

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

**PROBLEMAS DE IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS NA
EQUAÇÃO FRACIONÁRIA DE EULER-BERNOULLI**

por

Elisa Ferreira Medeiros

Tese para obtenção do Título de
Doutora em Modelagem Computacional

Rio Grande, 09 de agosto, 2024.

Elisa Ferreira Medeiros

“PROBLEMAS DE IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS NA EQUAÇÃO FRACIONÁRIA DE EULER-BERNOULLI”

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Modelagem Computacional da Universidade
Federal do Rio Grande - FURG, como requisito
parcial para obtenção do Grau de Doutor. Área
de concentração: Modelagem Computacional.

Aprovado em: 09/08/2024

BANCA EXAMINADORA



Documento assinado digitalmente

ADRIANO DE CEZARO

Data: 30/09/2024 19:18:42-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Adriano De Cezaro (Orientador - FURG)



Documento assinado digitalmente

FABIANA TRAVESSINI DE CEZARO

Data: 30/09/2024 19:13:25-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Fabiana Travessini De Cezaro (Coorientadora - FURG)



Documento assinado digitalmente

MATHEUS JATKOSKE LAZO

Data: 30/09/2024 17:54:12-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Matheus Jatkoske Lazo (FURG)



Documento assinado digitalmente

LILIANE BASSO BARICHELLO

Data: 24/09/2024 17:32:29-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Liliane Basso Barichello (UFRGS)



Documento assinado digitalmente

Antonio Carlos Gardel Leitaó

Data: 30/09/2024 18:24:33-0300

CPF: ***.830.017-**

Verifique as assinaturas em <https://v.ufsc.br>

Prof. Dr. Antonio Carlos Gardel Leitaó (UFSC)

Ficha Catalográfica

M488p Medeiros, Elisa Ferreira.
Problemas de identificação de parâmetros na equação fracionária
de Euler-Bernoulli / Elisa Ferreira Medeiros. – 2024.
95 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande –
FURG, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional,
Rio Grande/RS, 2024.
Orientador: Dr. Adriano de Cezaro.
Coorientadora: Dra. Fabiana Travessini de Cezaro.

1. Equação de Euler-Bernoulli 2. Problemas inversos 3. Derivadas
não clássicas 4. Meio fractal 5. Base viscoelástica I. Cezaro, Adriano
de II. Cezaro, Fabiana Travessini de III. Título.

CDU 004.4

Catalogação na Fonte: Bibliotecária Simone Tarouco Przybylski CRB 10/1166

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus e a Nossa Senhora de Fátima por me protegerem e pelas oportunidades que me foram dadas.

Agradeço ao meu orientador, professor Adriano e a minha coorientadora, professora Fabiana, por tudo o que me ensinaram ao longo desses anos, pela paciência e por terem acreditado em meu trabalho e dedicação.

Agradeço a minha família, em especial a minha mãe Maria Helena e meu marido Rafael, por terem sempre me incentivado e me apoiado, mesmo nos dias mais sombrios desses anos em que eu mesma não confiava no meu potencial.

Agradeço aos meus amigos e colegas por escutarem minhas preocupações e meus desabafos e de forma direta ou indireta me motivarem a perseguir meu sonho. Em especial: a Marline pela ajuda tão importante na implementação final do código, mas mais ainda, por nossa parceria ter virado amizade; ao meu amigo Félix que sempre esteve disponível para me ajudar, para me ouvir e me incentivar ao longo desses anos; a minha amiga Bruna por seu carinho infinito e por todos os momentos em que me desesperei e encontrei apoio e incentivo.

Aos membros da banca professores Antonio, Liliane e Matheus, por terem contribuído para a melhoria deste trabalho.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional e à Universidade Federal do Rio Grande e a todos os professores que contribuíram para a minha formação ao longo desses anos.

RESUMO

Nesta tese analisamos problemas inversos de identificação de coeficientes ou fontes associados a medidas da deflexão de uma viga modelada pela equação de Euler-Bernoulli, com derivadas de ordem não clássicas, que descrevem a viga em um meio fractal ou material viscoelástico no qual a viga está apoiada. Para a viga estática em meio fractal, estudamos o problema inverso de identificação do coeficiente de rigidez através de medidas indiretas da deflexão da viga. Apresentamos o problema na forma de uma equação de operadores (parâmetros para medidas), para o qual provamos, em topologias apropriadas, propriedades importantes como continuidade, compacidade, Fréchet diferenciabilidade e injetividade. Em particular, a injetividade garante que temos um único coeficiente associado a deflexão da viga no meio fractal (identificabilidade única). Por se tratar de um problema instável em relação às medidas, mal-posto segundo Hadamard, provamos que métodos iterativos como Landweber e Steepest Descent são estratégias de regularização. Tais resultados são complementados por exemplos numéricos. Para o modelo dinâmico da viga apoiada em uma base viscoelástica, obtemos resultados de identificação única do termo forçante $f(x)$, com uma forçante da forma $f(x)g(t)$, através do conhecimento de um conjunto de medidas do deslocamento da viga em um determinado intervalo maximal de tempo. Este intervalo é determinado em termos da ordem da derivada fracionária α , que descreve a base viscoelástica e dos coeficientes do modelo, o que estende os resultados de identificação única de fonte obtidas por Kawano em [23].

Palavras-chave: equação de Euler-Bernoulli, problemas inversos, derivadas não clássicas, meio fractal, base viscoelástica.

ABSTRACT

In this thesis, we analyze the inverse problems of identifying coefficients or sources associated with measurements of the deflection of a beam modeled by the Euler-Bernoulli equation with derivatives of non-classical order, which describe the beam in a fractal medium or viscoelastic material in which the beam is located. supported. For the static beam in a fractal medium, we studied the inverse problem of identifying the stiffness coefficient through indirect measurements of the beam deflection. We present the problem in the form of a parameter operator equation for measurements, for which we prove, in appropriate topologies, important properties such as continuity, compactness, Fréchet differentiability, and injectivity. In particular, injectivity guarantees that we have a single coefficient associated with the deflection of the beam in the fractal medium (unique identifiability). Because it is an unstable problem in relation to measurements, poorly posed according to Hadarmad, we prove that iterative methods such as Landweber and Steepest Descent are regularization strategies. Such results are complemented by numerical examples. For the dynamic model of the beam supported on a viscoelastic base, we obtain results of unique identification of the forcing term $f(x)$ with a forcing of the form $f(x)g(t)$ through the knowledge of a set of measurements of the beam displacement in a given maximum time interval. This range is determined in terms of the order of the fractional derivative α , which describes the viscoelastic basis, and the model coefficients, which extend the unique source identification results obtained by Kawano in [23].

Keywords: Euler-Bernoulli equation, inverse problem, non-classical derivatives, fractal medium, viscoelastic basis.

ÍNDICE

1	Introdução	11
2	Identificação do coeficiente de rigidez na equação de Euler-Bernoulli para meios fractais	16
2.1	Meios fractais e mecânica do contínuo	16
2.2	Dedução da equação de Euler-Bernoulli em meios fractais	20
2.3	Solução para o problema direto e propriedades do operador parâmetro para solução.	22
2.3.1	Problema Direto: existência e unicidade para $u(x)$	23
2.4	Problema direto como uma equação de operador e suas propriedades	26
2.5	Injetividade para o operador parâmetro-para-solução: Unicidade de recuperação do coeficiente $a(x)$	37
2.6	Regularização por Métodos Iterativos para o coeficiente de rigidez	39
2.6.1	Exemplos Numéricos - Landweber e Steepest Descent	41
3	Regularização para o coeficiente de rigidez constante por partes	52
3.1	Estratégia tipo Level-Set de regularização	53
3.1.1	Exemplos Numéricos	55
4	Equação dinâmica de Euler-Bernoulli em uma base viscoelástica	61
4.1	Modelo dinâmico para uma viga apoiada em uma base viscoelástica	61
4.1.1	Existência de solução para o modelo	63
4.1.2	Resultado de identificabilidade para o problema inverso	68
5	Considerações Finais e Trabalhos Futuros	72
5.1	Trabalhos Futuros	73
A	Material Complementar	74
A.1	Estratégia para identificação do termo forçante em uma equação de Euler-Bernoulli dinâmica (sem derivadas fracionárias)	74
A.1.1	Problema Direto	75
A.1.2	Problema Inverso	76
A.2	Um pouco da teoria de problemas inversos	80
A.3	Métodos de Regularização	82
A.4	Noções básicas da Teoria de Semigrupos	83
A.5	Um pouco da teoria dos Fractais	84
A.5.1	Medida e Dimensão de Hausdorff	87

A.6Um pouco da teoria de Cálculo Fracionário	89
--	----

LISTA DE FIGURAS

2.1	Coeficiente reconstruído $a^\delta(x)$, sem regularização, para um nível de ruído $\delta = 0.0001$	30
2.2	Coeficiente reconstruído a_k^δ pelo método de Landweber para $\delta = 10^{-4}$ com diferentes iterações k	43
2.3	Solução do problema direto u_k e Erro $\ u_e - u_{k*}\ $	43
2.4	Coeficiente recuperado a_{k*}^δ para diferentes níveis de ruídos δ	44
2.5	Coeficiente recuperado a_{k*}^δ para $\delta = 10^{-4}$ e seu erro absoluto.	45
2.6	Coeficiente reconstruído a_{k*}^δ pelos métodos de Landweber e Steepest Descent para $\delta = 10^{-6}$	46
2.7	Coeficiente recuperado a_{k*}^δ para diferentes níveis de ruídos δ	46
2.8	Coeficiente recuperado a_{k*}^δ para $\delta = 10^{-4}$ e seu erro absoluto.	47
2.9	Coeficiente reconstruído a_{k*}^δ pelos métodos de Landweber e Steepest Descent para $\delta = 10^{-6}$	48
2.10	Solução do problema direto u_k e Erro $\ u_e - u_{k*}\ $	48
2.11	Coeficiente recuperado a_{k*}^δ para diferentes níveis de ruídos δ	49
2.12	Coeficiente recuperado a_{k*}^δ para $\delta = 10^{-4}$ e seu erro absoluto.	50
2.13	Coeficiente reconstruído a_{k*}^δ pelos métodos de Landweber e Steepest Descent para $\delta = 10^{-6}$	50
2.14	Solução do problema direto u_k e Erro $\ u_e - u_{k*}\ $	51
3.1	Coeficiente reconstruído $a_k^\delta = P_\varepsilon(\phi_k)$ em dois níveis de iterações com nível de ruído $\delta = 0,001$	58
3.2	Coeficiente reconstruído $a_k^\delta = P_\varepsilon(\phi_k)$ em dois níveis de iterações com nível de ruído $\delta = 0,001$	59
3.3	Coeficiente reconstruído $a_k^\delta = P_\varepsilon(\phi_k)$ em dois níveis de iterações com nível de ruído $\delta = 0,01$	59
3.4	Coeficiente reconstruído $a_k^\delta = P_\varepsilon(\phi_k)$ em dois níveis de iterações com nível de ruído $\delta = 0,01$	60
A.1	Representação do modelo direto e inverso	81
A.2	(a) Construção da curva de Kock F . (b) Três curvas de Koch juntas para formar a curva snowflake. Retirada de [15]	86
A.3	Conjunto F e duas δ -coberturas possíveis para F . O ínfimo de $\sum U_i ^s$ sobre todas as coberturas $\{U_i\}$ nos dá $\mathcal{H}_\delta^s$. Fonte: [15]	87
A.4	A dimensão de Hausdorff é o valor de s quando ocorre o salto de ∞ para 0. Fonte: [15]	89

LISTA DE TABELAS

2.1	k^* obtido em cada nível de ruído δ para a Figura 2.4.	45
2.2	k^* obtido em cada nível de ruído δ para a Figura 2.7.	47
2.3	k^* obtido em cada nível de ruído δ para a Figura 2.11.	49
3.1	Algoritmo Level Set.	58

LISTA DE SÍMBOLOS

$m(W)$	Massa de uma região W .
D	Dimensão fractal.
dV_D	Elemento infinitesimal de volume no espaço fractal.
dS_d	Elemento infinitesimal de superfície no espaço fractal.
dl_α	Elemento infinitesimal de linha no espaço fractal.
dV_3	Elemento infinitesimal de volume no espaço Euclidiano.
dS_2	Elemento infinitesimal de superfície no espaço Euclidiano.
dx_i	Elemento infinitesimal de linha no espaço Euclidiano.
$M(x)$	Momento fletor.
$V(x)$	Força de cisalhamento.
E	Módulo de elasticidade.
I	Momento de área.
L	Comprimento da viga.
$u(x)$	Deflexão.
$a(x)$	Coefficiente de rigidez.
$c(x)$	Coefficiente de transformação do meio fractal para o meio contínuo.
A^*	Operador adjunto de A .
A^{-1}	Operador inverso de A .
F'	Operador derivada de Fréchet do operador F .
δ	Nível de ruídos.
τ	Parâmetro de relaxamento do método de Landweber.
ρ	Densidade de massa.
$v(t, x)$	Deflexão da viga.
N	Termo de força axial.
${}_0\partial_t^\alpha v(t, x)$	Derivada parcial fracionária de Caputo.
$q(t, x)$	Força atuante.

1 INTRODUÇÃO

As vigas são um dos principais elementos em quase todos projetos de engenharia, pois são as responsáveis por suportarem diversos tipos de carregamentos [17, 21]. Devido à sua função de suporte, inúmeros estudos à respeito das propriedades estruturais das vigas e de sua capacidade de carga têm sido conduzidos, principalmente, quando envolvem análises de segurança e confiabilidade dessas estruturas.

Na mecânica, muitos pesquisadores se dedicam ao estudo mais tradicional das vigas, numa abordagem que chamaremos de problema direto, o qual consiste em obter a resposta da deflexão, deformação, torção, etc, de uma viga, quando se conhece a força atuante no sistema e os parâmetros da estrutura [17, 21, 24, 32]. Em termos matemáticos, a obtenção de uma solução para o problema direto significa obter uma solução para a equação que governa o comportamento da viga, quando a força aplicada, os parâmetros do sistema e as condições iniciais e de contorno são conhecidas.

Por outro lado, uma outra abordagem tem despertado o interesse de vários pesquisadores. Essa outra proposta envolve o estudo de técnicas para o diagnóstico de possíveis danos ou desgastes internos nas estruturas de uma viga quando são conhecidas medidas (não destrutivas), por exemplo, de sua deformação ou deflexão. Esta abordagem é chamada de problema inverso. Em [31, 32, 36, 37] foi identificado o parâmetro de rigidez da viga a partir de medidas da deflexão e conhecida a força atuante.

Em relação ao problema de identificação do parâmetro de rigidez, [31] uma equação explícita para obter o parâmetro, utilizando as funções de Green. Como essa equação depende da derivada dos dados (o que é um problema bem instável) foram propostos métodos de regularização como Molificação e Landweber para estabilizar o problema ocasionado pela diferenciação. Em [36] também foi apresentado uma equação explícita a fim de obter o coeficiente do tipo constante por partes. No entanto, a abordagem utilizada necessitou do conhecimento dos pontos da viga onde os coeficientes mudaram de valor. Tal hipótese significa conhecer, previamente, os exatos lugares onde a viga sofreu rupturas, perdendo o sentido prático de tal análise. Além disso, como ocorre em [31], a equação proposta por [36], também dependeu da derivada dos dados.

Já em [32] foi apresentado o método de Tikhonov de primeira ordem para estabelecer uma aproximação estável para o coeficiente em relação as medidas da deflexão. Diferentemente dos outros trabalhos mencionados anteriormente, [32] apresentou um resultado de identificabilidade única para o coeficiente de rigidez a partir do conhecimento da deflexão. Tal resultado se aplica apenas para coeficientes que sejam, pelo menos, continuamente diferenciáveis em todos os pontos da viga. Visando atacar o mesmo problema, [37] propôs um resultado de unicidade para um coeficiente de rigidez menos suave que [32], garantindo a identificação de coeficientes mais gerais como, por exemplo, coeficientes constante por partes. Além disso, utilizou do método iterativo de Landweber para obter aproximações estáveis para o coeficiente de rigidez.

Já em [18, 23, 24, 20] foi realizada uma outra análise envolvendo a equação dinâmica da viga. Em [23] foi analisado o problema de identificação da distribuição de fontes de vibração assíncronas e perturbações de rigidez em vigas de Euler-Bernoulli. O autor mostrou que a parte do termo forçante dependente da variável espacial x pode ser identificada unicamente através do conhecimento do deslocamento de uma viga, em um intervalo de tempo arbitrário. Com isso, foi possível mostrar que perturbações na rigidez podem ser determinadas de maneira única em um problema linearizado. Em [24] foi analisado o problema inverso de identificação da rigidez e densidade de uma viga de Euler-Bernoulli, estendendo o que havia sido estudado por [18] e [2]. Ou seja, através da observação de medidas do deslocamento e inclinação da extremidade livre de uma viga engastada em outra extremidade, em um pequeno intervalo de tempo, foi obtido um resultado único para o problema não linear de identificação desses coeficientes.

Na literatura, existem alguns modelos que descrevem o comportamento de elementos estruturais como vigas, seja a partir de análises estáticas ou dinâmicas. Dentre as teorias clássicas da mecânica do contínuo para vigas destacam-se a teoria de Euler-Bernoulli e a teoria de Timoshenko [17, 21, 42, 47]. A teoria de Timoshenko considera os efeitos de deformação por cisalhamento e inércia rotatória, não considerados na teoria de Euler-Bernoulli. Ambos modelos são descritos por equações diferenciais de ordem inteira.

Em contrapartida, essa teoria convencional da mecânica do contínuo é incapaz de prever efeitos de tamanho bem como a teoria clássica dos materiais não consegue captar o comportamento de diversos materiais utilizados em aplicações modernas e recentes em engenharia e ciências físicas como polímeros, espumas, matéria macia de hidrogéis, tecidos biológicos em componentes de micro e nano-escalas. Esses materiais apresentam desvios significativos nas suas características mecânicas e reológicas dos convencionais, estudadas e modeladas pela teoria clássica dos materiais, e.g., [10, 11] referências.

Muitos autores apontam que derivadas e integrais de ordem não inteira são muito mais adequados para descrever as propriedades de vários materiais reais como os listados acima, veja [10, 11, 41] e referências. Esses modelos são a forma generalizada dos modelos clássicos e portanto, são capazes de descrever melhor o comportamento dos materiais que os modelos de ordem inteira [41].

Com relação a teoria de vigas sob essa nova ótica, em [41] foi apresentado o gradiente de deformação da tensão usando uma definição modificada de derivada fracionária [27]. A teoria dinâmica de vigas fracionárias de Euler-Bernoulli foi feita com base nessa definição e possui dois parâmetros livres: o parâmetro fracionário, que controla a derivada do deslocamento na relação deslocamento-tensão, e o parâmetro tamanho de escala, que considera os efeitos na escala micro e sub-micro. Para o parâmetro fracionário igual a um, a equação clássica de Euler-Bernoulli foi obtida. Já em [44] foi apresentado uma generalização da teoria de vigas estáticas com base na formulação de [41]. Foi definido o gradiente de deformação através de um operador de diferenciação de ordem real. Dessa forma, a formulação da conservação do momento, assim como as medidas de tensão e deformação, foram obtidas a partir da cinemática convencional das pequenas deformações.

A equação fracionária de Euler-Bernoulli estática obtida de uma abordagem variacional foi estudada em [3]. Foi apresentado uma equação contendo a derivada de Caputo à direita e à esquerda, simultaneamente. Essa equação foi transformada em uma integral e resolvida analítica e numericamente.

Um exemplo em que modelos fracionários foram utilizados com sucesso está no estudo de materiais viscoelásticos [3]. Esses materiais têm atraído a área de engenharia civil como uma forma de controlar a resposta indesejável de estruturas, servindo para o amortecimento de superfícies vibrantes. Em [33] foi analisado o comportamento dinâmico de uma viga de Euler-Bernoulli apoiada em uma base viscoelástica sob a ação de força estocástica. A técnica para obter a solução para a equação e as soluções propriamente apresentadas podem ser interpretadas como uma extensão dos resultados disponíveis na literatura para tratar o termo fracionário, o que tornou essa abordagem interessante devido à vasta utilização do cálculo fracionário na modelagem em mecânica.

Além disso, o intenso desenvolvimento científico e tecnológico despertaram o interesse da pesquisa no campo da nanotecnologia e a análise de estruturas em micro e nanoescalas, como as vigas. As vigas miniaturizadas são utilizadas em diferentes aplicações atuando como microatuadores, biosensores, como parte em sistemas nano e microeletromecânicos, como plataformas para sensores químicos e biológicos, na modelagem de nanotubos ou como componente central em microscópios de alta precisão [47].

A questão que surge quando os comprimentos das escalas associadas são suficientemente pequenas é a de que a aplicabilidade dos modelos contínuos clássicos, como Euler-Bernoulli e Timoshenko, pode não ser apropriada [47]. Ocorre que tanto as medições experimentais quanto os resultados de simulações mostraram que essas estruturas são sensíveis ao tamanho, principalmente quando se tornam muito pequenas [16, 47]. Assim, algumas teorias não clássicas têm sido analisadas com o intuito de estender a mecânica do contínuo a fim de que o fator de escala possa ser incluído de alguma forma. Alguns exemplos como a teoria da elasticidade não local de Eringen [13], teoria do gradiente de deformação [30], teoria da tensão acoplada [38], teoria da elasticidade de superfície [19]. A partir dos modelos clássicos e não clássicos têm surgido algumas propostas de modelos com modificações dos já existentes [47] e também modelos com derivadas não inteiras.

Alguns dos fatores que tornam a modelagem baseada nas teorias clássicas do contínuo em dúvida para esses casos envolvem os efeitos de microestrutura e energia de superfície de acordo com [16]. A superfície de um sólido é uma região com um conjunto próprio de átomos, propriedades físicas e respostas mecânicas diferentes daquelas da parte principal do sólido, o chamado *bulk* [47]. Quando o sólido tem tamanho grande, a proporção do volume da camada superficial para o volume do *bulk* é muito pequeno, podendo ser possível desprezar os efeitos da energia de superfície. No entanto, para estruturas em que a camada de superfície é maior, os efeitos de superfície podem influenciar no comportamento dessas estruturas em escalas menores.

Nesse sentido, a aplicação do cálculo fracionário vem crescendo em relação a modelagem do comportamento dos materiais dependentes de escala utilizando de estruturas fractais para

descrever a microestrutura. Em [40] foi apresentado a modelagem de meios fractais através da mecânica do contínuo utilizando uma dimensão regularizada baseada em [45]. Este método expressou as leis de equilíbrio para meios fractais usando termos de integrais fracionárias e depois converteu-os em ordem inteira no espaço euclidiano. A equação de Euler-Bernoulli para meios fractais foi apresentada com um novo parâmetro c_1 responsável pela transformação do termo fracionário para o inteiro. A relação entre momento fletor e curvatura foi mantida como no caso clássico.

Nosso interesse está na análise de problemas inversos de identificabilidade de coeficientes ou fontes associados a equação de Euler-Bernoulli com derivadas não clássicas. Mais precisamente, vamos estudar problemas inversos associados aos modelos de vigas em meios fractais e apoiadas em meios viscoelásticos como os apresentados em [39, 40] e [33] que, apesar de serem problemas envolvendo vigas de naturezas distintas, apresentam a derivada não clássica na própria equação ou nas relações que as constituem.

Estrutura do trabalho: Como analisaremos problemas de identificação relacionados a modelos distintos e para estabelecermos uma teoria matemática e numérica consistente, este trabalho será dividido da seguinte maneira:

No Capítulo 2, estudamos o problema inverso de identificação do coeficiente de rigidez da viga para a equação de Euler-Bernoulli para meios fractais. Para que o trabalho fique auto-contido, na Seção 2.1 apresentamos alguns conceitos físicos relacionados a mecânica do contínuo em meios fractais. Estes conceitos são fundamentais para deduzir a equação de Euler-Bernoulli para meios fractais na Seção 2.2. Na Subseção 2.3.1, provamos a boa colocação para o problema direto associado a equação de Euler-Bernoulli para meios fractais. Na Seção 2.4 escrevemos o problema como uma equação parâmetro-para-medidas e deduzimos propriedades importantes de tal operador, como continuidade, compacidade, Fréchet-diferenciabilidade e satisfação da condição do cone tangente. Os resultados de compacidade implicam que o problema de identificação do coeficiente de rigidez não é estável com relação as medidas, significando que pequenas perturbações (ruídos) nas medidas podem gerar grandes perturbações no coeficiente de rigidez. Portanto, alguma estratégia de regularização deve ser empregada. Resultados de continuidade, Fréchet diferenciabilidade e satisfação da condição do cone tangente garantem a convergência e estabilidade de métodos iterativos de regularização para o problema, como os apresentados na Seção 2.6 e comprovados numericamente na Subseção 2.6.1. Na Seção 2.5 provamos ainda a injetividade do operador parâmetro-para-medidas, o que resulta em identificação única do coeficiente de rigidez na equação de Euler-Bernoulli para meios fractais. Em particular, os resultados acima generalizam os resultados obtidos pela autora em sua dissertação de mestrado [37] para a equação de Euler-Bernoulli para meios fractais.

No Capítulo 3, estudamos um caso particular da equação apresentada no capítulo anterior para $c = 1$ e para coeficiente de rigidez a constante por partes. Como para essa situação os métodos iterativos não são adequados, utilizamos a abordagem tipo Level Set como um método de regularização na Seção 3.1. Apresentamos na Subseção 3.1.1 exemplos numéricos

que recuperam o coeficiente constante por partes através do método de Level Set.

No Capítulo 4, começamos o estudo da equação dinâmica de Euler-Bernoulli apoiada em uma base viscoelástica. Na Seção 4.1 apresentamos alguns conceitos gerais envolvendo a teoria da viscoelasticidade para introduzir a equação dinâmica de Euler-Bernoulli na base viscoelástica. Apresentamos a solução explícita do problema direto através dos conceitos de semigrupos da família seno e cosseno, tratando também o termo fracionário da equação na Subseção 4.1.1. Para atacar o problema inverso desse modelo, buscamos em [23] a estratégia utilizada para resolver problema semelhante, isso é apresentado na Subseção 4.1.2.

Com a intenção de tornar essa proposta auto contida, trazemos no Material Complementar uma série de conceitos e definições auxiliares ao estudo dessa proposta. Assim, apresentamos um pouco da teoria dos problemas inversos na Seção A.2, da teoria de fractais na Seção A.5 e na Seção A.6 do cálculo fracionário. Em relação ao modelo dinâmico estudado no Capítulo 4 apresentamos as principais ideias de [23] na Seção A.1 a fim de que o leitor possa explorá-las, caso necessário para entendimento da estratégia adotada para identificação do termo $f(x)$ e da teoria de Semigrupos em A.4.

Concluimos esta tese no Capítulo 5 apresentando as considerações finais e possíveis estudos futuros estendendo os problemas analisados nesse trabalho.

Contribuições do trabalho: Nos itens a seguir são apresentadas as principais contribuições deste trabalho.

- Provamos propriedades como compacidade, continuidade, Fréchet diferenciabilidade e a condição do cone tangente para a equação fractal do momento fletor de Euler-Bernoulli, generalizando o trabalho de mestrado de [37];
- Apresentamos um resultado de identificabilidade única para o parâmetro de rigidez da viga fractal de Euler-Bernoulli, resultado esse que só havia sido provado para a equação estática clássica em trabalhos de [32, 37];
- Provamos que os métodos iterativos de Landweber e Steepest Descent são estáveis e convergentes para a equação fractal da viga e corroboramos tal resultado através de simulações numéricas satisfatórias. Os métodos iterativos como Landweber já haviam sido utilizados para a recuperação do parâmetro de rigidez em [31, 37] apenas para a equação clássica de Euler-Bernoulli;
- Estendemos os resultados de identificação única de fonte obtidas por [23] para a equação dinâmica de Euler-Bernoulli com derivada fracionária. Essa equação foi apresentada por [33] e representa uma viga apoiada em uma base viscoelástica.

2 IDENTIFICAÇÃO DO COEFICIENTE DE RIGIDEZ NA EQUAÇÃO DE EULER-BERNOULLI PARA MEIOS FRACTAIS

Neste capítulo vamos apresentar a equação de Euler-Bernoulli para meios fractais segundo [39, 40]. Inicialmente, traremos as ideias básicas norteadoras para a obtenção da equação que modela o problema e a partir da qual é possível determinar o operador parâmetro-para-solução. A partir disso, dedicamos o restante deste capítulo para provar algumas propriedades importantes a respeito do operador parâmetro-para-solução, as quais darão suporte ao tratamento e análise do problema inverso de identificação do coeficiente de rigidez $a(x)$. Em particular, estas propriedades implicam na identificação única e darão suporte à determinação de estratégias estáveis e convergentes, chamadas de estratégias de regularização, para a recuperação do coeficiente de rigidez $a(x)$ com relação aos erros nas medidas que serão desenvolvidas nas Seções 2.5 e 2.6, respectivamente.

2.1 Meios fractais e mecânica do contínuo

A mecânica do contínuo estuda a aplicação das teorias da mecânica para avaliação e cálculo de meios contínuos, analisando os movimentos e a deformação de um meio composto por matéria (sólida, líquida ou gasosa). No entanto, sabemos que a matéria, composta de átomos e moléculas, não está distribuída de forma uniforme, ou seja, existem vazios. Na mecânica do contínuo essa característica é negligenciada quando a relação entre a distância média que uma partícula percorre antes de se chocar com outra e o comprimento característico que estabelece a escala de um sistema for muito menor que a unidade [47].

Além disso, também é observado qual a escala de análise do meio. A teoria da mecânica do contínuo pode ser aplicada para análises a partir da macroescala ($10^{-3}mm$), considerando uma média das variáveis da microescala ($10^{-6}mm$). O cálculo da densidade de massa (ρ) também pode ser utilizada para determinar quando a mecânica do contínuo em função da escala pode ser aplicada.

Para tal, considere a análise de um material sob uma escala l onde é observado regiões com distribuição irregular de massa e com vazios. Diminuindo essa escala para l' vamos observar que a densidade de massa irá variar. Contudo, quando existir uma região onde essa escala retorne uma densidade de massa constante é neste instante que a mecânica do contínuo pode ser aplicada.

Em [39, 40] é apresentado uma visão geral da modelagem de meios fractais pela mecânica do contínuo usando as ideias em [45], a qual foi denominada de método de regularização¹. O método expressa as leis de equilíbrio para meios fractais utilizando de integrais fracionárias e

¹Não confundir com métodos de regularização no sentido de problemas inversos, e.g. [22]

então, convertendo-as a ordem inteira no espaço Euclidiano convencional. O diferencial desta proposta é que a condição essencial da mecânica do contínuo, a separação de escalas, pode ser substituída com equações de campo do tipo contínuo ainda empregadas [40]. Esta abordagem foi aplicada, entre outras, à termomecânica, princípios extremos de elasticidade e plasticidade, mecânica de fratura e, para nosso interesse, na dinâmica de vigas fractais apresentando as equações de Timoshenko e Euler-Bernoulli.

A ideia básica para homogeneização do meio fractal para o contínuo surgiu com [45], em que a massa obedece a seguinte lei

$$m(R) \sim R^D, \quad D < 3, \quad (2.1.1)$$

com R sendo tamanho da medida da escala (pode ser do “box counting”² ou o raio da esfera) e D dimensão fractal da massa [45].

Em geral, um meio fractal não pode ser considerado como meio contínuo, pois existem pontos e domínios que não estão preenchidos por partículas do meio. Esses domínios podem ser chamados de porosos. Dessa forma, [45] propõe a utilização de integrais fracionárias para representar a massa de uma região W no espaço Euclidiano tridimensional $\mathbb{E}^3$ como sendo

$$m(W) = \int_W \rho(R) dV_D = \int_W \rho(R) c_3(D, R) dV_3, \quad (2.1.2)$$

com

$$c_3(D, R) = R^{D-3} \frac{2^{3-D} \Gamma(3/2)}{\Gamma(D/2)}, \quad R = \sqrt{x_i x_i}, \quad (2.1.3)$$

onde R é o tamanho do vetor posição e Γ é a função Gamma de Euler [39].

Na equação (2.1.2) a primeira integral é fracionária do tipo Riesz A.6.4 e a segunda é integral inteira (convencional).

O coeficiente c_3 estabelece a transformação entre essas integrais. O termo dV_D é elemento infinitesimal de volume no espaço fractal e dV_3 é o elemento infinitesimal de volume em $\mathbb{E}^3$. As derivadas generalizadas propostas por [45] são

$$\begin{aligned} \nabla_k^D f &= c_3^{-1}(D, R) \frac{\partial}{\partial x_k} [c_2(d, R) f] \equiv c_3^{-1}(D, R) \nabla_k [c_2(d, R) f], \\ \left(\frac{d}{dt} \right)_D f &= \frac{\partial f}{\partial t} + c(D, d, R) v_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

²A dimensão fractal pode ser melhor calculado pelo método do box counting, o que significa desenhar uma caixa cúbica de lados com tamanho R e contar a massa de dentro.

com os coeficientes na forma de Riesz dados por

$$\begin{aligned} c_2(d, R) &= |R|^{d-2} \frac{2^{2-d}}{\Gamma(d/2)}, \\ c_3(D, R) &= |R|^{D-3} \frac{2^{3-D} \Gamma(3/2)}{\Gamma(D/2)}, \\ c(D, d, R) &= c_3^{-1}(D, R) c_2(d, R). \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Importante ressaltar que, as equações (2.1.2) e (2.1.3) expressam a ideia de regularização dimensional [40] da teoria física. Tal método pode ser representado, para uma função $f(x)$, da seguinte forma:

$$\int_W f(x) d^D x = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \int_0^\infty f(x) x^{D-1} dx. \quad (2.1.6)$$

Ou seja, primeiramente o objeto fractal está inserido no espaço $\mathbb{E}^3$, mas sua dimensão espacial não é 3 e sim um número real $D < 3$. O mesmo ocorre com a superfície desse objeto, com dimensão fractal d , em que d não é necessariamente $D - 1$. Desse modo, as leis de equilíbrio são então escritas envolvendo integrais de volume e superfície sobre o objeto fractal e, através da regularização dimensional, é possível convertê-las para integrais convencionais [40].

Segundo [39, 40] o ponto principal dessa abordagem é desempenhado pelo Teorema de Green-Gauss para meios fractais como:

$$\int_{\partial W} f_k n_k dS_d = \int_W c_3^{-1}(D, R) \nabla_k (c_2(d, R) f_k) dV_D, \quad (2.1.7)$$

em que f_k é um campo vetorial e

$$dS_d = c_2(d, R) dS_2 \quad dV_D = c_3(D, R) dV_3. \quad (2.1.8)$$

Repare que substituindo dS_d e dV_D das equações acima nas integrais (2.1.7), é possível reescrevê-las obtendo

$$\int_{\partial W} c_2(d, R) f_k n_k dS_2 = \int_W \nabla_k (c_2(d, R) f_k) dV_3, \quad (2.1.9)$$

o que nos permite manipular as fórmulas novamente no espaço euclidiano, desde que tenhamos os coeficientes c_2 e c_3 .

Ocorre que a formulação desenvolvida apresenta algumas desvantagens de acordo com [40]. Por exemplo, as equações que regem os problemas em uma dimensão (a equação da onda, nesse caso) não podem ser consistentemente obtidas a partir das equações que regem problemas em três dimensões. Isso porque os coeficientes c_2 e c_3 são baseados na medida de Riesz.

Para contornar essa desvantagem, [40] estende o trabalho de [45] considerando meios fractais anisotrópicos mais gerais. Para isso, substitui a relação (2.1.1) por uma lei de potência mais geral em relação a cada coordenada, dada por:

$$m(L_1, L_2, L_3) \sim L_1^{\alpha_1} L_2^{\alpha_2} L_3^{\alpha_3}. \quad (2.1.10)$$

A seguinte medida é introduzida

$$dl_{\alpha_k}(x_k) = c_1^{(k)}(\alpha_k, x_k)dx_k, \quad k = 1, 2, 3 \quad (\text{n\~ao \acute{e} soma}) \quad (2.1.11)$$

em que a medida de comprimento ao longo de cada coordenada \acute{e} dada atrav\~es do coeficiente de transforma\~ao $c_1^{(k)}$. Com base em (2.1.11) \acute{e} poss\~ivel escrever a equa\~ao que representa a massa de uma regi\~ao W como

$$m(W) = \int_W \rho(x_1, x_2, x_3) dl_{\alpha_1}(x_1) dl_{\alpha_2}(x_2) dl_{\alpha_3}(x_3), \quad (2.1.12)$$

com dimens\~ao fractal total sendo $D = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ ao longo das diagonais $|x_1| = |x_2| = |x_3|$, onde cada α_k representa uma dimens\~ao fractal na dire\~cao x_k .

Observe que, de acordo com (2.1.11), o elemento de volume infinitesimal fractal dV_D ser\~a:

$$dV_D = dl_{\alpha_1}(x_1) dl_{\alpha_2}(x_2) dl_{\alpha_3}(x_3) = c_1^{(1)} c_1^{(2)} c_1^{(3)} dx_1 dx_2 dx_3 = c_3 dV_3, \quad (2.1.13)$$

com $c_3 = c_1^{(1)} c_1^{(2)} c_1^{(3)}$.

Para o coeficiente de transforma\~ao de superf\~icie $c_2^{(k)}$, [39] considera um elemento de volume c\~ubico cujos elementos de superf\~icie s\~ao especificados pelo vetor normal ao longo dos eixos i, j ou k . Dessa forma $c_2^{(k)}$ associado \`a $S_d^{(k)}$ \acute{e}:

$$c_2^{(k)} = c_1^{(i)} c_1^{(j)} = c_3 / c_1^{(k)}, \quad i \neq j, \quad i, j \neq k. \quad (2.1.14)$$

Com rela\~ao aos coeficientes de transforma\~ao $c_1^{(k)}$, [40] adota a integral de Riemann-Liouville modificada

$$c_1^{(k)} = \alpha_k \left(\frac{l_k - x_k}{l_{k0}} \right)^{\alpha_k - 1}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (\text{n\~ao \acute{e} soma}), \quad (2.1.15)$$

onde l_k \acute{e} o comprimento total (intervalo integral) ao longo de x_k e l_{k0} \acute{e} o comprimento caracter\~istico na dire\~cao dada (como o tamanho m\~edio dos poros).

Para finalizar a teoria proposta por [39, 40] de modo a subsidiar o que propomos neste cap\~itulo e a fim de desenvolver a mec\~anica do cont\~inuo para meios fractais (equa\~ao de Euler-Bernoulli nesse caso), considere a integral de superf\~icie

$$\int_{\partial W} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS_d = \int_{\partial W} f_k n_k dS_d, \quad (2.1.16)$$

em que a rela\~ao entre o elemento integral $\mathbf{n} dS_d$ e o elemento convencional $\mathbf{n} dS_2$ em $\mathbb{E}^3$ se dar\~a atrav\~es do coeficiente de transforma\~ao de superf\~icie $c_2^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$. Como $c_2^{(k)}$ n\~ao depende da coordenada x_k temos:

$$\int_{\partial W} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS_d = \int_{\partial W} f_k n_k dS_d = \int_W [f_k c_2^{(k)}]_{,k} dV_3 = \int_W \frac{f_{k,k}}{c_1^{(k)}} dV_D. \quad (2.1.17)$$

Observe que, $(\cdot)_{,k}$ é a derivada parcial de $(\cdot)$ com relação a x_k . Ainda, com base no que foi exposto e na equação (2.1.11), [40] define a derivada fractal, ∇_k^D , como sendo

$$\nabla_k^D = \frac{1}{c_1^{(k)}} \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (2.1.18)$$

Definida a derivada fractal, o teorema de Gauss para meios fractais é

$$\int_{\partial W} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS_d = \int_W \nabla_k^D f_k dV_D = \int_W (\nabla^D \cdot \mathbf{f}) dV_D. \quad (2.1.19)$$

A teoria de [40] apresentada é chamada de Homogeneização permitindo uma interpretação do meio fractal como um contínuo, sendo tratado como descontínuo, com uma métrica fractal inserida no modelo contínuo homogeneizado equivalente. Dessa forma, temos então dl_{α_i} , dS_d , dV_D como os elementos de linha, superfície e volume no meio fractal enquanto que dx_i , dS_2 , dV_3 , respectivamente, denotam esses elementos no meio homogeneizado. Os coeficientes $c_1^{(i)}$, $c_2^{(k)}$ e c_3 como sendo

$$dl_{\alpha_i} = c_1^{(i)} dx_i, \quad dS_d = c_2^{(k)} dS_2, \quad dV_D = c_3 dV_3 \quad (2.1.20)$$

permitem essa relação entre o meio fractal e o meio contínuo homogeneizado.

A seguir vamos apresentar a dedução da equação de Euler-Bernoulli a partir da equação de Timoshenko através da teoria apresentada até o presente momento.

2.2 Dedução da equação de Euler-Bernoulli em meios fractais

Dentre as teorias clássicas de vigas, destacam-se a teoria de Euler-Bernoulli e a teoria de Timoshenko [21, 42]. A teoria de Timoshenko inclui os efeitos de inércia rotatória e deformação por cisalhamento, enquanto a teoria de Euler-Bernoulli conhecida como teoria clássica desconsidera esses efeitos [21, 47].

Assim, partindo da análise da teoria de Timoshenko vamos denotar o deslocamento transversal como sendo $q_1 = u$ e a rotação por $q_2 = \varphi$. Assumido que estamos imersos em uma estrutura fractal de dimensão D na direção x , como visto acima, o elemento dx é substituído por

$$dl_D = c_1(D, x) dx, \quad (2.2.1)$$

onde, $c_1(x, D) = |x|^{D-1}/\Gamma(D)$, [39].

As energias cinética e potencial para o caso fractal são, respectivamente, dadas na forma

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_0^l [I(\dot{\varphi})^2 + A(\dot{u})^2] dl_D \quad (2.2.2)$$

e

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left[EI \left(\frac{\partial \varphi}{\partial l_D} \right)^2 + \kappa \mu A \left(\frac{\partial u}{\partial l_D} - \varphi \right)^2 \right] dl_D, \quad (2.2.3)$$

onde $\dot{\varphi} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, E é o módulo de elasticidade, I é o momento de inércia, A é a área da seção transversal, μ é o módulo de elasticidade transversal e κ é o coeficiente de cisalhamento de Timoshenko.

Vamos assumir que a carga externa distribuída e o momento distribuído são ambos nulos. Disto segue que a equação de Euler-Lagrange associada é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial L}{\partial (q_{i,j})} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (2.2.4)$$

Portanto, as equações que governam uma viga fractal de Timoshenko [39], são dadas por

$$\begin{aligned} \rho A c_1 \ddot{u} &= [\kappa \mu A (c_1^{-1} u_{,x} - \varphi)]_{,x}, \\ \rho I c_1 \ddot{\varphi} &= (EI c_1^{-1} \varphi_{,x})_{,x} + \kappa \mu A c_1 (c_1^{-1} u_{,x} - \varphi). \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Partindo da derivada generalizada apresentada em (2.1.4) que, para o caso unidimensional é escrita³ como $\nabla_x^D f = c_1^{-1} f_x = c_1^{-1} f'$, obtemos que as equações acima tomam forma,

$$\begin{aligned} \rho A \ddot{u} &= \nabla_x^D [\kappa \mu A (\nabla_x^D u - \varphi)] \\ \rho I \ddot{\varphi} &= \nabla_x^D (EI \nabla_x^D \varphi) + \kappa \mu A (\nabla_x^D u - \varphi), \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

respectivamente.

A equação da viga também pode ser escrita através da análise de equilíbrio das forças e dos momentos. Reescrevendo a equação da força de cisalhamento (V) e do momento fletor (M) para o caso fractal, seguindo o exposto em [39, 40], obtemos

$$V = \kappa \mu A (\nabla_x^D u - \varphi), \quad M = -EI \nabla_x^D \varphi. \quad (2.2.7)$$

Assim, é possível deduzir que as equações de equilíbrio são dadas da seguinte forma

$$\rho A \ddot{u} = \nabla_x^D V, \quad \rho I \ddot{\varphi} = V - \nabla_x^D M. \quad (2.2.8)$$

Repare que substituindo as equações (2.2.7) em (2.2.8) obtemos (2.2.6). Mostrando que a abordagem mecânica é de fato consistente com a abordagem energética [39].

Para o caso estático e quando os efeitos de rotação não estão incluídos ($\varphi = \partial u / \partial l_D = \nabla_x^D u$) temos a equação de Euler-Bernoulli para o caso fractal, dada por

$$\nabla_x^D \nabla_x^D (EI \nabla_x^D \nabla_x^D u) = 0 \quad (2.2.9)$$

³Nesta tese, as notações f_x ou f' referem-se a derivada de ordem 1 de $f(t, x)$ com relação a variável x .

em que

$$M = a(x) \nabla_x^D \nabla_x^D u \quad (2.2.10)$$

com coeficiente de rigidez $a = EI$.

As condições de contorno utilizadas para a equação (2.2.10) serão

$$u(0) = u'(0) \quad (2.2.11)$$

em que representa uma viga em balanço engastada na extremidade $x = 0$. Outra possibilidade seria que a viga fosse considerada estar engastada em $x = L$. Neste caso teríamos

$$u(L) = u'(L) = 0. \quad (2.2.12)$$

No caso de a viga estar bi-apoiada, em uma extremidade um pino e na outra um rolete, temos que as condições de contorno são

$$u(0) = u(L) = 0. \quad (2.2.13)$$

As condições de contorno (2.2.11)-(2.2.13) aparecem frequentemente. Essas condições representam tipos de estruturas estaticamente determinadas em que o momento fletor não depende da rigidez da estrutura. Nesse caso, é possível determinar como a carga é transferida através da estrutura para os apoios sem se preocupar com a rigidez em si. Já em estruturas indeterminadas, aquelas com outras condições, a rigidez afeta diretamente na forma como a carga é distribuída pelos apoios. Para maiores detalhes consulte [17, 21].

Com relação ao operador $\nabla_x^D \nabla_x^D$ temos que a equação de Euler-Bernoulli é dada por

$$\nabla_x^D \nabla_x^D u = c^{-1} (c^{-1} u'(x))', \quad (2.2.14)$$

em que $c = c(x)$ é o coeficiente de transformação possibilitando a substituição do meio fractal para o meio contínuo.

2.3 Solução para o problema direto e propriedades do operador parâmetro para solução.

Nesta seção provaremos resultados de existência e unicidade de uma solução $u(x) = u(x; a, c)$ para o problema (2.2.10), com condições de contorno (2.2.11)-(2.2.13). Esse problema pode ser caracterizado como o problema direto, o qual corresponde a obter a deflexão $u(x) = u(x; a, c)$, dados $a(x)$ e $c(x)$ para a viga em meio fractal, dadas ainda as condições de contorno (2.2.11)-(2.2.13).

Além disso, estabeleceremos algumas propriedades para a solução $u(x)$ que serão essenciais para o que desenvolveremos na primeira parte desta tese.

Para apresentarmos os resultados pertinentes à abordagem que temos em mente, faremos

as seguintes hipóteses.

Hipóteses Gerais:

A1) O coeficiente de rigidez $a = a(x)$ e o coeficiente de transformação $c = c(x)$ são funções mensuráveis em $[0, L]$ e que satisfazem a condição $\bar{a} \geq a(x) \geq \underline{a} > 0$ e $\bar{c} \geq c(x) \geq \underline{c} > 0$, para constantes $\bar{a}, \underline{a}, \bar{c}, \underline{c}$ conhecidas. Neste manuscrito, o conjunto de coeficientes que satisfazendo a hipótese **A1)** será denotado por Ad e chamado de conjunto admissível.

A1') O coeficiente de rigidez e o coeficiente de transformação além de satisfazerem **A1)** possuem $\|a'\|, \|c'\|$ uniformemente limitados, ou seja, os coeficientes pertencem ao conjunto $A = \{a, c \in L^\infty \mid \lambda_1 \leq a, c \leq \lambda_2, \|a', c'\| \leq Q\}$, onde $\|\cdot\|$ denota a norma $\mathcal{L}^2(0, L)$ com $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \infty$ e $Q > 0$.

A2) O momento fletor $M(x) \in C[0, L]$.

Para a análise que segue neste capítulo, consideraremos o seguinte espaço vetorial,

$$\mathcal{L}^2 := \{f \text{ mensurável, tal que } \int_0^L c^{-1}(x)(f(x))^2 dx < \infty\}.$$

Note que, pela regularidade de c^{-1} dada na hipótese **A1)**, implica que $\mathcal{L}^2$ é um espaço de Hilbert com relação ao seguinte produto interno

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{L}^2} = \int_0^L \sqrt{c(x)} f(x) \sqrt{c(x)} g(x) dx. \quad (2.3.1)$$

2.3.1 Problema Direto: existência e unicidade para $u(x)$

Nesta seção vamos mostrar que, dado o momento $M(x)$ satisfazendo a hipótese **A2)** e os coeficientes $a(x)$ e $c(x)$ satisfazendo a hipótese **A1)**, então existe uma única solução $u(x) = u(x; a, c)$ para o problema

$$a(x) \nabla_x^D \nabla_x^D u = M(x) \quad (2.3.2)$$

com condições de contorno (2.2.11)-(2.2.13). Faremos isso através da teoria de soluções fracas.

Neste trabalho, consideraremos como uma solução fraca para o problema (2.3.2) como sendo qualquer função $u \in \mathcal{H}^2[0, L] \cap \mathcal{H}_0^1[0, L]$ tal que

$$\int_0^L c^{-1} u' \phi' dx = \int_0^L \frac{M}{a} c \phi dx \quad (2.3.3)$$

qualquer que seja a função teste $\phi \in \mathcal{H}_0^1[0, L]$.

Lema 2.3.1. *Assuma que as hipóteses **A1)** e **A2)** sejam satisfeitas. Se existe u satisfazendo o problema de valor de contorno (2.3.2), então u é solução fraca para o problema (2.3.3). Reciprocamente, se u é uma solução fraca para o problema (2.3.3), então u satisfaz o problema de valor de contorno (2.3.2) quase sempre.*

Demonstração. Segue da Hipótese A2) que $M \in C[0, L]$. Assim, pela hipótese **A1)** temos que $c.M/a \in \mathcal{L}^2[0, L]$. Portanto, de (2.3.2), $u'' \in \mathcal{L}^2[0, L]$ e, assim, $u \in \mathcal{H}^2[0, L]$. Pelas condições de contorno temos que $u \in \mathcal{H}^2[0, L] \cap \mathcal{H}_0^1[0, L]$. Finalmente, segue diretamente da identidade de Green (veja [5]) que u satisfaz (2.3.3).

Reciprocamente, se $u \in \mathcal{H}^2[0, L] \cap \mathcal{H}_0^1[0, L]$ é uma solução fraca para o problema (2.3.2), então as condições de contorno para a equação (2.3.2) são satisfeitas. Além disso, como por hipótese u satisfaz (2.3.3), temos, depois de uma integração por partes (identidade de Green [5]) que

$$\langle -a \nabla_x^D \nabla_x^D u - M, \phi \rangle = \langle 0, \phi \rangle \quad \forall \phi \in C_0^\infty[0, L].$$

Da densidade de $C_0^\infty[0, L]$ em $\mathcal{H}^2[0, L] \cap \mathcal{H}_0^1[0, L]$, segue que $-a \nabla_x^D \nabla_x^D u = M$ quase sempre. $\square$

Dado o Lema 2.3.1, vamos mostrar através do teorema de Lax-Milgram [5, Corollary 5.8] a existência de uma única solução $u \in \mathcal{H}_0^1[0, L]$ que satisfaz (2.3.3). Para isso, definimos a forma bilinear $A : \mathcal{H}_0^1[0, L] \times \mathcal{H}_0^1[0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$A(u, \phi) := \int_0^L c^{-1} u' \phi' dx \quad (2.3.4)$$

e o seguinte funcional linear $l : \mathcal{H}_0^1[0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$l(\phi) := \int_0^L \frac{M}{a} c \phi dx. \quad (2.3.5)$$

Note que u é solução fraca de (2.3.2) se e somente se u satisfaz

$$A(u, \phi) = l(\phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{H}_0^1[0, L]. \quad (2.3.6)$$

Para provarmos o equivalente ao teorema de Lax-Milgram para o problema (2.3.3), temos que estabelecer alguns resultados auxiliares como os que seguem.

Lema 2.3.2. *Considerando as hipóteses **A1)** e **A2)** satisfeitas, temos que o funcional linear l definido em (2.3.5) é contínuo em $\mathcal{H}_0^1[0, L]$.*

Demonstração. Segue da definição do funcional l em (2.3.5) e da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$|l(\phi)| = \left| \int_\Omega \frac{M}{a} c \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}} \phi dx \right| \leq \int_\Omega \left| \frac{M}{a} c \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}} \right| |\phi| dx \leq \|\underline{a}^{-1}\|_{\mathcal{L}^\infty} \left\| \frac{c}{\sqrt{c}} \right\|_{\mathcal{L}^\infty} \|M\|_{\mathcal{L}^2} \|\phi\|_{\mathcal{L}^2} \leq K \|\phi\|_{\mathcal{L}^2}.$$

A imersão contínua de $\mathcal{H}^1[0, L]$ em $\mathcal{L}^2[0, L]$ (veja [5]) completa a demonstração. $\square$

O próximo lema mostra que a forma bilinear (2.3.4) é contínua e coerciva em $\mathcal{H}_0^1 \times \mathcal{H}_0^1$.

Lema 2.3.3. *Considerando as hipóteses **A1)** e **A2)** satisfeitas. Então, a forma bilinear A definida em (2.3.4) é contínua e coerciva em $\mathcal{H}_0^1[0, L] \times \mathcal{H}_0^1[0, L]$, ou seja, existem constantes*

$\underline{K}$ e $\overline{K}$, independentes de $\phi \in \mathcal{H}^1$ tais que:

$$\|A(u, \phi)\| \leq \overline{K} \|u\|_{\mathcal{H}^1} \|\phi\|_{\mathcal{H}^1}$$

e

$$A(u, u) \geq \underline{K} \|u\|_{\mathcal{H}^1}^2,$$

respectivamente.

Demonstração. Provaremos, primeiramente, a continuidade da forma bilinear. Segue das hipóteses **A1)** e **A2)**, da definição de A e da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned} |A(u, \phi)| &= \left| \int_0^L c^{-1} \frac{c}{c} u' \phi' dx \right| \leq \int_0^L \left| \frac{c}{c^2} \right| |u'| |\phi'| dx \leq \left| \frac{1}{c^2} \right| \int_0^L |\sqrt{c} u'| |\sqrt{c} \phi'| dx \leq \overline{K} \|u'\|_{\mathcal{L}^2} \|\phi'\|_{\mathcal{L}^2} \\ &\leq \overline{K} (\|u\|_{\mathcal{L}^2} + \|u'\|_{\mathcal{L}^2}) (\|\phi'\|_{\mathcal{L}^2} + \|\phi\|_{\mathcal{L}^2}) = \overline{K} \|u\|_{\mathcal{H}^1[0,L]} \|\phi\|_{\mathcal{H}^1[0,L]}, \end{aligned}$$

o que prova a continuidade da forma bilinear.

Para provar a coercividade, notemos que

$$\begin{aligned} A(u, u) &= \int_0^L c^{-1} u' u' \frac{c}{c} dx \\ &\geq \int_0^L c^{-2} |\sqrt{c} u'|^2 dx. \\ &\geq \underline{K} \|u\|_{\mathcal{H}^1[0,L]}^2. \end{aligned}$$

Agora, a desigualdade de Poincaré [5, Proposition 8.13] aplicada acima, conclui a demonstração da coercividade. $\square$

Teorema 2.3.4. *Sendo as hipóteses **A1)** e **A2)** satisfeitas, existe uma única solução do problema (2.3.3). Como consequência do Lema (2.3.1), existe uma única solução fraca para o problema (2.3.2).*

Demonstração. Sabemos que o funcional linear $l(\cdot)$ é contínuo pelo Lema (2.3.2) e que a forma bilinear $A(\cdot, \cdot)$ é contínua e coerciva em $\mathcal{H}_0^1[0, L]$ pelo Lema (2.3.3). Portanto, segue do Teorema de Lax-Milgram [5, Corollary 5.8] a existência de uma única função $u \in \mathcal{H}_0^1[0, L]$ que satisfaz (2.3.3). $\square$

Observação 2.3.1. *Vale comentar que, adaptando os espaços de Sobolev e a formulação fraca correspondente, os resultados dos Lemas 2.3.1-2.3.2-2.3.3 e o Teorema 2.3.4 permanecem verdadeiros para (2.2.10) com as demais condições de contorno, não apenas para (2.2.13).*

2.4 Problema direto como uma equação de operador e suas propriedades

Nesta seção escreveremos o problema direto dado por (2.2.10) como uma equação de operadores em espaço de funções apropriados. Como o problema (2.2.10) possui uma única solução, então o operador

$$\begin{aligned} F : Ad \subset L^2[0, L] &\longrightarrow \mathcal{L}^2[0, L] \\ a &\longmapsto u(a) \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

onde $u(a) = u(x; a, c)$ é a única solução de (2.2.10) está bem definido. Vale ressaltar aqui que o coeficiente $c(x)$ é assumido conhecido. Assim o operador F em (2.4.1) depende de $c(x)$. Por simplicidade denotaremos o operador em (2.4.1), simplesmente por F e não por F_c .

Para este operador, provaremos algumas propriedades importantes para a escolha do método de regularização que será aplicado posteriormente.

A seguir vamos mostrar que o operador F é contínuo em $\mathcal{L}^2[0, L]$.

Teorema 2.4.1. *Assuma que as hipóteses **A1**) e **A2** são satisfeitas. Então, o operador F em (2.4.1) é contínuo em $Ad \subset \mathcal{L}^2$.*

Demonstração. Como $\mathcal{L}^2[0, L]$ é um espaço separável, basta mostrarmos que para qualquer sequência $(a_n) \in Ad$ com $a_n \rightarrow a$ quando $n \rightarrow \infty$, tenhamos que $F(a_n) = u(a_n) := u_n \in \mathcal{H}_0^1$ solução de (2.2.10) com coeficiente de rigidez a_n , converge (em $\mathcal{L}^2[0, L]$) para $F(a) = u(a) := u$ solução de (2.2.10) com coeficiente de rigidez a , com $0 < \underline{a} \leq a_n \leq \bar{a} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Pela linearidade de (2.2.10), segue que a diferença $v_n := u_n - u$ satisfaz

$$\nabla_x^D \nabla_x^D v_n = -\frac{(a_n - a)}{a} \nabla_x^D \nabla_x^D u_n \quad (2.4.2)$$

com condições de contorno homogêneas (haja visto que ambas as equações para u_n e u possuem as mesmas condições de contorno). Em particular, segue que $v_n(0) = v_n(L) = 0$.

Usando a forma variacional como v_n a função teste, obtemos que

$$\int_0^L \sqrt{c} \nabla_x^D \nabla_x^D v_n \sqrt{c} v_n dx = \int_0^L \sqrt{c} \frac{(a_n - a)}{a} \nabla_x^D \nabla_x^D u_n \sqrt{c} v_n dx. \quad (2.4.3)$$

Como, por definição $\nabla_x^D \nabla_x^D v_n = c^{-1}(c^{-1}v_n')'$ teremos

$$\int_0^L c c^{-1}(c^{-1}v_n')' v_n dx = - \int_0^L c \frac{(a_n - a)}{a} \frac{M}{a_n} v_n dx. \quad (2.4.4)$$

Integrando por partes o lado esquerdo de (2.4.4) obtemos

$$c^{-1}v_nv'_n \Big|_0^L - \int_0^L c^{-1}v'_nv'_ndx = - \int_0^L c \frac{(a_n - a)}{a} \frac{M}{a_n} v_ndx.$$

Como $v_n \in \mathcal{H}_0^1$, o termo de fronteira se anula e

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{c}{c^2} v'_nv'_n &= \int_0^L c \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}} \frac{(a_n - a)}{a \cdot a_n} M v_ndx \\ \left| \frac{1}{c^2} \right| \|\sqrt{c}v'_n\|_{L^2[0,L]}^2 &= \int_0^L c \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}} \frac{(a_n - a)}{a \cdot a_n} M v_ndx \\ &\leq \frac{\bar{c}}{\underline{a}^2 \sqrt{\underline{c}}} \int_0^L |a_n - a| |M| |\sqrt{c}v_n| dx \\ &\leq \frac{\bar{c}K}{\underline{a}^2 \sqrt{\underline{c}}} \int_0^L |a_n - a| |\sqrt{c}v_n| dx \leq \tilde{K} \|a_n - a\|_{L^2[0,L]} \|\sqrt{c}v_n\|_{L^2[0,L]} \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

onde $\tilde{K} = \frac{\bar{c}K}{\underline{a}^2 \sqrt{\underline{c}}}$, pois M é função contínua em $[0, L]$.

Pela desigualdade de Poincaré [5, Proposition 8.13] aplicado a $v_n \in \mathcal{H}_0^1[0, L]$ obtemos

$$\|\sqrt{c}v_n\|_{H^1} \leq \tilde{K} \|a_n - a\|_{L^2} \quad (2.4.6)$$

onde $\tilde{K}$ é uma constante que depende somente de $\tilde{K}$ e da constante de Poincaré.

Assim, obtemos de (2.4.6) que se $a_n \xrightarrow{L^2} a$ então $v_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} 0$, provando assim que o operador F é contínuo de $L^2[0, L]$ para $\mathcal{L}^2[0, L]$. $\square$

A seguir vamos provar que este operador também é contínuo na topologia de $L^1[0, L]$, pelo menos no caso particular em que $c(x) = 1$. Para tal, segue um resultado auxiliar.

Lema 2.4.2. *Seja a uma função mensurável tal que $|a(x)| \leq K$ para todo x a.e. em $[0, L]$, para alguma constante $K > 0$. Então, $a \in L^s[0, L]$ para todo $1 \leq s < \infty$ e*

$$\|a\|_{L^s[0,L]} \leq K^{(s-1)/s} \|a\|_{L^1[0,L]}^{1/s}. \quad (2.4.7)$$

Em particular, o resultado deste Lema se aplica a $a(x)$ como em (3.0.2).

Demonstração. Basta observar que como $\|a\|_{L^s} = \left(\int |a(x)|^s dx \right)^{1/s}$ temos

$$\|a\|_{L^s[0,L]}^s = \int_\Omega |a(x)|^s dx = \int_\Omega |a(x)|^{s-1} |a(x)| dx \leq K^{s-1} \|a\|_{L^1[0,L]}. \quad (2.4.8)$$

$\square$

Teorema 2.4.3. *Seja $a(x)$ dado em (3.0.2). Então o operador (2.4.1) é contínuo na topologia de $L^1[0, L]$.*

Demonstração. Segue do Teorema 2.4.1 que o operador 2.4.1 é contínuo em $\mathcal{L}^2[0, L] = L^2[0, L]$, no caso em que $c(x) = 1$. Sendo assim, segue do Lema 2.4.2 que o teorema é verdadeiro. $\square$

No próximo teorema provamos que F é compacto em $\mathcal{L}^2[0, L]$.

Teorema 2.4.4. *Assumindo que as hipóteses **A1)** e **A2)** sejam satisfeitas. Então, o operador F definido em (2.4.1) é compacto de $Ad \subset L^2$ em $\mathcal{L}^2$.*

Demonstração. Seja $(a_k) \in Ad$ uma sequência convergindo fraco para a em L^2 . Como Ad é fechado e convexo, segue do Lema de Mazur[5, Corollary 3.8] que $a \in Ad$.

Denotaremos $F(a_k) = u(a_k) := u_k$ e $F(a) = u(a) := u$, respectivamente. De acordo com [29, Theorem 8.1-7], para mostrar a compacidade do operador F , basta mostrar que, se $(a_k) \xrightarrow{L^2} a$, então $u_k \rightarrow u$ em $\mathcal{L}^2$.

Por definição sabemos que u_k e u satisfazem

$$a_k \nabla_x^D \nabla_x^D u_k = M$$

e

$$a \nabla_x^D \nabla_x^D u = M$$

com condições de contorno homogêneas. Como feito anteriormente (subtraindo uma equação pela outra) obteremos

$$a_k(\nabla_x^D \nabla_x^D u_k - \nabla_x^D \nabla_x^D u) = -(a_k - a) \nabla_x^D \nabla_x^D u. \quad (2.4.9)$$

Integrando ambos os lados de (2.4.9) e multiplicando pela função $\varphi \in C_0^\infty[0, L]$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L a_k \sqrt{c} (\nabla_x^D \nabla_x^D u_k - \nabla_x^D \nabla_x^D u) \sqrt{c} \varphi dx &= - \int_0^L \sqrt{c} (a_k - a) \nabla_x^D \nabla_x^D u \sqrt{c} \varphi dx \\ \int_0^L c a_k (\nabla_x^D \nabla_x^D u_k - \nabla_x^D \nabla_x^D u) \varphi dx &= - \int_0^L (a_k - a) c a \frac{\nabla_x^D \nabla_x^D u}{a} \varphi dx \\ &= - \int_0^L (a_k - a) c \frac{M}{a} \varphi dx. \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Como a, c satisfazem as hipóteses **A1)** e **A2)**, segue da regularidade de M que $cM/a \in L^\infty[0, L] \subset L^2[0, L]$, já que $[0, L]$ é um subconjunto da reta real limitado. Desta forma, para $\varphi \in C_0^\infty$ obtemos que $cM/a \varphi \in L^2[0, L]$.

Assim, da hipótese de a_k convergir fraco para a em L^2 , segue que o lado direito de (2.4.10) converge para zero, isto é,

$$\int_0^L (a_k - a) c M \varphi dx \rightarrow 0 \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.4.11)$$

Diante disso, o lado esquerdo de (2.4.10) converge para zero no sentido das distribuições.

Assim, pela convergência dominada [5, Theorem 4.2] segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^L ca_k (\nabla_x^D \nabla_x^D u_k - \nabla_x^D \nabla_x^D u) \varphi dx = \int_0^L ac \lim_{k \rightarrow \infty} (\nabla_x^D \nabla_x^D u_k - \nabla_x^D \nabla_x^D u) \varphi dx = 0. \quad (2.4.12)$$

Pelo fato de $a, c \in Ad$, e da densidade de $C_0^\infty[0, L]$ em $\mathcal{L}^2[0, L]$, segue que $u_k \rightharpoonup u$ em $\mathcal{L}^2[0, L]$.

Seja $z \in \mathcal{L}^2[0, L]$ o limite fraco da diferença $u_k - u$. Portanto, juntando (2.4.10) e (2.4.12) obtemos, (após tomar o limite em (2.4.9) que z satisfaz

$$a \nabla_x^D \nabla_x^D z = 0 \quad (2.4.13)$$

com condições de contorno homogêneas. Como $a \in Ad$ e pelo Princípio do Máximo [5, Section 8.5] segue que

$$z \equiv 0 \quad \rightarrow \quad u_k - u \xrightarrow{\mathcal{L}^2} 0. \quad (2.4.14)$$

No entanto, tomando $\varphi = c(u_k - u)$, segue que $\|u_k - u\|_{\mathcal{L}^2[0, L]} \rightarrow 0$. Então, da convergência fraca e da convergência em norma, segue que $u_k \rightarrow u$ em $\mathcal{L}^2[0, L]$, provando assim que o operador F é compacto.

□

Vale ressaltar que o Teorema 2.4.4 implica que o problema inverso de recuperar $a(x)$, conhecido a deflexão $u(x)$ na equação de Euler-Bernoulli fractal (2.2.10) é mal posto no sentido de Hadamard, pois não há garantias de dependência contínua. Em outras palavras, o operador inverso de F (se existir) é não limitado. Assim, o problema inverso de recuperar $a(x)$ a partir das medidas corrompidas por ruído $u^\delta(x)$ da deflexão da viga que, no máximo podemos estimar que satisfazem

$$\|u^\delta - u(x)\|_{\mathcal{L}^2[0, L]} \leq \delta, \quad (2.4.15)$$

não é estável com relação ao nível de ruídos δ . A Figura 2.1 mostra que pequenas variações nos dados como u^δ podem acarretar em grandes perturbações na obtenção do coeficiente $a(x)$, falhando a propriedade de dependência contínua dos dados. Assim, a fim de obtermos soluções estáveis para o problema é necessário utilizar de alguma estratégia de regularização, o que faremos na Subseção 2.6.

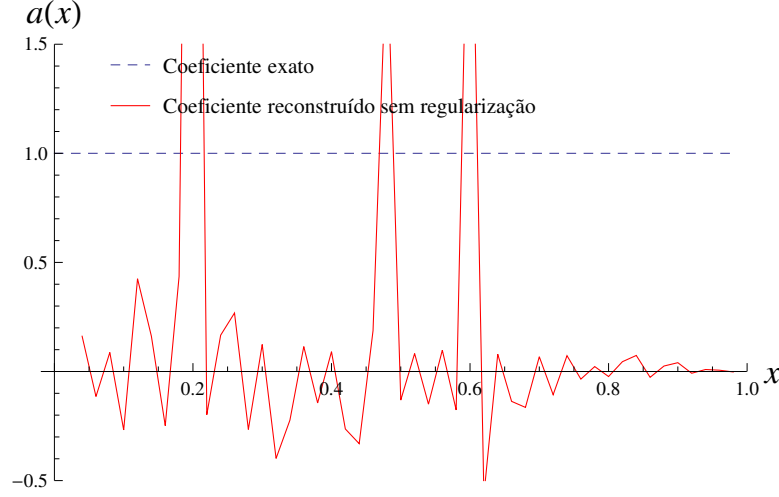


Figura 2.1: Coeficiente reconstruído $a^\delta(x)$, sem regularização, para um nível de ruído $\delta = 0.0001$.

No que segue, mostraremos mais alguns resultados que são necessários para garantir a convergência e estabilidade, com relação ao nível de ruídos δ , dos métodos de regularização apresentados na Seção 2.6.

Antes de apresentar os resultados principais, será necessário apresentar alguns lemas auxiliares.

Definição 2.4.1. *Seja $a, c \in Ad$. Definimos o operador $A(a)$, da seguinte forma*

$$\begin{aligned} A(a) : H^2[0, L] \cap H_0^1[0, L] &\longrightarrow \mathcal{L}^2[0, L] \\ u &\longmapsto A(a)u := -ac^{-1}(c^{-1}u')'. \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

Para o operador (2.4.16) temos o seguinte resultado.

Lema 2.4.5. *Considere as hipóteses **A1**, **A1'** e **A2** satisfeitas. Então $A(a)$ é um operador linear, limitado e bijetivo. Portanto, $A^{-1}(a)$ (o operador inverso de $A(a)$) está bem definido e também é um operador linear e limitado.*

Demonstração. Para provar que $A(a)$ é uma bijeção, tome $w \in \mathcal{L}^2[0, L]$. Como $a, c \in Ad$, segue do Teorema 2.3.4 que existe uma única solução $u \in H_0^1[0, L]$ de $-ac^{-1}(c^{-1}u')' = w$ com condições de contorno apropriadas. Além disso, da regularidade elíptica [5, Section 9.6] segue que $u \in H^2[0, L]$, o que conclui a afirmativa. Portanto, existe $A^{-1}(a)$.

Ainda nos falta provar que $A(a)$ é linear e limitado.

Para provar a linearidade, considere u e $v \in H^2[0, L] \cap H_0^1[0, L]$ e $k \in \mathbb{R}$. Então temos

$$\begin{aligned}
A(a)(u + kv) &= -ac^{-1}(c^{-1}(u + kv))' \\
&= -ac^{-1}[c^{-1}(u' + kv')] \\
&= -ac^{-1}[c^{-1'}(u' + kv') + c^{-1}(u'' + kv'')] \\
&= -ac^{-1}[c^{-1'}u' + c^{-1}u'' + kc^{-1'}v' + kc^{-1}v''] \\
&= -ac^{-1}[(c^{-1}u')' + k(c^{-1}v')'] \\
&= A(a)u + kA(a)v,
\end{aligned} \tag{2.4.17}$$

provando que o operador é linear.

Agora nos resta provar que $A(a)$ é limitado. Sabendo que $\|u\|_{\mathcal{H}^2} = \{\|u''\|_{\mathcal{L}^2} + \|u'\|_{\mathcal{L}^2} + \|u\|_{\mathcal{L}^2}\}$, obtemos

$$\left\| A(a)u \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}} \right\|_{\mathcal{L}^2[0, L]} = \left\| -ac^{-1}(c^{-1}u')' \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}} \right\|_{\mathcal{L}^2[0, L]} \leq \frac{\bar{a}c^{-1}}{\sqrt{c}} \|(c^{-1}u')'\|_{\mathcal{L}^2[0, L]} \leq \kappa \|u\|_{\mathcal{H}^2[0, L]} \tag{2.4.18}$$

com $\kappa = \frac{\bar{a}c^{-1}c^{-1'}}{\sqrt{c}}$ provando que $A(a)$ é limitada.

Por fim, o Teorema da Aplicação Aberta [29, Theorem 4.12-2]) garante que $A^{-1}(a)$ é linear e limitada. $\square$

O próximo lema é auxiliar para os passos que se seguem.

Lema 2.4.6. *Assuma que as hipóteses **A1**), **A1'**) e **A2**) sejam satisfeitas. Sejam $F(a) = u(a) := u$ e $F(\tilde{a}) = \tilde{u}(\tilde{a}) := \tilde{u}$ e $A(a)$ o operador definido em (2.4.16) então*

$$A(a)(u - \tilde{u}) = c^{-1}(c^{-1}\tilde{u}')'(\tilde{a} - a). \tag{2.4.19}$$

Demonstração. Por definição, u e $\tilde{u}$ satisfazem

$$-ac^{-1}(c^{-1}u')' = M, \quad -\tilde{a}c^{-1}(c^{-1}\tilde{u}')' = M \tag{2.4.20}$$

com as mesmas condições de contorno. Subtraindo as equação u e $\tilde{u}$ e usando a linearidade das equações, obtemos

$$A(a)(u - \tilde{u}) = c^{-1}(c^{-1}\tilde{u}')'(\tilde{a} - a).$$

$\square$

No que segue, vamos determinar o operador adjunto de $A(a)$, bem como o operador inverso do adjunto, denotado por $(A^{-1}(a))^*$, o qual aparecerá nas estimativas que serão estabelecidas posteriormente.

Lema 2.4.7. *Assuma as hipóteses **A1**) e **A2**) satisfeitas. O operador adjunto de $A(a)$ é tal que $A^*(a)v = -c^{-1}(c^{-1}(av))'$. Este é linear, limitado e possui inversa $(A^*(a))^{-1}$ linear e*

limitado, com $(A^*(a))^{-1} = (A^{-1}(a))^*$. Ainda, $(A^*(a))^{-1}w = v$, onde v é a única solução de $-c^1(c^{-1}(av)')' = w$, com condições de contorno homogêneas.

Demonstração. A existência de um operador adjunto $A^*(a)$, sua limitação, bem como a sua inversa ser linear e limitada e satisfazer $(A^*(a))^{-1} = (A^{-1}(a))^*$, seguem diretamente da teoria de operadores lineares limitados [29, Section 2.7] e do Lema 2.4.5. Assim, temos que verificar como o operador adjunto atua. Por definição de adjunto, basta verificar que

$$\langle A^*(a)v, \varphi \rangle_{\mathcal{L}^2} = \langle v, A(a)\varphi \rangle_{\mathcal{L}^2} = \langle v, -ac^{-1}(c^{-1}\varphi')' \rangle_{\mathcal{L}^2} = \langle -c^{-1}(c^{-1}(av)')', \varphi \rangle_{\mathcal{L}^2}$$

para qualquer $\varphi \in C_0^\infty[0, L]$. Por densidade de $C_0^\infty[0, L] \subset \mathcal{L}^2[0, L]$, segue que $A^*(a)v = -c^{-1}(c^{-1}(av)')'$. $\square$

Observação 2.4.1. *Segue diretamente do Lema 2.4.7 que $\|A^*(a)\| = \|A(a)\|$. Ainda, $\|(A^{-1}(a))^*w\| = \|v\|$, onde v é solução de $-c^{-1}(c^{-1}(av)')' = w$. Assim, por regularidade elíptica (ver [5, Section 9.6]) $\|(A^{-1}(a))^*w\| = \|v\| \leq C\|w\|$.*

Na proposição abaixo apresentamos propriedades de existência e limitação para a derivada de Fréchet do operador $F(a)$, a qual será denotada por $F'(a)$.

Proposição 2.4.8. *Assuma as hipóteses **A1)** e **A2)** satisfeitas. Seja $a, c \in Ad$. Então, o operador $F(a)$ definido em (2.4.1) é Fréchet diferenciável. O operador derivada de Fréchet $F'(a)$ é linear e limitado e é dado por*

$$F'(a)h = A^{-1}(a)[hc^{-1}(c^{-1}\tilde{u}')']. \quad (2.4.21)$$

Ainda, defina

$$\gamma^{-1} := \underline{a}^{-1}\sqrt{\underline{c}^{-1}}\|M\|_{\mathcal{L}^2[0, L]}, \quad (2.4.22)$$

então

$$\|F'(a)\sqrt{c}\| \leq \gamma^{-1}. \quad (2.4.23)$$

Demonstração. Seja $h \in \mathcal{L}^2[0, L]$ tal que $a + h \in Ad$. Denote por $F(a + h) = \tilde{u}$, $F(a) = u$, onde $\tilde{u} = u(a + h)$ e $u = u(a)$ são as únicas soluções de (2.2.10). Temos que a diferença $F(a + h) - F(a)$ satisfaz

$$-ac^{-1}(c^{-1}(\tilde{u}' - u'))' = hc^{-1}(c^{-1}\tilde{u}')', \quad (2.4.24)$$

com condições do contorno homogêneas. Como $a, c \in Ad$, temos que $c^{-1}(c^{-1}\tilde{u}')' = a^{-1}M \in \mathcal{L}^2[0, L]$. Assim, segue do operador (2.4.1), na qual está bem definido, que existe uma única solução $z = z(h) \in \mathcal{H}^2[0, L] \subset \mathcal{L}^2[0, L]$ de (2.4.24).

Além disso segue que (2.4.24) é linear em h . Defina $F'(a)h = z$ única solução de (2.4.24). Portanto $F'(a)$ está bem definido como um operador linear em h tal que $a + h \in Ad$.

Por outro lado, segue da regularidade elíptica [5, Section 9.6] que

$$\|z\sqrt{c}\|_{L^2[0,L]} \leq \underline{a}^{-1}\sqrt{\underline{c}^{-1}}\|M\|_{\mathcal{L}^2[0,L]}\|h\|_{\mathcal{L}^2[0,L]}.$$

Portanto, $F'(a)$ pode ser estendido como um operador linear e limitado para $h \in \mathcal{L}^2[0, L]$. Ainda, segue que $\|F'(a)\sqrt{c}\| \leq \underline{a}^{-1}\sqrt{\underline{c}^{-1}}\|M\|_{\mathcal{L}^2[0,L]} := \gamma^{-1}$.

Em particular, segue do Lema 2.4.5 que $F'(a)h = z = z(h) = A(a)^{-1}(hc^{-1}(c^{-1}\tilde{u}')')$.

Assim, falta mostrar que o operador linear e limitado $F'(a)$ definido acima é de fato a derivada de Fréchet do operador F , definido em (2.4.1). Para isso, defina $w = F(a+h) - F(a) - F'(a)h$, para qualquer $h \in \mathcal{L}^2[0, L]$ com $a+h \in Ad$. Pela linearidade da equação que cada termo satisfaz, temos que w satisfaz

$$-ac^{-1}(c^{-1}w')' = 0, \quad (2.4.25)$$

com condições de contorno homogêneas. Como $a, c \in Ad$ e as condições de contorno são homogêneas, segue do Princípio do Máximo [5, Section 8.5] que $w(x) \equiv 0, \forall x \in [0, L]$ é a única solução. Logo, o operador linear e limitado $F'(a)$ definido acima satisfaz

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|F(a+h) - F(a) - F'(a)h\|}{\|h\|} = 0,$$

e assim $F'(a)$ é a derivada de Fréchet de F .

□

Para estabelecermos os resultados de convergência e estabilidade, bem como para apresentarmos os resultados numéricos simulados para as reconstruções, necessitamos determinar a adjunta do operador $F'(a)$, a qual denotaremos por $F'(\cdot)^*$. O próximo lema estabelece os resultados necessários.

Lema 2.4.9. *Assumindo que as hipóteses **A1**), **A1')** **A2**) e a condição (2.4.23) são satisfeitas. Sejam $r = u^\delta - F(a) \in \mathcal{L}^2[0, L]$, onde u^δ representa as medições. Considere ainda $A(a)$ como operador definido em (2.4.16). Então*

$$F'(a)^*r = (c^{-1}u')'(A^{-1}(a))^*r \quad (2.4.26)$$

onde $(A^{-1}(a))^*$ é o operador adjunto de $A^{-1}(a)$, como estabelecido no Lema 2.4.7.

Demonstração. Seja $F'(a)$ o operador que representa a derivada de Fréchet do operador F , como mostrado na Proposição (2.4.8). Como $F'(a)$ é linear e limitado, segue que existe um operador adjunto, o qual denotaremos por $F'(a)^*$, e.g. [29].

Ainda, $F'(a)^*$ deve satisfazer, para qualquer $h \in C_0^\infty$,

$$\langle F'(a)^*r, h \rangle_{\mathcal{L}^2} = \langle r, F'(a)h \rangle_{\mathcal{L}^2}. \quad (2.4.27)$$

De (2.4.21), segue que

$$\langle r, F'(a)h \rangle_{\mathcal{L}^2} = \langle r, A^{-1}(a)[hc^{-1}(c^{-1}u')'] \rangle_{\mathcal{L}^2} = \langle (c^{-1}u')'(A^{-1}(a))^*r, h \rangle_{\mathcal{L}^2}. \quad (2.4.28)$$

As identidades (2.4.27)-(2.4.28) são satisfeitas para qualquer $h \in C_0^\infty$, o qual é denso em $\mathcal{L}^2$, provando assim o lema. $\square$

A seguir vamos apresentar alguns resultados auxiliares a fim de garantir que o operador F em (2.4.1) satisfaz a condição

$$\|F(a) - F(\tilde{a}) - F'(a)(a - \tilde{a})\| \leq \eta \|F(a) - F(\tilde{a})\|, \quad \eta < \frac{1}{2}, \quad a, \tilde{a} \in B_{2\rho}(a_0) \subset Ad \quad (2.4.29)$$

conhecida como condição do cone tangente.

Lema 2.4.10. *Assuma as hipóteses **A1**, **A1'** e **A2** satisfeitas. Sejam $a, \tilde{a} \in Ad$. Defina $F(a) = u(a) := u$, $F(\tilde{a}) = \tilde{u}(\tilde{a}) := \tilde{u}$ e seja $F'(a)$ a derivada de Fréchet do operador F (o qual existe pela Proposição 2.4.8). Então*

$$\langle F(\tilde{a}) - F(a) - F'(a)(\tilde{a} - a), w \rangle_{\mathcal{L}^2} = \langle (c^{-1}(\tilde{u} - u))', (\tilde{a} - a)(A^{-1}(a))^*w \rangle_{\mathcal{L}^2} \quad (2.4.30)$$

para qualquer $w \in C_0^\infty$, onde $(A^{-1}(a))^*$ representa o operador adjunto do operador $A^{-1}(a)$.

Demonstração. Partindo das hipóteses temos que

$$\begin{aligned} \langle F(\tilde{a}) - F(a) - F'(a)(\tilde{a} - a), w \rangle_{\mathcal{L}^2} &= \langle (\tilde{u} - u) - A^{-1}(a)[c^{-1}(c^{-1}u')'](\tilde{a} - a), w \rangle_{\mathcal{L}^2} \\ &= \langle A^{-1}(a)A(a)(\tilde{u} - u) - A^{-1}(a)[c^{-1}(c^{-1}u')'](\tilde{a} - a), w \rangle_{\mathcal{L}^2} \\ &= \langle A^{-1}(a)(A(a)(\tilde{u} - u) - (\tilde{a} - a)c^{-1}(c^{-1}u')'), w \rangle_{\mathcal{L}^2} \\ &= \langle A(a)(\tilde{u} - u) - (\tilde{a} - a)c^{-1}(c^{-1}u')', (A^{-1}(a))^*w \rangle_{\mathcal{L}^2}. \end{aligned} \quad (2.4.31)$$

Em (2.4.31), multiplicamos o operador identidade $I = A^{-1}(a)A(a)$ pelo termo $(\tilde{u} - u)$. Como $A^{-1}(a)$ é linear e limitado, definido entre espaços de Hilbert, sabemos que existe um operador adjunto, o qual foi denotado por $(A^{-1}(a))^*$.

Utilizando as mesmas ideias do Lema 2.4.6 e colocando em evidência $(\tilde{a} - a)$ obtemos de (2.4.31) que

$$\begin{aligned} \langle F(\tilde{a}) - F(a) - F'(a)(\tilde{a} - a), w \rangle_{\mathcal{L}^2} &= \langle (\tilde{a} - a)c^{-1}(c^{-1}(\tilde{u} - u))', (A^{-1}(a))^*w \rangle_{\mathcal{L}^2} \\ &= \langle (c^{-1}(\tilde{u} - u))', (\tilde{a} - a)c^{-1}(A^{-1}(a))^*w \rangle_{\mathcal{L}^2}, \end{aligned}$$

concluindo a demonstração. $\square$

Os próximos lemas foram baseados no que foi proposto em [22]. Esses lemas produzem estimativas que auxiliarão na prova da condição do cone.

Lema 2.4.11. *Assumindo que as hipóteses **A1**), **A1'** e **A2**) sejam satisfeitas.*

Então existe uma constante $\kappa_1 > 0$ tal que:

$$\left\| c^{-1}(c^{-1})' \left(\frac{\tilde{a} - a}{a} \right) (aA^{-1}(a))^* w \right\|_{\mathcal{L}^2} \leq \kappa_1 \|(\tilde{a} - a)\|_{L^\infty} \|w\|_{\mathcal{L}^2} \quad (2.4.32)$$

Demonstração. Primeiramente vamos assumir que $\|g\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \sqrt{2}\|g\|_{\mathcal{H}^1}$ e $\|g\|_{\mathcal{L}^\infty} \|g'\|_{\mathcal{L}^2}$ se $g \in \mathcal{H}^1$ tal que $g(\epsilon) = 0$ para algum $\epsilon \in [0, 1]$, ver [22].

Diante disso e das hipóteses que

$$\|(aA^{-1}(a))^* w\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \|((aA^{-1}(a))^* w)'\|_{\mathcal{L}^2}.$$

Da estimativa acima e do Lema 2.4.7 segue que

$$\|((aA^{-1}(a))^* w)'\|_{\mathcal{L}^2} = \|c^{-1}(c^{-1}(av)')'\|_{\mathcal{L}^2} = \|w\|_{\mathcal{L}^2}.$$

Agora a estimativa segue do fato de $a, c \in Ad$ com $\kappa_1 = \bar{c}(\underline{c}^{-1})'\underline{a}^{-1}$. □

Lema 2.4.12. *Assumindo as hipóteses do Lema 2.4.11 satisfeitas. Então existe uma constante $\kappa_2 > 0$ tal que:*

$$\left\| c^{-1}(c^{-1})' \left(\frac{\tilde{a} - a}{a} \right)' (aA^{-1}(a))^* w \right\|_{\mathcal{L}^2} \leq \kappa_2 \|(\tilde{a} - a)\|_{L^\infty} \|w\|_{\mathcal{L}^2} \quad (2.4.33)$$

Demonstração. Temos que $(a^{-1}(\tilde{a} - a))' = \left(\frac{(\tilde{a} - a)'a - a'(\tilde{a} - a)}{a^2} \right)$. Assim, da desigualdade triangular e de $a, c \in Ad$ obtemos

$$\left\| \left(\frac{\tilde{a} - a}{a} \right)' \right\|_{\mathcal{L}^2} \leq \underline{a}^{-2} \|(\tilde{a} - a)'\|_{\mathcal{L}^2} \|a\|_{\mathcal{L}^\infty} - \|a'\|_{\mathcal{L}^\infty} \|\tilde{a} - a\|_{\mathcal{L}^2} \leq \kappa \| \tilde{a} - a \|_{\mathcal{H}^1}, \quad (2.4.34)$$

onde utilizamos os mesmos os argumentos usados no Lema 2.4.11 para a última estimativa. □

Lema 2.4.13. *Assumindo as hipóteses do Lema 2.4.11 satisfeitas. Então existe uma constante $\kappa_3 > 0$ tal que:*

$$\left\| c^{-2} \left(\frac{\tilde{a} - a}{a} (aA^{-1}(a))^* w \right)'' \right\|_{\mathcal{L}^2} \leq \kappa_3 \|(\tilde{a} - a)\|_{L^\infty} \|w\|_{\mathcal{L}^2}. \quad (2.4.35)$$

Demonstração. Fazendo uma integração por partes obtemos

$$\left\| c^{-2} \left(\frac{\tilde{a} - a}{a} (aA^{-1}(a))^* w \right)'' \right\|_{\mathcal{L}^2} \leq \left\| (c^{-2})' \left(\frac{\tilde{a} - a}{a} (aA^{-1}(a))^* w \right)' \right\|_{\mathcal{L}^2}.$$

O restante das estimativas seguem os mesmos argumentos dos Lemas 2.4.11 - 2.4.12, com $\kappa_3 = \kappa_1 + \kappa_2$. □

Agora podemos provar o último resultado antes de verificar que a condição de cone tangente é satisfeita para o problema de identificação do coeficiente.

Proposição 2.4.14. *Assumindo que as hipóteses dos Lemas 2.4.10 - 2.4.11 sejam satisfeitas. Então, existe uma constante K , tal que*

$$\langle (c^{-1}(\tilde{u} - u))', (\tilde{a} - a)c^{-1}(A^{-1}(a))^*w \rangle_{\mathcal{L}^2} \leq K \|F(\tilde{a}) - F(a)\|_{\mathcal{L}^2} \|\tilde{a} - a\|_{H^1} \|w\|_{\mathcal{L}^2}. \quad (2.4.36)$$

Demonstração. Primeiramente, da hipótese de $a, c \in Ad$ e usando a integração por partes duas vezes, obtemos

$$\begin{aligned} \langle (c^{-1}(\tilde{u} - u))', (\tilde{a} - a)c^{-1}(A^{-1}(a))^*w \rangle_{\mathcal{L}^2} &= \langle (c^{-1}(\tilde{u} - u))', [(\tilde{a} - a)a^{-1}]a(A^{-1}(a))^*w \rangle_{\mathcal{L}^2} \\ &= \langle (\tilde{u} - u), (c^{-1}[c^{-1}(\tilde{a} - a)a^{-1}(aA^{-1}(a))^*w])' \rangle_{\mathcal{L}^2} \\ &\leq \|\tilde{u} - u\|_{\mathcal{L}^2} \|c^{-1}[c^{-1}(\tilde{a} - a)a^{-1}(aA^{-1}(a))^*w])'\|_{\mathcal{L}^2} \\ &= \|F(\tilde{a}) - F(a)\|_{\mathcal{L}^2} \|c^{-1}[c^{-1}(\tilde{a} - a)a^{-1}(aA^{-1}(a))^*w])'\|_{\mathcal{L}^2}, \end{aligned}$$

onde usamos novamente a notação de que $F(\tilde{a}) = \tilde{u}$ e $F(a) = u$.

Derivando $[c^{-1}(\tilde{a} - a)a^{-1}(aA^{-1}(a))^*w])'$ e usando a desigualdade triangular, obtemos que

$$\begin{aligned} \left\| [c^{-1}(\tilde{a} - a)a^{-1}(aA^{-1}(a))^*w])' \right\|_{\mathcal{L}^2} &\leq \left\| (c^{-1})' \left(\frac{\tilde{a} - a}{a} \right) (aA^{-1}(a))^*w \right\|_{\mathcal{L}^2} \\ &\quad + \left\| (c^{-1})' \left(\frac{\tilde{a} - a}{a} \right)' (aA^{-1}(a))^*w \right\|_{\mathcal{L}^2} + \\ &\quad \left\| (c^{-2}) \left(\frac{(\tilde{a} - a)}{a} (aA^{-1}(a))^*w \right)'' \right\|_{\mathcal{L}^2}. \end{aligned}$$

Agora, o resultado segue diretamente das estimativas dos Lemas 2.4.11, 2.4.12 e 2.4.13. $\square$

O que segue é um dos principais resultados desta tese para o problema de identificabilidade estável por métodos iterativos de regularização, o qual será demonstrado para o problema de identificar o coeficiente $a(x)$ na equação de Euler-Bernoulli fractal (2.2.10).

Teorema 2.4.15. *Assuma as hipóteses da Proposição 2.4.14 satisfeitas. Então, a condição do cone tangente (2.4.29) é satisfeita.*

Demonstração. Segue do Lema 2.4.10 e da Proposição 2.4.14 que existe uma constante $K > 0$ (independente de $a, \tilde{a}$) tal que

$$\langle F(\tilde{a}) - F(a) - F'(a)(\tilde{a} - a), w \rangle_{\mathcal{L}^2} \leq K \|\tilde{a} - a\|_{H^1} \|F(\tilde{a}) - F(a)\|_{\mathcal{L}^2} \|w\|_{\mathcal{L}^2}. \quad (2.4.37)$$

Tomando o supremo $\|w\|_{C_0^\infty} \leq 1$ em ambos os lados da equação acima, juntamente com a densidade de C_0^∞ em $\mathcal{L}^2$, obtemos

$$\|F(\tilde{a}) - F(a) - F'(a)(\tilde{a} - a)\|_{\mathcal{L}^2} \leq K \|\tilde{a} - a\|_{H^1} \|F(\tilde{a}) - F(a)\|_{\mathcal{L}^2}. \quad (2.4.38)$$

Defina $\eta : K\|\tilde{a} - a\|_{H^1}$. Assim, se ρ é tal que para $\tilde{a}, a \in B_{2\rho}$, com $K\|a - \tilde{a}\|_{H^1} < 1/2$, obtemos

$$\|F(\tilde{a}) - F(a) - F'(a)(\tilde{a} - a)\|_{\mathcal{L}^2} \leq \eta\|F(\tilde{a}) - F(a)\|_{\mathcal{L}^2} \quad (2.4.39)$$

concluindo a prova. $\square$

2.5 Injetividade para o operador parâmetro-para-solução: Unicidade de recuperação do coeficiente $a(x)$.

Nesta seção mostraremos a unicidade de recuperação para coeficientes $a(x)$ na equação estática de Euler-Bernoulli fractal, a partir do conhecimento da deflexão $u(x)$ solução de (2.2.10). Em outras palavras, queremos recuperar o parâmetro de rigidez $a(x)$ na equação (2.4.1) a partir das medidas da deflexão u quando conhecemos $M(x)$ e o coeficiente do meio fractal $c(x)$ com condições dadas por (2.2.11).

Em relação aos problemas inversos, segundo [8], a questão da existência de solução pode ser resolvida admitindo-se soluções mais generalizadas para o problema. Com relação a falta de dependência contínua das medidas, a fim de obter soluções estáveis para o problema é necessário utilizar de alguma estratégia de regularização, o que faremos na Seção 2.6. Já a unicidade de solução do problema inverso nem sempre é provada. Nesta tese, vamos apresentar a garantia de que, para um coeficiente do meio fractal $c(x)$ e para um momento fletor $M(x)$ conhecido, satisfazendo as hipóteses **A1**) e **A2**), temos um único parâmetro $a(x)$ associado a solução $u(x)$ da equação de Euler-Bernoulli fractal (2.2.10). De maneira análoga, provaremos que o operador F definido em (2.4.1) é injetivo.

No entanto, será necessário a inclusão da seguinte hipótese:

A3) Os coeficientes a e c que satisfazem **A1**) são conhecidos nos extremos do intervalo $[0, L]$.

Os lemas 2.5.1, 2.5.2 e 2.5.3 abaixo serão auxiliares para a prova da unicidade.

Lema 2.5.1. *Considere **A1**), **A2**), **A3**) hipóteses satisfeitas. Sejam $u_a := u(a)$ e $u_b := u(b)$ as únicas soluções fracas de (2.2.10) com (2.2.11), para os coeficientes $a, b \in Ad$. Seja $\psi \in \mathcal{L}^2[0, L]$. Então temos que:*

$$\begin{aligned} \int_0^L [c^{-1}(a\psi)']'(u_a - u_b)dx - c^{-1}(a\psi)'(u_a - u_b)|_0^L + a\psi c^{-1}(u_a - u_b)'|_0^L \\ = \int_0^L \frac{(b-a)}{b} Mc\psi dx. \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

Demonstração. Sabemos que u_a e u_b satisfazem, respectivamente, as seguintes equações

$$\begin{aligned} ac^{-1}(c^{-1}u_a')' &= M \\ bc^{-1}(c^{-1}u_b')' &= M. \end{aligned}$$

Pela linearidade das equações acima, subtraindo uma pela outra, temos

$$ac^{-1}[c^{-1}(u_a - u_b)]' = (b - a)c^{-1}[c^{-1}u_b']'. \quad (2.5.2)$$

O resultado do Lema 2.5.1 é alcançado quando multiplicamos por ψ ambos os lados e integramos por partes duas vezes o lado esquerdo da equação acima. $\square$

Lema 2.5.2. *Sejam **A1**), **A2**), **A3**) satisfeitas e $\psi \in \mathcal{L}^2[0, L]$ solução de*

$$\begin{aligned} [c^{-1}(a\psi)]' &= c(u_a - u_b) \\ \psi(0) &= \beta, \\ \psi'(0) &= \alpha, \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ escolhidos de maneira apropriada. Então a equação (2.5.1) pode ser reescrita da forma

$$\begin{aligned} \|u_a - u_b\|_{\mathcal{L}^2}^2 + a\psi c^{-1}(u_a - u_b)'|_0^L \\ - c^{-1}(a\psi)'(u_a - u_b)|_0^L = \int_0^L \frac{(b-a)}{b} Mc\psi dx. \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Demonstração. É fácil verificar que quando substituimos a equação (2.5.3) em (2.5.1) obtemos (2.5.4). $\square$

Lema 2.5.3. *Suponha as hipóteses **A1**), **A2**), **A3**) satisfeitas e seja $\psi(x) = \frac{\alpha}{a} \int_0^x c(s)ds + \frac{\beta}{a}$. Então $\psi \in \mathcal{L}^2[0, L]$ é uma solução de (2.5.3) com $u_a - u_b = 0$, para α, β constantes escolhidas de forma que*

$$\frac{(b-a)}{ba} Mc(\alpha \underline{c}x + \beta) \geq 0, \quad x \in [0, L]. \quad (2.5.5)$$

Demonstração. Segue de **A1**) que $\psi(x)$ satisfaz (2.5.3) com $u_a - u_b = 0$ para quaisquer constantes α e β . Além disso, como $a, b, c \in Ad$ temos que $\frac{b-a}{ba} \geq \frac{-2}{\underline{a}}$ e c é limitado. Com relação a $M(x)$, da hipótese **A2**) e por ser $[0, L]$ compacto, temos que existe uma constante $k < 0$ de modo que $-k \geq M(x), x \in [0, L]$. Dessa forma, garantimos a positividade de (2.5.5) provando a existência de α e β tais que:

$$\frac{2k\bar{c}}{\underline{a}}(\alpha \underline{c}L + \beta) \geq 0,$$

quando

$$\alpha = \frac{\bar{a}\underline{c}}{2k\bar{c}L}, \quad \beta = \frac{\bar{a}}{2k\bar{c}}. \quad (2.5.6)$$

$\square$

Teorema 2.5.4. *Assuma que as hipóteses **A1**), **A2**), **A3**) sejam satisfeitas. Suponha que as medidas $u_a = u(a) = F(a)$ e $u_b = u(b) = F(b)$ soluções de (2.4.1) sejam iguais. Então, os coeficientes a e b são iguais.*

Demonstração. Por hipótese, temos que $u_a - u_b = 0$ então do Lema 2.5.1 segue

$$0 = \|u_a - u_b\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \int_0^L \frac{b-a}{b} M c \psi dx. \quad (2.5.7)$$

Da hipótese sobre M , do Lema 2.5.3 e da escolha de α e β como em (2.5.6), temos que o integrando não altera seu sinal. Assim, para que (2.5.7) seja satisfeita temos que $a(x) = b(x)$. $\square$

Na seção a seguir apresentaremos algumas estratégias de regularização para recuperar o coeficiente a quando conhecemos as medidas u^δ .

2.6 Regularização por Métodos Iterativos para o coeficiente de rigidez

Para operadores não lineares, o funcional de Tikhonov apresenta, em geral, mínimos locais, o que é uma desvantagem. Desta maneira, segundo [22], os **métodos iterativos** são uma alternativa interessante na resolução de problemas não lineares quando comparados ao método de Tikhonov. Nesta tese daremos uma especial atenção aos métodos iterativos.

Em relação ao coeficiente $a(x)$, a solução numérica para a equação do operador parâmetro-para-medidas (2.4.1) através de técnicas iterativas pode ser descrita da forma:

$$a_{k+1}^\delta = a_k^\delta + G_k(a_k^\delta, u^\delta), \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.6.1)$$

para vários tipos de G_k . Ocorre que sob certas condições a iteração (2.6.1) combinada a um critério de parada apropriado gera aproximações estáveis para a solução do problema (2.4.1).

Para problemas lineares $Fx = y$ (e aqui denotaremos nessa forma para não confundir com nosso problema), em que F é um operador entre espaços de Hilbert, muitos métodos iterativos para aproximar $F^\dagger y$ são baseados em uma transformação da equação normal em uma equação de ponto fixo equivalente dada por

$$x = x + F^*(y - Fx). \quad (2.6.2)$$

No entanto, para o nosso problema não linear a equação de ponto fixo adequada se torna

$$a = \phi(a) := a + F'(a)^*(u - F(a)) \quad (2.6.3)$$

com o operador F não linear e diferenciável.

Para problemas bem postos, a convergência dos métodos iterativos é normalmente comprovada usando propriedades de contração do operador de ponto fixo. Para problemas mal postos isso não é possível visto que o operador ϕ não é uma contração e, além disso, na maioria dos casos se torna uma tarefa quase impossível verificar analiticamente se um operador ϕ é não expansivo ou não. Portanto, podemos substituir a não expansão de ϕ por propriedades locais mais fáceis de serem verificadas e que garantem pelo menos a convergência local desses métodos. [22].

Se aplicarmos o método de aproximações sucessivas à equação de ponto fixo (2.6.3), obtemos uma extensão para problemas não lineares. Nos métodos iterativos, a partir de um ponto de partida (chute inicial) a_0 , buscamos por soluções aproximadas estáveis para o problema inverso (desde que o operador direto ou o operador parâmetros para soluções satisfaça algumas propriedades), de forma recorrente, a partir da sequência de iterações dadas por

$$a_{k+1}^\delta = a_k^\delta + \gamma_k F'(a_k^\delta)^*(u^\delta - F(a_k^\delta)), \quad (2.6.4)$$

onde $F'(a_k^\delta)^*$ denota a adjunta da derivada de Fréchet do operador $F(a)$ conforme (2.4.21).

Como os dados possuem ruídos, o método iterativo deve ser combinado a uma regra de parada a qual é dada pelo princípio da discrepância

$$\|u^\delta - F(a_{k^*}^\delta)\| \leq \tau\delta < \|u^\delta - F(a_k^\delta)\| \quad (2.6.5)$$

para algum $\tau > 1$. Dessa forma, o número de iterações k^* determina a regra de parada do método.

A escolha do parâmetro γ_k na iteração (2.6.4) determina o método iterativo. Assim, para γ_k dado por

$$\gamma_k = \frac{\|F'(a_k^\delta)^*(F(a_k^\delta) - u^\delta)\|^2}{\|F'(a_k^\delta)F'(a_k^\delta)^*(F(a_k^\delta) - u^\delta)\|^2}, \quad \text{ou} \quad \gamma_k = \gamma^{-1}, \quad (2.6.6)$$

temos o método de Steepest Descent e Landweber, respectivamente. Repare que γ^{-1} é dado conforme Proposição 2.4.8. Já o método de erro mínimo é dado por

$$\gamma_k = \frac{\|F(a_k^\delta) - u^\delta\|^2}{\|F'(a_k^\delta)^*(F(a_k^\delta) - u^\delta)\|^2}. \quad (2.6.7)$$

Vamos mostrar que a iteração (2.6.4) com γ dados por (2.6.6) produzem uma sequência de a_k^δ que é estável e convergente, através das propriedades do operador (2.4.1) provadas na Seção 2.4. Isto é:

Teorema 2.6.1. *[Convergência e estabilidade] Considere A1) e $\|u - u^\delta\|_{\mathcal{L}^2[0,L]} \leq \delta$ para $\delta > 0$ satisfeitas. Além disso que $a_0 = a_0^\delta \in B_\rho(a^*)$. Então a iteração (2.6.4), com γ_k^δ conforme (2.6.6) satisfaz:*

$$i) \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a^* \text{ quando } \delta = 0.$$

ii) Seja $\delta > 0$. Assuma que a iteração (2.6.4) é está de acordo com o princípio da discrepância, isto é, a iteração pára no primeiro k_* tal que $\|u^\delta - F(a_{k_*}^\delta)\| \leq \tau\delta < \|u^\delta - F(a_k^\delta)\|$ para algum $\tau > 1$. Então a iteração (2.6.4) produz uma sequência $(a_{k_*}^\delta)$ que é estável e convergente, com relação ao nível de ruídos δ , quando $\delta \rightarrow 0$.

Demonstração. A demonstração segue da teoria geral de convergência de métodos iterativos em [22, Cap 2], considerando que o operador $F(a)$ possui a propriedade de continuidade (Teorema 2.4.1), de Fréchet diferenciabilidade (Proposição 2.4.8) e que satisfaz a condição do cone tangente (Teorema 2.4.15), respectivamente. $\square$

Na próxima seção apresentaremos alguns resultados numéricos para recuperar o coeficiente a_k^δ através dos métodos iterativos de Landweber e Steepest Descent.

2.6.1 Exemplos Numéricos - Landweber e Steepest Descent

Nesta seção iremos apresentar exemplos numéricos do coeficiente recuperado $a(x)$ através dos métodos iterativos dados pela equação (2.6.4). Para todos os exemplos, $x \in [0, 1]$, $M(x) = \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}$ e o chute inicial para o coeficiente $a(x)$ será dado por $a_0 = 0,75$. Para a utilização dos métodos numéricos utilizados nas simulações e que serão mencionados no decorrer foi considerada uma malha uniforme definida no intervalo $[0, 1]$ da seguinte maneira: $x_i = ih, h = 1/n, i = 0, \dots, n$ em que $n = 300$ pontos.

Os dados u^δ , que satisfazem (2.4.15), são dados simulados obtidos conforme

$$u^\delta(x) = u(x) + \delta \cdot z(x), \quad (2.6.8)$$

onde $z(x) \in [0, 1]$ é uma variável aleatória, uniformemente distribuída e $u(x) = u_c(x, a^*(x))$ é a solução de (2.2.10)-(2.2.11), onde $a^*(x)$ é o coeficiente exato e $c(x)$ é a função de transformação entre o meio fractal e o meio contínuo, assumido conhecido. Nos exemplos 1 e 2 temos $c(x) = 2x + 1$, no exemplo 3 segue que $c(x) = x + 1$ e no exemplo 4 temos $c(x) = \sqrt{x + 1}$. Vale ressaltar que o coeficiente de transformação $c(x) = 1$ representa a viga clássica, ou seja, sem porosidades no meio. Dessa forma, para $c(x) = 2x + 1$ à medida que x se afasta de zero temos uma viga com mais porosidades.

Abaixo apresentamos de forma esquematizada o algoritmo desenvolvido para gerar o coeficiente $a_{k_*}^\delta$.

- (-1) Dado momento fletor M satisfazendo a hipótese **(A2)** e as condições (2.2.11) e dado $c(x)$ de acordo com **(A1)** e **(A1')**; Além disso, calcule γ conforme a equação (2.4.22).
- (0) Escolha um valor inicial para $a_0 = a_0^\delta \in B_\rho(a^*) \cap Ad$ e para os parâmetros $\tau > 1$ e ρ .
- (1) Gere os dados com ruídos u^δ conforme (2.6.8).
- (2) Enquanto $k < k^*$, em que k^* satisfaz o princípio da discrepância (2.6.5), faça os seguintes passos:

- (3) Resolva o problema $a_k^\delta c^{-1}(c^{-1}u'(a_k^\delta))' = M$ com as condições iniciais $u(0) = u'(0) = 0$.
- (4) Avalie o resíduo $r_k = u_k^\delta - F(a_k^\delta)$ em que $F(a_k^\delta)$ é solução da equação diferencial calculada anteriormente no passo (3).
- (5) Para calcular $s_k^\delta := F'(a_k^\delta)^* r_k$ devemos primeiramente:
- (5.1) Resolver a equação diferencial $-(c^{-1}(a_k^\delta v_k'))' = r_k$ com condições finais $v(L) = v'(L) = 0$.⁴
- (5.2) Agora, sabendo que v_k é a solução da equação do passo (5.1), resta resolver $\frac{M}{a_k^\delta} v_k$.
- Se a iteração Steepest Descent for escolhida, faça $F'(a_k^\delta) s_k^\delta$ como (2.4.21)
- (6) Atualize a_{k+1}^δ de acordo com a iteração (2.6.4).
- (7) Volte para o passo (2) enquanto o princípio da discrepância para a_{k+1}^δ não for atingido.
- (8) Caso contrário $a_{k^*}^\delta$, em que k^* é determinado pelo princípio da discrepância (2.6.5), é a solução regularizada.

A equação diferencial de segunda ordem no passo (3) foi transformada em um sistema de Edo's de primeira ordem, o qual foi resolvido pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem e quatro estágios.

A equação diferencial de segunda ordem no passo (5.1) foi resolvida diferentemente, considerando dois casos:

(i) $a(x)$ constante:

A equação diferencial de segunda ordem foi transformada em um sistema de Edo's de primeira ordem, o qual foi resolvido pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem e quatro estágios.

(ii) $a(x)$ não constante:

Utilizamos o teorema fundamental do cálculo e aproximamos numericamente as integrais pelo método de Trapézio.

Os métodos mencionados anteriormente foram implementados em Fortran 90, utilizando o compilador Intel® Fortran Compiler 12.1.3, sistema operacional Ubuntu 16.04 LTS 64 bits e processador Intel® Core(TM) i5 - 5200U CPU @ 2.20GHz x4.

Exemplo 1: Para esta simulação, assumiremos que a viga possui coeficiente de rigidez $a^*(x) = 1$ a ser recuperado e coeficiente de transformação $c(x) = 2x + 1$, com condições $u(0) = u'(0) = 0$.

⁴As condições envolvendo v são obtidas no cálculo da adjunta e mudam conforme as condições de contorno do problema.

A Figura 2.2 apresenta os coeficientes $a_k^\delta(x)$ recuperados através das iterações (2.6.4) pelo método de Landweber, para o nível de ruído $\delta = 10^{-4}$ em diferentes estágios de iteração k até atingir princípio da discrepância (2.6.5) com $k^* = 29.367$. Pelo gráfico podemos ver a comparação do coeficiente exato $a^*(x)$ com os coeficientes recuperados a_k^δ para diferentes valores de k . Observe que, à medida que o número de iterações aumenta o coeficiente a_k^δ se aproxima de $a^*(x)$.

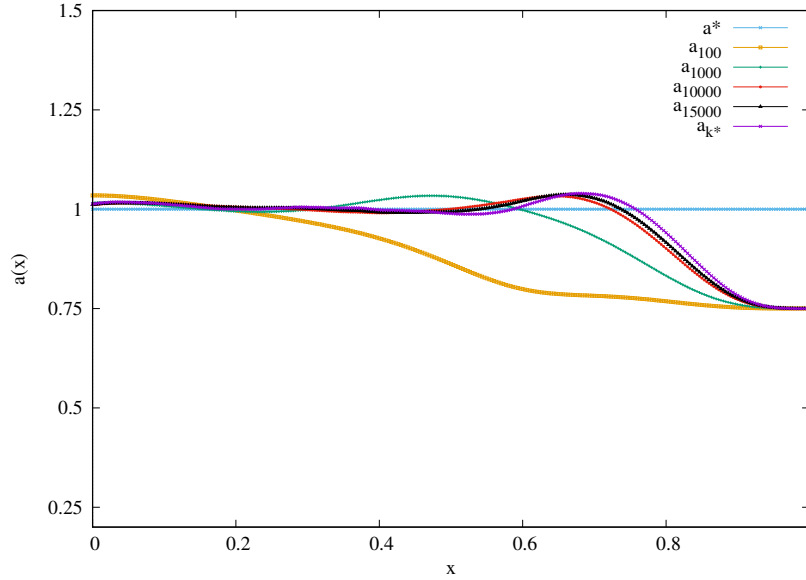
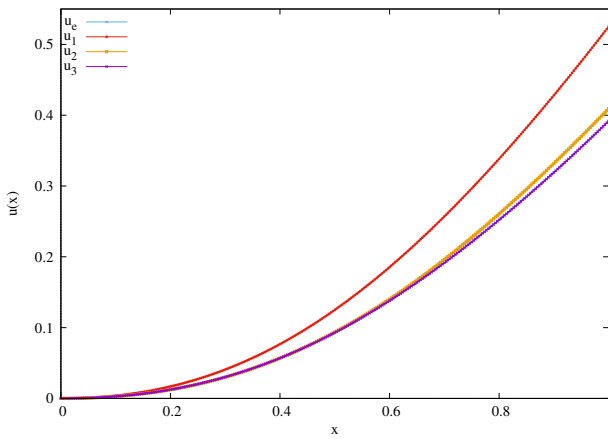
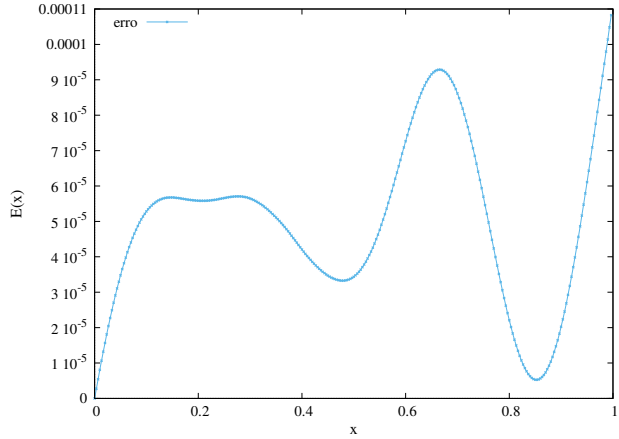


Figura 2.2: Coeficiente reconstruído a_k^δ pelo método de Landweber para $\delta = 10^{-4}$ com diferentes iterações k .



(a) Solução do problema direto u_k para diferentes iterações k .



(b) Erro absoluto entre u_e e u_{k^*}

Figura 2.3: Solução do problema direto u_k e Erro $\|u_e - u_{k^*}\|$.

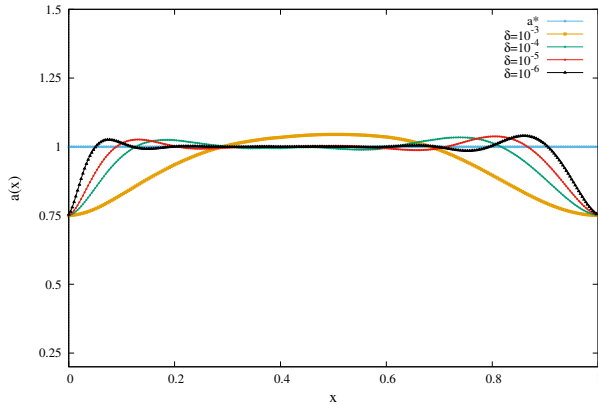
A Figura 2.3(a) apresenta a solução do problema direto u_k em relação ao Exemplo 1, em diferentes estágios de iterações k , obtidas a partir dos coeficientes a_k^δ recuperados pelo método de Landweber com ruído $\delta = 10^{-4}$. Assim, as soluções u_1, u_2, u_3 foram calculadas a partir de a_k^δ quando $k = 1, k = 100, k^* = 29.367$, respectivamente, e u_e corresponde a solução do problema

direto calculada para o coeficiente exato $a^*(x) = 1$. Como podemos ver as soluções de u_k convergem para a solução exata do problema à medida que as iterações k vão se aproximando do k^* . Neste caso, observe que as soluções exata u_e e $u_3 = u_{k^*}$ calculada a partir do coeficiente $a_{k^*}^\delta$ atingido pelo critério de parada para $k^* = 29.367$ estão muito próximas. Dessa forma, mostramos na Figura 2.3(b) o erro absoluto, ponto a ponto, entre elas. De fato, o erro é pequeno, sendo o maior deles em torno de 10^{-4} .

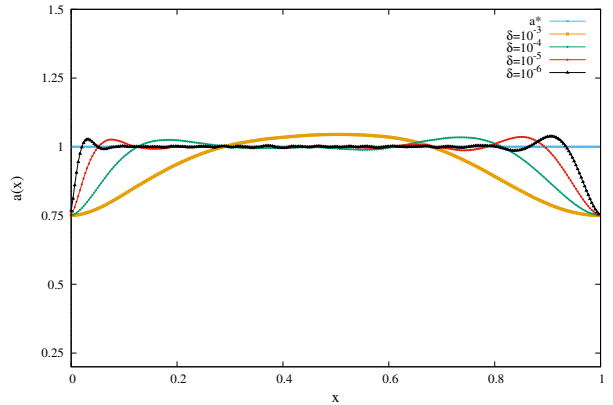
Os exemplos a seguir mostram coeficientes gerados a_k^δ tanto pelo método de Landweber quanto pelo método de Steepest Descent de acordo com (2.6.6).

Exemplo 2: Neste exemplo, mantemos os coeficientes $a^*(x) = 1$ a ser recuperado e $c(x) = 2x + 1$ conhecido, com condições $u(1) = u'(1) = 0$.

As Figuras 2.4(a)-(b) apresentam os coeficientes recuperados $a_{k^*}^\delta$ obtidos pelos métodos de Landweber e Steepest Descent, respectivamente, para diferentes níveis de ruídos δ . A Tabela 2.1 mostra os valores de k^* quando os métodos atingem o princípio da discrepância (2.6.5). Aqui vale ressaltar que fixamos o valor máximo de 100 mil iterações, assim, para Landweber ($\delta = 10^{-5}$ e $\delta = 10^{-6}$) e Steepest Descent ($\delta = 10^{-6}$) seria necessário um número maior de iterações para que o critério de parada fosse atingido. Contudo, ainda vemos que o método de Steepest Descent atinge o critério da discrepância mais rapidamente que o Landweber, o que já era esperado em virtude de γ_k ser calculado novamente em cada iteração.



(a) Coeficiente recuperado $a_{k^*}^\delta$ pelo método de Landweber.



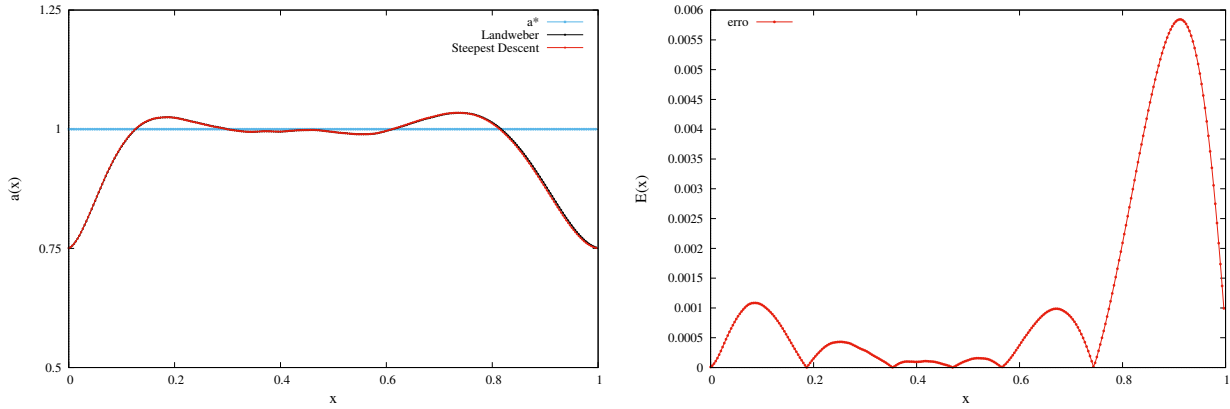
(b) Coeficiente recuperado $a_{k^*}^\delta$ pelo método do Steepest Descent.

Figura 2.4: Coeficiente recuperado $a_{k^*}^\delta$ para diferentes níveis de ruídos δ .

Tabela 2.1: k^* obtido em cada nível de ruído δ para a Figura 2.4.

δ	k^* para Landweber	k^* para Steepest Descent
10^{-3}	716	458
10^{-4}	23.256	6442
10^{-5}	Não parou	96.362
10^{-6}	Não parou	Não parou

Na Figura 2.5(a) apresentamos uma comparação entre os coeficientes recuperados $a_{k^*}^\delta$ pelos métodos de Landweber e Steepest Descent para um nível de ruído $\delta = 10^{-4}$. Já na Figura 2.5(b) apresentamos o erro absoluto, calculado ponto a ponto, entre os coeficientes $a_{k^*}^\delta$ dos dois métodos.

(a) Coeficiente recuperado $a_{k^*}^\delta$ pelos métodos de Landweber e Steepest Descent para $\delta = 10^{-4}$.(b) Erro absoluto entre $a_{k^*}^\delta$ dos dois métodos.Figura 2.5: Coeficiente recuperado $a_{k^*}^\delta$ para $\delta = 10^{-4}$ e seu erro absoluto.

A Figura 2.6 mostra os coeficientes reconstruídos $a_{k^*}^\delta$ para $\delta = 10^{-6}$ pelos métodos de Landweber e Steepest Descent. Conforme Tabela 2.1 para esse nível de ruído, o princípio da discrepância não foi atingido. No entanto, a norma do resíduo $\|u^\delta - F(a_k^\delta)\|$ para Landweber e Steepest Descent foi de $6,34 \times 10^{-5}$ e $9,26 \times 10^{-6}$, respectivamente, calculadas para a última iteração realizada $k = 10^5$.

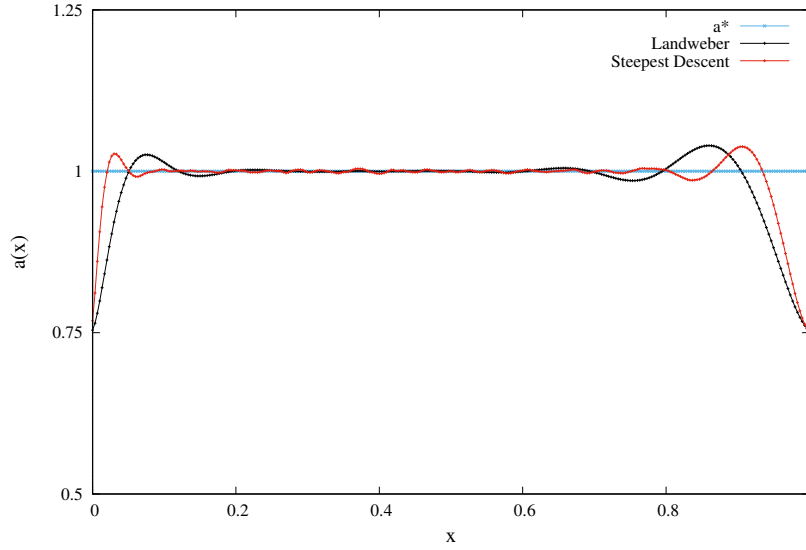
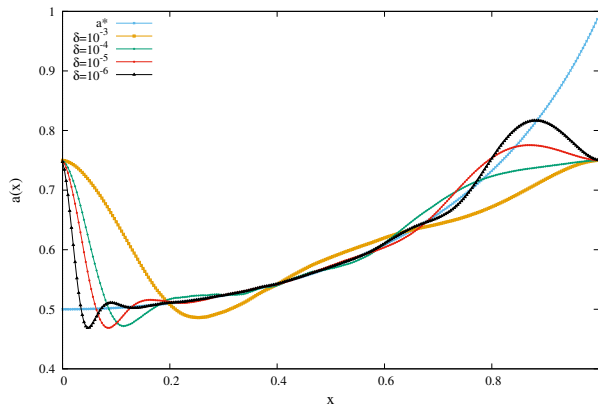


Figura 2.6: Coeficiente reconstruído $a_{k^*}^\delta$ pelos métodos de Landweber e Steepest Descent para $\delta = 10^{-6}$.

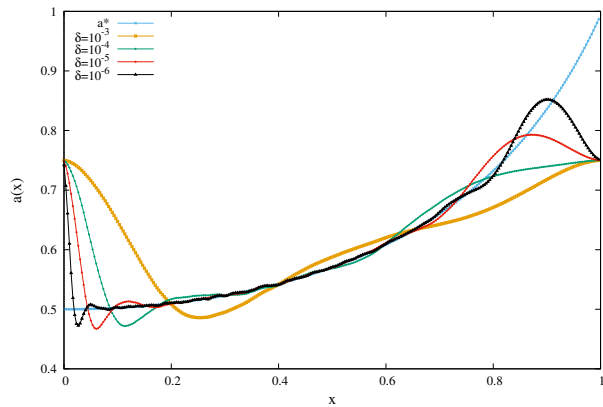
Os próximos exemplos apresentarão diferentes coeficientes de rigidez $a^*(x)$ e coeficientes de transformação $c(x)$.

Exemplo 3: Neste exemplo, assumiremos que a viga possui coeficiente de rigidez $a^*(x) = \frac{1}{2-x^2}$ a ser recuperado e coeficiente de transformação do meio $c(x) = x + 1$.

As Figuras 2.7(a)-(b) apresentam os coeficientes recuperados $a_{k^*}^\delta$ obtidos pelos métodos de Landweber e Steepest Descent, respectivamente e a Tabela 2.2 mostra os valores de k^* obtido para cada nível de ruído δ . Da mesma forma que o Exemplo 2, para níveis de ruído muito pequenos como $\delta = 10^{-5}$ e $\delta = 10^{-6}$ os métodos iterativos não atingiram o critério de parada.



(a) Coeficiente recuperado $a_{k^*}^\delta$ pelo método de Landweber.



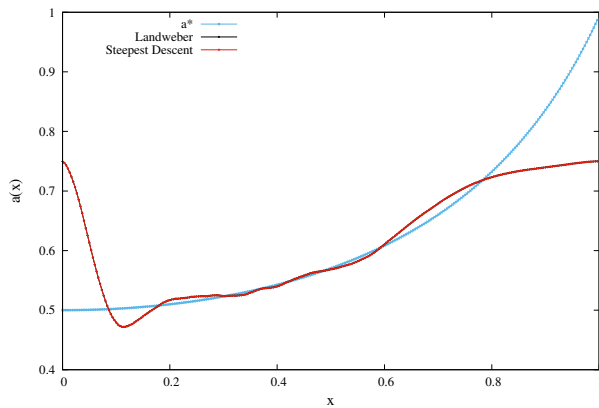
(b) Coeficiente recuperado $a_{k^*}^\delta$ pelo método do Steepest Descent.

Figura 2.7: Coeficiente recuperado $a_{k^*}^\delta$ para diferentes níveis de ruídos δ .

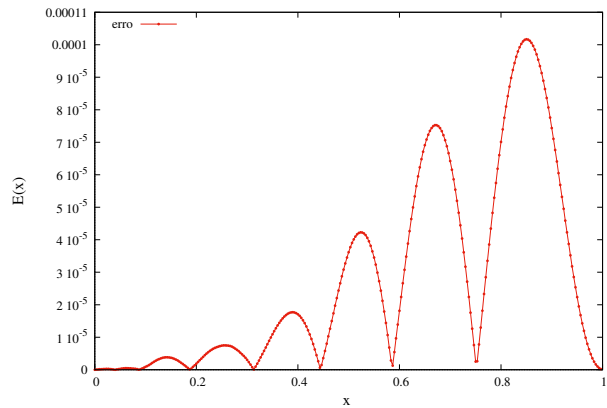
Tabela 2.2: k^* obtido em cada nível de ruído δ para a Figura 2.7.

δ	k^* para Landweber	k^* para Steepest Descent
10^{-3}	1100	781
10^{-4}	30.488	15.360
10^{-5}	Não parou	234.381
10^{-6}	Não parou	Não parou

Na Figura 2.8(a) apresentamos uma comparação entre os coeficientes recuperados $a_{k^*}^\delta$ pelos métodos de Landweber e Steepest Descent para um nível de ruído $\delta = 10^{-4}$. O erro absoluto em relação aos coeficientes obtidos em 2.8(a) é apresentado na Figura 2.8(b) e foi calculado ponto a ponto nos dois métodos.



(a) Coeficiente recuperado $a_{k^*}^\delta$ pelos métodos de Landweber e Steepest Descent para $\delta = 10^{-4}$.



(b) Erro absoluto entre $a_{k^*}^\delta$ dos dois métodos.

Figura 2.8: Coeficiente recuperado $a_{k^*}^\delta$ para $\delta = 10^{-4}$ e seu erro absoluto.

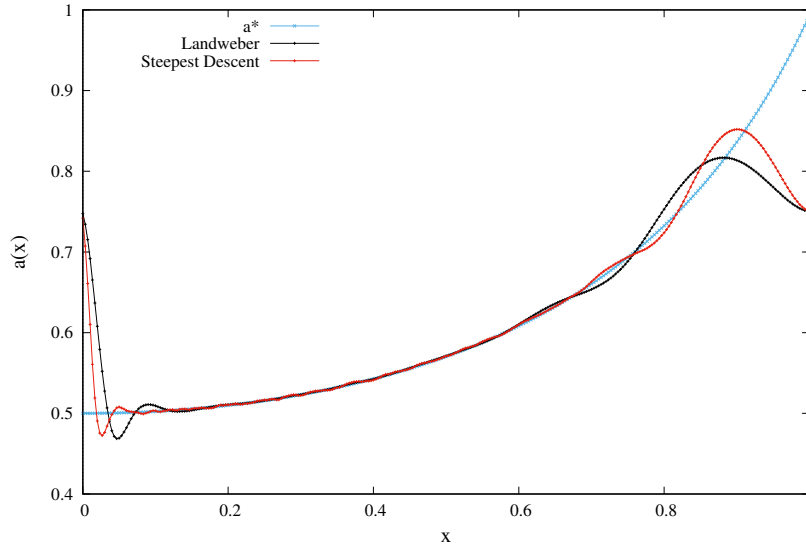
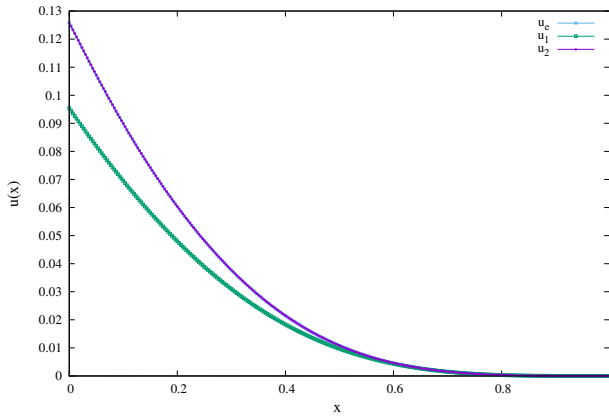
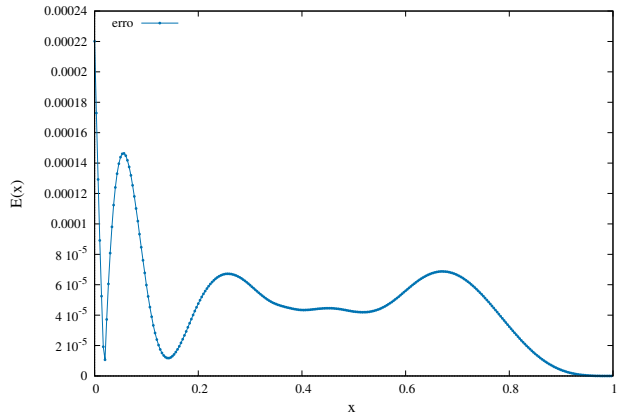


Figura 2.9: Coeficiente reconstruído $a_{k^*}^\delta$ pelos métodos de Landweber e Steepest Descent para $\delta = 10^{-6}$.

A Figura 2.9 mostra os coeficientes reconstruídos $a_{k^*}^\delta$ para $\delta = 10^{-6}$ pelos métodos de Landweber e Steepest Descent. Conforme Tabela 2.1 para esse nível de ruído, o princípio da discrepância não foi atingido. No entanto, a norma do resíduo $\|u^\delta - F(a_k^\delta)\|$ para Landweber e Steepest Descent foi de $7,35 \times 10^{-5}$ e $1,26 \times 10^{-5}$, respectivamente, calculadas para a última iteração realizada $k = 10^6$.



(a) Solução do problema direto u_k para $k = 1$ e k^* .



(b) Erro absoluto entre u_e e u_{k^*}

Figura 2.10: Solução do problema direto u_k e Erro $\|u_e - u_{k^*}\|$.

Apresentamos na Figura 2.10(a) o comportamento da solução do problema direto u_k , em diferentes estágios de iterações k . Importante destacar que a solução u_k é calculada a partir de a_k^δ correspondente, pelo método do Steepest Descent com nível de ruído $\delta = 10^{-4}$. Assim, a solução u_1 foi calculada a partir de a_k^δ quando $k = 1$, ou seja, quando $a_k^\delta = a_0 = 0,75$ e $u_2 = u_{k^*}$ para $k^* = 15.360$. A solução u_e corresponde a solução do problema direto calculada para o coeficiente exato $a^*(x) = \frac{1}{2-x^2}$. Como podemos ver as soluções de u_k convergem para a solução

exata do problema à medida que as iterações k vão se aproximando do k^* , da mesma forma que o Exemplo 1 para o coeficiente constante. O gráfico 2.10(b) apresenta o erro absoluto, ponto a ponto, entre a solução exata u_e e a solução $u_2 = u_{k^*}$ calculada a partir do coeficiente $a_{k^*}^\delta$ atingido pelo critério de parada (2.6.5).

Exemplo 4: Neste caso vamos assumir que a viga possui coeficiente de rigidez $a^*(x) = \frac{1}{x+2}$ a ser recuperado e coeficiente de transformação do meio $c(x) = \sqrt{x+1}$.

As Figuras 2.11(a)-(b) apresentam os coeficientes recuperados $a_{k^*}^\delta$ obtidos por ambos métodos iterativos e a Tabela 2.3 mostra os valores de k^* obtido para cada nível de ruído δ .

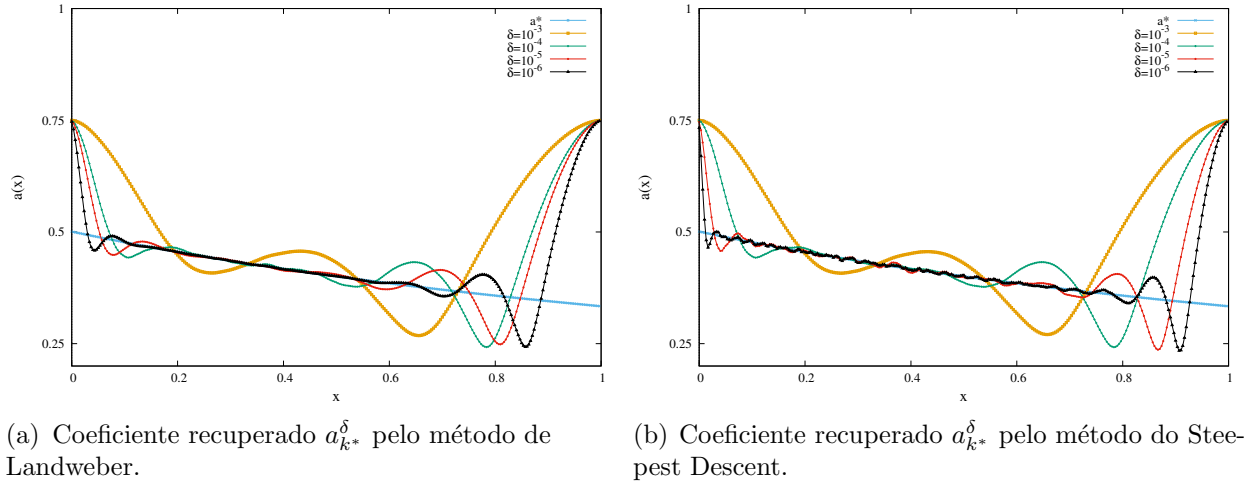


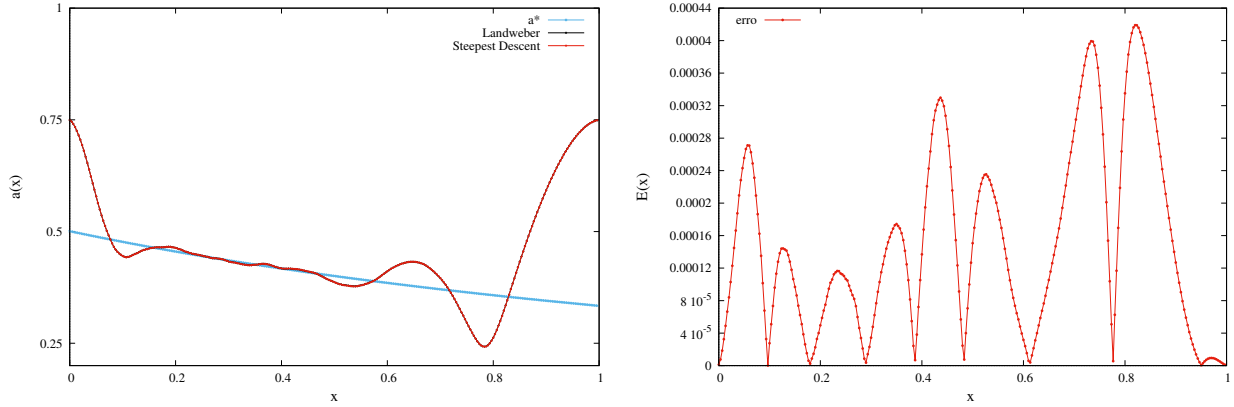
Figura 2.11: Coeficiente recuperado $a_{k^*}^\delta$ para diferentes níveis de ruídos δ .

Tabela 2.3: k^* obtido em cada nível de ruído δ para a Figura 2.11.

δ	k^* para Landweber	k^* para Steepest Descent
10^{-3}	679	212
10^{-4}	29.828	3328
10^{-5}	Não parou	85.451
10^{-6}	Não parou	Não parou

Na Figura 2.12(a) apresentamos uma comparação entre os coeficientes recuperados $a_{k^*}^\delta$ pelos métodos de Landweber e Steepest Descent para um nível de ruído $\delta = 10^{-4}$. Os métodos atingiram o princípio da discrepância para $k^* = 29.828$ no caso de Landweber e $k^* = 3328$ no caso de Steepest Descent. Seguindo os exemplos anteriores, o método do Steepest Descent atinge o princípio da discrepância mais rapidamente que o método de Landweber. Na Figura 2.12(b) apresentamos o erro absoluto em relação aos coeficientes obtidos em 2.12(a).

A Figura 2.13 mostra os coeficientes reconstruídos $a_{k^*}^\delta$ para $\delta = 10^{-6}$ por ambos os métodos. Conforme Tabela 2.3 para esse nível de ruído, o princípio da discrepância não foi atingido,



(a) Coeficiente recuperado $a_{k^*}^\delta$ pelos métodos de Landweber e Steepest Descent para $\delta = 10^{-4}$.

(b) Erro absoluto entre $a_{k^*}^\delta$ dos dois métodos.

Figura 2.12: Coeficiente recuperado $a_{k^*}^\delta$ para $\delta = 10^{-4}$ e seu erro absoluto.

apresentando a norma do resíduo $\|u^\delta - F(a_k^\delta)\|$ para Landweber e Steepest Descent com $1,18 \times 10^{-4}$ e $1,89 \times 10^{-5}$, respectivamente, calculadas para a última iteração realizada $k = 10^5$.

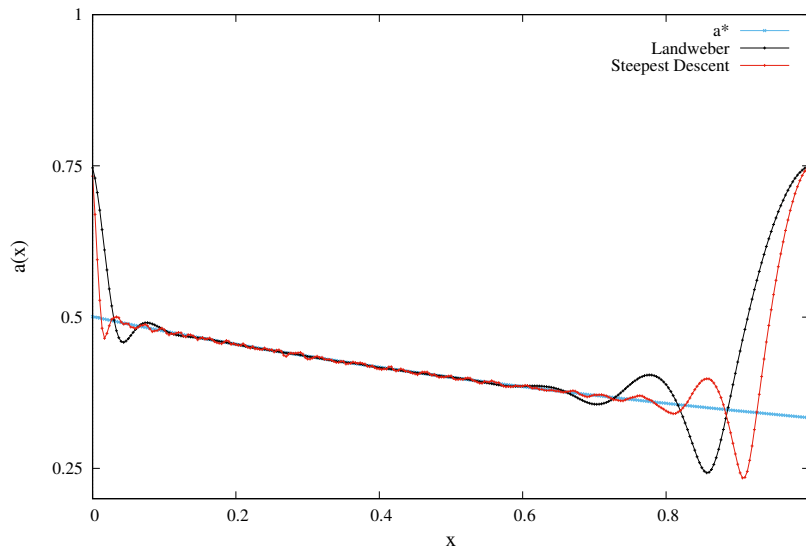
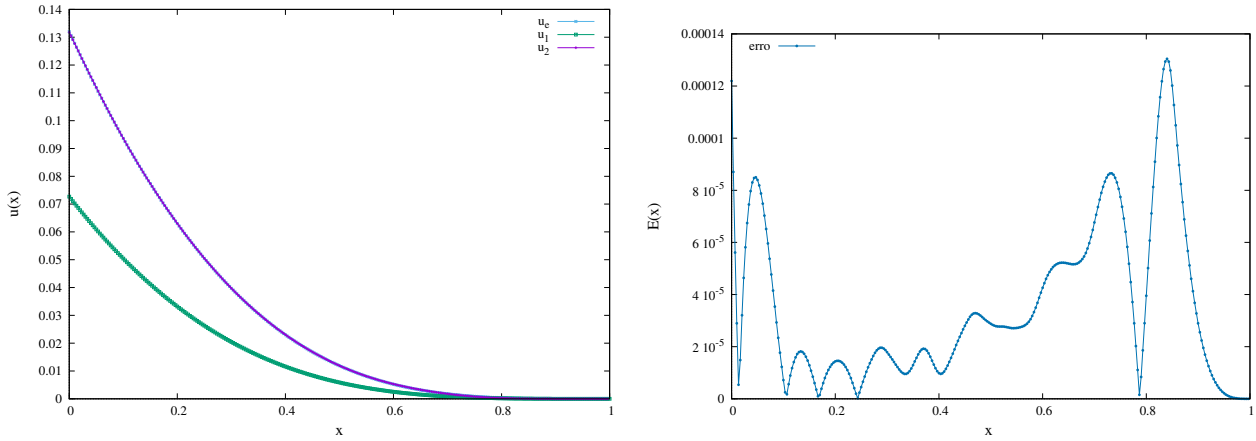


Figura 2.13: Coeficiente reconstruído $a_{k^*}^\delta$ pelos métodos de Landweber e Steepest Descent para $\delta = 10^{-6}$.

Apresentamos na Figura 2.14(a) o comportamento da solução do problema direto u_k em relação ao Exemplo 4, em diferentes estágios de iterações k .

Da mesma forma que nos exemplos anteriores, a solução u_k é calculada a partir de a_k^δ correspondente, pelo método do Steepest Descent com nível de ruído $\delta = 10^{-4}$. Assim, a solução u_1 foi calculada a partir de a_k^δ quando $k = 1$, ou seja, quando $a_k^\delta = a_0 = 0,75$ e $u_2 = u_{k^*}$ para $k^* = 15.360$. A solução u_e corresponde a solução do problema direto calculada para o coeficiente exato $a^*(x) = \frac{1}{x+2}$. Como podemos ver as soluções de u_k convergem para a solução exata do problema à medida que as iterações k vão se aproximando do k^* , da mesma forma que

(a) Solução do problema direto u_k para $k = 1$ e k^* .(b) Erro absoluto entre u_e e u_{k^*} Figura 2.14: Solução do problema direto u_k e Erro $\|u_e - u_{k^*}\|$.

o Exemplo 1 para o coeficiente constante. O gráfico 2.14(b) apresenta o erro absoluto, ponto a ponto, entre a solução exata u_e e a solução $u_2 = u_{k^*}$ calculada a partir do coeficiente $a_{k^*}^\delta$ atingido pelo critério de parada (2.6.5).

Com os exemplos apresentados vemos que ambos os métodos iterativos de Landweber e Steepest Descent produzem soluções aproximadas $a_{k^*}^\delta$ de forma estável, em diferentes cenários simulados, tanto para diferentes coeficientes de rigidez $a(x)$ quanto para diferentes coeficientes do meio $c(x)$. Podemos observar também que em todos os testes, o método do Steepest Descent atingiu o critério da discrepância mais rapidamente que o método de Landweber, o que já era previsto visto que o parâmetro γ_k em Landweber é uma constante fixa enquanto que em Steepest Descent esse parâmetro é calculado com base no resíduo $\|u^\delta - F(a_k^\delta)\|$ de cada nova iteração. Além disso, para recuperar o coeficiente $a^*(x)$ do Exemplo 3, ambos os métodos iteraram mais até atingir o princípio da discrepância para os níveis de ruídos 10^{-3} e 10^{-4} quando comparados com o Exemplo 2, mesmo os coeficientes de transformação $c(x)$ serem da mesma ordem polinomial, apesar de os coeficientes $a^*(x)$ não o serem.

Contudo, os resultados numéricos obtidos pelos métodos iterativos apresentados geram um coeficiente $a_{k^*}^\delta$ suave devido a iteração (2.6.4). Dessa forma, para recuperarmos um coeficiente do tipo constante por partes será necessário um outro método de regularização no qual faremos no próximo capítulo.

3 REGULARIZAÇÃO PARA O COEFICIENTE DE RIGIDEZ CONSTANTE POR PARTES

Neste capítulo vamos propor um método que recupere o coeficiente de rigidez $a(x)$ mas agora este constante por partes em um caso particular da equação (2.2.10) para o coeficiente do meio $c = 1$. Nesse caso, os métodos iterativos *Landweber* e *Steepest Descent* não são mais adequados pois geram coeficientes a^δ suaves.

O problema de identificação do coeficiente de rigidez já foi estudado por [37] em que é provado um resultado de identificabilidade única para coeficientes de rigidez mais gerais, em especial, para descontínuos, generalizando a análise feita por [32]. Dessa forma, nesse capítulo nosso foco está em analisar um método de regularização que possa recuperar de forma estável o coeficiente constante por partes para esse caso particular de (2.2.10). Vamos mostrar que as técnicas do tipo level sets podem ser utilizadas como método de regularização para nosso problema.

Os métodos level set foram desenvolvidos para problemas de evolução de curvas e superfícies, além de solucionar problemas de reconstruções de regiões [7]. São eficientes em recuperar formas que mudam de topologia.

Com relação ao foco desse capítulo, vamos assumir que o coeficiente $a(x)$ constante por partes possui dois valores conhecidos e distintos $\{a_1, a_2\}$ quase sempre no intervalo $[0, L]$. Ou seja, existe um conjunto de medida não nula $\Omega_1, \Omega_2 \subset [0, L]$ cuja medida é a de Hausdorff finita, de forma que

$$a(x) = \begin{cases} a_1, & \text{se } x \in \Omega_1 \\ a_2, & \text{se } x \in \Omega_2 := [0, L] - \Omega_1 \end{cases} \quad (3.0.1)$$

Portanto, o coeficiente de rigidez pode ser reescrito como segue

$$a(x) = a_2 + (a_1 - a_2)\chi_{\Omega_1}, \quad (3.0.2)$$

em que χ_X representa a função característica do conjunto X .

Antes de provarmos que a formulação level set seja de fato uma estratégia de regularização para o problema do coeficiente, vamos mostrar a suavidade dos coeficientes recuperados $a_\alpha^\delta(x)$ através dos métodos clássicos de regularização (Tikhonov e métodos iterativos) através do seguinte teorema:

Teorema 3.0.1. *Sejam **A1**), **A2**) válidas, com o coeficiente constante por partes em (3.0.2) satisfazendo A1) e os dados u^δ satisfazendo (2.4.15). Além disso, o coeficiente do meio é dado por $c = 1$. Assuma que a_0 é a priori suave. Então, o coeficiente reconstruído a_k^δ dado pela regularização de Tikhonov (A.3.2) ou pela regularização iterativa (2.6.4) é suave.*

Demonstração. A existência de um minimizador a_α^δ para o funcional de Tikhonov (A.3.2) segue das hipóteses **A1**) e **A2**), do Teorema 2.4.4 e da extração padrão de subsequências como em

[22, 28]. As condições de otimalidade de primeira ordem implicam que

$$a_\alpha^\delta \in a_0 + \frac{1}{2\alpha} F'(a_\alpha^\delta)^*(F(a_\alpha^\delta) - u^\delta). \quad (3.0.3)$$

Segue-se de (3.0.3) ou (2.6.4) que as soluções de regularização a_α^δ são tão suaves quanto $F'(a_\alpha^\delta)^*(F(a_\alpha^\delta) - u^\delta)$. Portanto, segue do Lema 2.4.9) que a_α^δ é pelo menos $H^2[0, L]$. $\square$

3.1 Estratégia tipo Level-Set de regularização

O método level set para o problema de identificação do coeficiente (3.0.2) consiste em obter uma função $\phi : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ em $H^1([0, L])$ de modo que as descontinuidades do coeficiente a coincida com o conjunto de nível zero $\Gamma_\phi := \{x \in [0, L] ; \phi(x) = 0\}$. A função ϕ chamamos de função level set. Além disso, usando a função Heaviside

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0 \\ 0, & \text{se } t \leq 0, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

o coeficiente de rigidez dado em (3.0.2) pode ser reescrito como

$$a(x) = a_2 + (a_1 - a_2)H(\phi) =: P(\phi) \quad (3.1.2)$$

em que a função level set ϕ e os conjuntos Ω_1, Ω_2 satisfazem a relação

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{x \in [0, L] : \phi(x) \geq 0\}, \\ \Omega_2 &= \{x \in [0, L] : \phi(x) < 0\}. \end{aligned}$$

Dessa forma, o operador $P(\phi)$ em (3.1.2) mapeia $H^1[0, L]$ no conjunto

$$\mathcal{V} := \{z \in L^\infty([0, L]) \mid z = a_2 + (a_1 - a_2) \chi_{\Omega_1}, \text{ para algum } \Omega_1 \subset [0, L]\}. \quad (3.1.3)$$

Sendo assim, o problema inverso em relação ao operador (2.4.1) quando o coeficiente do meio é dado por $c = 1$ pode ser escrito como

$$F(P(\phi)) = u^\delta, \quad (3.1.4)$$

onde u^δ são os dados com ruídos satisfazendo (2.4.15). Na medida em que obtemos uma solução aproximada ϕ de (3.1.4), uma solução aproximada correspondente de (2.4.1) com $c = 1$ é dada por $a = P(\phi)$. Assim, faremos ainda a inclusão de uma hipótese adicional:

H1) Existe a^* constante por partes solução de (2.4.1) com $c = 1$ e existe $\phi^* \in H^1[0, L]$ de forma que $P(\phi^*) = a^*$ com $|\nabla \phi^*| \neq 0$ em uma vizinhança de $\{\phi^* = 0\}$, tal que $H(\phi^*) = z \in \mathcal{V}$.

Para resolver o problema (3.1.4) podemos aplicar o método de regularização de Tikhonov no qual consiste em minimizar o funcional

$$J_\alpha(\phi) := \|F(P(\phi)) - u^\delta\|_{L^2[0,L]}^2 + \alpha \|\phi - \phi_0\|_{H^1([0,L])}^2 \quad (3.1.5)$$

com $\alpha > 0$ o parâmetro de regularização.

Ocorre que não temos garantias de que o operador F seja fracamente fechado assim não conseguimos afirmar que o funcional J_α em (3.1.5) tenha um mínimo que pertença ao espaço solução. Dessa forma, para superar essa dificuldade vamos de acordo com [7] incorporar um termo regularizante associado a semi-norma da função $P(\phi)$, penalizando o tamanho do conjunto de nível zero de ϕ . Passaremos a minimizar o funcional

$$\mathcal{F}_\alpha(\phi) := \|F(P(\phi)) - u^\delta\|_{L^2[0,L]}^2 + \alpha \left(\beta_1 |H(\phi)|_{BV} + \beta_2 \|\phi - \phi_0\|_{H^1([0,L])}^2 \right), \quad (3.1.6)$$

onde $\alpha > 0$ é o parâmetro único de regularização, enquanto as constantes positivas β_1, β_2 são fatores de escala. Além disso, $|\cdot|_{BV}$, representa a semi norma no espaço das funções de variação limitada, veja [14].

Repare que o operador P é descontínuo, logo o funcional $\mathcal{F}_\alpha$ em (3.1.6) não possui o gráfico fechado em $H^1[0, L]$, assim será necessário estender o conceito de minimizadores. Para isso vamos introduzir uma aproximação contínua aos operadores P e H descritos anteriormente. Segue para um dado $\varepsilon > 0$, uma aproximação contínua de P pode ser definida por

$$P_\varepsilon(\phi) := a_1 H_\varepsilon(\phi) + a_2 (1 - H_\varepsilon(\phi)) \quad (3.1.7)$$

em que o operador

$$H_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 + \frac{t}{\varepsilon}, & \text{para } t \in [-\varepsilon, 0] \\ H(t), & \text{para } t \in \mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, 0] \end{cases} \quad (3.1.8)$$

é uma aproximação contínua de H .

De acordo com [14] vamos apresentar um novo conceito de minimização para o nosso problema.

(D1) O par $(z, \phi) \in L^\infty[0, L] \times H^1[0, L]$ é dito *admissível* quando existir

(i) uma sequência de funções $\{\phi_k\}$ em $H^1[0, L]$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\phi_k - \phi\|_{L^2[0,L]} = 0$$

(ii) uma sequência de números positivos $\varepsilon_k \rightarrow 0$ que satisfazem

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|H_{\varepsilon_k}(\phi_k) - z\|_{L^1[0,L]} = 0.$$

(D2) Um mínimo generalizado para $\mathcal{F}_\alpha$ dado em (3.1.6) será considerado como qualquer par

admissível de funções (z, ϕ) minimizando

$$\mathcal{G}_\alpha(z, \phi) := \|F(Q(z)) - u^\delta\|_{L^2[0, L]}^2 + \alpha \left(\inf \left\{ \liminf_{k \rightarrow \infty} (\beta_1 |H_{\varepsilon_k}(\phi_k)|_{BV} + \beta_2 \|\phi_k - \phi_0\|_{H^1[0, L]}) \right\} \right), \quad (3.1.9)$$

sobre o conjunto de pares admissíveis, em que $Q : L^\infty[0, L] \ni z \mapsto a_1 z + a_2(1 - z) \in L^\infty[0, L]$.

Importante destacar que com esse novo conceito de mínimo, um minimizador de $\mathcal{F}_\alpha$ é um minimizador de $\mathcal{G}_\alpha(z, \phi)$ no conjunto de pares admissíveis. Além disso, para o operador P contínuo, podemos definir $P_\varepsilon := P$ e assim, a classe de pares admissíveis (z, ϕ) que satisfazem a definição 3.1 também satisfazem a equação $P(\phi) = z$ de modo trivial. No entanto, para P descontínuo (nosso caso) o novo conceito de mínimo é de fato necessário.

[Existência de minimizadores generalizados, Convergência e Estabilidade] Considere a hipótese **H1)** verdadeira. Então:

- i) [Existência] O funcional $\mathcal{F}_\alpha$ em (3.1.6) atinge minimizadores generalizados no conjunto de pares admissíveis.
- ii) [Convergência] Suponha que tenhamos dados exatos $u^\delta = u$. Para cada $\alpha > 0$, seja (z_α, ϕ_α) um minimizante de $\mathcal{G}_\alpha$ no conjunto de pares admissíveis. Assim, para qualquer sequência de números positivos $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergindo para zero, existe uma subsequência (denotada novamente por $\{\alpha_k\}$), tal que $(z_{\alpha_k}, \phi_{\alpha_k})$ converge forte para $(\hat{z}, \hat{\phi})$ em $L^1[0, L] \times \mathcal{L}^2[0, L]$, com $(\hat{z}, \hat{\phi})$ uma solução de (3.1.4).
- iii) [Estabilidade] Seja $\alpha = \alpha(\delta)$ uma função satisfazendo

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} = 0.$$

Além disso, seja $\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergindo para zero, e $\{u^{\delta_k}\} \in L^2[0, L]$ os dados com ruídos satisfazendo (2.4.15). Então, existe uma subsequência (denotada novamente por $\{\delta_k\}$), e sua correspondente $\{\alpha_k := \alpha(\delta_k)\}$ tal que $(z_{\alpha_k}, \phi_{\alpha_k})$ converge em $L^1[0, L] \times \mathcal{L}^2[0, L]$ para uma solução de (3.1.4).

Demonstração. Segue do Teorema 2.4.3 que o operador F em (2.4.1) com $c = 1$ é contínuo na topologia de $L^1[0, L]$. Dessa forma, todas as hipóteses necessárias em [9, Theorem 6, 8, 9] são satisfeitas, sendo um caso particular da análise feita em [9]. $\square$

3.1.1 Exemplos Numéricos

Obter mínimos generalizados para o funcional $\mathcal{F}_\alpha$ é inviável conforme apontado por [7]. Portanto, apresentamos um funcional que pode ser tratado numericamente e cujos minimizadores se aproximam dos minimizadores de $\mathcal{F}_\alpha$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Assim, seja $\mathcal{G}_{\varepsilon, \alpha}(\phi)$ um funcional

suavizado definido por

$$\mathcal{G}_{\varepsilon,\alpha}(\phi) := \|F(P_\varepsilon(\phi)) - u^\delta\|_{L^2[0,L]}^2 + \alpha \left(\beta_1 |H_\varepsilon(\phi)|_{BV} + \beta_2 \|\phi - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \quad (3.1.10)$$

possuindo minimizantes em $H^1[0, L]$. Na verdade, essa estratégia é garantida pelo Teorema 2.4.3 e a hipótese **H1**) na análise feita em [9, Lemma 10, Theorem 11]. Note que minimizadores de $\mathcal{G}_{\varepsilon,\alpha}$ são funções em $H^1[0, L]$ enquanto que minimizadores de $\mathcal{F}_\alpha$ são pares admissíveis.

Para obtermos resultados numéricos, vamos derivar condições de otimalidade para o funcional $\mathcal{G}_{\varepsilon,\alpha}$ através do cálculo da derivada de Gâteaux igualada a zero. Assim, assumamos que $\phi \in e$ e $v \in C_0^\infty$ então temos

- *Primeiro termo:*

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\|F(P_\varepsilon(\phi + tv)) - u^\delta\|_{L^2[0,L]}^2 - \|F(P_\varepsilon(\phi)) - u^\delta\|_{L^2[0,L]}^2 \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\|F(P_\varepsilon(\phi)) + tF'(P_\varepsilon(\phi))P'_\varepsilon(\phi)(v) + \mathcal{O}(t^2) - u^\delta\|_{L^2[0,L]}^2 - \|F(P_\varepsilon(\phi)) - u^\delta\|_{L^2[0,L]}^2 \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\|F(P_\varepsilon(\phi)) - u^\delta\|_{L^2[0,L]}^2 + 2t \langle F(P_\varepsilon(\phi)) - u^\delta, F'(P_\varepsilon(\phi))P'_\varepsilon(\phi)(v) \rangle_{L^2[0,L]} + \right. \\ &\quad \left. + t^2 \|F'(P_\varepsilon(\phi))P'_\varepsilon(\phi)(v)\|_{L^2[0,L]}^2 + \mathcal{O}(t^2) - \|F(P_\varepsilon(\phi)) - u^\delta\|_{L^2[0,L]}^2 \right) \\ &= \|F(P_\varepsilon(\phi)) - u^\delta\|_{L^2[0,L]}^2 + 2 \langle F(P_\varepsilon(\phi)) - u^\delta, F'(P_\varepsilon(\phi))P'_\varepsilon(\phi)(v) \rangle_{L^2[0,L]} - \|F(P_\varepsilon(\phi)) - u^\delta\|_{L^2[0,L]}^2 \\ &= 2 \langle F(P_\varepsilon(\phi)) - u^\delta, F'(P_\varepsilon(\phi))P'_\varepsilon(\phi)(v) \rangle_{L^2[0,L]} \\ &= 2 \langle F'(P_\varepsilon(\phi))^* (F(P_\varepsilon(\phi)) - u^\delta), P'_\varepsilon(\phi)(v) \rangle_{L^2[0,L]}. \end{aligned}$$

Como $P'_\varepsilon(\phi)$ é auto-adjunta temos que

$$= 2 \langle P'_\varepsilon(\phi) F'(P_\varepsilon(\phi))^* (F(P_\varepsilon(\phi)) - u^\delta), P'_\varepsilon(\phi)(v) \rangle_{L^2[0,L]}.$$

Em relação ao segundo termo, de acordo com [7] temos que considerar

$$|P_\varepsilon(\phi)|_{BV} = \sup \left\{ \int_\Omega P_\varepsilon(\phi) \operatorname{div} \varphi d\mathcal{L} : \varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}) \quad \text{com} \quad \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\} = \int_\Omega |\nabla P_\varepsilon(\phi)| d\mathcal{L}$$

além das identidades de Green [5]. Nesse caso temos

- *Segundo termo:*

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (|H_\varepsilon(\phi + tv)|_{BV} - |H_\varepsilon(\phi)|_{BV}) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\int_{[0,L]} |\nabla H_\varepsilon(\phi + tv)| d\mathcal{L} - \int_{[0,L]} |\nabla H_\varepsilon(\phi)| d\mathcal{L} \right) \\
&= \int_{[0,L]} \frac{\nabla H_\varepsilon(\phi)}{|\nabla H_\varepsilon(\phi)|} \nabla H'_\varepsilon(\phi)(v) d\mathcal{L} \\
&= - \int_{[0,L]} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla H_\varepsilon(\phi)}{|\nabla H_\varepsilon(\phi)|} \right) \cdot H'_\varepsilon(\phi)(v) d\mathcal{L} \\
&= - \langle \nabla \cdot \left(\frac{\nabla H_\varepsilon(\phi)}{|\nabla H_\varepsilon(\phi)|} \right), H'_\varepsilon(\phi)(v) \rangle_{L^2} \\
&= - \langle H'_\varepsilon(\phi) \nabla \cdot \left(\frac{\nabla H_\varepsilon(\phi)}{|\nabla H_\varepsilon(\phi)|} \right), v \rangle_{L^2}.
\end{aligned}$$

Novamente, utilizaremos a identidade de Green para calcularmos a terceira parte. Logo,

• *Terceiro termo:*

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\|\phi + tv - \phi_0\|_{H^1[0,L]}^2 - \|\phi - \phi_0\|_{H^1[0,L]}^2 \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\|\phi - \phi_0\|_{H^1[0,L]}^2 + 2t \langle \phi - \phi_0, v \rangle_{H^1[0,L]} + t^2 \|v\|_{H^1[0,L]}^2 - \|\phi - \phi_0\|_{H^1[0,L]}^2 \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(2t \langle \phi - \phi_0, v \rangle_{H^1[0,L]} + t^2 \|v\|_{H^1[0,L]}^2 \right) \\
&= 2 \langle \phi - \phi_0, v \rangle_{H^1[0,L]} \\
&= 2 \left(\int_{[0,L]} (\phi - \phi_0) v d\mathcal{L} + \int_{[0,L]} \nabla(\phi - \phi_0) \cdot \nabla v d\mathcal{L} \right) \\
&= 2 \left(\int_{[0,L]} (\phi - \phi_0) v d\mathcal{L} - \int_{[0,L]} \Delta(\phi - \phi_0) v d\mathcal{L} + \int v \cdot \frac{\partial(\phi - \phi_0)}{\partial \eta} dS \right) \\
&= 2(\langle \phi - \phi_0, v \rangle_{L^2[0,L]} - \langle \Delta(\phi - \phi_0), v \rangle_{L^2[0,L]}) + 2 \int v \cdot \frac{\partial(\phi - \phi_0)}{\partial \eta} dS \\
&= 2 \langle (I - \Delta)(\phi - \phi_0), v \rangle_{L^2[0,L]} + 2 \int v \cdot \frac{\partial(\phi - \phi_0)}{\partial \eta} dS.
\end{aligned}$$

Agora juntando os termos calculados, obtemos então a seguinte equação de otimalidade para o funcional $\mathcal{G}_{\varepsilon, \alpha}$

$$\beta_2 \alpha [(\phi - \phi_0)'' - (\phi - \phi_0)] = (a_1 - a_2) H'_\varepsilon(\phi) F'(P_\varepsilon(\phi))^* (F(P_\varepsilon(\phi)) - u^\delta) + 1/2 \beta_1 \alpha \varepsilon^{-2} \text{sign}(H'_\varepsilon(\phi)), \quad (3.1.11)$$

com condições de contorno de $(\phi - \phi_0)'(0) = (\phi - \phi_0)'(L) = 0$.

Apresentamos a Tabela (3.1) seguir com o algoritmo iterativo para recuperar o coeficiente, cujos cálculos para a obtenção da adjunta da derivada de Fréchet do operador F seguem de acordo com o Lema 2.4.9.

Tabela 3.1: Algoritmo Level Set.

Passo 1: Avaliar o resíduo $r_k := F(P_\varepsilon(\phi_k)) - u^\delta$ onde $F(P_\varepsilon(\phi_k)) = u_\varepsilon$ solução de $P_\varepsilon(\phi_k)u_\varepsilon'' = M$ com condições (2.2.11).
Passo 2: Avaliar $F'(P_\varepsilon(\phi_k))^* r_k$. Para isso: Passo 2.1: Resolver $-(P_\varepsilon(\phi_k)v_k)'' = r_k$ com condições $v'(0) = v'(1) = 0$. Passo 2.2: Calcular $\frac{M}{P_\varepsilon(\phi_k)}v_k$ em que v_k é solução do Passo 2.1.
Passo 3: Calcular $R_\varepsilon(\phi_k)$ dada pelo lado direito de (3.1.11) para $\phi = \phi_k$
Passo 4: Avaliar $\delta\phi_k$ solução de $\alpha\beta_1(I - \Delta)\delta\phi_k = -R_\varepsilon(\phi_k)$ com $(\delta\phi)_V = 0$ e $R_\varepsilon(\phi_k)$ calculado no Passo 3 conforme (3.1.11).
Passo 5: Atualizar $\phi_{k+1} = \phi_k + \delta\phi_k$.

Vamos apresentar algumas simulações numéricas para recuperar o coeficiente $a(x)$ dado por (3.0.2) de acordo com o algoritmo 3.1. Em todos os exemplos a viga corresponde a um comprimento $L = 1$, o momento fletor é $M(x) = \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}$. A solução numérica foi obtida através de diferenças finitas com pontos distribuídos $x_i = i/N, i = 0, \dots, N$ com $N = 200$. Os dados medidos u^δ são simulados através da equação $u^\delta = u(x) + \xi$, em que ξ é uma variável randômica uniformemente distribuída com valores entre $[-1, 1]$ e $u(x) = u(a^*(x))$ é a solução de (2.2.10), com $c(x) = 1$ e $a^*(x)$ é o coeficiente a ser identificado, dado por

$$a^*(x) \begin{cases} 0.5 & \text{se } x \in [0, 1/2] \\ 1.0 & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (3.1.12)$$

As Figuras 3.1(a)-(b) apresentam o coeficiente recuperado $a_k^\delta = P_\varepsilon(\phi_k)$ conforme (3.1.2) para nível de ruído $\delta = 0,001$, em diferentes estágios da iteração. É possível observar que o coeficiente iterado pelo algoritmo 3.1 se aproxima da solução exata.

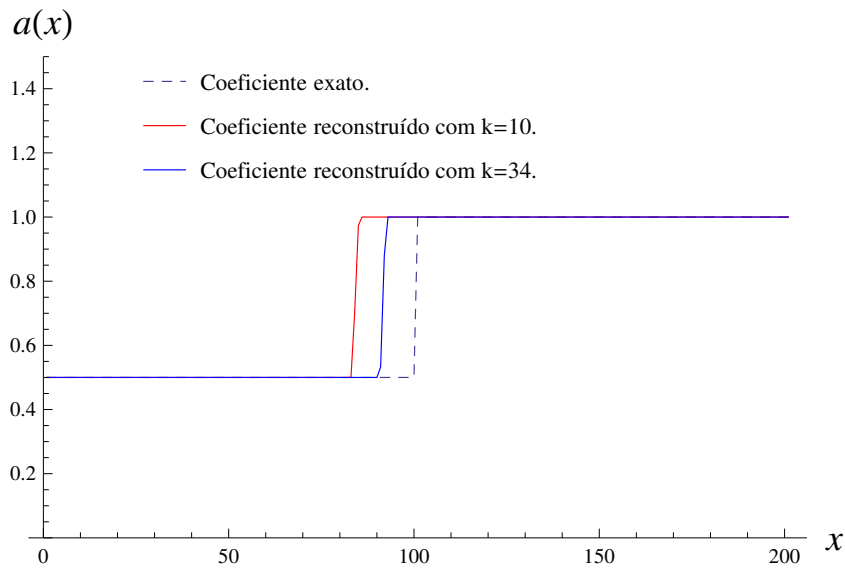


Figura 3.1: Coeficiente reconstruído $a_k^\delta = P_\varepsilon(\phi_k)$ em dois níveis de iterações com nível de ruído $\delta = 0,001$.

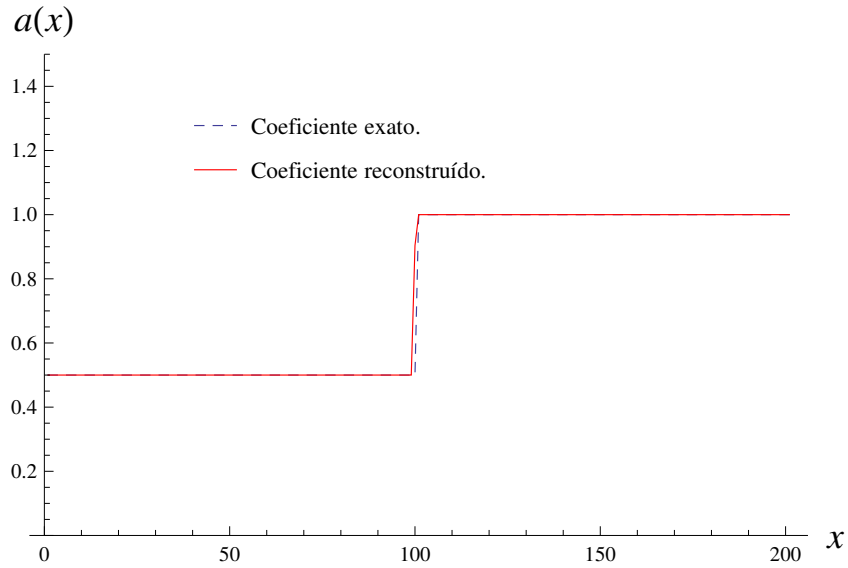


Figura 3.2: Coeficiente reconstruído $a_k^\delta = P_\varepsilon(\phi_k)$ em dois níveis de iterações com nível de ruído $\delta = 0,001$.

As Figuras 3.3 apresenta o coeficiente recuperado para outro nível de ruído, $\delta = 0,01$ em diferentes pontos da iteração k . Novamente é possível observar que a iteração do algoritmo produz soluções aproximadas que convergem para a solução do problema.

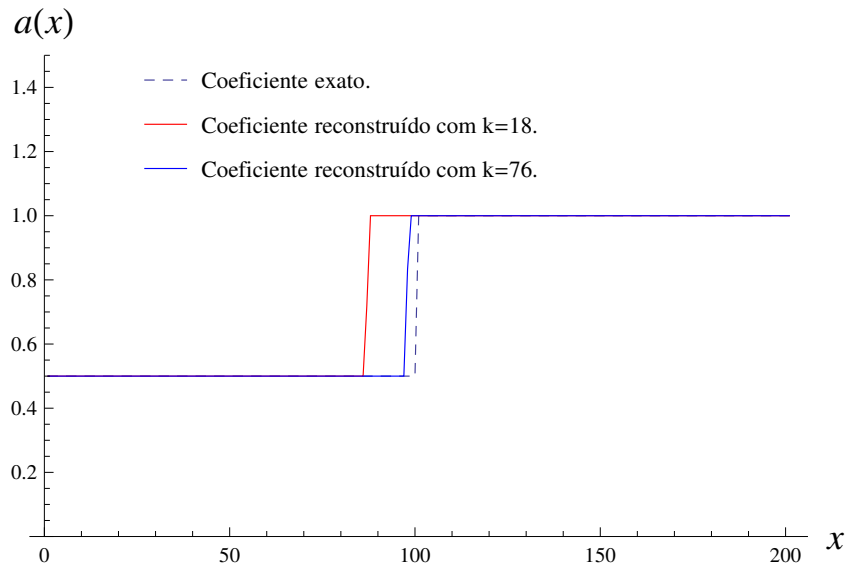


Figura 3.3: Coeficiente reconstruído $a_k^\delta = P_\varepsilon(\phi_k)$ em dois níveis de iterações com nível de ruído $\delta = 0,01$.

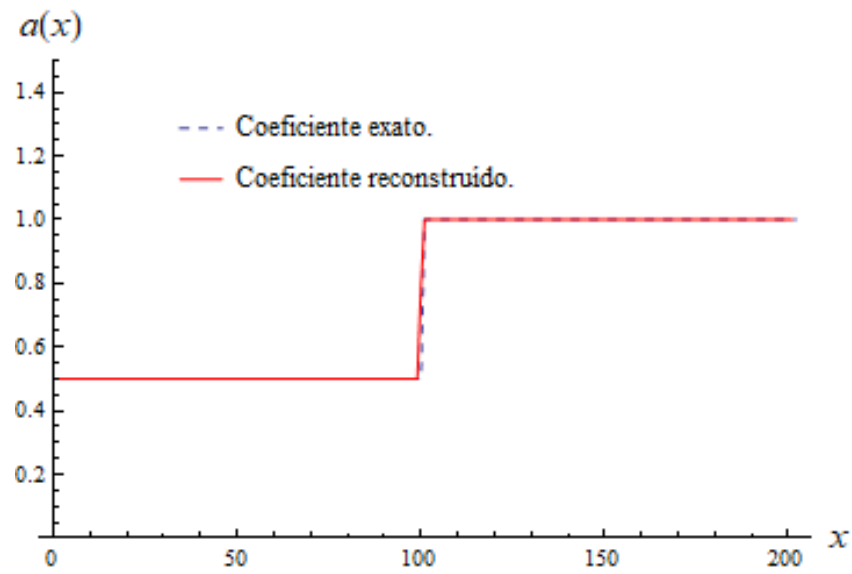


Figura 3.4: Coeficiente reconstruído $a_k^\delta = P_\varepsilon(\phi_k)$ em dois níveis de iterações com nível de ruído $\delta = 0,01$.

4 EQUAÇÃO DINÂMICA DE EULER-BERNOULLI EM UMA BASE VISCOELÁSTICA

Neste capítulo, estudaremos o problema inverso de identificação de fonte em um modelo de vigas dinâmicas do tipo Euler-Bernoulli, no qual a viga está apoiada em uma base viscoelástica. A modelagem do problema que abordaremos incorpora um termo com ordem fracionária, o qual descreve a interação da viga sobre o apoio viscoelástico. Nosso objetivo aqui é aplicar as técnicas utilizadas em [23, 24] e referências, para provar a identificabilidade única da fonte.

4.1 Modelo dinâmico para uma viga apoiada em uma base viscoelástica

Como já abordado anteriormente, o cálculo fracionário tem despertado muita atenção nas últimas décadas, aparecendo em uma quantidade muito grande de aplicações. Uma destas aplicações está na mecânica com os materiais viscoelásticos, e.g., [11, 43] e referências. Isso porque as derivadas e integrais não inteiras incorporam maior flexibilidade aos modelos, permitindo tratar, por exemplo, materiais compostos, cujas características e dinâmicas não são bem descritas pelas equações tradicionais [11, 43].

Em particular, materiais viscoelásticos são amplamente utilizados como amortecedores para controlar vibrações incômodas em diversos tipos de estruturas [4]. Segundo [43] existem duas abordagens para modelar o comportamento viscoelástico de sistemas estruturais contínuos usando operadores fracionários: uma delas considera vibrações de sistemas elásticos em um meio viscoso ou em uma base viscoelástica, ou seja, estuda equações diferenciais de movimento da estrutura elástica contínua com termos adicionais fracionários representando o amortecimento externo. Outra abordagem estuda vibrações de sistemas viscoelásticos alterando os módulos elásticos em equações já conhecidas por operadores viscoelásticos ou ainda estabelecendo relações entre o estresse e a tensão durante a derivação das equações de movimento das estruturas viscoelásticas.

Ocorre que a relação constitutiva convencional da lei de Hooke não é uma representação precisa do comportamento desses materiais viscoelásticos. Segundo a teoria linear da viscoelasticidade, $E(t)$ é a função de relaxação e $D(t)$ a função de fluência, ou simplesmente funções materiais de um corpo viscoelástico. $E(t)$ pode ser interpretada como o histórico de tensão para uma deformação unitária $\epsilon(t) = U(t)$ enquanto que $D(t)$ representa o histórico de deformação para uma tensão unitária $\sigma(t) = U(t)$ onde $U(t)$ é a função de Heaviside [35]. De acordo com [11] $E(t)$ pode ser descrito adequadamente por

$$E(t) = \frac{E_\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)} t^{-\alpha} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (4.1.1)$$

em que $\Gamma(\cdot)$ é a função Gamma, $E_\alpha/\Gamma(1 - \alpha)$ e α são coeficientes característicos dependendo do material. Visto que $E(t)$ é dado por (4.1.1), a função $D(t)$ pode ser expressa por

$$D(t) = \frac{1}{E_\alpha \Gamma(1 + \alpha)} t^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (4.1.2)$$

Ainda, de acordo com o princípio de superposição de Boltzmann [35], o histórico de tensão, para um determinado histórico de deformação $\epsilon(t)$ pode ser derivado na forma

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t - \bar{t}) \dot{\epsilon}(\bar{t}) d\bar{t}. \quad (4.1.3)$$

Consequentemente, o histórico de deformação, para um histórico de tensão atribuído pode ser expresso na forma

$$\epsilon(t) = \int_0^t D(t - \bar{t}) \dot{\sigma}(\bar{t}) d\bar{t}. \quad (4.1.4)$$

As equações (4.1.3) e (4.1.4) são válidas quando o sistema parte do repouso, caso contrário, devem ser adicionados os termos $E(t)\epsilon(0)$ e $D(t)\sigma(0)$ as equações (4.1.3) e (4.1.4), respectivamente.

Se assumirmos o kernel nas integrais de convolução das equações (4.1.3) e (4.1.4) como dado na equação (4.1.1), a lei constitutiva fracionária do material viscoelástico resulta nas formas

$$\sigma(t) = E_\alpha ({}_c D_{0+}^\alpha \epsilon)(t) \quad (4.1.5)$$

e

$$\epsilon(t) = \frac{1}{E_\alpha} (D_{0+}^{-\alpha} \sigma)(t) \quad (4.1.6)$$

em que $({}_c D_{0+}^\alpha \epsilon)(t)$ é a derivada de Caputo (veja a definição em A.6.3) e $(D_{0+}^{-\alpha} \sigma)(t)$ é a integral fracionária de Riemann-Liouville apresentada em A.6.1.

Essas equações constitutivas fracionárias juntamente com a teoria de vigas dão origem ao modelo fracionário de Euler-Bernoulli, considerando as hipóteses restritivas do modelo clássico, e.g., [11].

Com base nisso, vamos analisar a equação que governa a deflexão $v(t, x)$ de uma viga de comprimento L apoiada em uma base viscoelástica e sujeita a ação de uma força $q(t, x)$ adaptada de acordo com a equação apresentada em [33], a qual é dada por

$$\rho A \frac{\partial v}{\partial t^2}(t, x) + c_0 \partial_t^\alpha v(t, x) + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(t, x) - N \frac{\partial v}{\partial x^2}(t, x) = q(t, x), \quad (4.1.7)$$

em que ρ é a densidade de massa e A é a área da seção transversal, com as seguintes condições

de contorno

$$\begin{aligned} v(0, x) &= \xi_0(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(0, x) = \xi_1(x), \quad \text{em } (0, L), \\ v(t, 0) &= v(t, L) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, 0) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, L) = 0, \quad \text{em } (0, T). \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

O termo ${}_0\partial_t^\alpha v(t, x)$ representa a derivada parcial fracionária de Caputo (ver A.6.3), e descreve o amortecimento proveniente do material viscoelástico (para $\alpha = 0$ o comportamento é puramente elástico e quando $\alpha = 1$ o comportamento é puramente viscoso) [33]. Além disso, $E(x)$ descreve o módulo de elasticidade, $I(x)$ o momento de inércia e N o termo de força axial. A condição de contorno (4.1.8) correspondem a uma viga simplesmente apoiada, ou seja, uma extremidade composta por um pino e a outra por um rolete.

Vamos apresentar na próxima seção a existência de solução para o problema direto associado ao modelo (4.1.7) com condições (4.1.8).

4.1.1 Existência de solução para o modelo

Nesta subseção apresentaremos uma solução explícita para o modelo (4.1.7) através da teoria de semigrupos e das propriedades de ortonormalidade das famílias seno e cosseno associadas (ver A.4 se necessário).

Seja $v : [0, T] \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ como $v : [0, T] \rightarrow H = L^2(0, L)$, onde $v(t)(x) = v(t, x)$, $t \in [0, T]$, $x \in [0, L]$.

Para o conjunto $D(\mathcal{A}) = \{y \in H^4(0, L) : y(0) = y(L) = y''(0) = y''(L) = 0\}$ e considerando a equação (4.1.7), definimos o operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \rightarrow H := L^2(0, L)$ como

$$\mathcal{A}v(t) = \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(t, \cdot) - \frac{N}{\rho A} \frac{\partial v}{\partial x^2}(t, \cdot), \quad t \in [0, T]. \quad (4.1.9)$$

No que segue, apresentaremos a demonstração de alguns resultados que são auxiliares, mas necessários para estabelecer o resultado principal deste capítulo. Tais resultados também podem ser encontrados em [33].

Lema 4.1.1. *Seja $\mathcal{A}$ o operador definido em (4.1.9). Este operador é linear, limitado, auto-adjunto e positivo.*

Demonstração. A linearidade e a limitação seguem diretamente do fato de $\mathcal{A}$ ser composto por derivadas parciais de ordem até 4 e da definição de $D(\mathcal{A})$.

Para mostrar que o operador é auto-adjunto, note que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}v, y \rangle &= \int_0^L \left(\frac{EI}{\rho A} \frac{d^4 v}{dx^4} - \frac{N}{\rho A} \frac{d^2 v}{dx^2} \right) y(x) dx \\ &= \int_0^L \left(\frac{EI}{\rho A} \frac{d^4 v}{dx^4} \right) y(x) dx - \int_0^L \left(\frac{N}{\rho A} \frac{d^2 v}{dx^2} \right) y(x) dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes 4 vezes a primeira integral e 2 vezes a segunda integral na equação acima, temos que

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}v, y \rangle &= \frac{EI}{\rho A} \left[y(x) \frac{d^3 v}{dx^3} - y'(x) \frac{d^2 v}{dx^2} + y''(x) \frac{dv}{dx} - y'''(x) \cdot v(x) \right] \Big|_0^L + \frac{EI}{\rho A} \int_0^L v(x) \frac{d^4 y}{dx^4}(x) dx \\ &- \frac{N}{\rho A} \left[y(x) \frac{dv}{dx} - y'(x) \cdot v(x) \right] \Big|_0^L - \frac{N}{\rho A} \int_0^L v(x) \frac{d^2 y}{dx^2}(x) dx.\end{aligned}$$

Agora, aplicando as condições de contorno do operador (4.1.9) na identidade anterior, segue que

$$\langle \mathcal{A}v, y \rangle = \int_0^L \left(\frac{EI}{\rho A} \frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{N}{\rho A} \frac{d^2 y}{dx^2} \right) v(x) dx = \langle v, \mathcal{A}y \rangle,$$

o que prova que o operador $\mathcal{A}$ é auto adjunto.

Nos resta mostrar que o operador é positivo. Note que

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}v, v \rangle &= \int_0^L \left(\frac{EI}{\rho A} \frac{d^4 v}{dx^4} - \frac{N}{\rho A} \frac{d^2 v}{dx^2} \right) v(x) dx \\ &= \int_0^L \left(\frac{EI}{\rho A} \frac{d^4 v}{dx^4} \right) v(x) dx - \int_0^L \left(\frac{N}{\rho A} \frac{d^2 v}{dx^2} \right) v(x) dx.\end{aligned}$$

Integrando por partes 2 vezes o primeiro termo e uma vez o segundo e ainda utilizando as condições de contorno do operador (4.1.9), obtemos que

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}v, v \rangle &= \int_0^L \left(\frac{EI}{\rho A} \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} \right) + \left(\frac{N}{\rho A} \frac{dv}{dx} \frac{dv}{dx} \right) \\ &= \int_0^L \left(\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{N}{\rho A}} \frac{dv}{dx} \right)^2 > 0,\end{aligned}$$

concluindo as afirmações do lema. □

Uma consequência do Lema 4.1.1 é o seguinte resultado.

Lema 4.1.2. *Seja $\mathcal{A}$ o operador definido em (4.1.9). Então, existe uma base ortonormal completa $\{e_n\}$ de H de autovetores de $\mathcal{A}$ e uma correspondente sequência de autovalores positivos λ_n , tais que*

$$\mathcal{A}y = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle y, e_n \rangle_H e_n, \quad \text{para } y \in D(\mathcal{A}). \quad (4.1.10)$$

Em particular, $e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{n\pi}{L}x)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in (0, L)$ de $\mathcal{A}$ e $\lambda_n = \frac{EI}{\rho A} (\frac{n\pi}{L})^4 + \frac{N}{\rho A} (\frac{n\pi}{L})^2$, $n \in \mathbb{N}$ em que $\langle y, e_n \rangle_H = \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L y(x) \sin(\frac{n\pi}{L}x) dx$ é o produto interno em H .

Demonstração. Segue do Lema 4.1.1 e do Teorema Espectral [29], que existe um sistema ortonormal completo formado por autofunções de ortonormais $e_n(x)$ com respectivos autovalores

λ_n positivos, tais que (4.1.10) seja satisfeita. Segue ainda de [42], que $e_n(x)$ e λ_n são dadas como enunciado no lema. $\square$

Segue dos Lemas 4.1.1 e 4.1.2 (veja também [33]) que, $-\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de uma família cosseno fortemente contínua, $C(t), t \in \mathbb{R}$, em H com a seguinte forma

$$C(t)y = \sum_0^\infty \cos[(\lambda_n)^{1/2}t] \langle y, e_n \rangle e_n, \quad \text{para } y \in H, \quad (4.1.11)$$

cujas respectivas famílias seno fortemente contínuas, $S(t), t \in \mathbb{R}$ em H são dadas por

$$S(t)y = \int_0^L C(s)y ds = \sum_0^\infty \frac{1}{(\lambda_n)^{1/2}} \sin[(\lambda_n)^{1/2}t] \langle y, e_n \rangle e_n, \quad \text{para } y \in H. \quad (4.1.12)$$

Portanto, assumindo que $q(t, \cdot) \in H$, o problema (4.1.7)-(4.1.8) pode ser reduzido ao problema de valor inicial escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} d(v'(t, \cdot)) + \left[\frac{c}{\rho A} D_t^\alpha v(t, \cdot) + \mathcal{A}v(t, \cdot) \right] dt &= \frac{1}{\rho A} q(t, \cdot) dt, \quad \text{em } (0, T), \\ v(0, \cdot) &= \xi_0, v'(0, \cdot) = \xi_1 \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

em que $\mathcal{A}$ é o operador (4.1.9) Agora, note que (4.1.13) pode ser escrita como a seguinte equação integro-diferencial em H

$$v'(t, \cdot) + \int_0^t \left[\frac{c}{\rho A} D_t^\alpha v(t, \cdot) + \mathcal{A}v(t, \cdot) \right] dt = \xi_1 + \frac{1}{\rho A} \int_0^t q(s, \cdot) ds, \quad \text{em } [0, T]. \quad (4.1.14)$$

Utilizando o método da variação dos parâmetros, obtemos que uma possível solução para (4.1.13) (ou (4.1.14)) é dada por

$$v(t, \cdot) = C(t)\xi_0 + S(t)\xi_1 - \frac{c}{\rho A} \int_0^t S(t-s) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^s \frac{v'(r, \cdot)}{(s-r)^\alpha} dr ds + \frac{1}{\rho A} \int_0^t S(t-s) q(s, \cdot) ds \quad (4.1.15)$$

onde $C(t), S(t)$ são, respectivamente, as famílias apresentadas em (4.1.11) e (4.1.12).

Para tratar o termo fracionário em (4.1.15), vamos apresentar o lema abaixo. Para outros detalhes, sugerimos o leitor que consulte [33].

Lema 4.1.3. [33, Lemma 2] Suponha $v(t, \cdot) \in H$ com $v'(t, \cdot)^{\frac{1}{1-\alpha}} \in L^1(0, t; H)$. Então

$$\int_0^t S(t-s) \int_0^s \frac{v'(r, \cdot)}{(s-r)^\alpha} dr ds = \int_0^t \left(\int_0^s C(s-r)v(r, \cdot) dr - S(s)v(0, \cdot) \right) \frac{1}{(t-s)^\alpha} ds \quad (4.1.16)$$

e

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^t S(t-s) \int_0^s \frac{v'(r, \cdot)}{(s-r)^\alpha} dr ds \right) = \int_0^t \left(- \int_0^s \mathcal{A}S(s-r)v(r, \cdot) dr + v(s, \cdot) - C(s)v(0, \cdot) \right) \frac{1}{(t-s)^\alpha} ds. \quad (4.1.17)$$

Demonstração. Note que $\int_0^L S(t-s) \int_0^s \frac{v'(r,\cdot)}{(s-r)^\alpha} dr ds$ é a convolução das funções $S(t)$ com $(\frac{1}{t^\alpha} * v'(t,\cdot))$. Aplicando as propriedades da convolução, comutatividade e associatividade, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L S(t-s) \int_0^s \frac{v'(r,\cdot)}{(s-r)^\alpha} dr ds &= S(t) * (\frac{1}{t^\alpha} * v'(t,\cdot)) = S(t) * (v'(t,\cdot) * \frac{1}{t^\alpha}) \\ &= (S(t) * v'(t,\cdot)) * \frac{1}{t^\alpha} \\ &= \int_0^t \left(\int_0^s S(s-r) v'(r,\cdot) dr \right) \frac{1}{(t-s)^\alpha} ds. \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

Fazendo uma integração por partes na integral $\int_0^s S(s-r) v'(r,\cdot) dr$ e utilizando as propriedades das famílias seno e cosseno, obtemos que

$$\int_0^s S(s-r) v'(r,\cdot) dr = \int_0^s C(s-r) v(r,\cdot) dr - S(s) v(0,\cdot), \quad (4.1.19)$$

o que resulta na equação (4.1.16).

Falta mostrar a igualdade (4.1.17). Para isso, utilizando novamente as propriedades de semigrupo das famílias seno e cosseno, as quais resultam em

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^t S(t-s) \int_0^s \frac{v'(r,\cdot)}{(s-r)^\alpha} dr ds \right) = \int_0^L C(t-s) \int_0^s \frac{v'(r,\cdot)}{(s-r)^\alpha} dr ds. \quad (4.1.20)$$

Portanto, segue que

$$\begin{aligned} \int_0^L C(t-s) \int_0^s \frac{v'(r,\cdot)}{(s-r)^\alpha} dr ds &= C(t) * (\frac{1}{t^\alpha} * v'(t,\cdot)) \\ &= \int_0^L \left(\int_0^s C(s-r) v'(r,\cdot) dr \right) \frac{1}{(t-s)^\alpha} ds. \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

Integrando por partes e utilizando a propriedade 3 da proposição A.4.1 obtemos

$$\int_0^s C(s-r) v'(r,\cdot) dr = - \int_0^s \mathcal{A} S(s-r) v(r,\cdot) dr + C(0) v(s,\cdot) - C(s) v(0,\cdot) \quad (4.1.22)$$

completando a prova. □

Segue do Lema 4.1.3 e da equação (4.1.15) que a solução de (4.1.13) é dada por

$$\begin{aligned} v(t,x) &= C(t) \xi_0 + S(t) \xi_1 - \frac{c}{\rho A \Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \left(\int_0^s C(s-r) v(r,x) dr - S(s) \xi_0 \right) \frac{1}{(t-s)^\alpha} ds + \\ &+ \frac{1}{\rho A} \int_0^t S(t-s) q(s,x) ds. \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

Observação: A existência e suavidade para a solução (4.1.23) são garantidas em [33, Theorem 1].

Juntando as considerações feitas até o momento, temos que a solução de (4.1.7)-(4.1.8) para

$\xi_0 = 0$ e $\xi_1 = 0$ é dada (explicitamente) por

$$\begin{aligned} v(t, x) = & \frac{-2c}{\Gamma(1-\alpha)L\rho A} \int_0^t \left\{ \int_0^s \sum_{n=1}^{\infty} a_n^v \left[\cos((\lambda_n)^{1/2}(s-r)) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] dr \frac{1}{(t-s)^\alpha} \right\} ds \\ & + \frac{2L}{\sqrt{\rho A \pi}} \int_0^t \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^q \left[\frac{\sin((\lambda_n)^{1/2}(t-s))}{n\sqrt{EI n^2 \pi^2 + N \mathcal{L}^2}} \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\} ds \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

onde $a_n^v = \int_0^L v(r, z) \sin(\frac{n\pi}{L}z) dz$ e $a_n^q = \int_0^L q(s, z) \sin(\frac{n\pi}{L}z) dz$ respectivamente.

A solução (4.1.23) para $\xi_0 = \xi_1 = 0$ pode ser encarada da seguinte forma

$$\begin{aligned} v(t, x) = & -\frac{c}{\rho A \Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \left(\int_0^s C(s-r)v(r, x) dr \right) \frac{1}{(t-s)^\alpha} ds + \\ & + \frac{1}{\rho A} \int_0^t S(t-s)q(s, x) ds. \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

Ainda, note que $\int_0^s C(s-r)v(r, x) dr = v(s) * C(s)$ e $\int_0^t S(t-s)q(s, x) ds = S(t) * q(t, x)$, são as convoluções em relação a variável temporal. Então, obtemos que

$$v(t, x) = -\frac{c}{\rho A \Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (v(s, x) * C(s))(t-s)^{-\alpha} ds + \frac{1}{\rho A} [S(t) * q(t, x)] \quad (4.1.26)$$

Ocorre que $\int_0^t (v(s, x) * C(s))(t-s)^{-\alpha} ds = (v(t, x) * C(t)) * t^{-\alpha}$. Portanto, pela propriedade de associatividade da convolução, temos $v(t, x) * (C(t) * t^{-\alpha})$. Se denotarmos $K(t) = -\frac{c}{\rho A \Gamma(1-\alpha)} (C(t) * t^{-\alpha})$, a solução poderá ser reduzida a equação

$$\begin{aligned} v(t, x) &= K(t) * v(t, x) + \frac{1}{\rho A} [S(t) * q(t, x)] \\ (I - K) * v(t, x) &= \frac{1}{\rho A} [S(t) * q(t, x)] \end{aligned} \quad (4.1.27)$$

em que I é o operador identidade.

Portanto, se o termo $(I - K)$ da equação (4.1.28) possui uma inversa, a solução do problema (4.1.7)-(4.1.8) para $\xi_0 = 0$ e $\xi_1 = 0$ é dada por

$$v(t, x) = (I - K(t))^{-1} \frac{1}{\rho A} [S(t) * q(t, x)] \quad (4.1.28)$$

em que, para x fixo, a convolução é somente para a variável t .

De fato, se encararmos o problema (4.1.28) como uma perturbação da identidade, o termo $(I - K)$ é invertível sempre que $\|K\| < 1$, veja por exemplo [29]. O próximo lema dá as condições necessárias para que tenhamos $\|K\| < 1$.

Lema 4.1.4. *Seja $K(t)$ o operador perturbação da identidade como em (4.1.28). Então, $\|K\| < 1$, desde que $T < \sqrt[1-\alpha]{\frac{(1-\alpha)\rho A \Gamma(1-\alpha)}{c}}$. Em particular, neste caso, $(I - K)$ possui inversa.*

Demonstração. Como $K(t) = -\frac{c}{\rho A \Gamma(1-\alpha)}(C(t) * t^{-\alpha})$, temos que

$$\|K(t)\| = \left\| -\frac{c}{\rho A \Gamma(1-\alpha)}(C(t) * t^{-\alpha}) \right\|. \quad (4.1.29)$$

Usando a desigualdade de Young para convolução em (4.1.29), temos que

$$\|C(t) * t^{-\alpha}\|_{L^2} \leq \|C(t)\|_{L^2} \|t^{-\alpha}\|_{L^1}, \quad (4.1.30)$$

logo

$$\left| \frac{c}{\rho A \Gamma(1-\alpha)} \right| \|C(t) * t^{-\alpha}\|_{L^2} \leq \left| \frac{c}{\rho A \Gamma(1-\alpha)} \right| \|C(t)\|_{L^2} \|t^{-\alpha}\|_{L^1}. \quad (4.1.31)$$

Haja visto que $\|C(t)\| \leq 1$, segue de (4.1.29) e (4.1.31) que $\|K\| < 1$ sempre que

$$\left| \frac{c}{\rho A \Gamma(1-\alpha)} \right| \|t^{-\alpha}\| < 1 \iff \|t^{-\alpha}\| < \frac{\rho A \Gamma(1-\alpha)}{c}. \quad (4.1.32)$$

Como, $t \geq 0$, segue que

$$\int_0^T |t^{-\alpha}| dt = \frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_0^T = \frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha}. \quad (4.1.33)$$

Assim, segue de (4.1.32) e (4.1.33) que

$$T < \sqrt[1-\alpha]{\frac{(1-\alpha)\rho A \Gamma(1-\alpha)}{c}} \quad (4.1.34)$$

o que demonstra o resultado. $\square$

4.1.2 Resultado de identificabilidade para o problema inverso

Nesta seção, vamos estudar o problema inverso de identificação do termo forçante $q(t, x) = \sum_{n=1}^k g_n(t) f_n(x)$ na equação de Euler-Bernoulli dada em (4.1.7)-(4.1.8) quando a viga está apoiada em uma base viscoelástica. Kawano em [23] apresentou um resultado de unicidade para a parte do termo forçante que depende somente de x , isto é $f_n(x)$, a partir de medidas do deslocamento de uma viga presa em ambas extremidades, para um intervalo de tempo arbitrário, na equação de Euler-Bernoulli dada em (4.1.7)-(4.1.8) com derivadas de ordem inteira.

Nossa estratégia nessa tese é utilizar resultados similares aos propostos em [23] para determinar um resultado de identificação de $f_n(x)$ para a equação de Euler-Bernoulli em (4.1.7)-(4.1.8). Alguns resultados importantes apresentados em [23] como o Teorema A.1.3 que serão utilizados nessa tese, poderão ser consultado também no Apêndice A.1.

Mais precisamente, vamos considerar o carregamento $q(t, x)$ do tipo

$$q(t, x) = \sum_{n=1}^k g_n(t) f_n(x), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (4.1.35)$$

onde $g_n \in C^1[0, T_0], \forall n \in \{1, \dots, K\}$ é tal que $i \neq j \Rightarrow g_i \neq g_j$ e o conjunto $\{g_n : n \in \{1, \dots, k\}\}$ é linearmente independente. O termo de interesse neste problema inverso é o conjunto

$$F_n := \{f_n \in H^{-2}([0, 1]), n \in \{1, \dots, k\}\}.$$

Em [23] (veja o Teorema A.1.3), foi mostrado que o conjunto F_n pode ser identificado unicamente através do conhecimento do conjunto

$$\Gamma_{T_0, \Omega} \doteq \{(t, x, w(t, x)) : (t, x) \in [0, T_0] \times \Omega\}, \quad (4.1.36)$$

onde $w(t, x)$ é a única solução da equação de Euler-Bernoulli em (4.1.7) -(4.1.8) com $\alpha = 1$ (modelo não fracionário dado por (A.1.1)), $T_0 > 0$ é arbitrariamente pequeno e $\Omega = [0, 1]$.

Nosso propósito neste capítulo é mostrar que, mesmo para $\alpha \neq 1$ na equação de Euler-Bernoulli em (4.1.7) -(4.1.8), sob certas hipóteses a serem apresentadas no que segue, um conjunto de dados similar ao conjunto (4.1.36) determina unicamente o conjunto F_n .

No que segue, vamos enunciar um lema auxiliar para o caso da equação de Euler-Bernoulli com termo fracionário (4.1.7) - (4.1.8) com $\xi_0 = \xi_1 = 0$ e carregamento $q(t, x)$ como em (4.1.35).

Lema 4.1.5. *Sejam g_n e f_n como em (4.1.35). Então:*

i) f_n pode ser representada como

$$f_n(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} A_{n,m} \lambda_m e_m(x), \quad (4.1.37)$$

onde $(A_{n,m})_{m \in \mathbb{N}} \in l^2, \forall n \in \{1, \dots, K\}$.

ii) Para $\alpha = 1$, a solução w_n de (4.1.7) - (4.1.8) ou ainda de (A.1.1), para cada $n \in \{1, \dots, k\}$ pode ser escrita da seguinte forma

$$w_n(t, x) = \sum_{m=1}^{+\infty} A_{n,m} \lambda_m \left[\int_0^t g_n(t - \tau) e^{-\frac{\nu}{2}\tau} \frac{\sin\left(\tau \sqrt{4\lambda_m - \nu^2/2}\right)}{\sqrt{4\lambda_m - \nu^2/2}} d\tau \right] e_m(x), \quad (4.1.38)$$

onde $\nu \doteq \frac{\mu}{\rho}$. Caso $4\lambda_m = \nu^2$, o termo $\frac{\sin(\tau \sqrt{4\lambda_m - \nu^2/2})}{\sqrt{4\lambda_m - \nu^2/2}}$ é substituído por τ .

iii) Para $T_0 < \sqrt[1-\alpha]{\frac{(1-\alpha)\rho A \Gamma(1-\alpha)}{c}}$ e $\alpha \neq 1$, a solução v_n de (4.1.7) - (4.1.8), para cada

$n \in \{1, \dots, k\}$ pode ser escrita da seguinte forma

$$v_n(t, x) = (I - K)^{-1} w_n \quad \text{para } (t, x) \in [0, T_0], x \in [0, 1]. \quad (4.1.39)$$

iv) Sob as hipóteses do item iii), a solução v de (4.1.7) - (4.1.8) pode ser escrita da seguinte forma

$$v(t, x) = (I - K)^{-1} w(t, x) \quad (4.1.40)$$

onde w é a solução de (A.1.1).

Demonstração. A demonstração do item i) e ii) são apresentadas no Lema A.1.1 ou em [23, Lemma 3].

O item iii) segue de (4.1.28) e do Lema 4.1.4.

O item iv) segue da linearidade da equação (4.1.7) - (4.1.8) e também de (A.1.1). □

Seja T_0 como no Lema 4.1.5. Para qualquer $t_0 \in]0, T_0[$, considere o carregamento

$$q_{t_0}(t, x) = \sum_{n=1}^K g_n(t_0 + t) f_n(x), \quad (4.1.41)$$

onde com g_n e f_n satisfazendo as hipóteses de (4.1.35).

Segue do Lema 4.1.5 que a solução v_{t_0} de (4.1.7) - (4.1.8) com carregamento dado por (4.1.41) é da forma

$$v_{t_0}(t, x) = (I - K)^{-1} w_{t_0}(t, x), \quad (4.1.42)$$

onde w_{t_0} é a solução de (4.1.7) - (4.1.8) com $\alpha = 1$ e carregamento como em (4.1.41) (veja Apêndice A.1 para detalhes).

Note que a solução v_{t_0} pode ser escrita como

$$v_{t_0}(t, x) = v(t_0 + t, x) - v_{h,t_0}(t, x) \quad \forall t \in [0, T_0 - t_0] \quad (4.1.43)$$

onde v_{h,t_0} é a solução do problema homogêneo associado (vide Apêndice A.1 para detalhes). Note que a solução v de (4.1.7) - (4.1.8) dada no Lema 4.1.5 iv) é tal que $v \equiv v_{t_0=0}$.

De forma análoga a [23], defina o conjunto de medidas

$$\tilde{\Gamma}_{T_0, t_0, \Omega}^\alpha \doteq \{(t, x, t_0, v_{t_0}(t, x)) : (t, x) \in [0, T_0 - t_0] \times \Omega\}, \quad (4.1.44)$$

para qualquer $t_0 \in [0, T_0]$ relacionado ao problema (4.1.7) com $q_{t_0}(t, x)$ dado em (4.1.41). Note que o conjunto $\tilde{\Gamma}_{T_0, t_0, \Omega}^\alpha$ é equivalente ao conjunto $\tilde{\Gamma}_{T_0, t_0, \Omega}$, quando $\alpha = 1$ como obtido em [23].

Os resultados acima nos permite enunciar o principal resultado deste capítulo, o qual é equivalente aos resultados de unicidade apresentados em [23].

Teorema 4.1.6. *Sejam g_n e f_n como em (4.1.35) e $T_0 < \sqrt[1-\alpha]{\frac{(1-\alpha)\rho A\Gamma(1-\alpha)}{c}}$, para $\alpha \neq 1$. Então, o conhecimento de medidas como no conjunto $\tilde{\Gamma}_{T_0, t_0, \Omega}^\alpha$ definido em (4.1.44) implica na identificação única do conjunto*

$$F_n := \{f_n \in H^{-2}(]0, 1[), n \in \{1, \dots, k\}\}.$$

Demonstração. Segue do Lema 4.1.2, do Lema 4.1.5 e de (4.1.24) que a solução v_{t_0} é composta de funções quase periódicas e seus autovalores λ_n são discretos (veja Apêndice A.1). Portanto, as hipóteses do Teorema A.1.3 são satisfeitas.

Pela linearidade do problema, basta provar que se $\tilde{\Gamma}_{T_0, t_0, \Omega}^\alpha = \{0\}$, então $F_n = \{0\}$.

Note que, para T_0 como na hipótese, o operador $(I - K)$ é injetivo (invertível), como dado pelo Lema 4.1.4. Portanto, segue do Lema 4.1.5 iv) que $\tilde{\Gamma}_{T_0, t_0, \Omega}^\alpha = \{0\}$ implica que $\Gamma_{T_0, \Omega} = \{0\}$. Disto, segue do Teorema A.1.3 (veja também [23]) que o conjunto $F_n = \{0\}$, concluindo o teorema. $\square$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS

Nesta tese investigamos o problema inverso envolvendo a equação de Euler-Bernoulli para vigas com derivadas não clássicas em dois modelos de naturezas distintas. O primeiro modelo estuda a equação do momento fletor da equação estática de Euler-Bernoulli em meios fraciais. Essa equação apresenta em sua constituição equações fracionárias que são convertidas a ordem inteira no espaço Euclidiano, representando uma generalização do modelo convencional da mecânica no que diz respeito a deformação de vigas. O segundo modelo estuda a equação dinâmica de Euler-Bernoulli apoiada em uma base viscoelástica. Essa equação apresenta uma derivada fracionária de Caputo e descreve o amortecimento oriundo do material viscoelástico no qual a viga está apoiada.

Na primeira parte estudamos o problema inverso de identificação do parâmetro de rigidez $a(x)$ no modelo fractal de Euler Bernoulli estática. Com relação ao problema direto desse modelo, provamos resultados de existência e unicidade através da teoria de soluções fracas. Além disso, escrevemos o problema direto como uma equação de operador para o qual apresentando algumas propriedades como continuidade, compacidade, Fréchet diferenciabilidade, a satisfação da desigualdade do cone tangente e a injetividade. A compacidade desse operador implica que problema inverso de recuperar o coeficiente de rigidez a é instável com relação a erros nas medidas. Em vista disso, é necessário aplicar alguma estratégia de regularização para a identificação estável do coeficiente de rigidez $a(x)$. Dadas as propriedades acima listadas, provamos que métodos iterativos de regularização como Landweber e Steepest Descent são estáveis e convergentes com relação aos erros nas medidas, produzindo coeficientes aproximados adequados para o problema. Os resultados teóricos são validados através de algumas simulações numéricas para alguns parâmetros $a(x)$, para coeficientes de transformação $c(x)$ diferentes e conhecidos, em diferentes níveis de ruídos.

Já a injetividade implica na recuperação única do coeficiente de rigidez $a(x)$, dadas as medidas da deflexão $u(x)$ da viga. Este é um dos resultados mais significativos dessa tese, para a equação do momento no problema de Euler-Bernoulli fractal. Ele é obtido sob algumas hipóteses em relação aos parâmetros a e c , mas sem a necessidade de termos um coeficiente de rigidez $a(x)$ suave, abrangendo casos mais gerais como coeficientes constantes por partes.

Mostramos ainda que muitas estratégias de regularização, em particular métodos iterativos que apresentamos, geram apenas coeficientes suaves, não sendo adequados para coeficientes constante por partes. Dessa forma, provamos que o método do tipo Level-set pode ser uma estratégia de regularização para o problema do coeficiente constante por partes. Apresentamos os resultados numéricos correspondentes quando o coeficiente de transformação do meio é $c = 1$.

Em relação ao segundo modelo, apresentamos uma noção da teoria que envolve os materiais viscoelásticos e sua relação com o cálculo fracionário. Através da teoria de semigrupos das famílias seno e cosseno, estudamos a existência de solução para este modelo. O termo

fracionário é tratado como um termo forçante conforme [33] obtendo uma solução cujo comportamento é muito próximo da solução apresentada por [23] para o mesmo problema mas com derivadas inteiras. Reescrevemos a solução do problema direto como uma perturbação de identidade de forma a obter resultados de unicidade para o termo forçante espacial (que depende somente da variável x), similar aos apresentados em [23], conhecidos um conjunto de medidas do deslocamento da viga em um determinado intervalo finito de tempo, que depende da ordem da derivada fracionária.

5.1 Trabalhos Futuros

Esta tese ainda possui algumas perguntas que não foram completamente respondidas, cujos resultados buscaremos apresentar em trabalhos futuros. São eles:

- 1) Para o modelo estático fractal de Euler-Bernoulli.
 - 1.1) Para $a(x)$ conhecido, é possível determinar propriedades similares as apresentadas aqui para determinar o coeficiente $c(x)$?
 - 1.2) Sob quais hipóteses no conjunto de medidas (deflexão e o que mais) garantem unicidade para $c(x)$ e $a(x)$ simultaneamente?
 - 1.3) Implementar métodos de regularização para determinar, de maneira estável $a(x)$ e $c(x)$ simultaneamente.
 - 1.4) Nas simulações apresentadas foram usados coeficientes de transformação $c(x)$ fictícios. Estudar casos reais envolvendo tamanho de escala da viga a partir de trabalhos como [41, 44].
- 2) Para o modelo visco-elástico de Euler-Bernoulli.
 - 2.1) Estudar estratégias de regularização para a identificação estável do termo forçante.
 - 2.2) Os resultados obtidos nessa tese nos levam a crer que seja possível determinar resultados de unicidade para o coeficiente de rigidez $a(x)$, generalizando os resultados obtidos em Kawano e colaboradores em [20, 24, 25].

A MATERIAL COMPLEMENTAR

Neste capítulo, elencamos uma série de conceitos e definições que são complementares a leitura do texto desta tese.

A.1 Estratégia para identificação do termo forçante em uma equação de Euler-Bernoulli dinâmica (sem derivadas fracionárias)

Nesta seção daremos alguns detalhes da estratégia adotada por Kawano em [23] para provar a unicidade de identificação para a parte do termo forçante que depende somente de x , a partir de medidas do deslocamento de uma viga presa em ambas extremidades para um intervalo de tempo arbitrário, em uma equação de Euler-Bernoulli, sem derivadas fracionárias.

O modelo do tipo Euler-Bernoulli para a viga considerado em [23] é dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{EI}{\rho} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = h(t, x), & \text{em } [0, T_0] \times]0, 1[, \\ w(0, x) = \frac{\partial w}{\partial x}(0, x) = 0, & \forall x \in]0, 1[, \\ w(t, x) = \frac{\partial w}{\partial x}(t, x) = 0, & \forall t \in [0, T_0], \forall x \in \{0, 1\}, \end{cases} \quad (\text{A.1.1})$$

onde $T_0 > 0$ é arbitrário e $w(t, x)$ representa o deslocamento no tempo t no ponto x de uma viga presa em ambas as extremidades ao longo do intervalo $[0, 1]$. Além disso, os parâmetros físicos são: $\rho > 0$ é a densidade linear do material; $E > 0$ é o módulo de Young; $I > 0$ é o momento de inércia de uma seção transversal; $\mu \geq 0$ é o coeficiente de amortecimento; $T \geq 0$ é a tração ao longo da viga; h é o termo que representa o carregamento.

A condição de contorno apresentada em (A.1.1) representa uma viga presa em ambas extremidades. O carregamento $h(t, x)$ considera forças do tipo

$$h(t, x) = \sum_{n=1}^K g_n(t) f_n(x), \quad K \in \mathbb{N}, \quad (\text{A.1.2})$$

onde $g_n \in C^1[0, T_0]$, $\forall n \in \{1, \dots, K\}$ conhecidas, $i \neq j \Rightarrow g_i \neq g_j$, e o conjunto $\{g_n : n \in \{1, \dots, K\}\}$ é linearmente independente. O termo desconhecido neste problema inverso é o conjunto

$$\{f_n \in H^{-2}(]0, 1[), n \in \{1, \dots, K\}\}.$$

Afirmção: (veja [23]) o conjunto f_n pode ser identificado unicamente através do conhecimento do conjunto

$$\Gamma_{T_0, \Omega} \doteq \{(t, x, w(t, x)) : (t, x) \in [0, T_0] \times \Omega\}, \quad (\text{A.1.3})$$

onde ambos $T_0 > 0$ e o conjunto aberto $\emptyset \neq \Omega$, com $P \subset \Omega \subset]0, 1[$ são arbitrariamente pequenos. P é o conjunto dos pontos em $]0, 1[$ correspondentes aos apoios internos da viga, podendo estar vazio.

Na próxima seção apresentaremos os resultados principais que demonstram a afirmação acima.

A.1.1 Problema Direto

Para mostrar a existência e unicidade do problema direto para (A.1.1), considera o espaço usual de Sobolev $H_0^2([0, 1])$ com o seguinte produto interno

$$\langle f, g \rangle_{H_0^2[0,1]} = \left\langle \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right\rangle_{L^2([0,1])} + \left\langle \sqrt{\frac{T}{\rho}} \frac{\partial f}{\partial x}, \sqrt{\frac{T}{\rho}} \frac{\partial g}{\partial x} \right\rangle_{L^2([0,1])} \quad (\text{A.1.4})$$

Assim como em [23], busca-se por soluções $S \in H_0^2[0, 1[$ que satisfazem o seguinte problema de autovalor

$$\begin{cases} \left(\frac{EI}{\rho} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) S(x) = \beta S(x) & \text{em } [0, T_0] \times]0, 1[, \\ S(0) = \frac{\partial S}{\partial x}(0) = 0, \\ S(1) = \frac{\partial S}{\partial x}(1) = 0. \end{cases} \quad (\text{A.1.5})$$

Como mostrado em [23], o operador $\left(\frac{EI}{\rho} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)$ é auto adjunto e positivo, com relação ao produto interno (A.1.4). Assim, o Teorema Espectral [29] garante a existência de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_0^2([0, 1])$, a qual forma uma base ortonormal de autovetores para (A.1.5), cujos autovalores correspondentes são reais e positivos. Cada S_n satisfaz

$$\left(\frac{EI}{\rho} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) S = \beta_n S(x) \quad (\text{A.1.6})$$

com $\beta_n = \mathcal{O}(n^4)$, contando multiplicidades. Isto é, cada β_n pode ser repetido no máximo quatro vezes.

Utilizando o método da separação de variáveis e tomando $h(t, x) = g_n(t)f_n(x)$, obtemos

$$w_n(t, x) = \sum_{m=1}^{+\infty} A_{n,m} \beta_m \left[\int_0^t g_n(t - \tau) e^{-\frac{\nu}{2}\tau} \frac{\sin\left(\tau \sqrt{4\beta_m - \nu^2/2}\right)}{\sqrt{4\beta_m - \nu^2/2}} d\tau \right] S_m(x), \quad (\text{A.1.7})$$

onde $\nu \doteq \frac{\mu}{\rho}$. Caso $4\beta_m = \nu^2$, o termo $\frac{\sin(\tau \sqrt{4\beta_m - \nu^2/2})}{\sqrt{4\beta_m - \nu^2/2}}$ é substituído por τ .

O lema a seguir apresenta a solução (A.1.7) como uma distribuição e sua demonstração pode ser consultada em [23, Lemma 3].

Lema A.1.1. *Sejam g_n e f_n como em (A.1.2). Então*

i) f_n pode ser representada como

$$f_n(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} A_{n,m} \beta_m S_m(x), \quad (\text{A.1.8})$$

onde $(A_{n,m})_{m \in \mathbb{N}} \in l^2, \forall n \in \{1, \dots, K\}$.

ii) A solução w_n de (A.1.7) pode ser escrita da seguinte forma

$$w_n(t, x) = \int_0^t \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2A_{n,m}\beta_m}{\sqrt{4\beta_m - \nu^2}} g_n(t - \tau) e^{-\frac{1}{2}\nu\tau} \sin\left(\frac{1}{2}\tau \sqrt{4\beta_m - \nu^2}\right) S_m(x) d\tau, \\ \text{para } t \in [0, T_0], x \in [0, 1]. \quad (\text{A.1.9})$$

Do Lema A.1.1 e da linearidade, podemos escrever a solução de (A.1.1) com o carregamento $h(t, x) = \sum_{n=1}^K g_n(t) f_n(x)$ da forma

$$w(t, x) = \int_0^t \sum_{n=1}^K g_n(t - \tau) \left[\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2A_{n,m}\beta_m}{\sqrt{4\beta_m - \nu^2}} e^{-\frac{1}{2}\nu\tau} \sin\left(\frac{1}{2}\tau \sqrt{4\beta_m - \nu^2}\right) S_m(x) \right] d\tau. \quad (\text{A.1.10})$$

A.1.2 Problema Inverso

Para apresentar a prova da unicidade do problema inverso de [23], defina w_{f_n} como a única solução de (A.1.1), para cada (f_n) . Vamos apresentar as principais ideias de [23] mostrando que, de fato, o operador

$$T : H^{-2}([0, 1]) \longrightarrow [0, T_0] \times]0, 1[\\ f_n \longmapsto w_{f_n} \quad (\text{A.1.11})$$

é injetivo e, assim, o conjunto (A.1.3) é suficiente para determinar unicamente f_n na equação (A.1.1). Isso será apresentado no Teorema (A.1.3).

Para isso, será necessário definirmos funções quase periódicas. Sabemos que quando uma função é periódica com período $P > 0$, podemos expressá-la como uma série de Fourier. Para funções periódicas, é necessário e suficiente conhecer os valores da função num intervalo de comprimento P para determinar todos os coeficientes de Fourier. No caso de funções quase periódicas, em algumas situações, o conhecimento da função em um pequeno intervalo arbitrário é suficiente para determiná-la completamente. Vamos apresentar a definição de funções quase periódicas a seguir.

Definição A.1.1 (Definition 3.1 (Bohr), [23]). *Uma função contínua $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é quase periódica se e somente se para cada $\epsilon > 0$ existe um $L_\epsilon > 0$ de forma que qualquer intervalo de $\mathbb{R}$ do intervalo L_ϵ contem pelo menos um período de translação de u correspondentes a ϵ .*

Segundo [23], Bohr mostrou que o conjunto de todas as funções quase periódicas (Bohr) é igual ao fecho em $\mathcal{C}^0$ do conjunto de funções

$$A = \{\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \sum_{n=1}^N a_n e^{i\lambda_n t} : N \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{C}, \lambda_n \in \mathbb{R}\}. \quad (\text{A.1.12})$$

Outra definição importante para os resultados que queremos apresentar segue abaixo.

Definição A.1.2. Dizemos que a sequência $\Lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é um conjunto uniformemente discreto se existe um $\delta > 0$ tal que $i \neq j \rightarrow |\lambda_i - \lambda_j| > \delta$.

Vamos então introduzir o seguinte teorema auxiliar para a prova da unicidade de f_n , o qual pode ser consultado em [23, Theorem 4].

Teorema A.1.2. Considere $\Lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, uniformemente discreto, tal que existam $n_0 \in \mathbb{N}, C \in \mathbb{R}_+, \alpha > 1$ de forma que $n > n_0 \rightarrow |\lambda_n| > Cn^\alpha$. Para $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in s'$ (ou seja, existe $q \in \mathbb{Z}_+$ tal que $(n^q a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^1$), se existe um $\tau > 0$ tal que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n e^{i\lambda_n t} = 0, \quad \forall t \in [-\tau, \tau]$, então $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \{0\}$.

Podemos agora enunciar o teorema da unicidade de f_n apresentando as principais ideias da sua demonstração. Para mais detalhes consulte [23].

Teorema A.1.3. Seja $K \in \mathbb{N}$ e $w \in C([0, T_0], H_0^2(]0, 1[)) \cap C^1([0, T_0], L^2(]0, 1[))$ a solução (no sentido das distribuições) do problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{EI}{\rho} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^K g_n(t) f_n(x), & \text{em } [0, T_0] \times]0, 1[, \\ w(0, x) = \frac{\partial w}{\partial x}(0, x) = 0, & \forall x \in]0, 1[, \\ w(t, x) = \frac{\partial w}{\partial x}(t, x) = 0, & \forall t \in [0, T_0], \forall x \in \{0, 1\}, \end{cases}$$

em que $g_n \in C^1[0, T_0], \quad \forall n \in \{1, \dots, K\}$, conhecidos, $i \neq j \Rightarrow g_i \neq g_j$ e o conjunto $\{g_n : n \in \{1, \dots, K\}\}$ é linearmente independente. Então os dados

$$\Gamma_{T_0, \Omega} \doteq \{(t, x, w(t, x)) : (t, x) \in [0, T_0] \times \Omega\},$$

em que $T_0 > 0$ e $\emptyset \neq \Omega \subset]0, 1[$ são arbitrariamente pequenos, determinam unicamente

$$\{f_n \in H^{-2}(]0, 1[), n \in \{1, \dots, K\}\}.$$

Demonstração. Seja $t_0 \in]0, T_0[$ e o problema (A.1.1) com o seguinte carregamento

$$h(t, x) = \sum_{n=1}^K g_n(t_0 + t) f_n(x)$$

com w_{t_0} solução desse novo problema. Repare que $w \equiv w_{t_0=0}$. Agora, seja a equação homogênea associada a esse novo problema como

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w_{h,t_0}}{\partial t^2} + \nu \frac{\partial w_{h,t_0}}{\partial t} + \frac{EI}{\rho} \frac{\partial^4 w_{h,t_0}}{\partial x^4} - \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 w_{h,t_0}}{\partial x^2} = 0, \quad \text{em } [0, T_0] \times]0, 1[, \\ w_{h,t_0}(0, x) = w(t_0, x), \forall x \in]0, 1[, \\ \frac{\partial w_{h,t_0}}{\partial x}(0, x) = \frac{\partial w}{\partial x}(t_0, x), \quad \forall x \in]0, 1[, \\ w_{h,t_0}(t, x) = \frac{\partial w_{h,t_0}}{\partial x}(t, x) = 0, \quad \forall t \in [0, T_0], \forall x \in \{0, 1\}. \end{array} \right. \quad (\text{A.1.13})$$

Segundo [23, Lemma 2] temos que

$$w_{t_0}(t, x) = w(t_0 + t, x) - w_{h,t_0}(t, x), \quad \forall t \in [0, T_0 - t_0]. \quad (\text{A.1.14})$$

A relevância de (A.1.14) é que a partir dos dados (A.1.3) podemos obter o conjunto

$$\tilde{\Gamma}_{T_0, t_0, \Omega} \doteq \{(t, x, t_0, w_{t_0}(t, x)) : (t, x) \in [0, T_0 - t_0] \times \Omega\}, \quad (\text{A.1.15})$$

para qualquer $t_0 \in [0, T_0[$, relacionado ao problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w_{t_0}}{\partial t^2} + \nu \frac{\partial w_{t_0}}{\partial t} + \frac{EI}{\rho} \frac{\partial^4 w_{t_0}}{\partial x^4} - \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 w_{t_0}}{\partial x^2} = h_{t_0}(t, x), \quad \text{em } [0, T_0 - t_0] \times]0, 1[, \\ w_{t_0}(t, x) = \frac{\partial w_{t_0}}{\partial x} = 0, \quad \forall t \in [0, T_0 - t_0], \forall x \in \{0, 1\}, \\ w_{t_0}(0, x) = \frac{\partial w_{t_0}}{\partial t}(0, x) = 0, \quad \forall x \in]0, 1[, \end{array} \right. \quad (\text{A.1.16})$$

onde $h_{t_0}(t, x) = \sum_{n=1}^K g_n(t_0 + t) f_n(x)$, com solução dada por

$$w_{t_0}(t, x) = \int_0^t \sum_{n=1}^K g_{t_0,n}(t - \tau) \left[\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2A_{n,m}\beta_m}{\sqrt{4\beta_m - \nu^2}} e^{-\frac{1}{2}\nu\tau} \sin\left(\frac{1}{2}\tau\sqrt{4\beta_m - \nu^2}\right) S_m(x) \right] d\tau \quad (\text{A.1.17})$$

com $g_{t_0,n} \doteq g_n(t_0 + t)$.

Como o conjunto $\{g_n : [0, T_0] \rightarrow \mathbb{C} : n \in \{1, \dots, K\}\}$ é linearmente independente então existe um conjunto $\{0 \leq t_{0_j} : t_{0_1} < \dots < t_{0_K} < T_0; j = 1, \dots, K\}$ de forma que a matriz $[G(t)]_{K \times K}$ definida tal que seus elementos são $g_{t_{0_m}, n}(t)$ com $m, n = \{1, \dots, K\}$ linha e coluna, respectivamente, é invertível quando $t = 0$.

Além disso, defina a matriz $[\psi] = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_K]^T$ onde

$$\psi_n(t, x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2A_{n,m}\beta_m}{\sqrt{4\beta_m - \nu^2}} e^{-\frac{1}{2}\nu t} \sin\left(\frac{1}{2}t\sqrt{4\beta_m - \nu^2}\right) S_m(x),$$

para $n \in \{1, \dots, K\}$. Note que $\psi(t)$ está bem definida em $H_0^2([0, 1])$ para qualquer $t \in [0, +\infty[$.

Assim, reescrevemos a solução (A.1.17) na forma matricial

$$[w(t, x)] = \int_0^t [G(t - \tau)] [\psi(\tau, x)] d\tau, \quad \forall (t, x) \in [0, T_0 - t_{0_K}] \times [0, 1], \quad (\text{A.1.18})$$

com as soluções $w_{t_{0_j}}$ escritas na forma de matriz $[w] = [w_{t_{0_1}}, \dots, w_{t_{0_K}}]^T$.

Agora, derivando a equação (A.1.18) em relação a t vamos obter

$$[w(t, x)]' = [G(0)] [\psi(t, x)] + \int_0^t [G'(t - \tau)] [\psi(\tau, x)] d\tau. \quad (\text{A.1.19})$$

Do conjunto em (A.1.15), utilizando $t_0 = t_{0_1}, \dots, t_{0_K}$ teremos

$$\tilde{\Gamma} \doteq \bigcup_{j=1}^K \tilde{\Gamma}_{T_0, t_{0_j}, \Omega}. \quad (\text{A.1.20})$$

Da linearidade do problema, para provar que o conjunto (A.1.20) determina de forma única $(f_n) \in H^{-2}([0, 1])$ em (A.1.2), é suficiente mostrar que $\tilde{\Gamma} = \{0\}$ implica que $f_n = 0, \forall n \in \{1, \dots, K\}$.

Para tal, aplicamos a função teste $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ em ambos os lados de (A.1.19) e, assumindo que $\tilde{\Gamma} = \{0\}$ e $[G(0)]$ possui inversa, obtemos para cada $n \in \{1, \dots, K\}$, e para qualquer $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2A_{n,m}\beta_m}{\sqrt{4\beta_m - \nu^2}} \sin\left(\frac{1}{2}\tau\sqrt{4\beta_m - \nu^2}\right) \langle S_m, \phi \rangle = 0, \quad \forall t \in [0, T_0 - t_{0_k}]. \quad (\text{A.1.21})$$

Reordenando a sequência de (β_n) de modo que suas multiplicidades sejam eliminadas, para cada β_n nessa nova sequência, existe um conjunto de autovetores associado $\{S_{n,1}, \dots, S_{n,j_n}\}$ com $1 \leq j \leq 4$. Com isso, a equação (A.1.21) será dada por

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2A_{n,m}\beta_m}{\sqrt{4\beta_m - \nu^2}} \sin\left(\frac{1}{2}\tau\sqrt{4\beta_m - \nu^2}\right) \sum_{j=1}^{j_m} \langle S_{mj}, \phi \rangle = 0, \quad \forall t \in [0, T_0 - t_{0_k}]. \quad (\text{A.1.22})$$

Note que a série em (A.1.22) é uma série quase periódica conforme Definição A.1.1. Essa série é absolutamente convergente e contínua.

Para nos encaminharmos para a conclusão da prova, [23] defina

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_k \doteq (-1)^k \frac{1}{2} \sqrt{4\beta_{[k/2]} - \nu^2} \quad \text{e,} \\ B_k \doteq -i(-1)^k \frac{A_{n,[k/2]} \beta_{[k/2]}}{\sqrt{4\beta_{[k/2]} - \nu^2}} \sum_{j=1}^{j_{[k/2]}} \langle S_{[k/2],j}, \phi \rangle, \quad \text{para } 4\beta_{[k/2]} \neq \nu^2, \quad \text{ou} \quad . \\ B_k \doteq \frac{A_{n,[k/2]} \nu^2}{4} \sum_{j=1}^{j_{[k/2]}} \langle S_{[k/2],j}, \phi \rangle, \quad \text{para } 4\beta_{[k/2]} = \nu^2, \end{array} \right. \quad (\text{A.1.23})$$

Note que podendo reescrever a equação (A.1.22) da seguinte forma

$$\sum_{m=1}^{+\infty} B_m t + \sum_{m=1}^{+\infty} B_m e^{i\lambda_m t} = 0, \quad t \in [0, T_0 - t_{0_K}], \quad (\text{A.1.24})$$

em que o primeiro somatório se refere a $4\beta_{[m/2]} = \nu^2$ e o segundo a $4\beta_{[m/2]} \neq \nu^2$.

Note que o segundo termo da equação acima é uma série absolutamente convergente e pertence ao fecho de $\mathcal{C}^0$ do conjunto A definido em (A.1.12). De acordo com a Definição A.1.1, o primeiro termo da equação (A.1.24) deverá ser obrigatoriamente nulo. Assim, a igualdade $\sum_{m=1}^{+\infty} B_m = 0$ é verdadeira devido a $4\beta_{[m/2]} = \nu^2$ acontecer zero vezes ou duas vezes apenas. Caso aconteça duas vezes, para os índices m_1 e m_2 temos $B_{m_1} = B_{m_2}$.

Para mostrar que o segundo termo $\sum_{m=1}^{+\infty} B_m e^{i\lambda_m t}$ é igual a zero recorremos ao Teorema A.1.2, o qual nos permite concluir que para qualquer m nesta equação, a igualdade é satisfeita.

Portanto, $B_m = 0, \forall m \in \mathbb{N}$, na equação (A.1.23) implica que para qualquer $n \in \{1, \dots, K\}$, $A_{n,m} = 0, \forall m \in \mathbb{N}$. Assim, o conjunto dos dados $\Gamma_{T_0, \Omega}$ em (A.1.3) para qualquer $n \in \{1, \dots, K\}$ determina de forma única $(A_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$, e por consequência a distribuição $f_n \in H^{-2}([0, 1])$ em (A.1.2). $\square$

A.2 Um pouco da teoria de problemas inversos

Interessante observar que qualquer modelo citado neste trabalho, a bem da verdade, qualquer modelo seja ele físico, químico, biológico entre outros, pode ser analisado sob duas óticas determinando assim o que é problema direto e o que é problema inverso. A Figura A.1 traduz de forma simplificada a relação existente entre problema direto e inverso, onde M representa o espaço de parâmetros ou modelos e D representa o espaço das observações ou dados.

Quando dada uma causa se determina o efeito temos o problema direto. A cada problema direto temos um problema inverso associado a ele. Assim, a partir da observação de um efeito pode-se determinar a sua causa [8, 26], tem-se então um problema inverso.

De forma geral, muitos fenômenos podem ser modelados segundo [8] a partir das seguintes quantidades:

input f , **sistema de parâmetros** $F(a)$, **output** u ,

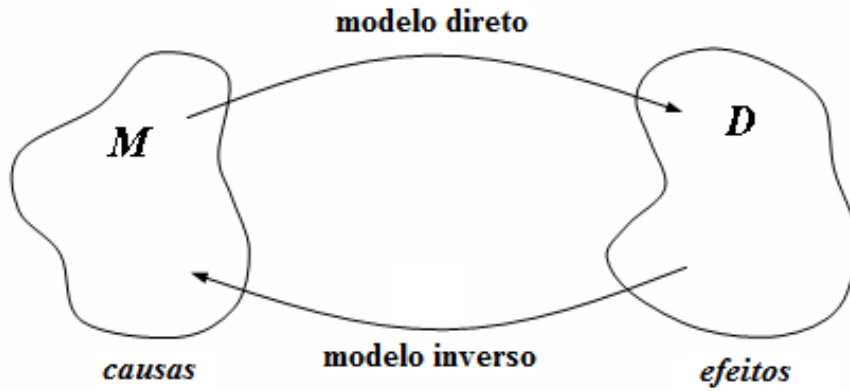


Figura A.1: Representação do modelo direto e inverso

em que o operador $F(\cdot)$ representa um conjunto de equações que modelam o problema em questão, contendo parâmetros representados por a . O input f pode ser representado como as condições iniciais ou fonte na equação diferencial e u representa a solução de tal equação. Na análise clássica da teoria de vigas, conhecidos a força atuante f e o sistema de parâmetros $F(a)$, determinar a deflexão u é seria analisar o problema direto.

Repare que um dos possíveis problemas inversos a ser analisado seria o de conhecidos u e o input f , determinar o parâmetro a no sistema representado por $F(\cdot)$. Esse problema é chamado de problema inverso de identificação e foi estudado em [37] na equação estática de Euler-Bernoulli. Ainda poderíamos determinar o input f correspondente ao output u quando conhecidos o sistema de parâmetros $F(a)$ e o u . Esse problema é chamado de problema inverso de reconstrução.

Uma forma de reescrever o sistema acima em termos de uma equação de operadores é

$$F(a) = u \quad (\text{A.2.1})$$

onde F é um operador definido entre espaços vetoriais adequados. A Equação A.2.1 é dita *bem posta* segundo Hadamard quando sua solução satisfaz as condições de existência, unicidade e dependência contínua dos dados iniciais para todo o conjunto de dados admissíveis. Quando uma dessas propriedades não é cumprida o problema é *mal-posto*. Essa é uma característica dos problemas inversos em geral. Eles não satisfazem algumas (ou todas) condições de Hadamard.

Questões que envolvem falta de existência ou unicidade da solução podem ser superadas, por exemplo, aumentando o espaço solução ou adicionando propriedades ao modelo [8]. No entanto, a falta de dependência contínua dos dados é a mais preocupante pois o não cumprimento desta condição implica na instabilidade do problema em relação aos erros nas medidas. Isso significa que pequenas variações nos dados acarretam em grandes variações na solução [8, 37], o que é um problema em virtude de obtermos na prática dados/medidas imprecisas ou incompletas, ou

seja, dados com ruídos, representados aqui por u^δ e que satisfazem

$$\|u - u^\delta\| \leq \delta \quad (\text{A.2.2})$$

onde $\delta > 0$ é o nível de ruídos.

Em virtude disso, para obtermos uma solução aproximada que seja estável é necessário utilizarmos de estratégias matemáticas chamadas de métodos de regularização. Existe um grande número de métodos na literatura, no entanto, geralmente eles se dividem em dois tipos: aqueles que resolvem problemas cujo operador F é um operador linear e limitado e outros mais gerais, capazes de determinar soluções aproximadas de problemas inversos não lineares.

O interesse neste trabalho está em analisar o problema inverso associado a equação de Euler-Bernoulli fracionária a partir dos modelos apresentados em [40] e [33].

A.3 Métodos de Regularização

Mostramos anteriormente que o problema inverso de recuperar $a(x)$ na equação (2.2.10) é instável em relação a erros nas medidas (ver Figura 2.1) produzindo assim soluções inadequadas para o problema. Para corrigirmos essa situação devemos encontrar uma estratégia que aproxime o operador F^{-1} a uma família de operadores bem postos e que, conseqüentemente, permita encontrar uma aproximação (a melhor possível) para a solução do problema. Essa estratégia é chamada de método de regularização e será definida a seguir.

Definição A.3.1. *Sejam $F : H_1 \rightarrow H_2$ um operador linear e limitado e $\alpha_0 \in (0, +\infty)$. Para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$, seja*

$$R_\alpha : H_2 \rightarrow H_1$$

*um operador contínuo (linear ou não linear). A família $\{R_\alpha\}$ é chamada de uma **estratégia ou método de regularização** para a inversa generalizada de F , denotada por $F^\dagger$, se, para todo $u \in D(F^\dagger)$, existir uma regra para escolher o parâmetro $\alpha := \alpha(\delta, u^\delta)$ tal que*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup = \{\|R_{\alpha(\delta)} u^\delta - F^\dagger u\| : u^\delta \in H_2, \|u^\delta - u\| \leq \delta\} = 0. \quad (\text{A.3.1})$$

Assim, um método de regularização depende da escolha do parâmetro α podendo ser feito *a priori* ou *a posteriori*. Dessa forma, assumindo que essa escolha é feita de forma adequada, procuramos por aproximações a_α^δ de $a^\dagger$, que dependam continuamente dos dados u^δ , e que convirjam para $a^\dagger$, se o nível de ruídos δ convergir para zero.

O método mais conhecido para resolver problemas mal postos é a **regularização de Tikhonov**. Para o nosso problema, esse método consiste em aproximar uma solução de (2.4.1) por um minimizador a_α^δ do funcional

$$a \longmapsto \|F(a) - u^\delta\|_{L^2[0,L]}^2 + \alpha \|a - a_0\|_{L^2[0,L]}^2 \quad (\text{A.3.2})$$

em que α é o parâmetro de regularização e a_0 é alguma informação conhecida *a priori* da solução.

A.4 Noções básicas da Teoria de Semigrupos

Nesta subseção traremos algumas noções da teoria de semigrupos que será utilizada posteriormente. Para isso vamos considerar o problema abstrato de Cauchy de segunda ordem

$$\begin{cases} \frac{d^2 v}{dt^2}(t) + \mathcal{B} \frac{dv}{dt}(t) + \mathcal{A}v(t) = f(t), & t \in (0, T), \\ v(0) = v_0, & \frac{dv}{dt}(0) = v_1 \end{cases} \quad (\text{A.4.1})$$

em que $\mathcal{A}$ é um operador ilimitado do espaço de Hilbert H e $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(H)$.

Uma família $C(t), t \in \mathbb{R}$ de operadores lineares e limitados de H é chamada de família cosseno fortemente contínua se:

1. $C(0) = \mathcal{I}$, em que $\mathcal{I}$ é o operador identidade em H .
2. $C(t+s) + C(t-s) = 2C(t)C(s)$, para todo $s, t \in \mathbb{R}$,
3. a aplicação $t \rightarrow C(t)y$ é fortemente contínua para qualquer $y \in H$.

Seja $C(t), t \in \mathbb{R}$ uma família cosseno fortemente contínua em H . A família de operadores lineares e limitados de H , $S(t), t \in \mathbb{R}$, definida por

$$S(t)y = \int_0^L C(s)y ds, \quad \text{para } t \in \mathbb{R}, \quad y \in H \quad (\text{A.4.2})$$

é chamada família seno associada à família cosseno fortemente contínua.

O gerador infinitesimal $-\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \rightarrow H$ de uma família de cosseno $C(t), t \in [0, T]$, é definida por

$$-\mathcal{A}y = \frac{d^2}{dt^2} C(t)y|_{t=0}$$

para todo $y \in D(\mathcal{A}) = \{y \in H : C(t)y \in C^2(\mathbb{R}, H)\}$.

A proposição a seguir apresenta propriedades para o gerador infinitesimal e sua relação com as famílias $C(t)$ e $S(t)$. Para isso, vamos considerar o espaço $\epsilon[\{y \in H : C(t)y \in C^1(\mathbb{R}, H)\}]$.

Proposição A.4.1. *Seja $C(t), t \in \mathbb{R}$ uma família cosseno fortemente contínua em H com gerador infinitesimal $-\mathcal{A}$ e seja $S(t), t \in \mathbb{R}$, a família seno associada a $C(t)$. Então:*

1. *Se $y \in D(\mathcal{A})$, então $C(t)y \in D(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}C(t)y = C(t)\mathcal{A}y$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$ e $\frac{d^2}{dt^2} C(t)y = -\mathcal{A}C(t)y = -C(t)\mathcal{A}y$.*
2. *Se $y \in H$, então $S(t)y \in \epsilon$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$.*
3. *Se $y \in \epsilon$, então $S(t)y \in D(\mathcal{A})$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$ e $\frac{d}{dt} C(t)y = \frac{d^2}{dt^2} S(t)y = -\mathcal{A}S(t)y$.*

4. Se $y \in D(\mathcal{A})$, então $S(t)y \in D(\mathcal{A})$, e $\mathcal{A}S(t)y = S(t)\mathcal{A}y$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$.

Proposição A.4.2. *Seja $-\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de uma família de cossenos $C(t), t \in \mathbb{R}$. Então existe $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$ de forma que $\|C(t)\|_{\mathcal{L}_H} \leq Me^{\omega|t|}$, $\|S(t)\|_{\mathcal{L}_H} \leq Me^{\omega|t|}$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Pelo princípio da limitação uniforme temos que tanto $C(t), t \in [0, T]$ e $S(t), t \in [0, T]$ são uniformemente limitados por $Me^{\omega T}$.*

Se $-\mathcal{A}$ gera uma família de cossenos fortemente contínua (e consequentemente uma família de senos) então sob condições suficientes em v_0, v_1, f e aplicando a identidade

$$\int_0^t S(t-s)\mathcal{B}v'(s)ds = \int_0^t C(t-s)\mathcal{B}v(s)ds - S(t)\mathcal{B}v_0, \quad (\text{A.4.3})$$

para $v \in C^1((0, T]; H)$) obtemos uma única solução para o sistema (A.4.1) dada por

$$\begin{aligned} v(t) = & (C(t) + S(t)\mathcal{B})v_0 + S(t)v_1 \\ & - \int_0^t C(t-s)\mathcal{B}v(s)ds + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (\text{A.4.4})$$

A.5 Um pouco da teoria dos Fractais

Muitos fenômenos na natureza não conseguem ser explicados pela matemática convencional, ou ainda, não podem ser representados pela geometria euclidiana tradicional (linhas, círculos, planos, etc). É o caso por exemplo da formação das nuvens e o crescimento e disposição de galhos em árvores. Para isso é necessário uma matemática que as caracterize de forma adequada, com uma geometria capaz de descrever com maior exatidão as irregularidades da natureza, sendo essa a chamada Matemática dos Fractais [1].

Os fractais são formas geométricas incapazes de serem classificadas nos moldes da Geometria Euclidiana devido principalmente a três características fundamentais que os definem e os distinguem de outras formas: auto-semelhança em diferentes níveis de escalas, Dimensão fractal e sua complexidade infinita [1].

Devido a essa estrutura complexa, a utilização da teoria e das ferramentas do cálculo clássico tornam-se inadequadas para estudar funções com comportamentos fractais. Contudo, diversas propostas de extensão do cálculo têm surgido nas últimas décadas, dentre elas, as derivadas métricas que são generalizações das derivadas usuais mas que podem ser aplicadas para um número maior de funções, inclusive, para algumas classes de funções não diferenciáveis. Como caso especial, as derivadas métricas possuem diversas formulações de derivadas deformadas importantes como a derivada de Hausdorff [34].

A curva de Koch A.2 é um exemplo simples de uma estrutura fractal. Seja E_0 um segmento de reta unitário. E_1 é formado por 4 segmentos obtidos pela substituição do terço médio de E_0 por 2 lados de um triângulo equilátero com base no segmento removido. E_2 é obtido da mesma forma para cada segmento em E_1 e assim sucessivamente. Ou seja, E_k é obtido substituindo o

terço médio de cada segmento E_{k-1} por 2 lados de um triângulo equilátero. Repare que quando k é grande, as curvas E_{k-1} e E_k diferem apenas em detalhes finos e quando k tende ao infinito, a sequência de curvas E_k se aproxima da curva limitada F denominada de curva de Koch [15].

A curva de Koch é constituída de partes em que cada parte é semelhante a anterior, porém reduzida a um fator de escala igual a $\frac{1}{3}$. A estrutura fina é refletida nas irregularidades em todas as escalas, ainda assim, essa estrutura complexa se originou de uma construção basicamente simples. Apesar de chamarmos F de curva, essa é muito irregular para ter tangentes no sentido clássico. Podemos ver também que o comprimento de E_k é dado por $(\frac{4}{3})^k$. Quando k tende ao infinito temos que F tem comprimento infinito. No entanto, F ocupa área nula no plano, e assim, nem o comprimento nem a área fornecem uma descrição muito útil do tamanho de F [15].

Ainda temos o conjunto do terço médio de Cantor, o triângulo de *Sierpinski* e o conjunto de Júlia como exemplos clássicos de estruturas fractais, ver [15]. Muito possivelmente, qualquer fractal terá uma estrutura fina, ou seja, seu detalhamento não diminui em qualquer nível de escala. Muitos fractais têm algum grau de auto-similaridade em que uma parte se assemelha a uma parte maior ou ainda ao fractal inteiro.

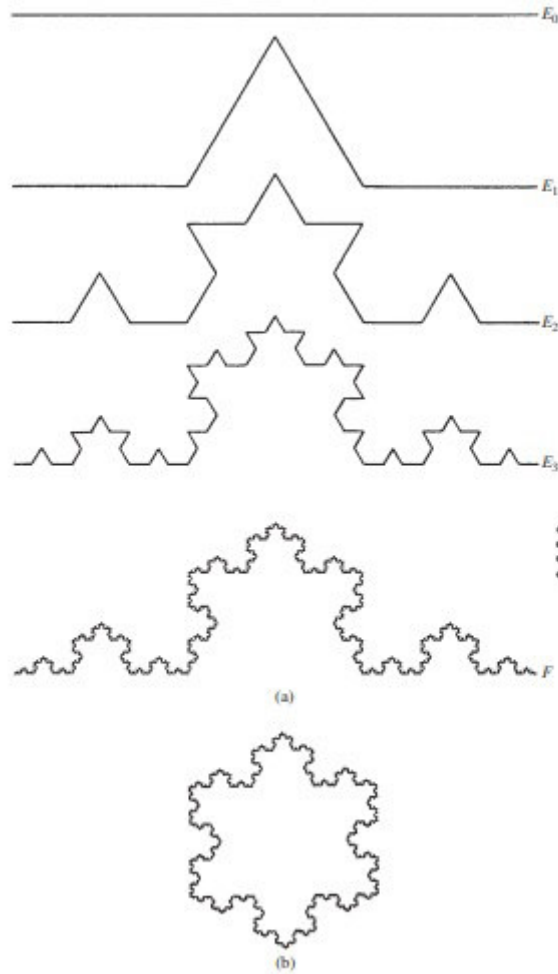


Figura A.2: (a) Construção da curva de Koch F . (b) Três curvas de Koch juntas para formar a curva snowflake. Retirada de [15]

Assim, métodos do cálculo tradicional e da geometria clássica se tornam inapropriados para o estudo de estruturas fractais e por isso é necessário a utilização de outras técnicas alternativas. A dimensão em suas muitas formas é a principal ferramenta da geometria fractal indicando o nível de ocupação do espaço euclidiano por um objeto fractal. Já sabemos que uma curva suave é um objeto unidimensional e uma superfície é bidimensional. No entanto, a dimensão de um conjunto de Cantor é dado por $\frac{\log 2}{\log 3} = 0.631\dots$ e a dimensão da curva de Koch é $\frac{\log 4}{\log 3} = 1.262\dots$, sendo essa maior que uma dimensão pois tem comprimento infinito e menor que duas dimensões pois possui área nula.

Existem várias definições de dimensão fractal sendo amplamente aplicáveis a qualquer conjunto, por exemplo, as dimensões de *box-counting* e a dimensão de Hausdorff. A dimensão de Hausdorff é a mais antiga e mais importante por isso apresentaremos um pouco de sua teoria logo a seguir.

A.5.1 Medida e Dimensão de Hausdorff

A dimensão de Hausdorff pode ser definida para qualquer conjunto e é baseada em medidas relativamente fáceis de serem manipuladas. Apesar de computacionalmente ser mais difícil de ser estimada, para uma compreensão adequada da matemática dos fractais, a familiaridade com a medida de Hausdorff e dimensão é essencial.

Medida de Hausdorff

Se U é um subconjunto não vazio do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, o diâmetro de U é definido por $|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$, ou seja, a maior distância de qualquer par de ponto em U . Se $\{U_i\}$ é uma coleção finita (ou contável) de conjuntos de diâmetro menores que δ que cobre F , ou seja, $F \subset \cup_{i=1}^{\infty} U_i$ com $0 < |U_i| \leq \delta$ para cada i , dizemos então que $\{U_i\}$ é a δ -cobertura de F .

Seja F um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ com $s \geq 0$. Para cada $\delta > 0$ definimos:

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ é a } \delta\text{-cobertura de } F \right\} \quad (\text{A.5.1})$$



Figura A.3: Conjunto F e duas δ -coberturas possíveis para F . O ínfimo de $\sum |U_i|^s$ sobre todas as coberturas $\{U_i\}$ nos dá $\mathcal{H}_\delta^s$. Fonte:[15]

Dessa forma, estamos olhando para todas as coberturas de F por conjuntos de diâmetro no máximo δ e procurando minimizar a soma das s -ésimas potências dos diâmetros. À medida que δ diminui, as coberturas possíveis de F são reduzidas. E assim, o ínfimo $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ aumenta e se aproxima de um limite quando δ se aproxima de zero. Ou seja,

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F). \quad (\text{A.5.2})$$

Este limite existe para qualquer subconjunto F de $\mathbb{R}^n$, apesar de seu valor ser geralmente 0 ou ∞ . Dessa forma, denominamos $\mathcal{H}^s(F)$ a medida s -dimensional de Hausdorff de F .

Segundo [15] a medida de Hausdorff generaliza a ideia de comprimento, área, volume, entre outros. Podemos observar que para subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, a medida de Hausdorff n -dimensional é, considerando um múltiplo constante, apenas medida de Lebesgue n -dimensional (o volume n -dimensional usual). Em particular, se F é um subconjunto de Borel de $\mathbb{R}^n$ então

$$\mathbb{H}^n(F) = c_n^{-1} \text{vol}^n(F), \quad (\text{A.5.3})$$

onde c_n é o volume de uma bola n -dimensional de diâmetro unitário, de modo que, se n é par então $c_n = \pi^{n/2}/2^n(n/2)!$ e se n é ímpar então $c_n = \pi^{(n-1)/2}((n-1)/2)!/n!$.

Dimensão de Hausdorff

De acordo com a definição (A.5.1), é possível ver que qualquer conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ e $\delta < 1$, $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ é não crescente com s , então por (A.5.2), $\mathcal{H}^s(F)$ é também não crescente. de fato, se $t > s$ e $\{U_i\}$ é a δ -cobertura de F , temos que

$$\sum_i |U_i|^t \leq \sum_i |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s \quad (\text{A.5.4})$$

então, tomando o ínfimo em todas as δ -coberturas

$$\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(F)$$

Tomando $\delta \rightarrow 0$, vemos que se $\mathcal{H}^s(F) \leq \infty$, então $\mathcal{H}^t(F) = 0$ para $t > s$. A figura ?? mostra um gráfico de $\mathcal{H}^s(F)$ em relação a s . Podemos ver que existe um valor crítico de s no qual $\mathcal{H}^s(F)$ salta de ∞ para 0. A esse valor crítico é dado o nome de dimensão de Hausdorff de F ($\dim_H F$) e está definido para qualquer conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$. Formalmente temos,

$$\dim_H F = \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\} \quad (\text{A.5.5})$$

(com o supremo do conjunto vazio sendo zero), tal que

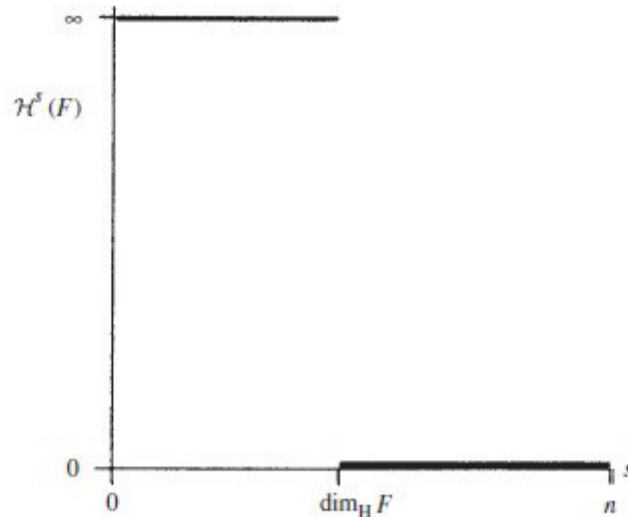


Figura A.4: A dimensão de Hausdorff é o valor de s quando ocorre o salto de ∞ para 0.

Fonte: [15]

$$\mathcal{H}^s(F) = \infty \text{ se } 0 \leq s < \dim_H F; \quad (\text{A.5.6})$$

$$0 \text{ se } s > \dim_H F \quad (\text{A.5.7})$$

Se $s = \dim_H F$, então $\mathcal{H}^s(F)$ pode ser 0 ou ∞ , ou satisfaz

$$0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty.$$

Exemplificando: seja F um disco plano de raio unitário em $\mathbb{R}^n$. A partir das propriedades de comprimento, área e volume, $H^1(F) = \text{comprimento}(F) = \infty$, $0 < \mathcal{H}^2(F) = (4/\pi) \times \text{área}(F) = 4 < \infty$ e $\mathcal{H}^3(F) = (6/\pi) \times \text{vol}(F) = 0$. Então, $\dim_H F = 2$, com $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ se $s < 2$ e $\mathcal{H}^s(F) = 0$ se $s > 2$.

A.6 Um pouco da teoria de Cálculo Fracionário

O cálculo fracionário teve sua origem em 1965 em uma carta escrita por l'Hospital a Leibniz. Nessa carta, o significado de derivada de ordem meio é proposto e discutido [6].

No século XIX vários autores contribuíram para o desenvolvimento do cálculo fracionário, dentre eles, Euler, Lagrange, Laplace, Fourier, Abel, Heaviside, entre outros, surgindo assim as primeiras definições de derivadas e integrais de ordem não inteiras.

Até então, o desenvolvimento do cálculo fracionário limitava-se ao campo da matemática pura. Esse cenário foi alterado em 1969 quando Caputo resolveu problemas de viscoelasticidade propondo uma nova definição para derivada de ordem fracionária [6].

Ocorre que cada vez mais engenheiros e cientistas estão desenvolvendo novos modelos que envolvem equações diferenciais fracionárias. Esses modelos foram aplicados com sucesso, por exemplo, na mecânica com a teoria da viscoelasticidade e viscoplasticidade, na bioquímica com a modelagem de polímeros, na engenharia elétrica com transmissão de ondas de ultrassom, na medicina com a modelagem de tecido humano sob cargas mecânicas entre outros [12]. Dessa forma, o cálculo fracionário tem se tornado um novo método de solução de diversos problemas em matemática, ciência e engenharia. As diferentes aplicações do cálculo fracionário na física, no processamento de sinais, na mecânica de fluidos, na viscoelasticidade e também aos problemas da mecânica proporcionam o desenvolvimento e avanço dessa recente área matemática.

A seguir apresentaremos uma introdutória noção da teoria do cálculo fracionário. Como a maioria das formulações envolvendo a derivada fracionária é definida em termos de uma integral fracionária, iniciaremos apresentando o conceito de integral fracionária conforme proposto por Riemann-Liouville.

Definição A.6.1 (Integral Fracionária). [46] Dado $\beta \in \mathbb{R}_+$ e $f(x) \in L^1[a, b]$, o operador da integral fracionária segundo Riemann-Liouville, denotado por J_a^β é dado por

$$J_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\beta-1} f(t) dt \quad (\text{A.6.1})$$

onde $\Gamma(\beta)$ é a função $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ conhecida como função Gamma de Euler e definida por

$$\Gamma(\beta) := \int_0^\infty t^{\beta-1} e^{-t} dt.$$

A partir deste ponto iremos apresentar o conceito de derivada fracionária, visto que é ele que desempenha papel fundamental na discussão de uma equação diferencial fracionária, objeto de interesse deste trabalho.

Existem muitas definições para a derivada fracionária sendo as mais utilizadas as de Riemann-Liouville e Caputo. A escolha apropriada de uma ou de outra deve estar de acordo com o tipo de problema analisado e com base nas condições de contorno e iniciais. No entanto, vale a pena mencionar a formulação de Grünwald-Letnikov, devido a sua importância em problemas numéricos e a formulação de Riesz importante nas aplicações, em particular, quando a ordem fracionária encontra-se na variável espacial [46].

Definição A.6.2 (Derivada Fracionária segundo Riemann-Liouville). Seja $\beta \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \in C^1[a, b]$ e η o menor inteiro maior que β . Definimos o operador derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de ordem $\beta \in \mathbb{R}_+$, denotado por D_a^β , como

$$D_a^\beta f(x) = D^\eta J_a^{\eta-\beta} f(x). \quad (\text{A.6.2})$$

Importante observar que a derivada de ordem fracionária é o operador inverso à esquerda do operador integral de ordem fracionária, ou seja, para $\beta \geq 0$, para cada $f(x) \in L^1[a, b]$ temos

$D_a^\beta J_a^\beta f = f$. Além disso, diferentemente do cálculo clássico, a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de uma constante é diferente de zero, conforme apresentamos no exemplo a seguir.

Exemplo A.6.1. *Seja $f(x) = 1 = x^0$, então a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de ordem $1/2$ é:*

$$D^{1/2}x^0 = D^1[J^{1-1/2}x^0] = \frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(0-1/2+1)}x^{0-1/2}$$

Como $\Gamma(1) = 1$ e $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ temos:

$$D^{1/2}x^0 = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \neq 0.$$

Definição A.6.3 (Derivada Fracionária segundo Caputo). *Seja $\beta \in \mathbb{R}_+$, $f \in C^1[a, b]$ e η menor inteiro maior que β . Definimos o operador derivada fracionária segundo Caputo, denotado por ${}_cD_a^\beta f$, como*

$${}_cD_a^\beta f = J_a^{\eta-\beta} D^\eta f \quad (\text{A.6.3})$$

para qualquer $D^\eta f \in L^1[a, b]$.

A derivada fracionária segundo Caputo de uma constante é igual a zero como no cálculo clássico.

Exemplo A.6.2. *Seja $f(x) = 1 = x^0$, então a derivada fracionária segundo Caputo de ordem $1/2$ é:*

$${}_cD^{1/2}x^0 = J^{1-1/2}(D^1x^0) = J^{1/2}(0) = 0.$$

Outra formulação para integrais e derivadas fracionárias é a formulação de Riesz, as quais apresentaremos a seguir.

Definição A.6.4 (Integral Fracionária segundo Riesz). *Dado $\beta \in \mathbb{R}_+$ e $f(x) \in L^1[a, b]$, o operador da integral fracionária segundo Riesz denotado por ${}_RJ^\beta$ é*

$${}_RJ^\beta = \frac{1}{2\Gamma(\beta)} \int_a^b |x-t|^{\beta-1} f(t) dt. \quad (\text{A.6.4})$$

A integral fracionária de Riesz foi definida com base na integral à direita e à esquerda de Riemann-Liouville. Além disso, há casos em que os limites de integração são $a = -\infty$ e $b = +\infty$ e então a equação (A.6.4) é válida apenas para uma classe especial de funções.

Definição A.6.5 (Derivada fracionária de Riesz). *Seja $\beta \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \in C^1[a, b]$ e η o menor inteiro maior que β . Definimos o operador derivada fracionária segundo Riesz de ordem $\beta \in \mathbb{R}_+$, denotado por ${}_RD_a^\beta$, como*

$${}_RD^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\eta-\beta)} \left(\frac{d}{dt} \right)^\eta \int_a^b |x-t|^{\eta-\beta-1} f(t) dt. \quad (\text{A.6.5})$$

Referências Bibliográficas

- [1] BACKES, A. R.; BRUNO, O. M. Técnicas de estimativa da dimensão fractal: um estudo comparativo. **INFOCOMP Journal of Computer Science**, v.4, n.3, p.50–58, 2005.
- [2] BARCILON, V. Inverse problem for the vibrating beam in the free-clamped configuration. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences**, v.304, n.1483, p.211–251, 1982.
- [3] BLASZCZYK, T. Analytical and numerical solution of the fractional Euler–Bernoulli beam equation. **Journal of Mechanics of Materials and Structures**, v.12, n.1, p.23–34, 2016.
- [4] BRATTI, G. et al. Proposta de metodologia para a caracterização do módulo complexo de materiais viscoelásticos aplicados em vigas. , 2016.
- [5] BREZIS, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. Springer Science & Business Media, 2010.
- [6] CAMARGO, R. d. F. et al. Cálculo fracionário e aplicações. , 2009.
- [7] DE CEZARO, A. et al. **Métodos de regularização tipo level set para problemas inversos**. 2006. Dissertação — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC.
- [8] DE CEZARO, A.; LEITÃO, A. **Introdução aos Problemas Inversos Lineares**. 1.ed. IV Bienal da SBM, 2008.
- [9] DE CEZARO, A.; LEITÃO, A.; TAI, X.-C. On multiple level-set regularization methods for inverse problems. **Inverse Problems**, v.25, p.035004, 2009.
- [10] DESERI, L.; DI PAOLA, M.; ZINGALES, M. Free energy and states of fractional-order hereditariness. **International Journal of Solids and Structures**, v.51, n.18, p.3156–3167, 2014.
- [11] DI PAOLA, M.; HEUER, R.; PIRROTTA, A. Fractional visco-elastic Euler–Bernoulli beam. **International Journal of Solids and Structures**, v.50, n.22-23, p.3505–3510, 2013.
- [12] DIETHELM, K.; FORD, N. J. **Analysis of fractional differential equations**. Elsevier, 2002. 229–248p. v.265, n.2.
- [13] ERINGEN, A. **Nonlocal continuum field theories**. Springer Science & Business Media, 2002.
- [14] EVANS, L.; GARIEPY, R. **Measure theory and fine properties of functions**. Boca Raton, FL: CRC Press, 1992. viii+268p. (Studies in Advanced Mathematics).

- [15] FALCONER, K. **Fractal geometry: mathematical foundations and applications**. John Wiley & Sons, 2004.
- [16] GAO, X.-L.; MAHMOUD, F. A new Bernoulli–Euler beam model incorporating microstructure and surface energy effects. **Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik**, v.65, n.2, p.393–404, 2014.
- [17] GERE, J. **Mecânica dos Materiais**. Editora Cengage, 2009.
- [18] GLADWELL, G. M.; MORASSI, A. A family of isospectral Euler–Bernoulli beams. **Inverse problems**, v.26, n.3, p.035006, 2010.
- [19] GURTIN, M.; MURDOCH, A. Surface stress in solids. **International Journal of Solids and Structures**, v.14, n.6, p.431–440, 1978.
- [20] HASANOV, A.; KAWANO, A. Identification of unknown spatial load distributions in a vibrating Euler–Bernoulli beam from limited measured data. **Inverse Problems**, v.32, n.5, p.055004, 2016.
- [21] HIBBELER, R. **Resistência dos Materiais**. 7.ed. Pearson Prentice Hall, 2006.
- [22] KALTENBACHER, B.; NEUBAUER, A.; SCHERZER, O. **Iterative regularization methods for nonlinear ill-posed problems**. Walter de Gruyter, 2008. v.6.
- [23] KAWANO, A. Uniqueness in the identification of asynchronous sources and damage in vibrating beams. **Inverse Problems**, v.30, n.6, p.065008, 2014.
- [24] KAWANO, A. Uniqueness in the determination of unknown coefficients of an Euler–Bernoulli beam equation with observation in an arbitrary small interval of time. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v.452, n.1, p.351–360, 2017.
- [25] KAWANO, A.; ZINE, A. Uniqueness and nonuniqueness results for a certain class of almost periodic distributions. **SIAM Journal on Mathematical Analysis**, v.43, n.1, p.135–152, 2011.
- [26] KELLER, J. Inverse problems. **The American Mathematical Monthly**, v.83, p.107–118, 2 1976.
- [27] KHALIL, R.; Al Horani, M.; YOUSEF, A.; SABABHEH, M. A new definition of fractional derivative. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v.264, p.65–70, 2014.
- [28] KIRSCH, A. **An introduction to the mathematical theory of inverse problems**. Springer Science & Business Media, 2011. v.120.
- [29] KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. 1.ed. Canadá, 1978.

- [30] LAM, D.; YANG, F.; CHONG, A.; WANG, J.; TONG, P. Experiments and theory in strain gradient elasticity. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v.51, n.8, p.1477–1508, 2003.
- [31] LERMA, A.; HINESTROZA, D. Coefficient identification in the Euler–Bernoulli equation using regularization methods. **Applied Mathematical Modelling**, v.41, p.223–235, 2017.
- [32] LESNIC, D.; ELLIOTT, L.; INGHAM, D. Analysis of coefficient identification problems associated to the inverse Euler-Bernoulli beam theory. **IMA journal of applied mathematics**, v.62, n.2, p.101–116, 1999.
- [33] LIASKOS, K. B.; PANTELOUS, A. A.; KOUGIOUMTZOGLOU, I. A.; MEIMARIS, A. T. Implicit analytic solutions for the linear stochastic partial differential beam equation with fractional derivative terms. **Systems & Control Letters**, v.121, p.38–49, 2018.
- [34] MACEDO, R. **Modelo de dispersão de contaminantes na camada limite planetária usando derivada de Hausdorff**. 2019. Dissertação — Universidade Federal do Rio Grande, PPGMC Rio Grande.
- [35] MAINARDI, F. **Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: an introduction to mathematical models**. World Scientific, 2010.
- [36] MARINOV, T.; VATSALA, A. Inverse problem for coefficient identification in the Euler–Bernoulli equation. **Computers & Mathematics with Applications**, v.56, n.2, p.400–410, 2008.
- [37] MEDEIROS, E. F. **Identificação do coeficiente de rigidez no modelo de Euler–Bernoulli para vigas**. 2019. Dissertação — Universidade Federal do Rio Grande, PPGMC Rio Grande.
- [38] MINDLIN, R.; TIERSTEN, H. Effects of couple-stresses in linear elasticity. **Archive for Rational Mechanics and analysis**, v.11, n.1, p.415–448, 1962.
- [39] OSTOJA-STARZEWSKI, M.; LI, J. Fractal materials, beams, and fracture mechanics. **Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik**, v.60, n.6, p.1194, 2009.
- [40] OSTOJA-STARZEWSKI, M.; LI, J.; JOUMAA, H.; DEMMIE, P. N. **From fractal media to continuum mechanics**. Wiley Online Library, 2014.
- [41] RAHIMI, Z.; AHMADI, S.; SUMELKA, W. Fractional Euler-Bernoulli Beam Theory Based on the Fractional Strain-Displacement Relation and its Application in Free Vibration, Bending and Buckling Analyses of Micro/Nanobeams. **Acta Physica Polonica, A.**, v.134, n.2, 2018.
- [42] RAO, S. S. **Vibration of continuous systems**. John Wiley & Sons, 2019.

- [43] ROSSIKHIN, Y. A.; SHITIKOVA, M. V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: novel trends and recent results. **Applied Mechanics Reviews**, v.63, n.1, 2010.
- [44] SUMELKA, W.; BLASZCZYK, T.; LIEBOLD, C. Fractional Euler–Bernoulli beams: Theory, numerical study and experimental validation. **European Journal of Mechanics-A/Solids**, v.54, p.243–251, 2015.
- [45] TARASOV, V. E. Continuous medium model for fractal media. **Physics Letters A**, v.336, n.2-3, p.167–174, 2005.
- [46] TEODORO, G.; OLIVEIRA, D.; OLIVEIRA, E. Sobre derivadas fracionárias. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v.40, 2017.
- [47] TONETTO, L. **Modelos elásticos não clássicos para vibrações de micro e nano-vigas**. 2015. Tese — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.