MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

CÁLCULO FRACIONÁRIO APLICADO EM MODELOS DE OLIGOPÓLIO.

por

Matheus Madeira Corrêa

Dissertação para obtenção do Título de Mestre em Modelagem Computacional

Rio Grande, Outubro de 2020

Matheus Madeira Corrêa

"Cálculo Fracionário Aplicado Em Modelos De Oligopólio"

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande - FURG, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área de concentração: Modelagem Computacional.

Aprovada em: 10 de Outubro de 2022

BANCA EXAMINADORA

Adriano De Cezaro

Prof. Dr. Adriano De Cezaro (Orientador – FURG)

gov.br Documento assinado digitalmente
CATIA MARIA DOS SANTOS MACHADO
Data: 15/10/2022 09:03:40-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Profa. Dra. Catia Maria dos Santos Machado (FURG)

GOV.BR Documento assinado digitalmente
VINICIUS VIANA LUIZ ALBANI
Data: 14/10/2022 14:06:10-0300
CPF: ***.707.267-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Vinícius Viana Luiz Albani (UFSC)

Rio Grande - RS
2022

Ficha Catalográfica

C824c Corrêa, Matheus Madeira.
Cálculo fracionário aplicado em modelos de oligopólio / Matheus Madeira Corrêa. – 2022.
140 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Rio Grande/RS, 2022.
Orientador: Dr. Adriano de Cezaro.

1. Modelos do tipo *Cournot* 2. Mercados em duopólio 3. Cálculo de ordem fracionária 4. Memória de competição entre firmas
I. Cezaro, Adriano de II. Título.

CDU 519.672

Catalogação na Fonte: Bibliotecário José Paulo dos Santos CRB 10/2344

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Universidade Federal do Rio Grande, por proporcionar um ambiente acolhedor e estimulante durante todo período em que estive matriculado no programa de pós graduação.

Agradeço ao PPGMC e todos seus profissionais pela oportunidade de estudar em um programa com alto nível de excelência.

Agradeço a CAPES, pelo o apoio financeiro.

Agradeço a minha família e amigos que sempre me apoiaram com carinho e amor. Tenho a certeza que sem eles enfrentar esse desafio seria uma tarefa infinitamente mais difícil.

RESUMO

Nesta dissertação utilizamos o cálculo de ordem fracionária, com derivadas do tipo Caputo e seus efeitos de memória, para reinterpretar alguns indicadores econômicos conhecidos. Com isso, propomos e analisamos o efeito de memória em um modelo de ajustes do tipo Cournot (uma competição entre as firmas produtoras) em um mercado em duopólio, cujas funções demanda inversa e custos são funções afins das quantidades produzidas. Esta proposta pode ser vista como uma generalização dos modelos de ajuste míopes comumente vistos na literatura. Mostramos a existência e estabilidade dos pontos de equilíbrio e analisamos os efeitos de memória na modelagem da competição entre firmas em duopólio. O principal resultado neste sentido mostra que, sob hipótese simplificadoras a competição do tipo Cournot estudada obtém um lucro maior quando analisado no ponto de equilíbrio de Cournot. Por fim, apresentamos alguns testes numéricos, para escolhas específicas das constantes do modelo que comprovam os resultados teóricos.

Palavras-chaves: Modelos do tipo Cournot, Mercados em duopólio, Cálculo de ordem fracionária, Memória de competição entre firmas.

ABSTRACT

In this dissertation we use fractional order calculus, with Caputo-type derivatives and their memory effects, to reinterpret some known economic indicators. With this, we propose and analyze the memory effect in a Cournot-type adjustment model (a competition between producing firms) in a duopoly market, whose inverse demand and cost functions are affine functions of the quantities produced. This proposal can be seen as a generalization of myopic fit models commonly seen in the literature. We show the existence and stability of equilibrium points and analyze the memory effects in modeling competition between firms in duopoly. The main result in this sense shows that, under simplifying assumptions, the Cournot-type competition studied obtains a greater profit when analyzed at the Cournot equilibrium point. Finally, we present some numerical tests, for specific choices of model constants that prove the theoretical results.

Keywords: Cournot-type models, Duopoly markets, Fractional order calculus, Memory of competition between firms.

ÍNDICE

1 Introdução **14**
1.1 Estrutura da dissertação 20

2 Cálculo Fracionário **22**
2.1 Uma Breve introdução histórica ao cálculo fracionário 23
2.1.1 Derivadas de ordem fracionária de algumas funções. 38

3 O modelo de Cournot e alguns conceitos econômicos relevantes. **41**
3.1 Teoria da Firma 42
3.2 O modelo de Cournot 44
3.2.1 Modelo de duopólio conforme pensado por Cournot. 44
3.2.2 Economia oligopolista e a formação de Cartel 47
3.2.3 Modelo de Cournot com diferenciação de produtos 49
3.2.4 Modelo de Cournot com $n > 2$ firmas 53
3.2.5 Modelo de Stalkeberg 55

4 Processos de Ajuste **58**
4.0.1 Ajustes parcialmente racional 59
4.0.2 Ajuste pela melhor resposta dinâmica 65
4.0.3 Processo de ajuste pelo método do gradiente 69
4.0.4 Processo de ajuste por aproximação de Puu 74

5 Cálculo Fracionário nas Ciências Econômicas **82**
5.1 Derivadas de Ordem Fracionária em Economia 84
5.1.1 Cálculo fracionário e memória em economia 85
5.2 Modelos de oligopólio fracionário 87
5.2.1 Modelo de duopólio de Cournot com cálculo fracionário. 87
5.3 Análise das influências de memória no lucro das firmas 98
5.3.1 Análise dos efeitos de memória no processo de ajustes a partir da teoria dos jogos 105

6 Conclusões e trabalhos futuros **108**

7 Apêndices **115**
7.1 Funções especiais 116
7.1.1 Resultados auxiliares de Análise 120
7.1.2 Sistemas Dinâmicos Discretos 126
7.1.3 Apêndice 1 - Comandos Usados Para Construir A Simulação Do Processo De Ajuste. 136
7.1.4 Apêndice 2 - Código utilizado Para Simular O Processo De Ajuste Melhor Resposta. 137
7.1.5 Apêndice 3 - Código Utilizado Para Simular O Processo De Ajuste De Puu138
7.1.6 Apêndice 4 - Código Utilizado Para Construção Do Diagrama De Cobweb.139
LISTA DE FIGURAS

Lista de Figuras

3.1 Função de reação das firmas f_i, para $i = 1, 2$, assumindo o modelo de Cournot (3.2.7). 47
3.2 Representação gráfica da função de reação das firmas f_i, para $i = 1, 2$, $a = 3$,$b = 1$, $c_1 = c_2 = 1$ e $d = 0.5$. 52
3.3 Função de reação da firma 1 para $d = 0.2$,$d = 0.4$,$d = 0.6$ e $d = 0.8$ e parâmetros $a = 3$,$b = 1$, $c_1 = c_2 = 1$. 52
3.4 Lucro da firmas 1 com relação a d. 53
3.5 Produção da firma 1 como uma função de d. 54
3.6 Lucro da firma líder 56
3.7 Lucro da firma seguidora 57

4.1 Processo de ajuste, para $a = 3$, $b = c_1 = c_2 = 1$ e $\rho = 0.5$. 62
4.2 Lucro da firma 1 em cada passo de tempo, de acordo com o modelo (4.0.1) e $\rho = 0.5$. 63
4.3 Simulação numérica do modelo (4.3), para $a = 3$, $b = c_i = 1$. 66
4.4 Lucro - Melhor Resposta Dinâmica. 67
4.5 Processo de ajuste do gradiente, para $a = 3$, $b = c_i = 1$. 70
4.6 Lucro da firma 1 pelo processo de ajuste do gradiente, para $a = 3$, $b = c_i = 1$ e $\rho_i = 0.5$. 71
4.7 Simulações do processo de ajuste de Puu, para a escolha dos parâmetros $a = 3$, $b = c_1 = c_2 = 1$ e $\rho = 0.9$ 75
4.8 Simulações do processo de ajuste de Puu, para a escolha dos parâmetros $a = 3$, $b = c_1 = c_2 = 1$ e $\rho = 0.5$ 76
4.9 Processo De Ajuste De Puu - $\rho = 0.1$ 76

5.1 Dinâmica do processo se ajustes (5.2.1) para $\rho = 0.5$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$. . . . 89
5.2 Dinâmica do processo se ajustes (5.2.1) para $\rho = 0.9$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$. . . . 89
5.3 $\rho = 0.1$ 90
5.4 $\rho = 0.9$ 92
5.5 Quantidades produzida pelas firmas 1 e 2 para $\rho = 0.1$ 93
5.6 Lucro das firmas pelo modelo multi-fracionário (5.2.1), para $\rho = 0.1$. . . . 93
5.7 Lucro das firmas 1 e 2 para $\alpha_1 > \alpha_2$ 105

7.1 Gráfico da função Gamma. 117

LISTA DE TABELAS

Lista de Tabelas

4.1 Processo de ajustes parcialmente racional dado pelo modelo (4.0.1), da firma 1 e 2, para distintos valores de ρ. 61
4.2 Lucros da firma 1 dado pelo modelo (4.0.1) para valores de ρ. 62
4.3 Processo de ajustes melhor resposta dinâmica 66
4.4 Lucros obtidos com o processo de ajustes (4.3), para $a = 3$, $b = c_i = 1$ . . 67
4.5 Processo de ajuste pelo método do gradiente, com $a = 3$ e $b = c_i = 1$. . . . 69
4.6 Lucro obtido pela firma 1 seguindo o processo de ajustes pelo método do gradiente, com $a = 3$ e $b = c_i = 1$. 70
4.7 Simulações do processo de ajuste de Puu, para a escolha dos parâmetros $a = 3$, $b = c_1 = c_2 = 1$ 75
4.8 Aproximação De Puu - Lucro. 77
4.9 Resultado das aproximações de Puu com firmas distintas. 77

5.1 Modelo de Cournot fracionário com $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$. 88
5.2 Lucro para o modelo de Cournot Fracionário com $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$. 90
5.3 Modelo de Cournot multi-fracionário para $\alpha_1 = 0.3$ e $\alpha_2 = 0$. Resultados para a firma 1. 91
5.4 Modelo de Cournot multi-fracionário para $\alpha_1 = 0.3$ e $\alpha_2 = 0$. Resultados para a firma 2. 91
5.5 Lucro obtido pela firma 1, com as quantidades dadas pelo modelo multi-fracionário com $\alpha_1 = 0.3$ e $\alpha_2 = 0.5$. 92
5.6 Lucro obtido pela firma 2, com as quantidades dadas pelo modelo multi-fracionário com $\alpha_1 = 0.3$ e $\alpha_2 = 0.5$. 94
5.7 Valores de λ_1 e λ_2 para $\alpha_1 = \alpha_2 = \theta$ e para $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. 96
5.8 Valores de λ_1 e λ_2 para $\alpha_2 = 0.1$ e para $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. 97
5.9 Valores de λ_1 e λ_2 para $\alpha_2 = 0.3$ e para $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. 97
5.10 Valores de λ_1 e λ_2 para $\alpha_2 = 0.5$ e para $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. 97
5.11 Valores de λ_1 e λ_2 para $\alpha_2 = 0.7$ e para $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. 98
5.12 Valores de λ_1 e λ_2 para $\alpha_2 = 0.9$ e para $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. 98
5.13 Jogo - Escolha da ordem das derivada para um equilíbrio de Nash. 107

LISTA DE SÍMBOLOS

LISTA DE SÍMBOLOS

Γ	Função Gama.
β	Função Beta.
$D_x^v f(x)$	Derivada de ordem v em relação a x de uma função f.
$I_x^v f(x)$	Integral de ordem v em relação a x de uma função f.

Capítulo 1

Introdução

Um oligopólio é uma estrutura de mercado em que a produção de determinado bem ou serviço é dominada por um pequeno grupo de firmas (agentes econômicos) denominados de oligopolistas, e.g, [Gremaud, 2003, Shapiro, 1989, Pindyck et al., 2013]. Nesse tipo de mercado os agentes produtivos procuram a melhor combinação de preço-produto considerando as quantidades produzidas e os preços praticados por seus concorrentes[1]. Além disso, em um oligopólio existem condições que favorecem a baixa competitividade e, portanto as ações de cada uma das firmas que compõem o mercado possuem uma influencia bastante considerável na formação de preços e na quantidade ofertada de determinado bem e.g, [Gremaud, 2003, Shapiro, 1989, Pindyck et al., 2013]. Dessa forma o oligopólio se afasta da estrutura de mercado conhecida como concorrência perfeita. Uma vez que o mercado oligopolista é caracterizado por possuir número elevado de firmas que competem e não possuem influencia considerável no preço ou na oferta de determinado bem.

Mesmo assim, nas economias desenvolvidas que favorecem mercados com concorrência perfeita, os oligopólios aparecem em bastante frequência, veja [Shapiro, 1989] e [Carrera-Fernandez, 2009]. Podemos tomar como exemplo de oligopólio contemporâneo o mercado de provedores de serviços na nuvem que é investigado em [Feng et al., 2013].

Contudo não é só no escopo do mercado mundial que podemos observar o comportamento oligopolista. Economias menos globalizadas, como por exemplo aquela dentro de uma cidade ou estado, também podem apresentar oligopólios. Nesses casos é comum, em uma pequena comunidade onde a disputa por mercado é mais intensa, que cada oligopolista esteja mais propenso a estar atento as ações dos demais agentes produtivos. Portanto, pode existir um "compartilhamento"de informações que faça com que as decisões de uma firma influenciem e sejam influenciadas pelas decisões das demais. Desta forma, qualquer plano estratégico nesta estrutura de mercado precisa levar em consideração a resposta dos demais participantes.

É importante notar que os oligopólios podem ser interpretados como um intermediário entre o mercado em monopólio, ou seja um mercado com apenas uma firma, e um em concorrência perfeita, ou seja um mercado com um grande número de competidores e.g, [Gremaud, 2003,

[1]Procurar a melhor combinação de preço-produto considerando as quantidades produzidas não é exclusividade das estruturas de oligopólio.

Shapiro, 1989, Pindyck et al., 2013]. Por essa razão, muitas setores das economias modernas acabam recaindo em estruturas de mercado oligopolistas. Apesar de que em muitos lugares existirem leis contra os monopólio e a concorrência perfeita pode ser difícil de ser alcançada. Ademais, é interessante reparar que os oligopólios podem aparecer de formas variadas, haja visto que existem diversas variáveis que podem modificar a forma como as firmas competem. Alguns exemplos de tais variáveis são, o número de firmas, o poder de mercado de cada concorrente, a diferença que o consumidor vê entre os produtos, a forma que cada firma decide competir, a inovação, os diferentes custos, a existência de empresas estatais no mercado. Tais questões podem tornar cada oligopólio diferente. Dessa maneira, se torna imperativo adaptar os modelos já existentes para conseguir abarcar as particularidades dos diferentes oligopólios presentes nos mercados ao redor do mundo. Veja [Carrera-Fernandez, 2009] e referências.

Dada a variedade e complexidade das variáveis que podem compor um mercado em oligopólio, a modelagem e estudos das dinâmicas são pilares fundamentais para fornecer os cenários pelos quais as empresas possam tomar suas decisões de maneira acertada. Além disso, é de interesse de todos que estão inseridos em dada economia, conseguir compreender, mesmo que de forma superficial, quais as movimentações dos agentes econômicos que influenciam o comportamento do mercado. Dois modelos amplamente utilizados para representar a dinâmica de competição entre empresas oligopolistas são os modelos de Cournot, onde as firmas competem por quantidade e o de Bertrand, onde as firmas competem por preço, e.g, [Gremaud, 2003, Shapiro, 1989, Pindyck et al., 2013].

O modelo de Cournot, introduzido por Antoine Augustin Cournot em 1836 [Gremaud, 2003], considera duas firmas com produtos homogêneos em uma situação de oligopólio, sob a premissa de que cada firma deveria encontrar a quantidade ótima a ser produzida para maximizar seu respectivo lucro. O modelo foi pioneiro em demonstrar que cada firma deveria considerar as ações da concorrente para calcular sua quantidade ótima. Este modelo manteve sua importância ao longo das décadas e ainda é bastante influente no estudo da microeconomia, veja por exemplo [Hossain et al., 2018]. Contudo, é fácil notar que diversas simplificações da realidade foram feitas por Cournot em seu modelo. Dentre as hipóteses assumidas pelo modelo estão:

As firmas possuem poder de mercado idênticos, isto é, os efeitos das decisões de cada firma afeta o preço dos produtos de forma idêntica;

O número de firmas é fixo;

As firmas são economicamente racionais e agem de maneira estratégica, usualmente visando maximizar o lucro dada a decisão das firmas competidoras;

Os produtos são homogêneos, ou seja, não há diversificação de produtos entre as firmas competidoras;

O preço é conhecido e é uma função decrescente da produção total;

Cada firma tem o objetivo de maximizar o seu lucro, baseado na expectativa de que sua decisão não afetará a decisão de suas competidoras;

As duas empresas tomam suas decisões de forma independente.

Várias generalizações do modelo de Cournot clássico tem sido consideradas recentemente para tornar o modelo mais versátil e para abarcar uma maior variedade de situações no mundo real. Em [Agliari et al., 2000], por exemplo, os autores consideram um modelo de Cournot com três firmas, cada uma delas toma suas decisões simultaneamente, como em um jogo não cooperativo. Em seguida a função reação de cada um desse agente econômicos é encontrada e junto delas os pontos de equilíbrio do sistema. Além disso, ainda de posse das funções de reações os autores propõem uma dinâmica onde a produção das firmas é dependente do tempo. Posteriormente usando as condições de estabilidade de Samuelson, veja [Agliari et al., 2000], os autores encontram a região de estabilidade dos pontos de equilíbrio de Cournot. Além disso os pesquisadores estudaram, via simulação numérica, o efeito que os parâmetros presentes no modelo exercem sobre a região de estabilidade. Para as firmas que estão inseridas em um oligopólio é interessante buscar a estabilidade. Uma vez que a imprevisibilidade da economia pode levar a prejuízos ou redução de lucro.

Em [Agiza et al., 1999], os autores se propõem a investigar um oligopólio com três firmas usando um processo de ajuste conhecido como melhor resposta dinâmica ou manutenção de Cournot. Neste processo cada firma define a produção no tempo t como sendo a melhor resposta a produção de suas rivais no período de tempo anterior. Um mecanismo mais complexo de ajuste para o modelo de Cournot é considerado em [Puu, 1991]. Nesse estudo as firmas assumem que a reação a suas concorrentes no tempo anterior pode não ser a melhor resposta. Dessa forma cada firma acrescenta um peso em sua reação as quantidades produzidas pela concorrência no período de tempo precedente. Partindo deste processo os autores mostram que um duopólio de Cournot pode produzir uma dinâmica caótica.

Já em [Ahmed and Agiza, 1998], os autores propõem uma generalização no número de firmas no modelo. O esforço empreendido aqui é no sentido de encontrar a função reação e o lucro ótimo de cada firma.

A questão da homogeneidade dos produtos é abordada em [Agliari et al., 2016]. Nesse estudos as firmas que compõem um duopólio de Cournot fabricam produtos substituíveis, isto é não homogêneos. O grau de substituição é dado por um parâmetro na função demanda inversa de cada firma. Quando mais próximo de zero estiver o parâmetro maior será a diferença entre os produtos e o contrario acontece quando ele estiver mais próximo de um. Ainda considerando esse estudo podemos verificar o processo de ajuste investigado pelos autores. Nessa dinâmica a produção no passo de tempo $t + 1$ será dada por uma função que depende da produção e da produção marginal no tempo t. O produto marginal nesse processo é ponderado por uma constante de velocidade de ajuste para firma um e para firma 2. Por fim os autores concluem que, com a função demanda inversa estudada, uma diferenciação muito grande dos produtos pode levar a uma instabilidade no equilíbrio de Nash levando a uma dinâmica caótica.

Em [Askar and Alshamrani, 2014] os autores estudam um oligopólio de três firmas com produtos diferenciados, a demanda inversa é considerada linear. Assim como no artigo citado anteriormente a diferenciação dos produtos é dada por um parâmetroO processo de ajuste estudado aqui é idêntico ao citado anteriormente em [Agliari et al., 2016], contudo, nesse caso, existe uma terceira firma. Esta por sua vez assume que sua produção será sempre igual a produção marginal. Posteriormente os autores investigam as condições necessárias para existir equilíbrio na dinâmica estudada.

Outros trabalhos se dedicam a estudar os diferentes processos de ajuste que podem ser empregados em um oligopólio. Usando a linguagem da teoria dos jogos podemos dizer que tais dinâmicas são jogos não competitivos. Esse é o caso de [Askar et al., 2015], onde os autores investigam quatro dinâmicas distintas para o modelo de Cournot. Na primeira delas, as firmas são limitadamente racionais, ou seja, sua produção no tempo $t + 1$ depende de sua produção e lucro marginal, ponderado por uma constate, no tempo t. Na segunda dinâmica, as firmas possuem conhecimento limitado do mercado e, portanto, para encontrar sua produção no tempo $t + 1$ não é necessário que elas conheçam a forma de sua função lucro. Tudo que elas precisam conhecer é a produção e o lucro dos últimos dois passos de tempo. A terceira dinâmica consiste num modelo similar ao das firmas limitadamente racionais, porém, dessa vez com um atraso. Ou seja além dos fatores já mencionados a firma considera o lucro marginal de dois passos de tempo anteriores para calcular a quantidade que será produzida no próximo passo de tempo. O efeito do atraso no modelo de Cournot também é explorado em [Gori et al., 2015]. Em [Du et al., 2013] o mecanismo de ajuste estudado também é limitadamente racional, porém, neste trabalho os autores investigam o efeito de limites inferiores e superiores na produção. Condições para encontrar o equilíbrio de Nash nesta dinâmica também são exploradas.

Existe ainda a possibilidade de que as firmas adotem estratégias diferentes na dinâmica usando processos de ajuste distintos. Esse é o caso estudado em [Elsadany, 2015], onde os autores investigam a dinâmica de um oligopólio onde uma das firma usa uma estrategia limitadamente racional e a outra usa uma aproximação local. Assim como nos trabalhos já citados simulações numéricas são feitas com o intuito de investigar os pontos de equilíbrio e a sensibilidade dos parâmetros. A racionalidade limitada também aparece em [Elsadany, 2017], porém, nesse caso, os autores usam o lucro relativo na dinâmica e os produtos de cada firma como sendo não idênticos.

Como já foi mencionado as firmas em situação de oligopólio podem não competir da mesma maneira. Sendo possível uma delas competir por preço enquanto a outra compete por quantidade. Nestes casos, uma variação do modelo de Cournot, conhecida como modelo de Cournot-Bertrand, é geralmente proposta. Tal abordagem é adotada em [Tremblay and Tremblay, 2011]. Nesse trabalho os autores investigam firmas com produtos não idênticos e com estrategias diferentes. Um modelo de Cournot-Bertrand é proposto também em [Tremblay and Tremblay, 2019]. Dessa vez os autores atribuem valores as contantes do problema e partindo disso encontram os valores das seguintes variáveis: lucro, preço e quantidade. Isso é em quatro modelos diferentes. São eles, Bertrand, Cournot, um modelo de cartel e por último, Cornot-Bertrand. É concluído

que a firma que compete por quantidade, ou seja Cournot, tem lucro maior que sua concorrente, pelo menos sobre as condições dadas pelos autores.

É possível que um mercado conte com a presença de uma firma estatal e nesse caso a dinâmica do oligopólio passa a ter algumas especificidades. Por exemplo, a firma estatal não buscará o lucro máximo, mas sim a quantidade ou preço que maximize o excedente total do mercado. Em outras palavras a firma estatal irá buscar o maior bem estar possível dentro do mercado. Essa situação é investigada em [De Fraja, 2009].

A versatilidade do modelo de Cournot permite que ele seja usado, com as devidas adaptações, em uma grande quantidade de situações de mercado. Em [Bagwell and Staiger, 2012] diferente dos casos que mencionamos até aqui, os autores empregam o modelo de Cournot para estudar o comportamento de um oligopólio quando as firmas que o compõem não pertencem a um mesmo pais e comercializam seus bens globalmente. Dessa maneira o surgem outras variáveis tais como, preço externo e interno, oferta interna e externa, número de firmas interno e externo, no modelo. O esforço inicial empreendido pelos autores desse estudo está em encontrar as quantidades ótimas do modelo, sejam elas internas e externas. Logo em seguida os pesquisadores investigam o efeito de taxas de exportação nessas quantidades ótimas.

Para abordagens que consideram modelos do tipo Bertrand, onde as firmas competem por preço, veja [Haraguchi and Matsumura, 2016, Symeonidis, 2003] e referências. Já o caso em que tanto a mudança no número de firmas quanto a distinção dos produtos por elas fabricados são relevantes veja [Andaluz et al., 2017].

Nesse ponto o leitor deve ter desenvolvido ao menos uma intuição de que quando uma firma oligopolista precisa tomar suas decisões, seja em relação a quantidade que irá produzir ou aos preços que pretende praticar, é imperativo que ela esteja ciente de diversas informações do mercado. Os lucros e produções de suas concorrentes, por exemplos, são informações valiosas para uma empresa pertencente a um oligopólio na hora da tomada de decisão. Com isso em mente, uma questão que certamente deve vir na cabeça de qualquer um que se debruce sobre o estudo dos oligopólios. "Seria o histórico do lucro ou da produção das firmas uma variável importante nos modelos de dinâmica de oligopólio?". Como mencionado anteriormente, existem dinâmicas onde cada agente econômico utiliza informações com um atrasos de tempo. Isto é, as firmas consideram informações de alguns passos de tempo anteriores aqueles onde elas estão. No entanto, elaborar um modelo matemático em que todo o histórico do mercado seja considerado ainda parece ser uma tarefa complicada. E é nesse ponto que a teoria do cálculo fracionário pode ter contribuições importantes para o estudo dos oligopólios, haja visto que as derivadas de ordem fracionária possuem propriedades de memória, (veja Observação 2.4 em [Diethelm, 2010]).

Em [Tarasova and Tarasov, 2018] e [Tarasov, 2019], os autores já deram alguns passos nessa direção. E se propuseram a discutir a interpretação das derivadas fracionárias de uma função de natureza econômica. Apresentaremos alguns detalhes a respeito desse tema que consideramos relevantes para esta dissertação na Seção 5

Em resumo podemos dizer que o que faremos nesse trabalho é partir de um modelo do tipo

Cournot e empregar as derivadas fracionarias no lugar onde antes as derivadas de ordem inteira eram usadas. Dessa forma estaremos construindo um novo modelo em que as propriedades das derivadas de ordem não inteira se fazem presentes. Uma vez que isso tenha sido feito iremos concentrar nossos esforços em comparar os dois modelos e verificar se algum deles oferece vantagem, na forma de aumento de lucro, para a firma que decidir emprega-lo.

1.1 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

A dissertação está organizada em cinco capítulos. Assim, nessa seção descreveremos de forma breve sobre o que cada um desses capítulos, bem como suas respectivas seções, tratam. Também, apresentaremos as motivações que nos levaram a escrever e desenvolver cada parte do trabalho.

- O Capítulo 2 é dedicado a apresentação de alguns tópicos referentes a teoria do cálculo fracionário que serão utilizados ao longo da dissertação. Distribuídos pelas seções deste capítulo, apresentamos uma breve contextualização histórica do desenvolvimento desse ramo de estudo da matemática, bem como as definições de integrais e derivadas de ordem fracionária segundo Caputo e Riemann-Liouville, as quais serão as adotadas nesta dissertação. Também aproveitaremos este capítulo para apresentar algumas funções especiais e suas derivadas de ordem fracionária, as quais também aparecerão de forma recorrente no restante do trabalho. Como o cálculo de ordem fracionária é muito vasto, a apresentação que faremos nesta dissertação não têm o objetivo de esgotar o tema, mas sim fornecer ferramentas de cunho teórico e histórico para que o restante do trabalho tenha maior embasamento técnico. Para maiores detalhes sugerimos consultar [Diethelm, 2010, Camargo et al., 2009] e referência.

- O Capítulo 3 é focado em apresentar a teoria econômica que será usada no restante do trabalho. Para fazer isso dividiremos o capítulo em múltiplas seções. Na primeira delas discutiremos de forma breve como definir o ente econômico que definimos por firma. Em seguida apresentaremos o modelo de Cournot e falaremos de suas principais característica, como por exemplo quais são as variáveis que o compõem e qual fenômeno ele busca descrever algumas variações desse modelo. Fazendo isso esperamos trazer ao trabalho embasamento teórico para prosseguir com nossas investigações.

- No Capítulo 4 apesentamos alguns modelos conhecidos como processos de ajuste, que visam modelar através de dinâmicas discretas o comportamento das firmas que compõem o oligopólio. Dessa maneira é possível descrever a competição oligopolista de modo mais realista, uma vez que a modelagem dada dessa forma considera o tempo como uma variável relevante.

- No Capítulo 5 apresentamos as principais novidades desta dissertação. Iniciamos apresentando uma interpretação das derivadas de ordem fracionária em economia. Com tal interpretação em mente, propomos um modelo de ajustes para firmas em duopólio, introduzindo as derivadas de ordem não inteira. Chamamos este modelo de modelo de Cournot fracionário. O modelo proposto se diferencia dos modelos encontrados na literatura, pois incorpora propriedades de memória advindas das derivadas de ordem fracionária, tornando-se assim um modelo não míope, como os apresentados no Capítulo 4. Estudamos a estabilidade do modelo proposto e investigamos as possíveis vantagens e

desvantagens quando adotados pelas firmas que compõem o duopólio. Em particular, mostramos que, a firma que possuir maior memória (associada a ordem da derivada) terá um lucro maior que a sua concorrente.

- No Capítulo 6, apresentamos as conclusões e uma série de resultados que podem ser generalizados utilizando as ideias apresentadas neste trabalho.

- No Apêndice, apresentamos um material complementar a estrutura e resultados desta dissertação.

Capítulo 2

Cálculo Fracionário

Neste capítulo apresentaremos os principais conceitos e definições envolvendo a teoria do Cálculo Fracionário que serão utilizados nesta dissertação. Dessa maneira construiremos o embasamento teórico necessário para o desenvolvimento do restante do trabalho. Além disso, ao dedicar esforço para apresentar e detalhar aspectos importantes do desenvolvimento histórico da teoria do cálculo fracionário estamos também reunindo um bibliografia a respeito desse tema que pode ser útil para trabalhos futuros. Somado a isso vêm o fato de que entender os principais pontos na história do cálculo fracionário é uma excelente maneira de se obter uma familiaridade com o tema.

2.1 UMA BREVE INTRODUÇÃO HISTÓRICA AO CÁLCUL FRACIONÁRIO

Podemos dizer que o cálculo fracionário teve sua origem a partir da seguinte questão: Qual o significado de $\frac{d^n y}{dx}$ quando n não é um número inteiro. Tal dúvida foi levantada pelo matemático L'Hospital(1661-1704) em 1695 em uma carta endereçada para o famoso matemático Leibniz(1646-1716). Leibniz, por sua vez, escreveu para L'Hospital dando a seguinte resposta: Segue que $d^{\frac{1}{2}}x$ será igual a $x\sqrt{dx : x}$. Ainda na mesma carta Leibniz disse: Este é um aparente paradoxo, a partir do qual, um dia, resultados importantes serão descobertos, veja [Ross, 1977]. Desde então outros importantes matemáticos, tais como Fourier, Lacroix, Lagrange, Liouville, Riemann, (só para citar alguns) deram suas contribuições para o desenvolvimento da teoria do cálculo fracionário. Veja [Guo et al., 2015], [Ross, 1977] , [Loverro, 2004] e referências para maiores detalhes.

Depois do episódio com a carta mencionada acima, a primeira citação que pudemos averiguar a respeito do cálculo fracionário veio em um texto do matemático francês S. F. Lacroix escrito em 1819. Neste texto, Lacroix dedicou praticamente setecentas paginas para tratar do cálculo diferencial e integral (de ordem inteira) e apenas duas para o cálculo fracionário, veja [Ross, 1975].

As contribuições de Lacroix para o cálculo fracionário podem ser descritas da seguinte forma: Partindo da função $y = x^n$, para $n > m$ e m, n naturais, temos que

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{(n)!}{(n-m)!}x^{n-m}$$

De forma generalizada, ele tomou $m = \frac{1}{2}$ na expressão acima, donde é possível deduzir a seguinte igualdade

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}+1\right)}x^{n-\frac{1}{2}},$$

onde Γ é a generalização do fatorial para números reais conhecida como função Gamma de Euler. Veja a Seção 7.1 no Apêndice 7 para detalhes.

Em particular, tomando como exemplo $n = 1$ na classe de funções do tipo $y = x^n$ e considerado as deduções acima, Lacroix obteve a seguinte expressão[1]

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x}$$

que coincide com o resultado inferido por Leibiniz em sua carta de resposta a L'Hospital.

Apensar de muitos matemáticos notórios terem dedicado algum tempo para estudar o cálculo fracionário, foi Niels Henrik Abel quem primeiro encontrou uma aplicação para essa teoria.

[1]Como pode ser verificado na Seção 7.1 do Apêndice 7, são validas as seguintes igualdades, $\Gamma(2) = 1$ e $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ele usou o cálculo fracionário para resolver uma equação integral que levou a formulação do problema da tautócrona, [Ross, 1975]. Problema este que trata de encontrar uma curva na qual independe do ponto inicial que uma partícula sob a ação da gravidade vai chegar ao ponto mais baixo da curva no menor período de tempo. A forma como o cálculo fracionário foi usado neste problema chamou a atenção de um outro famoso matemático chamado Liouville. Algum tempo depois, Liouville foi o primeiro a dar uma definição formal para as derivadas fracionárias, veja [Ross, 1975].

A ideia de Liouville pode ser resumida da seguinte forma. Como para n natural, vale que

$$D^n e^{ax} = a^n e^{ax} \,,$$

então o resultado pode ser estendido para um $v > 0$ e arbitrário (desde que $a > 0$) como

$$D^v e^{ax} = a^v e^{av} \,.$$

Além disso, se f é uma função tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x} \,, \tag{2.1.1}$$

$$\tag{2.1.2}$$

ou seja, que pode ser escrita como uma série de funções então, para m natural, vale que

$$D^m f(x) = \frac{d^m}{dx^m}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^m e^{a_n x}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^{m+1} e^{a_n x - 1} \tag{2.1.3}$$

Note que que algumas suposições, bastante fortes, foram feitas para garantir que (2.1.3) seja verdadeira. Por exemplo, podemos notar que não sabemos nada a respeito da convergência de (2.1.3). Uma vez que a única condição exigida até aqui é que $f(x)$ possa ser escrita como uma serie de funções. Além disso, nada do que vimos até o momento garante que o a derivada possa ser aplicada na serie do modo como foi feito em 2.1.3. Por essa razão, é fácil perceber que para $D^m f(x)$ existir é necessário que algumas condições sejam satisfeitas. Tais condições são dadas pelo Teorema (7.1.3), apresentado no Apêndice 7. Em outras palavras, para que (2.1.3) seja verdadeira é necessário que os termos do somatório sejam, pelo menos, tais que a série das derivadas convirja uniformemente. Dito isso, o que podemos dizer a respeito dessa formula é que as exigências para que ela seja valida podem ser tantas que acabam por tornar essa definição pouco atrativa. No entanto, tal formulação desempenha um importante papel no desenvolvimento do cálculo fracionário.

O que faremos agora é generalizar a igualdade 2.1.3 para $\alpha_1 \in \mathbb{R}_+$. E, por consequência, teremos,

$$D^{\alpha_1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^{\alpha_1} e^{a_n x}$$

Esta fórmula ficou conhecida como a primeira definição de Liouville, veja [Ross, 1975]. Em resumo, podemos dizer que a ideia que está por trás dessa formulação consiste em escrever a derivada de uma função como uma serie cujo o número correspondente a ordem da derivada é um termo explicito. Isso é feito de tal modo que, para encontrar a derivada de ordem m de uma função basta substituir o valor de m na serie encontrada. Portanto a ideia de Liouville para encontrar a derivada de ordem não inteira é tomar esse valor m como um α_1 pertencente aos números reais. No entanto, como vimos essa formula está restrita a valores de m, ou de α_1, para os quais a série com as derivadas converge. O que pode ser uma limitação muito grande.

Em virtude disso Liouville formulou uma segunda definição baseada na função Gamma. Alguns detalhes desta formulação seguem. Primeiramente, defina a seguinte integral

$$I_x = \int_0^{\infty} u^{\alpha_2 - 1} e^{-xu} du \,,$$

onde $\alpha_2 > 0$.

Tomando agora $t = xu$, temos que $du = \frac{1}{x} dt$. Assim, substituindo as variáveis na integral acima, temos

$$I_x = \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha_2 - 1}}{x^{\alpha_2 - 1}} e^{-t} \left(\frac{1}{x}\right) dt = \frac{1}{x^{\alpha_2}} \int_0^{\infty} t^{\alpha_2 - 1} e^{-t} dt \,.$$

A integral do lado direito da igualdade é, como veremos mais adiante, justamente a definição da função Gamma de Euler (veja (8) no Capítulo 7). Logo, podemos escrever a igualdade acima da seguinte forma:

$$I_x = \Gamma(\alpha_2) x^{-\alpha_2} \,.$$

Reorganizando a igualdade em termos de x, temos

$$x^{-\alpha_2} = \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_0^{\infty} u^{\alpha_2 - 1} e^{-xu} dt \tag{2.1.4}$$

Aplicando a derivada de ordem inteira m dos dois lados da igualdade e usando o teorema fundamental do cálculo do lado direito, concluímos que

$$\begin{aligned} D^m x^{-\alpha_2} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \frac{d^m}{dx^m} \left[\int_0^{\infty} u^{\alpha_2 - 1} e^{-xu} du \right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_0^{\infty} u^{\alpha_2 - 1} \frac{d^m}{dx^m} \left[e^{-xu} \right] du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_0^{\infty} u^{\alpha_2 - 1} (-1)^m u^m e^{-xu} du = \frac{(-1)^m}{\Gamma(\alpha_2)} \int_0^{\infty} u^{\alpha_2 + m - 1} e^{-xu} du \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Aplicando novamente a mudança de variável $t = xu$, temos que,

$$\frac{(-1)^m}{\Gamma(\alpha_2)} \int_0^\infty \left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha_2+m-1} e^{-t} \frac{1}{x} dt = \frac{(-1)^m x^{-\alpha_2-m}}{\Gamma(\alpha_2)} \int_0^\infty t^{\alpha_2+m-1} e^{-t} dt\,,$$

Uma vez que a integral presente na equação acima é igual aquela em 2.1.4.

Como o lado direito da igualdade (2.1.5) pode ser generalizado para $m \in \mathbb{R}_+$ tal que $(-1)^m$ seja real, temos a seguinte definição.

Definição 1 (Derivada de ordem fracionária segundo Liouville)**.** *Seja $m \in \mathbb{R}_+$. A derivada de ordem m segundo Liouville para uma função da forma $f(x) = x^{-\alpha_2}$, para $\alpha_2 > 0$ é dada por*

$$D^m x^{-\alpha_2} = (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha_2 + m)}{\Gamma(\alpha_2)} x^{-\alpha_2-m} \tag{2.1.6}$$

para todo $x \in D(f)$.

A fórmula (2.1.6) é conhecida como a segunda definição de cálculo fracionário de Liouville, veja [Debnath, 2004]. Porém, assim como a primeira definição proposta por Liouville, essa também possui limitações e está restrita a funções racionais. Além disso é possível observar uma discrepância entre a definição proposta por Liouvile e aquela formulada por Lacroix. De fato, considere a função $f_a(x) = x^a$, para algum $a > 0$. A derivada de ordem m de f_a segundo Lacroix é dada por

$$\frac{d^m x^a}{dx^m} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-m+1)} x^{a-m}$$

. Enquanto que a derivada de ordem m de f_a segundo Liouville é dada por

$$\frac{d^m x^a}{dx^m} = (-1)^m \frac{\Gamma(-a+m)}{\Gamma(-a)} x^{a-m}$$

.

Somada a essa diferença nos valores também existe o fato de que as condições para que as definições de Lacroiz e de Liouville existam não são as mesmas, haja visto que a integral presente na definição de Liouville não converge para todo α_2, o que restringe ainda mais o tipo de função a qual podemos aplicar tais definições.

Essa discrepância nos resultados das duas definições para a derivada fracionária levou a uma série de debates de qual dos dois métodos era o melhor. O resultado disso é que por muito tempo os matemáticos se dividiram entre essas duas definições sem chegar a um consenso. E mesmo com o progresso dos estudos a respeito do cálculo fracionário, essa questão só foi solucionada com muita dificuldade. Além disso, o leitor deve ter notado que nem a definição de Lacroix nem a definição de Liouville dão conta de calcular a derivada de ordem não inteira de uma função trigonométrica. Uma grande contribuição para resolver essa questão foi dada por Greer, veja [Bhatta, 2007].

Para entender a ideia proposta por Greer, considere a seguinte relação entre variáveis complexas e funções trigonométricas, também conhecida como formula de Euler, cuja demonstração

pode ser encontrada em [Florentino, 2011].

Teorema 2.1.1 (Formula De Euler)**.** *Considere um número complexo $a + ib$ e seu modulo $\rho = |a^2 + b^2|$. O número $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\rho cos(\theta) = a$ e $\rho sen(\theta) = b$ é chamado de argumento de $a + ib$. E vale a seguinte igualdade,*

$$e^{i\theta} = cos(\theta) + isen(\theta)$$

Defina, agora, uma função do tipo $f(x) = e^{i\theta x}$, onde $\theta \in \mathbb{R}$. De acordo com o Teorema 2.1.1, sabemos que essa função pode ser reescrita da seguinte maneira,

$$e^{i\theta x} = cos(\theta x) + isen(\theta x)$$

Aplicando a derivada m vezes em ambos os lados da equação, obtemos

$$D^m e^{i\theta x} = i^m \theta^m e^{i\theta x} = i^m \theta^m \left[cos(\theta x) + isen(\theta x)\right] \tag{2.1.7}$$

Como o número complexo i possui modulo igual a 1 e o argumento igual a $\frac{\pi}{2}$, concluímos que

$$\begin{aligned} i =& e^{i\frac{\pi}{2}} = cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \Longrightarrow& \\ i^m =& e^{im\frac{\pi}{2}} = cos\left(m\frac{\pi}{2}\right) + isen\left(m\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Assim, a equação (2.1.7) pode ser reescrita como

$$D^m e^{i\theta x} = \theta^m \left(cos\left(m\frac{\pi}{2}\right) + isen\left(m\frac{\pi}{2}\right)\right)\left(cos(\theta x) + isen(\theta x)\right) . \tag{2.1.8}$$

Efetuando a multiplicação, obtemos

$$\begin{aligned} D^m e^{i\theta x} =& \theta^m \left(cos\left(m\frac{\pi}{2}\right) cos(\theta x) - sen\left(m\frac{\pi}{2}\right) sen(\theta x)\right) + \\ &+ \theta^m \left(cos(\theta x) isen\left(m\frac{\pi}{2}\right) + cos\left(m\frac{\pi}{2}\right) isen(\theta x)\right) . \end{aligned}$$

Da equação acima, segue-se que,

$$D^m e^{i\theta x} = \theta^m cos\left(m\frac{\pi}{2} + \theta x\right) + i\theta^m sen\left(m\frac{\pi}{2} + \theta x\right) . \tag{2.1.9}$$

Como

$$\begin{aligned} D^m e^{i\theta x} =& D^m \left[cos(\theta x) + isen(\theta x)\right] \\ =& \frac{d^m}{dx^m}\left[cos(\theta x)\right] + i\frac{d^m}{dx^m}\left[sen(\theta x)\right] , \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

segue-se da comparação de (2.1.9) com (2.1.10) que

$$\begin{aligned}\frac{d^m}{dx^m}\left[cos(\theta x)\right] &= \theta^m cos\left(m\frac{\pi}{2}+\theta x\right) \\ \frac{d^m}{dx^m}\left[sen(\theta x)\right] &= \theta^m sen\left(m\frac{\pi}{2}+\theta x\right)\,.\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

Generalizando (2.1.11) para $v \in \mathbb{R}$ temos,

$$D^v e^{i\theta x} = \theta^v\left(cos\left(v\frac{\pi}{2}\right)+isen\left(v\frac{\pi}{2}\right)\right)\left(cos(\theta x)+isen(\theta x)\right) \tag{2.1.12}$$

Outro matemático que teve certa influência no processo de desenvolvimento das derivadas e integrais fracionárias foi Joseph Fourier(1768-1830). Podemos dizer que sua principal contribuição foi conseguir representar uma função $f(x)$ a partir de integrais, veja [Hilfer et al., 2010] e [Camargo et al., 2009]. As contribuições de Fourier começam por observar que, para

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\epsilon)d\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} cos(t(x-\epsilon))dt\,, \tag{2.1.13}$$

podemos aplicar a derivada de ordem n (natural) em ambos os lados lados de (2.1.13). Desta aplicação e do Teorema Fundamental do Cálculo, chegamos a seguinte igualdade

$$D^n f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\epsilon)d\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} t^n cos\left[t(x-\epsilon)+\frac{n\pi}{2}\right]dt\,.$$

Trocando $n \in \mathbb{N}$ por $v \in \mathbb{R}_+$ chegamos em

$$D^v f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\epsilon)d\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} t^v cos\left[t(x-\epsilon)+\frac{v\pi}{2}\right]dt \tag{2.1.14}$$

Tal formulação pode ser encarada como mais uma proposta para determinar uma derivada de ordem v com $v \notin \mathbb{N}$, veja [Debnath, 2004]. No entanto, trocar $n \in \mathbb{N}$ por $v \in \mathbb{R}$ certamente não é o suficiente para garantir que a igualdade (2.1.14) permaneça valida. Uma vez que a fórmula para encontrar a derivada de uma função representada de por integrais como pensada por Fourier foi demonstrada apenas para derivadas de ordem inteira. Por conta disso, assim como as definições de derivada fracionaria apresentadas anteriormente esta também possui limitações quanto aos tipos de funções para as quais podemos aplica-lá. Por exemplo, precisamos ter certeza de que as integrais convergem.

Outro episodio marcante na historia do desenvolvimento do cálculo fracionário foi protagonizado por Riemann (1826-1866). Segundo [Ross, 1975], em 1847, Riemann, ainda como estudante, escreveu um estudo onde propunha uma outra definição para os operadores de ordem não inteira. Ainda, segundo [Ross, 1975], podemos dizer que é possível que Riemann tenha sido influenciado pelos escritos de Liouville onde o raciocínio abaixo foi elaborado.

Considere a equação diferencial ordinária homogênea de ordem n, dada por

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = 0 \tag{2.1.15}$$

Sabemos que essa equação tem a solução complementar dada por,

$$f_c(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-2} x^{n-2} + c_{n-1} x^{n-1}. \tag{2.1.16}$$

Logo podemos deduzir que,

$$\frac{d^v f(x)}{dx^v} = 0$$

deve ter uma solução correspondente, para v não necessariamente natural.

Com essa ideia em mente e considerando a generalização das series de Taylor, Riemann propôs a seguinte definição para a integral fracionária e sua respectiva função complementar.

Definição 2 (Integral Fracionária Segundo Riemann)**.** *Seja $f(x)$ uma função integrável e $v \in \mathbb{R}$. Então a integral de ordem v de $f(x)$ é dada por:*

$$J^v f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_c^x (x-t)^{v-1} f(t) dt + \Psi(x)$$

onde $\Psi(x)$ deve ser determinada.

É interessante comentar acerca da formula de Cauchy para derivadas repetidas. Pois, este teorema foi relevante no desenvolvimento da teoria do cálculo fracionário e certamente influenciou Riemann em seus estudos. Uma vez que tal teorema trata de encontrar uma generalização para derivadas de ordem n de uma função $f(z)$. Vejamos.

Teorema 2.1.2 (Formula Integral De Cauchy)**.** *Considere f uma função analítica no interior de e sobre um caminho fechado C. Se z_0 é um ponto do interior de C então:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Munidos do teorema é possível encontrar uma maneira generalizada de escrever a derivada de ordem n de um função analítica.

Teorema 2.1.3 (Fórmula Integral de Cauchy para derivadas)**.** *Se f é analítica no interior de um circulo C, com raio igual $|z - z_0|$ então:*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Para mais detalhes a respeito dos resultados acima consulte [Brown and Churchill, 2015].

A ideia mais natural, para deduzir uma derivada de ordem não inteira, que podemos ter depois de observar (2.1.3) é substituir $n \in \mathbb{N}$ por $v \in \mathbb{R}$, o que resulta em

$$f^{(v)}(z_0) = \frac{\Gamma(v+1)}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{v+1}} dz$$

Este raciocínio foi apresentado em [Ross, 1977]. Não existe problemas em substituir n por $\Gamma(v+1)$, pois a função gama é equivalente ao fatorial quando $v \in \mathbb{N}$. No entanto para substituir n inteiro por um v racional no interior da integral é necessário tomar alguns cuidados. Pois ao fazer isso estamos alterando a ordem dos polos da função e consequentemente sua expansão e series de Laurent.

Neste ponto é possível notar que desde a carta escrita por Leibniz foram feitas diversas tentativas para se encontrar a derivada e a integral de ordem não inteira. No entanto, considerando tudo o que vimos até o momento podemos perceber que faltam critérios para avaliar se um operador pode ser encarado como uma derivada, ou integral, fracionaria. Tal problema foi solucionado em [Ross, 1975]. Nesse estudo, o autor propõem uma pequena lista de propriedades que um operador deve satisfazer para ser considerado uma derivada fracionária. Vejamos no enunciado a seguir quais são tais propriedades.

Para toda função $f(z)$, onde $z = x + iy$, tal que f seja suficientemente suave. Seja v um número real ou complexo. A função $D_z^v f(z) = g(z)$ deve satisfazer os seguintes critérios:

1. Se $f(z)$ é uma função analítica da variável complexa z, então a derivada $D_z^v f(z)$ é uma função analítica das variáveis (z, v).

2. O operador $D_z^v f(z)$ deve produzir os mesmos resultados da derivada de ordem inteira quado $v \in \mathbb{N}$. Caso $v \in \mathbb{Z}^-$ o operador deve resultar na integral de ordem v da função $f(z)$. Por ultimo, o operador deve gerar a própria função quando aplicamos a derivada de ordem $v - 1$.

3. O operador $D_z^v f(z)$ não modifica a função $f(z)$ quando $v = 0$.

4. O operador $D_z^v f(z)$ deve ser linear, ou seja,

$$D_z^v \left[af(z) + bg(z)\right] = aD_z^v f(z) + bD_z^v g(z)$$

5. A lei dos expoentes para integrais de ordem arbitraria

$$J_z^v J_z^w f(z) = j_z^{v+w} f(z)$$

   deve ser válida.

Uma definição que satisfaz a todas essas propriedades recebeu o nome em homenagem a Riemann e a Louville. Ela pode ser escrita da seguinte maneira.

Definição 3 (Derivada Fracionária Segundo Riemann-Liouville.)**.** *A derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de ordem $n-v$ de uma função $f(x)$, de acordo com [Dalir and Bashour, 2010], é dada por:*

$$D_x^{n-v} f(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^x (x-t)^{v-1} f(t)dt\right]$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $v \in [0, 1]$

Para construir essa definição precisamos antes apresentar alguns teoremas, que podem ser encontrados em [Guo et al., 2015]. Tais resultados tem a incumbência de descrever de maneira genérica a integral de ordem n de uma função $f(x)$.

Teorema 2.1.4. *[Integrais Múltiplas de um Núcleo.] Seja $f(x)$ uma função integrável. Sua integral de ordem n é dada por*

$$J^n f(x) = \int_0^x K_n(x,\tau) f(\tau) d\tau \,, \tag{2.1.17}$$

para alguma função $K_n(x,\tau)$. A função $K_n(x,\tau)$ é chamada de núcleo de integração (função Kernel).

O que faremos a seguir é exemplificar o uso do teorema 2.1.4 encontrando as integrais de ordem 1,2 e 3 de uma certa função $f(x)$. Tal esforço tem o objetivo de mostrar de forma empírica a possível forma do núcleo de integração $K_n(x,\tau)$ de uma integral de ordem n.

Seja $n = 1$. Podemos verificar de forma imédiata que $K_1(x,\tau) = 1$ é a função Kernel que condiz com o Teorema 2.1.4 .

Consideremos agora $n = 2$. Segue que, após algumas manipulações algébricas (aplicação do Teorema de Fubinni veja [Lima, 2000]),

$$\begin{aligned} J^2 f(x) &= \int_0^x d\tau \int_0^\tau f(\tau_1) d\tau_1 \\ &= \int_0^x f(\tau) d\tau \int_\tau^x \tau_1 \\ &= \int_0^x (x-\tau) f(\tau) d\tau \,. \end{aligned}$$

0 que implica em

$$K_2(x,\tau) = (x-\tau) = \frac{(x-\tau)^1}{1!}$$

Para $n = 3$, aplica-se os resultados obtidos anteriormente e novamente o Teorema de Fubini, para obtermos que

$$\begin{aligned} J^3 f(x) &= \int_0^x d\tau \int_0^\tau d\tau_1 \int_0^{\tau_1} f(\tau_2) d\tau_2 \\ &= \int_0^x d\tau \int_0^\tau f(\tau_1)(\tau - \tau_1) \\ &= \int_0^x f(\tau) d\tau \int_\tau^x (\tau_1 - \tau) d\tau_1 \\ &= \int_0^x f(\tau) \frac{(x-\tau)^2}{2!} \,, \end{aligned}$$

resultando em

$$K_3(x,\tau) = \frac{(x-\tau)^2}{2!}$$

Com isso, podemos generalizar (usando, se necessário uma demonstração por indução) que a função Kerner no Teorema 2.1.4, satisfaz

$$K_n = \frac{(x-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\,. \tag{2.1.18}$$

O que faremos adiante é apresentar um teorema que garante que a função Kernel de uma integral de ordem n realmente é igual 2.1.18.

Teorema 2.1.5. *Integral De Ordem n. Seja $f(x)$ uma função integrável. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}_+$. A integral de ordem n de $f(x)$ é dada pela seguinte igualdade.*

$$J^n f(x) = K_n(x) \star f(t) = \int_0^x K_n(x-\tau) f(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau \tag{2.1.19}$$

para K_n função Kernel dada por (2.1.18).

Demonstração. A demonstração será feita por indução.

Para $n = 1$ a identidade (2.1.19) é válida, haja visto que, por definição $0! = 1$.

Suponha, por hipótese de indução que a (2.1.19) seja válida para n. Assim,

$$\begin{aligned} J^{n+1} f(x) &= J\left[J^n f(x)\right] = J\left[K_n * f(x)\right] = \int_0^x K_n(u) * f(u) du \\ &= \int_0^x \int_0^u \frac{(u-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau du\,. \end{aligned} \tag{2.1.20}$$

Invertendo a ordem de integração em (2.1.20) obtemos que

$$J^{n+1} f(x) = \int_0^x \left[\int_\tau^x \frac{(u-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} du\right] f(\tau) d\tau\,. \tag{2.1.21}$$

Agora precisamos solucionar a integral mais interna da igualdade (2.1.21), ou seja,

$$\int_\tau^x \frac{(u-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} du = \frac{(u-\tau)^n}{n!}\Big|_\tau^x \tag{2.1.22}$$

$$= \frac{(x-\tau)^n}{n!}\Big|_\tau^x \tag{2.1.23}$$

Substituindo (2.1.22) em (2.1.21) obtemos

$$J^{n+1} f(x) = \int_0^x \frac{(x-\tau)^n}{n!} f(\tau) d\tau\,, \tag{2.1.24}$$

o que conclui a demonstração. □

Agora, munidos de uma forma geral para escrever uma integral múltipla, podemos dar uma passo a frente e generalizar a ordem de integração $n \in \mathbb{N}$ para $v \in \mathbb{R}$. Portanto, uma expressão

para a uma integral fracionaria é dada por

Definição 4 (Integral Fracionaria.)**.** *Dada uma função integrável $f(x)$, chamamos de integral fracionária de ordem $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ segundo Riemann-Liouville por*

$$J_x^{\alpha_1} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^x (x-t)^{\alpha_1 - 1} f(t) dt \,. \tag{2.1.25}$$

Existem ainda mais dois resultados que precisamos demonstrar antes que possamos apresentar a dedução da derivada fracionária de Riemann-Liouville. Tratam-se de dois teoremas que recebem os nomes de: a lei dos expoentes pada derivadas e integrais e a lei dos expoentes para integrais fracionarias, retirados de [Diethelm, 2010] ou ainda em [Oliveira et al., 2014]..

Teorema 2.1.6 (Lei dos expoentes para derivadas e integrais)**.** *Seja $m, n \in \mathbf{N}$ tal que $m > n$, e seja f uma função com n derivadas continuas no intervalo $[a, b]$, então*

$$D^n f(x) = D^m J^{m-n} f(x) \tag{2.1.26}$$

Demonstração. Sabemos do Teorema Fundamental do Cálculo, VEJA [Lima, 1981], que a derivada de ordem n_0 da integral de ordem n_0 de uma função f é igual a própria função. Logo podemos afirmar que:

$$D^{m-n} J^{m-n} f(x) = f(x) \tag{2.1.27}$$

Aplicando a derivada de ordem n em ambos os lados da equação, obtemos

$$D^m J^{m-n} f(x) = D^n f(x) \,, \tag{2.1.28}$$

o que conclui a demonstração. □

Teorema 2.1.7 (Lei Dos Expoentes Para Integrais Fracionarias)**.** *Sejam J^ϵ e J^δ as integrais fracionaria de ordem ϵ e δ respectivamente. Seja também $f(x)$ uma função integrável. Logo a seguinte afirmação é verdadeira*

$$J^\epsilon J^\delta f(x) = J^\delta J^\epsilon f(x) = J^{\epsilon+\delta} f(x)$$

Demonstração. Primeiramente, considere a função (7.1.5) para os valores ϵ e δ e aplique o produto de convolução entre eles. Isso resulta em

$$\begin{aligned} \phi_\epsilon(t) * \phi_\delta &= \int_0^t \frac{\tau^{\epsilon-1}}{\Gamma(\epsilon)} \frac{(t-\tau)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} d\tau \\ &= \frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\epsilon)\Gamma(\delta)} \int_0^t \tau^{\epsilon-1} \left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^{\delta-1} d\tau \end{aligned}$$

onde colocamos t em evidencia e pomos a função Gamma em evidência na integral da última igualdade.

Fazendo a seguinte mudança de variável $u = \frac{\tau}{t}$ na equação anterior, obtemos que

$$\begin{aligned}\phi_\epsilon(t) \star \phi_\delta &= \frac{tu^{\delta-1}}{\Gamma(\epsilon)\Gamma(\delta)} \int_0^t tu^{\epsilon-1} (1-u)^{\delta-1} tdu \\ &= \frac{t^{\delta+\epsilon-1}}{\Gamma(\epsilon)\Gamma(\delta)} \int_0^t u^{\epsilon-1} (1-u)^{\delta-1} du\,.\end{aligned}$$

A integral acima coincide com a definição da função beta 7.1.3 apresentada no Apêndice 7. Portanto, segue se que

$$\phi_\epsilon(t) \star \phi_\delta = \frac{t^{\delta+\epsilon-1}}{\Gamma(\epsilon)\Gamma(\delta)} \alpha_2(\epsilon, \delta)\,.$$

Usando agora a relação entre a função Gamma e Beta em (7.1.2), concluímos que

$$\begin{aligned}\phi_\epsilon(t) \star \phi_\delta &= \frac{t^{\delta+\epsilon-1}}{\Gamma(\epsilon)\Gamma(\delta)} \frac{\Gamma(\epsilon)\Gamma(\delta)}{\Gamma(\epsilon+\delta)} \\ &= \frac{t^{\delta+\epsilon-1}}{\Gamma(\epsilon+\delta)}\end{aligned}$$

Logo temos que

$$\phi_\epsilon(t) \star \phi_\delta = \phi_{\epsilon+\delta}(t) \tag{2.1.29}$$

Observe que a integral fracionaria pode ser escrita da seguinte forma

$$J^\epsilon f(t) = \frac{1}{\Gamma(\epsilon)} \int_0^x (t-x)^{\epsilon-1} f(x)dx = \phi_\epsilon * f(t)\,.$$

Disso temos que

$$\begin{aligned}J^\epsilon J^\delta f(t) &= \phi_\epsilon(t) * \phi_\delta(t) * f(t) \\ &= \phi_{\epsilon+\delta}(t) * f(t) = J^{\epsilon+\delta} f(t)\,.\end{aligned}$$

□

Com isso possuímos as ferramentas necessárias para deduzir a definição de Riemann-Liouville para a derivada fracionária. Para fazer isso vamos considere a integral facionária conforme 4 de ordem $m = n - v$ de uma função $f(x)$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $v \in (0, 1)$, e a lei dos expoentes para derivada. Isso resulta em

$$J^m f(x) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^x (x-t)^{m-1} f(t)dt$$

Aplicando a derivada de ordem $n \in \mathbb{N}$ dos dois lados da equação acima temos

$$\begin{aligned} D^n J^m f(x) =& \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^x (x-t)^{m-1} f(t)dt\right] \\ D^n J^{n-v} f(x) =& \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-v)}\int_0^x (x-t)^{n-v-1} f(t)dt\right] \\ D^v f(x) =& \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-v)}\int_0^x (x-t)^{n-v-1} f(t)dt\right] \end{aligned}$$

Com chegamos até a definição de Riemann-Liouville, conforme apresentada em 3. O que faremos agora é verificar que ela satisfaz as propriedades sobre as quais discutimos anteriormente.

1. Vamos mostrar que se $f(x)$ é uma função analítica então a derivada fracionaria $D^\epsilon f(x)$ também será uma função analítica. Esse problema é equivalente a mostrar que se $f(x)$ pode ser expandida em serie de Taylor então o mesmo vale para função $g(x) = D^\epsilon f(x)$.

   Suponha que a derivada da função $f(x)$ de ordem $\epsilon = m - v$, com $m \in \mathbb{N}$ e $v \in (0,1)$ exista para todo valor de m e v.

$$g(x) = \frac{d^m}{dx^m}\left[\frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^x (x-t)^{v-1} f(t)dt\right]$$

   Pela lei dos expoentes sabemos que $D^a D^b h(x) = D^{a+n} h(x)$, para $a, b \in \mathbb{R}$. Em especial, vale para $a = n \in \mathbb{N}$ e $b = n - v$, com $v \in (0,1)$. Logo, aplicando a derivada de ordem $1, 2, 3, \ldots, n \ldots$ em $g(x)$ encontraremos:

$$\begin{aligned} \frac{d^1 g(x)}{dx^n} &= \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\left[\frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^x (x-t)^{v-1} f(t)dt\right] \\ \frac{d^2 g(x)}{dx^n} &= \frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}}\left[\frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^x (x-t)^{v-1} f(t)dt\right] \\ &\vdots \\ \frac{d^n g(x)}{dx^n} &= \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}\left[\frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^x (x-t)^{v-1} f(t)dt\right] \\ &\vdots \end{aligned}$$

   Portanto podemos construir a serie de Taylor da função $g(x)$. Veja:

$$g(x) = g(x_0) + \frac{g'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{g^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

2. Considere uma função integrável $f(x)$ com $x \in \mathbb{R}$ e aplique nela a derivada fracionaria de ordem $n - v$, com $n \in \mathbb{N} > 1$ e $v \in (0, 1)$. Disto obtemos que

$$D_x^{n-v} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-t)^{v-1} f(t) dt \right]$$

Para verificar o comportamento desse operador quando a ordem da derivada é um número natural substituiremos v por 1, e obtemos

$$D_x^{n-1} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^x (x-t)^{1-1} f(t) dt \right] = \frac{d^n}{dx^n} \left[\int_0^x f(t) dt \right]$$

3. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo obtemos que

$$D_x^{n-1} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left[F(x) - F(0) \right]$$

onde $F(x)$ representa a primitiva de $f(x)$. Assim, segue que

$$D_x^{n-1} f(x) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x)$$

Portanto, para $n - v$ inteiros temos que a derivada fracionaria segundo Riemann-Liuvile é idêntica a derivada de ordem inteira.

4. Considere novamente uma função integrável $f(x)$ e aplique a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de ordem $n - v$. Isso nos leva a

$$D_x^{n-v} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-t)^{v-1} f(t) dt \right]$$

Tome agora $n = 1 = v$, obtemos que

$$D_x^0 f(t) = D_x^{1-1} f(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^x (x-t)^{1-1} f(t) dt \right] = \frac{d}{dx} \left[F(x) - F(0) \right] = f(x)$$

onde aplicamos o teorema fundamental do cálculo na última identidade.

5. Considere $g(x)$ e $f(x)$ função integráveis, a,b e n pertencentes aos números naturais e v pertencentes aos números reais. Então

$$\begin{aligned} D_x^{n-v}\left[af(x)+bg(x)\right] =& \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^x (x-t)^{v-1}\left(af(x)+bg(x)\right)\right] \\ =& \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^x (x-t)^{v-1}af(x)+\frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^x (x-t)^{v-1}bg(x)\right] \\ =& aD_x^{n-v}f(x)+bD_x^{n-v}g(x) \end{aligned}$$

6. A quinta propriedade já foi demonstrada em 2.1.6.

A ultima definição da qual falaremos foi proposta em 1969 por Michele Caputo a fim de resolver um problema de viscoelasticidade, e.g., [Teodoro et al., 2017]. Posteriormente, em 1992, Caputo fez outras contribuições relevantes com relação a soluções de equações diferenciais fracionárias com condições iniciais aplicadas a problemas de sismologia [Caputo, 1992].

Definição 5 (Derivada Fracionária Segundo Caputo)**.** *Seja $f(x)$ uma função diferenciável e contínua com a derivada de ordem n igual a zero em $x = 0$. A derivada à esquerda de ordem fracionária $n - v$, como $v \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, dessa função é dada por*

$$D_x^{n-v}f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^x (x-t)^{v-1}\frac{d^n f(t)}{dt^n}dt \tag{2.1.30}$$

Note que a definição segundo Caputo é bastante parecida com a de Riemann-Liouville. A diferença fica por conta da ordem em que aplicamos os operadores integral fracionária e derivada. A seguir mostraremos que essa definição se enquadra nas propriedades a serem satisfeitas por uma derivada de ordem fracionária, como apresentadas anteriormente.

1. Seja $f(x)$ uma função classe C^∞ e seja $g(x) = D^{m-v}f(x)$ a derivada fracionaria segundo Caputo desta função, onde $m \in \mathbb{N}$ e $v \in (0, 1)$. Queremos mostrar que $g(x)$ possui derivadas de todas as ordens. Sabemos que $g(x)$ pode ser escrita da seguinte maneira:

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^x (x-t)^{v-1}f^m(t)dt$$

Como $f(x)$ é uma função analítica $f^m(x)$ também é. Logo chamando $f^m(x)$ de $h(x)$ temos que:

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^x (x-t)^{v-1}h(x)(t)dt$$

Aplicando a derivada de ordem $n \in \mathbb{N}$ em ambos os lados da igualdade:

$$\frac{d^n g(x)}{dx^n} = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-t)^{v-1} h(x)(t)dt$$

Repare que $\frac{d^n g(x)}{dx^n}$ é exatamente igual a derivada fracionaria segundo Riemann-Liouville de ordem $n - v$ da função $h(x)$. Como $h(x)$ é uma função analítica, e como foi verificado que a derivada fracionaria segundo Riemann-Liouville de uma função analítica é analítica, temos que $g(x)$ é uma função classe C^∞.

2. Considere uma função suficientemente diferenciável $f(x)$, com $f^{(n)}(0) = 0$. Aplicando a derivada fracionária segundo Caputo de ordem $n - v$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $v = 1$, obtemos que

$$D_0^{n-1} f(x) = \frac{1}{\Gamma(0)} \int_0^x (x-t)^0 f^{(n)}(t)dt = \int_0^x f^{(n)}(t)dt = f^{(n-1)}(t)\Big|_0^x = f^{(n-1)}(x)$$

Portanto, a derivada fracionária segundo Caputo é idêntica a derivada de ordem inteira quando $n - v$ é um número inteiro.

3. Seja $f(x)$ uma função diferenciável com $f(0) = 0$. Aplicando a derivada de ordem fracionária segundo Caputo com $n = v = 1$, obtemos

$$D_0^{1-1} f(x) = D_0^{1-1} f(x) = \frac{1}{\Gamma(0)} \int_0^x (x-t)^0 f^1(t)dt = \int_0^x f'(t)dt = f(t)\Big|_0^x = f(x)\,.$$

4. Sejam $g(x)$ e $f(x)$ funções integráveis, a,b e $n \in \mathbb{N}$ e $v \in \mathbb{R}$. Segue da definição da derivada de Caputo de ordem $n - v$ que

$$\begin{aligned} D_0^{n-v}\left[af(x) + bg(x)\right] =& \frac{1}{\Gamma(v)} \left[\int_0^x (x-t)^{n-v} \left(af(t) + bg(t)\right) dt\right] \\ =& a.\frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-t)^{n-v} f(t)dt + b.\frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-t)^{n-v} g(t)dt \\ =& aD_x^{n-v} f(x) + bD_x^{n-v} g(x) \end{aligned}$$

5. Como a integral de ordem fracionária de Caputo e Riemann-Liouville são as mesmas, segue que a quinta propriedade de derivadas fracionárias é satisfeita pela definição de Caputo, como demonstrado em 2.1.6.

2.1.1 Derivadas de ordem fracionária de algumas funções.

No desenvolvimento das próximas seções, a derivadas fracionarias de algumas funções particulares irão aparecer com frequência. Por conta disso, acreditamos que será proveitoso dedicar uma subseção para explorar tais resultados. Dito isso, o que pretendemos fazer nas próximas

paginas é realizar os cálculos necessários para se encontrar certas derivadas fracionarias das quais vamos necessitar mais adiante.

Derivada fracionaria de uma função polinomial

A derivada de uma função polinomial, talvez, seja uma das mais simples de se entender. Contudo, quando estamos tratando de cálculo fracionário, até as funções simples podem representar um desafio. Por conta disso faremos uma breve demonstração da derivada de ordem arbitrário de uma função polinomial segundo Caputo.

Lema 2.1.1. *Considere uma função do tipo $f(t) = t^a$ onde $a > 0$. Seja $v \in \mathbb{R}$ tal que $n-1 < v < n$, para $n \in \mathbb{N}$. Então a derivada de ordem fracionária $n - v$ segundo Caputo é dada por*

$$D_t^{n-v} f(t) = \frac{\prod_{i=0}^{n}(a-i)\Gamma(a-n+1)t^{v+a-1}}{\Gamma(v+a-n+1)}\,.$$

Demonstração. Segue da definição da derivada de ordem fracionária $n - v$ segundo Caputo (veja Definição 2.1.30) que

$$\begin{aligned} D_t^{n-v} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^t (t-x)^{v-1}\frac{d^n[x^a]}{dx^n}dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^t \left[t\left(1-\frac{x}{t}\right)\right]^{v-1}\prod_{i=0}^{n}(a-i)x^{a-n}dx \\ &= \frac{\prod_{i=0}^{n}(a-i)}{\Gamma(v)}\int_0^t \left[t\left(1-\frac{x}{t}\right)\right]^{v-1} x^{a-n}dx \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $x = ut$ (e por consequência $dx = tdu$) na equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned} D_t^{n-v} f(t) &= \frac{\prod_{i=0}^{n}(a-i)}{\Gamma(v)}\int_0^1 \left[t\,(1-u)\right]^{v-1}(ut)^{a-n}tdu \\ &= \prod_{i=0}^{n}(a-i)\frac{t^{v+a-n}}{\Gamma(v)}\int_0^1 (1-u)^{v+a-1}u^{a-n}du\,. \end{aligned}$$

Note que a integral remanescente é exatamente a definição da função beta, dada na Definição 9. Portanto,

$$D_t^{n-v} f(t) = \prod_{i=0}^{n}(a-i)\frac{t^{v+a-n}}{\Gamma(v)}\beta(a-n+1,v)\,.$$

Usando a relação entre a função Gamma e Beta (veja (7.1.2)) obtemos

$$D_t^{n-v} f(t) = \prod_{i=0}^{n} (a-i) \frac{t^{v+a-n}}{\Gamma(v)} \frac{\Gamma(a-n+1)\Gamma(v)}{\Gamma(v+a-n+1)} = \prod_{i=0}^{n} (a-i) \frac{t^{v+a-n}\Gamma(a-n+1)}{\Gamma(v+a-n+1)} ,$$

o que conclui a demonstração. □

Capítulo 3

O modelo de Cournot e alguns conceitos econômicos relevantes.

A boa compreensão dos conceitos econômico são de suma importância para o desenvolvimento desse trabalho, haja visto que a simples modelagem de um problema sem uma interpretação adequada pouco têm a oferecer. Portanto, o que faremos nessa seção é apresentar o modelo que iremos estudar juntamente com parte da teoria econômica que está por trás do mesmo. Esperemos que, dessa maneira, possamos promover uma reflexão mais profunda a respeito das simulações e resultados numéricos presentes nas próximas seções.

O primeiro passo neste sentido se dá na próxima seção, com uma breve discussão a respeito do conceito de firma e algumas de suas definições presentes na literatura. Nas seções que se sucedem, definiremos os conceitos econômicos de lucro (lucro marginal), oferta, receita, custo, etc. que permeiam este trabalho. Por fim falaremos de forma breve acerca das diferentes formas que os mercado oligopolistas podemos aparecer nas economias modernas.

3.1 TEORIA DA FIRMA

Firmas são agentes econômicos responsáveis por produzir e viabilizar a comercialização de bens e serviços na economia. Portanto é natural que o conceito de firma desempenhe um papel central dentro da teoria microeconômica. Isso se deve ao fato de que tal agente representa um dos principais entes econômicos presentes nos mercados modernos. Além disso, a relação que uma firma possui com os diversos fatores sociais, como por exemplo, a oferta por determinado bem ou o número de desempregados de uma economia, é uma questão de grande interesse para os economistas. Por essas razões, é natural que dediquemos algum tempo para discutir tal agente econômico e suas definições.

Segundo [Carrera-Fernandez, 2009], podemos definir a firma com a unidade produtiva. Sob esta perspectiva, o conceito de firma difere do conceito de mercado, pois, este último representa o conjunto de firmas que produzem um produto homógeno ou muito similar. Para exemplificar tais conceitos, considere uma pequena cidade com duas fábricas. Nesse contexto, as firmas desta cidade são as duas fábricas, haja visto que estas são os estabelecimentos que produzem os bens. O mercado, por sua vez, é a relação entre essas firmas e consumidores. Desta forma, o mercado é o responsável por formular os preços dos bens. Dizendo de outra forma, podemos definir o mercado como *um grupo de compradores e vendedores que, por meio de suas interações efetivas ou potenciais, determinam o preço de um produto ou de um conjunto de produtos*, e.g., [Pindyck et al., 2013].

No entanto, o conceito de firma não é tão trivial a ponto de ser encerrado com uma única definição. Prova disso é que podemos verificar que ele vem sendo objeto de debate entre os economistas há muito tempo e ainda sem um consenso definitivo. Segundo [Feijó and Valente, 2004], por exemplo, o primeiro a definir tal ente econômico foi Marshall. Para Marshall, a firma é vista como um agente que interfere no meio onde atua, do mesmo modo, sofre a interferência do meio. Podemos perceber que essa definição busca abarcar aspectos da firma que não são relevantes para uma analise quantitativa, pois, a forma como uma empresa afeta e é afetada pelo meio em que está inserida, muitas vezes, diz respeito a questões subjetivas e de cunho social.

Outra forma de conceituar a firma é conhecida como neoclássica e.g., [Feijó and Valente, 2004]. De acordo com essa definição, a firma é o local onde uma ou mais transformações tecnológicas são processadas em determinado bem. Dessa forma, a firma é um agente passivo que toma como dado, a tecnologia, os preços dos insumos e a capacidade organizacional. Além disso, a firma assim definida, reage a variações na oferta e na demanda. Questões como, o trato com clientes e fornecedores e a organização da empresa são desconsideradas pela definição neoclássica. Sendo assim, a firma pode ser definida como uma função de produção cuja as entradas são os insumos para produzir determinado bem e cuja saída é o próprio bem produzido.

Para o objetivo desse trabalho definir a firma como unidade produtiva se faz suficiente. Pois, o que pretendemos discutir diz respeito a características e parâmetros quantitativas da ciência econômica. Como por exemplo, lucro, quantidade produzida e os custos. Dessa maneira

podemos desconsiderar todas questões subjetivas inerentes ao agente econômico chamado de firma. Além do mais, está definição é bastante abrangente e é amplamente aceita quando se trata de ciência econômica.

Isso posto, podemos dizer que o ramo da economia que se dedica aos estudos do comportamento da unidade produtiva, isto é, do comportamento das firmas é chamado de teoria da firma [Feijó and Valente, 2004]. Para desenvolver tal teoria, os economistas e pesquisadores da área tomam como verdade uma premissa de fácil aceitação: *toda firma busca aumentar seu próprio lucro*, veja por exemplo [Hay, 1981].

3.2 O MODELO DE COURNOT

Um mercado oligopolista se caracteriza principalmente por possuir um pequeno número de firma produzindo um mesmo bem. Além disso, numa situação de mercado desse tipo cada firma pode ser vista como um jogador que possui influência significativa na determinação dos preços, veja [Abrantes, 2004]. Isso não quer dizer que o oligopolista pode determinar o preço pelo qual quer vender seus produtos sem ser prejudicado por seus concorrentes, mas sim, que o número de firma é tão pequeno que o aumento ou a diminuição na produção de uma delas tem efeito direto na formação dos preços do mercado. Diferentemente do que aconteceriam num mercado em situação de concorrência perfeita, pois, nessas condições, o número de bens produzido pelo mercado é tão elevado que a alteração na produção de uma firma em específico não tem efeito significativo nos preços, e.g., [Abrantes, 2004].

Um dos primeiros modelos matemáticos para descrever o comportamento dos mercados oligopolistas foi proposto pelo economista Antoine Augustin Cournot[1] em 1838, para mais detalhes veja [Abolhassani et al., 2014]. O modelo de Cournot, como é conhecido, tinha o intuito de descrever duas firmas em condição de duopólio, isto é um oligopólio de duas firmas. Desde então, este modelo vem sendo usado como base para a proposição e estudo de uma grande variedade de cenários oligopolistas. Isso se deve ao fato de que a economia de mercado envolve um nível elevado de complexidade, exigindo modificações e adaptações na modelagem de forma a englobarem as peculiaridades de cada cenário.

3.2.1 Modelo de duopólio conforme pensado por Cournot.

Considere duas firmas em duopólio[2], que denotaremos por f_1 e f_2, competindo num mesmo mercado. A função demanda inversa, isto é, a função de demanda do mercado, será assumida linear (a e b são constantes tais que $a > b$), dada por

$$P(q_1, q_2) = a - b(q_1 + q_2)\,, \tag{3.2.1}$$

onde q_i representa a quantidade produzida pelas firma f_i, com $i = 1, 2$, respectivamente.

Considere ainda os custos das firmas[3] um e dois dados, respectivamente, dado por c_1 e c_2. Portanto, o custo de produzir a quantidade q_i é dada por,

$$C_i(q_i) = c_i q_i \tag{3.2.2}$$

para cada uma das firmas f_i, com $i = 1, 2$.

[1] Cournot é um dos responsáveis por introduzir a linguagem matemática na ciência econômica, veja [Friedman, 2000].

[2] Relembrando, duas firmas estão em duopólio quando dividem o mercado de toda a produção de um mesmo produto.

[3] O custo de uma firma é a somatória de todos os gastos utilizados com cada insumo no processo de produção, veja [Carrera-Fernandez, 2009].

Por outro lado, o total arrecadado pela firma $i, j = 1, 2$ com $i \neq j$, que é chamada receita, é dado por

$$R_i(q_i) = P(q_i, q_j)q_i \,. \tag{3.2.3}$$

Como o lucro de qualquer empresa é a diferença entre tudo que é arrecadado pela firma e tudo que é gasto por ela, temos de (3.2.2) e (3.2.3) que a função lucro (em termos das quantidades produzidas q_i) é dada por

$$\pi_i(q_i, q_j) = P(q_i, q_j)q_i - q_i c_i \tag{3.2.4}$$

para $i, j = 1, 2$ com $i \neq j$.

Note que, a grande inovação desses modelo reside no fato de que ele consegue modelar matematicamente a interdependência entre duas firmas, num mercado oligopolista. Dado que a função demanda inversa $P(q,q_2)$ tem como variáveis dependentes a produção da firma f_i, para $i = 1, 2$.

O modelo proposto por Cournot consiste em substituir a função demanda inversa (3.2.17) em (3.2.4), o qual resulta em

$$\pi_i(q_i, q_j) = (a - b(q_i + q_j))\, q_i - q_i c_i \tag{3.2.5}$$

para $i, j = 1, 2$ e $i \neq j$. Note que em (3.2.7) temos que o lucro de cada uma delas será uma função não apenas de sua produção, mas também da produção de sua concorrente.

Um estudo de caso, onde uma função demanda inversa como definida em (3.2.17) é investigada, pode ser visto em [Proque, 2019]. Nesse trabalho os autores investigam o mercado de soja. O comportamento oligopolista do mercado de soja decorrente do fato de que poucos países produzem esse bem e de que existem restrições a respeito da quantidade que que cada nação permite importar.

Uma análise mais aprofundada do modelo de Cournot, estudando a existência ou não dos valores ótimos para o modelo será realizada.

Lema 3.2.1. *Assuma as hipóteses do modelo de Cournot* (3.2.5) *satisfeitas. Então o único ponto crítico do modelo de Cournot* (3.2.5) *é dado por*

$$\begin{cases} q_1^* = & \frac{a+c_2-2c_1}{3b} \\ q_2^* = & \frac{a+c_1-2c_2}{3b} \end{cases} \tag{3.2.6}$$

Demonstração. Segue da derivação de 3.2.5 com relação a q_1 e q_2, respectivamente, que

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi_1}{\partial q_1}(q_1, q_2) = & (a - c_1 - bq_2) - 2bq_1 = 0 \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2}(q_1, q_2) = & (a - c_2 - bq_1) - 2bq_2 = 0 \end{cases} \tag{3.2.7}$$

Com isso podemos escrever a função de reação de cada uma das firmas[4] f_i, para $i = 1, 2$, temos

$$\begin{cases} q_1(q_2) = & \frac{a-c_1-bq_2(q_1)}{2b} \\ q_2(q_1) = & \frac{a-c_2-bq_1(q_2)}{2b} \end{cases}.$$

Escrevendo $q_1^* = q_1(q_2)$ e $q_2^* = q_2(q_1)$ e isolando q_1^* e q_2^* em (3.2.8), obtemos (3.2.7), como afirmado. □

Munidos do Teorema 7.1.2, podemos verificar que os pontos criticos encontrados em (3.2.1) são pontos de máximo, como segue.

Teorema 3.2.1. *Assuma as hipóteses do Lema 3.2.1 satisfeitas. Então o ponto crítico* (q_1^*, q_2^*) *dado por* (3.2.6) *é o ponto de máximo local do modelo de Cournot* (3.2.5).

Demonstração. Temos do Lema 3.2.1 que (3.2.6) é o único ponto crítico do modelo de Cournot. Nos falta mostrar que este é um ponto de máximo local. Para tal, vamos considerar primeiramente Π_1, pois para Π_2 o procedimento é análogo. Segue de maneira direta que a matriz Hessiana, como definida em (10) é dada por

$$H(q_1, q_2) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial q_1^2}(q_1, q_2) & \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial q_1 \partial q_2}(q_1, q_2) \\ \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial q_1 \partial q_2}(q_1, q_2) & \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial q_2^2}(q_1, q_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}.$$

Podemos verificar de forma direta que o Hessiano da matriz é dado por b^2. Logo $H > 0$. Além disso é fácil ver que a segunda derivada de Π_1 no ponto (q_1^*, q_2^*) é igual a $-2b$. Portanto, segue do Teorema 7.1.2 que (q_1^*, q_2^*) é um ponto de máximo. □

Observando as quantidades em (3.2.6), podemos observar que o custo de produção da firma $i = 1, 2$ contribui positivamente para produção de sua concorrente j e vise versa. Para entender isto basta pensar que quanto maior o custo de uma firma menos ela deve produzir e, por consequência, sua concorrente têm a possibilidade de aumentar sua própria produção.

Na figura 3.1, podemos ver o comportamento das funções de reação das firmas f_i para $i = 1, 2$, dada pelo modelo de Cournot (3.2.5), para uma escolha dos valores das constantes $a = 3$, $b = 1$ e para os custos $c_1 = 1$ e $c_2 = 1$. O ponto ótimo de Cournot na produção dessas duas firmas está na interseção das duas retas, ou seja na solução do sistema (3.2.7).

Segue de (3.2.6) substituído em (3.2.5) que, o lucro obtidos pelas duas firmas, se a concorrência seguir o ponto ótimo de Cournot, é dado por

$$\begin{cases} \pi_1(q_1^*, q_2^*) = & \left(a - b(\frac{a+c_2-2c_1}{3b} + \frac{a+c_1-2c_2}{3b})\right) \frac{a+c_2-2c_1}{3b} - \frac{a+c_2-2c_1}{3b} c_1 = \frac{(a-2c_1+c_2)^2}{9b} \\ \pi_2(q_1^*, q_2^*) = & \left(a - b(\frac{a+c_2-2c_1}{3b} + \frac{a+c_2-2c_1}{3b})\right) \frac{a+c_1-2c_2}{3b} - \frac{a+c_1-2c_2}{3b} c_2 = \frac{(a-2c_2+c_1)^2}{9b} \end{cases} \tag{3.2.8}$$

Com a escolha particular dos parâmetros utilizados na Figura 3.1, temos que $\pi_1(q_1^*, q_2^*) = \pi_2(q_1^*, q_2^*) = \frac{4}{9}$.

[4] A função de reação da firma i representa a melhor resposta da firma i quando a firma j escolher produzir q_j unidades do produto, para $i, j = 1, 2$ e $i \neq j$.

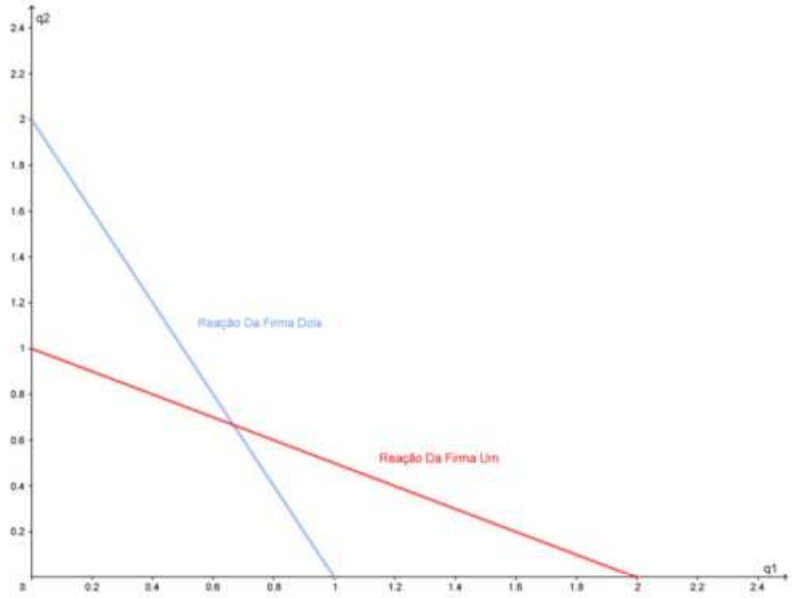


Figura 3.1: Função de reação das firmas f_i, para $i = 1, 2$, assumindo o modelo de Cournot (3.2.7).

Definição 6. *Os pontos q_1^* e q_2^* dados em* (3.2.6) *são chamados de equilíbrio de Cournot.*

No entanto, veremos a seguir que essa não é a melhor solução possível para as firmas f_i, para $i = 1, 2$ no modelo oligopolistas. Caso ambas passarem a agir em conluio, isto é, formando um cartel, para manter os preços altos, o lucro das duas firmas seria maior. Esta afirmação será verificada na próxima subseção.

3.2.2 Economia oligopolista e a formação de Cartel

Um dos maiores riscos em uma economia oligopolista é a possibilidade da formação de cartel. De uma maneira geral, duas ou mais firmas do mesmo ramo formam um cartel, quanto estas atuam em conjunto para controlar o mercado onde estão inseridas. Neste caso, a quantidade produzida ou os preços são combinados (de forma não competitiva) de maneira a obter o maior lucro possível para cada uma das firmas. O que faremos adiante é trabalhar com o modelo de Cournot para representar um mercado com as características de um cartel.

Primeiramente vamos assumir que duas firmas decidam atuar para formar um cartel. Nesse caso, tais firmas precisam maximizar o somatório de seus lucros $\Pi = \pi_1 + \pi_2$, e não o lucro individual de cada uma. Pois, uma vez que as duas decidam se unir não existira competição e, por consequências, as duas firmas passam a se comportar, ao menos no ato de decidir a quantidade a ser produzida, com um só.

Por simplicidade, assumiremos que $\pi_i(q_1, q_2)$ são dados por (3.2.4). Logo, em um cartel,

$$\Pi(q_1, q_2) = (q_1 + q_2)(a - b(q_1 + q_2)) - c_1 q_1 - c_2 q_2 \,. \tag{3.2.9}$$

Tomando $c_1 = c_2 = c$ e escrevendo $Q = q_1 + q_2$ temos que (3.2.9) se deixa escrever como

$$\Pi(Q) = Q(a - bQ) - c(Q) \tag{3.2.10}$$

O próximo teorema trata de encontrar quais são os possíveis pontos de máximo ou de mínimo de 3.2.10.

Lema 3.2.2. *Seja $a > b + c$, onde a, b, c são constantes positivas. Então a função,*

$$\Pi(Q) = Q(a - bQ) - cQ \tag{3.2.11}$$

possui o seguinte ponto de máximo,

$$Q^* = \left(\frac{a - c}{2b}\right) \tag{3.2.12}$$

Demonstração. Segue do Teorema 2.1.3 que a condição de primeira ordem para que um ponto seja ponto critico de Π é:

$$\frac{d\Pi}{dQ} = -2Q + a - c = 0\,.$$

Assim, o único ponto crítico é dado por (3.2.12).

Como

$$\frac{d^2\Pi}{d^2Q} = -2b$$

segue da versão unidimensional do Teorema 7.1.2, que Q^* é um máximo global.

□

Segue da substituição de (3.2.12) em (3.2.10), que o lucro obtido pelas duas firmas que compõem o cartel é dado pela quantidade

$$\Pi(Q^*) = \left(\frac{(a - c)}{2b}\right)\left(a - b\left(\frac{(a - c)}{2b}\right)\right) - c\left(\frac{(a - c)}{2b}\right) \tag{3.2.13}$$

$$= \frac{(a - c)^2}{4b} \tag{3.2.14}$$

Tomando $a = 3$, $b = 1$ e $c = 1$, a título de exemplificação, como feito anteriormente no modelo de Cournot, encontramos

$$\Pi(Q^*) = \frac{(3 - 1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1 \tag{3.2.15}$$

Portanto, considerando que $c_1 = c_2 = c$, cada firma terá lucro dado por

$$\pi_i = \frac{\Pi}{2} = \frac{1}{2} \tag{3.2.16}$$

Podemos conferir qual vai ser a quantidade ótima produzida por essas firmas e também qual será o preço dos produtos. Para verificar a quantidade produzida basta dividir Q^* por dois, ou seja

$$q_1^* = q_2^* = \frac{Q^*}{2} = \frac{(a-c)}{4b}$$

Note que lucro do cartel é significantemente maior do que o lucro da concorrência oligopolista. Essa característica, em uma economia real, torna a formação de um conluio atrativa para as empresas em situação de oligopólio. No entanto, podemos facilmente perceber que o preço de um cartel também é maior do que o da concorrência oligopolista.

De fato, assuma que os custos das firmas f_i, para $i = 1, 2$ sejam tal que $c_1 = c_2 = c$. Então, segue que o preço praticado em um mercado com concorrência oligopolista é dado por

$$P_{olig}(q_1^*, q_2^*) = a - b\left(\frac{a-c}{3b} + \frac{a-c}{3b}\right) = \frac{a+2c}{3},$$

enquanto em um mercado sob carte, o preço é dado por

$$P_{cart}(q_1^*, q_2^*) = a - b\left(\frac{(a-c)}{4b}\right) = \frac{3a+c}{4}\,.$$

Assim, como $a > c$, segue que

$$P_{olig} - P_{cart} = \frac{5}{12}(c-a) < 0\,,$$

e, portanto $P_{olig} < P_{cart}$.

Como consequência, a existência de um cartel certamente é prejudicial para o consumidor. Por essa razão, é comum que existam leis que tentem impedir a formação de um cartel.

3.2.3 Modelo de Cournot com diferenciação de produtos

É fácil perceber que os dois modelos apresentados anteriormente possuem diversas limitações. O fato de que as duas firmas produzem exatamente o mesmo bem, por exemplo, restringe o modelo a uma situação de mercado muito especifica , visto que, mesmo entre firmas de um mesmo setor pode existir, aos olhos do consumidor, diferenças entre seus produtos.

Para contornar tal obstaculo é possível adaptar o modelo para que ele represente um estrutura onde as firmas fabriquem produtos distintos em algum nível. Um mercado com essa característica é chamado de mercado não homogêneo, veja [Kopel, 1996].

Um exemplo de oligopólio desse tipo pode ser encontrado em [Tremblay and Tremblay, 2011]. O autor descreve uma pequena cidade com dois restaurantes, um de comida mexicana e outro de comida chinesa. É fácil notar que os dois estabelecimentos oferecem produtos não idênticos e, que o consumidor pode preferir o antedimento de um ou a locação de outro. No entanto, ambas as firmas, apesar de serem distintas aos olhos do consumidor, ainda produzem o mesmo bem

de consumo, comida. Dessa maneira nenhum dos restaurantes pode agir como monopolista. De fato, se algum dos restaurantes cogitarem fazer isso e aumentar os preços em demasiado, a comida feita pela concorrência pode se tornar um substituto imperfeito aos olhos fregueses.

Outro exemplo de um mercado com essas características é o mercado de refrigerantes. Muitas empresas produzem esse tipo de bebida. No entanto, podemos observar que os preços de cada marca de refrigerante possuem uma variação considerável. Isso acontece porque cada tipo de refrigerante é diferente aos olhos do consumidor e, dessa forma, as empresas não precisam praticar o mesmo preço. Por outro lado, nenhum marca pode agir como monopolista, pois mesmo com a existência de preferencia entre os consumidores, um preço demasiadamente elevado pode leva-los a procurar pelos produtos de outra empresa.

Por esse motivo não é de se surpreender que pesquisadores tenham feitos modificações no modelo de Cournot para que ele seja capaz de descrever mercados com as características citadas anteriormente. Para entender estes modelo, considere a seguinte função demanda inversa

$$\begin{cases} P_1(q_1, q_2) &= a - b(q_1 + dq_2) \\ P_2(q_1, q_2) &= a - b(q_2 + dq_1) \end{cases} \tag{3.2.17}$$

onde q_i representa a quantidade produzida e P_i o preço, para as firmas $i = 1, 2$, respectivamente. a e b são constantes. O parâmetro $d \in [0, 1]$ é usado como uma medida de o quanto os produtos das firmas f_i, para $i = 1, 2$ são diferentes entre si. Quando d se aproxima de 1 os bens q_1 e q_2 se tornam mais semelhantes. Por outro lado, o quando mais próximo de zero estiver d, mais distintos serão os produtos aos olhos do consumidor. Repare que, para $d = 1$ temos justamente o modelo 3.2.5. Já, quando d se aproxima de zero, menor é a influencia de firma concorrente na formação de preço, e.g., [Tremblay and Tremblay, 2011].

Assumindo que o custo de cada firma é linear, isto é, $C_i(q_i) = c_i q_i$, temos que, o lucro de cada firma é dada por

$$\begin{cases} \Pi_1(q_1, q_2) = (a - b(q_1 + dq_2))q_1 - c_1 q_1 \\ \Pi_2(q_1, q_2) = (a - b(q_2 + dq_1))q_2 - c_2 q_2 \end{cases} \tag{3.2.18}$$

Como o modelo (3.2.18) representa uma estrutura parecida com o modelo (3.2.4) apresentado anteriormente, resultado apresentado no próximo teorema é similar as conclusões do Teorema 3.2.1.

Teorema 3.2.2 (Equilíbrio de Cournot em um modelo com diferenças entre os produtos)**.** *Assuma que a função lucro das firmas f_i, para $i = 1, 2$ sejam dadas por* (3.2.18)*, com a e b são constantes positivas tais que $a(2 - d) > \max\{(dc_2 - 2c_1), (dc_1 - 2c_2)\}$,, onde $c_i > 0$, para $i = 1, 2$, são constantes positivas que representam os custos das firmas i e $d \in [0, 1]$ a constante que mensura o grau de diferenciação entre os produtos das firmas. Então, o equilíbrio de*

Cournot será dado por

$$q_1^* = \frac{2(a-c_1) - d(a-c_2)}{b(4-d^2)} \qquad (3.2.19)$$
$$q_2^* = \frac{2(a-c_2) - d(a-c_1)}{b(4-d^2)}$$

Demonstração. Segue do Teorema 2.1.3 que o ponto de equilíbrio deve satisfazer o sistema de equações

$$\frac{\partial \Pi_i(q_1, q_2)}{\partial q_i} = 0\,, \text{for } i = 1, 2\,. \qquad (3.2.20)$$

Aplicando este resultado ao modelo (3.2.18) obtemos que

$$\begin{cases} q_1 = \frac{c_1 - a + b(q_1 + dq_2)}{-b} \\ q_2 = \frac{c_2 - a + b(q_2 + dq_1)}{-b} \end{cases} \qquad (3.2.21)$$

cuja solução é dada por (3.2.19).

Segue das condições entre os parâmetros a, b, c_i, d no teorema, que q_1^* e q_2^* são positivos.

Para concluir a demonstração do teorema, nos resta mostrar que o ponto de equilíbrio maximiza Π_1 e Π_2. Pela simetria entre Π_1 e Π_2, basta mostrarmos o resultado para Π_1.

Como a Hessiana de Π_1, é dadas por

$$H = \begin{bmatrix} -2b & -db \\ -db & -2b \end{bmatrix}$$

segue que $\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial q_1^2}(q_1^*, q_2^*) = -2b$ e $det(H) = (4-d^2)b > 0$, pois $d \leq 1$. Portanto, o Teorema 7.1.2 garante que (q_1^*, q_2^*) é um ponto de máximo. □

A seguir construiremos alguns exemplos gráficos para ilustrar o comportamento do modelo com a variação do parâmetro d. Em todas as simulações foram usados os parâmetros $a = 3$,$b = 1$, $c_1 = c_2 = 1$.

A figura 3.2 mostra a a função de reação das firmas f_i, para $i = 1, 2$ e $d = 0.5$.

A Figura 3.3, mostra a função de reção da firma 1, para os valores de $d = 0.2$,$d = 0.4$,$d = 0.6$ e $d = 0.8$.

A Figura 3.4 mostra que lucro das duas empresas é maior quando d se aproxima de 0 e menor quando d se aproxima de 1. O motivo para isso é que, para d próximo de zero, há uma maior diferenciação, aos olhos do consumidor, entre os produtos fabricados pelas firmas. Assim, as decisões de uma das firmas possui menor relevância nas decisões da sua concorrente. Como consequência, o mercado se aproxima de uma estrutura monopolista.

A Figura 3.5 mostra que a produção das firmas também é fortemente influenciada pelo grau de diferenciação d entre os bens produzidos por cada uma delas.

Outra conclusão remanescente do que visto nesta seção é a de que, com uma maior distinção entre os produtos, a competição entre as duas firmas se torna menos intensa. Portanto, existe

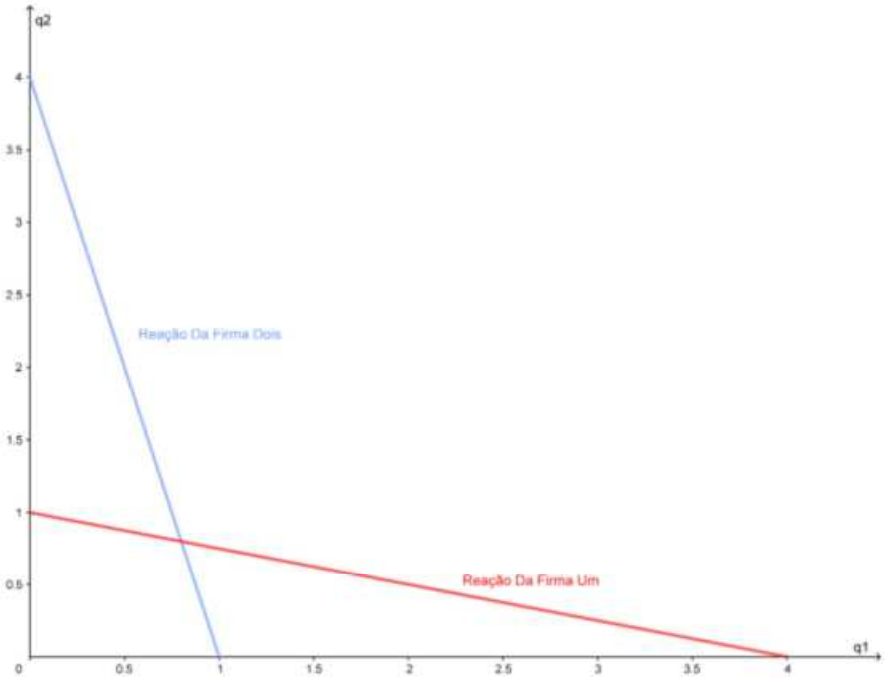


Figura 3.2: Representação gráfica da função de reação das firmas f_i, para $i = 1, 2$, $a = 3$,$b = 1$, $c_1 = c_2 = 1$ e $d = 0.5$.

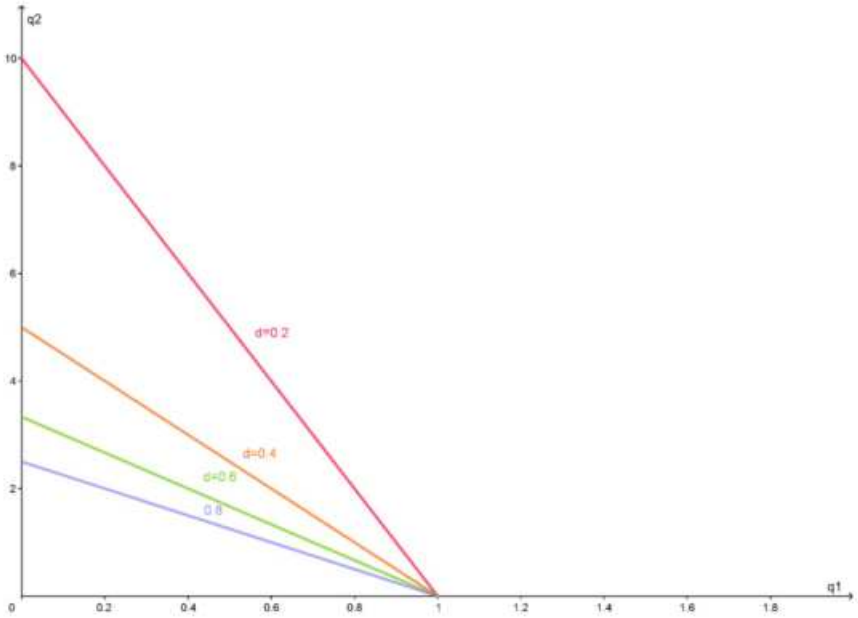


Figura 3.3: Função de reação da firma 1 para $d = 0.2$,$d = 0.4$,$d = 0.6$ e $d = 0.8$ e parâmetros $a = 3$,$b = 1$, $c_1 = c_2 = 1$.

a possibilidade de que cada uma delas consiga ocupar um espaço maior no mercado onde está inserida. Desta forma, a quantidade produzida por cada uma das firmas aumenta. Voltemos ao exemplo dos restaurantes especializados em comidas mexicana e chinesa. Se os consumidores enxergam uma grande diferença entre a comida produzida pelos dois estabelecimentos, é de se esperar que a produção de um não interfira diretamente na produção do outro. Pois, mesmo que um dos restaurantes produza uma grande quantidade de comida mexicana, por exemplo,

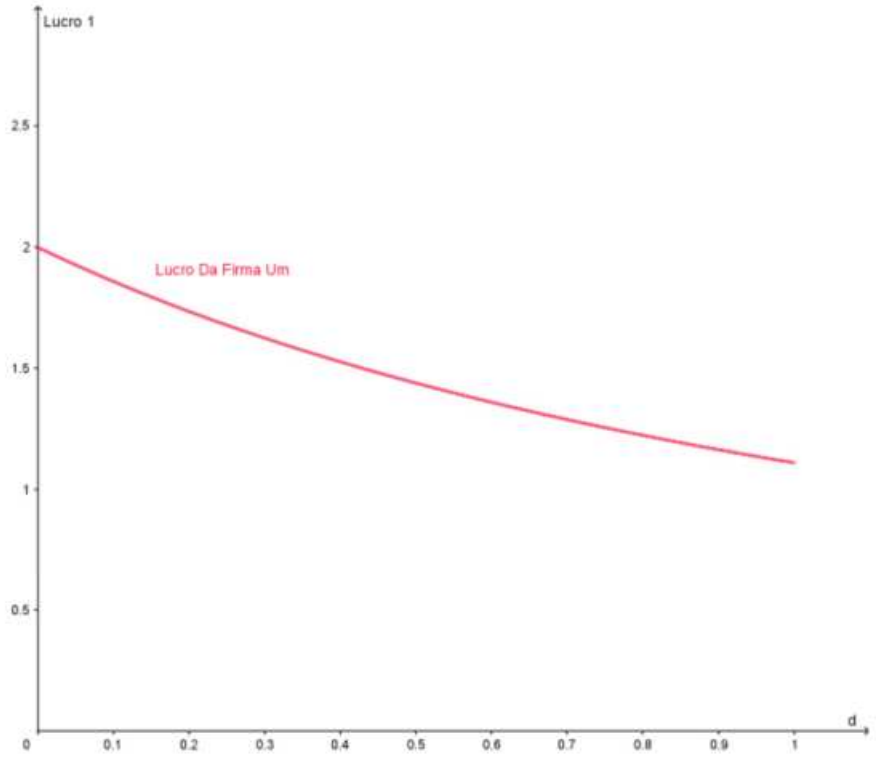


Figura 3.4: Lucro da firmas 1 com relação a d.

ele não irá conseguir suprir a demanda por comida chinesa, dado que essas duas culinárias não são idênticas aos olhos do consumidor. Portanto, existe mais espaço para cada uma das firmas aumentarem seu lucro.

3.2.4 Modelo de Cournot com $n > 2$ firmas

Outra generalização bastante comum nos estudos de oligopólios do tipo Cournot diz respeito ao número de firmas, veja [Ahmed and Agiza, 1998]. Portanto, é natural que queiramos estender o problema de Cournot para casos em que n firmas compõem o oligopólio.

Logo, para que possamos construir um modelo de oligopólio para n firmas, suponha mais uma vez que a função demanda inversa seja linear, da forma, $P(Q) = a - bQ$, onde P é o preço do bem, a e b são constantes e $Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$ é a oferta total do mercado. Considere também o custo dado pela seguinte função $C_i(q_i) = c_i q_i$, onde, por simplicidade, $c_1 = c_2 = \cdots = c_n$. Dessa forma o modelo será dado pelo seguinte conjunto de equações

$$\pi_i = Pq_i - C_i(q_i)\,, \qquad i = 1, \cdots, n\,. \tag{3.2.22}$$

Tomando as derivando parciais da equação (3.2.22), com relação as quantidades q_i e igualando a zero, temos que

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = P(Q) + q_i \frac{\partial P(Q)}{\partial q_i} - C_i'(q_i) = 0\,. \tag{3.2.23}$$

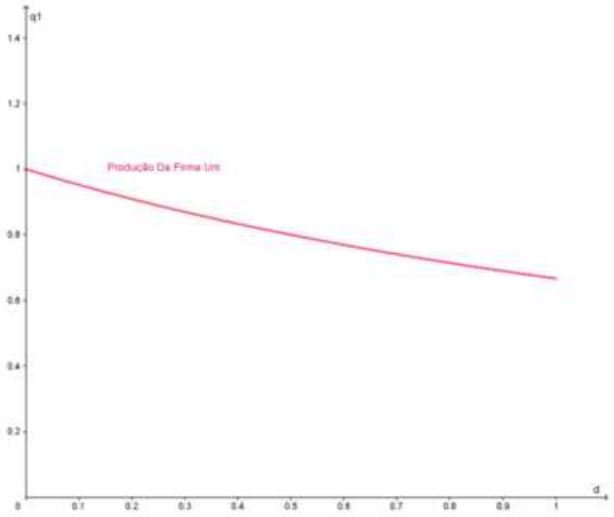


Figura 3.5: Produção da firma 1 como uma função de d.

Isolando q_i em (3.2.23), chegamos a

$$q_i = \frac{P(Q) - C_i'(q_i)}{\frac{\partial P(Q)}{\partial q_i}}. \tag{3.2.24}$$

Segue de (3.2.24) e da substituindo das função de demanda inversa e da função custo que o ponto de equilíbrio de Cournot com n firmas é dado por

$$q_i = \frac{a - bQ - c_i}{b}. \tag{3.2.25}$$

Usando que $Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$ e somando de $i = 1, \cdots, n$ em (3.2.25), obtemos que

$$Q = \sum_{i=1}^{i=n} q_i = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{a - bQ - c_i}{b} \tag{3.2.26}$$

Com a hipótese de que todos os custos são iguais, isto é, que $c_i = c$ para $i = 1, \cdots, n$, obtemos de (3.2.26) que

$$Q = \frac{n}{n+1} \frac{(a-c)}{b} \tag{3.2.27}$$

Dividindo Q por n na equação (3.2.27), obtemos que a produção ótima de cada uma das firmas é dada por

$$\frac{Q}{n} = \frac{a-c}{b(1+n)} = q_i \tag{3.2.28}$$

Com isso encontramos uma generalização para expressão do lucro das n firmas do modelo de Cournot em duopólio.

Se o número de firmas cresce muito, $(n \to \infty)$, teríamos de (3.2.28) que

$$\lim_{n\to\infty} q_i = \lim_{n\to\infty} \frac{a - c_1}{b(1+n)} = 0\,. \tag{3.2.29}$$

Segue de (3.2.29) que quanto maior o número de firmas nesse mercado, mais ele se aproxima de uma concorrência perfeita. Assim, a participação de cada firma no mercado se torna quase irrelevante, ao ser comparado com a oferta total disponível no mercado ($q_i \to 0$ quando $n \to \infty$). O mesmo acontece com o lucro, ele se torna cada vez menor e tende a zero conforme o número de empresas competindo aumenta.

3.2.5 Modelo de Stalkeberg

Outra generalização do modelo de Cournot consiste em um modelo de oligopólio onde as firmas não hajam de forma simultânea. Ou seja, uma firma espera a sua concorrente agir para, em seguida, tomar sua decisão. Nesse contexto, a primeira firma a agir é chamada de líder e a outra de seguidora. Um modelo que procura capturar essa ideia foi proposta por Stalkeberg, e.g, [Peng et al., 2016].

Suponha que existam duas firmas, cujas funções de demanda inversa e custos, sejam dadas como no modelo de Cournot (3.2.4). Segue do Lema 3.2.1 que a função de reação de cada firma será dada por (3.2.17)

O modelo de Stalkeberg, consiste em assumir a hipótese de que a primeira firma a agir conhece a função de reação de sua concorrente. Ou seja, as informações do mercado estão disponíveis para que a firma **líder** consiga resolver o problema de Cournot. Assim, esta pode, de antemão, verificar como sua concorrente vai se comportar para, em seguida, considerar essa informação para calcular sua produção ótima. Em outras palavras, modelo de Stalkeberg consiste em substituir a função reação da firma seguidora dada em (3.2.17), em na função lucro da firma líder.

Para fixar as ideias, assumiremos que a firma 1 é a líder e a firma 2 é a seguidora. Segue de (3.2.4) e (3.2.17) que o lucro da firma líder (firma 1) é dado por

$$\pi_1 = q_1 \left(a - c_1 - b \left(q_1 + \frac{a - c_2 - bq_1}{2b} \right) \right) . \tag{3.2.30}$$

Note que o ponto ótimo para a firma 1, isto é $\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 0$ é dado por

$$q_1^* = \frac{a - 2c_1 + c_2}{2b}\,. \tag{3.2.31}$$

Já para a firma seguidora, que vai reagir a produção da firma líder, obtemos da substituição de (3.2.31) na função reação (3.2.17) para a firma 2 que

$$q_2^* = \frac{a - 3c_2 + 2c_1}{4b}\,, \tag{3.2.32}$$

é o ponto ótimo para a firma 2.

Segue de (3.2.31) substituída em (3.2.30) que, a função lucro da firma 1 é dada por

$$\begin{aligned}\pi_i(q_1^*) =& \left(\frac{a-2c_1+c_2}{2b}\right)\left[a-c_1-b\left(\frac{a-2c_1+c_2}{2b}+\frac{a-c_2}{2b}-\frac{-a+2c_1+c_2}{4b}\right)\right]\\ =&\frac{(a-2c_1+c_2)}{2b}\left(\frac{a-2c_1+c_2}{4}\right).\end{aligned}$$

Enquanto, de (3.2.31)-(3.2.32) substituída na segunda equação de (3.2.4), obtemos que o lucro da firma seguidora é dado por

$$\begin{aligned}\pi_2(q_1^*, q_2^*) =& \left(\frac{a-3c_2+2c_1}{4b}\right)\left[a-c_2-b\left(\frac{a-2c_1+c_2}{2b}+\frac{a-3c_2+2c_1}{4b}\right)\right]\\ =&\left(\frac{a-3c_2+2c_1}{4b}\right)\left[\frac{a+2c_1-3c_2}{4}\right].\end{aligned}$$

Nas figuras 3.6 e 3.2.32 apresentamos o lucro das firmas pelo modelo de Stalkeberg em temos das quantdades q_i, para $i = 1, 2$, para o valor dos parâmetros $c_1 = c_2 = b = 1$ e $a = 3$. Podemos ver no gráfico presente na Figura 3.6 que a produção ótima da firma um, é igual a 1, o que condiz com o resultado obtido na equação (3.2.31).

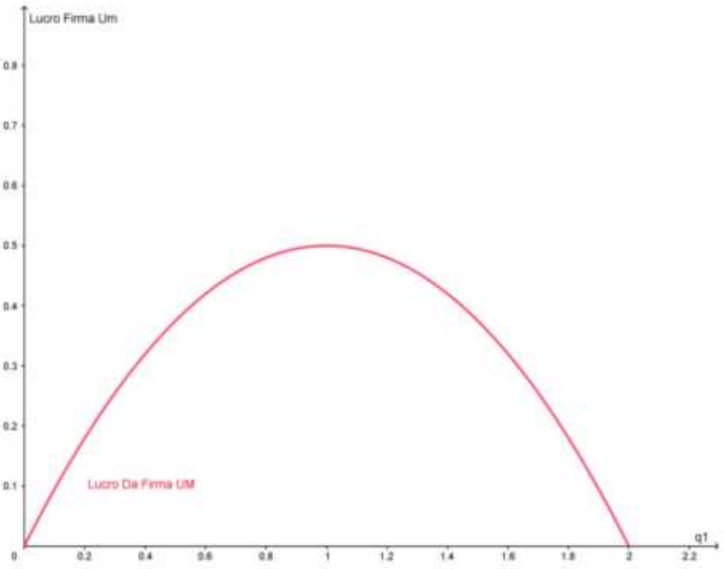


Figura 3.6: Lucro da firma líder

Para a escolha dos parâmetros como acima, segue que o lucro da firma seguidora (firma 2) é maior que o lucro da firma 1 (líder). Compare os valores nas figuras 3.6 e 3.7.

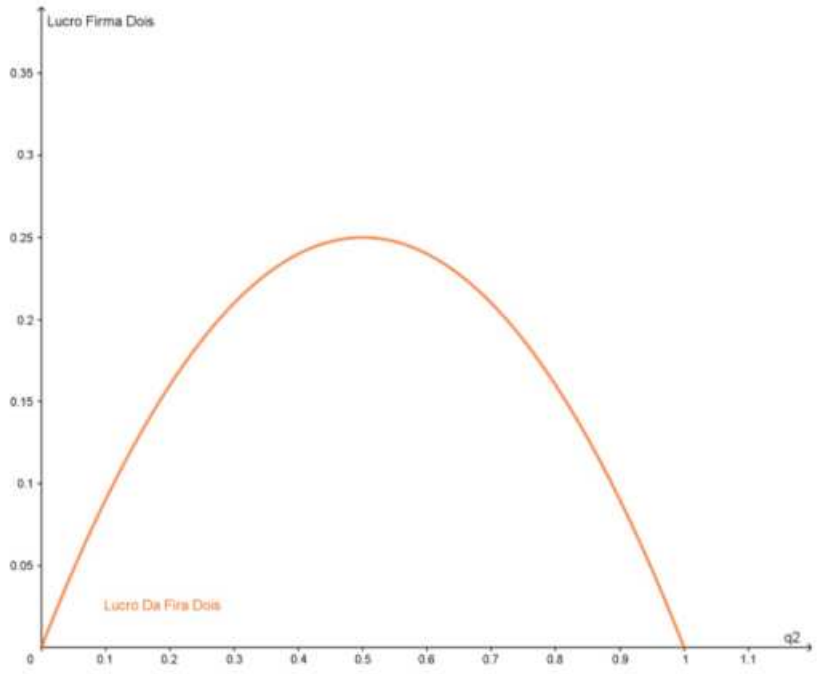


Figura 3.7: Lucro da firma seguidora

Capítulo 4

Processos de Ajuste

Uma limitação importante na forma como viemos abordado o modelo de Cournot, e suas variações, é a total desconsideração do tempo. Nas condições, o modelo de Cournot considera que as firmas produzem uma única vez e o mercado não tem mais qualquer tipo de movimentação. Isso claramente não é uma suposição aceitável. É mais razoável aceitar que as empresas inseridas numa economia real mantenham suas atividades com o decorrer do tempo, tomando decisões de forma "contínua", a fim de buscar o maior lucro possível.

Por outro lado, com o acréscimo da variável temporal nos modelo de oligopólio nos deparamos com um novo problema. Agora, as firmas precisam decidir sua produção ótima múltiplas vezes. Dado que um agente produtivo não pode simplesmente produzir sempre a mesma quantidade e esperar que isso tenha sempre o mesmo efeito no mercado. Assim, é necessário que as firmas saibam como se comportar em cada passo período de tempo e, com isso, possam reagir da melhor forma possível ao comportamento do mercado. Portanto, encontrar as quantidades a serem produzidas que gerem os maiores lucros ao longo do tempo, passa a ser uma tarefa mais complexa.

Ainda, podemos notar que não é provável que uma firma saiba o quanto suas concorrentes pretendem produzir num certo período de tempo t. De fato, caso tal informação estivesse disponível, bastaria que as firmas usassem sua função de reação para encontrar sua produção ótima. Mas isso só seria possível, caso as firmas revelassem esse tipo de informação para a concorrência, de forma antecipada. O que não acontece. Assim, as empresas precisam estimar o quanto deve ser produzido, partindo daquilo que já foi observado no mercado, num processo que exige uma certa "memória"do que já aconteceu. A esse processo chamamos de processos de ajuste. Ou seja, processos de ajuste tratam de modelos que, com base na produção e nos lucros de uma firma e de suas concorrentes nos tempos anteriores a t, estima-se o quanto a firma deve produzir em t.

Sobre o ponto de vista matemático podemos dizer que um processo de ajuste é, na verdade, um sistema dinâmico discreto, ou um sistema de diferenças, que descreve a produção de certa firma no tempo t em função das produções e lucros obtidas nos passos de tempo menores que t. Veja o Apêncice 7 para as definições e resultados a respeito de sistemas dinâmicos discretos,

se necessário.

Para que possamos compreender melhor sobre os tais processos de ajuste, precisamos antes definir algumas variáveis que não estavam presente nos modelos apresentados até agora. Novamente, por simplicidade assumiremos que existam somente duas firmas, f_i, para $i = 1, 2$. Assuma que a firma f_i produza a quantidade $q_i(t)$, no período t. Observe que, diferentemente do que foi feito anteriormente para as variações dos modelos de Cournot apresentadas, cada uma das firmas produz uma quantidade diferente de seu bem em cada período de tempo. Isso ocorre pois, como já foi mencionado, as empresas não conhecem a produção das concorrentes e precisam se adaptar a cada nova "jogada", visto que, nem sempre uma firma vai encontrar sua produção ótima com apenas uma tentativa.

4.0.1 Ajustes parcialmente racional

No primeiro processo de ajuste que iremos apresentar, cada firma busca estimar a quantidade que deve produzir com base nas próprias produções e de suas rivais no passo de tempo imédiatamente anterior. Ou seja, a firma f_i deve encontrar quantidade $q_i(t)$ a ser produzida no tempo t, considerando as quantidades ofertadas no mercado no tempo $t-1$. Esta dinâmica pode ser descrita pelo modelo

$$\begin{cases} q_1(t) = q_1(t-1) + \rho_1 \frac{\partial \Pi_1(q_1(t-1), q_2(t-1))}{\partial q_1} \\ q_2(t) = q_2(t-1) + \rho_2 \frac{\partial \Pi_2(q_1(t-1), q_2(t-1))}{\partial q_2} \end{cases} \tag{4.0.1}$$

onde ρ_1 e ρ_2 são constantes que indicão a velocidade de adaptação de cada firma, ou seja, indica o quanto cada empresa confia em suas próprias estimativas. Já Π_i e q_i representam o lucro e a produção da firma i. O modelo (4.0.1) para o processo de ajuste é conhecido como processo parcialmente racional.

Note que no modelo (4.0.1), a firma i deve aumentar ou diminuir sua produção, no tempo t de acordo com o lucro marginal obtido no tempo $t-1$. Portanto, no caso de considerarmos o modelo (4.0.1) independente do tempo, ou seja $q_i(t) = q_i(t+1)$, recaímos nos modelos de Cournot discutidos no Capítulo 1. Neste caso, para otimizar o problema, bastaria encontrar as produções ótimas q_i^* para as quais o lucro marginal das firmas seja igual a zero. Assim, recaímos novamente no modelo de Cournot discutido no Capítulo 1.

O primeiro resultado que apresentaremos sobre o modelo (4.0.1) é o seguinte.

Lema 4.0.1. *Assuma que as funções de demanda inversa $P_i(q_1(t), q_2(t)) = a - b(q_1(t) + q_2(t))$ e que os custos $C_i(q_i(t)) = c_i q_i(t)$, para $i = 1, 2$, respectivamente. Então os pontos de equilíbrio do modelo* (4.0.1) *coincidem com os pontos de equilíbrio de Cournot* (6)*. Isto é, são dados por*

$$\begin{cases} q_1^* = \frac{a+c_2-2c_1}{3b} \\ q_2^* = \frac{a+c_1-2c_2}{3b} \end{cases}$$

Demonstração. Segue da Definição 15 que, os pontos de equilíbrio satisfazem seguinte igual-

dade.

$$q_i(t+1) = q_i(t)$$

Portanto, considerando o modelo (4.0.1) temos que vale as seguintes afirmação, para todos i:

$$\frac{\partial \Pi_1(q_1^*(t), q_2^*(t))}{\partial q_1^*(t)} = 0$$
$$\frac{\partial \Pi_2(q_1^*(t), q_2^*(t))}{\partial q_2^*(t)} = 0$$

Assim, segue do Lema 4.0.1 que os pontos que satisfazem as igualdades acima correspondem exatamente aos pontos de equilíbrio de Cournot e, portanto, são dados por (4.0.2). □

Antes de prosseguirmos com o estudo da estabilidade de 4.0.1, apresentaremos um exemplo com o intuito de ilustrar o comportamento dessa dinâmica.

Exemplo 1. *Considere o modelo* (4.0.1)*, com* $a = 3$*,* $b = c_1 = c_2 = 1$ *e* $\rho_1 = \rho_2 = \rho$*. Por fim, assuma que ambas as firmas ajam como monopolistas para* $t \leq 1$*. Desta forma, podemos encontrar uma condição inicial* $(q_1(0), q_2(0))$ *(em* $t = 1$*) para o modelo* (4.0.1)*.*

Das firmas 1 e 2 se comportando como monopólio em $t \leq= 1$ *e assumindo que as quantidades produzidas por ambas as firmas sejam tais que* $q_1 = q_1(t = 1)$ *e* $q_2 = q_2(t = 1)$*, temos que a função demanda inversa é dada por* $P(q_1, q_2) = 3 - Q$*, onde* $Q = q_1 = q_2$*.*

Portanto, o lucro do monopólio em $t = 1$ *é dada por*

$$\pi = (3 - Q) * Q - Q\,. \tag{4.0.2}$$

Assim a produção ótima de tal monopólio é dada por

$$\frac{d\pi}{dQ} = 3 - 2Q - 1 = 0\,,$$

ou seja $Q^* = 1 = q_1(t = 1) = q_2(t = 1)$*.*

A Tabela 4.1 mostra a produção da firma 1, segundo o modelo (4.0.1)*, para distintos* ρ*. Dada a simetria de escolhas para* $\rho_1 = \rho_2$*,* $c_1 = c_2$*, os resultados para a produção da firma 2, são análogos. A programação dessa simulação foi feita no software livre octave e pode ser encontrada no Apêndice 7.*

Analisando as informações contidas na tabela 4.1 é possível observar, de forma empírica, certos comportamentos que podemos esperar do modelo 4.0.1. Observe, por exemplo, que a produção da firma 1 se estabiliza a partir do tempo $t = 7$*, para* $\rho = 0.5$ *e no tempo* $t = 5$ *para* $\rho = 0.3$*. Já para* $\rho = 0.1$ *a estabilidade parecer demorar mais para surgir. Quando* $\rho = 0.7$*, por outro lado, o sistema é aparentemente instável, dado que os valores obtidos estão cada vez*

Tabela 4.1: Processo de ajustes parcialmente racional dado pelo modelo (4.0.1), da firma 1 e 2, para distintos valores de ρ.

Tempo (t)	$q_1 = q_2$ $(\rho = 0.1)$	$q_1 = q_2$ $(\rho = 0,3)$	$q_1 = q_2$ $(\rho = 0.5)$	$q_1 = q_2$ $(\rho = 0.7)$
1	1	1	1	1
2	0.9	0.7	0.5	3
3	0.83	0.67	0.75	1.07
4	0.781	0.667	0.625	0.223
5	0.7467	0.6667	0.6875	1.1547
6	0.7227	0.6667	0.6562	0.12983
7	0.7059	0.6667	0.6719	1.257187
8	0.6941	0.6667	0.6641	0.017094
9	0.6859	0.6667	0.6680	1.381196
10	0.6801	0.6667	0.666	-0.119316
11	0.6761	0.6667	0.667	1.531247
12	0,6633	0.6667	0.6665	-0.284372
13	0.6713	0.6667	0.6667	1.712809

mais afastados uns dos outros. E, além disso, podemos ver que surgem números negativos, o que não é coerente com o problema que estamos estudado, pois não existe produção negativa. Com essas observações podemos perceber que a convergência e a estabilidade do modelo mudam com valores diferentes de ρ. Portanto, devemos encontrar as condições que tornam o modelo estável.

E além do mais, podemos notar que o ponto para onde a produção converge é justamente o equilíbrio de Cournot, como no Lema (4.0.1)*. De fato, substituindo os valores dos parâmetros na equação* (4.0.2)*, obtemos que*

$$q_1^* = q_2^* = 0.6667\,,$$

o que corresponde ao valor encontrado no passo de tempo $t = 13$, conforme Tabela 4.1.

Na Figura 4.1, será exibida uma representação gráfica da informação contida na Tabela 4.1. Nessa representação, o eixo horizontal representa o tempo e o eixo vertical a quantidade produzida pela firma 1. A aparente convergência do modelo se torna bastante clara quando analisada a luz de uma representação gráfica. O leitor deve notar que o modelo, com as constantes que escolhemos, é simétrico. Portanto, o comportamento da firma 2 é exatamente igual ao da firma 1.

Na Tabela 4.2, analisamos os lucros da firma 1, com relação as quantidades produzidas, obtidos na Tabela 4.1 para o modelo (4.0.1)*. Só apresentaremos os resultados para os valore de ρ, para os quais o modelo* (4.0.1) *apresenta convergência.*

Na Figura 4.2 mostramos os resultados do lucro obtido pela firma i, quando $\rho = 0.5$.

Com um exemplo apresentado já possuímos a intuição de como o modelo deve se comportar. Portanto, podemos agora construir uma analises um pouco mais detalhada de como o processo de ajuste descrito em 4.0.1 funciona. Para fazer isso nós voltaremos para a função lucro Π e a estudaremos da forma mais generalizada possível.

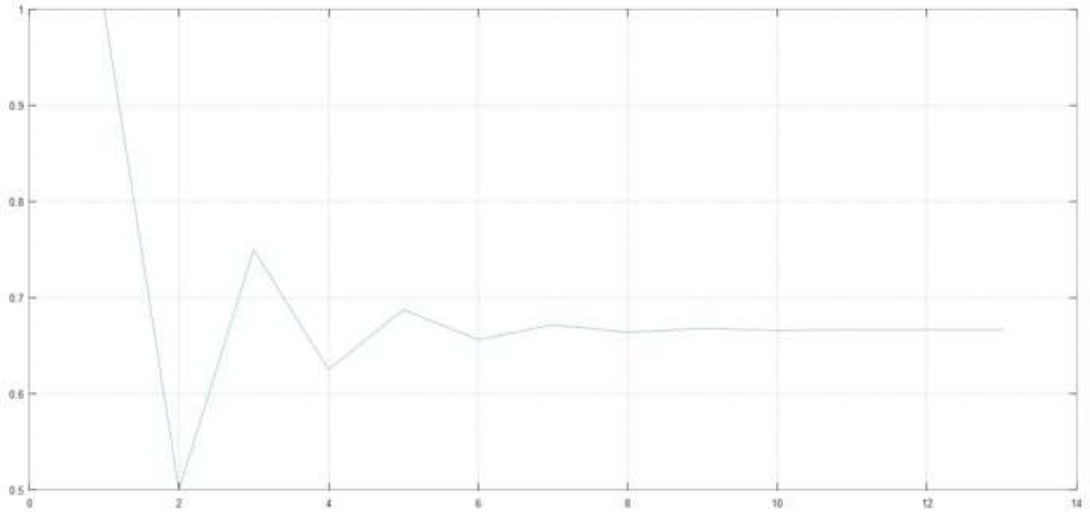


Figura 4.1: Processo de ajuste, para $a = 3$, $b = c_1 = c_2 = 1$ e $\rho = 0.5$.

Tabela 4.2: Lucros da firma 1 dado pelo modelo (4.0.1) para valores de ρ.

Tempo (t)	$\pi_i(t)$ $(\rho = 0.1)$	$\pi_i(t)$ $(\rho = 0,3)$	$\pi_i(t)$ $(\rho = 0.5)$
1	0	0	0
2	0.18	0.42	0.5
3	0.2822	0.4422	0.375
4	0.3421	0.4442	0.4688
5	0.3783	0.4444	0.4297
6	0.4008	0.4444	0.4512
7	0.4152	0.4444	0.4409
8	0.4246	0.4444	0.4462
9	0.4309	0.4444	0.4436
10	0.04351	0.4444	0.4449
11	0.4380	0.4444	0.4442
12	0,044	0.4444	0.4446
13	0.4413	0.4444	0.4444
Lucro Médio	0.3545	0.4080	0.4103

O próximo teorema trata de demonstrar a convergência do processo de ajuste (4.0.1). Faremos isso para um caso especifico, onde a função custo e a função demanda inversa são conhecidas.

Teorema 4.0.1 (Convergência do processo de ajuste)**.** *Assuma as hipóteses do Lema 4.0.1 satisfeitas. Se ρ_1 e ρ_2 satisfazem a seguinte desigualdade*

$$2 > b\left(\rho_1 + \rho_1\right) + b\sqrt{\left(\rho_1 - \rho_2\right)^2 + \rho_1\rho_2}$$

O processo de ajustes (4.0.1) *converge para o ótimo de Cournot, quando $t \to \infty$.*

Demonstração. Segue do Lema (4.0.1) que os pontos de equilíbrio do modelo (4.0.1) coincidem com o equilíbrio de Cournot. Seja (q_1^*, q_2^*) tal ponto de equilíbrio. Vamos mostrar que $(q_1(t), q_2(t))$ dado pela dinâmica (4.0.1) converge assintoticamente para (q_1^*, q_2^*).

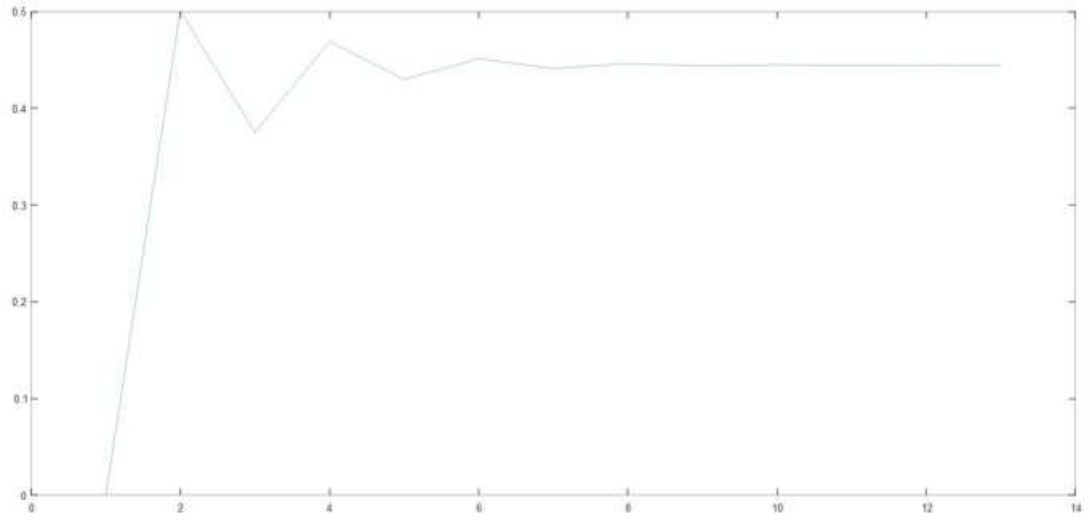


Figura 4.2: Lucro da firma 1 em cada passo de tempo, de acordo com o modelo (4.0.1) e $\rho = 0.5$.

Note que a matriz Jacobiana do modelo (4.0.1) é dada por

$$J(q_1(t), q_2(t)) = \begin{bmatrix} 1 - \rho_1 2b & -\rho_1 b \\ -\rho_2 b & 1 - \rho_2 2b \end{bmatrix}. \tag{4.0.3}$$

Assim, o polinômio característico associado a 4.0.3 é dado por

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda\left(-2 + 2b\left(\rho_1 + \rho_1\right)\right) - 2b\left(\rho_1 + \rho_2\right) + b^2\left(3\rho_1\rho_2\right) + 1\,.$$

Por conseguinte, as raízes de $p(\lambda)$, ou seja, os autovalores da matriz, são dadas por

$$\lambda_1 = \frac{2 - 2b\left(\rho_1 + \rho_1\right) + \sqrt{\Delta}}{2}\,, \qquad \lambda_2 = \frac{2 - 2b\left(\rho_1 + \rho_1\right) - \sqrt{\Delta}}{2} \tag{4.0.4}$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(-2 + 2b\left(\rho_1 + \rho_1\right)\right)^2 - 4\left(3b^2\rho_1\rho_2 + 1 - 2b\left(\rho_1 + \rho_2\right)\right) \\ &= \cancel{4} - \cancel{8b\left(\rho_1 + \rho_2\right)} + 4b^2\left(\rho_1 + \rho_2\right)^2 - 12b^2\rho_1\rho_2 - \cancel{4} + \cancel{8b\left(\rho_1 + \rho_2\right)} \\ &= 4b^2\left(\rho_1 + \rho_2\right)^2 - 12b^2\rho_1\rho_2 = 4b^2\rho_1^2 + 8b^2\rho_1\rho_2 + 4b^2\rho_2^2 - 12b^2\rho_1\rho_2 \\ &= 4b^2\rho_1^2 + 4b^2\rho_2^2 - 4b^2\rho_1\rho_2 = 4b^2[(\rho_1 - \rho_2)^2 + \rho_1\rho_2] > 0\,. \end{aligned} \tag{4.0.5}$$

Portanto λ_1 e λ_2 são reais.

Afirmação: Sob as hipóteses do teorema, $\max\{|\lambda_1, \lambda_2\} < 1$.

Uma vez provada a afirmação acima, segue do Teorema 7.1.6 que os pontos de equilíbrio são assintoticamente estáveis.

Prova da Afirmação:

1. Primeiramente vamos verificar as condições em que $\lambda_1 < 1 \iff \lambda_1 - 1 < 0$.

Como

$$\lambda_1 - 1 = \frac{2 - 2b\,(\rho_1 + \rho_2) + \sqrt{\Delta}}{2} - 1 = \frac{-2b\,(\rho_1 + \rho_2) + \sqrt{\Delta}}{2}\,,$$

segue que $\lambda_1 - 1 < 0$ sempre que[1]

$$\begin{aligned}\sqrt{\Delta} < 2b\,(\rho_1 + \rho_2) \iff \Delta < 4b^2\,(\rho_1 + \rho_2)^2 \iff 4b^2[(\rho_1 - \rho_1)^2 + \rho_1\rho_2] < 4b^2(\rho_1 + \rho_1)^2 \\ \iff \rho_1^2 - \rho_1\rho_2 + \rho_1^2 < \rho_1^2 + 2\rho_1\rho_2 + \rho_1^2 \iff 0 < 3\rho_1\rho_2\,,\end{aligned}$$

o que evidentemente é verdadeiro, pois ρ_1 e ρ_2 são valores positivos.

2. Por outro lado, mostrar que $\lambda_1 > -1$ é equivalente a mostrar que

$$\begin{aligned}\lambda_1 + 1 > 0 \iff \frac{2 - 2b\,(\rho_1 + \rho_2) + \sqrt{\Delta}}{2} + 1 > 0 \iff 4 - 2b\,(\rho_1 + \rho_2) + \sqrt{\Delta} > 0 \\ \iff 4 + \sqrt{\Delta} > 2b(\rho_1 + \rho_2) \iff 16 + 8\sqrt{\Delta} + \Delta > 4b^2(\rho_1 + \rho_2)^2 \\ \iff 4 + 2\sqrt{\Delta} > 3b^2\rho_1\rho_2\,.\end{aligned}$$

Como $\sqrt{\Delta} > 2\rho_1\rho_2$, temos que a última desigualdade na sequência de equivalências acima é verdadeira, sempre que

$$f(\rho_1, \rho_2; b) := 4b\rho_1^2 - b(3b + 8)\rho_1\rho_2 + 4b\rho_2^2 + 4$$

for não negativa. Note que, $f(\rho_1, \rho_2; b)$ é uma função quadrática de (ρ_1, ρ_2), cujo mínimo é dado pela solução de

$$\begin{aligned}\partial f \partial \rho_1 = 8b\rho_1 - b(3b + 8)\rho_2 = 0 \\ \partial f \partial \rho_2 = 8b\rho_2 - b(3b + 8)\rho_1 = 0\,.\end{aligned}$$

Como o determinante da matriz dos coeficientes do sistema acima é dado por $(8b)^2 + b^2(3b + 8)^2 > 0$, para $b \neq 0$, segue que o único ponto de mínimo de f é dado por $(\rho_1, \rho_2) = (0, 0)$.

Assim, fica provado que $\lambda_1 > -1$.

3. Para mostrar que $\lambda_2 < 1$, basta observar que

$$\lambda_2 - 1 = \frac{2 - 2b\,(\rho_1 + \rho_1) - \sqrt{\Delta}}{2} - 1 = \frac{-2b\,(\rho_1 + \rho_1) - \sqrt{\Delta}}{2} < 0\,.$$

[1] A segunda implicação é verdadeira, haja visto que envolve somente quantidades positivas.

4. Para verificar sob quais condições $\lambda_2 > -1$, note que

$$\lambda_2 + 1 = \frac{2 - 2b\,(\rho_1 + \rho_1) - \sqrt{\Delta}}{2} + 1 \\ = \frac{4 - 2b\,(\rho_1 + \rho_1) - \sqrt{\Delta}}{2}\,.$$

Com isso, podemos perceber que a expressão acima só será positiva se (relembre o valor de Δ)

$$4 > 2b\,(\rho_1 + \rho_2) + \sqrt{\Delta} \iff 2 > b\,(\rho_1 + \rho_1) + b\sqrt{(\rho_1 - \rho_2)^2 + \rho_1\rho_2}$$

Isolando b:

$$\frac{2}{b} > (\rho_1 + \rho_1) + \sqrt{(\rho_1 - \rho_2)^2 + \rho_1\rho_2}$$

a qual condiz com a hipótese do teorema.

□

Como vimos numericamente no Exemplo 1, para $\rho_1 = \rho_2 = \rho = 0.7$ e $b = 1$ o ponto de equilíbrio era instável. De fato, se substituirmos estes valores na restrição do Teorema 4.0.1 verificamos que,

$$1.4 + \sqrt{0.49} = 2,1 > 2\,,$$

e portanto não satisfaz as hipóteses do Teorema 4.0.1. Logo o ponto de equilíbrio é instável.

4.0.2 Ajuste pela melhor resposta dinâmica

Nesta seção, exploraremos segundo processo de ajuste, o qual consiste em supor que a firma 1 assume que a sua concorrente (firma 2), irá produzir a melhor quantidade possível, em resposta ao que foi produzido pela firma 1, no passo de tempo $t-1$, e.g, [Naimzada and Sbragia, 2006] e [Agiza et al., 1999]. O modelo para este processo de ajuste, chamado de melhor resposta dinâmica é dado por

$$\begin{cases} q_1(t+1) = & r_1(q_2(t)) \\ q_2(t+1) = & r_2(q_1(t)) \end{cases}, \tag{4.0.6}$$

onde, $r_i(\cdot)$ são, respectivamente, as funções de reação das firmas f_i, para $i = 1, 2$, no instante t.

Em particular, se a função demanda inversa é dada por $P_i(q_1(t), q_2(t)) = a - b(q_1(t) + q_2(t))$ e a função custo é dada por $C_i(t) = c_i(t)q_i(t)$, para $i = 1, 2$, respectivamente, então as funções reação são dadas por (3.2.8).

Tabela 4.3: Processo de ajustes melhor resposta dinâmica

Tempo (t)	Quantidade produzida pela firma 1, para $a = 3$, $b = c_i = 1$.
1	1
2	0.5
3	0.75
4	0.625
5	0.6875
6	0.6562
7	0.6719
8	0.6641
9	0.668
10	0.666
11	0.667
12	0.6665
13	0.6667

Antes de seguirmos vejamos um exemplo numérico do comportamento do modelo (4.0.6). Suponha que as funções demanda inversa e custos seja dada como acima, com $a = 3$, $b = c_1 = c_2 = 1$. Segue de (3.2.8) que $r_i(q_i(t), q_j(t)) = \frac{2-q_j(t)}{2}$, para $i, j = 1, 2$ e $i \neq j$.

Na Tabela 4.3 descrevemos os resultados obtidos para o modelo (4.3), para a firma 1 nos 13 primeiros passos de tempo, com a escolha das condições iniciais $q_1(t = 1) = q_2(t = 1) = 1$. Pela simetria do problema apresentado, os resultados para a firma 2 são análogos. Na figura 4.3 apresentamos a representação gráfica dos valores da tabela. A programação dessa simulação se encontra no Apêndice 7.

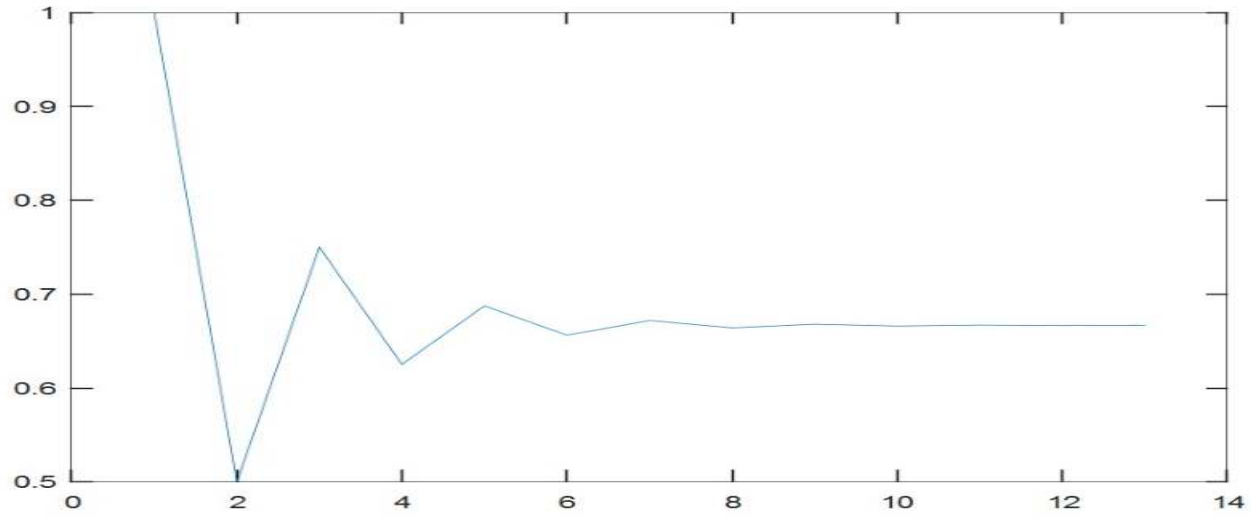


Figura 4.3: Simulação numérica do modelo (4.3), para $a = 3$, $b = c_i = 1$.

Na Tabela 4.4 os lucros obtidos pela firma 1, caso ela produza as quantidades apresentadas na Tabela 4.3

Na Figura 4.4 apresentamos graficamente os resultados do lucro da firma 1, apresentados na tabela 4.4.

Tabela 4.4: Lucros obtidos com o processo de ajustes (4.3), para $a = 3$, $b = c_i = 1$

Tempo (t)	Lucro da firma 1
1	1
2	0.5
3	0.375
4	0.4688
5	0.4297
6	0.4512
7	0.4409
8	0.4462
9	0.4436
10	0.4449
11	0.4442
12	0.4446
13	0.4444
Lucro Médio	0.4103

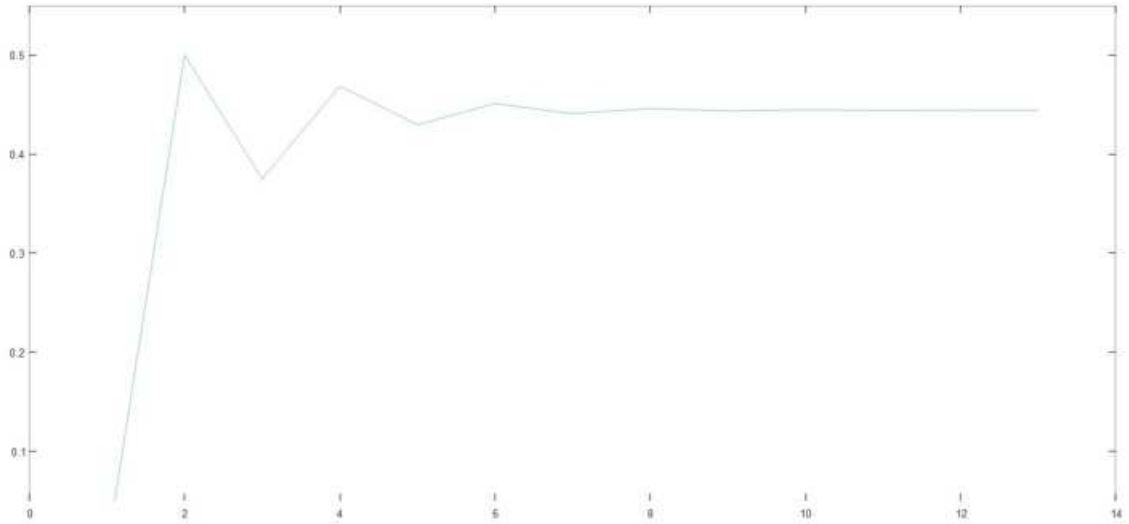


Figura 4.4: Lucro - Melhor Resposta Dinâmica.

No próximo teorema vamos demonstrar que os pontos do equilíbrio de Cournot são assintoticamente estáveis no modelo (4.0.6).

Teorema 4.0.2 (Convergência do processo de ajuste (4.0.6))**.** *Considere o modelo* (4.3)*, para as função demanda inversa dada por* $P_i(q_1(t), q_2(t)) = a - b(q_1(t) + q_2(t))$ *e a função custo dada por* $C_i(t) = c_i(t)q_i(t)$*, para* $i = 1, 2$*, respectivamente. Então, as funções reação são dadas por* (3.2.8)*. Além disso, o ponto de equilíbrio de Cournot é dado por* $q_1^* = \frac{a-2c_1+c_2}{3b}$ *e* $q_2^* = \frac{a-2c_2+c_1}{3b}$*. Este é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.*

Demonstração. A demonstração de que o ponto de equilíbrio é dado como no Teorema, segue diretamente de fazer $q_i(t) = q_i(t+1)$, para $i = 1, 2$, no modelo (4.3).

Para verificar que o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável, primeiramente, note que,

em qualquer tempo t, o sistema pode ser escrito pela seguinte aplicação

$$T(q_1(t), q_2(t)) = (q_1(t+1), q_2(t+1)),$$

onde

$$\begin{cases} q_1(t+1) = & \frac{a-c_1-bq_2(t)}{2b} \\ q_2(t+1) = & \frac{a-c_2-bq_1(t)}{2b} \end{cases}$$

Seque do Teorema do Valor Intermediário que

$$\|T(q_1(t), q_2(t)) - T(\tilde{q}_1(t), \tilde{q}_2(t))\| \leq \|JT(Z)\| \|(q_1(t) - \tilde{q}_1(t), q_2(t) - \tilde{q}_2(t))\|,$$

onde $JT(Z)$ é a Jacobina da aplicação T em algum ponto $Z = (q_1(t), q_2(t)) + \zeta(\tilde{q}_1(t), \tilde{q}_2(t))$, para algum $\zeta \in [0, 1]$.

Segue de maneira direta que $\|JT(Z)\| = 1/2$. Portanto, a aplicação T é uma contração. Pelo Teorema de Ponto Fixo de Banach [Barros et al., 2013], a recorrência (4.3) converge assintoticamente para o único ponto fixo da aplicação T.

□

Note que o processo melhor resposta dinâmica (4.3) é, na verdade, um caso especial do primeiro processo de ajuste parcialmente racional que estudamos na Subseção 4.0.1. De fato, calculando o lucro marginal da firma i, dado por

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_1} = r_i(q_j) - q_i \tag{4.0.7}$$

e substituindo em (4.0.1), obtemos que

$$\begin{cases} q_1(t+1) = & q_1(t) + \rho_1 \left(r(q_2(t)) - q_1(t)\right) \\ q_2(t+1) = & q_2(t) + \rho_2 \left(r(q_1(t)) - q_2(t)\right) \end{cases} \tag{4.0.8}$$

onde ρ_i é a velocidade de ajuste. Ou seja, ρ_i é um parâmetro que busca mensurar o quanto a firma confia em sua em suas próprias estimativas com relação a produção que será assumida pela firma concorrente. Tomando $\rho_i = 1$ temos (4.3).

Portanto, a diferença entre os modelos de ajuste da melhor resposta dinâmica (4.3) e parcialmente racional (4.0.1) é o valor de ρ_i. Com isso, podemos concluir que o mecanismo de ajuste parcialmente racional (4.0.1) é mais conservador em sua estimativas, pois valores de ρ_i menores que 1 fazem que com o processo considere os valores do lucro marginal do tempo anterior de forma ponderada. Isso pode ser interpretado como: quanto menor for $\rho_i \in]0, 1]$, menor é a confiança da firma i em suas próprias estimativas.

Tabela 4.5: Processo de ajuste pelo método do gradiente, com $a = 3$ e $b = c_i = 1$.

Tempo (t)	$q_1(\rho = 0.1)$	$q_1(\rho = 0.3)$	$q_1(\rho = 0.5)$	$q_1(\rho = 0.7)$	$q_1(\rho = 0.9)$
1	1	1	1	1	1
2	0.9	0.7000	0.5	0.3	0.1
3	0.8370	0.6790	0.6250	0.5310	0.2530
4	0.7942	0.6715	0.6641	0.6823	0.5356
5	0.7638	0.6686	0.0.6667	0.6599	0.7251
6	0.7416	0.6674	0.6667	0.6693	0.6107
7	0.7249	0.6670	0.6667	0.6656	0.7030
8	0.7122	0.6668	0.6667	0.6671	0.6340
9	0.7025	0.6667	0.6667	0.6665	0.6899
10	0.6949	0.6667	0.6667	0.6667	0.6499
11	0.6891	0.6667	0.6667	0.6667	0.6816
12	0.6844	0.6667	0.6667	0.6667	0.6541
13	0.6808	0.6667	0.6667	0.6667	0.6763

4.0.3 Processo de ajuste pelo método do gradiente

Os processos de ajustes, como visto até aqui, a velocidade de ajuste $\rho_i \in]0, 1]$ foi tratada como constante. Uma outra possibilidade é assumir que a velocidade de ajuste das firmas do modelo seja uma função de $q_i(t)$ como apresentado em [Matsumoto et al., 2021],[Gori et al., 2015] e [Elettreby, 2016], o qual é conhecido como método do gradiente. Neste caso, a dinâmica de ajustes é dada por

$$\begin{cases} q_1(t+1) = & q_1(t) + \rho_1 q_1(t) \frac{\partial \pi_1(q_1(t), q_2(t))}{\partial q_1} \\ q_2(t+1) = & q_2(t) + \rho_2 q_2(t) \frac{\partial \pi_1(q_1(t), q_2(t))}{\partial q_2} \end{cases} \tag{4.0.9}$$

No que segue, estudaremos a dinâmica (4.0.9), para a função de demanda inversa $P(q_1(t), q_2(t)) = a - b(q_1(t) + q_2(t))$ e função custo $C_i(t) = c_i q_i(t)$.

Antes disso, a Tabela 4.5 mostra os valores da produção da firma 1, para a escolha de $a = 3$ e $b = c_i = 1$, com condição inicial $q_1(t = 1) = q_2(t = 1) = 1$, para distintos valores de $\rho_i := \rho$, com $i = 1, 2$. Na Figura 4.5 apresentamos a representação gráfica da dinâmica de produção para a firma 1, no caso particular em que $\rho_i = \rho = 0.5$, para $i = 1, 2$.

Os resultados apresentados na Tabela 4.5 nos levam a conjecturar que o processo de ajustes (4.0.9) é estável e converge, para qualquer escolha dos parâmetros ρ_i, com $i = 1, 2$.

Na Tabela 4.6, apresentamos os lucros obtidos pela firma 1, ao produzir as quantidades de acordo com o modelo (4.0.9), conforme apresentadas na Tabela 4.5.

Na Figura 4.6, apresentamos na forma de um gráfico os valores do lucro referentes a Tabela 4.6, para $\rho = 0.5$.

No que se segue, apresentaremos os resultados de existência e estabilidade para os pontos de equilíbrio do modelo (4.0.9).

Teorema 4.0.3 (Convergência do processo de ajuste do gradiente.)**.** *Considere o processo de ajustes do gradiente* (4.0.9)*, para a função demanda inversa* $P = a - b(q_1(t), q_2(t))$ *e função custos* $C_i(q_i) = c_i q_i(t)$*, onde* a, b, c_i *são constantes positivas em que* $a > b$ *e* $a > c_i$*, para*

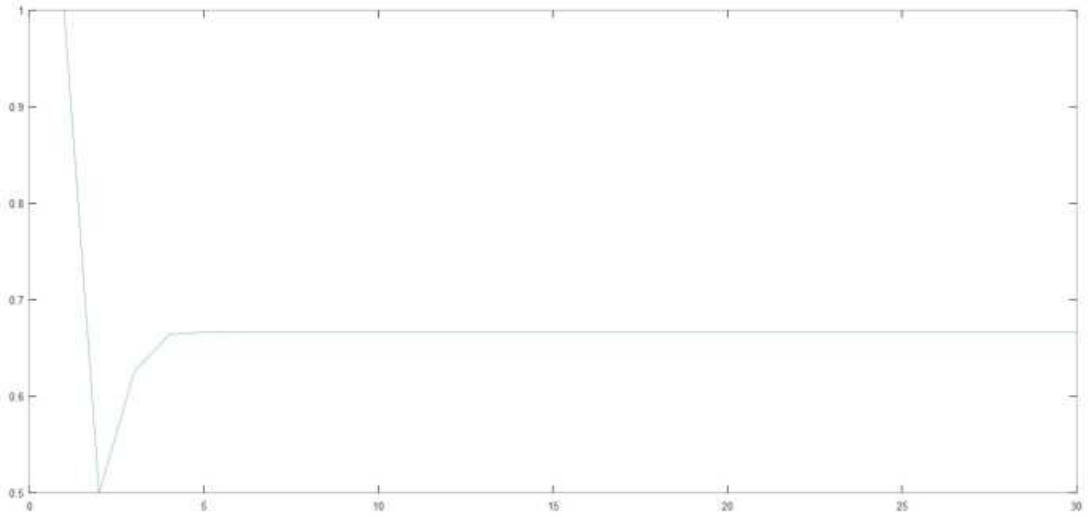


Figura 4.5: Processo de ajuste do gradiente, para $a = 3$, $b = c_i = 1$.

Tabela 4.6: Lucro obtido pela firma 1 seguindo o processo de ajustes pelo método do gradiente, com $a = 3$ e $b = c_i = 1$.

Tempo (t)	$\pi_1(\rho = 0.1)$	$\pi_1(\rho = 0.3)$	$\pi_1(\rho = 0.5)$	$\pi_1(\rho = 0.7)$	$\pi_1(\rho = 0.9)$
1	0	0	0	0	0
2	0.18	0.4200	0.5	0.42	0.18
3	0.2729	0.4359	0.4688	0.4981	0.3780
4	0.3269	0.4412	0.4445	0.4335	0.4975
5	0.3608	0.4432	0.4444	0.4489	0.3986
6	0.3833	0.4439	0.4444	0.4427	0.4755
7	0.3988	0.4442	0.4444	0.4451	0.4176
8	0.4099	0.4444	0.4444	0.4442	0.4641
9	0.4180	0.4444	0.4444	0.4446	0.4279
10	0.4240	0.4444	0.4444	0.4444	0.4570
11	0.4285	0.4444	0.4444	0.4444	0.4340
12	0.4320	0.4444	0.4444	0.4444	0.4525
13	0.4346	0.4444	0.4444	0.4444	0.4378
Lucro Médio	0.3438	0.4073	0.4165	0.4119	0.3862

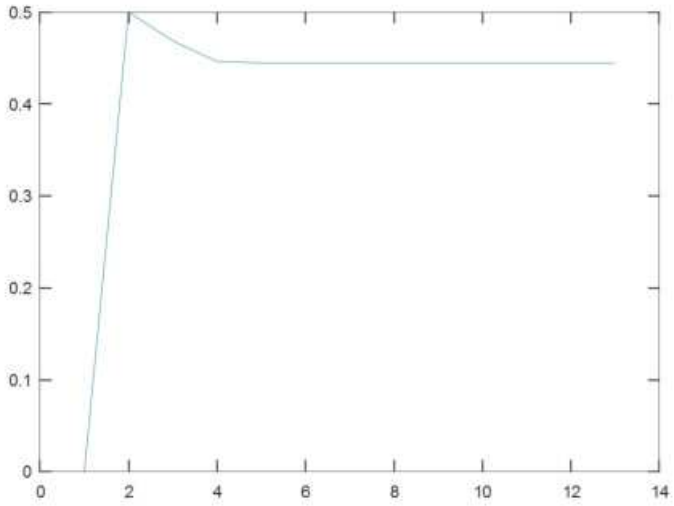


Figura 4.6: Lucro da firma 1 pelo processo de ajuste do gradiente, para $a = 3$, $b = c_i = 1$ e $\rho_i = 0.5$.

$i = 1, 2$. *Os pontos* $(q_1*, q_2^*) = (0, r_2(0))$, $(q_1*, q_2^*) = (r_1(0), 0)$, $(q_1*, q_2^*) = (0, 0)$ *e* (q_1*, q_2^*) *dado pelo ótimo de Cournot dados no Lema 3.2.1 são os quatro pontos de equilíbrio do modelo* (4.0.9). *Além disso, o ponto* (q_1^*, q_2^*) *dado pelo ótimo de Cournot é assintoticamente estável.*

Demonstração. Segue da definição 12 que os pontos de equilíbrio do modelo (4.0.9) são soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} \rho_1 q_1 \frac{\partial \pi_1(q_1(t), q_2(t))}{\partial q_1} & = 0 \\ \rho_2 q_2 \frac{\partial \pi_1(q_1(t), q_2(t))}{\partial q_2} & = 0\,. \end{cases} \tag{4.0.10}$$

Tais soluções são dadas por

$$\begin{cases} q_1 = 0 \quad ou \quad \frac{\partial \pi_1(q_1(t), q_2(t))}{\partial q_1} = 0 \\ q_2 = 0 \quad ou \quad \frac{\partial \pi_1(q_1(t), q_2(t))}{\partial q_2} = 0 \end{cases} \tag{4.0.11}$$

Portanto, os pontos de equilíbrio são exatamente os anunciados no Teorema.

O próximo passo é estabelecer a estabilidade do ponto de equilíbrio (q_1^*, q_2^*). Faremos isso usando a teoria de Lyapunov (veja o Apêndice 7 para alguns detalhes). Defina a função

$$V(q_1(t), q_2(t)) = (q_1(t) - q_1^*)^2 + (q_2(t) - q_2^*)^2\,. \tag{4.0.12}$$

Note que $V(\cdot, \cdot)$ é uma função contínua (por definição). Além disso, $V(q_1^*, q_2^*) = 0$.

Além disso,

$$\begin{aligned}
\Delta V =& V((q_1(t+1)), q_2(t+1)) - V(q_1(t), q_2(t)) \\
=& \left(q_1(t+1) - q_1^*\right)^2 - \left(q_1(t) - q_1^*\right)^2 + \left(q_2(t+1) - q_2^*\right)^2 - \left(q_2(t) - q_2^*\right)^2 \\
=& \left(q_1(t) - q_1^* + \rho_1 q_1(t)\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1}\right)^2 - \left(q_1(t) - q_1^*\right)^2 + \left(q_2(t) - q_2^* + \rho_2 q_2(t)\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2}\right)^2 - \left(q_2(t) - q_2^*\right)^2 \\
=& \cancel{\left(q_1(t) - q_1^*\right)^2} + 2\left(q_1(t) - q_1^*\right)\rho_1 q_1(t)\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} + \left(\rho_1 q_1(t)\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1}\right)^2 - \cancel{\left(q_1(t) - q_1^*\right)^2} \\
&+ \cancel{\left(q_2(t) - q_2^*\right)^2} + 2\left(q_2(t) - q_2^*\right)\rho_2 q_2(t)\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} + \left(\rho_2 q_2(t)\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2}\right)^2 - \cancel{\left(q_2(t) - q_1^*\right)^2} \\
=& \rho_1 q_1(t)\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1}\left(\rho_1 q_1(t)\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} + 2(q_1(t) - q_1^*)\right) + \rho_2 q_2(t)\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2}\left(\rho_2 q_2(t)\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} + 2(q_2(t) - q_2^*)\right)
\end{aligned}$$

Como $\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = a - c_i - 2bq_i - bq_j$ e $q_i^* = \frac{a - 2c_i + c_i}{3b}$, para $i, j = 1, 2$ e $i \neq j$, segue que

$$\begin{aligned}
\Delta V =& \rho_1 q_1(t)\left(a - c_1 - 2bq_1 - bq_2\right)\left(\rho_1 q_1(t)\left(a - c_1 - 2bq_1(t) - bq_2(t)\right) + 2\left(q_1(t) - \frac{a - 2c_1 + c_2}{3b}\right)\right) \\
&+ \rho_2 q_2(t)\left(a - c_2 - 2bq_2 - bq_1\right)\left(\rho_2 q_2(t)\left(a - c_2 - 2bq_2(t) - bq_2(t)\right) + 2\left(q_2(t) - \frac{a - 2c_2 + c_1}{3b}\right)\right)
\end{aligned}$$

Portanto, precisamos verificar sob quais condições a expressão descrita a seguir é menor do que zero,

$$\rho_1 q_1(t)\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1}\left(\rho_1 q_1(t)\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} + 2(q_1(t) - q_1^*)\right) + \rho_2 q_2(t)\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2}\left(\rho_2 q_2(t)\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} + 2(q_2(t) - q_2^*)\right)$$

Note que

$$\rho_i q_i(t)\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} \tag{4.0.13}$$

e

$$2(q_i(t) - q_i^*) \tag{4.0.14}$$

possuem sinais opostos.

Para verificar a veracidade de tal afirmação vamos considerar a diferença $\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i}(q_i, q_j) - \frac{\partial \pi_i}{\partial q_i}(q_i^*, q_j^*)$.

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i}(q_i, q_j) - \frac{\partial \pi_i}{\partial q_i}(q_i^*, q_j^*) = -2b(q_i(t) - q_i^*) - b(q_j - q_j^*) \tag{4.0.15}$$

Sabemos que $\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i}(q_i^*, q_j^*)$ é igual a zero. Logo podemos afirmar que quando a diferença 4.0.15 for negativa o mesmo deve acontecer com $\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i}(q_i, q_j)$. De maneira similar se 4.0.15 for positivo

o mesmo acontece com $\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i}(q_i, q_j)$. Além disso 4.0.15 será negativo se e somente se $(q_i - q_i^*)$ e $(q_i - q_i^*)$ forem positivos. Portanto $(q_i - q_i^*)$ e $\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i}(q_i, q_j)$ possuem sinais opostos.

O que faremos agora é descobrir as condições que tornam a desigualdade abaixo verdadeira.

$$|2(q_i(t) - q_i^*)| > \left|\rho_i q_i(t) \frac{\partial \pi_i}{\partial q_i}\right| \tag{4.0.16}$$

$$\tag{4.0.17}$$

Considere o modulo de $\rho_i q_i \frac{\partial \pi_i}{\partial q_i}$:

$$\begin{aligned} &\left|\rho_i q_i(t) \frac{\partial \pi_i}{\partial q_i}\right| \\ =&\left|\rho_i q_i(t) \frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} + q_i(t) - q_i(t)\right| \\ =&|q_i(t+1) - q_i(t)| \\ =&|q_i(t+1) - q_i(t) + q_i^* - q_i^*| \end{aligned}$$

Pela desigualdade triangular:

$$|q_i(t+1) - q_i^*| + |(-1)(q_i(t) - q_i^*)| \geq |q_i(t+1) - q_i(t) + q_i^* - q_i^*| \tag{4.0.18}$$

Considere agora o modulo de $2(q_i(t) - q_i^*)$

$$|2(q_i(t) - q_i^*)| \tag{4.0.19}$$

Sabendo que:

$$q_i(t) = q_i(t+1) - \rho_i q_i \frac{\partial \pi_i}{\partial q_i}$$

Podemos reescrever 4.0.19:

$$\left|2(q_i(t+1) - q_i^* - \rho_i q_i \frac{\partial \pi_i}{\partial q_i})\right|$$

Tomando $m = -\rho_i q_i \frac{\partial \pi_i}{\partial q_i}$:

$$|2(q_i(t+1) - q_i^* + m| \tag{4.0.20}$$
$$= |(q_i(t+1) - q_i^* + m| + |2(q_i(t+1) - q_i^* + m| \tag{4.0.21}$$

Comparando 4.0.18 e 4.0.20 e sabendo que m possui o mesmo sinal de $q_i(t+1) - q_i^*$ podemos verificar que:

$$|2(q_i(t+1) - q_i^* + m| \geq \left|\rho_i q_i \frac{\partial \pi_i}{\partial q_i}\right| \tag{4.0.22}$$

$$\tag{4.0.23}$$

Logo $\Delta V < 0$

□

5Portanto

4.0.4 Processo de ajuste por aproximação de Puu

Nesta seção, estudaremos o processo de ajustes conhecido na literatura por aproximação de Puu, com informação incompleta, e.g. [Asker, 2007, Askar et al., 2015]. Este processo assume que as firmas envolvidas tomam as decisões de produção com base no lucro e na produção obtidos nos dois passos de tempo anteriores.

A dinâmica para a aproximação de Puu é dada por

$$\begin{cases} q_1(t+1) = & q_1(t) + \rho_1 \frac{\pi_1(q_1(t),q_2(t)) - \pi_1(q_1(t-1),q_2(t-1))}{q_1(t) - q_1(t-1)} \\ q_2(t+1) = & q_2(t) + \rho_2 \frac{\pi_2(q_1(t),q_2(t)) - \pi_2(q_1(t-1),q_2(t-1))}{q_2(t) - q_2(t-1)} \end{cases} \tag{4.0.24}$$

onde t representa o tempo, $q_i(t)$ representam as quantidades produzidas pela firma i e $\pi_i(\cdot,\cdot)$ representa o lucro da firma i, para $i = 1, 2$.

Note que o processo de ajustes de Puu (4.0.24) é uma recorrência de segunda ordem e, por isso, consideraremos este processo com as condições iniciais em $q_i(t_0)$ e $q_i(t_0 - 1)$, para $i = 1, 2$, respectivamente.

Observando com atenção o modelo 4.0.24, é fácil notar que essa dinâmica pode se tornar instável em pontos onde $q_i(t) \approx q_i(t-1) \approx q_i(t-2)$. Pois, quando isso acontece acabamos nos aproximaríamos de uma divisão por zero.

Antes de abordarmos os aspectos teóricos do processo de ajustes de Puu (4.0.24), apresentaremos algumas simulações numéricas, nas quais, o preço dos bens fabricados por cada firma será assumido simétrico e dado por $P_i(q_1(t), q_2(t)) = a - b(q_1(t) + q_2(t))$ e a função custo será dada por $C_i(q_i(t)) = c_i q_i(t)$. Nas simulações, adotaremos os valores de $a = 3$, $b = c_1 = c_2 = 1$, com condições iniciais $q_i(0) = 1$ e $q_i(1) = 0.5$ e $\rho_1 = \rho_2$.

Tabela 4.7: Simulações do processo de ajuste de Puu, para a escolha dos parâmetros $a = 3$, $b = c_1 = c_2 = 1$

Tempo (t)	$q_1(\rho = 0.1)$	$q_1(\rho = 0.3)$	$q_1(\rho = 0.5)$	$q_1(\rho = 0.7)$	$q_1(\rho = 0.9)$
1	1	1	1	1	0,1
2	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
3	0.4	0.2	0	-0.2	-0.4
4	0.42	0.38	1	0.78	1.22
5	0.456	0.632	0.5	1.368	1.544
6	0.4808	0.6248	0	-0.2392	-1.6312
7	0.4934	0.4707	1	-0.4195	0.3257
8	0.5002	0.4134	0.5	1.9027	4.4756
9	0.5004	0.4829	0	1.2263	-2.3668
10	0.5003	0.5451	1	-1.7543	-4.3625
11	0.5001	0.5283	0.5	0.385	9.5503
12	≈ 0.5	0.4842	0	3.7020	2.0123
13	≈ 0.5	0.4767	1	-0.6197	-1.7000

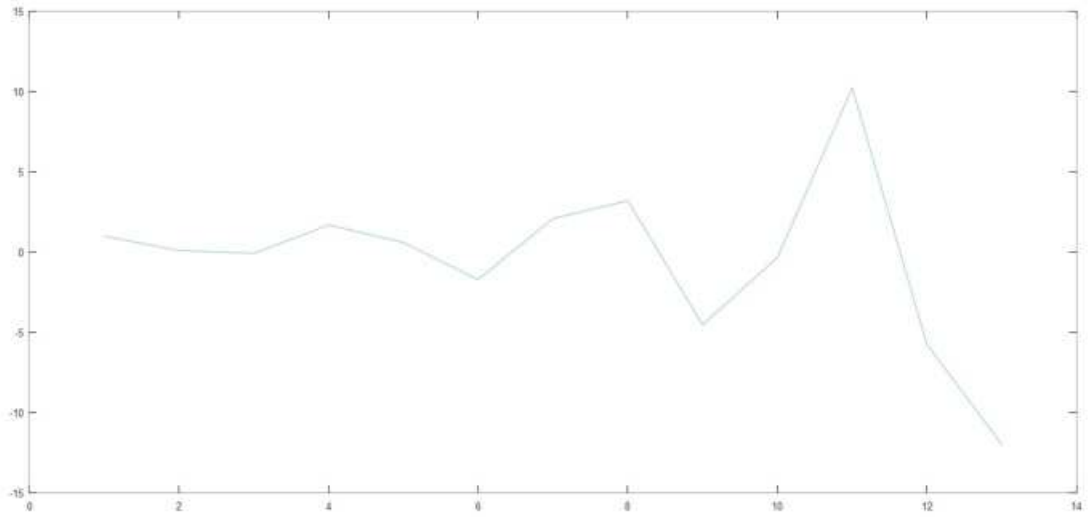


Figura 4.7: Simulações do processo de ajuste de Puu, para a escolha dos parâmetros $a = 3$, $b = c_1 = c_2 = 1$ e $\rho = 0.9$

Pela simetria das escolhas de P_ie C_i, apresentamos na Tabela 4.7 o resultado do processo e ajuste de Puu (4.0.24), somente para a quantidade $q_1(t)$.

Os resultados numéricos apresentados na Tabela 4.7 sugere que o processo de ajuste de Puu (4.0.24) diverge para valores de $\rho_i > 0.5$, inclusive ocorrendo valores negativos para as quantidades produzidas $q_i(t)$ o que é inconsistente com a natureza do problema, e é periódico para $\rho = 0.5$.

As Figuras 4.7 e 4.8 apresentam os resultados simulados contidos na Tabela 4.7 para $\rho = 0.9$ e $\rho = 0.5$, respectivamente.

Já para as simulações apresentadas na Tabela 4.7 para os valores de $\rho = 0.1$ e $\rho = 0.3$, podemo observar que existe uma aparente convergência.

No entanto tal convergência não parece se aproximar do ótimo de Cournot, mas sim da

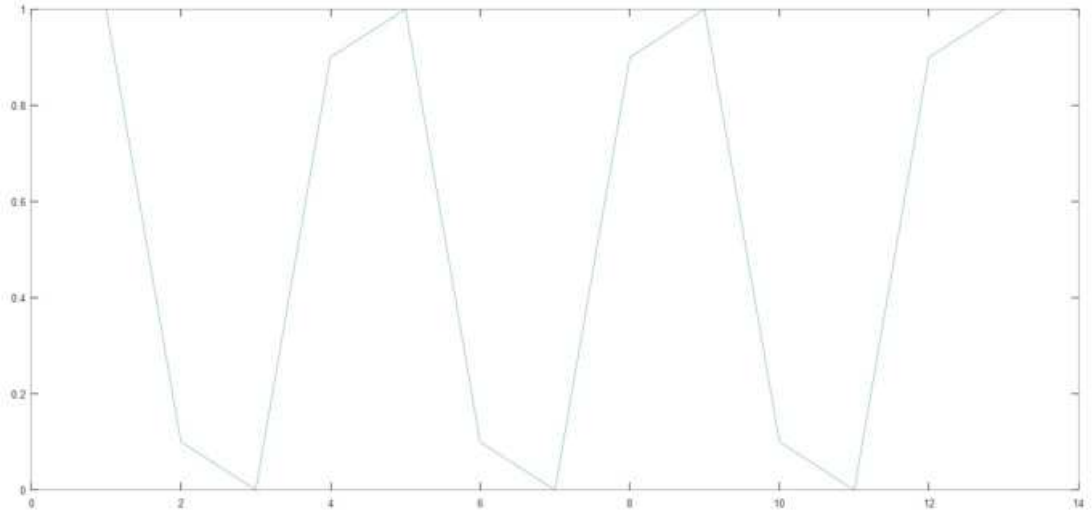


Figura 4.8: Simulações do processo de ajuste de Puu, para a escolha dos parâmetros $a = 3$, $b = c_1 = c_2 = 1$ e $\rho = 0.5$

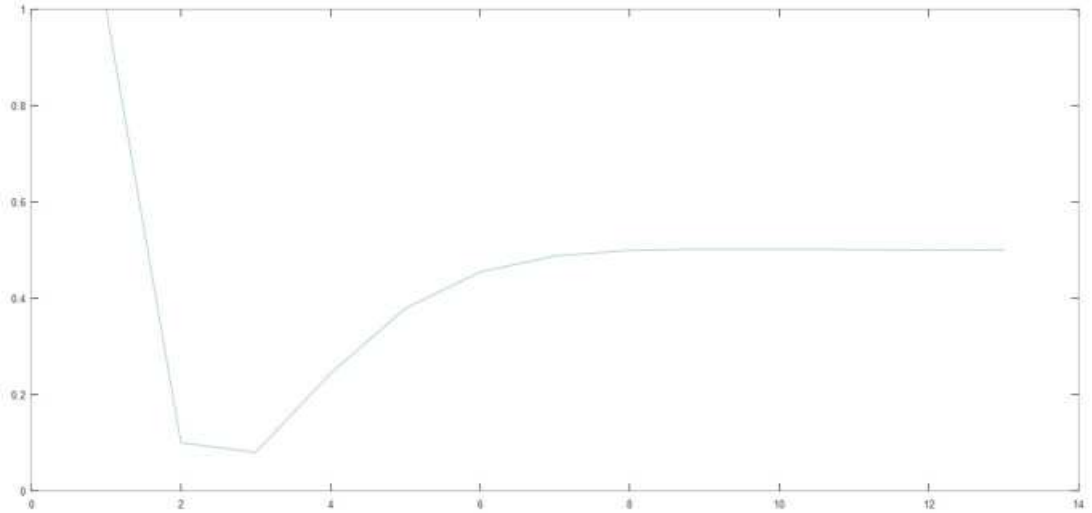


Figura 4.9: Processo De Ajuste De Puu - $\rho = 0.1$

produção de um cartel. Veja na figura 4.9

Na próxima tabela, 4.8, veremos os lucros que as firmas obteriam caso produzissem as quantidades mostradas na tabela 4.7. Veja:

Olhando para o modelo 4.0.24 com atenção podemos perceber que não é possível existir um ponto de equilíbrio para esse sistema. Pois, para que tenhamos um ponto de equilíbrio é necessário que $q_i(t) = q_i(t-1)$ e caso isso aconteça encontraríamos uma divisão por zero. Por consequência, teríamos instabilidade no modelo. Evidentemente essa afirmação não é verdadeira para uma função demanda inversa $P(Q)$ qualquer. Entretanto para o caso que estamos analisando é fácil verificar sua veracidade. Vejamos:

$$\frac{\pi_i(Q(t)) - \pi_i(Q(t-1))}{q_i(t) - q_i(t-1)} = (a - c_i) + \frac{-bq_i(t)(q_i(t) + q_j(t)) + bq_i(t-1)(q_i(t-1) + q_j(t-1)))}{q_i(t) - q_i(t-1)}$$

Tabela 4.8: Aproximação De Puu - Lucro.

Tempo (t)	$\pi_1(\rho = 0.1)$	$\pi_1(\rho = 0.3)$	$\pi_1(\rho = 0.5)$	$\pi_1(\rho = 0.7)$	$\pi_1(\rho = 0.9)$
1	0	0	0	0	0
2	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
3	0.48	0.32	0	-0.48	-1.12
4	0.4872	0.4712	0.5	0.3432	-0.5368
5	0.4961	0.4652	0	-1.0068	-16799
6	0.4993	0.4688	0,5	-0.5928	-8.5840
7	0.4999	0.4983	0	-1.1910	0.4393
8	0.5000	0.4850	0.5	-3.4351	-31.11
9	0.5000	0.4994	0	-0.5549	-15.9372
10	0.5000	0.4959	0,5	-9.6634	-46.7887
11	0.5000	0.4984	0	0.4735	-163.3156
12	≈ 0.5	0.4995	0.5	-20.0055	-4.0744
13	≈ 0.5	0.4989	0	-2.0076	-612.0285
Lucro Médio	0.4587	0.4385	0.2308	-2.8939	-68.018

Tabela 4.9: Resultado das aproximações de Puu com firmas distintas.

Tempo (t)	$q_1(t)$	$q_2(t)$
1	1	1
2	0.1	0.1
3	0.1003	0.100356
4	0.1024	-0.038654
5	0.1114	-0.036457
6	0.1137	-0.181901
7	0.1232	-0.177457
8	0.1256	-0.325192
9	0.1358	-0.318220
10	0.1383	-0.466465
11	0.1491	-0.456682
12	0.1517	-0.604374
13	0.1631	-0.591503

Note

Segundo [Askar and Alshamrani, 2014], existem duas maneiras de contornar tal problema. A primeira delas é considerar que as duas firmas possuem parâmetros, como custo e demanda, suficientemente distintas, dessa forma a firma com custo menor ou demanda maior será a única a permanecer no mercado após um certo tempo, enquanto as demais irão a falência. Este é o caso do exemplo que segue. Considere que a função demanda inversa como anteriormente, para $a = 3$ e $b = 1$. Suponha que as funções custos da firma 1 e 2 sejam fixo e dados por $C_1 = 0.5$ e $C_2 = 1$, respectivamente. Além disso, considere que $\rho_i = 0.001$ e que $q_1(t_0 - 1) = q_2(t_0 - 1) = 1$ e $q_1(t_0) = q_2(t_0) = 0.1$ Sob estas condições, o modelo de ajustes de Puu (4.0.24) produz os seguintes valores para as quantidades produzidas, conforme a Tabela 4.9

Observe que a quantidade $q_2(t)$ apresenta valores negativos para alguns t's, na Tabela 4.9, o que não é condizente com a natureza do problema. Além disso, percebe-se pelos valores

apresentados na Tabela 4.9 que a quantidade $q_1(t)$ aumenta monotonamente, de maneira ilimitada. Portanto, esse fenômeno pode ser interpretado como somente a firma 1 permanecerá no mercado, enquanto a firma 2 irá desaparecer.

A outra alternativa apresentada por [Askar and Alshamrani, 2014], para solucionar o problema da dinâmica do modelo da ajustes de Puu (4.0.24) é considerar que as duas firmas são parecidas o suficiente. Isto consiste em assumirmos que $q_1(t) = q_2(t)$. Neste caso, o modelo de ajustes por aproximações de Pu (4.0.24) se reduz a

$$q_i(t+1) = q_i(t)+\rho\left((a-c_i)-2b\left(q_i(t)+q_i(t-1)\right)\right)\ ,\ \text{com}\ \ i=1,2\ \ \text{e}\qquad q_1(t)=q_2(t)\,. \tag{4.0.25}$$

No próximo teorema analisaremos a estabilidade do modelo de ajustes por aproximações de Puu 4.0.25, com firmas idênticas.

Teorema 4.0.4 (Convergência do processo ajustes de Puu com firmas idênticas)**.** *Considere o processo ajustes de Puu com firmas idênticas* (4.0.25)*, com $a > c_i > 0$ e $b > 0$. Tal dinâmica possui o seguinte ponto de equilíbrio (positivo)*

$$q_i^* = \frac{a-c_i}{4b}\,,$$

para $i = 1, 2$, respectivamente.

Além disso, o ponto q_i^* é assintoticamente estável quando $4\rho^2b^2 < 1$.

Demonstração. Primeiramente vamos encontrar o ponto de equilíbrio $q_i^* = q_i(t^*)$ do modelo (4.0.24). Por definição, t^* é tal que, para qualquer $t \geq t^*$ $q_i(t) = q_i(t^*) = q_i^*$. Portanto, substituindo $q_i(t^* + 2) = q_i(t^* + 1) = q_i(t^*) = q_i^*$ em (4.0.24), encontramos que o pondo de equilíbrio q_i^* satisfaz

$$0 = \rho\left((a-c_i)-2b\left(q_i^*+q_i^*\right)\right)\ ,$$

o que coincide com o enunciado no teorema.

No que segue, usaremos a teoria de Lyapunov para verificar a estabilidade assimptótica do ponto de equilíbrio.

Para facilitar as contas, considere o seguinte sistema auxiliar

$$\begin{aligned} q_i(t+1) =& q_i(t) + \rho\left(a - c_i - 2b\left(q_i(t)+g(t)\right)\right)\\ g(t) =& q_i(t-1)\,. \end{aligned}$$

Então, defina a seguinte função

$$V(q_i(t), g(t)) = \left(q_i(t) - g(t)\right)^2\ .$$

Segue da definição de V que esta é contínua e positiva definida. Além disso, $V(q_i^*, q_i^*) = 0$. Ainda, segue que

$$\begin{aligned}\Delta V(q_i(t), g(t)) &= (q_i(t+1) - g(t+1))^2 - (q_i(t) - g(t))^2 \\ &= (q_i(t) + \rho\,(a - c_i - 2b\,(q_i(t) + g(t))) - q_i(t))^2 - (q_i(t) - g(t))^2 \\ &= (\rho\,(a - c_i - 2b\,(q_i(t) + g(t))))^2 - (q_i(t) - g(t))^2\ .\end{aligned}$$

Seque que em qualquer vizinhança do ponto $q_i^* = g^* = \frac{a-c_i}{4b}$, dada por $(q_i(t), g(t)) = (q_i^* + \varepsilon, g^* + \varepsilon)$, para qualquer $\varepsilon \in R$ suficientemente pequeno

$$\begin{aligned}\Delta V(q_i(t), g(t)) &= \left(\rho\left(a - c_i - 2b\left(2\frac{a-c_i}{4b} + 2\varepsilon\right)\right)\right)^2 - \left(2\frac{a-c_i}{4b} + 2\varepsilon\right)^2 \\ &= 4\rho^2\varepsilon^2 - \left(\frac{a-c_i}{2b} + 2\varepsilon\right)^2 = 4\rho^2\varepsilon^2 - \frac{(a-c_i)^2}{4b^2} - 4\varepsilon\frac{a-c_i}{2b} - 4\varepsilon^2 \\ &< 4\rho^2\varepsilon^2 - 4\varepsilon\frac{a-c_i}{2b} - 4\varepsilon^2 = 4\left((\rho^2-1)\varepsilon^2 - \varepsilon\frac{a-c_i}{2b}\right)\ .\end{aligned}$$

Portanto o sinal de ΔV, depende do sinal da seguinte função quadrática

$$f(\varepsilon) = (\rho^2 - 1)4\varepsilon^2 - \varepsilon\frac{a-c_i}{2b})\,.$$

Caso $\rho = 1$, $f(\varepsilon)$ é negativa, e portanto é ΔV. Para $\rho \in [0, 1[$, segue que $f(\varepsilon)$ possui concavidade voltada para baixo e cujas raízes são $\varepsilon_1 = 0$ e $\varepsilon_2 = \frac{a-c_i}{2b(\rho^2-1)} < 0$.

Se $2b(\rho^2 - 1) >> 1$, temos o resultado desejado.

Logo para que a expressão descrita acima seja negativa, e por consequência q^* seja assintoticamente estável, é necessário que:

$$\begin{aligned}&\rho^2\,(a-c_i)^2 + 4b^2\rho^2\,(q_i(t)+g(t))^2 < 4b\rho^2\,(a-c_i)\,(q_i(t)+g(t)) + (q_i(t)+g(t))^2 \\ &\rho^2\left((a-c_i)^2 + 4b^2(q_i(t)+g(t))^2\right) < (q_i(t)+g(t))\left(4b\rho^2(a-c_i) + (q_i(t)+g(t))\right) \\ &\overbrace{\rho^2\left((a-c_i)^2 + 4b^2(q_i(t)+g(t))^2\right)}^{=X}\overbrace{- (q_i(t)+g(t))\left(4b\rho^2(a-c_i) - (q_i(t)+g(t))\right)}^{=Y} < 0\end{aligned}$$

Vamos estudar a desigualdade descrita acima na vizinhança de q_i^* e g^*. E para fazer isso vamos substituir $q_i(t)$ por $q_i^* + \epsilon_1$ e $g(t)$ por $g^* + \epsilon_1$, com ϵ_1 e ϵ_2 pertencentes aos números reais. Ou seja, vamos substituir $q_i(t)$ e $g(t)$ por $\frac{a-c_i}{2b} + \epsilon_1$. Primeiramente vamos considerar X. Veja a seguir:

$$\begin{aligned}
X =& \rho^2 \left((a-c_i)^2 + 4b^2 \left(\frac{a-c_i}{2b} + \epsilon_1 + \frac{a-c_i}{2b} + \epsilon_1 \right)^2 \right) \\
=& \rho^2 \left((a-c_i)^2 + 4b^2 \left(\frac{a-c_i}{b} + 2\epsilon_1 \right)^2 \right) \\
=& \rho^2 \left((a-c_i) + 4b^2 \left(\frac{(a-c_i)^2}{b^2} + 4\epsilon_1 \frac{(a-c_i)}{b} + 4\epsilon_1^2 \right) \right) \\
=& \rho^2 \left(5(a-c_i)^2 + 16b(a-c_i)\epsilon_1 + 16b^2\epsilon_1^2 \right)
\end{aligned}$$

A seguir consideraremos y:

$$\begin{aligned}
Y &= \left(\frac{a-c_i}{2b} + \epsilon_i + \frac{a-c_i}{2b} + \epsilon_1 \right) \left(4b\rho^2(a-c_i) + \left(\frac{a-c_i}{2b} + \epsilon_1 + \frac{a-c_i}{2b} + \epsilon_1 \right) \right) \\
&= \left(\frac{a-c_i}{b} + 2\epsilon_1 \right) 4b\rho^2(a-c_i) + \left(\frac{a-c_i}{b} + 2\epsilon^1 \right)^2 \\
&= \left((a-c_i)^2 4\rho^2 + 8b\rho^2\epsilon_1(a-c_i) \right) + \left(\frac{(a-c_i)^2}{b^2} + 4\epsilon_1 \frac{(a-c_i)}{b} + 4\epsilon_1^2 \right)
\end{aligned}$$

Fazendo $X - Y$:

$$\begin{aligned}
X - Y &= (a-c_i)^2 \rho^2 + 8b\rho^2\epsilon_1(a-c_i) + 16b^2\epsilon_1^2\rho^2 - \left(\frac{(a-c_i)^2}{b^2} + 4\epsilon_1 \frac{(a-c_i)}{b} + 4\epsilon_1^2 \right) \\
&= (a-c_i)^2 \left(\rho^2 - \frac{1}{b^2} \right) + \epsilon_1(a-c_i)4b \left(2\rho^2 - \frac{1}{b^2} \right) + 4\epsilon_1^2 \left(4b^2\rho^2 - 1 \right)
\end{aligned}$$

Logo, para que q^* seja um ponto assintoticamente estável é necessário que :

$$(a-c_i)^2 \left(\rho^2 - \frac{1}{b^2} \right) + \epsilon_1(a-c_i)4b \left(2\rho^2 - \frac{1}{b^2} \right) + 4\epsilon_1^2 \left(4b^2\rho^2 - 1 \right)$$

No entanto é possível estabelecer um critério mais simples para garantir a estabilidade do ponto q_i^*. A vizinhança ϵ_1 do ponto de equilíbrio não é necessariamente pequena, dado que não existe nenhum tipo de restrição que a limite. Portanto, o termo com mair contribuição no sinal de ΔV é:

$$4\epsilon_1^2 \left(4b^2\rho^2 - 1 \right)$$

E essa expressão só será negativa quando $4\rho^2 b^2 < 1$. Além disso, sob essas condições os demais termos de ΔV também são negativos. Consequentemente sempre que $4\rho^2 b^2 < 1$ o ponto q^* será assintoticamente estável.

□

Podemos verificar na tabela 4.7 que de fato, para $4\rho^2 b^2 > 1$, o sistema diverge. Veja, por exemplo, a coluna dessa tabela correspondente a $\rho = 0.7$, (com $b = 1$) para a qual a quantidade $4\rho^2 b^2 = 1.96 > 1$.

Capítulo 5

Cálculo Fracionário nas Ciências Econômicas

A introdução de conceitos de cálculo fracionário em problemas de natureza econômica não é nova e pode ser vista em uma boa quantidade de publicações cientificas, veja por exemplo [Tarasov, 2020] e as referências apresentadas nesse trabalho. No entanto, ainda restam muitas questões que valem a pena ser debatidas e investigadas na união desses dois campos de estudo. No que se refere ao estudo dos oligopólios, em especial, o cálculo de ordem arbitraria pode trazer novas perspectivas e resultados que certamente serão interessantes para o progresso de área de estudo.

Entretanto, para que possamos realizar uma investigação acerca dos esfeitos de utilizar o cálculo fracionário no contexto da microeconomia é preciso fundamentar este conceito. Um dos primeiros passos neste capítulo será interpretar a derivada de ordem não inteira de uma função oriunda da ciência econômica.

Isso posto, existem dois pontos sobre os quais devemos atentar. O primeiro deles reside no fato de que as derivadas e integrais fracionárias não são operadores pontuais e, dessa maneira, a modelagem de fatores econômicos feita a partir dessas ferramentas permite que consigamos descrever processos com memória e fatores de não-localidade, os quais são negligenciados pelos processos econômicos descritos por derivadas de ordem inteira. Note que nos modelos de oligopólio descritos nos Capítulos anteriores desta dissertação as derivadas usadas eram de ordem inteira.

O segundo ponto que devemos considerar é que, como visto anteriormente, a definição da derivada de ordem arbitrária generaliza a definição da derivada de ordem inteira e, desta forma, existe a possibilidade de interpretar as derivadas fracionárias de uma variável econômica como uma generalização dos indicadores econômicos conhecidos, que, por sua vez, são obtidos com o uso do cálculo de ordem inteira. Tome como exemplo de indicador econômico obtido com o uso das derivadas de ordem inteira o lucro e o custo marginal conforme foi visto nos Capítulos 3 e 4.

Neste capítulo, revisitaremos os modelos do tipo Cournot apresentados no Capítulo 3, No

entanto passaremos a empregar derivadas de ordem não inteira em tais modelos. Com isso esperamos investigar quais os efeitos de unir esses dois campos de estudo. Por fim, dedicaremos espaço para justificar ao leitor, as vantagens, e desvantagens, de se usar derivadas fracionárias no problema de Cournot. Resta destacar que vários outros modelos de oligopólios e processos de ajustes apresentados anteriormente nesta dissertação são passíveis de serem incluídos em estudos análogos aos que faremos a seguir, os quais serão investigados em contribuições futuras.

5.1 DERIVADAS DE ORDEM FRACIONÁRIA EM ECONOMIA

Nessa subseção apresentaremos uma interpretação para a derivada fracionaria de uma função de natureza econômica. No entanto, antes de fazer isso vamos relembrar o significado das derivadas de ordem inteira. Dessa maneira poderemos construir um paralelo entre esses dois tipos de derivada e assim identificar como elas se distinguem e quais as vantagens de uma em relação a outra. E para tanto vamos considerar um indicador Y dependente de uma variável q. Sabemos que quando derivamos Y em relação a q encontramos um nova função que descreve a intensidade (medida) em que o indicador econômico Y,têm seu valor modificado com a variação de q, enquanto os demais parâmetros do problema permanecem inalterados. Tal medida é chamada de valor marginal do indicador Y.

É fácil notar que o valor marginal de um indicador Y, ou seja a primeira derivada desse indicador possui um significado idêntico aquele atribuídos as derivadas de uma função que descrevem problemas da física. Em ambos os casos, na economia e na física, a derivada de um indicador Y , corresponde ao crescimento (ou decrescimento) dos valores de Y por unidade de crescimento (ou decrescimento) de um determinado fator, q. A diferença fica por conta daquilo que os indicadores e variáveis significam para estas duas ciências. Enquanto para uma trata-se de lucro e produtividade para outra tratam-se de velocidade e aceleração. Considerando a ciência econômica podemos encontrar inúmeros exemplos de indicadores marginais. A produção marginal, é obtida derivando a função de produção em relação aos insumos, o custo marginal, é encontrado a partir da derivada primeira da função custo em relação a quantidade produzida e a receita marginal é obtida derivando a função receita em relação a quantidade produzida.

Usando a linguagem matemática, podemos dizer que um função marginal MGY, onde Y é um indicador dependente de q será dada por:

$$\frac{dY}{dq} = MGY \tag{5.1.1}$$

No caso em que o indicador Y é tempo dependente, ou seja $Y = Y(t)$, sua variação com relação a um fator $q = q(t)$ é dada, em um certo tempo $T > 0$, pela derivada paramétrica. Veja a seguir:

$$MY_q(T) = \frac{\frac{dY(t)}{dt}}{\frac{dq(t)}{dt}}(t = T) = \frac{\frac{dY(T)}{dT}}{\frac{dq(T)}{dT}}\,. \tag{5.1.2}$$

Note que, (5.1.2) implica que a o valor marginal do indicador Y está sendo avaliado com relação as variações do fator q, em uma vizinhança infinitesimal do tempo T. Ou seja, toda a informação disponível a respeito de $Y(t)$ com $[0, T]$ é desconsiderada. Podemos dizer que indicadores com essa característica possuem "amnésia"completa (não se importam com o que aconteceu no passado).

Contudo, negligenciar toda informação disponível no intervalo $[0, T]$ pode não ser a melhor forma de abordar certos problemas de natureza econômica. Dado que, para tomar uma decisão um agente econômico procura considerar uma grande quantidade de dados, e isso inclui o histórico dos diferentes indicadores econômicos, Portanto é interessante encontrar formas de embutir nas funções marginais, $MGY(t)$, informações acerca do comportamento dessas mesmas funções no intervalo de tempo $]0, T]$. Neste sentido, as derivadas de ordem não inteira podem fornecer uma solução para a questão da "amnésia"dos indicadores econômicos. Pois, uma derivada fracionaria é um operador não pontual e portanto para conseguir aplicar este operador é necessário considerar um intervalo, A consequência disso é que as informações acerca da função $Y(t)$ contidas no intervalo $[0, 1]$ passam a ter algum peso na derivada de ordem não inteira. Isso posto, podemos interpretar a derivada de ordem arbitraria como uma generalização da derivada de ordem inteira. Logo um indicador $D^{\alpha_1}Y(q)$ passa a ser uma família de indicadores em que $D^1Y(q)$ está incluído. Portanto, a ideia é adotar uma generalização do valor marginal (5.1.2), utilizando as derivadas de ordem fracionária segundo Caputo ou segundo Riemann-Liouville (veja Capítulo 2). Consequentemente, o indicador econômico fracionário, que caracteriza o indicador econômico com memória, seria dado por

$$FMY_q(T) = \frac{D_1^{\alpha} Y(t)}{D^{\alpha_1} q(t)}(t = T)\,, \tag{5.1.3}$$

onde D_1^{α} representa a derivada de ordem fracionária segundo Riemann-Liouville de ordem $\alpha_1 \in R_+$ (veja Capítulo 2 para a definição). Note que no caso particular em que $\alpha_1 = 1$, (5.1.3) corresponde a (5.1.2). Uma vez que já foi verificado que quando α_1 é um valor natural a derivada fracionaria é idêntica a derivada de ordem inteira. Já no caso em que $\alpha_1 = 0$, e por consequência a derivada da função ser a própria função, recaímos em outro indicador bastante importante, a média. Veja a seguir:

$$\frac{D_0^0 Y(t)}{D_0^0 q(t)} = \frac{Y(t)}{q(t)} = MY(t)$$

Onde MY representa a média do indicador Y. Portanto é possível afirmar que a derivada de ordem não inteira representa uma generalização dos indicadores econômicos conhecidos. Tal ideia foi proposta em [Tarasova and Tarasov, 2017].

5.1.1 Cálculo fracionário e memória em economia

Segundo [Tarasova and Tarasov, 2018] e [Tarasov, 2018] a definição mais básica de processo econômico com memória é a seguinte: dizemos que um processo econômico é dotado de memória quando uma certa variável endógena $Y(t)$ no tempo t depende do comportamento de uma outra variável exógena $q(\tau)$ em τ, onde $\tau \in (0, t)$.

De forma mais precisa, considere o *operador De Volterra*

$$Y(q(t)) = \int_0^t M(t,\tau) f(q(\tau)) d\tau \,, \tag{5.1.4}$$

onde $M(t,\tau)$ representa a função de memória. Em particular, $M(t,\tau) = (t-\tau)^{\alpha_1 - 1}$ é a função de memória quando utilizamos o cálculo de ordem fracionária segundo Caputo ou segundo Riemann-Liouville (veja Capítulo 2) dada por

$$Y(q(t)) = J^{\alpha_1} f(q(t)) \,. \tag{5.1.5}$$

No que segue, apresentaremos uma justificativa para chamar de memória a abordagem descrita por] (5.1.5). Esse raciocínio pode ser observado ainda em [de Barros et al., 2021, Diethelm, 2010].

Observação 1. *Considere a variável endógena $Y(t)$ dependendo da variável exógena $q(\tau)$ dada pela integral de Volterra* (5.1.4)*, com função de memória $M(t,\tau) = (t-\tau)^{\alpha_1 - 1}$. Sejam $0 < t_1 < t_2$ com $t_1, t_2 \in [0,T]$. Então*

$$\begin{aligned}
Y(q(t_1)) - Y(q(t_2)) &= (J^{\alpha_1} f(q(t_2)) - (J^{\alpha_1} f(q(t_1)) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \left[\int_0^{t_2} (t_2 - \tau)^{\alpha_1 - 1} f(q(\tau)) d\tau - \int_0^{t_1} (t_1 - \tau)^{\alpha_1 - 1} f(q(\tau)) d\tau \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \left[\int_{t_1}^{t_2} (t_2 - \tau)^{\alpha_1 - 1} f((q(\tau)) d\tau + \int_0^{t_1} (t_2 - \tau)^{\alpha_1 - 1} f(q(\tau)) d\tau \right] \\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \left[\int_0^{t_1} (t_1 - \tau)^{\alpha_1 - 1} f(q(\tau)) d\tau \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \left[\int_{t_1}^{t_2} (t_2 - \tau)^{\alpha_1 - 1} f(q(\tau)) d\tau + \int_0^{t_1} \left((t_2 - \tau)^{\alpha_1 - 1} - (t_1 - \tau)^{\alpha_1 - 1} \right) f(q(\tau)) d\tau \right]
\end{aligned} \tag{5.1.6}$$

Note que quando $\alpha_1 = 1$ a segunda integral na última linha de (5.1.6) *é nula. Desta forma as derivadas de ordem inteira não conferem memória ao processo (somente local). No entanto, se $\alpha_1 \neq 1$ a mesma integral não é nula, e portanto, o processo depende de todo o intervalo de tempo, ao qual denominamos de memória.*

5.2 MODELOS DE OLIGOPÓLIO FRACIONÁRIO

Nesta seção, revisitaremos alguns dos modelos do tipo Cournot descritos na Seção 3.2. No entanto, a abordagem adotada nesta seção será feita com os indicadores marginais considerados com memória, e calculados a partir de derivadas de ordem fracionária $\alpha_i \in R_+$, dadas por (5.1.3), onde $Y = \Pi_i(q_i(t), q_j(t))$, para $i, j = 1, 2$, respectivamente. Dessa maneira buscaremos investigar os efeitos, e as possíveis vantagens, de se utilizar as derivadas de ordem não inteira em um modelo de oligopólio.

5.2.1 Modelo de duopólio de Cournot com cálculo fracionário.

O modelo de duopólio míope de Cournot foi amplamente discutido na Seção 3.2. Nesta seção propomos uma inovação ao modelo, que consiste em substituir as derivadas de ordem inteira por derivadas fracionária e analisar as possíveis vantagens da dinâmica com memória (veja Seção 5.1.1.

Assim como na Seção 3.2, assumiremos a existência de duas firmas em duopólio, cuja a função demanda inversa dos produtos fabricados por elas seja linear, como aquela descrita em (3.2.1), onde $q_i(t)$ representa a quantidade produzida pelas firma $i = 1, 2$, respectivamente, no tempo t. Ainda, assumiremos que os custos das firmas sejam fixos no intervalo de tempo $[0, T]$, dados respectivamente por c_1 e c_2. Desta forma, o custo para produzir a quantidade $q_i(t)$, em qualquer instante de tempo t, é dado por (3.2.2), para cada uma das firmas $i = 1, 2$.

Sob as hipóteses acima, analisaremos o modelo de Cournot fracionário

$$\begin{cases} q_1(t+1) = q_1(t) + \rho_1 D^{1-\alpha_1}\Pi_1(q_1(t), q_2(t)) \\ q_2(t+1) = q_2(t) + \rho_2 D^{1-\alpha_2}\Pi_2(q_1(t), q_2(t)) \end{cases}$$

para $\alpha_j \in [0, 1[$, onde $D^{1-\alpha_j}$ é representa a derivada parcial fracionária de ordem $1 - \alpha_j$ de Π_j, com relação a q_j, para $j = 1, 2$, respectivamente.

Como

$$\begin{aligned} D^{1-\alpha_1}\Pi_i(q_1(t), q_2(t)) &= \frac{d}{dq_1}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^{q_1}(q_1 - t)^{\alpha_1 - 1}\,\Pi_1 dt\right] \\ &= \frac{d}{dq_1}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^{q_1}(q_1 - t)^{\alpha_1 - 1}\left[(a - c_1 - bq_2)q_1 - bq_1^2\right]dt\right] \\ &= \frac{d}{dq_1}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^{q_1}(q_1 - t)^{\alpha_1 - 1}\left[-bq_1^2\right]dt\right] \\ &+ \frac{d}{dq_1}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^{q_1}(q_1 - t)^{\alpha_1 - 1}\left[(a - c_1 - bq_2)q_1\right]dt\right] \end{aligned}$$

podemos concluir que $D^{1-\alpha_j}\Pi_j$ é a derivada fracionária de uma função do tipo $q_j(t)^a$, para uma potência a. Portanto, segue do Lema 2.1.1 que

$$D^{1-\alpha_1}\Pi_1(q_1(t),q_2(t)) = (a-c_1-bq_2)\,\frac{q_1^{\alpha_1}\Gamma(1)}{\Gamma(1+\alpha_1)} - 2b\frac{q_1^{1+\alpha_1}\Gamma(2)}{\Gamma(\alpha_1+2)}\,.$$

De forma análoga, temos a quantidade $D^{1-\alpha_2}\Pi_2(q_1(t),q_2(t))$, dado por

$$D^{1-\alpha_2}\Pi_2(q_1(t),q_2(t)) = (a-c_1-bq_1)\,\frac{q_2^{\alpha_2}\Gamma(1)}{\Gamma(1+\alpha_2)} - 2b\frac{q_2^{1+\alpha_2}\Gamma(2)}{\Gamma(\alpha_2+2)}$$

Portanto, podemos reescrever o modelo 5.2.1 como

$$\begin{aligned} q_1(t+1) &= q_1(t) + \rho_1\left((a-c_1) - bq_2(t)\tfrac{q_1^{\alpha_1}(t)\Gamma(1)}{\Gamma(1+\alpha_1)} - 2b\tfrac{q_1^{1+\alpha_1}(t)\Gamma(2)}{\Gamma(\alpha_1+2)}\right) \\ q_2(t+1) &= q_2(t) + \rho_2\left((a-c_1) - bq_1(t)\tfrac{q_2^{\alpha_2}(t)\Gamma(1)}{\Gamma(1+\alpha_2)} - 2b\tfrac{q_2^{1+\alpha_2}(t)\Gamma(2)}{\Gamma(\alpha_2+2)}\right)\,. \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Antes de apresentarmos uma análise de existência e estabilidade para os pontos de equilíbrio do modelo (5.2.1), faremos alguns testes numéricos, que servirão para termos uma ideia do comportamento do modelo proposto.

Nas aproximações numéricas que seguem consideraremos a função demanda inversa cujo preço é dado por $P(q_1(t),q_2(t)) = a - b(q_1(t)+q_2(t))$, onde $a = 3$ e $b = 1$. Além disso, consideraremos que a função custo de cada firma é dada por $C(q_j(t)) = c_j q_j(t)$, com $c_j = 1$, para $j = 1, 2$.

A Tabela 5.1 traz os resultados simulados para distintas escolhas de $\rho_1 = \rho_2$ e $\alpha_1 = \alpha_2$. As simulações são feitas para as condições iniciais $q_1(1) = q_2(1) = 1$, para os parâmetros a, b, c_2 e c_2 acima. Note que pelas escolhas dos parâmetros temos $q_1(t) = q_2(t)$.

Tabela 5.1: Modelo de Cournot fracionário com $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$.

Tempo (t)	$q_1(\rho = 0.1)$	$q_1(\rho = 0.3)$	$q_1(\rho = 0.5)$	$q_1(\rho = 0.7)$	$q_1(\rho = 0.9)$
1	1	1	1	1	1
2	0.9624	0.8872	0.8119	0.7367	0.6615
3	0.9352	0.8648	0.8656	0.9272	1.0386
4	0.9153	0.8592	0.8553	0.8029	0.6005
5	0.9007	0.8577	0.8576	0.8925	1.0718
6	0.8898	0.8573	0,8571	0.8309	0.5452
7	0.8817	0.8572	0.8572	0.8750	1.0910
8	0.8756	0.8572	0.8571	0.8442	0.5122
9	0.8711	0.8571	0.8571	0.8661	1.0972
10	0.8676	0.8571	0,8571	0.8507	0.5014
11	0.8651	0.8571	0.8571	0.8616	1.0983
12	0.8631	0.8571	0.8571	0.8540	0.4994
13	0.8617	0.8571	0.8571	0.8616	1.0985

Observando os valores da tabela 5.1 podemos verificar, de maneira empírica, qual comportamento esperar do modelo para diferentes valores de ρ_i. Por exemplo, para $\rho = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ a dinâmica estabiliza em torno do valor 0.85. Quando $\rho = 0.9$, por outro lado, o modelo oscila

entre dois valores, a saber, 0.5 e 1, 1. Portanto, é possível que o mecanismo de ajuste descrito 5.2.1 seja estável apenas para valores de $\rho < 0.9$.

As figuras 5.1 e 5.2 apresentam a dinâmica de $q_1(t)$ para $\rho = 0.5$ e $\rho = 0.9$, respectivamente.

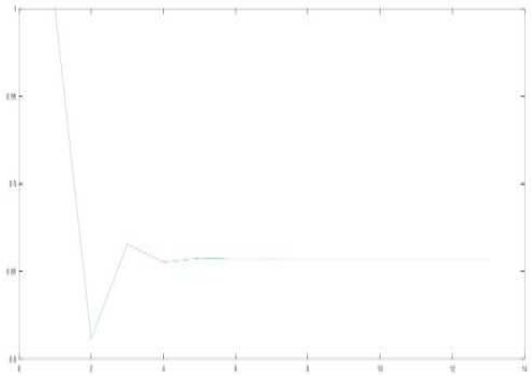


Figura 5.1: Dinâmica do processo se ajustes (5.2.1) para $\rho = 0.5$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$.

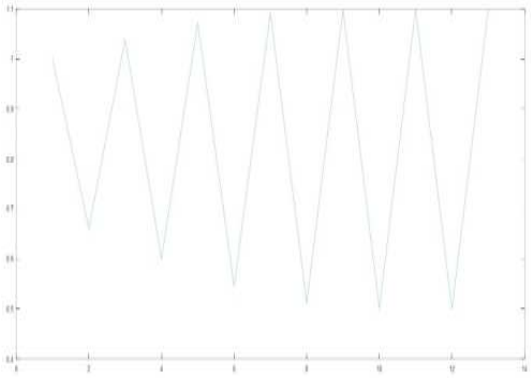


Figura 5.2: Dinâmica do processo se ajustes (5.2.1) para $\rho = 0.9$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$.

Na Tabela 5.2 apresentamos o resultado do lucro obtido pelas firmas caso estas produzam as quantidades apresentadas na Tabela 5.1.

Os resultados obtidos na Tabela 5.2, cujo gráficos para $\rho = 0.5$ e $\rho = 0.9$ são apresentados nas Figuras 5.3 e 5.4, indicam que o lucro das firmas com o processo de ajuste fracionário com $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ é menor do que aqueles obtidos com os processos de ajuste míope. Uma das possíveis justificativas (como veremos a seguir no Lema 5.2.2), é que o ponto estacionário obtido pelo processo com memória não coincide com o equilíbrio de Cournot do ajuste míope (o que era de se esperar). No entanto, as simulações apresentadas foram feitas com a escolha de apenas um valor da ordem das derivadas, a saber $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$. Logo ainda existem mais pontos para investigarmos.

A seguir apresentaremos os resultados das simulações do modelo (5.2.1), em que uma das firmas (digamos, a firma 1) possui memória, dada pela escolha de $\alpha_1 = 0.3$, enquanto a firma 2 é míope, o que é representado pela escolha de $\alpha_2 = 0$ no modelo. A Tabela 5.3 apresenta os valores das simulações para distintas escolas de ρ.

Podemos observar nas tabelas 5.3 e 5.4 que o modelo indica convergência para um ponto de equilíbrio para valores de $\rho < 0.7$. Além disso a produção da firma um, ou seja a firma que

Tabela 5.2: Lucro para o modelo de Cournot Fracionário com $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$.

Tempo (t)	$\pi_1(\rho = 0.1)$	$\pi_1(\rho = 0.3)$	$\pi_1(\rho = 0.5)$	$\pi_1(\rho = 0.7)$	$\pi_1(\rho = 0.9)$
1	0	0	0	0	0
2	0.0724	0.2002	0.3054	0.3879	0.4478
3	0.1212	0.2338	0.2327	0.1350	-0.0801
4	0.1550	0.2420	0.2476	0.3166	0.4798
5	0.1789	0.2441	0.2443	0.1919	-0.1539
6	0.1961	0.2447	0,2450	0.2810	0.4959
7	0.2086	0.2448	0.2449	0.2188	-0.1985
8	0.2178	0.2449	0.2449	0.2630	0.4997
9	0.2246	0.2449	0.2449	0.2320	-0.2132
10	0.2297	0.2449	0,2449	0.2540	0.5
11	0.2334	0.2449	0.2449	0.2385	-0.2159
12	0.2363	0.2449	0.2449	0.2494	0.5
13	0.2384	0.2449	0.2449	0.2417	-0.2163
Lucro Médio	0.1779	0.2215	0.2299	0.2315	0.1419

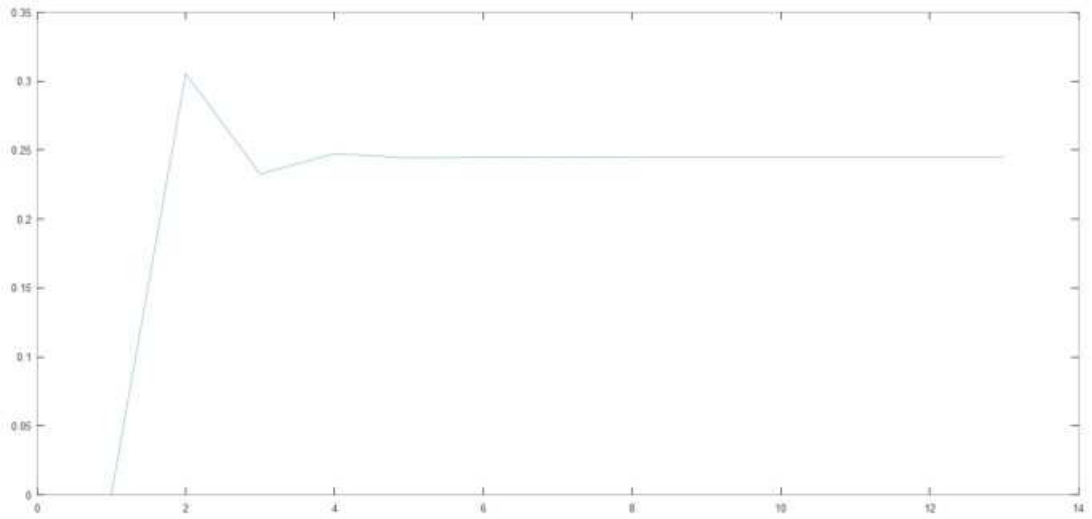


Figura 5.3: $\rho = 0.1$

utilizou uma derivada de ordem não inteira na dinâmica, tornou-se consideravelmente maior do que a produção de sua rival. Veja na figura 5.5 a representação gráfica das produções das firmas um e dois apresentadas nas tabelas 5.3 e 5.4 correspondentes a coluna $\rho = 0.1$. No entanto, ainda não sabemos se essa mudança na produção resultou em um lucro maior para alguma das firmas. Para obter tal informação, apresentamos nas Tabelas 5.5 5.6 os valores dos lucros associados as quantidades produzidas e apresentadas nas Tabelas 5.3 e 5.4.

Os resultados numéricos apresentados nas tabelas 5.5 e 5.6, respectivamente, apontam que o modelo não responde de maneira satisfatória para $\rho = 0.7$, produzindo lucros negativos (isso já havia sido verificado na tabela com as quantidades produzidas). Comparando os resultados para $\rho = 0.1$, $\rho = 0.3$ e $\rho = 0.5$, os resultados apontam que a firma 1 tem uma pequena vantagem sobre a firma 2, pois o lucro da firma 1 é maior. Na Figura 5.6 apresentamos os resultados dos lucros para o valor de $\rho = 0.3$, como obtidos nas Tabelas 5.5 e 5.6, respectivamente. Tal

Tabela 5.3: Modelo de Cournot multi-fracionário para $\alpha_1 = 0.3$ e $\alpha_2 = 0$. Resultados para a firma 1.

Tempo (t)	$q_1(\rho = 0.1)$	$q_1(\rho = 0.3)$	$q_1(\rho = 0.5)$	$q_1(\rho = 0.7)$
1	1	1	1	1
2	0.9400	0.8200	0.7000	0.5800
3	0.9021	0.8321	0.9118	1.1150
4	0.8790	0.8593	0.8832	0.6400
5	0.8659	0.8829	0.9353	1.1486
6	0.8594	0.9016	0,9368	0.6517
7	0.8574	0.9159	0.9512	1.1586
8	0.8585	0.9270	0.9539	0.6508
9	0.8615	0.9354	0.9583	1.1623
10	0.8657	0.9414	0,9598	0.6470
11	0.8706	0.9469	0.9612	1.1642
12	0.8759	0.9507	0.9618	0.6430
13	0.8814	0.9536	0.9623	1.1654

Tabela 5.4: Modelo de Cournot multi-fracionário para $\alpha_1 = 0.3$ e $\alpha_2 = 0$. Resultados para a firma 2.

Tempo (t)	$q_2(\rho = 0.1)$	$q_2(\rho = 0.3)$	$q_2(\rho = 0.5)$	$q_2(\rho = 0.7)$
1	1	1	1	1
2	0.9000	0.7000	0.5000	0.3000
3	0.8260	0.6340	0.6500	0.8740
4	0.7706	0.6040	0.5441	0.2699
5	0.7286	0.5838	0.5584	0.8440
6	0.6963	0.5686	0,5323	0.2584
7	0.6711	0.5570	0.5316	0.8404
8	0.6511	0.5480	0.5244	0.2528
9	0.6350	0.5411	0.5230	0.8433
10	0.6219	0.5358	0,5208	0.2491
11	0.6109	0.5318	0.5201	0.8474
12	0.6017	0.5286	0.5194	0.2461
13	0.5938	0.5263	0.5191	0.8515

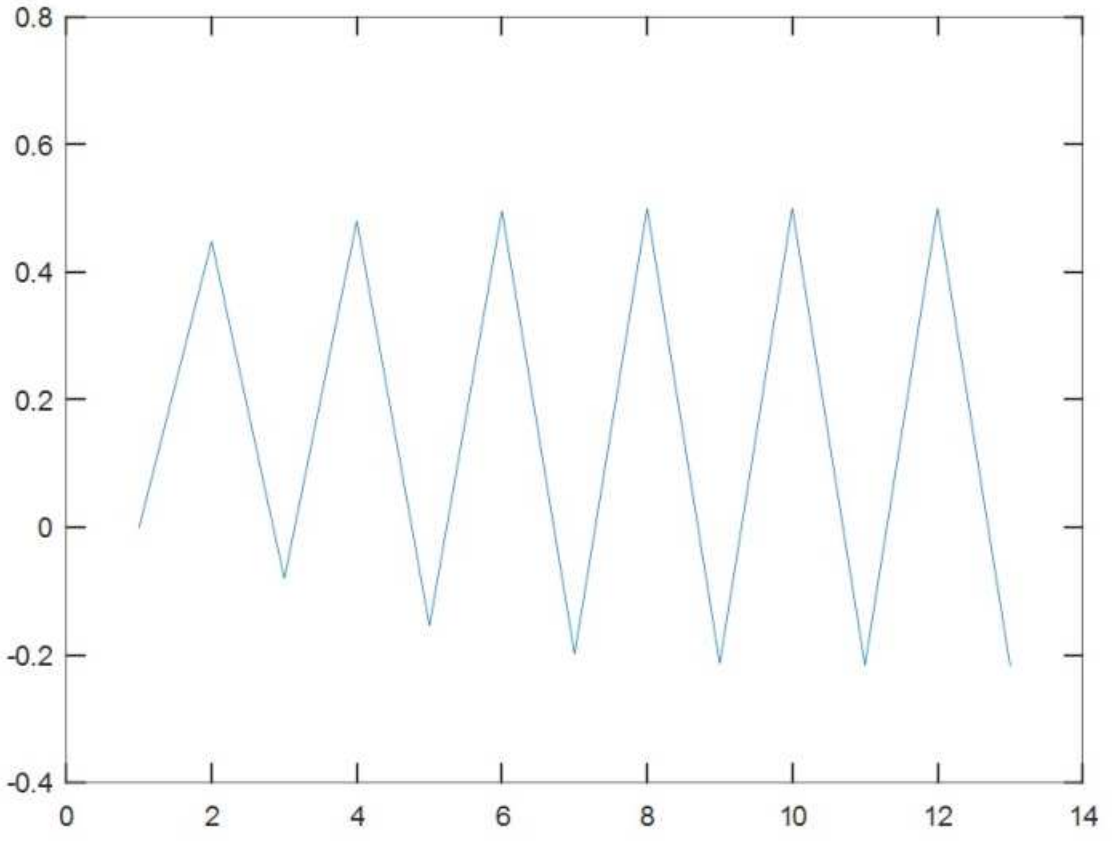


Figura 5.4: $\rho = 0.9$

Tabela 5.5: Lucro obtido pela firma 1, com as quantidades dadas pelo modelo multi-fracionário com $\alpha_1 = 0.3$ e $\alpha_2 = 0.5$.

Tempo (t)	$\pi_1(\rho = 0.1)$	$\pi_1(\rho = 0.3)$	$\pi_1(\rho = 0.5)$	$\pi_1(\rho = 0.7)$
1	0	0	0	0
2	0.1504	0.3936	0.5600	0.6496
3	0.2453	0.4443	0.3996	0.0123
4	0.3080	0.4612	0.5058	0.6977
5	0.3512	0.4708	0.4735	0.0085
6	0.3819	0.4776	0,4973	0.7103
7	0.4043	0.4828	0.4719	0.0011
8	0.4210	0.4867	0.4976	0.7136
9	0.4337	0.4897	0.4970	-0.0065
10	0.4436	0.4919	0,4985	0.7143
11	0.4514	0.4937	0.4986	-0.0135
12	0.4576	0.4950	0.4990	0.7143
13	0.4626	0.4960	0.4991	-0.0197
Lucro Médio	0.3470	0.4372	0.4552	0.3217

comportamento dá indícios de que as derivadas de ordem não inteira podem trazer inovações pertinentes para o estudo dos oligopólios. No entanto, até agora, os resultados obtidos são puramente numéricos.

O próximo Teorema exibe os possíveis pontos de equilíbrio para o modelo de Cournot com

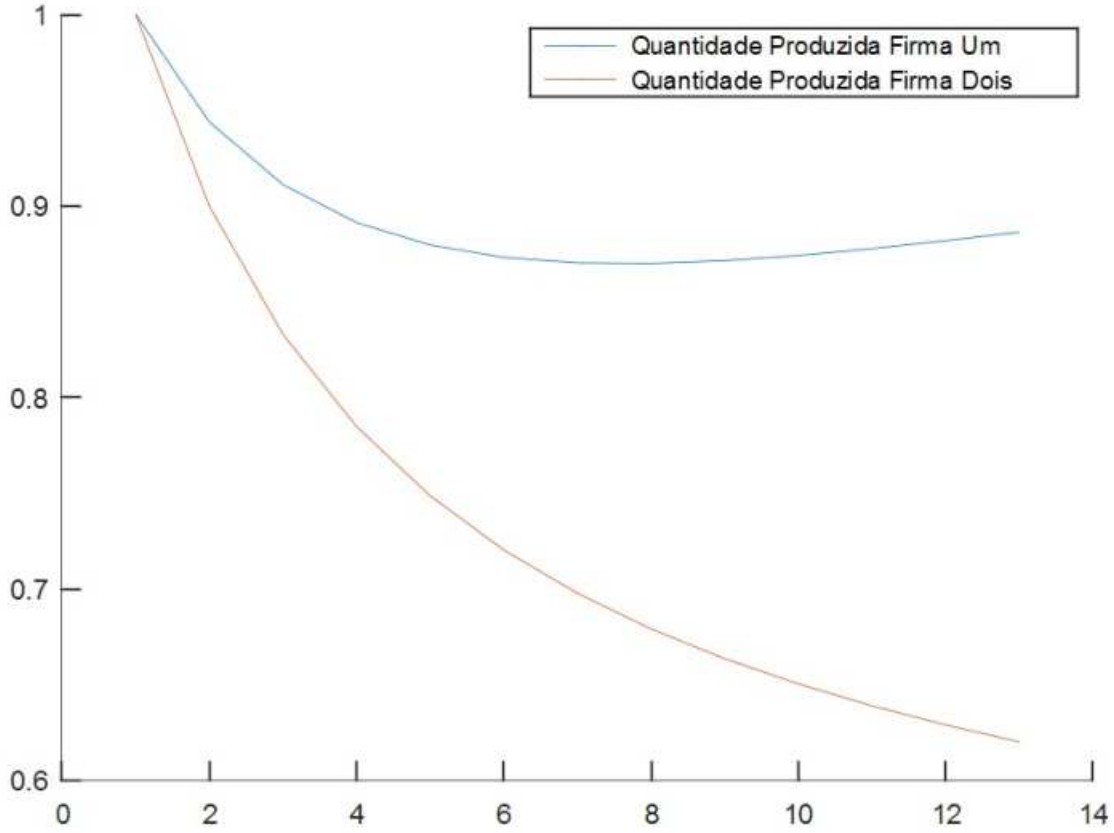


Figura 5.5: Quantidades produzida pelas firmas 1 e 2 para $\rho = 0.1$

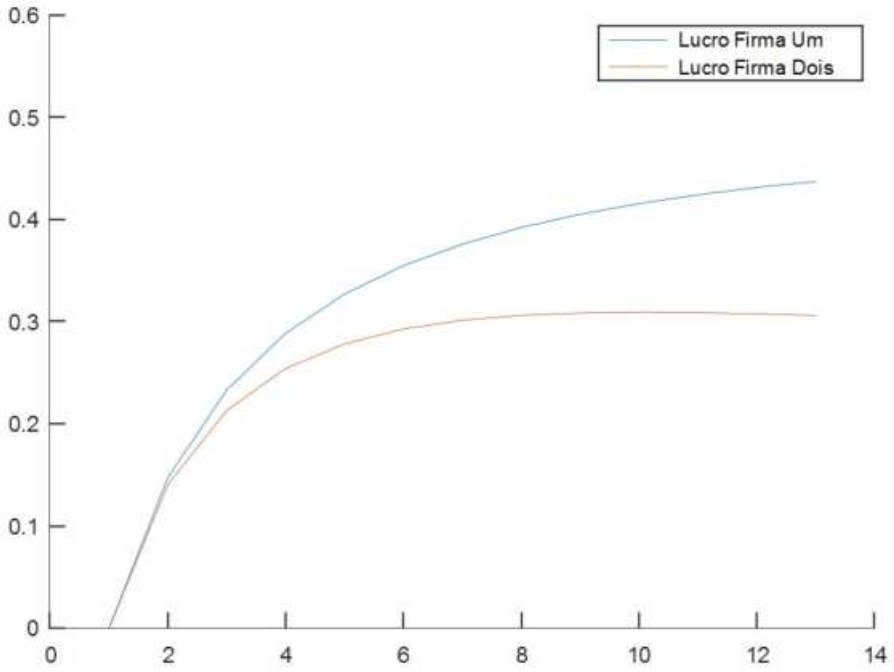


Figura 5.6: Lucro das firmas pelo modelo multi-fracionário (5.2.1), para $\rho = 0.1$.

Tabela 5.6: Lucro obtido pela firma 2, com as quantidades dadas pelo modelo multi-fracionário com $\alpha_1 = 0.3$ e $\alpha_2 = 0.5$.

Tempo (t)	$\pi_2(\rho = 0.1)$	$\pi_2(\rho = 0.3)$	$\pi_2(\rho = 0.5)$	$\pi_2(\rho = 0.7)$
1	0	0	0	0
2	0.1440	0.3360	0.4000	0.3360
3	0.2246	0.3385	0.2848	0.0096
4	0.2700	0.3242	0.3116	0.2942
5	0.2955	0.3113	0.2827	0.0062
6	0.3094	0.3013	0,2826	0.2816
7	0.3164	0.3013	0.2749	0.0008
8	0.3193	0.2936	0.2736	0.2772
9	0.3197	0.2877	0.2713	-0.0047
10	0.3187	0.2833	0,2705	0.2749
11	0.3167	0.2798	0.2698	-0.0098
12	0.3143	0.2773	0.2695	0.2734
13	0.3117	0.2753	0.2692	-0.0144
Lucro Médio	0.2662	0.2755	0.2662	0.1327

derivadas de ordem fracionária (5.2.1).

Teorema 5.2.1. *Considere o modelo* (5.2.1)*, com a função demanda inversa dada por* $P = a - b(q_1, q_2)$*, onde* a *e* b *são constantes positivas,* q_1 *e* q_2 *são as quantidades produzidas pelas firmas um e dois, respectivamente. Considere também a função custo da firma* i *dada por* $C(q_i) = c_i q_i$*, onde* c_i *é uma constante positiva. O único ponto de equilíbrio do modelo 5.2.1 é dado por*

$$\begin{aligned} q_1^* &= \frac{2(1+\alpha_1)\,(a-c_1) - (1+\alpha_2)(1+\alpha_1)(a-c_2)}{[4-(1+\alpha_2)(1+\alpha_1)]\,b} \\ q_2^* &= \frac{2(1+\alpha_2)\,(a-c_2) - (1+\alpha_2)(1+\alpha_1)(a-c_1)}{[4-(1+\alpha_2)(1+\alpha_1)]\,b} \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

Demonstração. Segue da definição que, quaisquer que sejam os pontos de equilíbrio (q_1^*, q_2^*), estes devem satisfazer

$$\begin{aligned} (a - c_1 - bq_2^*)\,\frac{(q_1^*)^{\alpha_1}(\Gamma(1)}{\Gamma(1+\alpha_1)} - 2b\frac{(q_1^*)^{1+\alpha_1}\Gamma(2)}{\Gamma(\alpha_1+2)} &= 0 \\ (a - c_2 - bq_1^*)\,\frac{(q_2^*)^{\alpha_2}\Gamma(1)}{\Gamma(1+\alpha_2)} - 2b\frac{(q_2^*)^{1+\alpha_2}\Gamma(2)}{\Gamma(\alpha_2+2)} &= 0 \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

Usando o fato que $\Gamma(2+\alpha_j) = (1+\alpha_j)\Gamma(1+\alpha_j) = (1+\alpha_j)(\alpha_j)\Gamma(\alpha_j)$ e que $q_j^* \neq 0$, para $j = 1, 2$, em (5.2.3) obtemos que a função de reação da firma i deve satisfazer

$$\begin{cases} q_1^* = (1+\alpha_1)\frac{(a-c_1)}{2b} - q_2^*\frac{(1+\alpha_1)}{2} \\ q_2^* = (1+\alpha_2)\frac{(a-c_2)}{2b} - q_1^*\frac{(1+\alpha_2)}{2} \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação em (5.2.4) na primeira, podemos concluir que

$$q_1^* = (1+\alpha_1)\frac{(a-c_1)}{2b} - \left[(1+\alpha_2)\frac{(a-c_2)}{2b} - q_1^*\frac{(1+\alpha_2)}{2}\right]\frac{(1+\alpha_1)}{2}\,.$$

Isolando q_1^* acima, concluímos que a primeira identidade em (5.2.2) é satisfeita. Substituindo q_1^* na segunda equação em (5.2.4), encontramos exatamente o resultado anunciado no lema.

□

O que faremos a seguir é encontrar quais as condições para ρ_1, ρ_2, α_1 e α_2 de modo que o modelo de Cournot (5.2.1) possua pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis. Antes, formularemos alguns resultados auxiliares.

Lema 5.2.1. *A matriz Jacobiana do modelo* (5.2.1) *é dada por*

$$J(q_1(t), q_2(t)) = \begin{bmatrix} m_1(q_1(t), q_2(t)) & m_2(q_1(t), q_2(t)) \\ m_3(q_1(t), q_2(t)) & m_4(q_1(t), q_2(t)) \end{bmatrix} \tag{5.2.4}$$

onde

$$\begin{aligned}
m_1(q_1(t), q_2(t)) &= 1 + \rho_1\left(-bq_2(t)\frac{q_1^{\alpha_1-1}(t))}{\Gamma(\alpha_1)} - 2b\frac{q_1^{\alpha_1}(t))}{\Gamma(\alpha_1+1)}\right)\,,\\
m_2(q_1(t), q_2(t)) &= -\rho_1 b\frac{q_1^{\alpha_1}(t))}{\Gamma(1+\alpha_1)}\,,\\
m_3(q_1(t), q_2(t)) &= -\rho_2 b\frac{q_2^{\alpha_2}(t))}{\Gamma(1+\alpha_2)} \;\; e\\
m_4(q_1(t), q_2(t)) &= 1 + \rho_2\left(-bq_1(t)\frac{q_2^{\alpha_2-1}(t))}{\Gamma(\alpha_2)} - 2b\frac{q_2^{\alpha_2}(t))}{\Gamma(\alpha_2+1)}\right)\,.
\end{aligned}$$

Demonstração. A demonstração segue diretamente do cálculo das derivadas parciais de cada linha do sistema (5.2.1), com relação a q_1 e q_2, respectivamente. □

Lema 5.2.2. *Considere os pontos de equilíbrio* (q_1^*, q_2^*) *dados por* (5.2.2) *no Teorema 5.2.1. Os autovalores da matriz Jacobiana em* (q_1^*, q_2^*) *são dados por*

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{m_1 + m_4 + \sqrt{(m_1+m_4)^2 - 4(m_1m_4 - m_2m_3)}}{2}\\
\lambda_2 &= \frac{m_1 + m_4 - \sqrt{(m_1+m_4)^2 - 4(m_1m_4 - m_2m_3)}}{2}\,,
\end{aligned}$$

onde $m_1 = m_1(q_1^*, q_2^*)$, $m_2 = m_2(q_1^*, q_2^*)$, $m_3 = m_3(q_1^*, q_2^*)$, $m_4 = m_4(q_1^*, q_2^*)$.

Demonstração. Segue da matriz Jacobiana (5.2.4) aplicada no ponto de equilíbrio (q_1^*, q_2^*), que o polinômio característico é dado por

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (m_1+m_4)\lambda + m_1m_4 - m_2m_3\,.$$

Portanto, as raízes de $p(\lambda)$ satisfazem a afirmativa do lema. □

Dada a complexidade envolvida em determinar o sinal dos autovalores dados pelo Lema 5.2.2, faremos isso numericamente, consideraremos que os valores de $a = 3$, $b = 1$ e $c_i = 1$, como vinhamos trabalhando durante essa dissertação. Com tal escolha, segue-se que os pontos de equilíbrio (q_1^*, q_2^*) obtidos no Teorema 5.2.1 satisfazem

$$\begin{aligned} q_1^* &= \frac{4(1+\alpha_1) - 2(1+\alpha_2)(1+\alpha_1)}{[4-(1+\alpha_2)(1+\alpha_1)]} \\ q_2^* &= \frac{4(1+\alpha_2) - 2(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)}{[4-(1+\alpha_2)(1+\alpha_1)]}\,. \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

Verificaremos quais as condições sobre α_1, α_2, ρ_1 e ρ_2 para a estabilidade dos pontos de equilíbrio (5.2.5), usando os resultados do Teorema 7.1.6.

- Caso 1: Assumiremos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \theta \in [0, 1]$ e $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, os quais são apresentados na Tabela 5.7.

Tabela 5.7: Valores de λ_1 e λ_2 para $\alpha_1 = \alpha_2 = \theta$ e para $\rho_1 = \rho_2 = \rho$.

	$\rho = 0.1$		$\rho = 0.3$		$\rho = 0.5$		$\rho = 0.7$		$\rho = 0.9$	
θ	$\lvert\lambda_1\rvert$	$\lvert\lambda_2\rvert$	$\lvert\lambda_1\rvert$	$\lvert\lambda_2\rvert$	$\lvert\lambda_1\rvert$	$\lvert\lambda_2\rvert$	$\lvert\lambda_1\rvert$	$\lvert\lambda_2\rvert$	$\lvert\lambda_1\rvert$	$\lvert\lambda_2\rvert$
0.1	0.89	0.69	0.66	0.055	0.44	0.57	0.22	1.20	5.54e-03	1.83
0.2	0.88	0.67	0.63	0.01	0.38	0.65	0.14	1.30	1.10e-01	1.96
0.3	0.87	0.66	0.6	0.03	0.33	0.71	0.06	1.4	2.14e-01	2.08
0.4	0.85	0.65	0.56	0.06	0.27	0.77	0.02	1.48	3.14e-01	2.19
0.5	0.84	0.63	0.53	0.1	0.22	0.83	0.1	1.56	4.10e-01	2.29
0.6	0.83	0.62	0.5	0.13	0.17	0.88	0.18	1.63	5.02e-01	2.38
0.7	0.82	0.62	0.47	0.15	0.12	0.92	0.23	1.69	5.87e-01	2.45
0.8	0.81	0.61	0.44	0.17	0.07	0.95	0.3	1.74	6.66e-01	2.52
0.9	0.81	0.6	0.42	0.19	0.04	0.98	0.35	1.77	7.37e-01	2.57

- Caso 2: Assumiremos que $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ mas com $\alpha_1 \neq \alpha_2 \in [0, 1]$. Os valores de $|\lambda_i|$ para $i = 1, 2$ são apresentados nas Tabela 5.8 5.9 e 5.10.

  Com base nos valores apresentados nas tabelas 5.8,5.9, 5.10 , e considerando o Teorema 7.1.6, podemos tecer algumas conclusões acerca da estabilidade do modelo:

  – A estabilidade dos prontos de equilíbrio estudado dependem tanto dos valores de ρ_j quanto os de α_j, para $j = 1, 2$. Em particular, quando observamos os valores de λ_1 e λ_2 apresentados nas tabelas podemos notar que para $\rho \geq 0.7$ parece existir uma instabilidade independentemente da escolha de α_i e α_j.

  – A ordem da derivada, ou seja α_1 e α_2 possuem influencia na convergência do modelo. No entanto essa influencia não é tão grande quando aquela dos valores de ρ_1. Isso fica evidente quando percebemos, com base nos valores apresentados, que a instabilidade,

Tabela 5.8: Valores de λ_1 e λ_2 para $\alpha_2 = 0.1$ e para $\rho_1 = \rho_2 = \rho$.

	$\rho = 0.1$		$\rho = 0.3$		$\rho = 0.5$		$\rho = 0.7$		$\rho = 0.9$	
α_1	$\lvert\lambda_1\rvert$	$\lvert\lambda_2\rvert$	$\lvert\lambda_1\rvert$	$\lvert\lambda_2\rvert$	$\lvert\lambda_1\rvert$	$\lvert\lambda_2\rvert$	$\lvert\lambda_1\rvert$	$\lvert\lambda_2\rvert$	$\lvert\lambda_1\rvert$	$\lvert\lambda_2\rvert$
0.1	0.79	1.14	0.66	0.06	0.44	0.6	0.22	1.2	0.01	1.83
0.2	0.78	1.06	0.66	0.05	0.44	0.58	0.18	1.26	0.05	1.9
0.3	0.78	0.96	0.67	0.05	0.45	0.58	0.15	1.32	0.1	2
0.4	0.77	0.83	0.69	0.06	0.48	0.56	0.11	1.39	0.14	2.07
0.5	0.77	0.68	0.72	0.08	0.53	0.53	0.08	1.48	0.18	2.18
0.6	0.78	0.52	0.75	0.1	0.58	0.5	0.04	1.58	0.24	2.32
0.7	0.78	0.37	0.78	0.13	0.63	0.46	0.03	1.72	0.32	2.5
0.8	0.79	0.29	0.79	0.15	0.66	0.41	0.14	1.9	0.46	2.73
0.9	0.79	0.62	0.73	0.15	0.54	0.42	0.44	2.2	0.85	3.11

Tabela 5.9: Valores de λ_1 e λ_2 para $\alpha_2 = 0.3$ e para $\rho_1 = \rho_2 = \rho$.

	$\rho = 0.1$		$\rho = 0.3$		$\rho = 0.5$		$\rho = 0.7$		$\rho = 0.9$	
α_1	$\lvert\lambda_1\rvert$	$\lvert\lambda_2\rvert$	$\lvert\lambda_1\rvert$	$\lvert\lambda_2\rvert$	$\lvert\lambda_1\rvert$	$\lvert\lambda_2\rvert$	$\lvert\lambda_1\rvert$	$\lvert\lambda_2\rvert$	$\lvert\lambda_1\rvert$	$\lvert\lambda_2\rvert$
0.1	0.88	0.67	0.63	0	0.39	0.66	0.15	1.32	0.1	1.98
0.2	0.87	0.66	0.61	0	0.36	0.68	0.1	1.36	0.16	2.08
0.3	0.87	0.66	0.6	0.02	0.33	0.71	0.06	1.4	0.21	2.08
0.4	0.86	0.65	0.58	0.04	0.3	0.75	0.02	1.45	0.26	2.15
0.5	0.85	0.64	0.56	0.07	0.27	0.79	0.03	1.51	0.32	2.23
0.6	0.85	0.63	0.54	0.11	0.23	0.85	0.08	1.6	0.39	2.34
0.7	0.83	0.61	0.50	0.16	0.17	0.93	0.16	1.7	0.49	2.48
0.8	0.81	0.59	0.44	0.23	0.07	1.04	0.3	1.87	0.68	2.7
0.9	0.76	0.55	0.28	0.35	0.2	1.26	0.67	2.16	1.14	3.06

Tabela 5.10: Valores de λ_1 e λ_2 para $\alpha_2 = 0.5$ e para $\rho_1 = \rho_2 = \rho$.

	$\rho = 0.1$		$\rho = 0.3$		$\rho = 0.5$		$\rho = 0.7$		$\rho = 0.9$	
α_1	$\lvert\lambda_1\rvert$	$\lvert\lambda_2\rvert$	$\lvert\lambda_1\rvert$	$\lvert\lambda_2\rvert$	$\lvert\lambda_1\rvert$	$\lvert\lambda_2\rvert$	$\lvert\lambda_1\rvert$	$\lvert\lambda_2\rvert$	$\lvert\lambda_1\rvert$	$\lvert\lambda_2\rvert$
0.1	0.87	0.65	0.62	0.04	0.36	0.74	0.11	1.43	0.15	2.13
0.2	0.86	0.65	0.59	0.04	0.32	0.75	0.05	1.45	0.22	2.15
0.3	0.86	0.65	0.58	0.05	0.3	0.75	0.02	1.46	0.26	2.16
0.4	0.86	0.65	0.57	0.06	0.28	0.76	0	1.47	0.29	2.17
0.5	0.85	0.64	0.56	0.07	0.27	0.78	0.02	1.49	0.31	2.2
0.6	0.85	0.64	0.56	0.08	0.26	0.8	0.03	1.52	0.33	2.25
0.7	0.85	0.63	0.55	0.11	0.25	0.84	0.05	1.58	0.35	2.32
0.8	0.85	0.62	0.54	0.15	0.23	0.91	0.09	1.68	0.4	2.44
0.9	0.83	0.6	0.48	0.21	0.15	1.01	0.2	1.82	0.54	2.62

ou estabilidade, do modelo parece ocorrer sempre para os mesmos valores de ρ, independente da escolha da ordem das derivadas.

Uma análise detalhada a respeito da estabilidade dos pontos de equilíbrio em termos dos parâmetros α_i e ρ_i para o modelo (5.2.1) pode ser feita utilizando-se uma estratégia de bifurcação e será feito em uma contribuição futura.

Tabela 5.11: Valores de λ_1 e λ_2 para $\alpha_2 = 0.7$ e para $\rho_1 = \rho_2 = \rho$.

	$\rho = 0.1$		$\rho = 0.3$		$\rho = 0.5$		$\rho = 0.7$		$\rho = 0.9$	
α_1	$\lvert\lambda_1\rvert$	$\lvert\lambda_2\rvert$	$\lvert\lambda_1\rvert$	$\lvert\lambda_2\rvert$	$\lvert\lambda_1\rvert$	$\lvert\lambda_2\rvert$	$\lvert\lambda_1\rvert$	$\lvert\lambda_2\rvert$	$\lvert\lambda_1\rvert$	$\lvert\lambda_2\rvert$
0.1	0.85	0.61	0.56	0.17	0.27	0.94	0.03	1.72	0.32	2.5
0.2	0.84	0.61	0.52	0.17	0.2	0.94	0.12	1.72	0.43	2.5
0.3	0.83	0.61	0.50	0.16	0.17	0.93	0.16	1.71	0.49	2.48
0.4	0.83	0.62	0.49	0.15	0.15	0.92	0.18	1.69	0.52	2.46
0.5	0.83	0.62	0.49	0.15	0.14	0.91	0.2	1.68	0.54	2.44
0.6	0.83	0.62	0.48	0.15	0.13	0.91	0.21	1.67	0.56	2.43
0.7	0.82	0.62	0.47	0.15	0.12	0.91	0.23	1.69	0.59	2.45
0.8	0.81	0.61	0.45	0.17	0.84	0.95	0.28	1.73	0.65	2.51
0.9	0.8	0.6	0.4	0.21	0.75	1.02	0.41	1.83	0.81	2.64

Tabela 5.12: Valores de λ_1 e λ_2 para $\alpha_2 = 0.9$ e para $\rho_1 = \rho_2 = \rho$.

	$\rho = 0.1$		$\rho = 0.3$		$\rho = 0.5$		$\rho = 0.7$		$\rho = 0.9$	
α_1	$\lvert\lambda_1\rvert$	$\lvert\lambda_2\rvert$	$\lvert\lambda_1\rvert$	$\lvert\lambda_2\rvert$	$\lvert\lambda_1\rvert$	$\lvert\lambda_2\rvert$	$\lvert\lambda_1\rvert$	$\lvert\lambda_2\rvert$	$\lvert\lambda_1\rvert$	$\lvert\lambda_2\rvert$
0.1	0.79	0.54	0.38	0.37	0.03	1.28	0.44	2.2	0.85	3.11
0.2	0.77	0.54	0.30	0.38	0.16	1.3	0.63	2.22	1.09	3.14
0.3	0.76	0.55	0.29	0.35	0.19	1.26	0.67	2.16	1.14	3.06
0.4	0.77	0.56	0.30	0.31	0.17	1.18	0.63	2.06	1.1	2.94
0.5	0.78	0.58	0.33	0.27	0.12	1.12	0.56	1.97	1.01	2.82
0.6	0.79	0.59	0.36	0.24	0.06	1.07	0.48	1.89	0.91	2.72
0.7	0.8	0.6	0.4	0.21	0	1.02	0.41	1.83	0.81	2.64
0.8	0.81	0.6	0.42	0.19	0.03	0.99	0.36	1.79	0.75	2.58
0.9	0.81	0.6	0.42	0.19	0.04	0.98	0.36	1.77	0.74	2.57

5.3 ANÁLISE DAS INFLUÊNCIAS DE MEMÓRIA NO LUCRO DAS FIRMAS

Nesta seção, analisaremos os efeitos que a memória (escolhas da ordem da derivada α_i, para $i = 1, 2$) no modelo (5.2.1) acarretam no lucro das firmas. Para tal, sejam (q_1^*, q_2^*) e (q_{1f}^*, q_{2f}^*) a notação para os pontos de equilíbrio do modelo de Cournot (4.0.1) dado no Teorema 3.2.2 e do modelo de Cournot fracionário (5.2.1), dados no Teorema 5.2.1, respectivamente, onde a função demanda inversa é dada por $P(q_1(t), q_2(t)) = a - b(q_1(t) + q_2(t))$, para a, b constantes positivas tais que $a > b$ e $q_j(t)$, para $j = 1, 2$ as quantidades produzidas pelas firmas um e dois, respectivamente. Além disso, as funções custos das firmas são dadas por $C(q_j(t)) = c_j q_j(t)$, com c_j sendo uma constante positiva.

Segue que o lucro da firma 1 (por simetria a função lucro da firma 2), pelo modelo de Cournot (4.0.1) é dado por

$$\pi_1 := \pi_1(q_1^*, q_2^*) = \left(a - c_1 - b\left(\frac{a + c_2 - 2c_1}{3b} + \frac{a + c_1 - 2c_2}{3b}\right)\right)\left(\frac{a + c_2 - 2c_1}{3b}\right)$$
$$= \frac{(a + c_2 - 2c_1)^2}{9b}. \tag{5.3.1}$$

Enquanto, o lucro da firma 1, dado pelo modelo (5.2.1), satisfaz

$$\pi_1^{(\alpha_1,\alpha_2)} := \tag{5.3.2}$$
$$\pi_1(q_{1f}^*, q_{2f}^*) = \left(a - c_1 - b\left(\frac{2(1+\alpha_1)(a-c_1) - (1+\alpha_2)(1+\alpha_1)(a-c_2)}{[4-(1+\alpha_2)(1+\alpha_1)]\,b} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{2(1+\alpha_2)(a-c_2) - (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(a-c_1)}{[4-(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)]\,b}\right)\right)$$
$$\times \left(\frac{2(1+\alpha_1)(a-c_1) - (1+\alpha_2)(1+\alpha_1)(a-c_2)}{[4-(1+\alpha_2)(1+\alpha_1)]\,b}\right)$$
$$= \left(a - c_1 - \left(\frac{(2-(1+\alpha_2))(1+\alpha_1)(a-c_1) + (2-(1+\alpha_1))(1+\alpha_2)(a-c_2)}{[4-(1+\alpha_2)(1+\alpha_1)]}\right)\right)$$
$$\times \left(\frac{2(1+\alpha_1)(a-c_1) - (1+\alpha_2)(1+\alpha_1)(a-c_2)}{[4-(1+\alpha_2)(1+\alpha_1)]\,b}\right). \tag{5.3.3}$$

O primeiro resultado nesse sentido é o seguinte.

Teorema 5.3.1. *Considere que os modelos de Cournot descritos em* (4.0.1) *e em* (5.2.1)*. Além disso, tome* $\alpha_2 = 0$ *e* $c_1 = c_2 = c$*. Então o lucro da firma 1, pela estratégia fracionária* (5.2.1) *é maior que o lucro da firma 1 com a estratégia míope* (4.0.1)*, caso com* $0 < \alpha_1 < 0.6$ *, são iguais se* $\alpha_1 = 0.6$*. Por fim, o lucro da firma 1 com a estratégia míope* (4.0.1) *é maior que o lucro da firma 1 pela estratégia fracionária* (5.2.1) *se* $\alpha_1 > 0.6$*.*

Demonstração. A demonstração consiste em comparar π_1 e $\pi_1^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ descritos por (5.3.1) e (5.3.3), para $c_1 = c_2 = c$ e $\alpha_2 = 0$, respectivamente. Como

$$\pi_1 - \pi_1^{(\alpha_1,0)} = \frac{(a-c)^2}{9b} - \frac{(2-(1+\alpha_1))(2(1+\alpha_1)-(1+\alpha_1))(a-c)^2}{(3-\alpha_1)^2 b}$$
$$= \frac{\left((3-\alpha_1)^2 - 9(2-(1+\alpha_1))(2(1+\alpha_1)-(1+\alpha_1))\right)(a-c)^2}{(3-\alpha_1)^2 9b}. \tag{5.3.4}$$

Portanto, como $b > 0$, o sinal de (5.3.4) é dado pelo sinal de

$$\begin{aligned}
&\left((3-\alpha_1)^2\right) - 9(2-(1+\alpha_1))(2(1+\alpha_1)-(1+\alpha_1)) \\
&= 9 - 6\alpha_1 + \alpha_1^2 - 9(1-\alpha_1)(1+\alpha_1) \\
&= 9 - 6\alpha_1 + \alpha_1^2 - 9 + 9\alpha_1^2 \\
&= -6\alpha_1 + 10\alpha_1^2 \\
&= \alpha_1(-6 + 10\alpha_1),
\end{aligned}$$

como enunciado no teorema.

□

Corolário 5.3.1. *Considere as hipótenses do Teorema 5.3.1 verdadeiras. Considere o modelo de Cournot fracionário* (5.2.1) *com* $\alpha_2 = 0$. *Então a diferença dos lucros* $\pi_1 - \pi_1^{(\alpha_1,0)}$ *será máxima quando* $\alpha_1 = \frac{1}{3}$.

Demonstração. Sabemos que o sinal da diferença $\pi_1 - \pi_1^{(\alpha_1,0)}$ será dado pela seguinte expressão

$$\frac{-6\alpha_1 + 10\alpha_1^2}{(3-\alpha_1)^2}$$

Portanto precisamos encontrar o valor de α_1 contido no intervalo $(0,1)$ que torna o valor da expressão descrita acima o menor possível. Para tanto considere a seguinte função:

$$f(\alpha_1) = \frac{-6\alpha_1 + 10\alpha_1^2}{(3-\alpha_1)^2}$$

Encontrando a derivada para dessa forma descobrir os pontos criticos de $f(\alpha_1)$:

$$\begin{aligned} f^{'}(\alpha_1) =& \frac{(-6+20\alpha_1)(3-\alpha_1)^2 + 2(-6\alpha_1+10\alpha_1^2)(3-\alpha_1)}{(3-\alpha_1)^4} \\ =& \frac{(-6+20\alpha_1)(3-\alpha_1) + 2(-6\alpha_1+10\alpha_1^2)}{(3-\alpha_1)^3} \\ =& \frac{-18+60\alpha_1+6\alpha_1-20\alpha_1^2-1\alpha_1+20\alpha_1^2}{(3-\alpha_1)^3} \\ =& \frac{-18+54\alpha_1}{(3-\alpha_1)^3} \end{aligned}$$

Para que $f^{'}$ seja igual a zero é necessário que $\alpha_1 = \frac{18}{54} = \frac{1}{3}$.

O próximo passo é usar o teste da segunda derivada para verificar se $\alpha_1 = \frac{1}{3}$ é um ponto de máximo ou um ponto de mínimo.

$$\begin{aligned} f^{''}(\alpha_1) =& \frac{54(3-\alpha_1)^3 - 3(-18+54\alpha_1)(3-\alpha_1)^2}{(3-\alpha_1)^6} \\ =& \frac{50(3-\alpha_1) - 3(-18+50\alpha_1)}{(3-\alpha_1)^4} \\ =& \frac{108-200\alpha_1}{(3-\alpha_1)^4} \\ \Longrightarrow& \\ f^{''}\left(\frac{1}{3}\right) =& \frac{108-200\frac{1}{3}}{(3-\frac{1}{3})} \\ =& 50 > 0 \end{aligned}$$

Logo $\alpha_1 = \frac{1}{3}$ é um ponto de mínimo. E portanto é para esse valor de α_1 que a diferença $\pi_1 - \pi_1^{(\alpha_1,0)}$ tem seu menor valor e consequentemente $\pi_1 < \pi_1^{(\alpha_1,0)}$.

□

.

No que segue, faremos uma análise comparativa equivalente ao feito no Teorema 5.3.1 para a firma 2.

Teorema 5.3.2. *Considere que as mesmas hipóteses do Teorema 5.3.1 sejam satisfeitas, isto é, considere a mesma função demanda inversa e as mesas funções custo desse teorema. Então o lucro da firma 2, pela estratégia fracionária* (5.2.1) *é sempre maior que o lucro da firma 2 com a estratégia míope* (4.0.1).

Demonstração. Pela simetria imposta ao considerarmos $c_1 = c_2 = c$, segue de (5.3.4) que

$$\pi_2 - \pi_2^{(\alpha_1,0)} = \frac{\left[(3-\alpha_1)^2 - 9\left(1-\alpha_1\right)^2\right](a-c)^2}{\left[(3-\alpha_1)\right]^2 b} =$$

Portanto, como $\alpha_1 \in [0,1]$ a assertiva do teorema segue.

Portanto o sinal de $\pi_2 - \pi_2^{\alpha_1,0}$ será o mesmo sinal da seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
&=(3-\alpha_1)^2 - 9\left(1-\alpha_1\right)^2 \\
&=9 - 6\alpha_1 + \alpha_1^2 - 9 + 18\alpha_1 - 9\alpha_1^2 \\
&=12\alpha_1 - 8\alpha_1^2 \\
&=\alpha_1\left(12 - 8\alpha_1\right) > 0
\end{aligned}$$

Donde podemos dizer que o lucro da firma dois quando em $t \to \infty$ com $\alpha_1 \in (0,1)$ e $\alpha_2 = 0$ será menor que aquele obtido com $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. □

O próximo resultado mostra que, se ambas as firmas escolhem a mesma ordem da derivada, isto é, $\alpha_1 = \alpha_2 = \theta \in]0,1[$, então o lucro da firma 1 pelo modelo de Cournot míope (4.0.1) é sempre maior.

Teorema 5.3.3. *Considere as mesmas hipóteses do Teorema 5.3.1 e tome* $\alpha_1 = \alpha_2 = \theta \in]0,1[$. *Nesse caso, lucro da firma 1 com a estratégia míope* (4.0.1) *é maior que o lucro da firma 1 pela estratégia fracionária* (5.2.1).

Demonstração. Neste caso, a demonstração consiste em comparar π_1 e $\pi_1^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ descritos por (5.3.1) e (5.3.3), para $c_1 = c_2 = c$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = \theta \in]0,1[$, respectivamente. Ou seja,

$$\begin{aligned}\pi_1 - \pi_1^{(\theta,\theta)} =& \frac{(a-c)^2}{9b} - \left(\frac{(1-\theta^2)\,(a-c)^2}{(2+(1+\theta))^2\,b}\right) \\ =& \frac{(2+(1+\theta)^2-9(1-\theta^2))\,(a-c)^2}{(1+\theta)^2 9b} = \frac{\theta(6+10\theta\theta)(a-c)^2}{(1+\theta)^2 9b} > 0\,.\end{aligned}$$

Isso conclui a demonstração. □

Na sequência analisaremos o que acontece quando quebramos a simetria na ordem das derivadas, isto é, quando $\alpha_1 > \alpha_2$.

Teorema 5.3.4. *Considere as mesmas hipóteses do Teorema 5.3.1 em que $\alpha_1 > \alpha_2$. Então, o lucro da firma 1 com a estratégia míope* (4.0.1) *é maior que o lucro da firma 1 pela estratégia fracionária* (5.2.1).

Demonstração. Se $\alpha_1 > \alpha_2$, então sabemos que existe $\epsilon > 0$ (a saber $\epsilon = \alpha_1 - \alpha_2$), tal que $\alpha_1 = \alpha_2 + \epsilon$.

Como

$$\begin{aligned}\pi_1^{(\alpha_2+\epsilon,\alpha_2)} =& \left(a - c - \left(\frac{((1-\alpha_2)\,(1+\alpha_2+\epsilon)+(1-\alpha_2-\epsilon)\,(1+\alpha_2))\,(a-c)}{[4-(1+\alpha_2+\epsilon)(1+\alpha_2)]}\right)\right)\times \\ &\times\left(\frac{(2(1+\alpha_2+\epsilon)-(1+\alpha_2))\,(1+\alpha_2+\epsilon)(a-c)}{[4-(1+\alpha_2+\epsilon)(1+\alpha_2)]\,b}\right)\end{aligned}$$

$$= \left(a - c - \left(\frac{(2(1-\alpha_2)(1+\alpha_2)-2\alpha_2)\,(a-c)}{[4-(1+\alpha_2+\epsilon)(1+\alpha_2)]}\right)\right)\left(\frac{(1-\alpha_2)\,(1+\alpha_2+\epsilon)(a-c)}{[4-(1+\alpha_2+\epsilon)(1+\alpha_2)]\,b}\right)$$

$$\begin{aligned}=& \left(\frac{4-(1+\alpha_2+\epsilon)(1+\alpha_2)-(2(1-\alpha_2)(1+\alpha_2)-2\alpha_2)\,(a-c)}{[4-(1+\alpha_2+\epsilon)(1+\alpha_2)]}\right)\times \\ &\times\left(\frac{(1-\alpha_2)\,(1+\alpha_2+\epsilon)(a-c)}{[4-(1+\alpha_2+\epsilon)(1+\alpha_2)]\,b}\right)\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{(4-1-2\alpha_2-\alpha_2^2-\epsilon(1+\alpha_2)-2+2\alpha_2^2+2\alpha_2)\,(a-c)}{[4-(1+\alpha_2+\epsilon)(1+\alpha_2)]}\right)\left(\frac{(1-\alpha_2)\,(1+\alpha_2+\epsilon)(a-c)}{[4-(1+\alpha_2+\epsilon)(1+\alpha_2)]\,b}\right)$$

$$= \left(\frac{(1+\alpha_2^2-\epsilon(1+\alpha_2))\,(a-c)}{[4-(1+\alpha_2+\epsilon)(1+\alpha_2)]}\right)\times\left(\frac{(1-\alpha_2)\,(1+\alpha_2+\epsilon)(a-c)}{[4-(1+\alpha_2+\epsilon)(1+\alpha_2)]\,b}\right)$$

$$= \left(\frac{(1+\alpha_2^2-\epsilon(1+\alpha_2))\,(1-\alpha_2)\,(1+\alpha_2+\epsilon)(a-c)^2}{[4-(1+\alpha_2+\epsilon)(1+\alpha_2)]^2\,b}\right),$$

segue que

$$\pi_1 - \pi_1^{(\alpha_2+\epsilon,\alpha_2)} = \frac{(a-c)^2}{9b} - \left(\frac{\left(1+\alpha_2^2-\epsilon(1+\alpha_2)\right)(1-\alpha_2)(1+\alpha_2+\epsilon)(a-c)^2}{\left[4-(1+\alpha_2+\epsilon)(1+\alpha_2)\right]^2 b} \right) \tag{5.3.5}$$

Segue de (5.3.5) que o sinal da diferença $\pi_1 - \pi_1^{(\alpha_2+\epsilon,\alpha_2)}$ é dado pelo sinal da seguinte expressão

$$\left(4-(1+\alpha_2+\epsilon)(1+\alpha_2)\right)^2 - 9\left(1+\alpha_2^2-\epsilon(1+\alpha_2)\right)(1-\alpha_2)(1+\alpha_2+\epsilon)$$

Como $\left(4-(1+\alpha_2+\epsilon)(1+\alpha_2)\right)^2 = \left(3-2\alpha_2-\alpha_2^2-\epsilon(1+\alpha_2)\right)^2 < 9$, haja visto que $\alpha_2, \epsilon \in]0,1[$, segue que a expressão acima terá sinal negativo se

$$\left(1+\alpha_2^2-\epsilon(1+\alpha_2)\right)(1-\alpha_2)(1+\alpha_2+\epsilon) \geq 1$$

Logo para ϵ que satisfaça tal condição é necessário que

$$\begin{aligned}
\left(1+\alpha_2^2-\epsilon(1+\alpha_2)\right)(1+\alpha_2+\epsilon) &\geq \frac{1}{(1-\alpha_2)} \\
\epsilon\left(1+\alpha_2^2-(1+\alpha_2)^2\right) - \epsilon^2(1+\alpha_2) &\geq \frac{1}{(1-\alpha_2)} - (1+\alpha_2)(1+\alpha_2^2) \\
-2\alpha_2\epsilon - \epsilon^2(1+\alpha_2) &\geq \frac{1}{(1-\alpha_2)} - (1+\alpha_2)(1+\alpha_2^2) \\
-2\alpha_2\epsilon - \epsilon^2(1+\alpha_2) &\geq \frac{\alpha_2^4}{(1-\alpha_2)}
\end{aligned}$$

Como a única maneira da desigualdade acima ser verdadeira é com valores de ϵ negativos, obtemos uma contradição.

Portanto, sempre que $\alpha_1 = \alpha_2 + \epsilon$, para algum $\epsilon \in (0,1)$, temo que $\pi_1 > \pi_1^{(\alpha_2+\epsilon,\alpha_2)}$.

□

Outra hipótese que precismos considerar é que ambas as firmas seguem o modelo de ajuste de Cournot fracionário (5.2.1). Portanto, o que faremos agora é avaliar como a memória atua como estratégia. Em particular, vale ressaltar que numa competição de oligopólios, uma das estratégias pode ser a de diminuir o lucro da firma concorrente, e, por conseguinte, diminuir o espaço desta no mercado. Esta análise é apresentada no próximo teorema.

Teorema 5.3.5. *Considere todas as hipóteses do modelo apresentado em* (5.2.1) *satisfeitas, isto é, considere que a função demanda inversa é dada por* $P = a - b(q_1 + q_2)$ *e a função custo de ambas as firmas é dada por* $C_i(q_i) = c_i q_i$ *com* $c_1 = c_2 = c$. *Se a estratégia é tal que* $\alpha_1 > \alpha_2$, *então o lucro da firma 1 será maior que o lucro da firma 2 quando calculado no ponto de equilíbrio.*

Demonstração. Como os lucros de ambas as firmas no ponto de equilíbrio do modelo de Cournot fracionário (5.2.1) são dados por (q_1^*, q_2^*) como no Teorema 5.2.1, segue se que o lucro das firmas

1 e 2 são, respectivamente,

$$\pi_1((q_1^*, q_2^*)) = (a - c_1 - b(q_1^* + q_2^*))\, q_1^*$$
$$\pi_2((q_1^*, q_2^*)) = (a - c_2 - b(q_1^* + q_2^*))\, q_2^*$$

e

$$\pi_2 - \pi_1 = (a - c_2 - b(q_1^* + q_2^*))\,(q_2^* - q_1^*)\ .$$

Portanto, o sinal de $\pi_2 - \pi_1$ será dado pela seguinte expressão:

$$\frac{((3+\alpha_1)(1+\alpha_2) - (3+\alpha_2)(1+\alpha_1))\,(a-c)}{[4-(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)]\,b} \tag{5.3.6}$$

Como

$$\begin{aligned}&= ((3+\alpha_1)(1+\alpha_2) - (3+\alpha_2)(1+\alpha_1))\\ &= 3 + 3\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 - 3 - 3\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_2\alpha_1\\ &= 2(\alpha_2 - \alpha_1)\end{aligned}$$

segue de (5.3.6) que $\pi_2 - \pi_1 < 0$ sempre que $\alpha_1 > \alpha_2$. □

No que segue mostraremos as simulações numéricas que representam os resultados obtidos no Teorema 5.3.5. As simulações que são apresentadas na Figura 5.7 são para a escolha de $b = c = 1$, $a = 3$, $\rho_1 = \rho_2 = 0.5$ e $q_1(0) = q_2(0) = 1$.

Resta ainda uma comparação a ser feita. O lucro da firma i quando $\alpha_i = 0$ e $\alpha_j = \theta \in (0,1)$ será menor ou maior que o lucro dessa mesma firma quando $\alpha_i, \alpha_j \in (0,1)$? O próximo teorema responde a essa questão.

Teorema 5.3.6. *Tome as mesmas hipóteses do teorema 5.3.1. Considere também o lucro da firma i quando $\alpha_i = 0$ e $\alpha_j \in (0, \frac{5}{3})$ igual a $\pi^{0,\theta}$ e o lucro dessa mesma firma quando $\alpha_i = \alpha_j = \theta \in (0, \frac{5}{3})$ igual a $\pi^{\theta,\theta}$. Logo $\pi^{\theta,\theta} > \pi^{0,\theta}$*

Demonstração. Sabemos que:

$$\pi^{0,\theta} = \frac{(1-\theta)^2(a-c)^2}{(3-\theta)^2\, b}$$

$$\pi^{\theta,\theta} = \frac{(1-\theta^2)\,(a-c)^2}{(3+\theta)^2\, b}\,.$$

Logo o sinal da diferença $\pi^{0,\theta} - \pi^{\theta,\theta}$ será dado por:

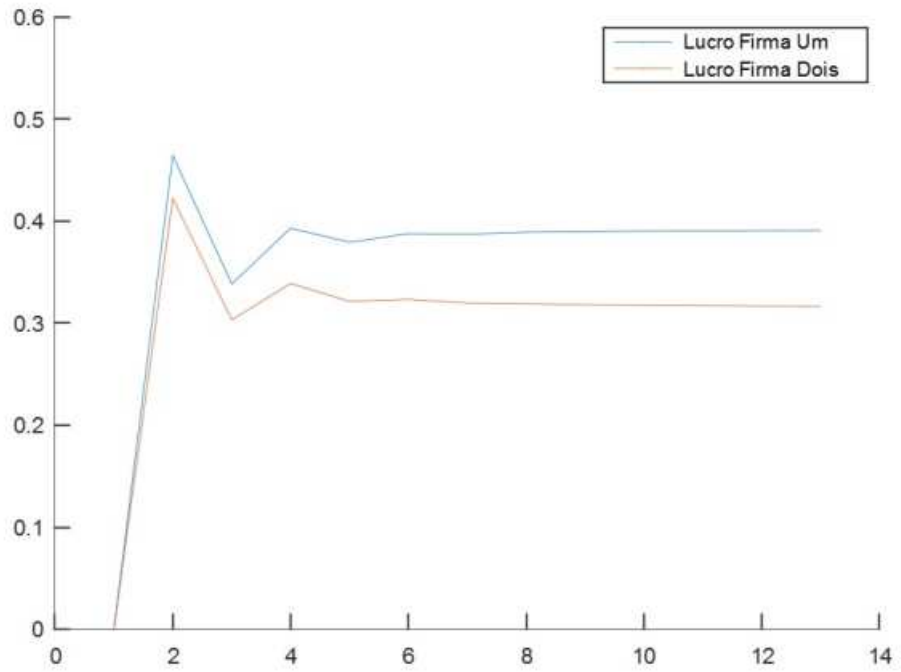


Figura 5.7: Lucro das firmas 1 e 2 para $\alpha_1 > \alpha_2$

.

$$
\begin{aligned}
&(1-\theta)^2(3+\theta)^2 - \left(1-\theta^2\right)(3-\theta)^2 \\
=&(9+6\theta+\theta^2-18\theta-12\theta^2-\theta^3+9\theta^2+6\theta^3+\theta^4) - (9-6\theta+\theta^2-3\theta^2+6\theta^3-\theta^4) \\
=&-6\theta-\theta^3+2\theta^4
\end{aligned}
$$

Como $\theta \in (0,1)$ temos que $\pi^{\theta,\theta} > \pi^{0,\theta}$.

□

5.3.1 Análise dos efeitos de memória no processo de ajustes a partir da teoria dos jogos

Ao compararmos o modelo de Cournot míope (4.0.1) e o modelo de Cournot fracionário (com memória) (5.2.1), percebemos que o segundo possui uma nova variável (a ordem da derivada α_i, para $i = 1, 2$, das quais a firma i pode fazer uso de forma a maximizar o seu lucro em comparação a sua concorrente. No que segue, vamos analisar como as firmas podem utilizar tal estratégia no modelo de ajustes inspirados na teoria de jogos [Sartini et al., 2004].

A ideia por trás da teoria de jogos aplicada aos modelos que estudamos neste trabalho pode ser traduzida como a tomada de decisões ótimas (as melhores possíveis) em condições de competição entre as firmas. Para maiores detalhes sobre a teoria de jogos veja [Sartini et al., 2004].

No caso particular deste trabalho teremos dois jogadores, a saber, as firmas 1 e 2, o qual assumiremos que possui um conjunto finito de estratégias - a escolha da ordem das derivadas

no modelo (5.2.1) - a serem adotadas. Analisaremos sob que condições da estratégia (escolha da ordem das derivadas) de cada firma lhe trará o maior benefício (maximizar a sua função utilidade). Essa ideia pode ser enunciada como o equilíbrio de Nash [Sartini et al., 2004], como segue.

Definição 7 (Equilíbrio de Nash.)**.** *Dizemos que um jogo está em equilíbrio de Nash quando nenhum dos jogadores possui incentivo para mudar sua estratégia se os demais jogadores não mudarem suas próprias estratégias.*

A seguir mostraremos como as firmas podem decidir sua escolha da ordem das derivadas para encontrarem um equilíbrio de Nash, tendo como função de utilidade o lucro.

Teorema 5.3.7. *Assim como no teorema 5.3.1 iremos considerar que no modelo* (5.2.1) *a função demanda inversa é dada por* $P = a - b(q_1 + q_2)$ *e as funções custos são dadas por* $C(q_i) = c_i q_i$*. Além disso, suponha que cada firma deva decidir a ordem da derivada que será usada no processo de ajuste* (5.2.1) *a fim de obter o maior lucro possível. Então a escolha de* $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/3$ *é um equilíbrio de Nash.*

Demonstração. Usando os Teoremas 5.3.1, 5.3.5, 5.3.3, 5.3.6, é possível afirmar que:

$$\pi_i^{0,\frac{1}{3}} < \pi_i^{\frac{1}{3},\frac{1}{3}} < \pi_i^{0,0} < \pi_i^{\frac{1}{3},0}, \quad \text{para } i = 1, 2. \tag{5.3.7}$$

Vejamos essa desigualdade com mais atenção. Cada uma das firmas possui quatro lucros possíveis. Elas ocorrem quando:

- Ambas decidem usar o modelo com derivadas de ordem inteira. Nesse caso o lucro será denotado por $\pi_i^{0,0}$.
- Ambas decidem adotar o modelo com derivadas de ordem fracionária. Nesse caso o lucro será denotado por $\pi_i^{\frac{1}{3},\frac{1}{3}}$.
- A primeira firma decide usar o modelo com derivadas de ordem fracionária e a segunda firma utiliza o modelo com derivadas de ordem inteira. Nesse caso o lucro será denotado por $\pi_i^{\frac{1}{3},0}$.
- A segunda firma decide usar o modelo com derivadas de ordem fracionária e a primeira firma utiliza o modelo com derivadas de ordem inteira. Nesse caso o lucro será denotado por $\pi_i^{0,\frac{1}{3}}$.

Sabemos pelos teoremas mencionados acima que dentre as possibilidades de lucro listas o lucro $\pi_i^{\frac{1}{3},0}$ é o maior e $\pi_i^{0,\frac{1}{3}}$ é o menor. Além disso, sabemos que o lucro $\pi_i^{\frac{1}{3},\frac{1}{3}}$ é menor que $\pi_i^{0,0}$. Portanto, a desigualdade 5.3.7 é valida.

O que faremos a seguir é explorar qual a melhor escolha que as duas firmas podem fazer.

Assuma que a firma 2 escolha $\alpha_2 = 0$. Segue da última desigualdade em (5.3.7) que a firma 1 obterá um lucro maior tomando $\alpha_1 = \frac{1}{3}$. Caso a firma 2 escolha $\alpha_2 = \frac{1}{3}$, segue da segunda

desigualdade em (5.3.7) que o lucro da firma 1 será maior tomando $\alpha_1 = \frac{1}{3}$. Portanto escolher $\alpha_1 = \frac{1}{3}$ sempre trará uma vantagem para a firma 1. De forma análoga o raciocínio pode ser repetido para a firma 2. Logo $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{3}$ é um equilíbrio de Nash.

□

Na Tabela 5.13, apresentamos a representação desse jogo enunciado no Teorema 5.3.7.

		Firma 1	
		$\alpha_1 = \frac{1}{3}$	$\alpha_1 = 0$
Firma 2	$\alpha_2 = \frac{1}{3}$	$\left(\pi_1^f, \pi_2^f\right)$	$\left(\pi_1^i, \pi_2^F\right)$
	$\alpha_2 = 0$	$\left(\pi_1^F, \pi_2^i\right)$	$\left(\pi_1^I, \pi_2^I\right)$

Tabela 5.13: Jogo - Escolha da ordem das derivada para um equilíbrio de Nash.

Capítulo 6

Conclusões e trabalhos futuros

Os oligopólios estão presentem em diversos setores da economia. E por essa razão muitos pesquisadores se dedicam a estuda-los. Em especial a modelagem matemática dessa estrutura de mercado representa uma forma de interpretar possíveis nuances em um mercado oligopolista. Nesta dissertação apresentamos uma breve revisão de alguns modelos matemáticos para descrever o mercado oligopolista, baseadas em algumas generalizações do modelo proposto por Cournot (onde a competição entre as firmas do mercado é feita exclusivamente baseados nas quantidades produzidas), com estratégias míopes, ou seja, sem considerar o histórico de competições.

A principal novidade que propomos nesse trabalho é um modelo de ajustes do tipo Cournot, onde as firmas possuem uma certa memória das competições passadas. Tal memória é incorporada com o uso das derivadas de ordem fracionária onde antes tínhamos derivadas de ordem inteira. Podemos observar essa modelagem no Capítulo 5. O caso estudado tratava-se de um duopólio onde cada uma das firmas podia escolher a ordem da derivada (o nível de memória) que iria utilizar na competição, (devido a presença de derivadas de diferentes ordens convém chamar esse modelo de multi-fracionário). Foi verificado que para uma demanda inversa e custos lineares, no modelo multi-fracionário, a firma com maior memória (ordem das derivadas fracionaria mais próxima de 0) vai obter um lucro maior no ponto ótimo. Até onde sabemos, não há resultados desta natureza na literatura.

No modelo-multifuncionais a escolha da ordem da derivada pode ser entendida como uma estrategia de um jogo onde cada um das firmas busca aumentar seu lucro. Nesse contexto foi verificado que a derivada de ordem $\frac{2}{3}$ é uma estrategia dominante. Tal constatação foi feita comparando o lucro no ponto de equilíbrio das duas empresas para diferentes derivadas fracionarias.

Primeiramente consideramos o lucro no ponto de equilíbrio de uma das firmas em dois caso. Quando ela toma e a derivada de ordem 1 e quando escolhe a ordem da derivada contida no intervalo $(0, 1)$, em ambas as situações supomos que a concorrente tomou a ordem de suas derivadas igual a 1. Nesse cenário o ponto de equilíbrio do modelo resultou em um lucro maior para firma quando esta adota a derivada de ordem não inteira pertencente ao intervalo $(0.4, 1)$

e tem seu maior valor com a ordem da derivada igual a $\frac{2}{3}$.

Outra comparação foi feita considerando que uma das firmas toma a ordem da derivada inteira enquanto sua concorrente opta pela fracionaria. Nesse caso verificou-se que a firma cuja ordem da derivada é fracionaria terá um lucro maior no ponto de equilíbrio. O valor do lucro dessa firma atingirá seu máximo, no ponto de equilíbrio, para a derivada de ordem $\frac{2}{3}$. Além disso, a firma com a ordem de derivada igual a 1 pode aumentar seu lucro caso mude o valor da ordem das derivadas para o mesmo que o de sua concorrente.

Considerando essas comparações podemos verificar que ambas as firmas sempre terão vantagens em tomar a ordem de sua derivada igual a $\frac{2}{3}$. Pois, essa é a escolha que maximiza o lucro quando a concorrência toma a derivada de ordem inteira e fracionaria.

Há uma série de trabalhos futuros que derivam dos estudos apresentados nesta dissertação, que elencaremos a seguir.

- Analisar o modelo (5.2.1) para uma função demanda e uma função custo mais gerais.
- Estabelecer resultados de existência e estabilidade para pontos estacionários e resultados de maximalidade em termos de outras funções utilidade para as firmas.
- Analisar modelos com memória para múltiplas firmas.
- Estudar modelos com memória do tipo Bertrand (Cournot- Bertrand), onde o processo de ajuste é feito em termos do preço e não só da quantidade.

Referências Bibliográficas

[Abolhassani et al., 2014] Abolhassani, M., Bateni, M. H., Hajiaghayi, M., Mahini, H., and Sawant, A. (2014). Network cournot competition. In *International Conference on Web and Internet Economics*, pages 15–29. Springer.

[Abrantes, 2004] Abrantes, M. L. (2004). A teoria dos jogos e os oligopólios. *Angola: Multitema*.

[Agiza et al., 1999] Agiza, H. N., Bischi, G. I., and Kopel, M. (1999). Multistability in a dynamic cournot game with three oligopolists. *Mathematics and Computers in Simulation*, 51(1-2):63–90.

[Agliari et al., 2000] Agliari, A., Gardini, L., and Puu, T. (2000). The dynamics of a triopoly cournot game. *Chaos, Solitons & Fractals*, 11(15):2531–2560.

[Agliari et al., 2016] Agliari, A., Naimzada, A. K., and Pecora, N. (2016). Nonlinear dynamics of a cournot duopoly game with differentiated products. *Applied Mathematics and Computation*, 281:1–15.

[Ahmed and Agiza, 1998] Ahmed, E. and Agiza, H. (1998). Dynamics of a cournot game with n-competitors. *Chaos, Solitons & Fractals*, 9(9):1513–1517.

[Andaluz et al., 2017] Andaluz, J., Elsadany, A. A., and Jarne, G. (2017). Nonlinear cournot and bertrand-type dynamic triopoly with differentiated products and heterogeneous expectations. *Mathematics and Computers in Simulation*, 132:86–99.

[Artin, 2015] Artin, E. (2015). *The gamma function*. Courier Dover Publications.

[Askar and Alshamrani, 2014] Askar, S. S. and Alshamrani, A. (2014). The dynamics of economic games based on product differentiation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 268:135–144.

[Askar et al., 2015] Askar, S. S., Alshamrani, A. M., and Alnowibet, K. (2015). Dynamic cournot duopoly games with nonlinear demand function. *Applied Mathematics and Computation*, 259:427–437.

[Asker, 2007] Asker, S. (2007). On dynamical multi-team cournot game in exploitation of a renewable resource. *Chaos, Solitons & Fractals*, 32(1):264–268.

[Bagwell and Staiger, 2012] Bagwell, K. and Staiger, R. W. (2012). The economics of trade agreements in the linear cournot delocation model. *Journal of International Economics*, 88(1):32–46.

[Barros et al., 2013] Barros, C. D. V. d. et al. (2013). O teorema do ponto fixo de banach e algumas aplicações.

[Bhatta, 2007] Bhatta, D. (2007). Few fractional order derivatives and their computations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(4):449–460.

[Brown and Churchill, 2015] Brown, J. W. and Churchill, R. V. (2015). *Variáveis complexas e aplicações*. McGraw Hill Brasil.

[Camargo et al., 2009] Camargo, R. d. F. et al. (2009). Cálculo fracionário e aplicaçoes.

[Caputo, 1992] Caputo, M. (1992). *Lectures on seismology and rheological tectonics*.

[Carrera-Fernandez, 2009] Carrera-Fernandez, J. (2009). Curso básico de microeconomia.

[Cipolli, 2012] Cipolli, V. G. (2012). Sistemas dinâmicos discretos: análise de estabilidade.

[Dalir and Bashour, 2010] Dalir, M. and Bashour, M. (2010). Applications of fractional calculus. *Applied Mathematical Sciences*, 4(21):1021–1032.

[Davis, 1959] Davis, P. J. (1959). Leonhard euler's integral: A historical profile of the gamma function: In memoriam: Milton abramowitz. *The American Mathematical Monthly*, 66(10):849–869.

[de Barros et al., 2021] de Barros, L. C., Lopes, M. M., Santo Pedro, F., Esmi, E., dos Santos, J. P. C., and Sánchez, D. E. (2021). The memory effect on fractional calculus: an application in the spread of covid-19. *Computational and Applied Mathematics*, 40(3):1–21.

[De Fraja, 2009] De Fraja, G. (2009). Mixed oligopoly: old and new.

[Debnath, 2004] Debnath, L. (2004). A brief historical introduction to fractional calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 35(4):487–501.

[Diethelm, 2010] Diethelm, K. (2010). *The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*. Springer Science & Business Media.

[Du et al., 2013] Du, J.-g., Fan, Y.-q., Sheng, Z.-h., and Hou, Y.-z. (2013). Dynamics analysis and chaos control of a duopoly game with heterogeneous players and output limiter. *Economic Modelling*, 33:507–516.

[Elettreby, 2016] Elettreby, M. (2016). Dynamical analysis of a cournot duopoly model. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 24(4):681–686.

[Elsadany, 2015] Elsadany, A. (2015). A dynamic cournot duopoly model with different strategies. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 23(1):56–61.

[Elsadany, 2017] Elsadany, A. (2017). Dynamics of a cournot duopoly game with bounded rationality based on relative profit maximization. *Applied Mathematics and Computation*, 294:253–263.

[Feijó and Valente, 2004] Feijó, C. A. and Valente, E. (2004). A firma na teoria econômica e como unidade de investigação estatística: evolução nas conceituações. *Revista de Economia Contemporânea*, 8(2).

[Feng et al., 2013] Feng, Y., Li, B., and Li, B. (2013). Price competition in an oligopoly market with multiple iaas cloud providers. *IEEE Transactions on Computers*, 63(1):59–73.

[Florentino, 2011] Florentino, C. A. (2011). Introdução à teoria das funções complexas.

[Freitas, 2017] Freitas, A. d. S. d. (2017). Uma abordagem de pontos críticos e as funções de morse.

[Friedman, 2000] Friedman, J. W. (2000). The legacy of augustin cournot. *Cahiers d'économie politique/Papers in Political Economy*, pages 31–46.

[Gori et al., 2015] Gori, L., Guerrini, L., and Sodini, M. (2015). A continuous time cournot duopoly with delays. *Chaos, Solitons & Fractals*, 79:166–177.

[Gremaud, 2003] Gremaud, A. P. (2003). *Manual de economia*. Saraiva Educação SA.

[Guo et al., 2015] Guo, B., Pu, X., and Huang, F. (2015). *Fractional partial differential equations and their numerical solutions*. World Scientific.

[Haraguchi and Matsumura, 2016] Haraguchi, J. and Matsumura, T. (2016). Cournot–bertrand comparison in a mixed oligopoly. *Journal of Economics*, 117(2):117–136.

[Hay, 1981] Hay, G. A. (1981). Oligopoly shared monopoly and antitrust law. *Cornell L. Rev.*, 67:439.

[Hilfer et al., 2010] Hilfer, R., Butzer, P., and Westphal, U. (2010). An introduction to fractional calculus. *Appl. Fract. Calc. Phys., World Scientific*, pages 1–85.

[Hossain et al., 2018] Hossain, M., Chowdhury, M. N. M., et al. (2018). Antoine augustin cournot: The pioneer of modern economic ideas.

[Kopel, 1996] Kopel, M. (1996). Simple and complex adjustment dynamics in cournot duopoly models. *Chaos, Solitons & Fractals*, 7(12):2031–2048.

[Lima, 1981] Lima, E. L. (1981). *Curso de analise: volume 2*. Instituto de Matematica Pura e Aplicada.

[Lima, 2000] Lima, E. L. (2000). *Curso de Análise, vol. 1.*

[Loverro, 2004] Loverro, A. (2004). Fractional calculus: history, definitions and applications for the engineer. *Rapport technique, Univeristy of Notre Dame: Department of Aerospace and Mechanical Engineering*, pages 1–28.

[Luís and Rodrigues, 2017] Luís, R. and Rodrigues, E. (2017). Local stability in 3d discrete dynamical systems: application to a ricker competition model. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2017.

[Matsumoto et al., 2021] Matsumoto, A., Szidarovszky, F., and Nakayama, K. (2021). Delay cournot duopoly game with gradient adjustment: Berezowski transition from a discrete model to a continuous model. *Mathematics*, 9(1):32.

[Morais et al., 2014] Morais, L. et al. (2014). Equações de diferenças, caos e fractais.

[Naimzada and Sbragia, 2006] Naimzada, A. K. and Sbragia, L. (2006). Oligopoly games with nonlinear demand and cost functions: two boundedly rational adjustment processes. *Chaos, Solitons & Fractals*, 29(3):707–722.

[Oliveira et al., 2014] Oliveira, D. d. S. d. et al. (2014). Derivada fracionária e as funções de mittag-leffler. *Repositório Latinoamericano.*

[Peng et al., 2016] Peng, Y., Lu, Q., and Xiao, Y. (2016). A dynamic stackelberg duopoly model with different strategies. *Chaos, Solitons & Fractals*, 85:128–134.

[Pindyck et al., 2013] Pindyck, R. S., Rubinfeld, D. L., and Rabasco, E. (2013). *Microeconomia.* Pearson Italia.

[Proque, 2019] Proque, A. L. (2019). Interdependência do brasil e dos estados unidos no mercado da soja em grão: uma análise da situação e das perspectivas. *Revista de Desenvolvimento e Políticas Públicas*, 3(1):41–60.

[Puu, 1991] Puu, T. (1991). Chaos in duopoly pricing. *Chaos, solitons, and fractals*, 1(6):573–581.

[Ramos and CAMARGO, 2012] Ramos, P. F. P. and CAMARGO, R. (2012). Cálculo fracionário aplicado ao problema da tautócrona. *CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru*, 1:15–22.

[Ross, 1975] Ross, B. (1975). A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus. In *Fractional calculus and its applications*, pages 1–36. Springer.

[Ross, 1977] Ross, B. (1977). The development of fractional calculus 1695–1900. *Historia Mathematica*, 4(1):75–89.

[Sartini et al., 2004] Sartini, B. A., Garbugio, G., Bortolossi, H. J., Santos, P. A., and Barreto, L. S. (2004). Uma introdução à teoria dos jogos. *Anais da II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática*, pages 25–29.

[Sebah and Gourdon, 2002] Sebah, P. and Gourdon, X. (2002). Introduction to the gamma function. *American Journal of Scientific Research*, pages 2–18.

[Shapiro, 1989] Shapiro, C. (1989). Theories of oligopoly behavior. *Handbook of industrial organization*, 1:329–414.

[STEWART, 2009] STEWART, J. (2009). Cálculo, vol. 2, 6ª edição.

[Symeonidis, 2003] Symeonidis, G. (2003). Comparing cournot and bertrand equilibria in a differentiated duopoly with product r&d. *International Journal of Industrial Organization*, 21(1):39–55.

[Tarasov, 2018] Tarasov, V. E. (2018). Generalized memory: Fractional calculus approach. *Fractal and Fractional*, 2(4):23.

[Tarasov, 2019] Tarasov, V. E. (2019). On history of mathematical economics: Application of fractional calculus. *Mathematics*, 7(6):509.

[Tarasov, 2020] Tarasov, V. E. E. (2020). *Mathematical economics: Application of fractional calculus*. MDPI, Basel.

[Tarasova and Tarasov, 2017] Tarasova, V. V. and Tarasov, V. E. (2017). Economic interpretation of fractional derivatives. *arXiv preprint arXiv:1712.09575*.

[Tarasova and Tarasov, 2018] Tarasova, V. V. and Tarasov, V. E. (2018). Concept of dynamic memory in economics. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 55:127–145.

[Teodoro et al., 2017] Teodoro, G., Oliveira, D., and Oliveira, E. (2017). Sobre derivadas fracionárias. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 40.

[Tremblay and Tremblay, 2011] Tremblay, C. H. and Tremblay, V. J. (2011). The cournot–bertrand model and the degree of product differentiation. *Economics Letters*, 111(3):233–235.

[Tremblay and Tremblay, 2019] Tremblay, C. H. and Tremblay, V. J. (2019). Oligopoly games and the cournot–bertrand model: a survey. *Journal of Economic Surveys*, 33(5):1555–1577.

[Zhang, 2006] Zhang, W.-B. (2006). *Discrete dynamical systems, bifurcations and chaos in economics*. elsevier.

[Zibiani, 2015] Zibiani, E. (2015). Estabilidade para equações discretas autônomas.

Capítulo 7

Apêndices

Neste apêndice, apresentaremos uma série de resultados complementares juntamente com os algoritmos que foram utilizados durante o texto da dissertação.

7.1 FUNÇÕES ESPECIAIS

As funções que serão apresentadas de maneira superficial e algumas de suas propriedades importantes no que segue, aparecem de forma recorrente nas definições do cálculo de ordem fracionária.

Função Gamma de Euler

A função Gamma de Euler é amplamente utilizada no decorrer dessa dissertação, pois está intimamente ligada com a definição da integral e da derivada de ordem fracionária (veja Capítulo 2.

Antes de apresentarmos a definição da função Gamma considere o fatorial de um número $n \in \mathbb{N}$ qualquer. Sabemos que ele pode ser expresso da seguinte maneira

$$\begin{aligned} n! &= n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-(n-2)) \times (n-(n-1))\,, \\ 0! &:= 1\,. \end{aligned} \tag{7.1.1}$$

Podemos ver que o fatorial assim definido tem apenas os números naturais como domínio. Portanto, para que possamos encontrar o fatorial de um número fora desse domínio se faz necessário encontrar uma definição generalizada. Em particular, muitas vezes precisamos encontrar uma forma generalizada do fatorial de um $z \in \mathbb{R}$, para o qual a expressão (7.1.1) não está bem definida .

A função Gamma surgiu em um troca de cartas entre dois matemáticos famosos. Eram eles Leonhard Euler e Christian Goldbach, veja [Davis, 1959]. Desde então ela vem sendo utilizada em uma grande variedade de aplicações. Para mais detalhes da definição da função Gamma, consulte [Davis, 1959, Sebah and Gourdon, 2002, Artin, 2015].

Definição 8. *Seja $z \in \mathbb{R}_+$. A função Gamma (de Euler), é definida por*

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt\,, \quad z > 0\,, \\ \Gamma(0) &= 1\,. \end{aligned} \tag{7.1.2}$$

No próximo resultado mostra que a função Gamma de Euler pode ser entendida como uma generalização da função fatorial. Detalhes podem ser consultados em [Sebah and Gourdon, 2002].

Lema 7.1.1. *Seja $z \in \mathbb{N}$. Então $\Gamma(z) = (z-1)!$.*

Demonstração. Faremos a demonstração por indução. Seja $z = 1$. Calculando $\Gamma(1)$ temos

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t}\big|_0^\infty = 1 = 1!\,.$$

Assuma, por hipótese de indução que se $z = n$, para $n \in \mathbb{N}$, temos $\Gamma(z) = \Gamma(n) = (n-1)!$.

Seja $z = n + 1$. Pela definição da função Gamma, e integrando por partes, e utilizando o fato de que a função exponencial domina qualquer polinômio em termos do crescimento (decrescimento), e.g. [Lima, 1981], temos que

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^{n+1-1}e^{-t}dt = -t^n e^{-t}\Big|_0^\infty + n\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt = 0 + n\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t} = n\Gamma(n) = n!\,,$$

o que conclui a demonstração. □

O Lema 7.1.1 mostra que a função Gamma de Euler é uma generalização do fatorial para números reais não negativos

Observação 2. *Vale observar que a função Gamma não pode ser estendida para toda a reta real. De fato, aplicando a definição* (8) *para um z negativo (então os limites de integração vão de* $-\infty$ *a* 0*), equivale a reescrever a expressão* (8) *com a mudança de variáveis* $s = -t$*. Como a função exponencial cresce mais que qualquer polinômio [Lima, 1981], segue que a integral diverge. Isso pode ser visto no gráfico abaixo*

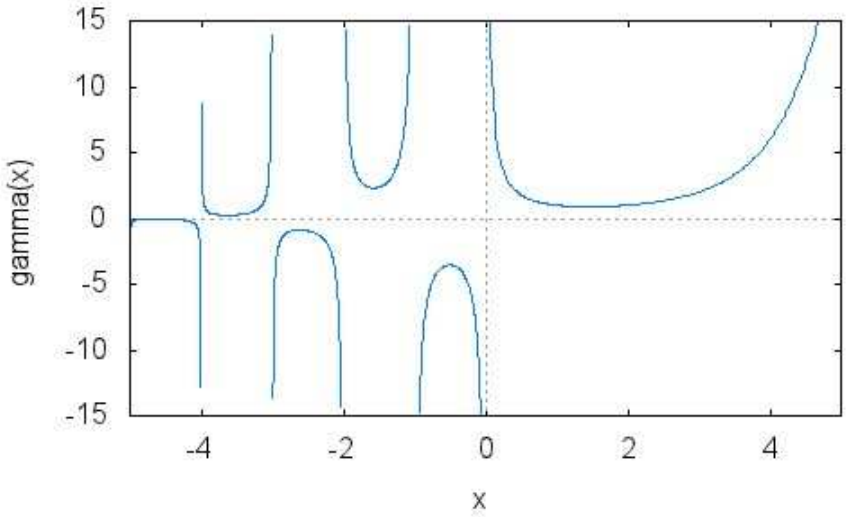


Figura 7.1: Gráfico da função Gamma.

Função Beta

Uma função que tem uma relação muito próxima a função Gamma é a função Beta, definida abaixo.

Definição 9. *Função Beta Sejam* p, q *números complexos tais que com partes reais positivas. Então*

$$\beta(q,p) = \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt \tag{7.1.3}$$

define a função que chamamos de função Beta.

Observação 3. *A função Beta pode ser representada através de funções trigonométricas, veja [Oliveira et al., 2014]. De fato, introduzindo a mudança de variável* $t = cos^2(\theta)$*, na definição* (9) *temos que*

$$\begin{aligned}\beta(q,p) &= \int_{2\pi}^{0} (cos^2(\theta))^{q-1}(1-cos^2(\theta))^{p-1}(-2)cos(\theta)sen(\theta)d\theta \\ &= 2\int_0^{2\pi} (cos(\theta))^{2q-1}(sen(\theta))^{2p-1}d\theta\,. \end{aligned} \tag{7.1.4}$$

Munidos da definição da função Beta e Gamma iremos mostrar um importante relação entre estas duas funções no próximo Lema, veja também [Oliveira et al., 2014].

Lema 7.1.2. *Sejam* p *e* q *reais e positivos. Então*

$$\beta(q,p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\,.$$

Demonstração. Segue da Definição 7.1.2 da função Gamma que, para quaisquer p e q reais e positivos, temos

$$\Gamma(q)\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-t}t^{q-1}dt\int_0^\infty e^{-s}s^{p-1}ds = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(t+s)}t^{q-1}s^{p-1}dtds\,.$$

Considere agora a seguinte mudança de variável $x^2 = t$ e $y^2 = s$ na a equação acima. Tal substituição resulta em

$$\begin{aligned}\Gamma(q)\Gamma(p) &= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}x^{2q-2}y^{2p-2}2x2ydxdy \\ &= 4\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\int_0^\infty x^{2q-1}y^{2p-1}dxdy\,.\end{aligned}$$

Usando as coordenadas polares $x = rcos(\theta)$ e $y = rsen(\theta)$ e fazendo as devidas mudanças nos limites de integração e no jacobiano da transformação obtemos

$$\begin{aligned}\Gamma(q)\Gamma(p) &= 2\int_0^\infty e^{-r^2}\left\{2\int_0^{2\pi}(rcos(\theta))^{2q-1}(rsen(\theta))^{2p-1}rdrd\theta\right\} \\ &= \left(2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(q+p)-1}dr\right)\left\{2\int_0^{2\pi}(cos(\theta))^{2q-1}(sen(\theta))^{2p-1}d\theta\right\} \\ &= \left(2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(q+p)-1}dr\right)\beta(q,p)\,,\end{aligned}$$

onde usamos a representação da função Beta em coordenadas polares como em (7.1.4) na última identidade.

Considerando a mudança de variáveis $r^2 = \epsilon$ (o que implica em $dr = \frac{1}{2r}d\epsilon$) acima e relem-

brando a representação de $\Gamma(p+q)$ em (8), obtemos que

$$\Gamma(q)\Gamma(p) = \alpha_2(q,p)\int_0^\infty e^{-\epsilon}\epsilon^{q+p-1}d\epsilon = \alpha_2(q,p)\Gamma(q+p)\,,$$

o que conclui a demonstração. □

Função De Gel'fand Shilov.

Outra função que desempenha um papel fundamental nas definições do cálculo fracionário, em particular para a definição da integral fracionária através de um produto de convolução é a função de Gel'fand Shilov, a qual é definida da seguinte forma

Seja $\alpha_2 \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}_-$. A função de Gel'fand Shilov é definida como

$$\Phi_{\alpha_2}(t) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)}, & t > 0. \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \tag{7.1.5}$$

É importante notar que a função Φ possui singularidades em $\mathbb{Z}_-$. Para maiores detalhes consulte [Ramos and CAMARGO, 2012].

Um resultado importante para o que segue é o seguinte Lema.

Lema 7.1.3. *Sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}_-$. Então*

$$(\Phi_{\alpha_{1_1}} \star \Phi_{\alpha_2})(t) = \Phi_{\alpha_1+\alpha_2}(t)\,, \tag{7.1.6}$$

onde $\star$ denota a convolução.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
(\Phi_{\alpha_1} * \Phi_{\alpha_2})(t) &= \int_0^t \Phi_{\alpha_1}(x)\Phi_{\alpha_2}(t-x)dx \\
(\Phi_{\alpha_1} * \Phi_{\alpha_2})(t) &= \int_0^t \frac{x^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)}\frac{(t-x)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)}dx \\
(\Phi_{\alpha_1} * \Phi_{\alpha_2})(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^t x^{\alpha_1-1}(t-x)^{\alpha_2-1}dx
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis:

$$u = \frac{x}{t} \implies tdu = dx$$

Com isso chegamos em:

$$(\Phi_{\alpha_1} * \Phi_{\alpha_2})(t) = \frac{t^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^t (tu)^{\alpha_1-1}(t-tu)^{\alpha_2-1} du$$
$$(\Phi_{\alpha_1} * \Phi_{\alpha_2})(t) = \frac{t^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^t u^{\alpha_1-1}(1-u)^{\alpha_2-1} du$$

Note que a integral acima exatamente idêntica a função beta presente em Funcao Beta. Logo:

$$(\Phi_{\alpha_1} * \Phi_{\alpha_2})(t) = \frac{t^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \alpha_2(\alpha_2, \alpha_1)$$

Usando a relação entre as funções Gama e Beta (7.1.2) temos que:

$$(\Phi_{\alpha_1} * \Phi_{\alpha_2})(t) = \frac{t^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$$
$$(\Phi_{\alpha_1} * \Phi_{\alpha_2})(t) = \frac{t^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$$

O que equivale exatamente a seguinte equação:

$$(\Phi_{\alpha_1} * \Phi_{\alpha_2})(t) = \Phi_{\alpha_1+\alpha_2}(t)$$

□

.

7.1.1 Resultados auxiliares de Análise

O estudo de funções e seus pontos extremos é essencial para a construção desse trabalho. E portanto é indispensável que apresentemos o embasamento teórico referente a essa teoria que foi usado ao logo da dissertação. E por essa razão dedicaremos o apêndice apendice analise a tratar dos teoremas e definições estudados pela analise.

O primeiro teorema do qual vamos tratar diz respeito aos pontos extremos de uma função de duas variáveis.

Teorema 7.1.1 (Pontos Extremos)**.** *Segundo [STEWART, 2009], se uma função $f(x, y)$ têm um ponto de máximo ou de mínimo em (x_0, y_0) e, além disso, suas derivadas parciais de primeira ordem existem, então,*

$$\frac{df}{dx} = 0$$
$$\frac{df}{dy} = 0$$

Demonstração. Considere $g(x) = f(x, y_0)$. Se f possui um máximo, ou de forma análoga um mínimo, locam em (x_0, y_0) então $g(x)$ possui um máximo, ou um mínimo em $g(x_0)$. Portanto, pelo teorema de Fermat, $\frac{dg(x_0)}{dx} = 0$. Além disso, sabemos que $\frac{dg(x_0)}{dx} = \frac{df(x_0,y_0)}{dx}$. O que implica em $\frac{df(x_0,y_0)}{dx} = 0$. Para $\frac{df(x_0,y_0)}{dy}$ o processo é o mesmo. □

Outra importante definição que foi amplamente alitizada no decorrer do trabalho é matriz Hessiana. Vejamos agora como

Definição 10 (Hessiano.)**.** *Segundo [Freitas, 2017], chamamos de matriz hessiana de uma função* $\Pi(q_1, q_2)$ *classe* C^2 *a seguinte matriz,*

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2\Pi}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2\Pi}{\partial q_1 \partial q_2} \\ \frac{\partial^2\Pi}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2\Pi}{\partial q_2^2} \end{bmatrix}$$

O determinante da matriz hessiana, denotado por $H(q_1, q_2)$ *é chamado hessiano de* Π*.*

Com essa definição apresentada estamos prontos para o próximo teorema.

Teorema 7.1.2 (Teste Da Segunda Derivada.)**.** *Sejam* Π *de classe* C^2 *e* (q_1^0, q_1^0) *um ponto interior* D_Π *. Suponhamos que* (q_1^0, q_1^0) *seja ponto crítico de* Π*. Então, segundo [Freitas, 2017]:*

1. *Se* $\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_1^2}(q_1^0, q_2^0) > 0$ *e* $H(q_1^0, q_2^0) > 0$ *então* (q_1^0, q_2^0) *será ponto de mínimo local de* Π*.*
2. *Se* $\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_1^2}(q_1^0, q_2^0) < 0$ *e* $H(q_1^0, q_2^0) > 0$ *então* (q_1^0, q_2^0) *será ponto de máximo local de* Π*.*
3. *Se* $H(q_1^0, q_2^0) < 0$ *então* (q_1^0, q_2^0) *será ponto de sela.*
4. *Se* $H(q_1^0, q_2^0) = 0$ *então nada podemos afirmar.*

Demonstração. A demonstrações segue conforme apresentado por [Freitas, 2017].

Considerando a forma quadrática $Q(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$, mostremos que se

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} < 0$$

então existem (h_1, k_1) e (h_2, k_2) tais que $Q(h_1, k_1) < 0$ e $Q(h_2, k_2) > 0$.

Considerando $a = 0$ e $b \neq 0$, temos $Q(h, k) = k.(2bh+ck)$. Logo existe um n pertencente aos reais tal que $Q(n, 1)$ e $Q(n, -1)$ terão sinais contrários, ou seja, $Q(n, 1) = (1).(2bn+c) = 2bn+c$ e $Q(n, -1) = (-1).(2bn - c) = -2bn + c$. Se $bn > \frac{c}{2}$, teremos valores diferentes para Q, sendo um positivo e outro negativo.

No caso de $a \neq 0$ é possível colocar a em evidencia e completar os quadrados em $Q(h,k)$. Vejamos a seguir:

$$\begin{aligned} Q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2 =& a\left(h^2 + \frac{2bhk}{a} + \frac{ck^2}{a}\right) \\ =& a\left[h^2 + \frac{2bhk}{a} + \left(\frac{bk}{a}\right)^2 - \left(\frac{bk}{a}\right)^2 + \frac{ck^2}{a}\right] \\ =& a\left[\left(h + \frac{bk}{a}\right)^2 + k^2\frac{(ac-b^2)}{a^2}\right] \\ =& a\left(h + \frac{bk}{a}\right)^2 + a\frac{(ac-b^2)}{a^2}k^2 \end{aligned}$$

O próximo passo é verificar que $Q(1,0)$ e $Q\left(\frac{b}{a}, -1\right)$ possuem sinal contrario. Veja,

$$\begin{aligned} Q(1,0) =& a\left(1 + \frac{b0}{a}\right)^2 + a\frac{(ac-b^2)}{a^2}0^2 && = a \\ Q\left(\frac{b}{a}, -1\right) =& a\left(\frac{b}{a} + \frac{b(-1)}{a}\right)^2 + a\frac{(ac-b^2)}{a^2}(-1)^2 && = \frac{(ac-b^2)}{a} \end{aligned}$$

Repare que

$$ac - b^2 = \begin{Vmatrix} a & b \\ b & c \end{Vmatrix}$$

Como sabemos que por hipótese o determinante dessa matriz é menor que zero. Temos que $Q(1,0)$ e $Q\left(\frac{b}{a}, -1\right)$ possuem sinais contrários. Com isso provado podemos seguir com restante da demonstração. Começaremos pelo item 3.

Considere Π de classe C^2 no aberto $A \in \mathbb{R}^{\not\in}$. Além disso considere $(q_1^0, q_2^0) \in A$ e $(h,k) \neq 0$ tal que o seguimento com as extremidades $((q_1^0, q_2^0)$ e $(q_1^0 + h, q_2^0 + k)$, esteja contido em A. Considere ainda a função g definida $g(t) = \Pi(q_1^0 + ht, q_2^0 + kt)$, onde $q_1 = q_1^0 + ht$ e $q_2 = q_2^0 + kt$.

Usando a regra da cadeia,

$$\begin{aligned} g^{'}(t) =& \frac{d}{dt}\left[\Pi(q_1, q_2)\right] \\ =& \frac{\partial \Pi}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} \\ =& \frac{\partial \Pi}{\partial q_1}h + \frac{\partial \Pi}{\partial q_2}k \end{aligned}$$

Usando a regra da cadeira mais uma vez para encontrar a segunda derivada de $g^{''}$:

$$\begin{aligned} g^{''} =& \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}\right] h + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}\right] k \\ =& \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2}\frac{dq_1}{dt}h + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2 \partial q_1}\frac{dq_2}{dt}h + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2}\frac{dq_2}{dt}k + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2}\frac{dq_1}{dt}k \\ =& \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2}h^2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2 \partial q_1}kh + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2}k^2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2}hk \end{aligned}$$

Usando o teorema de Schwarz, sabemos que:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\partial \Pi}{\partial q_2 \partial q_1}$$

Logo,

$$g^{''}(t) = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2 \partial q_1}kh + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2}k^2$$

Repare que se compararmos $g^{''}$ com $Q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$, encontraremos que $a = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2}$, $b = 2\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2 \partial q_1}$ e $c = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2}$. Como vimos anteriormente sabemos que podemos reorganizar a forma quadrática da seguinte maneira:

$$Q(h,k) = a\left(h + \frac{bk}{a}\right)^2 + a\frac{(ac - b^2)}{a^2}k^2$$

Além disso $ac - b^2$ pode ser entendido como o determinante da seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2 \partial q_1} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2} \end{bmatrix}$$

Logo sabemos que existem (h_1, k_1) e (h_2, k_2) para os quais $g^{''}(t) < 0$ e $g^{''}(t) > 0$, uma vez que por hipótese o hessiano de Π é negativo em (q_1^0, q_2^0) . Portanto podemos dizer que $t = 0$ é um ponto de máximo e também de mínimo de $g^{''}(t)$. Donde podemos verificar que (q_1, q_2) é um ponto de cela de Π.

Agora demonstraremos a parte (1) do teorema. Dada a função $g(t) = \Pi(q_1^0 + ht, q_2^0 + kt)$ com $t \in [0,1]$, $q_1 = q_1^0 + ht$ e $q_2 = q_2^0 + kt$. Usando a formula de Taylor com rasto de Lagrange:

$$g(t) = g(t_0) + g^{'}(t_0)\frac{(t - t_0)^1}{1} + g(t^*)\frac{(t - t_0)}{2}$$

Sabendo que $t^* \in (0,1)$.

Considerando a função $g(t) = \Pi(q_1^0 + ht, q_1^0 + kt)$ temos $g(1) = \Pi(q_1^0 + h, q_2^0 + k)$ e $g(0) = \Pi(q_1^0, q_2^0)$. Com isso podemos verificar que:

$$g(0)^{'} = \frac{\partial \Pi(q_1^0, q_2^0)}{\partial q_1} h + \frac{\partial \Pi(q_1^2, q_2^2)}{\partial q_2} k$$
$$g(t)^{''} = \frac{\partial^2 \Pi(q_1^0 + ht, q_2^0 + kt)}{\partial q_1^2} h^2 + \frac{\partial^2 \Pi(q_1^0 + ht, q_2^0 + kt)}{\partial q_1 \partial q_2} hk + \frac{\partial^2 \Pi(q_1^2 + ht, q_2^0 + kt)}{\partial q_2^2} k^2$$

Em especial

$$g(t^*)^{''} = \frac{\partial \Pi(q_1^*, q_2^*)}{\partial q_1} h^2 + 2\frac{\partial \Pi(q_1^*, q_2^*)}{\partial q_1 \partial q_2} hk + \frac{\partial \Pi(q_1^*, q_2^*)}{\partial q_2^2} k^2$$

Onde $q_1^* = q_1^0 + ht^*$ e $q_2^* = y_2^0 + kt^*$.

Repare agora que o ponto (q_1^*, q_2^*) está contido no seguimento cujo as extremidades são (q_1^0, q_2^0) e $(q_1^0 + h, q_2^2 + k)$.

Considere a equação abaixo:

$$\begin{aligned} g(1) =& g(0) + g^{'}(0) + \frac{g^{''}(t^*)}{2} \\ \Pi(q_1^0 + h, q_2^2 + k) =& \Pi(q_1^2, q_2^0) + \frac{\partial \Pi(q_1^0, q_2^2)}{\partial x} h + \frac{\partial \Pi(q_1^0, q_2^0)}{\partial q_2} k + \\ =& + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 \Pi(q_1^*, q_2^*)}{\partial q_1^2} h^2 + 2\frac{\partial \Pi(x^*, y^*)}{\partial^2 q_1 \partial q_2} hk + \frac{\partial \Pi(q_1^*, q_2^*)}{\partial^2 q_2^2} k^2\right] \end{aligned}$$

Por hipótese (q_1^0, q_2^0) é um ponto crítico. Portanto:

$$\frac{\partial \Pi(q_1^0, q_2^0)}{\partial q_1} = \frac{\partial \Pi(q_1^0, q_2^0)}{\partial q_2} = 0$$

Logo:

$$\Pi(q_1^0 + h, q_2^0 + k) = \Pi(q_1^0, q_2^0) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 \Pi(q_1^*, q_2^*)}{\partial q_1^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 \Pi(q_1^*, q_2^*)}{\partial q_1 \partial q_2} hk + \frac{\partial \Pi(q_1^*, q_2^*)}{\partial q_2^2} k^2\right]$$
$$\Pi(q_1^0 + h, q_2^0 + k) - \Pi(q_1^0, q_2^0) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 \Pi(q_1^*, q_2^*)}{\partial q_1^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 \Pi(q_1^*, q_2^8)}{\partial q_1 \partial q_2} hk + \frac{\partial \Pi(q_1^*, q_2^*)}{\partial q_2^2} k^2\right]$$

No entanto, por hipótese temos que:

$$\frac{\partial^2 \Pi(q_1, q_2)}{\partial q_1^2} > 0 \qquad\qquad H(q_1^0, q_2^0) > 0$$

Em especial temos:

$$\frac{\partial^2 \Pi(q_1^*, q_2^*)}{\partial q_1^2} > 0 \qquad\qquad H(q_1^*, q_2^*) > 0$$

Mais uma vez considera que podemos reescrever a forma quadrática $Q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$ da seguinte forma:

$$Q(h,k) = a\left(h + \frac{bk}{a}\right)^2 + a\frac{(ac-b^2)}{a^2}k^2$$

Onde $a = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2}$, $b = 2\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2 \partial q_1}$ e $c = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2}$.

Podemos notar que vale a afirmação abaixo:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 \Pi(q_1^*, q_2^*)}{\partial q_1^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 \Pi(q_1^*, q_2^8)}{\partial q_1 \partial q_2}hk + \frac{\partial \Pi(q_1^*, q_2^*)}{\partial q_2^2}k^2\right] > 0$$

Uma vez que por hipótese $a > 0$ e $ac - b^2 > 0$.

Portanto:

$$\Pi(q_1^0 + h, q_2^0 + k) - \Pi(q_1^0, q_2^0) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 \Pi(q_1^*, q_2^*)}{\partial q_1^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 \Pi(q_1^*, q_2^8)}{\partial q_1 \partial q_2}hk + \frac{\partial \Pi(q_1^*, q_2^*)}{\partial q_2^2}k^2\right] > 0$$

Donde podemos deduzir, pela diferença $(\Pi(q_1^0 + h, q_2^0 + k) - \Pi(q_1^0, q_2^0))$, que (q_1^0, q_2^0) é um ponto de mínimo.

O próximo passo é demonstrar a parte (2) do teorema. O leitor deve notar que empregando o mesmo raciocínio que usamos para demonstrar a parte (1) podemos chegar até a afirmação abaixo:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 \Pi(q_1^*, q_2^*)}{\partial q_1^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 \Pi(q_1^*, q_2^8)}{\partial q_1 \partial q_2}hk + \frac{\partial \Pi(q_1^*, q_2^*)}{\partial q_2^2}k^2\right] < 0$$

Pois, por hipótese:

$$\frac{\partial^2 \Pi(q_1^*, q_2^*)}{\partial q_1^2} < 0 \qquad\qquad H(q_1^0, q_2^0) > 0$$

Logo podemos verificar que:

$$\Pi(q_1^0 + h, q_2^0 + k) - \Pi(q_1^0, q_2^0) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 \Pi(q_1^*, q_2^*)}{\partial q_1^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 \Pi(q_1^*, q_2^8)}{\partial q_1 \partial q_2}hk + \frac{\partial \Pi(q_1^*, q_2^*)}{\partial q_2^2}k^2\right] < 0$$

Donde podemos deduzir pela diferença $(\Pi(q_1^0 + h, q_2^0 + k) - \Pi(q_1^0, q_2^0))$ que (q_1^0, q_2^0) se trata de um ponto de máximo.

Quando $H = 0$ podemos ter um ponto de máximo, de mínimo ou de sela. Portanto, nada

podemos dizer acerca de (q_1^0, q_2^0). O que demonstra a parte (4) do teorema.

□

Para garantir a convergência de séries de funções, um temos que levar em conta as seguintes propriedades:

Definição 11 (Convergência Uniforme). *Dizemos que uma serie de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica em $|f_n(x) - f_x| < \epsilon$, para qualquer $x \in X$.*

Considere também o seguinte teorema, para garantir que podemos derivar a série de funções termo a termo, que pode ser encontrado em [Lima, 2000].

Teorema 7.1.3. *Segundo [Lima, 2000] seja $\sum f_n$ uma série de funções deriváveis num intervalo $[a, b]$. Se $\sum f_n(c)$ converge para um certo $c \in [a, b]$ e a série $\sum f_n^{'} = g$ converge uniformemente em $[a, b]$, então $\sum f_n = f$ converge uniformemente em $[a, b]$ e f é derivável, com $f^{'} = g$.*

7.1.2 Sistemas Dinâmicos Discretos

O leitor certamente observou que a teoria dos sistemas dinâmicos discretos se fez fortemente presente em grande parte do trabalho. Por esse motivo é interessante que dediquemos um apêndice para apresentar os resultados e definições referentes a esse conteúdo que foram relevantes no desenvolvimento da dissertação.

A primeira definição sobre a qual falaremos nesse apêndice é a mais fundamental. Trata-se de uma definição formal e com rigor matemáticos para os sistemas dinâmicos discretos.

Definição 12 (Sistema Dinâmico Discreto). *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, segundo [Cipolli, 2012], definimos um sistema dinâmico discreto de primeira ordem como sendo a sequencia de números reais representada por $q(t)$, onde $t \in \mathbb{N}$, tal que cada elemento da sequencia, para $t > 1$, se relaciona com o anterior através da seguinte equação:*

$$q(t + 1) = f(q(t)); \tag{7.1.7}$$

Além disso, os sistemas dinâmicos discretos possuem classificações e é possível separa-los em dois grupos. São eles, os sistemas dinâmicos autônomos e não autônomos. Veja a seguir a definição:

Definição 13 (Sistemas Dinâmicos Autônomos). *Segundo [Zhang, 2006] uma equação autônoma é aquela que pode ser escrita da seguinte forma:*

$$q(t + 1) = f(q(t))$$

Podemos representar um sistema dinâmico discreto autônomo pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{cases} q_1(t+1) = & a_{1,1}q_1(t) + a_{1,2}q_2(t) + \cdots + a_{1,k}q_k(t) \\ q_2(t+1) = & a_{2,1}q_1(t) + a_{2,2}q_2(t) + \cdots + a_{2,k}q_k(t) \\ \quad \cdots & \qquad\qquad\qquad \cdots \\ q_k(t+1) = & a_{1,k}q_1(t) + a_{k,2}q_2(t) + \cdots + a_{k,k}q_k(t) \end{cases}$$

Definição 14 (Sistemas Dinâmicos Não Autônomos)**.** *Segundo [Zhang, 2006] uma equação não autônoma é aquela que pode ser escrita da seguinte forma:*

$$q(t+1) = f(q(t), t)$$

E para tanto vamos apresentar uma serie de definições e exemplos pertinentes para essa demonstração.

Definição 15 (Ponto De Equilíbrio.)**.** *Segundo [Cipolli, 2012], dizemos que um ponto $q(t)$ é um ponto de equilíbrio de uma relação de recorrência do tipo $q(t+1) = f(q(t))$ quando depois dele não existe mais variação na relação recorrência com variação do estado t para $t+1$, ou seja $q(t) = q(t+1)$;*

Antes que possamos continuar considere as seguintes definição,

Definição 16. *Segundo [Morais et al., 2014], o conjunto $(t, q), t \in \mathbb{N}$ e $q(t)$ dado por $q(t+1) = f(q(t))$ é chamado de mapa.*

Definição 17. *Segundo [Morais et al., 2014], a sequência gerada pelas iterações sucessivas de um mapa, $q(0), q(1), q(2), \ldots, q(t)$ é chamada de órbita ou trajetória do sistema a partir de $q(0)$*

Existe um teorema bastante simples que nos ajuda a encontrar o ponto de equilíbrio de uma relação de recorrência: Veja a seguir:

Teorema 7.1.4 (Equilíbrio De Um Sistema Dinâmico Discreto)**.** *Segundo [Cipolli, 2012] um número q^* é um ponto de equilíbrio se e somente se $f(q^*) = q^*$*

Demonstração. ($\Rightarrow$): Considerando que q^* é um ponto de equilíbrio, sabemos que $q(t+1) = q(t) = q^*$. Logo $q(t+1) = f(q(t)) \implies q^* = f(q^*)$.

($\Leftarrow$) Considere que $f(q0) = q0$ e que $q(1) = q0$, logo podemos verificar que a relação de recorrência resultará na seguinte sequencia.

$$\begin{gathered} q(2) = f(q(1)) = f(q0) = q0 \\ q(3) = f(q(2)) = f(q0) = q0 \\ \vdots \\ q(t) = f(q(t-1)) = f(q0) = q0 \\ q(t+1) = f(q(t)) = f(q0) = q0 \end{gathered}$$

Logo temos que $q(t) = q(t+1)$. Portanto $q0$ é um ponto de equilíbrio.

□

Exemplo: Considere a seguinte relação de recorrência:

$$q(t+1) = (q(t))^3 \tag{7.1.8}$$

Para encontrar o ponto de equilíbrio vamos usar o teorema teoequi e considerar $q(t+1) = q(t) = q^*$. Veja a seguir

$$q^* = (q^*)^3 \implies q^*(1 - (q^*)^2) \tag{7.1.9}$$

Donde temos que $q^* \in \{-1, 0, 1\}$ são os pontos de equilíbrio.

Os pontos de equilíbrio não são idênticos e existem formas de classifica-lo. Veremos a seguir uma definição que dá conta de representar um tipo de ponto de equilíbrio bastante importante para se estudar a estabilidade de sistemas dinâmicos:

Definição 18 (Ponto De Equilíbrio Estável)**.** *Segundo [Cipolli, 2012] Um ponto de equilíbrio q^* é dito estável se dado ϵ existe δ tal que $|q(0) - q^*| \leq \delta$ implica em $|f(q(n)) - f(q^*)| \leq \epsilon$, para $\forall n > 0$, onde $n \in \mathbb{Z}^+$. Na linguagem matemática:*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 || q_0 - q^*| < \delta \implies |f(q(t)) - f(q^*)| < \epsilon, \forall n > 0.$$

Vejamos um exemplo:

Considere a seguinte relação de recorrência, $q(t+1) = 0.5q(t) + 0.5 = f(q(t))$.

Tomando $q(t+1) = q(t)$ podemos verificar que o ponto de equilíbrio da relação é 1. Suponha agora que $q(0) = a_0 \in (1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$, logo:

$$\begin{aligned}
q(1) = 0.5a_0 + 0.5 &\leq 1 + \epsilon = \delta \\
q(2) = 0.5^2(a_0 + 0.5) + 0.5 &\leq 1 + \epsilon = \delta \\
q(3) = 0.5^3(a_0 + 0.5) + 0.5^2 + 0.5 &\leq 1 + \epsilon = \delta \\
q(4) = 0.5^4(a_0 + 0.5) + 0.5^3 + 0.5^2 + 0.5 &\leq 1 + \epsilon = \delta \\
&\vdots \\
q(t) = 0.5^t(a_0 + 0.5) + 0.5^{t-1} + 0.5^{t-2} + \cdots + 0.5 &\leq 1 + \epsilon = \delta
\end{aligned}$$

Como $|f(q(t)) - f(q^*)| \leq \delta$ temos que o ponto de equilíbrio é estável.

Definição 19 (Ponto De Equilíbrio Instável)**.** *Um ponto que não é estável é chamado de instável.*

Definição 20 (Ponto De Atração.). *Segundo [Cipolli, 2012], o ponto de equilíbrio q^* é dito ponto de atração se $\exists \mu > 0$ tal que $|q(0) - q^*| < \mu \implies \lim_{n\to\infty} q(n) = q^*$. Com linguagem matemática,*

$$\exists \mu > 0 || x_0 - x^*| < \mu \implies \lim_{t\to\infty} f(q(t)) = q^*$$

Vejamos um exemplo:

Considere a seguinte relação de recorrência $q(t+1) = 0.5q(t) + 0.5 = f(q(t))$. Pelo exemplo dado anteriormente sabemos que o ponto de equilíbrio dessa dinâmica é 0.5. Suponha que $q(0) = a_0 \in |q(0) - q^*| < \mu$. Logo

$$q(t) = 0.5^t(a_0 + 0.5) + 0.5^{t-1} + 0.5^{t-2} + \cdots + 0.5 \leq 1 + \mu$$

Fazendo $\lim_{t\to\infty} f(q(t))$ chegamos a 0.5. Portanto 0.5 é um ponto de atração.

Definição 21 (Equilíbrio Assintoticamente Estável). *Um ponto de equilíbrio q^* é dito assintoticamente estável se é estável e é atrator.*

Teorema 7.1.5 (Critério De Estabilidade.). *Seja q^* um ponto de equilíbrio da seguinte relação de recorrência*

$$q(t+1) = f(q(t))$$

Onde $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1. Logo, segundo [Cipolli, 2012]:

I. Se $|f'(q^*)| < 1$, então q^* é assintoticamente estável.

II. Se $|f'(q^*)| > 1$, então q^* é instável.

Demonstração. (i) Suponto que $|f'(q^*) - q^*| \leq b < 1$. Então existe um intervalo da reta $I = (q^* - \epsilon, q^* + \epsilon)$, contendo q^* tal que $\forall q \in I$ temos $|f'(q) - q| \leq b < 1$. Faremos essa demonstração por indução e para isso precisamos demonstrar, primeiramente, que se $q(0) = a_0$ está no intervalo I, então $|q(1) - q^*|$ é menor que $|q(0) - q^*|$, ou seja $q(1)$ está mais próximo do ponto de equilíbrio q^* do que $q(0)$. Para algum $a_0 \in I$ temos que

$$|q(1) - q^*| = |f(q(0)) - q^*|$$

Pois $q(n) = f(q(n-1))$

Aplicando o teorema teoequi e substituindo q^* por $f(q^*)$:

$$|q(0) - q^*| = |f(q(0)) - f(q^*)|$$

Usando o Teorema do Valor Médio, podemos dizer que existe um número x_0 entre $q(0)$ e q^* tal que

$$|q(1) - q^*| = |f(q(0)) - f(q^*)| = |f'(x_0)||q(0) - x^*|$$

Sabemos que x_0 está entre $q(0)$ e x^*, e portanto $x_0 \in I$. Logo, $|f'(x_0)| \leq b < 1$. E por consequência

$$|q(1) - q^*| = f'(x_0)|q(0) - q^*| \leq b|q(0) - q^*| < |q(0) - q^*|$$

De forma análoga

$$|q(2) - q^*| \leq b|q(1) - q^*| \leq b^2|q(0) - q^*| < |q(0) - q^*|$$

Se $q(1)$ está mais próximo de q^* que $q(0)$, então $q(1)$ também deve estar no intervalo I. Disso podemos deduzir por indução, que a seguinte relação é verdadeira

$$|q(k) - q^*| \leq b^k|q(0) - q^*|$$

Supondo que $|q(k) - x^*| \leq b^{k-1}|q(0) - q^*|$ chegamos na desigualdade abaixo.

$$\begin{aligned} |q(k) - q^*| = f(q(k-1) - q^*) = |f(q(k-1)) - f(q^*)| = |f'(a_0)||q(k-1) - q^*| \\ \leq b|q(k-1) - q^*| \leq b.b^{k-1}|q(0) - q^*| \leq b^k|q(0) - q^*| \end{aligned}$$

Sabendo que $b < 1$ e que $\lim_{k\to\infty} b^k = 0$, temos que

$$\lim_{k\to\infty} |q(k) - q^*| = 0$$

O que é equivalente a dizer que :

$$\lim_{k\to\infty} q(k) = q^*$$

Portanto q^* é assintoticamente estável. O que conclui a primeira parte da demonstração.

(ii) A segunda parte da demonstração pode ser construída com um pensamento muito parecido com aquele feito na primeira parte. Suponha que $|f'(q^*)| \geq b > 1$. Então existe um intervalo $I = (q^* - \epsilon, q^* + \epsilon)$ contendo q^* tal que $|f(q^*)| > b > 1$ para $\forall q \in I$. Seja $q(0) = a_0 \in I$. Iremos mostrar que existe algum número k tal que $q(k)$ não está no intervalo I. Primeiramente mostraremos que $|q(1) - q^*|$, ou seja, $q(1)$ está mais afastado de q^* do que $q(0)$. Usando o teorema do valor médio encontramos a seguinte igualdade

$$|q(1) - x^*| = |f(q(0)) - f(x^*)| = |f'(k)||q(0) - x^*|$$

No entanto, sabemos que $|f'(q_0)| > b > 1$ e portanto

$$|q(1) - q^*| = |f'(a_0)||q(0) - q^*| > b|q(0) - q^*| > |q(0) - q^*|$$

Se $q(1)$ não está no intervalo I, então a demonstração está concluída. Se $q(1)$ está no intervalo I então repetimos o processo. Logo:

$$|q(2) - q^*| > b|q(1) - q^*| > b^2|q(0) - q^*| > |q(0) - q^*|$$

Usando novamente o processo de indução ou algum $q(k)$ não está no intervalo I ou

$$|q(k) - q^*| > b^k|q(0) - q^*|$$

Vamos supor que $|q(k-1) - q^*| > b^{k-1}|q(0) - q^*|$. Portanto

$$|q(k) - q^*| = |f(q(k-1)) - q^*| = |f(q(k-1)) - f(q(q^*))| = |f(q_1)||q(k-1) - q^*| > \\ b|q(k-1) - x^*| > b.b^{k-1}|q(0) - q^*| > b^K|q(0) - q^*|$$

Sabendo que $b > 1$, temos $\lim_{k\to\infty} |q(k) - q^*| = \infty$, ou seja, q^* é instável.

□

Quando se trata de sistemas em que $q_i(t+1)$ depende não apenas de $q_i(t)$, mas também de outras variáveis $q_{j_1}, q_{j_2}, \ldots, q_{j_n}$, o teorema a cima não da conta de verificar a estabilidade da dinâmica. Portanto é preciso que hajam outros critérios para que estudemos a estabilidade dos pontos de equilíbrio de um sistema dinâmico discreto com mais de uma dimensão. Nesse sentido vamos apresentar o seguinte teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [Luís and Rodrigues, 2017].

Teorema 7.1.6. *[Estabilidade para sistemas dinâmicos discretos] Considere o ponto de equilíbrio* $(q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*)$ *do sistema abaixo,*

$$\begin{cases} q_1(t+1) = & f_1(q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t)) \\ q_2(t+1) = & f_2(q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t)) \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ q_n(t+1) = & f_n(q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t)) \end{cases}$$

Considere também que as funções f_i *são de classe* C^1 *e que* λ_i *são os autovalores da matriz jacobiana do sistema.*

Então, são validas as seguintes afirmações:

1. *Se* $max(|\lambda_i|) < 1$, *então* $(q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*)$ *é localmente assintoticamente estável.*
2. *Se* $max(|\lambda_i|) > 1$, *então* $(q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*)$ *é instável.*
3. *Se* $max(|\lambda_i|) = 1$, *então nada podemos afirma a respeito do ponto.*

Definição 22 (Variação.). *Considere uma função $V : \mathbb{R}^{\kappa} \to \mathbb{R}$, a variação de V em relação a um sistema dinâmico discreto, $x(t+1) = f(x(t))$, é definido da seguinte maneira,*

$$\begin{aligned}\Delta V =& V(f(x)) - V(x) \\ \Delta V_t =& V(f(x(t))) - V(x(t)) = \qquad\qquad V(x(t+1)) - V(x(t))\end{aligned}$$

Agora podemos definir um tipo de função bastante especial para o estudo de estabilidade

Definição 23 (Função de Liapunov). *Uma função $V : \mathbb{R}^{\kappa} \to \mathbb{R}$ é dita função de Liapunov em $H \in \mathbb{R}^{\kappa}$ associada a uma dinâmica $x(t+1) = f(x(t))$ se:*

i V é continua em H

ii $\Delta V(t) \leq 0$, sempre que $x \in H$ e $f(x) \in H$

Definição 24 (Bola Aberta). *Segundo [Zibiani, 2015] definimos um bola aberta em $\mathbb{R}^{\gtrdot}$ de centro q e raio γ, denotada por $B(q, \gamma)$, da seguinte maneira,*

$$B(q, \gamma) = \{x \in \mathbb{R}^{\gtrdot} | ||q - x|| \leq \gamma\}$$

Onde,

$$||q|| = \left(\sum_{i=1}^{n} q_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + \cdots + q_i^2}$$

Definição 25 (Função Semi Definida Positiva). *De acordo com [Zibiani, 2015], dizemos que a função V semi definida positiva em $B(q^*, \gamma)$ se $V(q) \geq 0$, $\forall q \in B(q^*, \gamma)$.*

Definição 26 (Função Definida Positiva). *Segundo [Zibiani, 2015], uma função V é dita definida positiva em $B(q^*, \gamma)$ quando,*

i $V(q^*) = 0$.

ii $V(q) > 0$, $\forall q \in B(q^*, \gamma), q \neq q^*$.

Com as definições devidamente apresentadas, possuímos todo o embasamento teorica para apresentar o próximo teorema.

Teorema 7.1.7 (Estabilidade De Liapunov). *Segundo [Zibiani, 2015],se V é uma função de Liapunov numa vizinhança aberta H do ponto de equilíbrio q^* de um sistemas de equações de diferenças autônomo $q(t+1) = f(q(t))$, e V é definida positiva em H, então q^* é estável. Se, além disso, $\Delta V(q) < 0$ sempre que $q \in H$ e $f(q) \in H$ e $q^* \neq q$, então q^* é assintoticamente estável.*

Demonstração. Tome $\alpha_{1_1} > 0$ de modo que $B(q^*, \alpha_{1_1}) \subset H$. Como f é continua existe $\alpha_{1_2} \in \mathbb{R}$. $0 < \alpha_{1_2} < \alpha_{1_1}$ tal que $f(q) \in B(q^*, \alpha_{1_1})$ sempre que $\alpha_{1_1} \in q \in B(q^*, \alpha_{1_2})$. Dado $\epsilon \in \mathbb{R}$, $0 < \epsilon \leq \alpha_{1_2}$ defina,

$$\psi(\epsilon) = mim\{V(q) | \epsilon \leq ||q - q^*|| \leq \alpha_{1_1}\}$$

Considerando o teorema da conservação do sinal sabemos que $0 < \delta < \epsilon$ tal que $V(q) < \psi(\epsilon)$, sempre que $||q - q^*|| < \delta$. De fato, considere $g(q) = V(q) - \psi(\epsilon)$ em H, logo, $g(q^*) = -\psi(\epsilon) < 0$. Sabendo que g é contínua, e considerando o Teorema da Conservação do Sinal, portanto $\delta\mathbb{R}$, $0 < \delta < \epsilon$ tal que $g(q) < 0$ sempre que $x \in B(q^*, \delta)$, em outras palavras, $g(q) = V(q) - \psi(\epsilon) < 0$, e isso implica em $V(q) < \psi(\epsilon)$.

Desse modo, caso tenhamos $q_0 \in B(q^*, \delta)$ logo $q(t) \in B(q^*, \epsilon)$. De fato se $q_0 \in B(q^*, \delta)$ então $V(q_0 < \psi(\epsilon))$. Como V é, por hipótese, uma função de Liapunov, $\Delta V(q) \geq 0$, logo $V(q(t)) \geq \cdots \geq < \psi(\epsilon)$, então $q(t) \in B(q^*, \epsilon)$ $\forall t \geq 0$. Portanto, q^* é estável. Caso contrário existem $q_0 \in B(q^*, \delta)$ e um $m \in \mathbb{Z}_+^*$ tal que $q_r \in B(q^*, \epsilon)$ para $1 \geq r \geq m$ e $q_{m+1} \notin B(q^*, \epsilon) \subset B(q^*, \alpha_{1_2})$ e f é contínua, segue que $q(m+1) \in B(q^*, \alpha_{1_1})$, portanto $V(q(m+1)) \geq \psi(\epsilon)$. Contudo, $\Delta V(q) \geq 0$, logo $V(q(m+1)) \geq V(q(m)) \geq \cdots \geq V(q_0) < \psi(\epsilon)$, o que é uma contradição. Portanto, concluímos que q^* é estável.

Resta provar que q^* é assintoticamente estável e para fazer isso assuma $q_0 \in B(q^*, \delta)$, então $q(t) \in B(q^*, \epsilon)$, $\forall n \geq 0$. Se a sequência $q(t)$ não convergir para q^*, então existirá $\epsilon > 0$ de modo que para todo $t_0 \in \mathbb{N}$ existirá um $t \in \mathbb{N}$ tal que $||q(t) - q^*|| \geq \epsilon$. Entretanto, $q(t)$ é limitado, visto que, se $M = ||q^*|| + \epsilon$, temos:

$$\forall \epsilon > 0. \exists \delta > 0 | q_0 \in B(q^*, \delta) \implies q(t) \in B(q^*, \epsilon)$$

Ou seja,

$$||q(t)|| - ||q^*|| \leq ||q(t) - q^*|| < \epsilon$$

O que implica

$$||q(t)|| < \epsilon + ||q^*|| = M, \forall t \in \mathbb{N}.$$

Logo, se $q(t)$ é limitada, existe uma subsequência $(q(t_k))$ convergente.
Suponha que $q(t_k) \to x$, $y \in \mathbb{R}^{>}$. Seja $E \subset B(q^*, \alpha_{1_1})$ uma vizinhança de x,com

$$q^* \in E$$

Definida em E

$$h(q) = \frac{V(f(q))}{V(q)}$$

Como $\Delta V(q) < 0$, $V(f(q)) < V(q)$, portanto $h(q) < 1$, para todo $q \in E$. Além disso $x \in E$

o que implica $h(x) < 1$. Se $\mu \in (h(x), 1)$ existe $\alpha_1 > 0$ tal que $q \in B(x, \alpha_1)$ implica $h(q) < \mu$. De fato, tome $0 < \epsilon = \mu - h(x)$, como h é contínua, existe $\alpha_1 > 0$ tal que $q \in B(x, \alpha_1)$ implica $h(q) \in B(h(x), \epsilon)$. Deste modo,

$$h(x) - \epsilon < h(q) < h(x) + \epsilon \implies h(q) + [\mu - h(x)] \implies h(q) < \mu$$

Como $q(t_k) \to x$, para $\epsilon = \alpha_1 > 0$, $\exists t_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_k \geq t_0 \implies q(t_k) \in B(x, \alpha_1)$.
Logo,

$$h(q(t_k)) < \mu \implies V(q(t_{k+1})) < \mu V(q(t_k)).$$

Assim, para $t_k \geq t_0$

$$0 < V(t_k) < \mu V(q(t_{k-1})) < \mu^2 V(q(t_{k-2})) < \cdots < \mu^{t_k - t_0} V(q(t_0)) \tag{7.1.10}$$

Como $\mu < 1$, pelo teorema do confronto

$$\lim_{t_k \to \infty} V(q(t_k)) = 0 \tag{7.1.11}$$

Considerando que $q(t_k) \to x$ e V é contínua em H, temos:

$$\lim_{t_k \to \infty} V(q(t_k)) = V(x) \tag{7.1.12}$$

Por (7.1.11) e (7.1.12) e pela unicidade do limite, $V(x) = 0$. Como V é definida positiva em H e $x \in E \subset B(q^*, \alpha_{1_1}) \subset H$, então

$$x = q^* \tag{7.1.13}$$

Sabendo que $q \notin E$ e considerando 7.1.12 chegamos a uma contradição. Portanto a sequência $q(t)$ converge para q^*. □

Vejamos um exemplo. Considere o seguinte sistema dinâmico discreto,

$$\begin{cases} q_1(t+1) = & \frac{\alpha_1 q_2(t)}{1+\alpha_2 q_1^2} \\ q_2(t+1) = & q_1(t) \end{cases}, \alpha_2 > 0$$

Tomando $q_1(t) = q_1(t+1)$ e $q_2(t) = q_2(t+1)$, podemos verificar que ponto $(0,0)$ é um ponto de equilíbrio. E para analisar a estabilidade desse ponto considere a função abaixo,

$$\Delta V(q_1, q_2) = q_1^2 + q_2^2$$

A função é claramente continua e definida positiva em torno do ponto $(0,0)$. Portanto podemos dizer que $(0,0)$ é um ponto estável. Para saber se ele é também assintoticamente estável,considere ΔV,

$$\begin{aligned}\Delta V(q_1(t), q_2(t)) =& q_1^2(t+1) + q_2^2(t+1) - q_1^2(t) - q_2^2(t)\\ \Delta V(q_1(t), q_2(t)) =& \left(\frac{\alpha_1 q_2(t)}{1+\alpha_2 q_1^2}\right)^2 + q_1(t)^2 - q_1^2(t) - q_2^2(t)\\ \Delta V(q_1(t), q_2(t)) =& \frac{\alpha_1^2 q_2(t)^2}{\left(1+\alpha_2 q_1^2\right)^2} - q_1^2(t)\end{aligned}$$

Donde podemos verificar que,

$$\Delta V(q_1(t), q_2(t)) = \left(\frac{\alpha_1^1}{\left(1+\alpha_2 q_1^2\right)^2} - 1\right) q_1^2$$

Note que como $\alpha_2 > 0$ *vale a seguinte desigualdade,*

$$\left(\frac{\alpha_1^2}{\left(1+\alpha_2 q_1^2\right)^2} - 1\right) q_1^2 \leq \left(\alpha_1^2 - 1\right) q_1^2$$

Donde podemos verificar que o ponto $(0,0)$ *é assintoticamente estável se* $|\alpha_1^2| < 1$.

7.1.3 Apêndice 1 - Comandos Usados Para Construir A Simulação Do Processo De Ajuste.

O script abaixo foi escrito para o softwere octave. As variáveis x e y representam respectivamente a produção da firma um e dois. As funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$ representam e as funções $fd(x, y)$ e $gd(x, y)$ representam o lucro marginal dessas mesmas firmas respectivamente.

```
function lucroum = f(x,y)
lucroum = (3-y-x)*x-x;
endfunction
function lucrodois = g(x,y)
lucrodois = (3-x-y)*y-y;
endfunction
function diflucroum = fd(x,y)
diflucroum = (-2*x+2-y)
endfunction
function diflucrodois = gd(x,y)
diflucrodois = (-2*y+2-x)
endfunction
Firmadois(1)=1;
Firmaum(1)=1;
for t=2:10
Firmaum(t)=Firmaum(t-1)+ r*fd(Firmaum(t-1),Firmadois(t-1));
Firmadois(t)=Firmadois(t-1)+r*gd(Firmaum(t-1),Firmadois(t-1));
endfor
plot(Firmaum);
```

Os gráficos referentes a simulação do processo de ajuste foram gerados com esse script. Para fazer isso foram atribuídos valores para o parâmetro r.

7.1.4 Apêndice 2 - Código utilizado Para Simular O Processo De Ajuste Melhor Resposta.

```
clear all
function reacaoum = f(y)
reacaoum = (2-y)/(2);
endfunction
function reacaodois = g(x,y)
reacaodois = (2-x)/(2);
endfunction
firmaum(1)=1;
firmadois(1)=1;
for t=2:13
firmaum(t)=f(firmadois(t-1));
firmadois(t)=g(firmaum(t-1));
endfor
graphics_toolkit("gnuplot");
plot(firmaum);
```

7.1.5 Apêndice 3 - Código Utilizado Para Simular O Processo De Ajuste De Puu

```
function lucroum = f(x,y)
lucroum = (3-y-x)*x-x;
endfunction
function lucrodois = g(x,y)
lucrodois = (3-x-y)*y-y;
endfunction
function diflucroum = fd(x,y)
diflucroum = (-2*x+2-y)
endfunction
function diflucrodois = gd(x,y)
diflucrodois = (-2*y+2-x)
endfunction
Firmadois(1)=1;
Firmaum(1)=1;
firmaum(2)=0.5
firmadois(2)=0.5
for t=3:20
firmaum(t)=firmaum(t-1)+
0.5*((f(firmaum(t-1),firmadois(t-1))-f(firmaum(t-2),firmadois(t-2)))/(firmaum(t-1)-firmaum(t-
2)));
firmadois(t)=firmadois(t-1)+
0.5*((g(firmaum(t-1),firmadois(t-1))-g(firmaum(t-2),firmadois(t-2)))/(firmadois(t-1)-
firmadois(t-2)));
endfor
plot(firmaum);
```

7.1.6 Apêndice 4 - Código Utilizado Para Construção Do Diagrama De Cobweb.

```
clear all close all
graphics_toolkit("gnuplot");
x(1)=x_0;
t=t_0:0.1:t_f;
y=t;
z=0.5*t+1/3;
hold on
xlabel('x(t)');
ylabel('x(t+1)');
plot(1)
plot(t,z);
plot(t,y);
for i=1:16
x(i+1)=x(i)+0.5*((2/3)-x(i)) ;
plot([x(i),x(i)],[x(i),x(i+1)]);
hold on
plot([x(i),x(i+1)],[x(i+1),x(i+1)]);
hold on
end
hold off
hold off
hold off
```