}_{\text{MAX}}$  e das configurações das estruturas construídas na Figura 5.1, conforme  $\Delta F^*$  é aumentado até alcançar o regime permanente.

Na Figura 5.2, a primeira configuração construída representada como 1, é obtida quando  $\Delta F^* = 0.00001$  e permanece inalterada até a segunda configuração, representada como 2, que é alcançada quando  $\Delta F^* = 0.00020$ . Essa segunda configuração se mantém até que haja uma variação em  $\Delta F^* = 0.00040$ , que resulta a configuração 3. Essa lógica é seguida sequencialmente, indo de 1 para 2, depois para 3, 4 e 5, até atingir a última configuração, representada como 6, que é a configuração em regime permanente.

Conforme pode ser visto na Figura 5.2, para  $R = 20$  a temperatura máxima ( $\tilde{T}_{\text{MAX}}$ ) tende a diminuir à medida que  $\Delta F^*$  aumenta. Além disso, é notável que o menor valor de  $\tilde{T}_{\text{MAX}}$  é alcançado quando  $\Delta F^* = 0.0540$  (regime permanente). Este resultado será comentado com

mais detalhes adiante, juntamente com os resultados dos demais valores de  $R$  que foram escolhidos para serem avaliados.

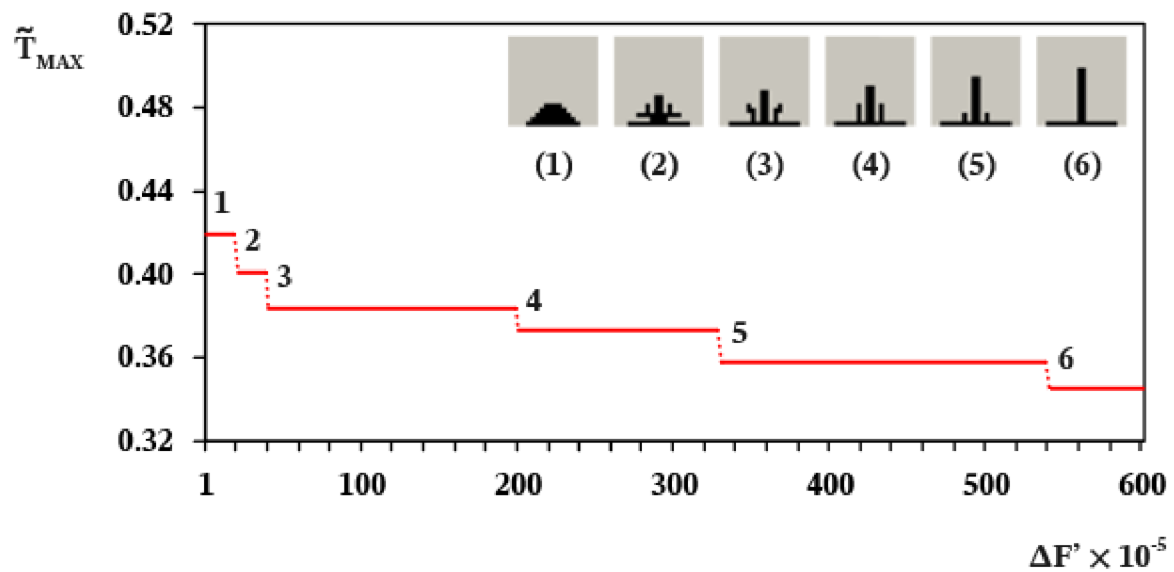


**Figura 5.2.** Comportamento da configuração das estruturas para resolução  $R = 20$ .

Dito isso, neste ponto é pertinente apresentar os demais resultados obtidos para as outras resoluções avaliadas, a fim de permitir sua comparação e discussão.

As Tabelas 5.3, 5.4 e 5.5, mostram os resultados das temperaturas  $\tilde{T}_{MAX}$  e  $\tilde{T}_{MED}$  obtidas para as resoluções 40, 80, 160, respectivamente.

**Tabela 5.3.** Resultados para resolução  $R = 40$ .

| $\Delta F'$ | $\tilde{T}_{MAX}$ | $\tilde{T}_{MED}$ |
|-------------|-------------------|-------------------|
| 0.00001     | 0.41186           | 0.25734           |
| 0.00010     | 0.36550           | 0.22225           |
| 0.00020     | 0.35962           | 0.21848           |
| 0.00050     | 0.34625           | 0.21148           |
| 0.00130     | 0.33183           | 0.20665           |
| 0.00450     | 0.30765           | 0.20259           |

**Tabela 5.4.** Resultados para resolução  $R = 80$ .

| $\Delta F'$ | $\tilde{T}_{\text{MAX}}$ | $\tilde{T}_{\text{MED}}$ |
|-------------|--------------------------|--------------------------|
| 0.00001     | 0.36840                  | 0.22268                  |
| 0.00010     | 0.34202                  | 0.20727                  |
| 0.00020     | 0.32998                  | 0.20335                  |
| 0.00030     | 0.32584                  | 0.20328                  |
| 0.00070     | 0.31559                  | 0.20088                  |
| 0.00250     | 0.31328                  | 0.20193                  |

**Tabela 5.5.** Resultados para resolução  $R = 160$ .

| $\Delta F'$ | $\tilde{T}_{\text{MAX}}$ | $\tilde{T}_{\text{MED}}$ |
|-------------|--------------------------|--------------------------|
| 0.00001     | 0.35555                  | 0.21343                  |
| 0.00010     | 0.31954                  | 0.19760                  |
| 0.00020     | 0.31097                  | 0.19932                  |
| 0.00040     | 0.31471                  | 0.20386                  |

Na sequência, também são mostradas nas Figura 5.3, 5.4 e 5.5 quer correspondem as configurações a partir das resoluções 40, 80, 160, respectivamente.

As Figuras 5.3, 5.4 e 5.5, mostram os resultados das resoluções 40, 80, 160 seguindo o mesmo padrão da Figura 5.1, na esquerda, ilustrado nas cores preto e cinza claro, é mostrado a relação entre as difusividades térmicas ( $\eta$ ), enquanto na direita é mostrado o campo de temperaturas com valores de  $\tilde{T}$  variando entre 0–0.42, para os valores de  $\Delta F'$ .

Da mesma maneira que na Figura 5.2, nas Figuras 5.6 e 6.7, as primeiras configurações são sempre construídas em  $\Delta F' = 0.00001$  e permanecem inalteradas até surgir uma segunda configuração, e posteriormente até surgir uma terceira, e assim por diante, até uma última configuração que representa, já em estado de regime permanente. Como mencionado anteriormente, as configurações das estruturas correspondentes às curvas de temperaturas nas Figuras 5.6 e 5.7 são mostradas nas Figuras 5.1, 5.3, 5.4 e 5.5.

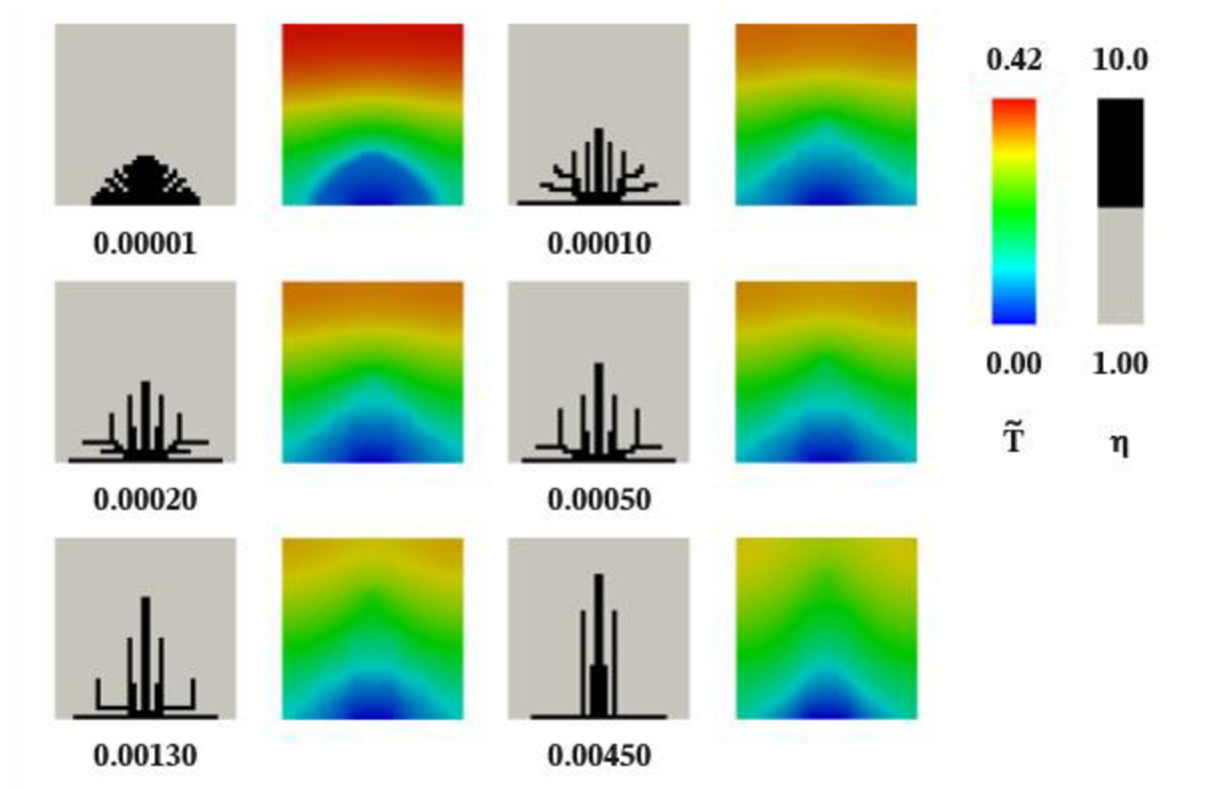


**Figura 5.3.** Estruturas construídas para resolução  $R = 40$ .

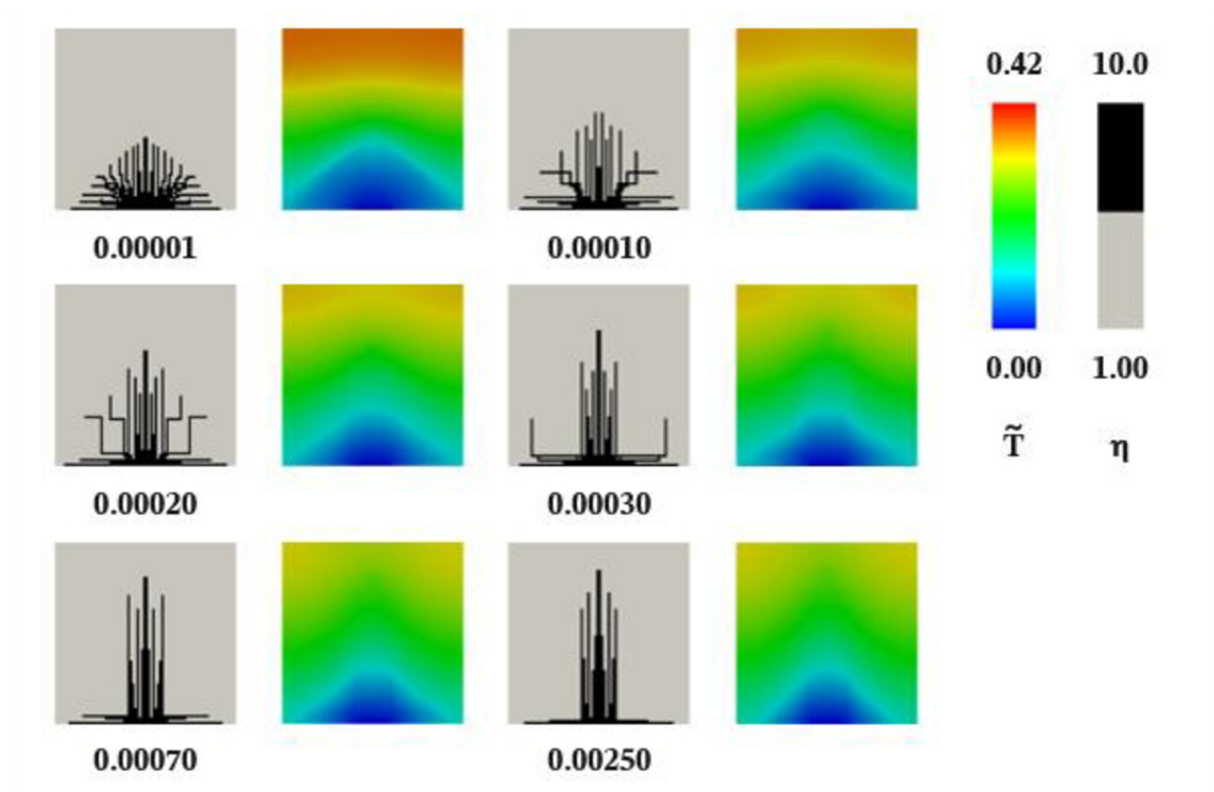


**Figura 5.4.** Estruturas construídas para resolução  $R = 80$ .

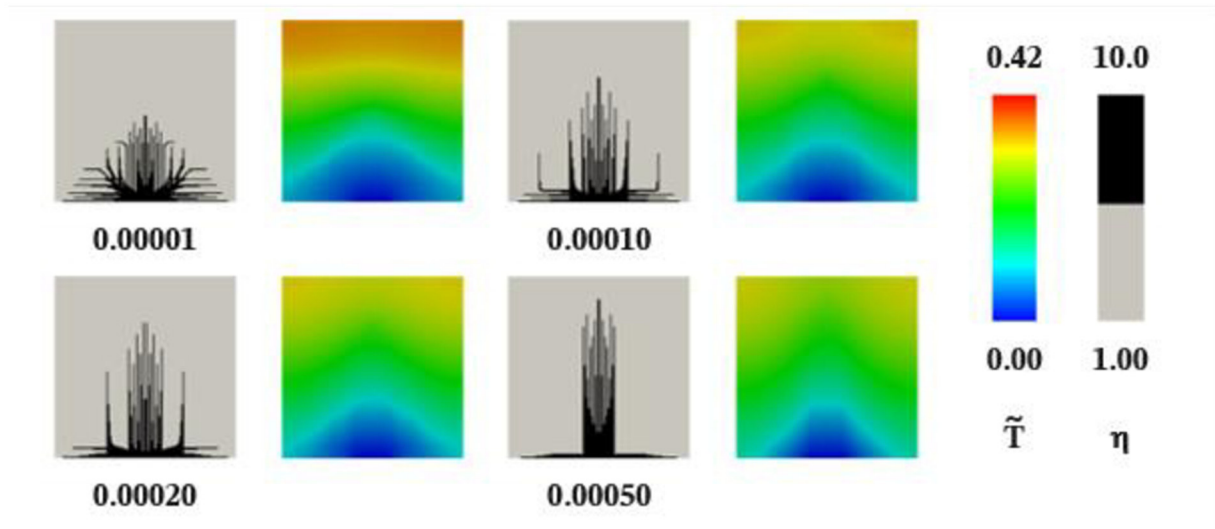


**Figura 5.5.** Estruturas construídas para resolução  $R = 160$ .

Compilando os resultados das diferentes resoluções avaliadas, conforme apresentados nas Tabelas 5.2 a 5.4, em gráficos unificados semelhantes àquele mostrado na Figura 5.2, torna mais fácil a observar o comportamento das temperaturas das configurações das estruturas construídas à medida que  $\Delta F'$  aumenta, para cada valor de  $R$ . Nas Figuras 5.6 e 5.7, são mostrados os gráficos de  $\tilde{T}_{\text{MAX}}$  e  $\tilde{T}_{\text{MED}}$ , respectivamente, para  $R = 20, 40, 80$  e  $160$ .

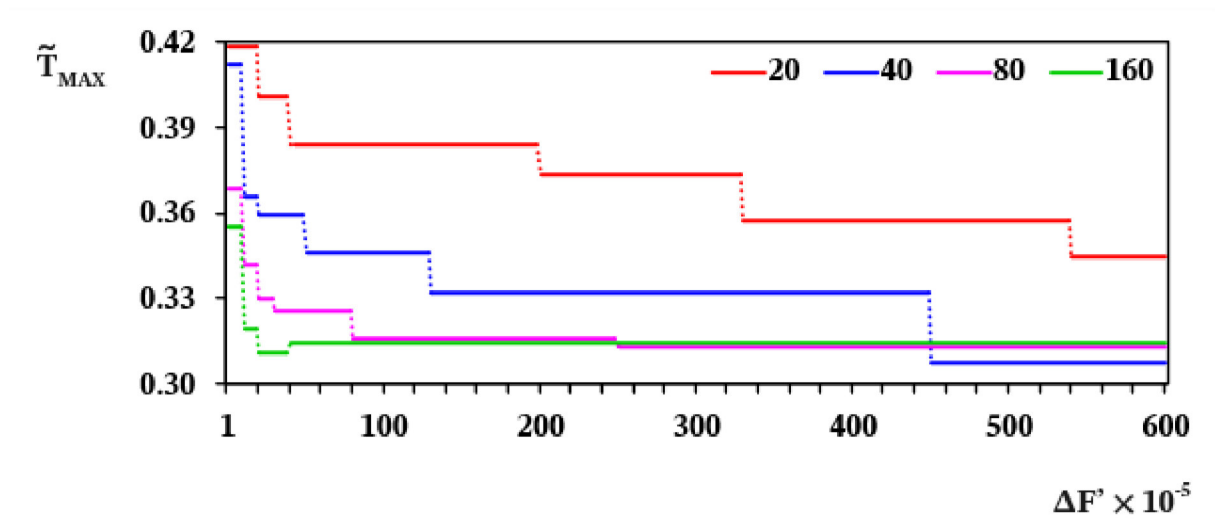


**Figura 5.6.** Comportamento de  $\tilde{T}_{\text{MAX}}$  em relação à  $\Delta F'$  para  $R = 20, 40, 80$  e  $160$ .

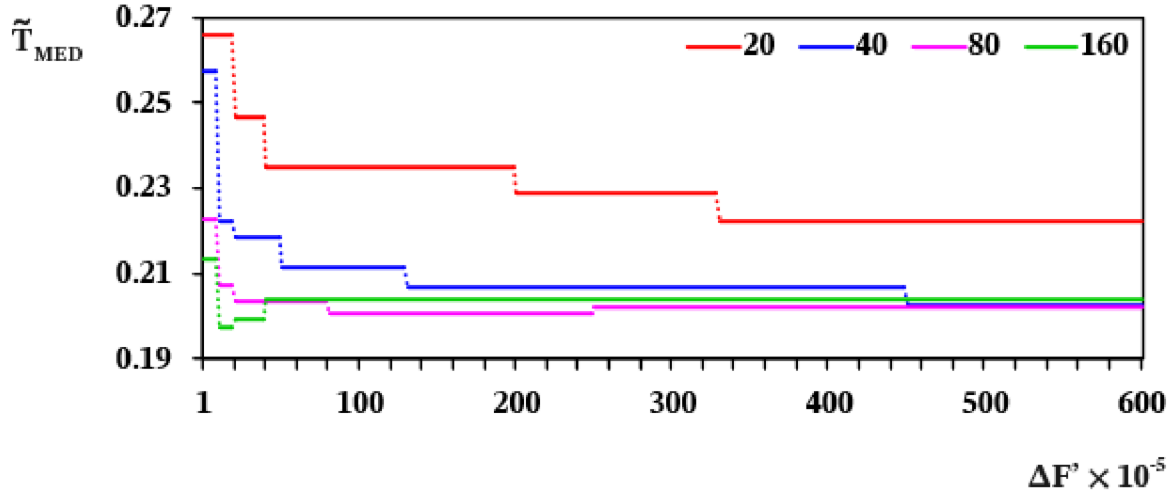


**Figura 5.7.** Comportamento de  $\tilde{T}_{MED}$  em relação à  $\Delta F$  para  $R = 20, 40, 80$  e  $160$ .

A análise dos resultados mostrados nos gráficos das Figuras 5.6 e 5.7 indica que, à medida que o valor de  $\Delta F$  aumenta, há uma tendência geral de queda nos valores de  $\tilde{T}_{MAX}$  e  $\tilde{T}_{MED}$  para as resoluções 20, 40 e 80, do primeiro valor de  $\Delta F$  até o regime permanente. A resolução 160 também apresenta uma tendência de queda semelhante, embora com um comportamento de curva que difere das outras.

Para a resolução 20, a variação de  $\Delta F$  varia de 0.00001 a 0.00540, apresentando diferentes configurações para as estruturas dos caminhos condutivos nos valores: 0.00001, 0.00020, 0.00200, 0.00040, 0.00330 e 0.00540, conforme mostrado na Tabela 5.2. Em outras palavras, cada valor de  $\Delta F$  corresponde a uma configuração específica de uma estrutura, que reflete o processo de evolução do algoritmo de construção.

A temperatura máxima ( $\tilde{T}_{MAX}$ ) para essa resolução varia de 0.34462 a 0.41854, com o valor mais baixo sendo alcançado em  $\Delta F = 0.00540$  (regime permanente). A temperatura média ( $\tilde{T}_{MED}$ ) segue o mesmo padrão, tendo também os valores mais baixos sendo alcançados no regime permanente. No início, quando  $\Delta F = 0.00001$ ,  $\tilde{T}_{MAX} = 0.41854$  e  $\tilde{T}_{MED} = 0.26567$ , enquanto no regime permanente,  $\tilde{T}_{MAX} = 0.34462$  e  $\tilde{T}_{MED} = 0.21990$ . Através da curva de  $R = 20$ , mostrada nas Figuras 5.6 e 5.7, é possível observar uma tendência de queda para as temperaturas máximas e médias à medida que  $\Delta F$  aumenta, atingindo seus valores mínimos na configuração obtida no regime permanente.

Para a resolução 40, na Tabela 5.3, é mostrado que  $\tilde{T}_{MAX}$  varia de 0.30765 a 0.41186, com o valor mais baixo também no regime permanente ( $\Delta F^* = 0.00450$ ). A mesma tendência é observada em  $\tilde{T}_{MED}$ , de maneira semelhante a tendência da resolução anterior, com valores mais baixos no regime permanente. Para  $R = 40$ , os valores mínimos alcançados para as temperaturas são  $\tilde{T}_{MAX} = 0.30765$  e  $\tilde{T}_{MED} = 0.20259$ , em  $\Delta F^* = 0.00450$ . Além disso, nesta resolução, a tendência de queda de  $\tilde{T}_{MAX}$  é mais acentuada em comparação com a resolução anterior, o que é evidenciado por uma diferença de 0.10421 entre os valores inicial e final, enquanto em  $R = 20$  a diferença é de 0.07392. De mesma maneira, a temperatura média ( $\tilde{T}_{MED}$ ) também diminui com uma tendência mais acentuada, apresentando uma diferença de 0.05475 em comparação a diferença de 0.04577 em  $R = 20$ .

A resolução 80, também tem uma tendência de queda à medida que  $\Delta F^*$  aumenta. A temperatura máxima e a temperatura média têm valores mínimos  $\tilde{T}_{MAX} = 0.31328$  e  $\tilde{T}_{MED} = 0.20193$ , igualmente no regime permanente ( $\Delta F^* = 0.00250$ ). Nesta resolução, a diferença de queda em  $\tilde{T}_{MAX}$  é de 0.05512 entre os valores inicial e final, enquanto em  $\tilde{T}_{MED}$  a diferença é de 0.02075.

Por fim, a resolução 160, mostra resultados semelhantes, com temperaturas também apresentando tendência de queda e com valores mais baixos no estado de regime permanente ( $\Delta F^* = 0.00040$ ). As temperaturas máximas e médias mínimas desta resolução são  $\tilde{T}_{MAX} = 0.31471$  e  $\tilde{T}_{MED} = 0.20386$ , e as diferenças são de 0.04084 entre os valores inicial e final de  $\tilde{T}_{MAX}$  e de 0.00957 em  $\tilde{T}_{MED}$ .

Comparando os resultados das resoluções 20, 40, 80 e 160, é possível perceber padrões consistentes em relação ao aumento do valor do intervalo de construção ( $\Delta F^*$ ). Em todas as resoluções, a tendência de queda nas temperaturas máximas ( $\tilde{T}_{MAX}$ ) e médias ( $\tilde{T}_{MED}$ ) à medida que  $\Delta F^*$  aumenta, desde o primeiro valor até o regime permanente.

As Figuras 5.8 e 5.9 mostram de maneira mais clara as tendências das temperaturas máximas ( $\tilde{T}_{MAX}$ ) e médias ( $\tilde{T}_{MED}$ ), destacando os pontos-chave em que ocorrem mudanças nas configurações das estruturas para os caminhos condutivos construídos.

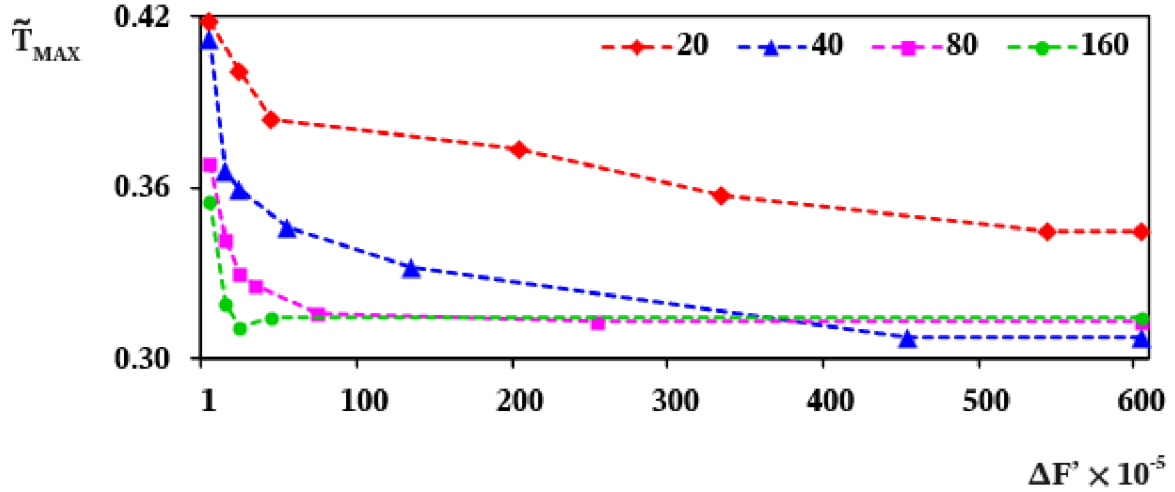


**Figura 5.8.** Mudanças de  $\tilde{T}_{MAX}$  em relação à  $\Delta F^*$  para  $R = 20, 40, 80$  e  $160$ .

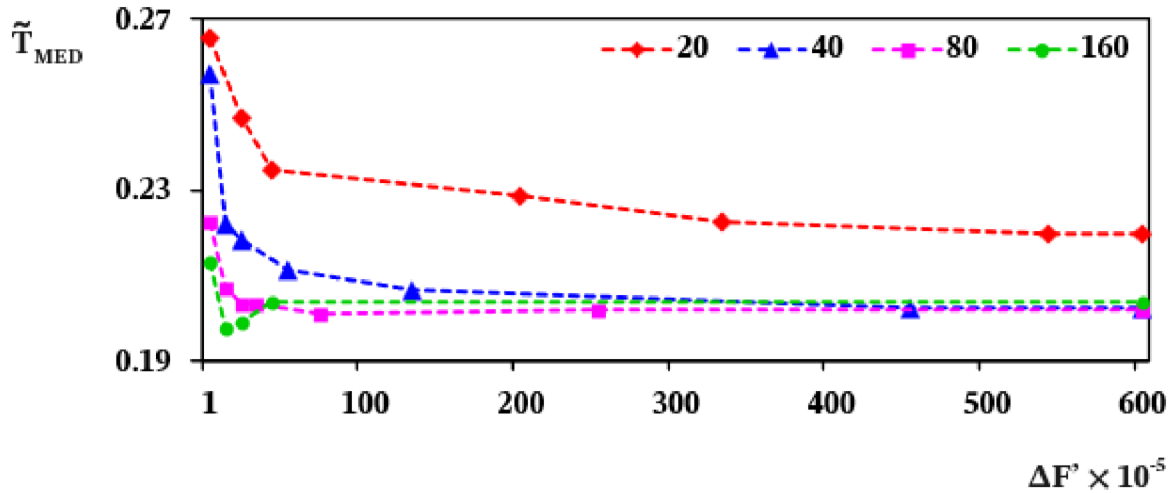


**Figura 5.9.** Mudanças de  $\tilde{T}_{MED}$  em relação à  $\Delta F^*$  para  $R = 20, 40, 80$  e  $160$ .

A partir das Figuras 5.8 e 5.9, fica melhor evidenciado das tendências das temperaturas máximas ( $\tilde{T}_{MAX}$ ) e médias ( $\tilde{T}_{MED}$ ), que diminuem à medida que  $\Delta F^*$  aumenta.

A resolução 160, embora mantenha a tendência de queda observada nas outras resoluções, exibe um comportamento de curva distinto. Em  $R = 160$ , o segundo ponto ( $\Delta F^* = 0.00010$ ) se destaca, sugerindo que em resoluções superiores a 160, a vascularização pode se intensificar, resultando em temperaturas máximas e médias potencialmente melhores do que as alcançadas no regime permanente. Analisando a Figura 5.5, é possível perceber que na resolução 160 as configurações em  $\Delta F^* = 0.00001, 0.00010$  e  $0.00020$  são aparentemente as mais vascularizadas. Esse interessante comportamento indica a possibilidade de uma

redução das temperaturas máxima e médias para valores de resolução maiores que 160, uma característica passível de uma investigação adicional.

Também é interessante perceber que para  $R = 40, 80$  e  $160$ , as configurações não apenas se tornam mais vascularizadas, como as curvas de  $\tilde{T}_{MAX}$  e  $\tilde{T}_{MED}$  tendem a se aproximarem apresentar valores inferiores em comparação com a resolução menos vasculariza,  $R = 20$ . Além disso, o menor valor de  $\tilde{T}_{MAX}$  entre todas as resoluções é obtido em  $R = 40$ , com  $\tilde{T}_{MAX} = 0.30765$ , e o menor valor de  $\tilde{T}_{MED}$  é obtido em  $R = 160$ , com  $\tilde{T}_{MED} = 0.1976$ .

Decerto, este é um resultado importante, visto que está alinhado com o que é proposto e previsto pela Teoria Constructal. Em outras palavras, no geral, estruturas que apresentam configurações mais vascularizadas, distribuindo melhor suas imperfeições locais, têm uma propensão a serem mais eficientes, facilitando o acesso dos seus fluxos em sistemas de elevada magnitude.

Em relação ao intervalo de construção, é possível perceber que à medida que  $\Delta F^*$  aumenta, as diferenças subsequentes tendem a serem cada vez mais significativas.

Em mais detalhes, analisando  $R = 20$ , à medida que  $\Delta F^*$  aumenta, as diferenças entre os valores subsequentes aumentam entre  $0.00001$  e  $0.00020$ , depois entre  $0.00020$  e  $0.00040$ ,  $0.00040$  e  $0.00200$ ,  $0.00200$  e  $0.00330$ , e entre  $0.00330$  e  $0.00540$ . Por exemplo, a diferença entre  $0.00001$  e  $0.00020$  é de  $0.00019$ , entre  $0.00020$  e  $0.00040$  é de  $0.00020$ , entre  $0.00040$  e  $0.00200$  é de  $0.00160$  e assim por diante. As menores variações para  $\Delta F^*$ , ou para a mudança das configurações, ocorrem à medida que o sistema não está ajustado, estando no regime transiente “distante” do regime permanente, enquanto e as diferenças maiores à medida que o sistema se aproxima do regime permanente.

Este comportamento ocorre para todas as relações. Em  $R = 40$ , por exemplo, as diferenças subsequentes são de  $0.00009$ ,  $0.00010$ ,  $0.00030$ , e assim por diante. O mesmo padrão ocorre com as diferenças subsequentes de  $R = 80$  e  $160$ .

É possível afirmar que esse padrão de comportamento sugere que a velocidade de evolução/construção das estruturas dos caminhos condutivos tem uma influência direta

nas suas configurações. Em outras palavras, os menores valores de  $\Delta F^*$  resultam em mudanças mais significativas entre intervalos menores de variação, conforme observado não apenas nas variações das temperaturas, mas também nas variações das configurações das estruturas, conforme mostrado nas Figuras 5.1, 5.3, 5.4 e 5.5.

Este é um resultado igualmente importante, visto que demonstra a influência da velocidade de evolução das estruturas, conforme previsto pelos conceitos da Teoria Constructal, através do parâmetro  $\Delta F^*$  (intervalo de construção). Além disso, abre caminho para diversas possibilidades adicionais de investigação e desenvolvimento de novos algoritmos de construção que consideram a influência do regime transiente na evolução das estruturas de sistemas de fluxos, na literatura científica.

### **5.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS**

A investigação proposta neste estudo, acerca da evolução/construção de estruturas para caminhos condutivos considerando regime transiente no algoritmo de construção, revelou resultados interessantes. Em outras palavras, os resultados obtidos se mostram alinhados aos conceitos e fundamentos da Teoria Constructal, e evidenciam a relevância do regime transiente, representado o intervalo de construção ( $\Delta F^*$ ), na evolução das configurações das estruturas de sistemas de fluxo. Da mesma forma, também mostraram que vascularização, representada pela resolução ( $R$ ), tem a tendência de gerar estruturas com configurações mais eficientes, como esperado e predito pela Lei Constructal.

Em conclusão, os resultados obtidos neste estudo revelaram que o regime transiente, aparentemente, influencia de maneira significativa a evolução das configurações das estruturas dos sistemas de fluxo, especialmente quando se quer buscar por estruturas altamente vascularizadas e eficientes. É possível dizer que esse resultado, de certo modo, contribui para uma compreensão mais aprofundada desse fenômeno físico/natural, bem como contribui para a busca de estruturas ótimas para sistema de engenharia com configurações altamente complexas, como caminhos condutivos, cavidades isotérmicas e outros exemplos.



## 6 CONCLUSÕES

O presente estudo desenvolveu uma investigação sobre a evolução das configurações de estruturas de alta condutividade térmicas considerando o tempo. Em resumo, o problema dos caminhos condutivos foi empregado como ferramenta para avaliar a evolução de estruturas condutoras em um sistema de fluxo termodinâmico, considerando o regime transiente (i.e., o tempo). O objeto de principal é buscar estruturas com configurações eficientes para sistemas termodinâmicos de engenharia, e também de buscar uma compreensão mais profunda do processo de evolução/construção dessas estruturas de uma perspectiva puramente fenomenológica.

Um primeiro ponto a ser destacado, é que os resultados obtidos foram consistentes com os princípios da Teoria Constructal, fornecendo esclarecimentos fundamentais sobre a influência do regime transiente (ou do intervalo de construção,  $\Delta F^*$ ) na formação das configurações das estruturas em sistemas de fluxo termodinâmico.

A análise das curvas de construção das estruturas destaca a importância da velocidade de evolução na construção das suas configurações. Conforme  $\Delta F^*$  aumenta, as diferenças entre os valores subsequentes onde a troca na configuração das estruturas também aumentam, indicando que a velocidade de evolução das estruturas tem uma influência direta em suas configurações vascularizadas e, como consequência, nas suas temperaturas máximas e médias.

Do ponto de vista do fenômeno evolutivo, os resultados apresentados para diferentes resoluções ( $R = 20, 40, 80, 160$ ) indicam claramente que a vascularização se intensifica, quando temos uma maior velocidade de construção da estrutura. Além disso, também foi possível perceber que há uma tendência geral de queda nas temperaturas máximas ( $\tilde{T}_{MAX}$ ) e médias ( $\tilde{T}_{MED}$ ), à medida que  $\Delta F^*$  aumenta, desde o primeiro valor até o último valor no regime permanente.

No entanto, a vascularização, expressa pela resolução, também tende a gerar estruturas com configurações que, possivelmente, tendem a ser mais eficientes, como previsto pela Teoria Constructal. Esse é um resultado que abre um caminho vasto para diversas investigações futuras, com modelos de construção que consideram, não somente o regime transiente (o tempo), mas também outros valores de resolução e de relações entre as propriedades físicas (difusividade, condutividade, etc) e relações entre as áreas.

Do ponto de vista da eficiência térmica, estruturas construídas em regime permanente se mostraram mais eficientes que as construídas em regime transiente. É possível que o motivo disso esteja relacionada a distribuição das imperfeições locais das estruturas construídas e também com o seu espalhamento no volume. Além disso, as restrições do problema como tamanho e geometria do domínio computacional e condições de contorno, se mantêm constante. Isso faz que o sistema tenha um único ótimo, que é constante no tempo. O presente estudo abre portas ao estudo de sistemas onde estas restrições podem ser relaxadas. Isso permitira a análise de sistemas mais similares com os que são observados na natureza, onde as restrições mudam com o tempo.

A conclusão e recomendação principal deste trabalho é que, quando um estudo qualquer busca compreender melhor o fenômeno de formação de uma estrutura de fluxo, o regime transiente deve ser sempre considerado no modelo físico, e também no algoritmo construção. O porque disso, é que o regime transiente concebe estruturas vascularizadas similares as estruturas que comumente observamos na natureza, considerando a velocidade do processo de evolução/construção. Do ponto de vista da engenharia e da eficiência/otimização, é importante fazer a ressalva se é realmente viável criar sistemas artificiais que imitam a natureza em sua totalidade. Em sistemas de engenharia, talvez seja melhor encontrar o ponto de equilíbrio onde há eficiência no sistema, mas com formas próximas do ótimo mais simples e fáceis de serem construídas com um baixo custo.

## REFERÊNCIAS

Avendaño PA et al., 2018. Construction of conductive pathways using Genetic Algorithms and Constructal Theory. *International Journal of Thermal Sciences* 134, 200–207.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2018.08.013>

Bejan A, 1996. Street network theory of organization in nature. *Journal of Advanced Transportation* 30, 2, 85–107.  
<https://doi.org/10.1002/atr.5670300207>

Bejan A, 1997. Constructal-theory network of conducting paths for cooling a heat generating volume. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 40, 4, 799–816.  
[https://doi.org/10.1016/0017-9310\(96\)00175-5](https://doi.org/10.1016/0017-9310(96)00175-5)

Bejan A, 2016. *The physics of life: the evolution of everything*, 1st ed. St. Martin's Press.

Bejan A, 2020. *Freedom and evolution: hierarchy in nature, society and science*, 1st ed. Springer Nature.

Biserni C et al., 2004. Inverted fins: geometric optimization of the intrusion into a conducting wall. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 47, 12–13, 2577–2586.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2003.12.018>

Biserni C et al., 2007. Constructal H-shaped cavities according to Bejan's theory. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 50, 11–12, 2132–2138.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2006.11.006>

Bergman TL et al., 2011. *Fundamentals of heat and mass transfer*, 7th ed. John Wiley & Sons.

Chen L, 2012. Progress in study on constructal theory and its applications. *Science China Technological Sciences* 55, 3, 802–820.  
<https://doi.org/10.1007/s11431-011-4701-9>

Cormen TH et al., 2009. *Introduction to Algorithms*, 3rd ed. MIT Press.

Dan N, Bejan A, 1998. Constructal tree networks for the time-dependent discharge of a finite-size volume to one point. *Journal of Applied Physics* 84, 6, 3042–3050.  
<https://doi.org/10.1063/1.368458>

Errera MR, Bejan A, 1998. Deterministic tree networks for river drainage basins. *Fractals* 6, 3, 245–261.  
<http://dx.doi.org/10.1142/S0218348X98000298>

Gayon J, 2000. History of the concept of allometry. *American Zoologist* 40, 5, 748–758.  
<http://dx.doi.org/10.1093/icb/40.5.748>

Hajmohammadi MR et al., 2014. Phi and Psi shaped conductive routes for improved cooling in a heat generating piece. *International Journal of Thermal Sciences* 77, 66–74.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2013.10.015>

Hajmohammadi MR, 2018. Optimal design of tree-shaped inverted fins. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 116, 1352–1360.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.09.042>

Hajmohammadi MR, Rezaei E, 2019. Proposing a new algorithm for the optimization of conduction pathways based on a recursive localization. *Applied Thermal Engineering* 151, 146–153.  
<https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2019.01.109>

Horbach SC et al., 2014. Constructal Design of Y-Shaped Conductive Pathways for Cooling a Heat-Generating Body. *Defect and Diffusion Forum* 348, 245–260.  
<http://dx.doi.org/10.4028/www.scientific.net/DDF.348.245>

Lecointre G, Le Guyader H, 2006. *The tree of life: a phylogenetic classification*. Belknap Press of Harvard University Press.

Ledezma GA et al., 1997. Constructal tree networks for heat transfer. *Journal of Applied Physics* 82, 1, 89–100.  
<https://doi.org/10.1063/1.365853>

Lage JL et al., 2018. Celebration of professor Adrian Bejan on his 70th birthday. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 126, A, 1377–1378.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.06.150>

Lorenzini G et al., 2013. Constructal design of X-shaped conductive pathways for cooling a heat-generating body. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 58, 1–2, 513–520.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2012.11.040>

Lorenzini G et al., 2016. Constructal design of I-shaped high conductive pathway for cooling a heat-generating medium considering the thermal contact resistance. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 93, 770–777.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.10.015>

Lorenzini G et al., 2017. Geometrical evaluation of T-shaped high conductive pathway with thermal contact resistance for cooling of heat-generating medium. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 108, 1884–1893.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.01.008>

Lorenzini G, Rocha LAO, 2009. Geometric optimization of T-Y-shaped cavity according to Constructal design. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 52, 21–22, 4683–4688.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2009.06.020>

Mandelbrot BB, 1982. *The fractal geometry of nature*, 1st ed. WH Freeman and Company.

Manuel MCE, Lin PT, 2017. Design explorations of heat conductive pathways. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 104, 835–851.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.08.077>

Neagu M, Bejan A, 1999. Constructal-theory tree networks of “constant” thermal resistance. *Journal of Applied Physics* 86, 2, 1136–1144.  
<https://doi.org/10.1063/1.370855>

Rakov VA, Uman MA, 2006. *Lightning: physics and effects*, 3rd ed. Cambridge University Press.

Rocha LAO et al., 2017. Constructal theory in heat transfer. *Handbook of Thermal Science and Engineering*, 1–32. Springer.  
[http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-32003-8\\_66-1](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-32003-8_66-1)

Souza JA, Ordonez JC. Constructal design of high-conductivity inserts. *Constructal Law and the Unifying Principle of Design*, 91–111.  
<https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5049-8>

Vianna JCB et al., 2018. A new Constructal Theory based algorithm applied to thermal problems. *International Journal of Thermal Sciences* 126, 118–124.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2017.12.023>

Xu X et al., 2007. Optimization of heat conduction using combinatorial optimization algorithms. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 50, 9–10, 1675–1682.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2006.10.037>