

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

**ALGORITMOS DE INVERSÃO NUMÉRICA DA
TRANSFORMADA DE LAPLACE APLICADOS À SOLUÇÃO
DE UM PROBLEMA DE DIFUSÃO DE MERCÚRIO NA ÁGUA**

por

Elisandra Konflanz Freitas

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Modelagem Computacional

Profa. Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez
Orientadora
Prof. Dr. João Francisco Prolo Filho
Coorientador

Rio Grande, agosto, 2022.

Elisandra Konflanz Freitas

**“ALGORITMOS DE INVERSÃO NUMÉRICA DA TRANSFORMADA DE LAPLACE
APLICADOS À SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE DIFUSÃO DE MERCÚRIO NA
ÁGUA”**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande - FURG, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestra. Área de concentração: Modelagem Computacional.

Aprovada em: 25 de agosto de 2022.

BANCA EXAMINADORA



Documento assinado digitalmente

BARBARA DENICOL DO AMARAL RODRIGUEZ

Data: 25/08/2022 16:57:18-0300

Verifique em <https://verificador.iti.br>

Profa. Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez (Orientadora – FURG)



Documento assinado digitalmente

JOAO FRANCISCO PROLO FILHO

Data: 02/09/2022 22:13:57-0300

Verifique em <https://verificador.iti.br>

Prof. Dr. João Francico Prolo Filho (Coorientador – FURG)



Documento assinado digitalmente

MATHEUS JATKOSKE LAZO

Data: 30/08/2022 17:22:09-0300

Verifique em <https://verificador.iti.br>

Prof. Dr. Matheus Jatkoske Lazo (FURG)

RUDNEI DIAS DA

CUNHA:42157480030

Digitally signed by RUDNEI

DIAS DA CUNHA:42157480030

Date: 2022.08.25 17:35:07

-03'00'

Prof. Dr. Rudnei Dias da Cunha (UFRGS)

Rio Grande – RS
2022

Ficha Catalográfica

F866a Freitas, Elisandra Konflanz.

Algoritmos de inversão numérica da Transformada de *Laplace* aplicados à solução de um problema de difusão de mercúrio na água / Elisandra Konflanz Freitas. – 2022.

131 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Rio Grande/RS, 2022.

Orientadora: Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez.

Coorientador: Dr. João Francisco Prolo Filho.

1. Transformada de *Laplace* 2. Inversão numérica 3. Problema de Difusão de Mercúrio I. Rodriguez, Bárbara Denicol do Amaral II. Prolo Filho, João Francisco III. Título.

CDU 004

Catálogo na Fonte: Bibliotecário José Paulo dos Santos CRB 10/2344

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, quero agradecer aos meus orientadores, Professora Bárbara e Professor João, por toda dedicação, disponibilidade e incentivo que foram fundamentais ao longo de todo o percurso. Saliento o apoio incondicional prestado, a forma interessada e extraordinária como acompanharam a realização deste trabalho.

Agradeço aos professores Matheus e Rudnei pela colaboração, disponibilidade e por suas valiosas contribuições.

À minha família, pelo encorajamento, paciência e compreensão. Muito obrigada pelo apoio constante nas grandes e pequenas coisas.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional (PPGMC) e à Universidade Federal do Rio Grande (FURG).

Por fim, agradeço imensamente à Deus.

RESUMO

Este trabalho objetiva avaliar a eficiência de métodos para a inversão numérica da Transformada de Laplace, visto que, tal procedimento, para certos problemas, pode ser de difícil execução analítica. Inicialmente, analisa-se o desempenho das técnicas de Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional, através de um estudo de acurácia e comparação de resultados com a solução analítica. As técnicas citadas são testadas para um conjunto de funções elementares, cuja transformada inversa envolve funções do tipo polinomial, exponencial e trigonométrica. Em um segundo momento, realizam-se testes no sentido de examinar o potencial de resolução desses recursos ao serem aplicados às transformadas de funções ditas especiais, cuja inversa analítica não é facilmente obtida. Por fim, esta análise é estendida a um problema de difusão de mercúrio na água, cuja solução é obtida utilizando-se a Transformada de Laplace. No processo, assim como nos testes das funções elementares, observou-se que as técnicas mencionadas apresentaram um bom desempenho no tratamento do problema de difusão. No entanto, os métodos de Talbot e Talbot-Racional mostram resultados satisfatórios somente para valores maiores que o coeficiente de s no argumento da exponencial, em razão da presença da função Heaviside. Vale ressaltar, que neste estudo, não pretende-se apontar o melhor método, e sim, apresentar recomendações para uma escolha apropriada, de acordo com as características das funções a serem invertidas e particularidades de cada uma das técnicas aqui estudadas.

Palavras-chaves: Transformada de Laplace; Inversão numérica; Problema de Difusão de Mercúrio.

ABSTRACT

This work aims to evaluate the efficiency of methods for the numerical inversion of the Laplace Transform, since such a procedure can be hard to perform for certain problems analytically. Zakian, Stehfest, Talbot and Talbot-Rational techniques and their performance is analyzed through an accuracy study, followed by the comparison of results with the analytical solution. The mentioned techniques have been tested for a set of elementary functions, whose inverse transforms involve polynomial, exponential and trigonometric functions. As a second moment, the tests are carried out to examine a potential resolution of these features when applied to the transforms of so-called special functions, whose analytical inverse is not easily achieved. Finally, the solution has been extended to diffusion of mercury in water, and its solution is obtained using the Laplace transform. In the process, as well as in the tests of the elementary functions, it was observed that the mentioned techniques presented a good performance in the diffusion problem treatment. However, the Talbot and Talbot-Rational methods show satisfactory results only for values bigger than the coefficient of s in the exponential argument due to the presence of the Heaviside function. It is worth mentioning that this study does not intend to point out the best method, but rather to present recommendations for an appropriate choice, according to the characteristics of the functions to be inverted and the particularities of each technique studied here.

Keywords: Laplace Transform; Numerical inversion; Mercury Diffusion Problem.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	17
2	OBJETIVOS	20
3	MÉTODOS NUMÉRICOS DE INVERSÃO	21
3.1	Método de Zakian	21
3.2	Método de Stehfest	22
3.3	Método de Talbot	23
3.4	Método de Talbot-Racional	25
4	RESULTADOS NUMÉRICOS	28
4.1	Testes para um conjunto de funções elementares	28
4.1.1	Inversão de $F_1(s)$	30
4.1.2	Inversão de $F_2(s)$	32
4.1.3	Inversão de $F_3(s)$	40
4.1.4	Inversão de $F_4(s)$	46
4.1.5	Inversão de $F_5(s)$	49
4.1.6	Inversão de $F_6(s)$	52
4.1.7	Inversão de $F_7(s)$	55
4.1.8	Inversão de $F_8(s)$	58
4.1.9	Inversão de $F_9(s)$	61
4.1.10	Discussão dos resultados para os testes das funções elementares	64
4.2	Testes para um conjunto de funções especiais - estudo preliminar	65
4.2.1	Inversão de $F_{10}(s)$	65
4.2.2	Inversão de $F_{11}(s)$	67
4.2.3	Inversão de $F_{12}(s)$	69
4.2.4	Discussão dos resultados para os testes das funções especiais	71
5	APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE NA OBTENÇÃO DA SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE DIFUSÃO DO MERCÚRIO NA ÁGUA	73
5.1	Solução analítica do problema	75
6	RESULTADOS	84
6.1	Método de Zakian aplicado à solução do problema de difusão de mercúrio na água	85
6.1.1	Concentração de mercúrio segundo Método de Zakian	86
6.2	Método de Stehfest aplicado à solução do problema de difusão de mercúrio na água	88
6.2.1	Concentração de mercúrio segundo Método de Stehfest	89
6.3	Método de Talbot aplicado à solução do problema de difusão de mercúrio na água	91
6.3.1	Concentração de mercúrio segundo Método Talbot	92
6.4	Método de Talbot-Racional aplicado à solução do problema de difusão de mercúrio na água	94
6.4.1	Concentração de mercúrio segundo Método de Talbot-Racional	95

7	CONCLUSÕES	98
8	REFERÊNCIAS	100
9	APÊNDICE	104
9.1	Inversão de $F_1(s)$	104
9.1.1	Método de Stehfest	104
9.1.2	Método de Talbot	105
9.1.3	Método de Talbot-Racional	105
9.2	Inversão de $F_2(s)$ para $a = 0.5$	106
9.2.1	Método de Stehfest	106
9.2.2	Método de Talbot	106
9.2.3	Método de Talbot-Racional	107
9.3	Inversão de $F_2(s)$ para $a = 2$	107
9.3.1	Método de Stehfest	107
9.3.2	Método de Talbot	108
9.3.3	Método de Talbot-Racional	108
9.4	Inversão de $F_2(s)$ para $a = 50$	109
9.4.1	Método de Stehfest	109
9.4.2	Método de Talbot	109
9.4.3	Método de Talbot-Racional	110
9.5	Inversão de $F_3(s)$ para $a = 0.5$	110
9.5.1	Método de Stehfest	110
9.5.2	Método de Talbot	111
9.5.3	Método de Talbot-Racional	111
9.6	Inversão de $F_3(s)$ para $a = 1$	112
9.6.1	Método de Stehfest	112
9.6.2	Método de Talbot	112
9.6.3	Método de Talbot-Racional	113
9.7	Inversão de $F_3(s)$ para $a = 2$	113
9.7.1	Método de Stehfest	113
9.7.2	Método de Talbot	114
9.7.3	Método de Talbot-Racional	114
9.8	Inversão de $F_4(s)$	115
9.8.1	Método de Stehfest	115
9.8.2	Método de Talbot	115
9.8.3	Método de Talbot-Racional	116
9.9	Inversão de F_5	116
9.9.1	Método de Stehfest	116
9.9.2	Método de Talbot	117
9.9.3	Método de Talbot-Racional	117
9.10	Inversão de F_6	118

9.10.1	Método de Stehfest	118
9.10.2	Método de Talbot	118
9.10.3	Método de Talbot-Racional	119
9.11	Inversão de F_7	119
9.11.1	Método de Stehfest	119
9.11.2	Método de Talbot	120
9.11.3	Método de Talbot-Racional	120
9.12	Inversão de F_8	121
9.12.1	Método de Stehfest	121
9.12.2	Método de Talbot	121
9.12.3	Método de Talbot-Racional	122
9.13	Inversão de F_9	122
9.13.1	Método de Stehfest	122
9.13.2	Método de Talbot	123
9.13.3	Método de Talbot-Racional	123
10	ANEXO	124
10.1	Fundamentação Matemática	124
10.1.1	Transformada de Laplace	124
10.1.2	Definição da Transformada de Laplace	125
10.1.3	Existência e Unicidade	125
10.1.4	Propriedades Operacionais	125
10.1.5	Funções Especiais - Função Degrau Unitário ou Função de Heaviside	127
10.2	Transformada Inversa de Laplace	128
10.2.1	Propriedades Operacionais	129
10.2.2	Inversão por Convolução	130
10.2.3	Métodos Analíticos de Inversão da Transformada de Laplace	130

LISTA DE FIGURAS

3.1	O contorno de Talbot.	24
3.2	Contornos de Talbot-Racional.	27
4.1	Comparativo dos métodos para $F_1(s)$	30
4.2	Comparativo dos métodos para $F_2(s)$, com $a = 0.5$	33
4.3	Comparativo dos métodos para $F_2(s)$, com $a = 2$	35
4.4	Comparativo dos métodos para $F_2(s)$, com $a = 50$	37
4.5	Comparativo dos métodos para $F_3(s)$, com $a = 0.5$	40
4.6	Comparativo dos métodos para $F_3(s)$, com $a = 1$	42
4.7	Comparativo dos métodos para $F_3(s)$, com $a = 2$	44
4.8	Comparativo dos métodos para $F_4(s)$	47
4.9	Comparativo dos métodos para $F_5(s)$	50
4.10	Comparativo dos métodos para $F_6(s)$	53
4.11	Comparativo dos métodos para $F_7(s)$	56
4.12	Comparativo dos métodos para $F_8(s)$	59
4.13	Comparativo dos métodos para $F_9(s)$	62
4.14	Soluções numérica da inversão através dos métodos de Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional de $F_{10}(s)$	66
4.15	Soluções numérica da inversão através dos métodos de Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional de $F_{11}(s)$	68
4.16	Soluções numérica da inversão através dos métodos de Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional de $F_{12}(s)$	70
6.1	a) Perfil da solução analítica e b) Perfil da solução numérica - Zakian. . .	85
6.2	a) Perfil da solução analítica e b) Perfil da solução numérica - Stehfest. . .	88
6.3	a) Perfil da solução analítica e b) Perfil da solução numérica - Talbot (gerado a partir de $x = 0.3$).	91
6.4	a) Perfil da solução analítica e b) Perfil da solução numérica - Talbot- Racional (gerado a partir de $x = 0.3$).	94
10.1	Função de Heaviside.	128

LISTA DE TABELAS

3.1	Parâmetros para o método de Zakian.	22
4.1	Transformada de Laplace para funções elementares	29
4.2	Erros absoluto e relativo da inversão de $F_1(s)$	31
4.3	Erros absoluto e relativo da inversão de $F_2(s)$, com $a = 0.5$	34
4.4	Erros absoluto e relativo da inversão de $F_2(s)$, com $a = 2$	36
4.5	Erros absoluto e relativo da inversão de $F_2(s)$, com $a = 50$	38
4.6	Erros absoluto e relativo da inversão de $F_3(s)$, com $a = 0.5$	41
4.7	Erros absoluto e relativo da inversão de $F_3(s)$, com $a = 1$	43
4.8	Erros absoluto e relativo da inversão de $F_3(s)$, com $a = 2$	45
4.9	Erros absoluto e relativo da inversão de $F_4(s)$	48
4.10	Erros absoluto e relativo da inversão de $F_5(s)$	51
4.11	Erros absoluto e relativo da inversão de $F_6(s)$	54
4.12	Erros absoluto e relativo da inversão de $F_7(s)$	57
4.13	Erros absoluto e relativo da inversão de $F_8(s)$	60
4.14	Erros absoluto e relativo da inversão de $F_9(s)$	63
4.15	Transformada de Laplace	65
4.16	Solução numérica da inversão de $F_{10}(s)$	67
4.17	Solução numérica da inversão de $F_{11}(s)$	69
4.18	Solução numérica da inversão de $F_{12}(s)$	71
6.1	Dados para o problema de difusão do mercúrio	84
6.2	Erro absoluto - Zakian	86
6.3	Concentração de mercúrio: comparação com o método de Zakian	87
6.4	Erro absoluto - Stehfest	89
6.5	Concentração de mercúrio: comparação com o método de Stehfest	90
6.6	Erro absoluto - Talbot	92
6.7	Concentração de mercúrio: comparação com o método de Talbot	93
6.8	Erro absoluto - Talbot-Racional	95
6.9	Concentração de mercúrio: comparação com o método de Talbot-Racional	96
9.1	Erro absoluto da inversão de $F_1(s)$, pelo método de Stehfest com diferentes valores de N	104
9.2	Erro absoluto da inversão de $F_1(s)$, pelo método de Talbot com diferentes valores de N	105
9.3	Erro absoluto da inversão de $F_1(s)$, pelo método de Talbot-Racional com diferentes valores de N	105
9.4	Erro absoluto da inversão de $F_2(s)$ para $a = 0.5$, pelo método de Stehfest com diferentes valores de N	106
9.5	Erro absoluto da inversão de $F_2(s)$ para $a = 0.5$, pelo método de Talbot com diferentes valores de N	106

9.6	Erro absoluto da inversão de $F_2(s)$ para $a = 0.5$	107
9.7	Erro absoluto da inversão de $F_2(s)$ para $a = 2$, pelo método de Stehfest com diferentes valores de N	107
9.8	Erro absoluto da inversão de $F_2(s)$ para $a = 2$, pelo método de Talbot com diferentes valores de N	108
9.9	Erro absoluto da inversão de $F_2(s)$ para $a = 2$, pelo método de Talbot-Racional com diferentes valores de N	108
9.10	Erro absoluto da inversão de $F_2(s)$ para $a = 50$, pelo método de Stehfest com diferentes valores de N	109
9.11	Erro absoluto da inversão de $F_2(s)$ para $a = 50$, pelo método de Talbot com diferentes valores de N	109
9.12	Erro absoluto da inversão de $F_2(s)$ para $a = 50$, pelo método de Talbot-Racional com diferentes valores de N	110
9.13	Erro absoluto da inversão de $F_3(s)$ para $a = 0.5$, pelo método de Stehfest com diferentes valores de N	110
9.14	Erro absoluto da inversão de $F_3(s)$ para $a = 0.5$, pelo método de Talbot com diferentes valores de N	111
9.15	Erro absoluto da inversão de $F_3(s)$ para $a = 0.5$ pelo método de Talbot-Racional com diferentes valores de N	111
9.16	Erro absoluto da inversão de $F_3(s)$ para $a = 1$, pelo método de Stehfest com diferentes valores de N	112
9.17	Erro absoluto da inversão de $F_3(s)$ para $a = 1$, pelo método de Talbot com diferentes valores de N	112
9.18	Erro absoluto da inversão de $F_3(s)$, para $a = 1$ pelo método de Talbot-Racional com diferentes valores de N	113
9.19	Erro absoluto da inversão de $F_3(s)$ para $a = 2$, pelo método de Stehfest com diferentes valores de N	113
9.20	Erro absoluto da inversão de $F_3(s)$ para $a = 2$, pelo método de Talbot com diferentes valores de N	114
9.21	Erro absoluto da inversão de $F_3(s)$, para $a = 2$ pelo método de Talbot-Racional com diferentes valores de N	114
9.22	Erro absoluto da inversão de $F_4(s)$, pelo método de Stehfest com diferentes valores de N	115
9.23	Erro absoluto da inversão de $F_4(s)$, pelo método de Talbot com diferentes valores de N	115
9.24	Erro absoluto da inversão de $F_4(s)$ pelo método de Talbot-Racional com diferentes valores de N	116
9.25	Erro absoluto da inversão de $F_5(s)$, pelo método de Stehfest com diferentes valores de N	116

9.26	Erro absoluto da inversão de $F_5(s)$, pelo método de Talbot com diferentes valores de N	117
9.27	Erros absoluto da inversão de $F_5(s)$, pelo método de Talbot-Racional. . . .	117
9.28	Erro absoluto da inversão de $F_6(s)$, pelo método de Stehfest com diferentes valores de N	118
9.29	Erro absoluto da inversão de $F_6(s)$, pelo método de Talbot com diferentes valores de N	118
9.30	Erros absoluto da inversão de $F_6(s)$, pelo método de Talbot-Racional. . . .	119
9.31	Erro absoluto da inversão de $F_7(s)$, pelo método de Stehfest com diferentes valores de N	119
9.32	Erro absoluto da inversão de $F_7(s)$, pelo método de Talbot com diferentes valores de N	120
9.33	Erros absoluto da inversão de $F_7(s)$, pelo método de Talbot-Racional. . . .	120
9.34	Erro absoluto da inversão de $F_8(s)$, pelo método de Stehfest com diferentes valores de N	121
9.35	Erro absoluto da inversão de $F_8(s)$, pelo método de Talbot com diferentes valores de N	121
9.36	Erros absoluto da inversão de $F_8(s)$, pelo método de Talbot-Racional. . . .	122
9.37	Erro absoluto da inversão de $F_9(s)$, pelo método de Stehfest com diferentes valores de N	122
9.38	Erro absoluto da inversão de $F_9(s)$, pelo método de Talbot com diferentes valores de N	123
9.39	Erros absoluto da inversão de $F_9(s)$, pelo método de Talbot-Racional. . . .	123

LISTA DE SÍMBOLOS

a	parâmetro da função
as	parâmetro de Stehfest
C	concentração do poluente mercúrio
$\hat{C}$	Transformada de Laplace de C
$\hat{C}_h$	solução homogênea transformada
$\hat{C}_p$	solução particular transformada
D	termo fonte
F	função no domínio de Laplace
$F^{(n)}$	enésima derivada de F
f	função no domínio real
$f^{(n)}$	enésima derivada de f
G	função no domínio de Laplace
g	função no domínio real
$\mathcal{H}$	função Heaviside
H	função no domínio de Laplace
h	função no domínio real
$In(t)$	integral de Stehfest
k	parâmetro livre

k_n	núcleo de série de Stehfest
N	número de termos no truncamento das séries infinitas dos métodos de inversão
$\mathcal{L}$	operador Transformada de Laplace
$\mathcal{L}^{-1}$	operador Transformada Inversa de Laplace
Pe_x	número de Péclet relativo a direção x
Pe_y	número de Péclet relativo a direção y
s	parâmetro na transformação de Laplace
t	tempo
u	velocidade média da água

Símbolos gregos

α parâmetro livre

β parâmetro livre

$\delta_n(t, u)$ função de Stehfest

ρ massa específica [kg/m^3]

σ parâmetro livre

γ parâmetro livre

μ parâmetro livre

ν parâmetro livre

θ variável

LISTA DE ABREVIATURAS

BEM	Boundary Element Method
ED	Equação Diferencial
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
LI	Linearmente Independente
MMC	mínimo múltiplo comum
TF	Método de Talbot Fixo

1 INTRODUÇÃO

A modelagem matemática é matemática por excelência. Consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real (Bassanezi, 2002). Modelar um fenômeno, frequentemente, compreende em obter equações matemáticas envolvendo variações instantâneas das quantidades presentes e consideradas essenciais, tais equações denominam-se Equações Diferenciais (ED) (Cullen and Zill, 2001). Em muitas áreas da ciência e engenharias, as equações diferenciais dão um importante suporte matemático e estão presentes, por exemplo, no estudo de equilíbrio de estruturas, vibração mecânica, flexão de vigas, cinética química, transferência de massa, entre outros.

Nesse contexto, a Transformada de Laplace está entre os métodos operacionais para resolução de Equações Diferenciais mais aplicados: gerações de físicos, matemáticos e engenheiros empregam esse recurso como uma valiosa ferramenta na obtenção da solução de diversos problemas. Entretanto, mesmo com todas as vantagens que oferece, é importante reconhecer que esta técnica tem suas limitações. A principal dificuldade de seu emprego está na determinação da respectiva transformada inversa (Amaral, 2016). Por essa razão, a abordagem numérica tornou-se uma alternativa viável. Tem-se observado um crescente interesse, na comunidade científica, pelo desenvolvimento de métodos numéricos para a inversão da Transformada de Laplace, sendo eles baseados na aproximação da integral complexa de inversão (Dubner and Abate (1968); Piessens (1971); Durbin (1974); de Hoog et al. (1982)), no uso das aproximações por séries de Fourier (Dubner and Abate (1968)), na fórmula de Post-Widder (Gaver (1966); Zakian (1969); Stehfest (1970); Abate and Valkó (2004)), na expansão da função original em uma série de funções ortogonais (Weeks (1966); Chung and Sun (1986)), ou ainda, na deformação do contorno de integração de Bromwich (Talbot (1979); Abate and Valkó (2004); Weideman (2006); Trefethen et al. (2006)).

Segundo Pilatti (2019), a necessidade do desenvolvimento e aplicação de métodos para o cálculo da transformada inversa numérica de Laplace, aliada ao fato de não haver um método específico capaz de lidar eficientemente com todos os tipos de funções, fundamenta diversos estudos. Na literatura, encontram-se trabalhos que testam e validam os métodos quando aplicados a um conjunto de funções transformadas, cujas inversas são conhecidas. Destacam-se Davies and Martin (1979), no qual os autores pesquisaram cerca de 20 métodos diferentes e selecionaram 14 algoritmos específicos para analisar e testar. Pode-se, ainda, mencionar o trabalho de Cohen (2007), onde o autor reúne diversas técnicas, apresenta a fundamentação teórica e exhibe as conclusões de estudos sobre a eficiência dos métodos já desenvolvidos para a inversão numérica da Transformada de Laplace.

Paralelamente aos trabalhos já citados, pesquisadores desenvolveram estudos, que utilizam essas técnicas para analisar diversos modelos matemáticos. Barichelo (1988) analisa as técnicas de inversão numérica da Transformada de Laplace usando funções de Laguerre

(Piessens, 1971) e o método baseado na aproximação através de Séries de Fourier (Durbin, 1974), aplicados a um problema de fluxo de nêutrons dependente do tempo em um reator nuclear leito-fluidizado.

Junqueira (1990) compara três técnicas, envolvendo inversão da Transformada de Laplace, Crump (1976), Stehfest (1970) e Piessens (1971), no tratamento do problema inverso da condução do calor unidimensional em uma placa.

No estudo proposto por Duffy (1993), os métodos de Crump (1976), Weeks (1966) e Talbot (1979) foram empregados para inverter numericamente a Transformada de Laplace de cinco funções testes, que representam soluções de problemas aplicados em teoria dos circuitos, no estudo do impacto longitudinal de um corpo rígido em uma barra, em mecânica de fluidos viscoelásticos e na teoria das vigas.

Buligon (2004) expõe uma solução analítica por meio da técnica da Transformada de Laplace, para a equação que descreve a dispersão vertical turbulenta em uma camada limite convectiva. A transformada inversa é obtida através do método numérico de Quadratura Gaussiana (Burden and Faires, 2011).

Amaral (2016), por sua vez, avalia o desempenho numérico dos algoritmos implementados para inverter a Transformada de Laplace, utilizando para isso, os métodos de Expansão em Série de Potências (Chung and Sun, 1986), Talbot (Cohen, 2007) e Quadratura Gaussiana (Burden and Faires, 2011), aplicados a um conjunto de funções elementares. Esta análise foi ampliada e aplicada a um problema de transporte de nêutrons, na versão em ordenadas discretas, em geometria cartesiana unidimensional.

Em Pilatti (2019) é analisado o desempenho das técnicas de Expansão em termos de Polinômios de Legendre (Papoulis (1956); Bellman et al. (1963)), Mínimos Quadrados para Aproximação Racional (Longman, 1974), Stehfest (Davies and Martin, 1979) e Expansão em Séries de Potência (Chung and Sun, 1986). Os métodos citados são testados em um conjunto de funções elementares, com a finalidade de avaliar o seu desempenho para a inversão de diferentes classes de funções. São estendidos à inversão numérica da solução transformada da equação unidimensional de advecção-difusão, usada para descrever processos de transporte de soluto em meios porosos, com o enfoque em transporte de um contaminante em aquíferos.

Para resolver um problema de difusão de íons, Ferreira (2021) utilizou cinco métodos para a inversão numérica da Transformada de Laplace: Stehfest (1970), Talbot (1979) e três técnicas baseadas em aproximações por Séries de Fourier (Dubner and Abate, 1968). Foram testados para um conjunto de funções elementares, avaliando a precisão dos resultados em comparação às transformadas inversas analíticas.

Recentemente, Ferreira et al. (2021) aplicaram os três métodos baseados em aproximações por Séries de Fourier (Dubner and Abate, 1968), Zakian (Zakian, 1969), Stehfest (Stehfest, 1970) e Talbot-Fixo (Talbot, 1979) na análise da solução de um problema de condução de calor, a fim de estudar a distribuição da temperatura no interior de um sólido, a partir da equação de transporte de energia e dos valores do fluxo de calor na superfície.

Para Pilatti (2019), os estudos seguem a proposta de avaliar os métodos existentes

e fornecer subsídios para uma escolha racional do algoritmo a ser utilizado em determinados casos, tendo em vista aqueles em que se conhece a forma da solução procurada. Diante deste contexto, e ciente de que há muitos problemas para os quais inverter numericamente a transformada implica em obter a solução de forma mais facilitada pelo emprego de um método específico (Davies and Martin, 1979), neste trabalho, propõe-se a avaliação de aspectos computacionais de quatro métodos para a inversão numérica da Transformada de Laplace, a saber: Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot proposto por Weideman (2006) e Trefethen et al. (2006), que neste trabalho será denominado de Talbot-Racional, por basear-se em aproximações racionais. A escolha dos métodos está relacionada ao interesse de investigar o desempenho numérico de técnicas que utilizam diferentes abordagens: a inversão a partir da fórmula de Post-Widder (Zakian e Stehfest) e da deformação do contorno de integração de Bromwich (Talbot e Talbot-Racional). Aplicam-se as técnicas citadas a um conjunto de funções elementares, com a finalidade de avaliar o seu desempenho para a inversão de diferentes classes de funções e validar os algoritmos implementados. Além disso, realizam-se testes no sentido de examinar o potencial de solução desses recursos ao serem aplicados às transformadas de funções ditas especiais, cuja inversa analítica não é facilmente obtida.

Vale ressaltar, que o presente trabalho traz contribuições importantes, visto que, em relação ao método de Talbot-Racional, não foram encontradas referências da utilização dessa técnica para a inversão das classes de funções testes apresentadas. Destaca-se, ainda, a aplicação dos algoritmos a um conjunto de funções ditas especiais, cujas inversas analíticas não são facilmente obtidas. Somando-se a isso, nenhum estudo sobre aplicações de métodos numéricos para inversão da Transformada de Laplace em um problema de difusão de mercúrio na água foi desenvolvido, mostrando o quão significativos podem ser os resultados obtidos nesta dissertação.

Para alcançar os objetivos propostos, o trabalho está organizado da seguinte forma: o presente Capítulo apresenta uma introdução geral do tema proposto e as contribuições da dissertação; no Capítulo dois, descrevem-se os objetivos geral e específicos do trabalho; o Capítulo três aborda os métodos numéricos de inversão: Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional; o Capítulo quatro, traz uma análise e os resultados obtidos através da aplicação das quatro técnicas na inversão de um conjunto de funções elementares e das funções ditas especiais. Nos Capítulos cinco e seis, tem-se, respectivamente, a descrição e a solução analítica de um problema de difusão de mercúrio na água utilizando a Transformada de Laplace e os resultados das simulações, a partir da aplicação dos quatro métodos na inversão numérica da solução. No Capítulo sete, as conclusões e considerações finais. No Apêndice, apresentam-se os resultados obtidos a partir de testes adicionais, a fim de indicar o melhor valor do parâmetro livre N para cada método. Por fim, no Anexo, descreve-se um breve contexto histórico, destacando-se alguns matemáticos, que contribuíram para o desenvolvimento da Transformada de Laplace, além de definições matemáticas e propriedades operacionais.

2 OBJETIVOS

O objetivo geral do trabalho é realizar o estudo teórico e implementar computacionalmente quatro métodos de inversão numérica da Transformada de Laplace, verificando a eficiência de cada método em dois conjunto de funções: elementares e as ditas especiais. Intenciona-se através desta análise, presumir qual técnica é a mais indicada para resolver um problema de difusão de mercúrio na água. Além disso, almeja-se incentivar o desenvolvimento de novas pesquisas a respeito da “capacidade” da Transformada de Laplace em solucionar problemas ambientais.

Como objetivos específicos, propõem-se:

- Apresentar uma revisão bibliográfica sobre as técnicas de inversão numérica da Transformada de Laplace;
- Apresentar a fundamentação teórica dos métodos numéricos de inversão: Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional;
- Avaliar os resultados obtidos através das técnicas de Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional, na inversão de um conjunto de funções elementares, comparando a transformada inversa analítica e a transformada inversa numérica através de cada um dos métodos;
- Avaliar os resultados obtidos através das técnicas de Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional, na inversão de um conjunto de funções especiais;
- Apresentar a solução analítica para o problema de difusão de mercúrio na água utilizando a Transformada de Laplace;
- Avaliar o desempenho dos métodos de Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional à inversão numérica da solução Transformada de Laplace em um problema de difusão de mercúrio na água;
- Validar os algoritmos implementados;
- Recomendar a utilização dos métodos.

No próximo capítulo serão apresentados os métodos numéricos de inversão da Transformada de Laplace: Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional.

3 MÉTODOS NUMÉRICOS DE INVERSÃO

A Transformada de Laplace tem sido amplamente utilizada na resolução de Equações Diferenciais que modelam processos nas mais diversas áreas, em razão da sua capacidade de simplificar a equação a ser resolvida. Contudo, a principal dificuldade em aplicar essa técnica, está associada ao processo de reverter a solução obtida ao domínio de origem. À vista disso, os métodos numéricos apresentam-se como uma alternativa às técnicas usuais de inversão analítica.

Segundo Gilat and Subramaniam (2008), métodos numéricos são técnicas matemáticas empregadas na solução de problemas, que não podem ser resolvidos, ou que são difíceis de se resolver, analiticamente.

Neste trabalho serão testados os métodos de Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional, com intuito de investigar para quais classes de funções elementares e funções ditas especiais, as técnicas escolhidas têm maior adequação quanto ao potencial de solução.

Nas próximas seções, apresentam-se os métodos para inversão numérica da Transformada de Laplace: Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional.

3.1 Método de Zakian

O método de Zakian (1969) é uma aproximação equivalente a aplicação da Quadratura Gaussiana, vinculada à inversão da integral de Bromwich (Abate and Valkó, 2004). A escolha desta técnica está associada ao fato de pertencer à mesma “família” do método de Stehfest.

A técnica de Zakian (1969) deriva de uma fórmula explícita para a inversa numérica da Transformada de Laplace, aproximando a função no domínio do tempo por uma série infinita de avaliações ponderadas da função no domínio, definindo

$$f(t) \approx \frac{2}{t} \sum_{j=1}^N \Re \left[\alpha_j F \left(\frac{b_j}{t} \right) \right], \quad (3.1)$$

onde α_j e b_j são constantes que podem ser números reais ou pares conjugados complexos, N é o número de termos na soma do truncamento da série infinita e F a função transformada.

Vale lembrar que para a obtenção de valores numéricos para os resultados, pode-se utilizar os valores de α_j e b_j já tabelados na literatura. No parâmetro N aplica-se uma variação de 1 a 5. A literatura recomenda que os parâmetros não sejam alterados uma vez que, a convergência é obtida.

A Tabela 3.1 apresenta os valores de α_j e b_j para $N = 5$ termos (Zakian, 1969).

Tabela 3.1: Parâmetros para o método de Zakian.

j	α_j	b_j
1	12.83767675+ i 1.666063445	-36902.08210+ i 196990.4257
2	12.22613209+ i 5.012718792	61277.02524- i 95408.62551
3	10.93430308+ i 8.409673116	-28916.56288+ i 18169.18531
4	8.776434715+ i 11.92185389	4655.361138- i 1.901528642
5	5.225453361+ i 15.72952905	-118.7414011- i 141.3036911

3.2 Método de Stehfest

O dispositivo de Gaver-Stehfest é um algoritmo simples para a obtenção da Transformada Inversa de Laplace de forma numérica. que utiliza o cálculo de uma amostra da função do tempo usando uma série convergente. Esse método já foi estudado em diversos trabalhos disponíveis na literatura (Junqueira (1990); Pilatti (2019); Zhang et al. (2019); Ferreira et al. (2021); Kristopher (2012)).

Consideram “métodos que calculam uma amostra”, apresentando a fórmula,

$$I_n(t) = \int_0^\infty \delta_n(t, u) f(u) du, \quad (3.2)$$

onde as funções $\delta_n(t, u)$ formam uma sequência convergente, de modo que $I_n(t)$ tende a $f(t)$ a medida em que n aumenta. A fórmula de Post-Widder (Gaver, 1966) para inversão pode ser pensada como sendo obtida a partir das funções

$$\delta_n(t, u) = \frac{\left(\frac{nu}{t}\right)^n e^{-\frac{nu}{t}}}{(n-1)!}. \quad (3.3)$$

Gaver (1966) sugeriu o uso da seguinte função

$$\delta_n(t, u) = \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} a_s (1 - e^{-a_s u})^n e^{-na_s u}, \quad (3.4)$$

onde $a_s = \frac{\ln(2)}{t}$.

Contudo a convergência de $I_n(t)$ para $f(t)$ era lenta. Com o propósito de acelerar a convergência do algoritmo, Stehfest (1970) desenvolveu uma fórmula de extrapolação para $f(t)$ dada por:

$$f(t) \approx a_s \sum_{n=1}^N K_n F(na_s),$$

onde F é a função transformada e

$$K_n = (-1)^{n+\frac{N}{2}} \sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{\min(n, \frac{N}{2})} \frac{k^{\frac{N}{2}} 2k!}{(\frac{N}{2} - k)! k! (k-1)! (n-k)! (2k-n)!}. \quad (3.5)$$

Deste modo, os coeficientes K_n dependem somente de N , número de termos usados no somatório, e que deve ser par. A transformada inversa numérica tornar-se-ia mais precisa com um aumento no valor de N . Contudo, erros de arredondamento limitam o valor de N que pode ser usado (Moench and Ogata, 1981).

3.3 Método de Talbot

Segundo Cohen (2007), Talbot (1979) foi pioneiro na abordagem de métodos para a inversão numérica da Transformada de Laplace. Sua técnica tem como princípio fundamental a avaliação da integral complexa de inversão e a deformação do contorno de Bromwich. O método de Talbot encontra-se em vários trabalhos (Galdino (1995); Kristopher (2012); Amaral (2016); Defreitas and Kane (2017); Ferreira et al. (2021)).

Avalia-se a integral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) e^{st} ds = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\beta} F(s) e^{st} ds, \quad (3.6)$$

onde o contorno β é uma linha vertical definida por $s = c + i\omega$, em $(c - i\infty, c + i\infty)$, c possui um valor fixo para que todas as singularidades da transformação estejam à esquerda da reta $s = c$ paralela ao eixo imaginário.

A convergência da integral dada pela Eq.(3.6) poderia ser maior se fosse atribuído aos valores de s uma componente real suficientemente grande negativa. Conforme Abate and Valkó (2004), o método de Talbot considera a chance de deformar o contorno β em algum caminho aberto em torno do eixo real negativo, contanto que, nenhuma singularidade de $F(s)$ seja atravessada pela deformação de β . Portanto, a intenção de tal mudança é diminuir a magnitude do fator exponencial e^{st} na função integrando.

De modo geral, a linha do contorno β em $(c - i\infty, c + i\infty)$ é substituída por um equivalente, β' , com início e fim no semiplano esquerdo do plano complexo tal que $\Re\{s\} \rightarrow -\infty$. Segundo Murli and Rizzardi (1990), essa substituição é possível, se a função transformada $F(s)$ satisfazer as seguintes condições:

- (i) Todas as singularidades de s_i devem ser conhecidas tais que $|\Im\{s_i\}| < \gamma$, onde γ é um número conhecido.
- (ii) $|F(s)|$ tende para zero uniformemente em $\Re\{s\} < \gamma$ quando $|s| \rightarrow \infty$.

No entanto, a dificuldade encontra-se na validação da condição (i) para uma função $F(s)$ em um novo contorno β' . Apesar disso, de acordo com Cohen (2007), essa dificuldade pode

ser contornada, tomando-se a função modificada $F(\lambda s + \sigma)$, através de uma escolha adequada dos parâmetros λ e de deslocamento σ , de forma que se $F(s)$ tem singularidades s_0 , $F(\lambda s + \sigma)$ tem uma singularidade s_0^* correspondente, tal que

$$s_0^* = \frac{(s_0 - \sigma)}{\lambda}. \quad (3.7)$$

A Eq. (3.6) pode ser substituída por

$$f(t) = \frac{\lambda e^{\sigma t}}{2\pi i} \int_{\beta'} F(\lambda s + \sigma) e^{\lambda s t} ds, t > 0, \quad (3.8)$$

onde os parâmetros λ e σ podem ser vistos na Figura 3.1.

A condição (ii) é válida para a maioria das funções para as quais é viável determinar a transformada inversa, fora àquelas que apresentam infinitas singularidades no eixo imaginário (Cohen, 2007).

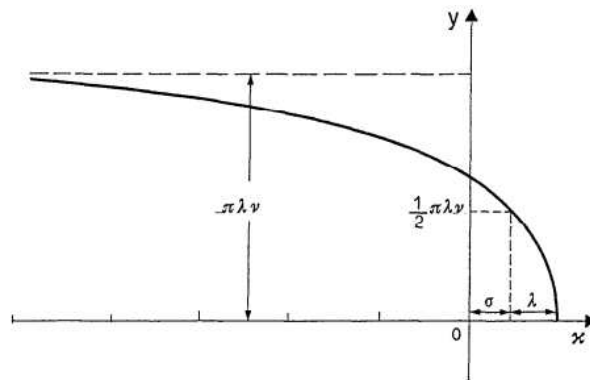


Figura 3.1: O contorno de Talbot.

Fonte: Murli and Rizzardi (1990).

A fim de que as singularidades de $F(s)$ não sejam cruzadas pela deformação do contorno de Bromwich, para mapear as singularidades de s_i , é estabelecido no método de Talbot uma função de varredura da região do novo contorno, definindo,

$$s(z) = \frac{z}{1 - e^{-z}} + z \frac{v - 1}{2}, \quad (3.9)$$

onde v é um parâmetro positivo arbitrário e $z \in (-2\pi i, 2\pi i)$.

Abate and Valkó (2004) embasaram-se nessa premissa para definir uma parametrização do contorno de Talbot. Assim a Eq. (3.9) é expressa como

$$s(\theta) = r\theta(\cot(\theta) + i), \quad -\pi < \theta < \pi, \quad (3.10)$$

onde r é um parâmetro.

Aplicando a Eq. (3.10), a integral complexa de inversão Eq. (3.6) pode ser escrita, em termos de θ ,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ts(\theta)} F(s(\theta)) s'(\theta) d\theta, \quad (3.11)$$

onde o termo $s'(\theta)$ expressa a derivada de Eq.(3.10) em relação à θ , e ainda,

$$s'(\theta) = ir(1 + i\sigma(\theta)), \quad \sigma(\theta) = \theta + (\theta \cot(\theta) - 1) \cot(\theta). \quad (3.12)$$

Segundo (Abate and Valkó, 2004), a parametrização do contorno proposta por Talbot permite escrever a Eq. (3.6) como

$$f(t) = \frac{r}{\pi} \int_0^{\pi} \Re [e^{ts(\theta)} F(s(\theta)) (1 + i\sigma(\theta))] d\theta. \quad (3.13)$$

No método de integração, descrito por Abate and Valkó (2004), obtém-se uma aproximação para a integral Eq. (3.13) valendo-se da regra trapezoidal com passo de tamanho π/N e $\theta_k = k\pi/N$, resultando na fórmula geral para a obtenção da transformação inversa dada por

$$f(t, M) \approx \frac{r}{N} \left\{ \frac{1}{2} F(r) e^{rt} + \sum_{k=1}^{N-1} \Re [e^{ts(\theta_k)} F(s(\theta_k)) (1 + i\sigma(\theta_k))] \right\}. \quad (3.14)$$

Nesse processo é possível estabelecer uma aproximação na qual pode-se avaliar apenas a variação do parâmetro r . Dessa forma, Abate and Valkó (2004) estabeleceram na prática que $r = 2N/5t$.

3.4 Método de Talbot-Racional

A partir da deformação proposta por Talbot (1979), novas abordagens foram formuladas, entre elas, o método de Talbot proposto por Weideman (2006) e Trefethen et al. (2006). Como mencionado no Capítulo 1, neste trabalho, será denominado de Talbot-Racional, onde a aplicação da regra do ponto médio na aproximação numérica da integral mostra-se eficaz.

De acordo com Weideman (2006), o método de Talbot-Racional para a inversão numérica da Transformada de Laplace consiste em resolver numericamente a integral indicada na Eq. (3.6).

A abordagem típica dessa técnica baseia-se em deformar a linha de Bromwich em um contorno especial por meio da regra do trapézio ou da regra do ponto médio (Gilat and Subramaniam, 2008). O objetivo dessa deformação é explorar o fator exponencial presente na integral da Eq. (3.6).

Conforme Weideman and Dingfelder (2014), usa-se um contorno truncado de Talbot,

ao invés do contorno clássico, parte do meio-plano esquerdo e segue ao infinito, fazendo com que a convergência seja alcançada mais rapidamente.

A deformação pode ser justificada pelo teorema de Cauchy (Brown and Churchill, 1960), desde que o contorno permaneça no domínio da analiticidade de $F(s)$. Supõe-se que tal contorno possa ser parametrizado por

$$C : s = s(\theta) = -\sigma + \mu\theta \cot(\theta) + \nu i\theta, -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad (3.15)$$

onde σ , μ e ν são constantes. O parâmetro σ representa um deslocamento para a esquerda, μ controla a distância que os dois nós extremos se estendem no semiplano esquerdo. O parâmetro ν determina a largura do contorno quando se aproxima de duas assíntotas horizontais a uma distância proporcional para $\mu\nu$ do eixo real com $\Re(\pm\pi) = -\infty$. O fator $\mu\nu$ também determina o espaçamento dos nós próximos ao eixo real.

Substituindo a função $\theta \cot(\theta)$, na Eq.(3.15), por $1 + \frac{2\theta^2}{\theta^2 - \pi^2}$ (função que representa os primeiros dois termos em sua expansão em frações parciais) (Weideman, 2006), tem-se

$$C : s(\theta) = -\sigma + \mu \left(1 + \frac{2\theta^2}{\theta^2 - \pi^2} + \nu i\theta \right), -\pi \leq \theta \leq \pi. \quad (3.16)$$

Utilizando a Eq. (3.16), a integral de Bromwich, Eq. (3.6), pode ser expressa como

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{st} F(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{s(\theta)t} F(s(\theta)) s'(\theta) d\theta, \quad (3.17)$$

onde

$$s'(\theta) = \mu(\cot(\theta) - \theta \csc^2(\theta) + \nu i). \quad (3.18)$$

A integral dada pela Eq. (3.17) é, normalmente, aproximada pela regra trapezoidal em uma partição uniforme de $[\pi, -\pi]$. Em vez disso, usa-se a regra do ponto médio igualmente precisa com um número par de intervalos $2N$. Esta é uma escolha prática que evita amostragem do integrando na singularidade removível em $\theta = 0$, bem como, nas singularidades essenciais em $\theta = \pm\pi$ (Weideman, 2006). Portanto, aproxima-se a integral da Eq. (3.17) pela regra do ponto médio, com espaçamento uniforme $h = \frac{2\pi}{N}$, que produz

$$f(t) \approx \frac{1}{N i} \sum_{k=1}^N e^{s(\theta_k)t} F(s(\theta_k)) s'(\theta_k), \quad \theta_k = -\pi + \left(k - \frac{1}{2} \right) h. \quad (3.19)$$

Se o contorno indicado pela Eq. (3.15) é simétrico em relação ao eixo real, então, metade das avaliações de transformação podem ser salvas. Ou seja, é preciso considerar apenas os nós de quadratura na parte superior (ou inferior) meio plano. Ao comparar os resultados numéricos, consideram-se as regras de quadratura com um total de $2N$ nós (Weideman and Dingfelder, 2014).

$$s(\theta) \approx \frac{N}{t} \zeta(\theta), \zeta(\theta) = -\sigma + \mu\theta \cot(\alpha\theta) + \nu i\theta, -\pi \leq \theta \leq \pi. \quad (3.20)$$

Repare que no contorno de Talbot original, o parâmetro α não aparece, ou seja, $\alpha = 1$. No entanto, a modificação proposta no método Talbot-Racional é considerar $0 < \alpha < 1$. O fator de escala $\frac{N}{t}$ assume um valor fixo de t e a escala deve ser apropriada para maximizar a taxa de convergência na aproximação trapezoidal/ponto médio quando $N \rightarrow \infty$.

A escolha dos parâmetros σ , μ , ν e α , na Eq. (3.20), é a questão prática abordada por Weideman and Dingfelder (2014). O autor sugere ainda fixar os parâmetros σ , μ , ν e α na Eq. (3.20). O presente trabalho segue tal abordagem.

A Figura 3.2 mostra contornos de Talbot-Racional.

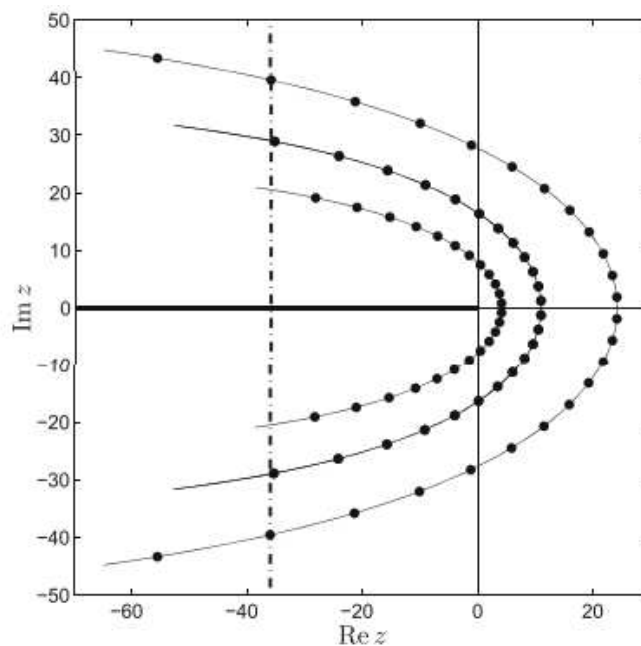


Figura 3.2: Contornos de Talbot-Racional.

Fonte: Weideman and Dingfelder (2014).

No Capítulo 4 são apresentados os resultados do estudo da aplicação dos métodos de Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional à um conjunto de funções elementares. Tais resultados são expostos através de comparativos e tabelas que mostram os erros absoluto e relativo da inversão destas funções, a partir de cada método.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, apresentam-se os resultados obtidos para a inversão da Transformada de Laplace através dos métodos de Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional. Inicialmente implementou-se os algoritmos para a inversão numérica de um conjunto de funções elementares, exibidas na Tabela 4.1. Em um segundo momento, o potencial de inversão dessas mesmas técnicas foi testado para o tratamento de um conjunto de funções ditas especiais, cuja inversa analítica não é facilmente obtida, expostas na Tabela 4.15 (Abate and Valkó, 2004).

Os testes tem o propósito de avaliar o desempenho dos métodos para a inversão de diferentes classes de funções. Além disso, busca-se a validação dos algoritmos implementados. Para atingir os objetivos, utilizou-se o software livre Octave v.5.2.0, em um computador com sistema operacional Windows 7 Ultimate, memória (RAM) de 4.0 GB, processador AMD E1-1500 APU 1,48 GHz e placa de vídeo AMD Radeon HD. Para o método de Talbot-Racional, os valores fixos dos parâmetros são: $\sigma = 0.6122$, $\mu = 0.5017$, $\nu = 0.2645$ e $\alpha = 0.6407$. Para os demais métodos, o único parâmetro livre é o número de termos N da série.

4.1 Testes para um conjunto de funções elementares

As tabelas desta seção apresentam os erros absoluto e relativo e os valores do parâmetro livre N , que representa o número de termos do somatório para a aproximação de $f(t)$. Os resultados obtidos são representados graficamente, comparando-se a transformada inversa analítica e a transformada inversa numérica, a partir de cada método. Tais resultados numéricos foram comparados com a solução analítica no intervalo de tempo $t = [10^{-04}, 10]$. Convencionou-se neste trabalho que um resultado será dito satisfatório, se apresentar erros absolutos de, no máximo, ordem de 10^{-02} .

Tabela 4.1: Transformada de Laplace para funções elementares

$F(s)$	$f(t)$
$F_1(s) = \frac{1}{s^2}$	$f_1(t) = t$
$F_2(s) = \frac{1}{s+a}$	$f_2(t) = e^{-at}$
$F_3(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$	$f_3(t) = \text{sen}(at)$
$F_4(s) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$	$f_4(t) = t \cos(t)$
$F_5(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$	$f_5(t) = te^{-t}$
$F_6(s) = \frac{e^{-\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	$f_6(t) = \frac{e^{-\frac{1}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}$
$F_7(s) = e^{-\sqrt{s}}$	$f_7(t) = \frac{e^{-\frac{1}{4t}}}{2\sqrt{\pi t^3}}$
$F_8(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$	$f_8(t) = e^{-2t}(e^t - 1)$
$F_9(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$	$f_9(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-0.5t}\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

No que se refere aos valores do parâmetro N , utilizados para a inversão das funções elementares, em um primeiro momento, convencionou-se para Zakian e Talbot, $N = 5$. Já para Stehfest e Talbot-Racional, $N = 6$. Os critérios para a escolha desses valores foram: a recomendação da literatura para a técnica de Zakian - o número máximo de termos recomendado é $N = 5$ (Zakian, 1969); os parâmetros da Tabela 3.1 não devem ser alterados (Zakian, 1969); “uma competição mais justa”, ou seja, comparar os métodos propostos neste trabalho, utilizando-se a mesma quantidade de termos no somatório (ou um valor mais próximo possível); a condição de que os algoritmos de Stehfest e Talbot-Racional podem ser implementados apenas considerando um número par de termos.

Em um segundo momento, tendo como base a literatura, que indica melhores resultados para valores maiores de N na inversão numérica através dos métodos de Stehfest, Talbot e Talbot-Racional, optou-se por testar e analisar o desempenho dessas técnicas quando aumentado o valor do parâmetro N . Estes resultados encontram-se no Apêndice e tem como objetivo investigar e recomendar o melhor valor de N .

A seguir, são apresentados os resultados dos testes através dos métodos de Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional para as funções elementares dispostas na Tabela 4.1.

4.1.1 Inversão de $F_1(s)$

Na Figura 4.1, observa-se um comparativo entre a transformada inversa analítica e a transformada inversa numérica de $F_1(s) = \frac{1}{s^2}$, cuja transformada inversa é $\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} = f_1(t) = t$, através dos métodos de Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional.

A Tabela 4.2 mostra os erros absoluto e relativo da inversão desta função, a partir de cada método.

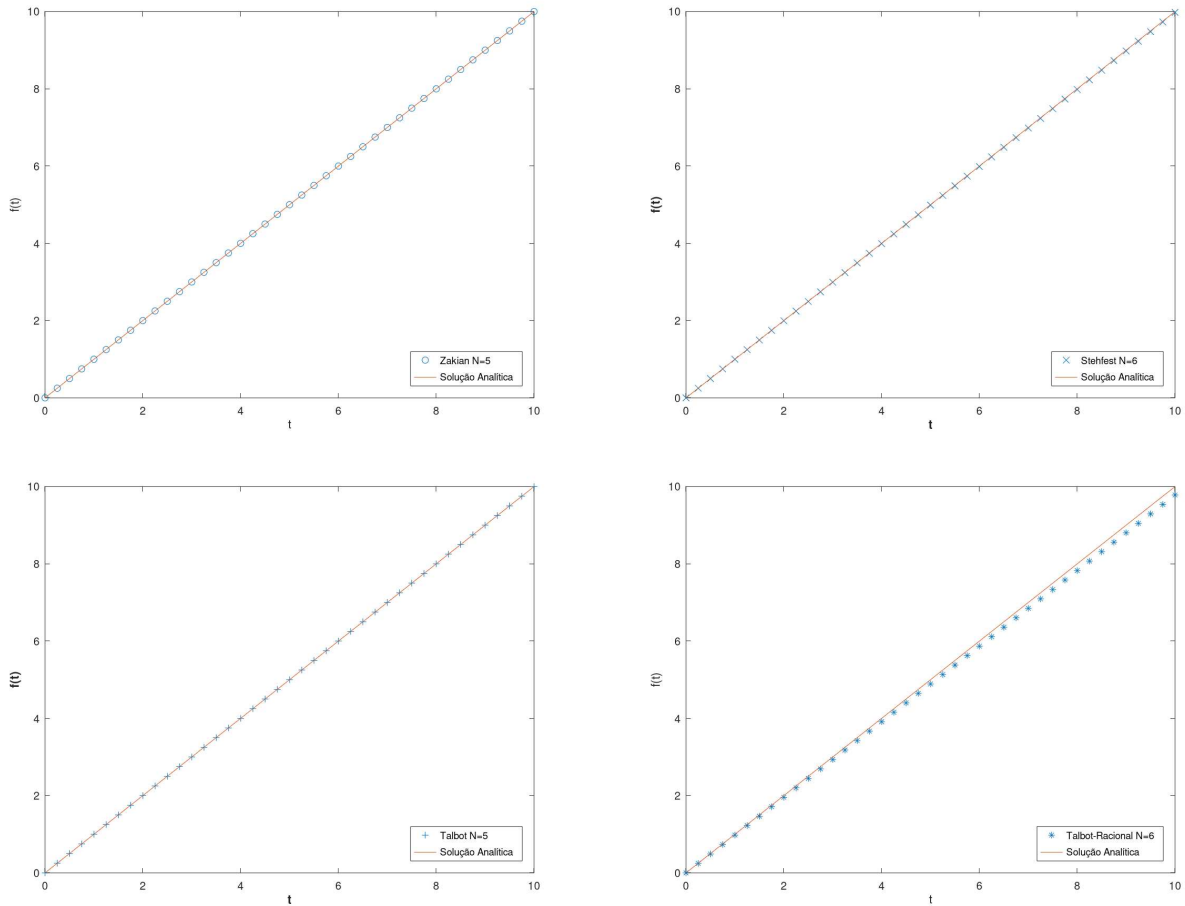


Figura 4.1: Comparativo dos métodos para $F_1(s)$.

Tabela 4.2: Erros absoluto e relativo da inversão de $F_1(s)$

Método	Zakian		Stehfest		Talbot		Talbot-Racional	
Parâmetro	$N = 5$		$N = 6$		$N = 5$		$N = 6$	
t	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo
10^{-4}	3.31890×10^{-10}	3.31890×10^{-08}	2.13593×10^{-08}	2.13593×10^{-03}	6.48436×10^{-11}	6.48436×10^{-06}	2.18870×10^{-07}	2.18870×10^{-02}
1	3.31895×10^{-08}	3.31895×10^{-08}	2.13593×10^{-03}	2.13593×10^{-03}	6.48436×10^{-06}	6.48436×10^{-06}	2.18870×10^{-02}	2.18870×10^{-02}
2	6.63790×10^{-08}	3.31895×10^{-08}	4.27186×10^{-03}	2.13593×10^{-03}	1.29687×10^{-05}	6.48436×10^{-06}	4.37740×10^{-02}	2.18870×10^{-02}
3	9.95683×10^{-08}	3.31894×10^{-08}	6.40779×10^{-03}	2.13593×10^{-03}	1.94531×10^{-05}	6.48436×10^{-06}	6.56611×10^{-02}	2.18870×10^{-02}
4	1.32758×10^{-07}	3.31895×10^{-08}	8.54372×10^{-03}	2.13593×10^{-03}	2.59374×10^{-05}	6.48436×10^{-06}	8.75481×10^{-02}	2.18870×10^{-02}
5	1.65946×10^{-07}	3.31892×10^{-08}	1.06796×10^{-02}	2.13593×10^{-03}	3.24218×10^{-05}	6.48436×10^{-06}	1.09435×10^{-01}	2.18870×10^{-02}
6	1.99136×10^{-07}	3.31894×10^{-08}	1.28155×10^{-02}	2.13593×10^{-03}	3.89062×10^{-05}	6.48436×10^{-06}	1.31322×10^{-01}	2.18870×10^{-02}
7	2.32326×10^{-07}	3.31894×10^{-08}	1.49515×10^{-02}	2.13593×10^{-03}	4.53905×10^{-05}	6.48436×10^{-06}	1.53209×10^{-01}	2.18870×10^{-02}
8	2.65516×10^{-07}	3.31895×10^{-08}	1.70874×10^{-02}	2.13593×10^{-03}	5.18749×10^{-05}	6.48436×10^{-06}	1.75096×10^{-01}	2.18870×10^{-02}
9	2.98704×10^{-07}	3.31894×10^{-08}	1.92233×10^{-02}	2.13593×10^{-03}	5.83593×10^{-05}	6.48436×10^{-06}	1.96983×10^{-01}	2.18870×10^{-02}
10	3.31892×10^{-07}	3.31892×10^{-08}	2.13593×10^{-02}	2.13593×10^{-03}	6.48436×10^{-05}	6.48436×10^{-06}	2.18870×10^{-01}	2.18870×10^{-02}

Analisando a Figura 4.1 e considerando os erros absolutos expostos na Tabela 4.2, observa-se que para inversão de funções da mesma classe que $F_1(s)$, o método de Zakian exibe melhores resultados no que diz respeito à precisão, com erros absolutos iniciando em 10^{-10} e finalizando em 10^{-07} .

O método de inversão de Stehfest proporciona erros absolutos de 10^{-08} , para o instante inicial, e de 10^{-03} e 10^{-02} , para os instantes seguintes.

A técnica de Talbot fornece excelentes resultados e com boa precisão numérica, tem-se um erro absoluto da ordem de 10^{-11} para o primeiro instante, 10^{-06} para $t = 1$ e à medida que t aumenta, os erros absolutos se estabilizam e mantêm a ordem de 10^{-05} .

A inversão numérica por Talbot-Racional, demonstrou resultado não satisfatório, visto que, apresenta erros absolutos das ordens de 10^{-07} , para o instante inicial, e de 10^{-02} e 10^{-01} , para os instantes seguintes. Observa-se que os resultados afastam-se da solução analítica para os instantes $t = [5, 10]$, evidente no gráfico comparativo das soluções analítica e numérica.

• Análise do parâmetro numérico N para a inversão de $F_1(s)$

Tendo em vista os resultados expostos no Apêndice deste trabalho, destaca-se que, para a inversão de $F_1(s)$, aumentando-se o valor de N , observa-se um melhor desempenho dos algoritmos de Stehfest, Talbot e Talbot-Racional.

Para Stehfest, recomenda-se valores entre $N = 14$ e $N = 18$, com erros absolutos variando das ordens de 10^{-12} e 10^{-06} . O método forneceu resultados aceitáveis até $N = 32$, a partir desse valor, nota-se um desempenho não satisfatório.

Na inversão por Talbot, os melhores resultados foram obtidos para valores entre $N = 18$ e $N = 24$, erros absolutos das ordens de 10^{-19} até 10^{-13} . Após $N = 90$, os erros aumentam e os resultados afastam-se da solução analítica.

Indica-se para Talbot-Racional de $N = 32$ até $N = 50$, nos quais, os erros variam entre as ordens de 10^{-19} e 10^{-13} . Essa técnica apresenta bons resultados até $N = 180$.

4.1.2 Inversão de $F_2(s)$

Para a inversão de $F_2(s) = \frac{1}{s+a}$, considerou-se diferentes valores do coeficiente a , $a = 0.5$, $a = 2$ e $a = 50$.

Na Figura 4.2, para $a = 0.5$, apresenta-se um comparativo entre a transformada inversa analítica e a transformada inversa numérica de $F_2(s) = \frac{1}{s+0.5}$, utilizando os métodos de Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional e a Tabela 4.3 traz os erros absoluto e relativo da inversão desta função, a partir de cada método, cuja transformada inversa é $\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} = f_2(t) = e^{-0.5t}$.

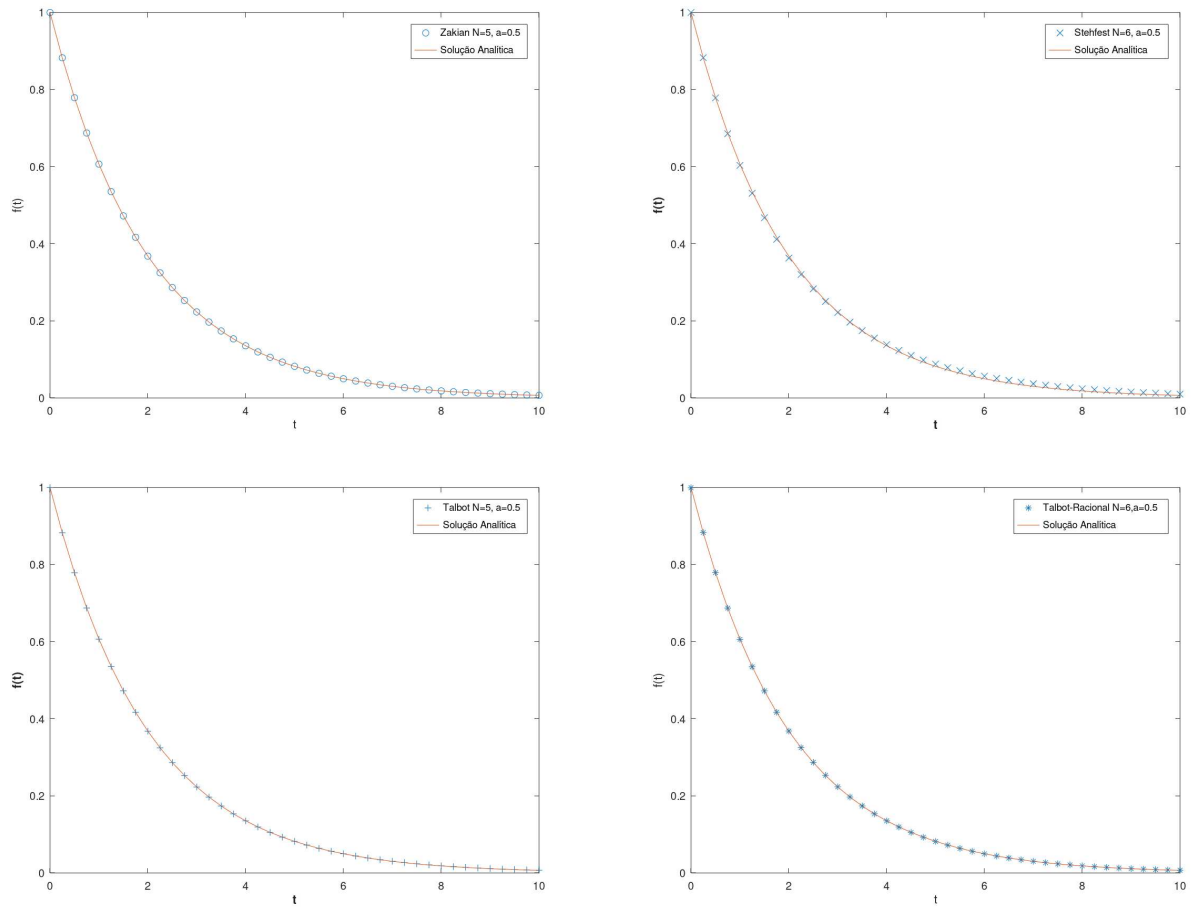


Figura 4.2: Comparativo dos métodos para $F_2(s)$, com $a = 0.5$.

Tabela 4.3: Erros absoluto e relativo da inversão de $F_2(s)$, com $a = 0.5$

Método	Zakian		Stehfest		Talbot		Talbot-Racional	
Parâmetro	$N = 5$		$N = 6$		$N = 5$		$N = 6$	
t	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo
10^{-4}	6.06542×10^{-08}	6.06545×10^{-08}	1.06804×10^{-08}	1.06804×10^{-08}	8.13743×10^{-05}	8.13747×10^{-05}	5.60918×10^{-04}	5.60921×10^{-04}
1	7.57222×10^{-08}	1.24844×10^{-07}	3.16203×10^{-03}	5.21330×10^{-03}	7.91025×10^{-05}	1.30418×10^{-04}	4.96077×10^{-04}	8.17893×10^{-04}
2	8.80880×10^{-08}	2.39448×10^{-07}	4.99168×10^{-03}	1.35688×10^{-02}	8.80067×10^{-05}	2.39227×10^{-04}	2.71682×10^{-04}	7.38510×10^{-04}
3	9.82145×10^{-08}	4.40167×10^{-07}	1.34618×10^{-03}	6.03318×10^{-03}	1.24689×10^{-04}	5.58817×10^{-04}	3.73079×10^{-04}	1.67202×10^{-03}
4	1.06484×10^{-07}	7.86818×10^{-07}	3.00273×10^{-03}	2.21873×10^{-02}	1.45367×10^{-04}	1.07413×10^{-03}	1.42303×10^{-04}	1.05148×10^{-03}
5	1.13213×10^{-07}	1.37921×10^{-06}	5.79457×10^{-03}	7.05923×10^{-02}	8.95290×10^{-05}	1.09068×10^{-03}	2.97569×10^{-04}	3.62513×10^{-03}
6	1.18662×10^{-07}	2.38339×10^{-06}	6.82243×10^{-03}	1.37032×10^{-01}	3.65219×10^{-05}	7.33562×10^{-04}	1.15542×10^{-04}	2.32073×10^{-03}
7	1.23050×10^{-07}	4.07486×10^{-06}	6.58412×10^{-03}	2.18036×10^{-01}	1.74324×10^{-04}	5.77284×10^{-03}	9.63250×10^{-05}	3.18984×10^{-03}
8	1.26554×10^{-07}	6.90961×10^{-06}	5.63849×10^{-03}	3.07851×10^{-01}	2.70102×10^{-04}	1.47471×10^{-02}	1.89901×10^{-04}	1.03682×10^{-02}
9	1.29322×10^{-07}	1.16412×10^{-05}	4.40553×10^{-03}	3.96573×10^{-01}	3.03568×10^{-04}	2.73263×10^{-02}	1.74582×10^{-04}	1.57153×10^{-02}
10	1.31476×10^{-07}	1.95129×10^{-05}	3.14760×10^{-03}	4.67146×10^{-01}	2.83644×10^{-04}	4.20965×10^{-02}	1.12306×10^{-04}	1.66677×10^{-02}

A Figura 4.3 exibe um comparativo entre a transformada inversa analítica e a transformada inversa numérica de $F_2(s) = \frac{1}{s+2}$, através dos métodos de Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional, cuja transformada inversa é $\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} = f_2(t) = e^{-2t}$. A Tabela 4.4 divulga os erros absoluto e relativo da inversão desta função, a partir de cada método.

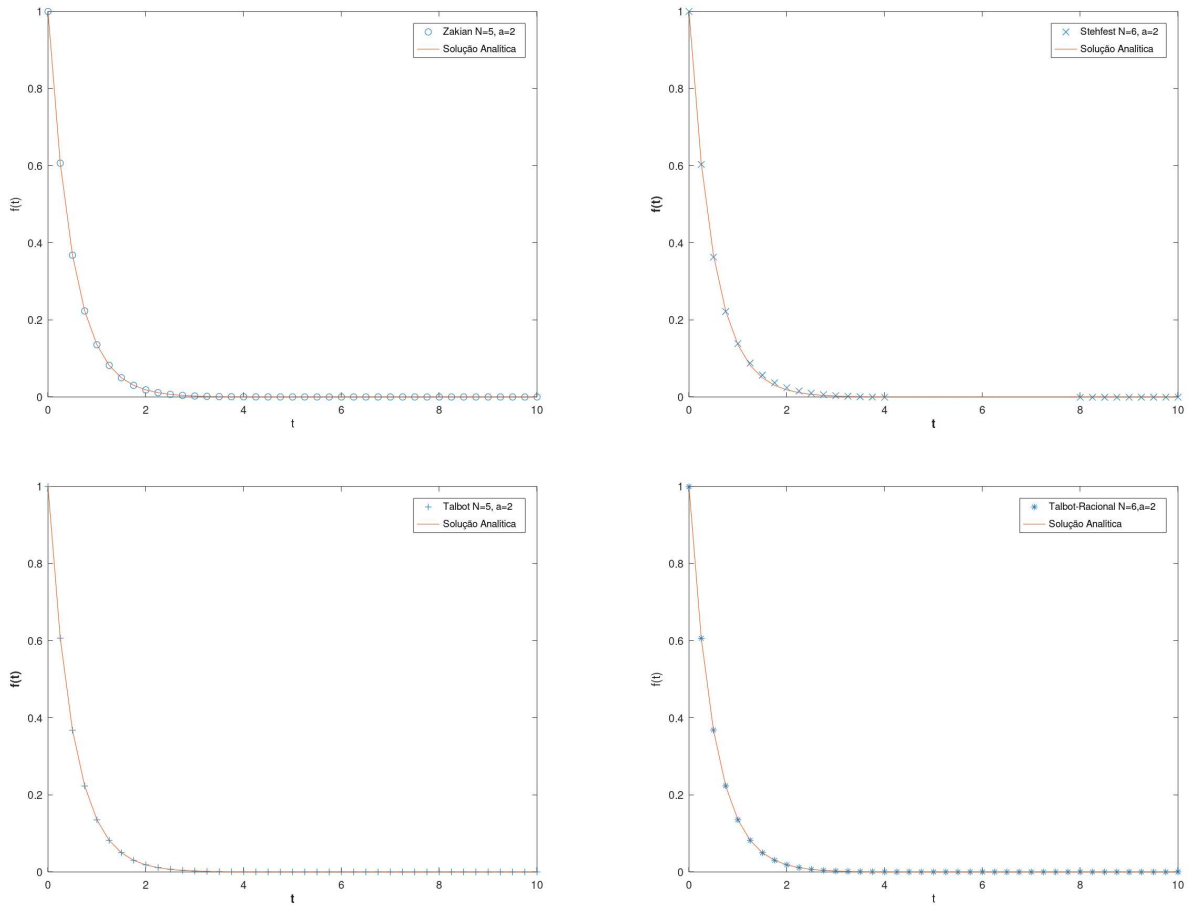


Figura 4.3: Comparativo dos métodos para $F_2(s)$, com $a = 2$.

Tabela 4.4: Erros absoluto e relativo da inversão de $F_2(s)$, com $a = 2$

Método	Zakian		Stehfest		Talbot		Talbot-Racional	
Parâmetro	$N = 5$		$N = 6$		$N = 5$		$N = 6$	
t	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo
10^{-4}	6.06542×10^{-08}	6.06554×10^{-08}	4.27303×10^{-08}	4.27311×10^{-08}	8.13742×10^{-05}	8.13758×10^{-05}	5.60590×10^{-04}	5.60601×10^{-04}
1	1.06484×10^{-07}	7.86818×10^{-07}	3.00273×10^{-03}	2.21873×10^{-02}	1.45367×10^{-04}	1.07413×10^{-03}	1.42303×10^{-04}	1.05148×10^{-03}
2	1.26554×10^{-07}	6.90961×10^{-06}	5.63849×10^{-03}	3.07851×10^{-01}	2.70102×10^{-04}	1.47471×10^{-02}	1.89901×10^{-04}	1.03682×10^{-02}
3	1.34365×10^{-07}	5.42069×10^{-05}	1.03840×10^{-03}	4.18920×10^{-01}	1.71649×10^{-04}	6.92485×10^{-02}	1.52312×10^{-05}	6.14472×10^{-03}
4	1.38640×10^{-07}	4.13280×10^{-04}	1.11217×10^{-03}	$3.31534 \times 10^{+00}$	3.62753×10^{-05}	1.08135×10^{-01}	1.67248×10^{-05}	4.98560×10^{-02}
5	1.77133×10^{-07}	3.90161×10^{-03}	1.58547×10^{-03}	$3.49224 \times 10^{+01}$	4.28945×10^{-05}	9.44816×10^{-01}	3.42388×10^{-05}	7.54161×10^{-01}
6	4.68628×10^{-07}	7.62715×10^{-02}	1.46688×10^{-03}	$2.38742 \times 10^{+02}$	5.97069×10^{-05}	$9.71759 \times 10^{+00}$	3.51767×10^{-05}	$5.72518 \times 10^{+00}$
7	1.78445×10^{-06}	$2.14599 \times 10^{+00}$	1.20819×10^{-03}	$1.45297 \times 10^{+03}$	6.72613×10^{-05}	$8.08887 \times 10^{+01}$	3.40532×10^{-05}	$4.09526 \times 10^{+01}$
8	5.95268×10^{-06}	$5.28962 \times 10^{+01}$	9.54780×10^{-04}	$8.48428 \times 10^{+03}$	6.99612×10^{-05}	$6.2168 \times 10^{+02}$	3.31320×10^{-05}	$2.94415 \times 10^{+02}$
9	1.62081×10^{-05}	$1.06422 \times 10^{+03}$	7.43122×10^{-04}	$4.87934 \times 10^{+04}$	7.03025×10^{-05}	$4.61606 \times 10^{+03}$	3.22508×10^{-05}	$2.11759 \times 10^{+03}$
10	3.71482×10^{-05}	$1.80230 \times 10^{+04}$	5.75554×10^{-04}	$2.79239 \times 10^{+05}$	6.93579×10^{-05}	$3.36500 \times 10^{+04}$	3.13065×10^{-05}	$1.51888 \times 10^{+04}$

A Figura 4.4 mostra um comparativo entre a transformada inversa analítica e a transformada inversa numérica, com $a = 50$, de $F_2(s) = \frac{1}{s + 50}$, através dos métodos de Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional, cuja transformada inversa é $\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} = f_2(t) = e^{-50t}$. A Tabela 4.5 traz os erros absoluto e relativo da inversão desta função, a partir de cada método.

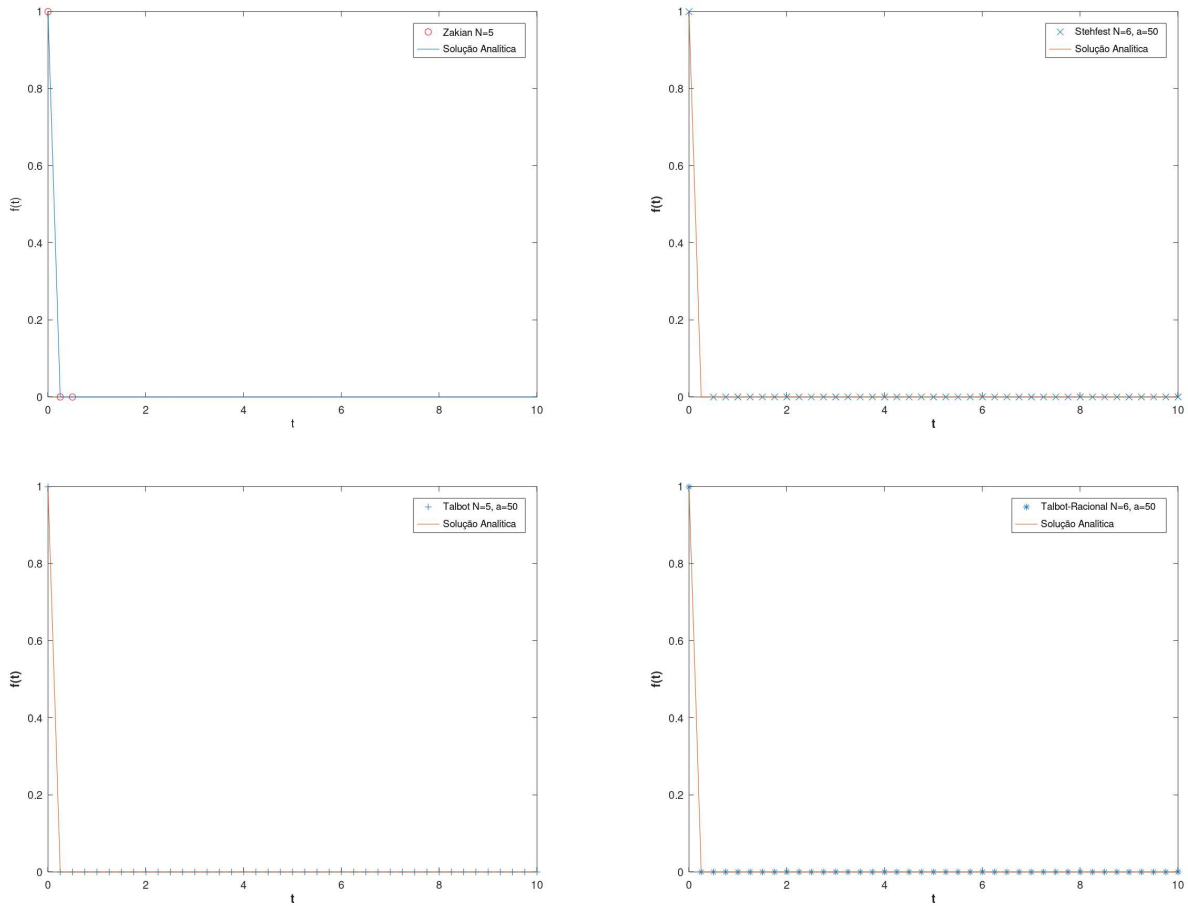


Figura 4.4: Comparativo dos métodos para $F_2(s)$, com $a = 50$.

Tabela 4.5: Erros absoluto e relativo da inversão de $F_2(s)$, com $a = 50$

Método	Zakian		Stehfest		Talbot		Talbot-Racional	
Parâmetro	$N = 5$		$N = 6$		$N = 5$		$N = 6$	
t	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo
10^{-4}	6.067188×10^{-08}	6.07022×10^{-08}	1.07523×10^{-06}	1.07577×10^{-06}	8.13711×10^{-05}	8.14118×10^{-05}	5.50119×10^{-04}	5.50394×10^{-04}
1	3.77463×10^{-03}	—	5.05525×10^{-06}	—	4.07329×10^{-05}	—	1.87557×10^{-05}	—
2	1.36199×10^{-02}	—	2.03122×10^{-05}	—	2.20084×10^{-05}	—	1.04731×10^{-05}	—
3	1.76458×10^{-02}	—	1.26513×10^{-05}	—	1.49650×10^{-05}	—	7.20150×10^{-06}	—
4	1.84550×10^{-02}	—	8.23290×10^{-06}	—	1.13223×10^{-05}	—	5.47784×10^{-06}	—
5	1.80239×10^{-02}	—	5.71892×10^{-06}	—	9.10221×10^{-06}	—	4.41741×10^{-06}	—
6	1.71562×10^{-02}	—	4.18605×10^{-06}	—	7.60875×10^{-06}	—	3.70006×10^{-06}	—
7	1.61703×10^{-02}	—	3.19038×10^{-06}	—	6.53578×10^{-06}	—	3.18276×10^{-06}	—
8	1.51933×10^{-02}	—	2.50961×10^{-06}	—	5.72778×10^{-06}	—	2.79218×10^{-06}	—
9	1.42741×10^{-02}	—	2.02453×10^{-06}	—	5.09745×10^{-06}	—	2.48689×10^{-06}	—
10	1.34286×10^{-02}	—	1.66708×10^{-06}	—	4.59203×10^{-06}	—	2.24172×10^{-06}	—

Na inversão de funções da classe de $F_2(s)$, observa-se que a técnica de Zakian produziu os resultados mais precisos, para os valores de $a = 0.5$ e $a = 2$, conforme Figuras 4.2, 4.3 e Tabelas 4.3, 4.4. Já para inversão de funções exponenciais com elevados valores do coeficiente a , os resultados ainda são satisfatórios, mas estariam no limite de não ser. De acordo com a Figura 4.4 e Tabela 4.5, para $a = 50$, essa técnica apresenta erros absolutos, em maioria, da ordem de 10^{-02} , exceto para os primeiros instantes.

A inversão por Stehfest obteve bons resultados para todos os valores de a .

O método de Talbot apresentou bom desempenho, produziu erros absolutos das ordens de 10^{-04} e 10^{-05} para os valores de $a = 0.5$ e $a = 2$. Na inversão, considerando $a = 50$, os erros absolutos variam das ordens de 10^{-05} e 10^{-06} .

Por sua vez, o método de Talbot-Racional comportou-se de maneira semelhante ao método de Talbot para todos os valores de a .

Vale ressaltar, que os valores do erro relativo da inversão desta função em todos os métodos, para $a = 50$, são representados com hífen na Tabela 4.5, visto que, a solução analítica tende a zero. Logo, não faz sentido calcular o erros relativos nesses pontos.

• Análise do parâmetro numérico N para a inversão de $F_2(s)$

De acordo com os resultados apresentados no Apêndice deste trabalho, na inversão de $F_2(s)$ com $a = 0.5$, em relação ao parâmetro N , recomenda-se para Stehfest valores entre $N = 8$ e $N = 18$. Erros absolutos variando das ordens de 10^{-10} e 10^{-04} . Após $N = 24$, os erros aumentam e os resultados afastam-se da solução analítica. Para Talbot, indica-se valores de $N = 18$ até $N = 24$, com erros absolutos entre as ordens de 10^{-11} até 10^{-14} . Essa técnica apresenta resultados satisfatórios até $N = 88$. Na inversão por Talbot-Racional os melhores resultados foram obtidos para valores entre $N = 24$ e $N = 50$, os erros variam entre as ordens de 10^{-13} e 10^{-15} . Apresenta bom desempenho até $N = 180$.

Na inversão de $F_2(s)$ com $a = 2$, para Stehfest sugere-se os valores são entre $N = 18$ e $N = 24$, com erros absolutos das ordens de 10^{-06} até 10^{-07} . Resultados satisfatórios até $N = 24$. Talbot fornece excelentes resultados e com boa precisão numérica de $N = 18$ até $N = 32$, com erros absolutos entre as ordens de 10^{-12} e 10^{-14} . Bom desempenho até $N = 80$. Indica-se para Talbot-Racional valores de $N = 18$ até $N = 50$, nos quais, os erros variam entre as ordens de 10^{-11} e 10^{-17} . Tem-se bons resultados até $N = 180$.

Para Stehfest, na inversão de $F_2(s)$ com $a = 50$, recomenda-se os valores de $N = 12$ e $N = 14$, erros absolutos variando das ordens de 10^{-10} e 10^{-06} . Bons resultados até $N = 24$. Para Talbot sugere-se valores de $N = 18$ até $N = 32$, com erros absolutos entre as ordens de 10^{-12} até 10^{-15} . Desempenho satisfatório até $N = 90$. Talbot-Racional apresenta excelentes resultados de $N = 24$ até $N = 50$, erros absolutos entre as ordens de 10^{-14} até 10^{-17} . Após $N = 180$, os erros aumentam e os resultados afastam-se da solução analítica.

4.1.3 Inversão de $F_3(s)$

Para a inversão de $F_3(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$, considerou-se diferentes valores do coeficiente a , $a = 0.5$, $a = 1$ e $a = 2$, com o objetivo de verificar a técnicas para inverter a transformada de funções com características comuns e pertencentes à mesma classe.

A Tabela 4.6 indica os erros absolutos e relativos da inversão de $F_3(s) = \frac{0.5}{s^2 + 0.25}$, através dos métodos de Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional, cuja transformada inversa é $\mathcal{L}^{-1}\{F_3(s)\} = f_3(t) = \sin(0.5t)$. Na Figura 4.5 apresenta-se um comparativo entre a transformada inversa analítica e a transformada inversa numérica desta função, a partir de cada método.

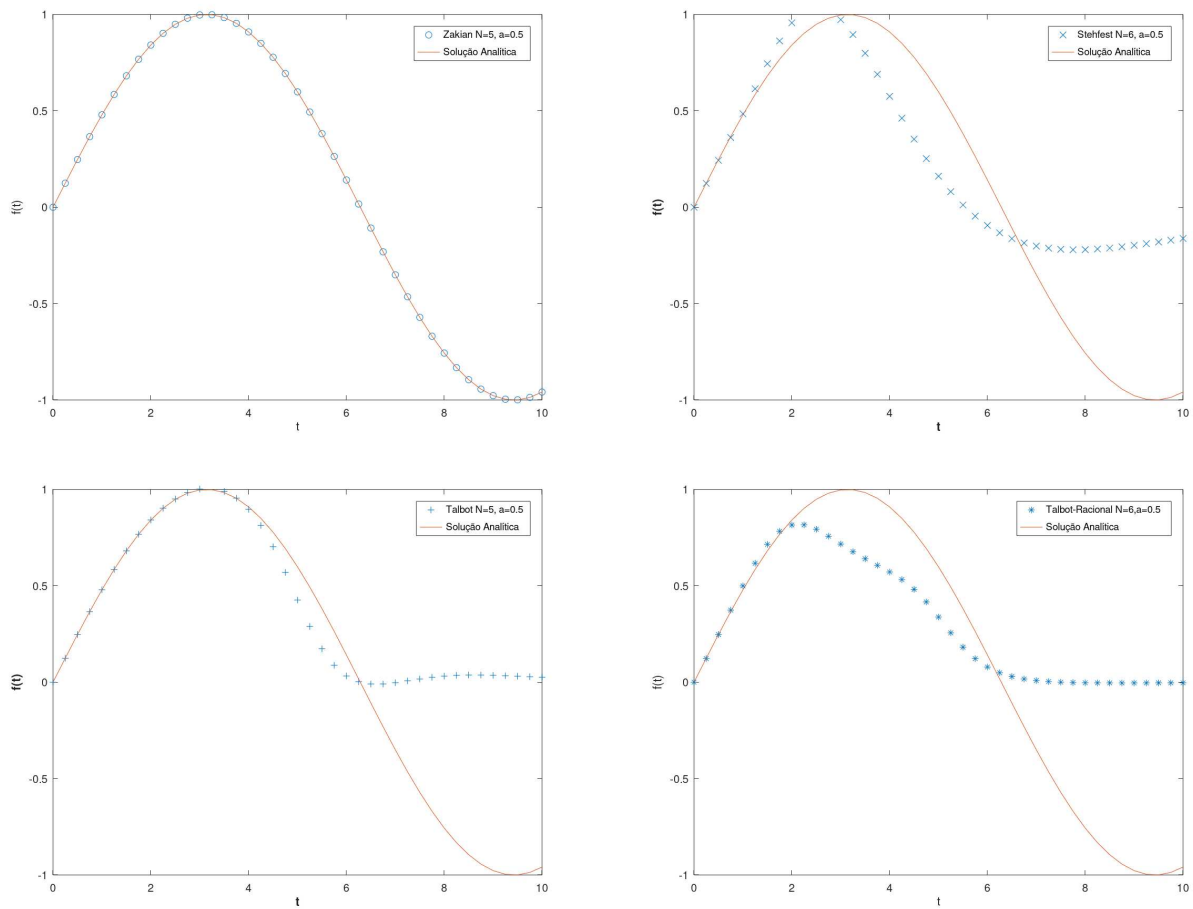


Figura 4.5: Comparativo dos métodos para $F_3(s)$, com $a = 0.5$

Tabela 4.6: Erros absoluto e relativo da inversão de $F_3(s)$, com $a = 0.5$

Método	Zakian		Stehfest		Talbot		Talbot-Racional	
Parâmetro	$N = 5$		$N = 6$		$N = 5$		$N = 6$	
t	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo
10^{-4}	1.65946×10^{-13}	3.31892×10^{-08}	1.06796×10^{-08}	2.13593×10^{-03}	3.24218×10^{-11}	6.48436×10^{-06}	1.09435×10^{-07}	2.18870×10^{-02}
1	1.64942×10^{-08}	3.44042×10^{-08}	5.41509×10^{-03}	1.12949×10^{-02}	5.59802×10^{-06}	1.16765×10^{-05}	2.04747×10^{-02}	4.27068×10^{-02}
2	3.23898×10^{-08}	3.84919×10^{-08}	1.15275×10^{-01}	1.36992×10^{-01}	1.76953×10^{-04}	2.10290×10^{-04}	2.56142×10^{-02}	3.043987×10^{-02}
3	4.71053×10^{-08}	4.72236×10^{-08}	2.45630×10^{-02}	2.46247×10^{-02}	4.43921×10^{-03}	4.45035×10^{-03}	2.80478×10^{-01}	2.81183×10^{-01}
4	6.00904×10^{-08}	6.60844×10^{-08}	3.33809×10^{-01}	3.67106×10^{-01}	1.21815×10^{-02}	1.33966×10^{-02}	3.37326×10^{-01}	3.70974×10^{-01}
5	7.08368×10^{-08}	1.18362×10^{-07}	4.37443×10^{-01}	7.30934×10^{-01}	1.72259×10^{-01}	2.87831×10^{-01}	2.60226×10^{-01}	4.34818×10^{-01}
6	7.88941×10^{-08}	5.59057×10^{-07}	2.35431×10^{-0}	$1.66830 \times 10^{+00}$	1.08590×10^{-01}	7.69491×10^{-01}	6.22682×10^{-02}	4.41243×10^{-01}
7	8.38961×10^{-08}	2.39167×10^{-07}	1.49199×10^{-01}	4.25332×10^{-01}	3.48116×10^{-01}	9.92396×10^{-01}	3.59397×10^{-01}	$1.02455 \times 10^{+00}$
8	8.56102×10^{-08}	1.13120×10^{-07}	5.36726×10^{-01}	7.09203×10^{-01}	7.88375×10^{-01}	$1.04171 \times 10^{+00}$	7.53876×10^{-01}	9.96133×10^{-01}
9	8.40104×10^{-08}	8.59415×10^{-08}	7.79851×10^{-01}	7.97777×10^{-01}	$1.01329 \times 10^{+00}$	$1.03658 \times 10^{+00}$	9.73591×10^{-01}	9.95971×10^{-01}
10	7.94079×10^{-08}	8.28093×10^{-08}	7.96937×10^{-01}	8.31074×10^{-01}	9.84567×10^{-01}	$1.02674 \times 10^{+00}$	9.55736×10^{-01}	9.96675×10^{-01}

Na Figura 4.6 expõe-se um comparativo entre a transformada inversa analítica e a transformada inversa numérica de $F_3(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$, através dos métodos de Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional, cuja transformada inversa é $\mathcal{L}^{-1}\{F_3(s)\} = f_3(t) = \sin(t)$. A Tabela 4.7 mostra os erros absoluto e relativo da inversão desta função, a partir de cada método.

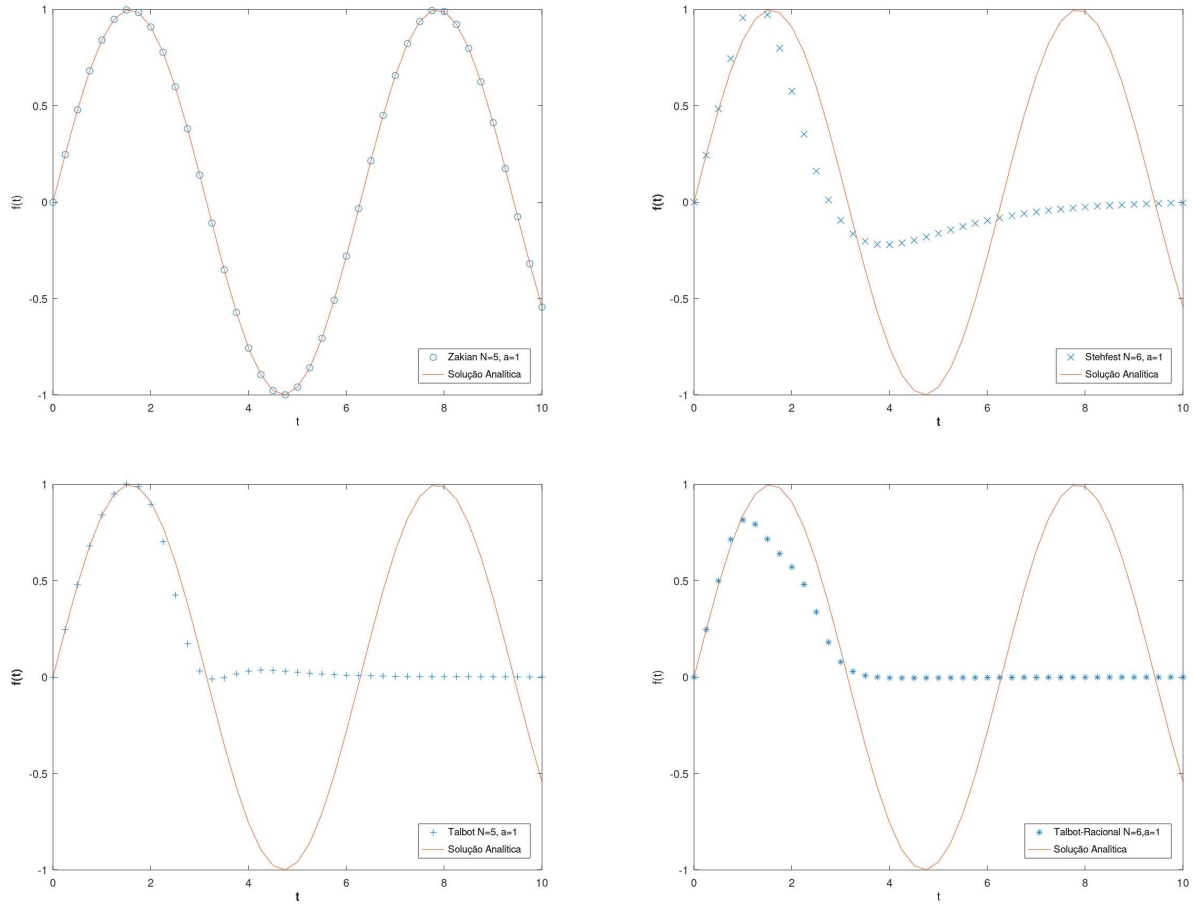


Figura 4.6: Comparativo dos métodos para $F_3(s)$, com $a = 1$

Tabela 4.7: Erros absoluto e relativo da inversão de $F_3(s)$, com $a = 1$

Método	Zakian		Stehfest		Talbot		Talbot-Racional	
Parâmetro	$N = 5$		$N = 6$		$N = 5$		$N = 6$	
t	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo
10^{-4}	3.31891×10^{-13}	3.31891×10^{-08}	2.13593×10^{-08}	2.13593×10^{-03}	6.48436×10^{-11}	6.48436×10^{-06}	2.18870×10^{-07}	2.18870×10^{-02}
1	3.23898×10^{-08}	3.84919×10^{-08}	1.15275×10^{-01}	1.36992×10^{-01}	1.76953×10^{-04}	2.10290×10^{-04}	2.56142×10^{-02}	3.04398×10^{-02}
2	6.00904×10^{-08}	6.60844×10^{-08}	3.33809×10^{-01}	3.67106×10^{-01}	1.21815×10^{-02}	1.33966×10^{-02}	3.37326×10^{-01}	3.70974×10^{-01}
3	7.88941×10^{-08}	5.59057×10^{-07}	2.35431×10^{-01}	$1.66830 \times 10^{+00}$	1.08590×10^{-01}	7.69491×10^{-01}	6.22682×10^{-02}	4.41243×10^{-01}
4	8.56102×10^{-08}	1.13120×10^{-07}	5.36726×10^{-01}	7.09203×10^{-01}	7.88375×10^{-01}	$1.04171 \times 10^{+00}$	7.53876×10^{-01}	9.96133×10^{-01}
5	7.94079×10^{-08}	8.28093×10^{-08}	7.96937×10^{-01}	8.31074×10^{-01}	9.84567×10^{-01}	$1.02674 \times 10^{+00}$	9.55736×10^{-01}	9.96675×10^{-01}
6	6.12795×10^{-08}	2.19313×10^{-07}	1.84372×10^{-01}	6.59851×10^{-01}	2.90080×10^{-01}	$1.03816 \times 10^{+00}$	2.77812×10^{-01}	9.94261×10^{-01}
7	1.29780×10^{-07}	1.97538×10^{-07}	7.07635×10^{-01}	$1.07709 \times 10^{+00}$	6.52099×10^{-01}	9.92561×10^{-01}	6.57694×10^{-01}	$1.00107 \times 10^{+00}$
8	1.89558×10^{-06}	1.91597×10^{-06}	$1.01434 \times 10^{+00}$	$1.02525 \times 10^{+00}$	9.86777×10^{-01}	9.97391×10^{-01}	9.89622×10^{-01}	$1.00026 \times 10^{+00}$
9	8.28619×10^{-07}	2.01063×10^{-06}	4.22995×10^{-01}	$1.02639 \times 10^{+00}$	4.10581×10^{-01}	9.96270×10^{-01}	4.12170×10^{-01}	$1.00012 \times 10^{+00}$
10	1.07301×10^{-04}	1.97238×10^{-04}	5.40705×10^{-01}	9.93905×10^{-01}	5.45028×10^{-01}	$1.00185 \times 10^{+00}$	5.44067×10^{-01}	$1.00008 \times 10^{+00}$

Na Figura 4.7 verifica-se um comparativo entre a transformada inversa analítica e a transformada inversa numérica de $F_3(s) = \frac{2}{s^2 + 4}$, através dos métodos de Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional, cuja transformada inversa é $\mathcal{L}^{-1}\{F_3(s)\} = f_3(t) = \sin(2t)$. A Tabela 4.8 exhibe os erros absoluto e relativo da inversão desta função.

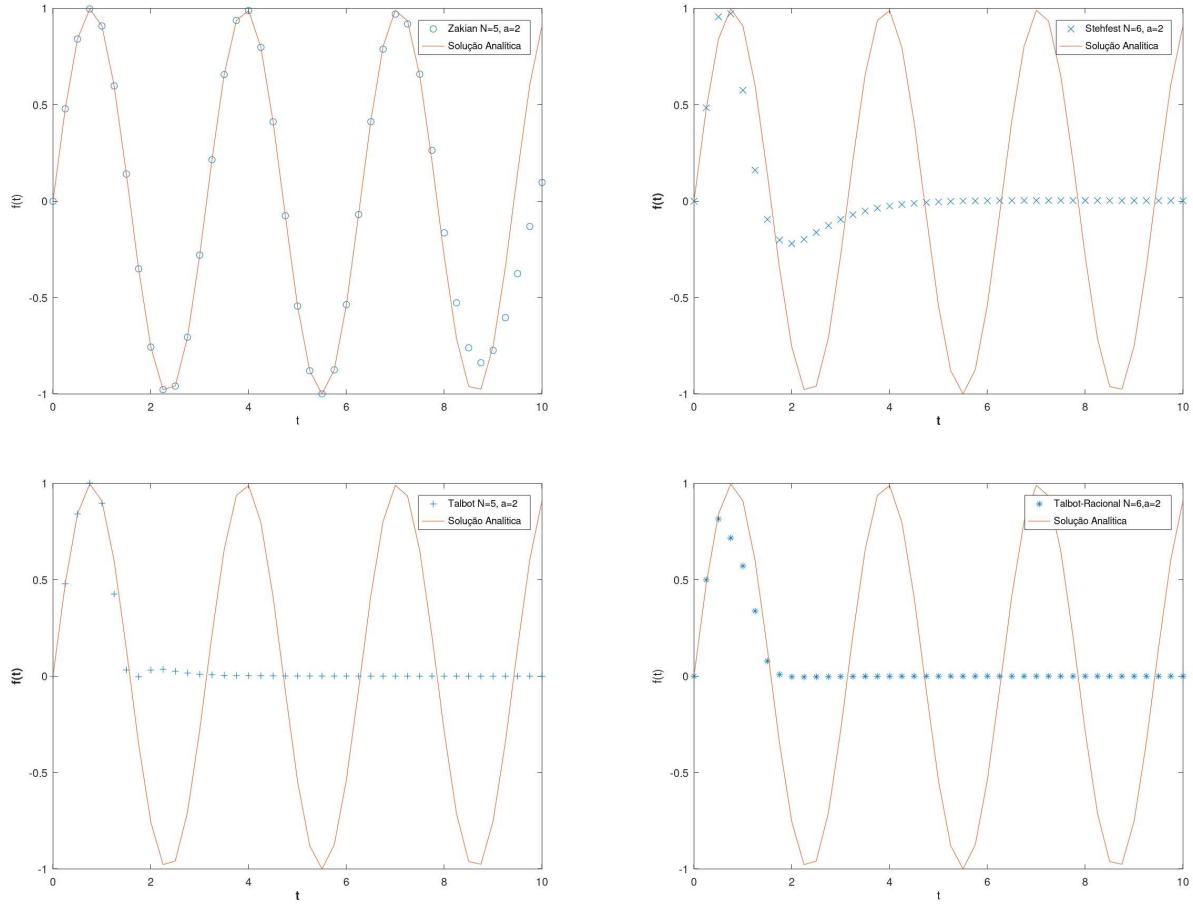


Figura 4.7: Comparativo dos métodos para $F_3(s)$, com $a = 2$.

Tabela 4.8: Erros absoluto e relativo da inversão de $F_3(s)$, com $a = 2$

Método	Zakian		Stehfest		Talbot		Talbot-Racional	
Parâmetro	$N = 5$		$N = 6$		$N = 5$		$N = 6$	
t	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo
10^{-4}	6.63784×10^{-13}	3.31892×10^{-08}	4.27186×10^{-08}	2.13593×10^{-03}	1.29687×10^{-10}	6.48436×10^{-06}	4.37740×10^{-07}	2.18870×10^{-02}
1	6.00904×10^{-08}	6.60844×10^{-08}	3.33809×10^{-01}	3.67106×10^{-01}	1.21815×10^{-02}	1.33966×10^{-02}	3.37326×10^{-01}	3.70974×10^{-01}
2	8.56102×10^{-08}	1.13120×10^{-07}	5.36726×10^{-01}	7.09203×10^{-01}	7.88375×10^{-01}	$1.04171 \times 10^{+00}$	7.53876×10^{-01}	9.96133×10^{-01}
3	6.12795×10^{-08}	2.19313×10^{-07}	1.84372×10^{-01}	6.59851×10^{-01}	2.90080×10^{-01}	$1.03816 \times 10^{+00}$	9.89622×10^{-01}	$9.94261 \times 10^{+00}$
4	1.89558×10^{-06}	1.91597×10^{-06}	$1.01434 \times 10^{+00}$	$1.02525 \times 10^{+00}$	9.86777×10^{-01}	9.97391×10^{-01}	9.89622×10^{-01}	$1.00026 \times 10^{+00}$
5	1.07301×10^{-04}	1.97238×10^{-04}	5.40705×10^{-01}	9.93905×10^{-01}	5.45028×10^{-01}	$1.00185 \times 10^{+00}$	5.44067×10^{-01}	$1.00008 \times 10^{+00}$
6	2.11475×10^{-04}	3.94121×10^{-04}	5.39171×10^{-01}	$1.00484 \times 10^{+00}$	5.37109×10^{-01}	$1.00099 \times 10^{+00}$	5.36567×10^{-01}	$1.00019 \times 10^{+00}$
7	1.99029×10^{-02}	2.00917×10^{-02}	9.86819×10^{-01}	9.96176×10^{-01}	9.90261×10^{-01}	9.99650×10^{-01}	9.90498×10^{-01}	9.99889×10^{-01}
8	1.24170×10^{-01}	4.31292×10^{-01}	2.91515×10^{-01}	$1.01254 \times 10^{+00}$	2.88155×10^{-01}	$1.00087 \times 10^{+00}$	2.88001×10^{-01}	$1.00034 \times 10^{+00}$
9	2.25389×10^{-02}	3.00124×10^{-02}	7.54090×10^{-01}	$1.00413 \times 10^{+00}$	7.51185×10^{-01}	$1.00026 \times 10^{+00}$	7.51073×10^{-01}	$1.00011 \times 10^{+00}$
10	8.15612×10^{-01}	8.93386×10^{-01}	9.10368×10^{-01}	9.97177×10^{-01}	9.12782×10^{-01}	9.99821×10^{-01}	9.12869×10^{-01}	9.99916×10^{-01}

Na inversão de $F_3(s)$, os métodos de Stehfest, Talbot e Talbot-Racional apresentaram seu pior desempenho na inversão de funções desta classe. Pode-se notar que as técnicas não são eficientes na inversão de funções com comportamento oscilatório e um número reduzido de termos, fato evidente nos gráficos das Figuras 4.5, 4.6 e 4.7.

Zakian sobressaiu-se aos demais métodos, apresentando resultados com menores erros absolutos, conforme as Tabelas 4.6, 4.7 e 4.8. Para $a = 0.5$ tem-se um erro absoluto da ordem de 10^{-13} para o instante inicial, e 10^{-08} para os instantes seguintes. Para $a = 1$, os erros absolutos variam entre 10^{-13} e 10^{-04} . Já para $a = 2$, o resultado em grande parte do perfil é satisfatório, com erros absolutos variando das ordens de 10^{-13} e 10^{-02} , exceto para $t = 8$ e $t = 10$.

• Análise do parâmetro numérico N para a inversão de $F_3(s)$

Conforme tabelas apresentadas no Apêndice, acrescentando-se mais termos no somatório para a aproximação de $F_3(s)$ com $a = 0.5$, observa-se um melhor desempenho da técnica de Stehfest. Melhores resultados para valores entre $N = 16$ e $N = 20$, erros absolutos variando das ordens de 10^{-13} e 10^{-02} , satisfatórios até $N = 24$. Recomenda-se para Talbot, valores entre $N = 18$ e $N = 32$, com erros absolutos variando das ordens de 10^{-19} e 10^{-10} . O método forneceu resultados aceitáveis até $N = 90$. Para Talbot-Racional, valores de $N = 32$ até $N = 50$, com erros absolutos entre as ordens de 10^{-20} até 10^{-06} . Essa técnica apresenta desempenho satisfatórios até $N = 190$.

Na inversão de $F_3(s)$ com $a = 1$, para Stehfest, o aumento do número de termos no somatório não se mostrou suficiente para que se tenha resultados satisfatórios. Mas ainda assim, para $N > 24$ o resultado piora muito. Com $N = 24$ se consegue um perfil satisfatório na maioria dos pontos. Para Talbot as melhores soluções foram obtidas para valores entre $N = 24$ e $N = 50$, erros absolutos das ordens de 10^{-19} até 10^{-07} . Após $N = 90$, os erros aumentam e os resultados afastam-se da solução analítica. Indica-se para Talbot-Racional de $N = 38$ até $N = 50$, nos quais, os erros variam entre as ordens de 10^{-19} e 10^{-03} . Essa técnica apresenta bons resultados até $N = 190$.

Na inversão de $F_3(s)$ com $a = 2$, novamente Stehfest apresentou desempenho não satisfatórios para todos valores de N . A técnica de Talbot exige maior número de termos no somatório, visto que, falhou para os valores indicados na literatura. Indica-se valores entre $N = 36$ e $N = 50$, erros absolutos das ordens de 10^{-17} até 10^{-04} . Resultados satisfatórios até $N = 88$. Talbot-Racional apresenta boa aproximação comparada com a solução exata a partir de $N = 64$. Recomenda-se valores entre $N = 90$ e $N = 120$. O método forneceu resultados aceitáveis até $N = 190$.

4.1.4 Inversão de $F_4(s)$

Pode-se observar, de acordo com a Figura 4.8, um comparativo entre a solução exata e a inversão da Transformada de Laplace de $F_4(s) = \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}$, cuja inversa é $\mathcal{L}^{-1}\{F_4(s)\} =$

$f_4(t) = t \cos(t)$ utilizando os métodos de Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional. A Tabela 4.9 exibe os erros absoluto e relativo da inversão desta função, a partir de cada método.

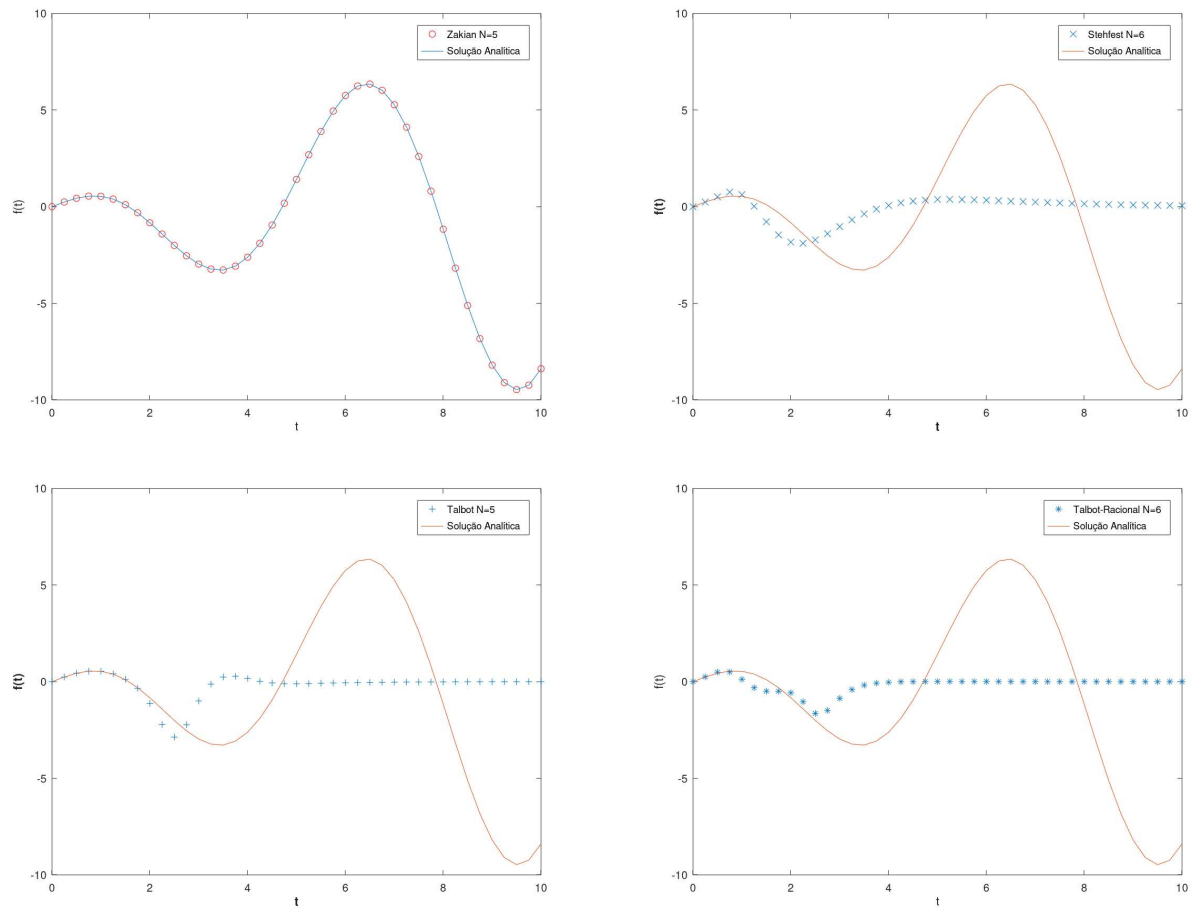


Figura 4.8: Comparativo dos métodos para $F_4(s)$.

Tabela 4.9: Erros absoluto e relativo da inversão de $F_4(s)$.

Método	Zakian		Stehfest		Talbot		Talbot-Racional	
Parâmetro	$N = 5$		$N = 6$		$N = 5$		$N = 6$	
t	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo
10^{-4}	3.31892×10^{-13}	3.31892×10^{-08}	2.13593×10^{-08}	2.13593×10^{-03}	6.48436×10^{-11}	6.48436×10^{-06}	2.18870×10^{-07}	2.18870×10^{-02}
1	3.07998×10^{-08}	5.70049×10^{-08}	8.72284×10^{-02}	1.61443×10^{-01}	1.96166×10^{-03}	3.63067×10^{-03}	4.14920×10^{-01}	7.67941×10^{-01}
2	4.77863×10^{-08}	5.74152×10^{-08}	$1.00350 \times 10^{+00}$	$1.20570 \times 10^{+00}$	2.93712×10^{-01}	3.52895×10^{-01}	2.56142×10^{-01}	3.07755×10^{-01}
3	3.94864×10^{-08}	1.32951×10^{-08}	$1.93722 \times 10^{+00}$	6.52270×10^{-01}	$1.97182 \times 10^{+00}$	6.63920×10^{-01}	$2.10662 \times 10^{+00}$	7.09305×10^{-01}
4	3.16880×10^{-10}	1.21197×10^{-10}	$2.67962 \times 10^{+00}$	$1.02487 \times 10^{+00}$	$2.77739 \times 10^{+00}$	$1.06227 \times 10^{+00}$	$2.58658 \times 10^{+00}$	9.89293×10^{-01}
5	5.88888×10^{-08}	4.15204×10^{-08}	$1.04705 \times 10^{+00}$	7.38241×10^{-01}	$1.52457 \times 10^{+00}$	$1.07492 \times 10^{+00}$	$1.40920 \times 10^{+00}$	9.93580×10^{-01}
6	2.00599×10^{-07}	3.48202×10^{-08}	$5.42448 \times 10^{+00}$	9.41583×10^{-01}	$5.81552 \times 10^{+00}$	$1.00946 \times 10^{+00}$	$5.75368 \times 10^{+00}$	9.98726×10^{-01}
7	3.97076×10^{-06}	7.52420×10^{-07}	$5.04119 \times 10^{+00}$	9.55257×10^{-01}	$5.30149 \times 10^{+00}$	$1.00458 \times 10^{+00}$	$5.27295 \times 10^{+00}$	9.99174×10^{-01}
8	2.50303×10^{-05}	2.15037×10^{-05}	$1.31474 \times 10^{+00}$	$1.12950 \times 10^{+00}$	$1.15214 \times 10^{+00}$	9.89815×10^{-01}	$1.16640 \times 10^{+00}$	$1.00206 \times 10^{+00}$
9	1.94513×10^{-04}	2.37206×10^{-05}	$8.29198 \times 10^{+00}$	$1.01119 \times 10^{+00}$	$8.19371 \times 10^{+00}$	9.99212×10^{-01}	$8.20144 \times 10^{+00}$	$1.00015 \times 10^{+00}$
10	2.42847×10^{-03}	2.89423×10^{-04}	$8.44468 \times 10^{+00}$	$1.00643 \times 10^{+00}$	$8.38687 \times 10^{+00}$	9.99542×10^{-01}	$8.39136 \times 10^{+00}$	$1.00007 \times 10^{+00}$

Analisando a Figura 4.8 e considerando os erros absoluto e relativo, expostos na Tabela 4.9, fica evidente que a técnica de Zakian apresenta melhores resultados, com erros absolutos variando entre as ordens de 10^{-13} e 10^{-03} .

A inversão através do método de Stehfest produz erro absoluto da ordem de 10^{-08} para o primeiro instante, 10^{-02} para $t = 2$ e de 10^0 para os instantes seguintes. De modo semelhante, o método de Talbot resulta em erros absolutos de 10^{-11} , 10^{-03} e 10^{-01} para os instantes iniciais e de 10^0 para os instantes seguintes.

O método de Talbot-Racional, resulta em um erro absoluto da ordem de 10^{-07} para o instante inicial, para o intervalo $t = [1, 2]$, erros absolutos de 10^{-01} e de 10^0 para os instantes seguintes. Observa-se que os resultados afastam-se, consideravelmente, da solução analítica para os instantes $t = [3, 10]$.

- **Análise do parâmetro numérico N para a inversão de $F_4(s)$**

Considerando resultados expostos no Apêndice, pôde-se notar um desempenho não satisfatório demonstrado pela técnica de Stehfest, tendo em vista que o aumento do número de termos do somatório não possibilitou uma precisão numérica aceitável.

Na inversão por Talbot, recomenda-se valores entre $N = 24$ e $N = 32$, com erros absolutos das ordens entre 10^{-19} e 10^{-06} . Após $N = 90$, os erros aumentam e os resultados afastam-se da solução analítica.

O método de Talbot-Racional exigiu maior número de termos. Indica-se valores entre $N = 70$ e $N = 100$, erros absolutos das ordens de 10^{-17} até 10^{-10} . Resultados satisfatórios até $N = 210$.

4.1.5 Inversão de $F_5(s)$

A Tabela 4.10 exhibe os erros absoluto e relativo da inversão de $F_5(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$, cuja inversa é $\mathcal{L}^{-1}\{F_5(s)\} = f_5(t) = te^{-t}$, através dos métodos de Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional. A Figura 4.9 traz um comparativo entre a transformada inversa analítica e a transformada inversa numérica desta função, a partir de cada método.

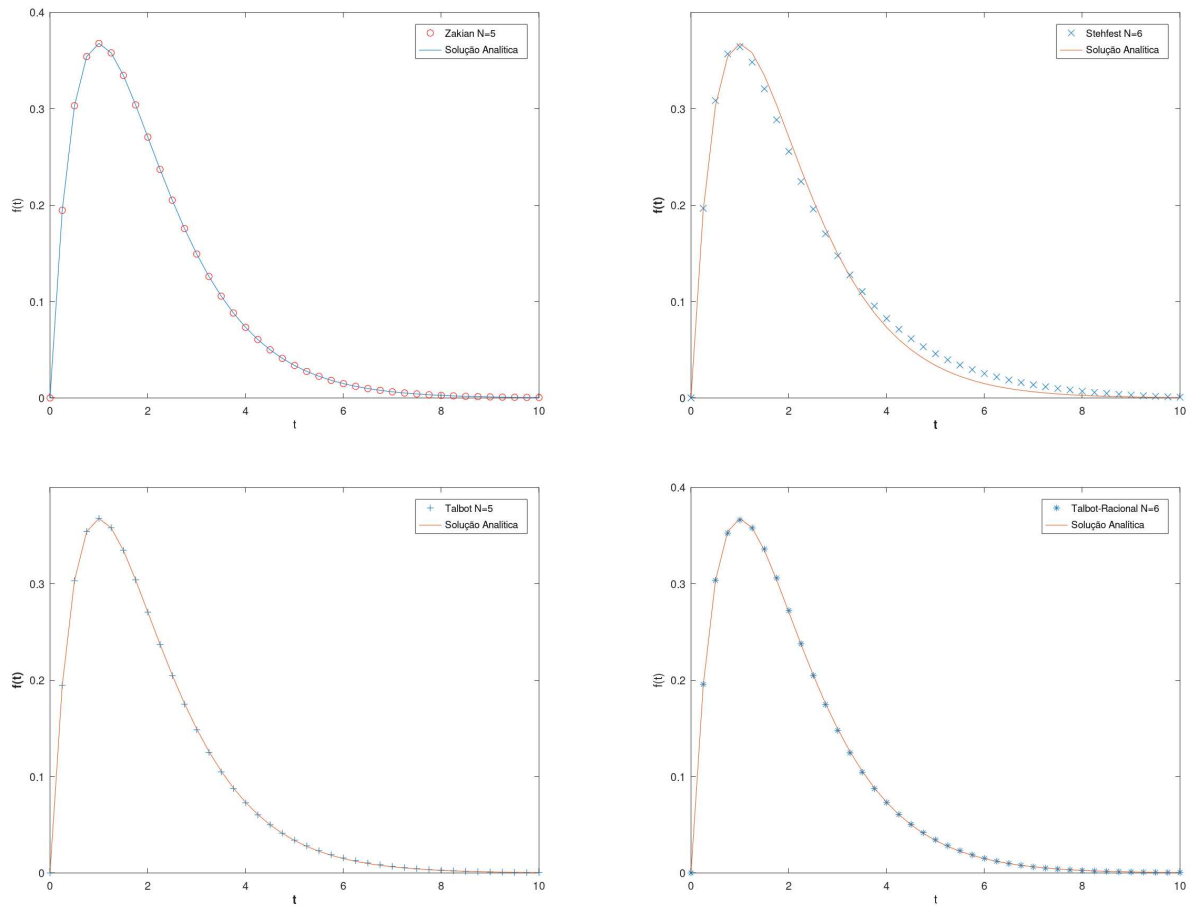


Figura 4.9: Comparativo dos métodos para $F_5(s)$.

Tabela 4.10: Erros absoluto e relativo da inversão de $F_5(s)$.

Método	Zakian		Stehfest		Talbot		Talbot-Racional	
Parâmetro	$N = 5$		$N = 6$		$N = 5$		$N = 6$	
t	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo
10^{-4}	3.31890×10^{-13}	3.31893×10^{-08}	2.13651×10^{-08}	2.13653×10^{-03}	6.48430×10^{-11}	6.48436×10^{-06}	2.18842×10^{-07}	2.18844×10^{-02}
1	2.23532×10^{-08}	6.07624×10^{-08}	3.48385×10^{-03}	9.47008×10^{-03}	4.69460×10^{-05}	1.27612×10^{-04}	1.61740×10^{-03}	4.39656×10^{-03}
2	2.98033×10^{-08}	1.10109×10^{-07}	1.48772×10^{-02}	5.49643×10^{-02}	4.73666×10^{-05}	1.74997×10^{-04}	1.59770×10^{-03}	5.90274×10^{-03}
3	2.93170×10^{-08}	1.96283×10^{-07}	1.77070×10^{-03}	1.18551×10^{-02}	8.57669×10^{-04}	5.74225×10^{-03}	1.43587×10^{-03}	9.61345×10^{-03}
4	2.49057×10^{-08}	3.39952×10^{-07}	9.16275×10^{-03}	1.25067×10^{-01}	5.20617×10^{-04}	7.10619×10^{-03}	2.40191×10^{-04}	3.27850×10^{-03}
5	1.88450×10^{-08}	5.59369×10^{-07}	1.21561×10^{-02}	3.60827×10^{-01}	3.95956×10^{-04}	1.17530×10^{-02}	6.68673×10^{-04}	1.98479×10^{-02}
6	1.28880×10^{-08}	8.66568×10^{-07}	1.04640×10^{-02}	7.03583×10^{-01}	7.15473×10^{-04}	4.81071×10^{-02}	2.96436×10^{-04}	1.99318×10^{-02}
7	1.15785×10^{-08}	1.81392×10^{-06}	7.29384×10^{-03}	$1.14266 \times 10^{+00}$	4.69021×10^{-04}	7.34778×10^{-02}	6.82055×10^{-05}	1.06852×10^{-02}
8	3.34880×10^{-08}	1.24783×10^{-05}	4.26900×10^{-03}	$1.59071 \times 10^{+00}$	1.29752×10^{-04}	4.83483×10^{-02}	1.28332×10^{-04}	4.78193×10^{-02}
9	1.40281×10^{-07}	1.26301×10^{-04}	1.92699×10^{-03}	$1.73495 \times 10^{+00}$	5.73337×10^{-05}	5.16200×10^{-02}	7.52180×10^{-05}	6.77220×10^{-02}
10	4.93446×10^{-07}	1.08688×10^{-03}	3.01115×10^{-04}	6.63250×10^{-01}	1.05502×10^{-04}	2.32384×10^{-01}	2.62279×10^{-05}	5.77709×10^{-02}

Entre as técnicas avaliadas, de acordo com a Figura 4.9 e Tabela 4.10, a inversão de $F_5(s)$ por Zakian mostrou um desempenho superior aos demais métodos, iniciando com erros absolutos na ordem de 10^{-13} e finalizando em 10^{-07} . Por sua vez, a inversão através de Stehfest apresentou erros absolutos na ordem de 10^{-08} no primeiro instante, e para os instantes seguintes, erros absolutos que variam, das ordens de 10^{-02} e 10^{-03} .

A inversão usando o método de Talbot produziu erros absolutos das ordens de 10^{-11} para $t = 0$, e 10^{-04} e 10^{-05} para os demais instantes, e, da inversão através de Talbot-Racional, os erros absolutos variam, das ordens de 10^{-03} , 10^{-04} e 10^{-05} , sendo maior no início do intervalo de tempo considerado.

• **Análise do parâmetro numérico N para a inversão de $F_5(s)$**

Conforme os resultados dos testes exibidos no Apêndice, com uma quantidade menor de termos do somatório, Stehfest demonstra boa precisão numérica. Sugere-se valores entre $N = 12$ e $N = 18$. Os erros absolutos são das ordens entre 10^{-13} e 10^{-04} . Apresenta resultados aceitáveis até $N = 24$.

Para Talbot confirma-se os valores indicados na literatura, de $N = 18$ até $N = 32$, com erro absolutos das ordens de 10^{-19} até 10^{-12} . A partir de $N = 80$, tem-se resultados não satisfatórios.

A inversão por Talbot-Racional apresentou bons resultados de $N = 18$ até $N = 50$, erros absolutos das ordens entre 10^{-19} até 10^{-10} . A partir de $N = 190$, os resultados se afastam da solução analítica.

4.1.6 Inversão de $F_6(s)$

Na Figura 4.10 apresenta-se um comparativo entre a transformada inversa analítica e a transformada inversa numérica de $F_6(s) = \frac{e^{-\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$, cuja inversa é $\mathcal{L}^{-1}\{F_6(s)\} = f_6(t) = \frac{e^{-\frac{1}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}$, através dos métodos de Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional. A Tabela 4.11 expressa os erros absoluto e relativo da inversão desta função a partir de cada método.

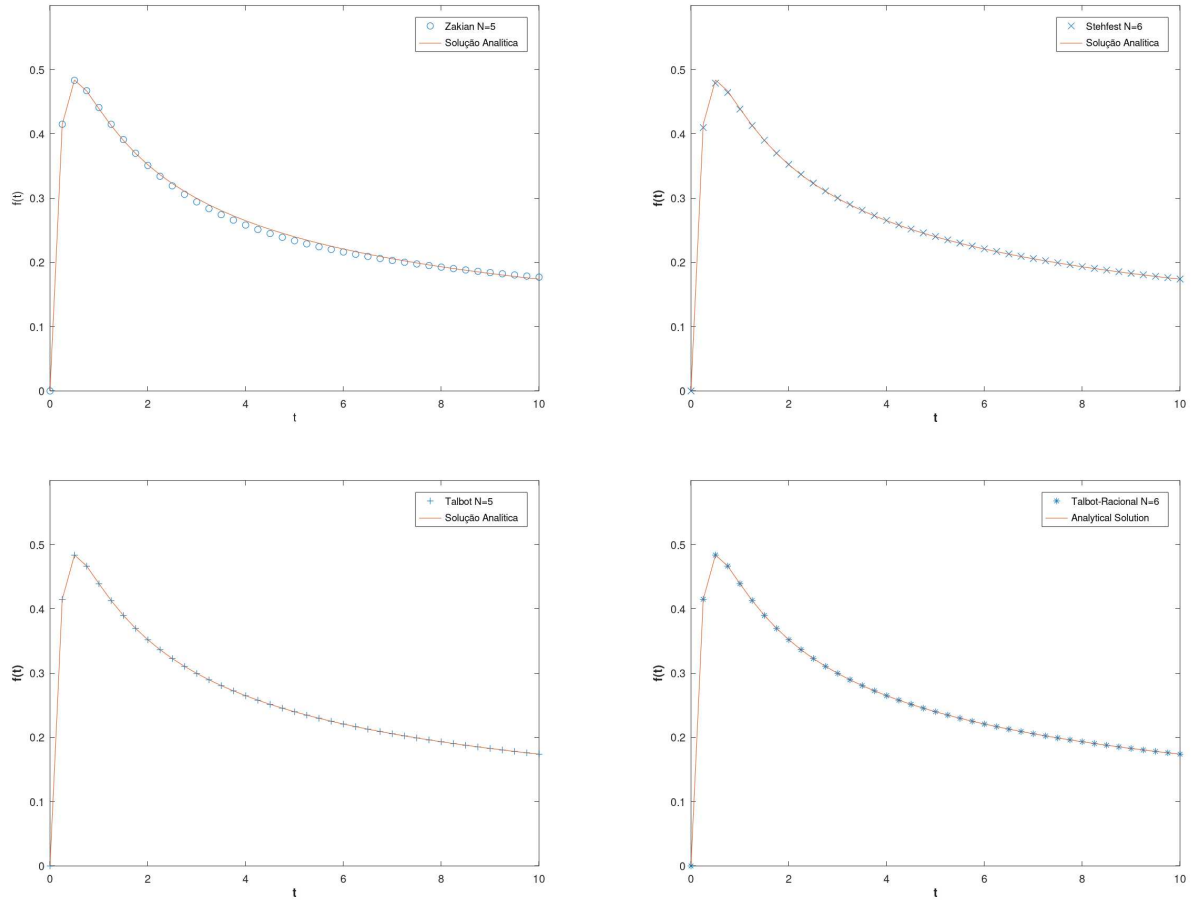


Figura 4.10: Comparativo dos métodos para $F_6(s)$.

Tabela 4.11: Erros absoluto e relativo da inversão de $F_6(s)$.

Método	Zakian		Stehfest		Talbot		Talbot-Racional	
Parâmetro	$N = 5$		$N = 6$		$N = 5$		$N = 6$	
t	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo
10^{-4}	—	—	—	—	—	—	—	—
1	1.75787×10^{-03}	4.00070×10^{-03}	7.94044×10^{-04}	1.80714×10^{-03}	1.30339×10^{-04}	2.96635×10^{-04}	1.00632×10^{-05}	2.29026×10^{-05}
2	1.09089×10^{-03}	3.09855×10^{-03}	5.80781×10^{-04}	1.64964×10^{-03}	1.01505×10^{-04}	2.88314×10^{-04}	1.13016×10^{-05}	3.21010×10^{-05}
3	5.38010×10^{-03}	1.79521×10^{-02}	5.98699×10^{-04}	1.99772×10^{-03}	8.09422×10^{-05}	2.70086×10^{-04}	8.53884×10^{-06}	2.84921×10^{-05}
4	6.75861×10^{-03}	2.55038×10^{-02}	5.00660×10^{-04}	1.88926×10^{-03}	6.50120×10^{-05}	2.45325×10^{-04}	5.31442×10^{-06}	2.00541×10^{-05}
5	6.14562×10^{-03}	2.56059×10^{-02}	4.10793×10^{-04}	1.71158×10^{-03}	5.25857×10^{-05}	2.19100×10^{-04}	2.42688×10^{-06}	1.01116×10^{-05}
6	4.55585×10^{-03}	2.06213×10^{-02}	3.40680×10^{-04}	1.54203×10^{-03}	4.27495×10^{-05}	1.93498×10^{-04}	1.11148×10^{-08}	5.03095×10^{-08}
7	2.58937×10^{-03}	1.25843×10^{-02}	2.87135×10^{-04}	1.39547×10^{-03}	3.48310×10^{-05}	1.69278×10^{-04}	2.04164×10^{-06}	9.92236×10^{-06}
8	5.59700×10^{-04}	2.89499×10^{-03}	2.45928×10^{-04}	1.27203×10^{-03}	2.83535×10^{-05}	1.46655×10^{-04}	3.73325×10^{-06}	1.93098×10^{-05}
9	1.37985×10^{-03}	7.54384×10^{-03}	2.13734×10^{-04}	1.16851×10^{-03}	2.29779×10^{-05}	1.25623×10^{-04}	5.14954×10^{-06}	2.81532×10^{-05}
10	3.16105×10^{-03}	1.81662×10^{-02}	1.88173×10^{-04}	1.08141×10^{-03}	1.84599×10^{-05}	1.06087×10^{-04}	6.34302×10^{-06}	3.64526×10^{-05}

Como observa-se na Figura 4.10 e Tabela 4.11, para inversão de funções da classe de $F_6(s)$, o método de Talbot-Racional apresentou melhor desempenho. No instante $t = 0$ tem-se um erro absoluto próximo a zero. Nos instantes seguintes, apresenta erros absolutos, em maioria, da ordem de 10^{-06} , enquanto que a inversão por Zakian, os erros absolutos são das ordens de 10^{-03} , exceto para $t = 0$ e $t = 8$.

Stehfest e Talbot, de maneira semelhante aos métodos anteriores, possibilitaram erros próximo a zero em $t = 0$, para os instantes seguintes a esse intervalo, Stehfest produz erros absolutos da ordem de 10^{-04} e Talbot das ordens de 10^{-04} e 10^{-05} .

- **Análise do parâmetro numérico N para a inversão de $F_6(s)$**

Pelo exposto nas tabelas do Apêndice, recomenda-se os valores de $N = 8$ até $N = 18$ para Stehfest. Erros absolutos variando entre as ordens de 10^{-04} e 10^{-07} . Resultados aceitáveis até $N = 24$.

Talbot forneceu resultados com boa precisão para valor entre $N = 18$ até $N = 32$. Apresenta erros absolutos variando entre as ordens de 10^{-12} e 10^{-14} . Após o valor de $N = 80$, tem-se desempenho não satisfatórios.

Para o método de Talbot-Racional indica-se valores entre $N = 18$ e $N = 50$, produz erros absolutos das ordens de 10^{-13} até 10^{-17} . A partir de $N = 180$, os resultados se afastam da solução analítica.

4.1.7 Inversão de $F_7(s)$

A Tabela 4.12 mostra os erros absoluto e relativo da inversão de $F_7(s) = e^{-\sqrt{s}}$ cuja inversa é $\mathcal{L}^{-1}\{F_7(s)\} = f_7(t) = \frac{e^{-\frac{1}{4t}}}{2\sqrt{\pi t^3}}$, através dos métodos de Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional. A Figura 4.11 evidencia um comparativo entre a transformada inversa analítica e a transformada inversa numérica desta função, a partir de cada método.

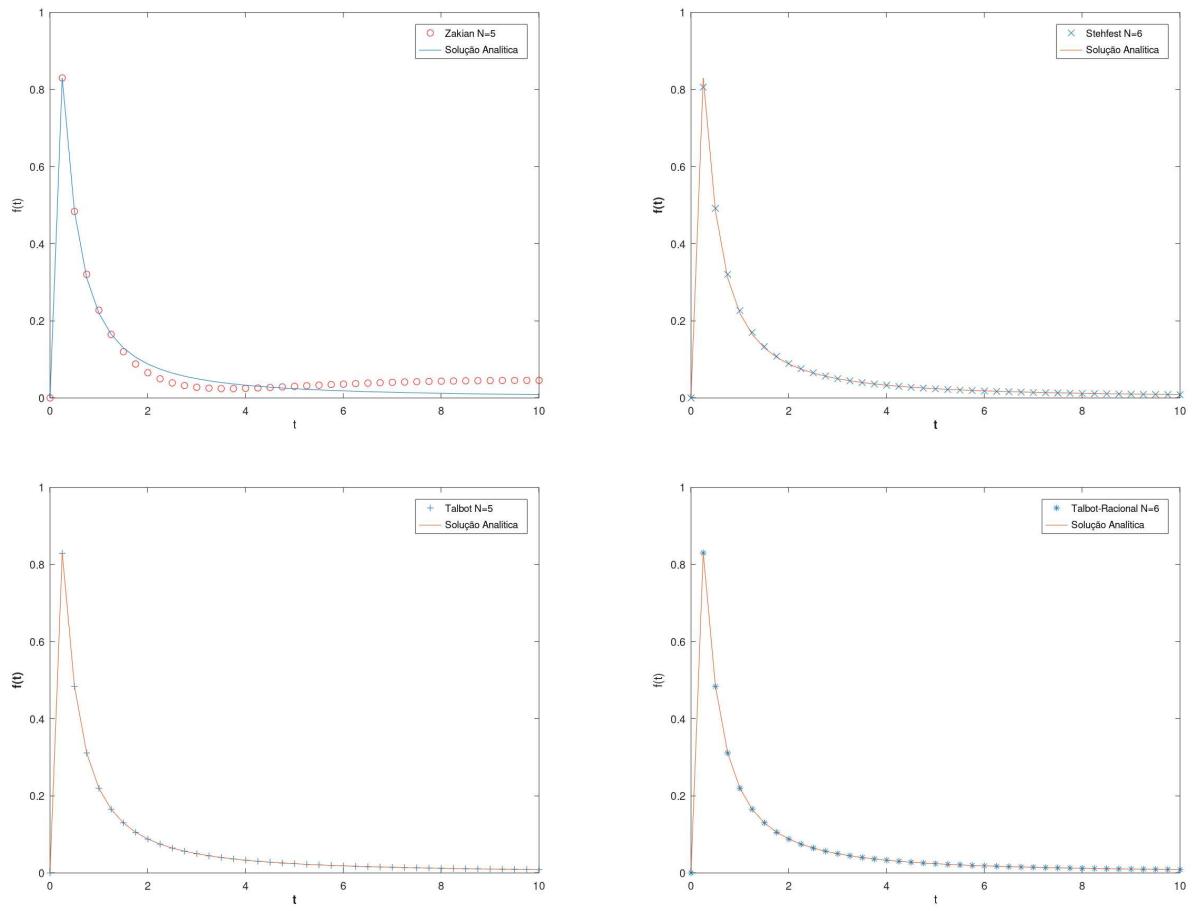


Figura 4.11: Comparativo dos métodos para $F_7(s)$.

Tabela 4.12: Erros absoluto e relativo da inversão de $F_7(s)$.

Método	Zakian		Stehfest		Talbot		Talbot-Racional	
Parâmetro	$N = 5$		$N = 6$		$N = 5$		$N = 6$	
t	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo
10^{-4}	—	—	—	—	—	—	—	—
1	7.99707×10^{-03}	3.64006×10^{-02}	7.18336×10^{-03}	3.26969×10^{-02}	5.03335×10^{-05}	2.29106×10^{-04}	2.13539×10^{-05}	9.71977×10^{-05}
2	2.26175×10^{-02}	2.56969×10^{-01}	1.52220×10^{-03}	1.72945×10^{-02}	8.08668×10^{-06}	9.18771×10^{-05}	4.19004×10^{-06}	4.76053×10^{-05}
3	2.21018×10^{-02}	4.42494×10^{-01}	9.63253×10^{-05}	1.92849×10^{-03}	2.73162×10^{-05}	5.46888×10^{-04}	1.09162×10^{-05}	2.18550×10^{-04}
4	8.18741×10^{-03}	2.47163×10^{-01}	2.90548×10^{-04}	8.77115×10^{-03}	4.70316×10^{-05}	1.41980×10^{-03}	1.94974×10^{-05}	5.88594×10^{-04}
5	6.18739×10^{-03}	2.57799×10^{-01}	3.87428×10^{-04}	1.61423×10^{-02}	5.74137×10^{-05}	2.39216×10^{-03}	2.41871×10^{-05}	1.00776×10^{-03}
6	1.76335×10^{-02}	9.57780×10^{-01}	3.92257×10^{-04}	2.13058×10^{-02}	6.26542×10^{-05}	3.4031×10^{-03}	2.66899×10^{-05}	1.44969×10^{-03}
7	2.58826×10^{-02}	$1.76104 \times 10^{+00}$	3.67150×10^{-04}	2.49808×10^{-02}	6.50125×10^{-05}	4.42343×10^{-03}	2.79366×10^{-05}	1.90080×10^{-03}
8	3.14607×10^{-02}	$2.60363 \times 10^{+00}$	3.33792×10^{-04}	2.76240×10^{-02}	6.57134×10^{-05}	5.43833×10^{-03}	2.84410×10^{-05}	2.35373×10^{-03}
9	3.49877×10^{-02}	$3.44308 \times 10^{+00}$	3.00104×10^{-04}	2.95327×10^{-02}	6.54437×10^{-05}	6.44021×10^{-03}	2.84970×10^{-05}	2.80435×10^{-03}
10	3.69940×10^{-02}	$4.25201 \times 10^{+00}$	2.68896×10^{-04}	3.09063×10^{-02}	6.46022×10^{-05}	7.42522×10^{-03}	2.82788×10^{-05}	3.25030×10^{-03}

Pelo exposto na Figura 4.11 e Tabela 4.12, em relação aos testes realizados para inverter a transformada de $F_7(s)$, constatou-se que os métodos de Stehfest, Talbot e Talbot-Racional proporcionaram melhores resultados. Stehfest produziu erros absolutos das ordens de 10^{-03} , 10^{-04} e 10^{-05} . Já para Talbot e Talbot-Racional, os erros absolutos são da ordem de 10^{-05} em praticamente todos os instantes.

A técnica de Zakian também apresentou no instante inicial erro absoluto próximo a zero, no entanto, para os instantes seguintes, erros absolutos em média na ordem 10^{-02} .

• **Análise do parâmetro numérico N para a inversão de $F_7(s)$**

Através das tabelas do Apêndice, nota-se que, Stehfest forneceu ótimo desempenho para valores de $N = 8$ a $N = 18$, apresentando erros absolutos variando entre as ordem de 10^{-04} e 10^{-07} . Resultados satisfatórios até $N = 24$.

Recomenda-se os valores entre $N = 18$ e $N = 40$ para a técnica de Talbot, com erros absolutos de próximo a zero até a ordem de 10^{-12} . A partir de $N = 84$, os resultados se afastam da solução analítica.

Para o método de Talbot-Racional indica-se os valores de $N = 24$ até $N = 32$, erros absolutos da ordem de zero até 10^{-14} . Após $N = 180$, nota-se um desempenho não satisfatório da técnica de inversão.

4.1.8 Inversão de $F_8(s)$

A Figura 4.12 exibe um comparativo através dos métodos de Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional, entre a transformada inversa analítica e a transformada inversa numérica de $F_8(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$, cuja inversa é $\mathcal{L}^{-1}\{F_8(s)\} = f_8(t) = e^{-2t}(e^t - 1)$. A Tabela 4.13 indica os erros absoluto e relativo da inversão desta função, a partir de cada método.

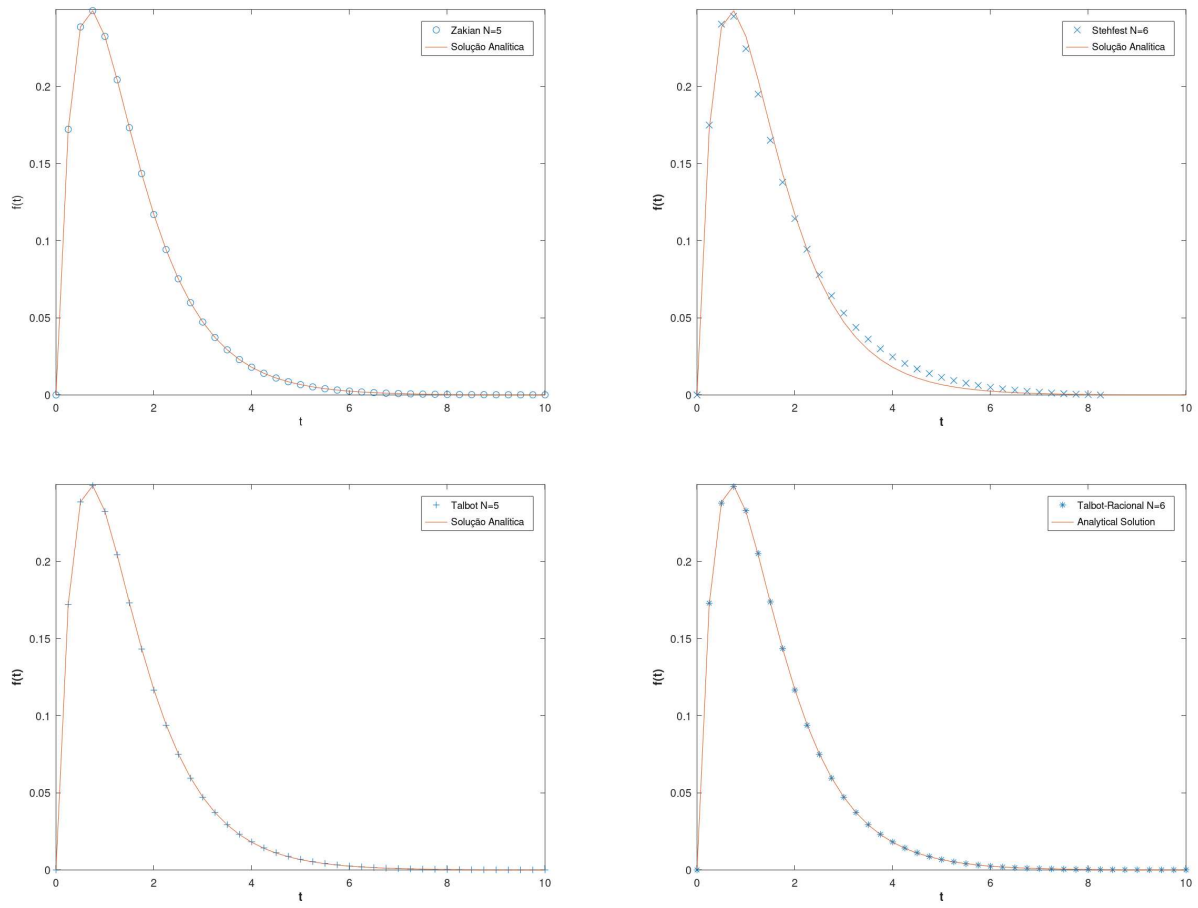


Figura 4.12: Comparativo dos métodos para $F_8(s)$.

Tabela 4.13: Erros absoluto e relativo da inversão de $F_8(s)$.

Método	Zakian		Stehfest		Talbot		Talbot-Racional	
Parâmetro	$N = 5$		$N = 6$		$N = 5$		$N = 6$	
t	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo
10^{-4}	3.31988×10^{-13}	3.31993×10^{-08}	2.13680×10^{-08}	2.13684×10^{-03}	6.48426×10^{-11}	6.48435×10^{-06}	2.18828×10^{-07}	2.18831×10^{-02}
1	1.83952×10^{-08}	7.91043×10^{-08}	7.99442×10^{-03}	3.43780×10^{-02}	5.73609×10^{-05}	2.46666×10^{-04}	4.13986×10^{-04}	1.78024×10^{-03}
2	2.00699×10^{-08}	1.71509×10^{-07}	2.63576×10^{-03}	2.25240×10^{-02}	4.15470×10^{-04}	3.55043×10^{-03}	3.32205×10^{-04}	2.83888×10^{-03}
3	1.57031×10^{-08}	3.31933×10^{-07}	5.78403×10^{-03}	1.22262×10^{-01}	1.35128×10^{-04}	2.85632×10^{-03}	1.30773×10^{-04}	2.76428×10^{-03}
4	1.20866×10^{-08}	6.72219×10^{-07}	6.75067×10^{-03}	3.75450×10^{-01}	2.33827×10^{-04}	1.30047×10^{-02}	1.73209×10^{-04}	9.63335×10^{-03}
5	4.56561×10^{-08}	6.82193×10^{-06}	4.73308×10^{-03}	7.07217×10^{-01}	2.40749×10^{-04}	3.59727×10^{-02}	7.81329×10^{-05}	1.16746×10^{-02}
6	3.34262×10^{-07}	1.35186×10^{-04}	2.50528×10^{-03}	$1.01321 \times 10^{+00}$	1.11943×10^{-04}	4.52732×10^{-02}	1.98278×10^{-05}	8.01900×10^{-03}
7	1.64832×10^{-06}	1.80925×10^{-03}	8.66396×10^{-04}	9.50986×10^{-01}	8.47163×10^{-06}	9.29875×10^{-03}	3.25933×10^{-05}	3.57756×10^{-02}
8	5.81404×10^{-06}	1.73372×10^{-02}	1.57395×10^{-04}	4.69345×10^{-01}	3.36859×10^{-05}	1.00450×10^{-01}	1.62148×10^{-05}	4.83518×10^{-02}
9	1.60608×10^{-05}	1.30158×10^{-01}	7.29271×10^{-04}	$5.91007 \times 10^{+00}$	3.67968×10^{-05}	2.98204×10^{-01}	3.02387×10^{-06}	2.45057×10^{-02}
10	3.69711×10^{-05}	8.14380×10^{-01}	1.00992×10^{-03}	$2.22460 \times 10^{+01}$	2.64633×10^{-05}	5.82920×10^{-01}	3.03792×10^{-06}	6.69177×10^{-02}

Um ótimo desempenho do método de Zakian se verifica na inversão de funções da classe de $F_8(s)$, apresentando erros absolutos da ordem de 10^{-13} no primeiro instante, e para os instantes seguintes a esse intervalo, erros absolutos variando entre as ordens de 10^{-08} e 10^{-05} , respectivamente (Figura 4.12 e Tabela 4.13).

Por sua vez, usando Stehfest, tem-se erros absolutos iniciando em 10^{-08} e finalizando em 10^{-03} . Talbot produz para o instante inicial erro absoluto da ordem de 10^{-11} , e para os instantes seguintes, erros absolutos das ordens de 10^{-04} e 10^{-05} . Na inversão através de Talbot-Racional, os erros absolutos variam, das ordens de 10^{-07} e 10^{-04} .

• **Análise do parâmetro numérico N para a inversão de $F_8(s)$**

Com base nos resultados divulgados no Apêndice, indica-se os valores entre $N = 12$ e $N = 18$ para o método de Stehfest. Erros absolutos variando entre as ordens de 10^{-12} e 10^{-04} . Desempenho satisfatório até $N = 24$.

Sugere-se para Talbot os valores indicados na literatura, de $N = 18$ até $N = 32$, com erros absolutos entre as ordens de 10^{-17} e 10^{-12} . Resultados aceitáveis até $N = 90$.

Para Talbot-Racional recomenda-se valores de de $N = 24$ a $N = 32$. Tem-se erros absolutos entre as ordens de 10^{-17} e 10^{-14} . A partir de $N = 180$, os resultados se afastam da solução analítica.

4.1.9 Inversão de $F_9(s)$

A Tabela 4.14 revela, os erros absoluto e relativo da inversão de $F_9(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$, cuja inversa é $\mathcal{L}^{-1}\{F_9(s)\} = f_9(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-0.5t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$, através dos métodos de Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional. A Figura 4.13 expõe um comparativo, entre a transformada inversa analítica e a transformada inversa numérica desta função, a partir de cada método.

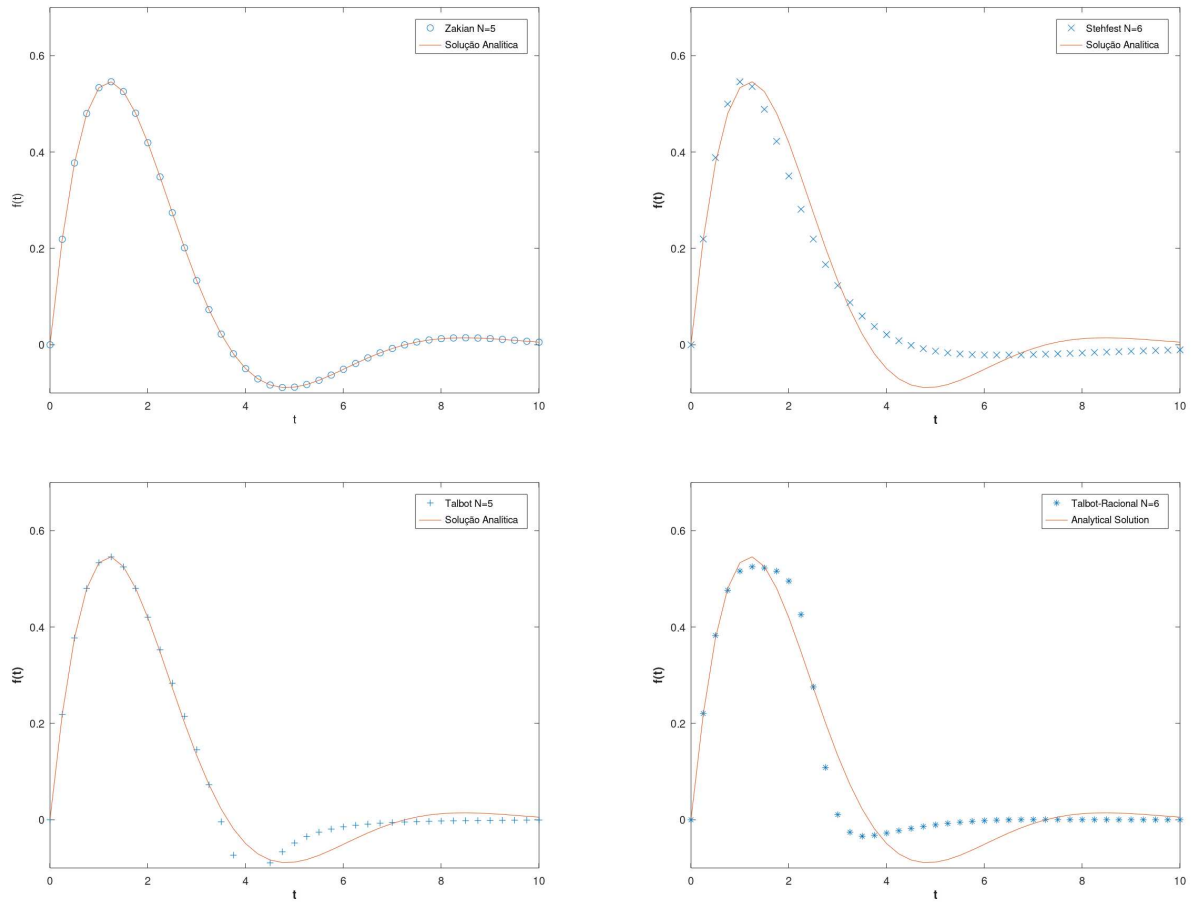


Figura 4.13: Comparativo dos métodos para $F_9(s)$.

Tabela 4.14: Erros absoluto e relativo da inversão de $F_9(s)$.

Método	Zakian		Stehfest		Talbot		Talbot-Racional	
Parâmetro	$N = 5$		$N = 6$		$N = 5$		$N = 6$	
t	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo
10^{-4}	3.31890×10^{-13}	3.31892×10^{-08}	2.13622×10^{-08}	2.13623×10^{-03}	6.48433×10^{-11}	6.48436×10^{-06}	2.18856×10^{-07}	2.18857×10^{-02}
1	2.67652×10^{-08}	5.01685×10^{-08}	1.21683×10^{-02}	2.28082×10^{-02}	5.73257×10^{-05}	1.07450×10^{-04}	1.74323×10^{-02}	3.26750×10^{-02}
2	4.14197×10^{-08}	9.87879×10^{-08}	6.90115×10^{-02}	1.64595×10^{-01}	9.19329×10^{-04}	2.19263×10^{-03}	7.61547×10^{-02}	1.81632×10^{-01}
3	4.58901×10^{-08}	3.44410×10^{-07}	1.03181×10^{-02}	7.74391×10^{-02}	1.22272×10^{-02}	9.17666×10^{-02}	1.22627×10^{-01}	9.20329×10^{-01}
4	4.27834×10^{-08}	8.63790×10^{-07}	7.06214×10^{-02}	$1.42583 \times 10^{+00}$	6.18044×10^{-02}	$1.24782 \times 10^{+00}$	2.18995×10^{-02}	2.18995×10^{-01}
5	3.47989×10^{-08}	3.95701×10^{-07}	7.47859×10^{-02}	8.50396×10^{-01}	3.98027×10^{-02}	4.52600×10^{-01}	7.73948×10^{-02}	8.80062×10^{-01}
6	2.42468×10^{-08}	4.76434×10^{-07}	2.97899×10^{-02}	5.85352×10^{-01}	3.61843×10^{-02}	7.10998×10^{-01}	4.90981×10^{-02}	9.64745×10^{-01}
7	1.73436×10^{-08}	2.26900×10^{-06}	1.25615×10^{-02}	$1.64338 \times 10^{+00}$	1.90513×10^{-03}	2.49241×10^{-01}	7.93064×10^{-03}	$1.03753 \times 10^{+00}$
8	5.97240×10^{-08}	4.69710×10^{-06}	2.96448×10^{-02}	$2.33147 \times 10^{+00}$	1.53062×10^{-02}	$1.20378 \times 10^{+00}$	1.25257×10^{-02}	9.85111×10^{-01}
9	2.88980×10^{-07}	2.25683×10^{-05}	2.62869×10^{-02}	$2.05292 \times 10^{+00}$	1.40374×10^{-02}	$1.09627 \times 10^{+00}$	1.27823×10^{-02}	9.98259×10^{-01}
10	5.62129×10^{-07}	1.04378×10^{-04}	1.58990×10^{-02}	$2.95219 \times 10^{+00}$	5.97456×10^{-03}	$1.10938 \times 10^{+00}$	5.42405×10^{-03}	$1.00716 \times 10^{+00}$

Pode-se observar, de acordo com a Figura 4.13 e Tabela 4.14, que Zakian, entre os métodos testados, melhor aproxima a transformada inversa de funções da classe de $F_9(s)$, apresentando erros absolutos iniciando em 10^{-13} e finalizando em 10^{-07} .

Quanto a inversão através de Stehfest, os erros absolutos são da ordem de 10^{-08} no primeiro instante e 10^{-02} nos instantes seguintes. Talbot produziu erro absoluto da ordem de 10^{-11} para $t = 10^{-04}$, e para os outros valores de t , erros absolutos entre as ordens de 10^{-05} e 10^{-02} . Talbot-Racional resulta em erros absolutos variando entre as ordens de 10^{-07} e 10^{-01} .

- **Análise do parâmetro numérico N para a inversão de $F_8(s)$**

Conforme verificado no Apêndice, recomenda-se valores de $N = 12$ até $N = 18$ para Stehfest. Erros absolutos entre as ordens de 10^{-12} e 10^{-03} . Após $N = 24$, os resultados se afastam da solução analítica.

Para o método de Talbot, indica-se os valores entre $N = 18$ e $N = 32$, os absolutos variam das ordens de 10^{-19} e 10^{-08} . Desempenho satisfatório até $N = 90$.

Sugere-se para Talbot-Racional, os valores de $N = 32$ até $N = 50$, com erros absolutos entre as ordens de 10^{-19} e 10^{-08} . Resultados aceitáveis até $N = 190$.

4.1.10 Discussão dos resultados para os testes das funções elementares

Com base nos resultados obtidos, conclui-se que o método de Zakian gerou melhores resultados na maioria dos testes realizados mesmo com um número reduzido para N . Verifica-se um bom desempenho através dessa técnica para a inversão das funções das classes de $F_1(s)$, $F_2(s)$ (com $a = 0.5$ e $a = 2$), $F_3(s)$ (com $a = 0.5$ e $a = 1$), $F_4(s)$, $F_5(s)$, $F_8(s)$ e $F_9(s)$. No entanto, nota-se um resultado não satisfatório para inversão de funções das classes $F_2(s)$ e $F_3(s)$ para elevados valores de a , e para $F_6(s)$ e $F_7(s)$.

O método de Stehfest, apresentou bom desempenho para funções das classes de $F_1(s)$, $F_2(s)$, $F_6(s)$ e $F_7(s)$. Entretanto, para transformadas de funções trigonométricas, funções com comportamento oscilatório ($F_3(s)$ e $F_4(s)$), função exponencial ($F_8(s)$) e função exponencial decrescente multiplicada por uma função polinomial ou função trigonométrica ($F_5(s)$ e $F_9(s)$), essa técnica, considerando $N = 6$, não é a mais indicada.

Entre as técnicas avaliadas, Talbot, de forma geral, funciona bem na inversão da maioria das funções consideradas, com exceção de transformadas de funções das classes de $F_3(s)$, $F_4(s)$ e $F_9(s)$.

Talbot-Racional comportou-se de maneira semelhante a Talbot, apresenta excelente precisão para o tratamento de funções das classes de $F_2(s)$, $F_5(s)$, $F_6(s)$, $F_7(s)$, e $F_8(s)$.

Diante dos resultados do estudo comparativo exposto neste capítulo, foi possível observar, que não existe um método numérico completamente satisfatório para inverter uma classe geral de funções transformadas. Além disso, pode-se considerar que as técnicas de inversão da Transformada de Laplace investigadas, apresentaram desempenho satisfatório mesmo para um

número reduzido de termos no somatório. Para as técnicas de Stehfest, Talbot e Talbot-Racional, um aumento no valor de N acarreta um melhor desempenho, conforme apresentado no Apêndice.

4.2 Testes para um conjunto de funções especiais - estudo preliminar

Nesta seção, são apresentados os resultados obtidos para a inversão numérica das funções exibidas na Tabela 4.15, (Abate and Valkó, 2004), através dos métodos de Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional. Tais testes tem como objetivo avaliar o potencial de inversão dessas técnicas, quando aplicadas a funções ditas especiais, cuja inversa analítica não é facilmente obtida. As soluções numéricas obtidas são apresentadas na forma de tabelas e representadas graficamente.

Com respeito aos valores do parâmetro N , que representa o número de termos do somatório de cada método, aplicou-se $N = 5$ para Zakian, valor máximo de termos utilizado pela técnica. Para Stehfest, Talbot e Talbot-Racional, o melhor valor em cada caso, foi determinado empiricamente. Foram realizados diversos testes para cada função, usando diferentes valores para N . A partir de tais testes, baseados na concordância obtida com os perfis gerados, foram selecionados os valores do parâmetro para os quais a inversão forneceu melhor concordância em números de dígitos significativos.

Tabela 4.15: Transformada de Laplace

$F(s)$
$F_{10}(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2 - \frac{s}{2}\sqrt{s^2 - 1}}}$
$F_{11}(s) = \frac{\sqrt{s+1}}{2\sqrt{s}\sqrt{1 + \frac{2s}{5}}}$
$F_{12}(s) = \frac{1}{s}e^{-sF_{11}(s)}$

4.2.1 Inversão de $F_{10}(s)$

A Figura 4.14 e a Tabela 4.16 exibem a solução numérica através dos métodos de Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional da inversão de $F_{10}(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2 - \frac{s}{2}\sqrt{s^2 - 1}}}$.

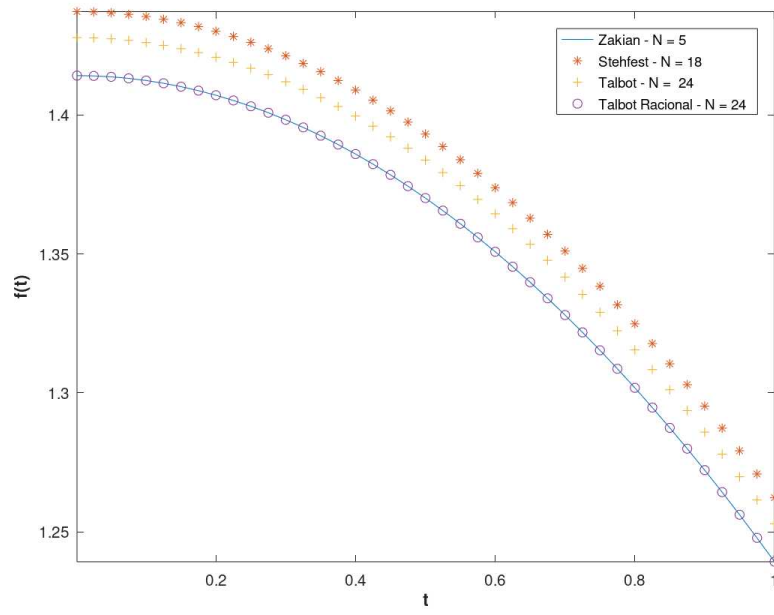


Figura 4.14: Soluções numérica da inversão através dos métodos de Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional de $F_{10}(s)$.

Tabela 4.16: Solução numérica da inversão de $F_{10}(s)$.

Método	Zakian	Stehfest	Talbot	Talbot-Racional
Parâmetro	$N = 5$	$N = 18$	$N = 24$	$N = 24$
t				
10^{-4}	1.41421	1.41421	1.42788	1.43724
1	1.41244	1.41244	1.42612	1.43547
2	1.40714	1.40714	1.42082	1.43017
3	1.39831	1.39832	1.41199	1.42134
4	1.38597	1.38597	1.39965	1.40900
5	1.37013	1.37012	1.38381	1.39316
6	1.35081	1.35080	1.36448	1.37384
7	1.32802	1.32802	1.34170	1.35106
8	1.30181	1.30182	1.31549	1.32485
9	1.27220	1.27222	1.28588	1.29524
10	1.23923	1.23928	1.25291	1.26227

Note que, de acordo com a Figura 4.14 e Tabela 4.16, os resultados para Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional, concordam em uma casa decimal. Entretanto, comparando as técnicas de Zakian e Stehfest, a concordância ocorre em todas as casas decimais apresentadas no trabalho, eventualmente um número a mais ou a menos no último dígito.

4.2.2 Inversão de $F_{11}(s)$

A Figura 4.15 e a Tabela 4.17 apontam a solução numérica através dos métodos de Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional da inversão de $F_{11}(s) = \frac{\sqrt{s+1}}{2\sqrt{s}\sqrt{1+\frac{2s}{5}}}$.

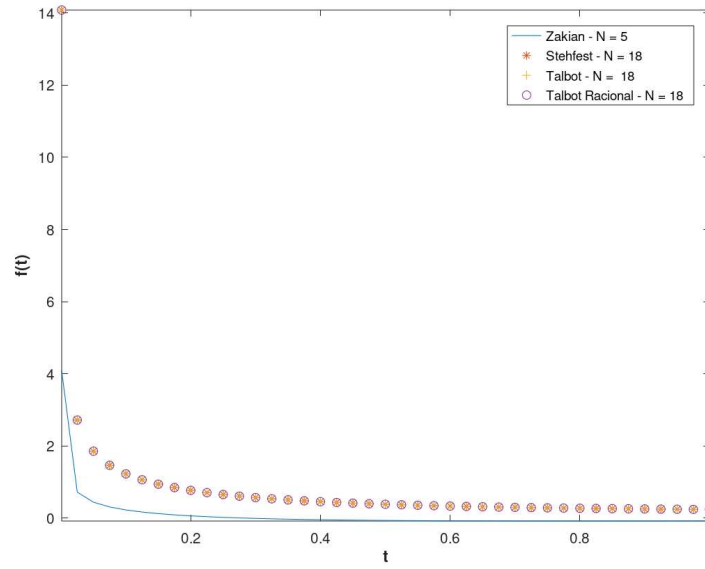


Figura 4.15: Soluções numérica da inversão através dos métodos de Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional de $F_{11}(s)$.

Tabela 4.17: Solução numérica da inversão de $F_{11}(s)$.

Método	Zakian	Stehfest	Talbot	Talbot-Racional
Parâmetro	$N = 5$	$N = 18$	$N = 18$	$N = 18$
t				
10^{-4}	$4.08890 \times 10^{+00}$	$1.40835 \times 10^{+01}$	$1.40836 \times 10^{+01}$	$1.40836 \times 10^{+01}$
1	2.26751×10^{-01}	$1.22639 \times 10^{+00}$	$1.22640 \times 10^{+00}$	$1.22640 \times 10^{+00}$
2	6.27911×10^{-02}	7.69784×10^{-01}	7.69789×10^{-01}	7.69789×10^{-01}
3	-7.88591×10^{-03}	5.69481×10^{-01}	5.69485×10^{-01}	5.69485×10^{-01}
4	-4.44896×10^{-02}	4.55625×10^{-01}	4.55624×10^{-01}	4.55624×10^{-01}
5	-6.42242×10^{-02}	3.83174×10^{-01}	3.83176×10^{-01}	3.83176×10^{-01}
6	-7.45145×10^{-02}	3.33980×10^{-01}	3.33983×10^{-01}	3.33983×10^{-01}
7	-7.92008×10^{-02}	2.99065×10^{-01}	2.99067×10^{-01}	2.99067×10^{-01}
8	-8.04766×10^{-02}	2.73428×10^{-01}	2.73429×10^{-01}	2.73429×10^{-01}
9	-7.96701×10^{-02}	2.54056×10^{-01}	2.54060×10^{-01}	2.54060×10^{-01}
10	-7.76146×10^{-02}	2.39044×10^{-01}	2.39051×10^{-01}	2.39051×10^{-01}

Na inversão de funções da classe de $F_{11}(s)$, como pode ser visto na Figura 4.15 e Tabela 4.17, os métodos de Stehfest, Talbot e Talbot-Racional apresentam concordância em quatro casas decimais. Comparando os resultados de Talbot e Talbot-Racional, verificou-se uma concordância de cinco casas decimais. Por sua vez, Zakian não apresenta bons resultados.

4.2.3 Inversão de $F_{12}(s)$

A Figura 4.16 e a Tabela 4.18 apresentam a solução numérica através dos métodos de Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional da inversão de $F_{12}(s) = \frac{1}{s}e^{-sF_{11}(s)}$.

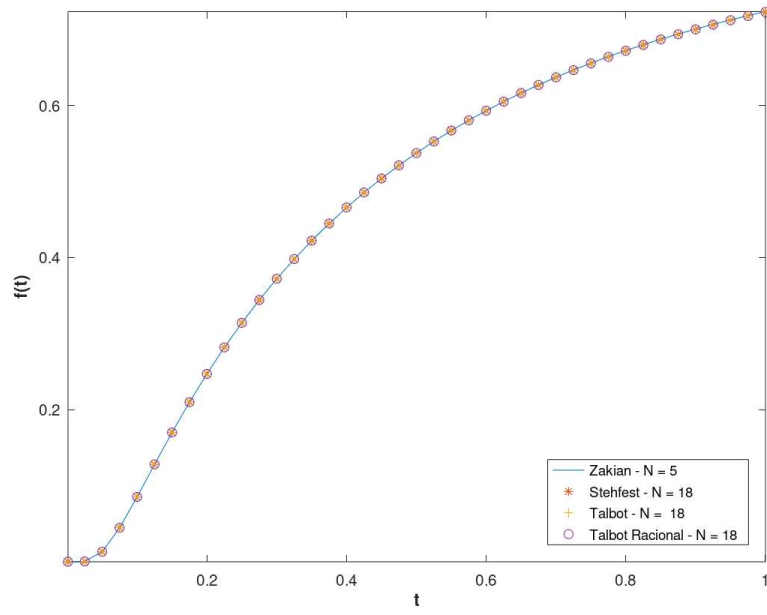


Figura 4.16: Soluções numérica da inversão através dos métodos de Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional de $F_{12}(s)$.

Tabela 4.18: Solução numérica da inversão de $F_{12}(s)$.

Método	Zakian	Stehfest	Talbot	Talbot-Racional
Parâmetro	$N = 5$	$N = 18$	$N = 18$	$N = 18$
t				
10^{-4}	4.62361×10^{-35}	1.12628×10^{-14}	1.65659×10^{-28}	2.40470×10^{-21}
1	8.52724×10^{-02}	8.52739×10^{-02}	8.52749×10^{-02}	8.52749×10^{-02}
2	2.47111×10^{-01}	2.47095×10^{-01}	2.47094×10^{-01}	2.47094×10^{-01}
3	3.72052×10^{-01}	3.72095×10^{-01}	3.72095×10^{-01}	3.72095×10^{-01}
4	4.65741×10^{-01}	4.65843×10^{-01}	4.65843×10^{-01}	4.65843×10^{-01}
5	5.37379×10^{-01}	5.37447×10^{-01}	5.37448×10^{-01}	5.37448×10^{-01}
6	5.93144×10^{-01}	5.93100×10^{-01}	5.93101×10^{-01}	5.93101×10^{-01}
7	6.37146×10^{-01}	6.36956×10^{-01}	6.36956×10^{-01}	6.36956×10^{-01}
8	6.72236×10^{-01}	6.71903×10^{-01}	6.71903×10^{-01}	6.71903×10^{-01}
9	7.00469×10^{-01}	7.00018×10^{-01}	7.00018×10^{-01}	7.00018×10^{-01}
10	7.23368×10^{-01}	7.22836×10^{-01}	7.22835×10^{-01}	7.22835×10^{-01}

A Figura 4.16 e Tabela 4.18 mostram os resultados da inversão de $F_{12}(s)$. Observa-se que para $t = 10^{-4}$ os métodos não fornecem entre si resultados comparáveis. Por outro lado, para os demais valores de t , os métodos concordam em, pelo menos, um dígito significativo. Entre Zakian e Stehfest, dependendo do valor de t , a concordância ficou entre um e três dígitos decimais. Já Talbot e Talbot-Racional apresentam concordância em todas as casas decimais apresentadas no trabalho.

4.2.4 Discussão dos resultados para os testes das funções especiais

Com base nos resultados obtidos, conclui-se que, para inversão de funções da classe de $F_{10}(s)$, os métodos de Zakian e Stehfest mostram maior concordância em dígitos significativos. Na inversão de $F_{11}(s)$, Talbot e Talbot-Racional geraram perfis de soluções iguais. A inversão de $F_{12}(s)$, produziu a melhor concordância entre os quatro métodos testados, no entanto, novamente Talbot e Talbot-Racional apontam maior concordância em número de casas decimais.

Nos capítulos a seguir, estão a descrição do problema de difusão de mercúrio na água e sua solução analítica empregando a Transformada de Laplace, assim como, os resultados da inversão numérica através dos métodos Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional.

5 APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE NA OBTENÇÃO DA SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE DIFUSÃO DO MERCÚRIO NA ÁGUA

A Revolução Industrial, no século XVIII, levou a uma aceleração dos avanços tecnológicos, em escala, cada vez maior e extravagante. Esta aceleração, o estilo de vida do homem, bem como a utilização desenfreada dos recursos naturais, vem ocasionando ao mundo um desequilíbrio, causando uma intensa crise socioambiental (Robledo and Pereira, 2015). Neste contexto, as perspectivas sobre o futuro do planeta não são nada animadoras, o que vem causando muita preocupação. Diante disso, governantes procuram meios para a conscientização da população sobre a importância dos cuidados com o meio ambiente e da preservação da natureza. Segundo D’Ambrósio (1997), a sobrevivência da Terra está ameaçada, tornando-se uma preocupação central e imediata.

Um dos maiores problemas ambientais, que o mundo moderno enfrenta, é o consumo de materiais eletrônicos e o descarte de seus rejeitos. Os resíduos tecnológicos são um dos grandes passivos ambientais da atualidade. No Brasil, existem poucos sistemas adequados para a coleta ou tratamento de tais substâncias. A grande preocupação é que esses detritos acarretam sérios danos aos sistemas ecológicos e à saúde humana, em consequência da sua liberação, posto que, são fontes de metais pesados, em especial o mercúrio (Nascimento and Chasin, 2001).

O mercúrio é um metal líquido nobre e tóxico, sob condições normais, é encontrado em baixas concentrações na natureza. No entanto, a contaminação ambiental por esse elemento é resultado de ações antrópicas. O descarte irresponsável desse poluente, bem como o lançamento da forma gasosa no ambiente, de maneira descontrolada, podem ser extremamente prejudiciais para a saúde humana. A forma orgânica do mercúrio (metilmercúrio) é considerada a mais tóxica (da Silva et al., 2017).

Conforme da Silva et al. (2017), na década de 1960, o que levou à consciência pública para as consequências do mercúrio e de seus compostos, foi o desastre ambiental no Japão onde, por mais de vinte anos, foram lançados, em sua forma orgânica, diretamente na baía de Minamata. No entanto, essa conscientização não foi o bastante, visto que, apesar da modernidade tecnológica e do avanço das leis de proteção do ambiente, esse poluente ainda é utilizado em processos e produtos, e descartado, em alguns casos, de forma incorreta em todo o mundo. Baterias, computadores, interruptores, lâmpadas fluorescentes, cosméticos, barômetros, higrômetros, manômetros, termômetros, esfigmomanômetros, pesticidas, biocidas, antissépticos e o amálgama dentário utilizam mercúrio. Além disso, está presente na produção de cloro-álcalis e de acetaldeído.

Ainda segundo da Silva et al. (2017), uma vez que o mercúrio é liberado na natureza, não há controle de seu comportamento, tornando-se uma ameaça às várias formas de vida no meio ambiente. Encontram-se altos níveis desse elemento tanto em peixes de água doce e

salgada, quanto em pessoas que ingerem pescado regularmente, dado que, testes genotóxicos revelam mutações, responsáveis pelo surgimento de cânceres. Há chances de o surgimento do câncer por exposição estar relacionado à capacidade do mercúrio de afetar o sistema imunológico. Também causam danos que variam, podendo, por exemplo, ir desde o deficit de atenção, cegueira, surdez, atrofia muscular, retardo mental, até a morte.

Diante do exposto, a crescente busca por estudos sobre o assunto visa oferecer possíveis soluções para este problema ambiental. A matemática tem um papel primordial nesse sentido, pois pode contribuir, decisivamente, através da modelagem matemática de fenômenos, na previsão e na tomada de decisões eficazes e rápidas, crucial em caso de descargas acidentais no meio aquático. Pode-se modelar matematicamente a concentração de poluentes na água, através de Equações Diferenciais (ED).

Tal modelagem também viabiliza participar do mundo real com capacidade de influenciar mudanças significativas em busca de um mundo ecologicamente sustentável (Bassanezi, 2002). Entre os trabalhos a respeito dessa temática, está o de Conza (2017), no qual a autora faz a modelagem matemática da propagação do poluente mercúrio na água. O modelo numérico é dado por um conjunto de Equações Diferenciais Parciais. A solução analítica da equação de concentração foi obtida com a Transformada de Laplace.

Segundo Conza (2017), o modelo matemático bidimensional para o espalhamento do mercúrio em água, levando em consideração as equações de continuidade, quantidade de movimento e concentração da espécie é dado por:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{Pe_x} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{1}{Pe_y} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D, \quad (5.1)$$

onde C é a concentração do poluente (mercúrio) na água, u a velocidade média da água (onde o sistema de coordenadas foi escolhido, de forma que a velocidade está na direção de x), t o tempo, D o termo fonte, Pe_x e Pe_y , os números Péclet relativos ao coeficiente de difusão e às direções x e y , respectivamente.

Neste trabalho, assumem-se as hipóteses:

- (i) regime permanente, diz-se que

$$\frac{\partial C}{\partial t} = 0,$$

- (ii) o termo de concentração é suficientemente grande comparado a difusão na direção x , logo

$$\frac{1}{Pe_x} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \approx 0.$$

Então, reescreve-se a Eq. (5.1) como:

$$u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{Pe_y} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D. \quad (5.2)$$

onde $Pe_y = \frac{VL}{k_y}$ e $Re = \frac{VL}{\nu}$ número de Reynolds.

5.1 Solução analítica do problema

Nesta seção apresenta-se a solução analítica da equação governante dada em Eq. (5.2), sujeita as seguintes condições, expressas por:

$$C(0, y) = 0; \quad (5.3)$$

$$C(x, 0) = \mathcal{H}(x - 0.25) - \mathcal{H}(x - 0.3); \quad (5.4)$$

$$C\left(x, \frac{1}{10}\right) = 0, \quad (5.5)$$

onde $\mathcal{H}(x - 0.25) - \mathcal{H}(x - 0.3)$ é a função Heaviside, representada por:

$$\mathcal{H}(x - 0.25) - \mathcal{H}(x - 0.3) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 0.25; \\ 1 & \text{se } 0.25 \leq x < 0.3; \\ 0 & \text{se } x \geq 0.3. \end{cases}$$

A solução analítica deste problema será obtida por Transformada de Laplace aplicada a variável x (visto que $x > 0$ caracteriza o meio como semi-infinito) e será feita em seis etapas como descritas a seguir.

(i) Primeira etapa.

Aplica-se a Transformada de Laplace na Eq.(5.2) com relação a variável x . Considera-se a notação

$$\mathcal{L}\{C(x, y)\} = \hat{C}(s, y),$$

onde $\hat{C}(s, y)$ representa a Transformada de Laplace de $C(x, y)$. Uma vez que u , $\frac{1}{Pe_y}$ e D são constantes, aplica-se a propriedade da linearidade, expressa no Teorema 10.2 do Anexo, obtendo-se:

$$u\mathcal{L}\left\{\frac{\partial C(x, y)}{\partial x}\right\} = \frac{1}{Pe_y}\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 C(x, y)}{\partial y^2}\right\} + D\mathcal{L}\{1\}. \quad (5.6)$$

Calculando-se cada uma das transformadas indicadas na Eq.(5.6), tem-se:

1. A Transformada de Laplace do primeiro termo da Eq.(5.6) é:

$$u\mathcal{L}\left\{\frac{\partial C(x, y)}{\partial x}\right\} = u[s\hat{C}(s, y) - C(0, y)].$$

Como Eq.(5.3) é nula, obtém-se

$$u\mathcal{L}\left\{\frac{\partial C(x,y)}{\partial x}\right\} = u[s\hat{C}(s,y)].$$

Note que se tem um novo domínio: o domínio de (x, y) foi transformado no domínio de Laplace (s, y) .

2. A Transformada de Laplace do segundo termo da Eq.(5.6) pode ser escrita como:

$$\frac{1}{Pe_y}\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 C(x,y)}{\partial y^2}\right\} = \frac{1}{Pe_y}\frac{\partial \hat{C}(s,y)}{\partial y^2}.$$

3. A Transformada de Laplace do terceiro termo da Eq.(5.6) é dada por:

$$D\mathcal{L}\{1\} = \frac{D}{s}.$$

O problema transformado, pela aplicação da Transformada de Laplace na variável x em cada termo da Eq.(5.2), é então reescrito como:

$$us\hat{C}(s,y) = \frac{1}{Pe_y}\frac{\partial^2 \hat{C}(s,y)}{\partial y^2} + \frac{D}{s}. \quad (5.7)$$

(ii) **Segunda etapa.**

Aplica-se a Transformada de Laplace nas condições de fronteira Eq.(5.4) e Eq.(5.5).

1. Condição Eq.(5.4).

A Transformada de Laplace da função Heaviside, vista na Eq.(10.13) do Anexo, é dada por

$$\mathcal{L}\{f(x-a)\mathcal{H}(x-a)\} = e^{-as}F(s), \quad (5.8)$$

onde $\mathcal{H}(x-0, 25) - \mathcal{H}(x-0, 3)$ é a função Heaviside, o que implica em:

$$\mathcal{H}(x-0, 25) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, 25 \\ 0 & \text{se } x < 0, 25 \end{cases}, \quad (5.9)$$

$$\mathcal{H}(x-0, 3) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0, 3 \\ 0 & \text{se } x > 0, 3. \end{cases} \quad (5.10)$$

Aplicam-se as propriedades da linearidade da Transformada de Laplace, conforme Teorema 10.2 do Anexo, em Eq.(5.9) e Eq.(5.10), logo

$$\mathcal{L}\{C(x,0)\} = \mathcal{L}\{\mathcal{H}(x-0, 25)\} - \mathcal{L}\{\mathcal{H}(x-0, 3)\}.$$

Como,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s},$$

substituindo-se em Eq.(5.8) chega-se a,

$$\hat{C}(s, 0) = e^{-0,25s} \frac{1}{s} - e^{-0,3s} \frac{1}{s}.$$

A condição Eq.(5.4) transformada é escrita como:

$$\hat{C}(s, 0) = \frac{e^{-0,25s} - e^{-0,3s}}{s}. \quad (5.11)$$

2. Aplica-se a Transformada de Laplace na condição Eq.(5.5)

$$\mathcal{L}\left\{C\left(x, \frac{1}{10}\right)\right\} = \hat{C}\left(s, \frac{1}{10}\right) = 0. \quad (5.12)$$

Note que, após aplicar a Transformada de Laplace em Eq.(5.2), Eq.(5.4) e Eq.(5.5), tem-se o problema transformado (problema no domínio de Laplace), representados por:

$$\begin{cases} us\hat{C}(s, y) = \frac{1}{Pe_y} \frac{\partial^2 \hat{C}(s, y)}{\partial y^2} + \frac{D}{s} \\ \hat{C}(s, 0) = \frac{e^{-0,25s} - e^{-0,3s}}{s} \\ \hat{C}\left(s, \frac{1}{10}\right) = 0. \end{cases}$$

Multiplicando-se Eq.(5.7) por $Pe_y \neq 0$, obtém-se:

$$Pe_y us\hat{C}(s, y) = \frac{\partial^2 \hat{C}(s, y)}{\partial y^2} + Pe_y \frac{D}{s},$$

logo, pode ser reescrita como

$$\frac{\partial^2 \hat{C}(s, y)}{\partial y^2} - Pe_y us\hat{C}(s, y) = -Pe_y \frac{D}{s}. \quad (5.13)$$

(iii) **Terceira etapa.**

Quer-se determinar a solução, $\hat{C}(s, y)$, da Eq.(5.13). Para isso, determinam-se a solução homogênea ($\hat{C}_h$) e a solução particular ($\hat{C}_p$) da equação diferencial ordinária não homogênea de 2ª ordem. A solução geral é, então, escrita como

$$\hat{C}(s, y) = \hat{C}_h(s, y) + \hat{C}_p(s, y). \quad (5.14)$$

1. Solução homogênea:

Primeiramente, resolve-se a equação homogênea associada

$$\frac{\partial^2 \hat{C}}{\partial y^2} - Pe_y us \hat{C} = 0,$$

cujas equação característica é

$$r^2 - Pe_y us = 0$$

e suas raízes são

$$r = \pm \sqrt{Pe_y us}.$$

Então, a solução para a equação homogênea associada é

$$\hat{C}_h(s, y) = c_1 e^{\sqrt{Pe_y us} y} + c_2 e^{-\sqrt{Pe_y us} y}. \quad (5.15)$$

Note que, se $e^{\sqrt{Pe_y us} y}$ e $e^{-\sqrt{Pe_y us} y}$ são soluções da EDO, então a combinação delas também será. Nesse caso, somando as duas soluções e dividido por dois, tem-se o $\cosh(\sqrt{Pe_y us} y)$. Subtraindo uma solução da outra e dividindo por dois tem-se o $\sinh(\sqrt{Pe_y us} y)$. Ambas são LI (linearmente independentes) e portanto constituem uma base de soluções para a EDO. Isto é,

$$\hat{C}_h(s, y) = \frac{e^{\sqrt{Pe_y us} y} + e^{-\sqrt{Pe_y us} y}}{2} = \cosh(\sqrt{Pe_y us} y)$$

e

$$\hat{C}_h(s, y) = \frac{e^{\sqrt{Pe_y us} y} - e^{-\sqrt{Pe_y us} y}}{2} = \sinh(\sqrt{Pe_y us} y).$$

Então, uma forma alternativa para a solução homogênea é

$$\hat{C}_h(s, y) = A \cosh(\sqrt{Pe_y us} y) + B \sinh(\sqrt{Pe_y us} y). \quad (5.16)$$

2. Solução particular:

Para obter a solução particular, utiliza-se o método dos coeficientes indeterminados que pode ser encontrado em Boyce and DiPrima (1999).

Supõe-se, a solução particular,

$$\hat{C}_p(s, y) = k. \quad (5.17)$$

Deriva-se Eq.(5.17) e substitui-se na Eq.(5.13), obtendo-se

$$-Pe_yusk = -Pe_y \frac{D}{s}.$$

Isola-se k e tem-se

$$k = \frac{D}{us^2}.$$

Logo, a solução particular da equação transformada, Eq.(5.13), é

$$\hat{C}_p(s, y) = \frac{D}{us^2}. \quad (5.18)$$

Substitui-se as soluções encontradas Eq.(5.16) e Eq.(5.18) em Eq.(5.14) e obtém-se

$$\hat{C}(s, y) = A \cosh \left(\sqrt{Pe_y us y} \right) + B \sinh \left(\sqrt{Pe_y us y} \right) + \frac{D}{us^2}. \quad (5.19)$$

(iv) **Quarta etapa**

Aplicam-se as condições de contorno transformadas Eq.(5.11) e Eq.(5.12) em Eq.(5.19) para determinar as constantes A e B .

1. Aplica-se a condição de contorno transformada Eq.(5.11), para $y = 0$, em Eq.(5.19):

$$A \cosh \left(\sqrt{Pe_y us 0} \right) + B \sinh \left(\sqrt{Pe_y us 0} \right) + \frac{D}{us^2} = \frac{e^{-0,25s} - e^{-0,3s}}{s},$$

desta forma, escreve-se

$$A + \frac{D}{us^2} = \frac{e^{-0,25s} - e^{-0,3s}}{s}$$

e isolando-se A , obtém-se

$$A = \frac{e^{-0,25s} - e^{-0,3s}}{s} - \frac{D}{us^2}. \quad (5.20)$$

2. Aplica-se a condição de contorno transformada Eq.(5.12) e substitui-se o valor da constante A , Eq.(5.20), em Eq.(5.19):

$$\left(\frac{e^{-0,25s} - e^{-0,3s}}{s} - \frac{D}{us^2} \right) \cosh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right) + B \sinh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right) + \frac{D}{us^2} = 0,$$

logo,

$$\left(\frac{e^{-0,25s} - e^{-0,3s}}{s} \right) \cosh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right) - \frac{D}{us^2} \cosh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right) + B \sinh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right) + \frac{D}{us^2} = 0,$$

então escreve-se

$$B \sinh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right) = - \left(\frac{e^{-0,25s} - e^{-0,3s}}{s} \right) \cosh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right) + \frac{D}{us^2} \cosh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right) - \frac{D}{us^2},$$

portanto, isolando-se B , tem-se

$$B = - \left(\frac{e^{-0,25s} - e^{-0,3s}}{s} \right) \left[\frac{\cosh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right)}{\sinh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right)} \right] + \frac{D}{us^2} \left[\frac{\cosh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right)}{\sinh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right)} \right] +$$

$$- \frac{D}{us^2} \left[\frac{1}{\sinh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right)} \right]. \quad (5.21)$$

(v) Quinta etapa

Substitui-se Eq.(5.20) e Eq.(5.21) em Eq.(5.19):

$$\hat{C}(s, y) = \left[\left(\frac{e^{-0,25s} - e^{-0,3s}}{s} \right) \cosh \left(\sqrt{Pe_y usy} \right) \right] - \left[\frac{D}{us^2} \cosh \left(\sqrt{Pe_y usy} \right) \right] +$$

$$- \left[\left(\frac{e^{-0,25s} - e^{-0,3s}}{s} \right) \frac{\cosh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right)}{\sinh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right)} \sinh \left(\sqrt{Pe_y usy} \right) \right] +$$

$$+ \left[\frac{D}{us^2} \frac{\cosh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right)}{\sinh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right)} \sinh \left(\sqrt{Pe_y usy} \right) \right] +$$

$$- \left[\frac{D}{us^2} \frac{1}{\sinh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right)} \sinh \left(\sqrt{Pe_y usy} \right) \right] + \frac{D}{us^2}. \quad (5.22)$$

Para simplificação das frações algébricas de Eq.(5.22), aplica-se a propriedade distributiva da multiplicação. Em seguida, colocam-se os fatores comuns em evidência, obtendo-se

$$\begin{aligned}
\hat{C}(s, y) = & \left(\frac{e^{-0,25s} - e^{-0,3s}}{s} \right) \left[\cosh \left(\sqrt{Pe_y us y} \right) - \frac{\cosh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right) \sinh \left(\sqrt{Pe_y us y} \right)}{\sinh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right)} \right] + \\
& - \frac{D}{us^2} \left[\cosh \left(\sqrt{Pe_y us y} \right) - \frac{\cosh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right) \sinh \left(\sqrt{Pe_y us y} \right)}{\sinh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right)} \right] + \\
& - \left[\frac{D}{us^2} \frac{\sinh \left(\sqrt{Pe_y us y} \right)}{\sinh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right)} \right] + \frac{D}{us^2}.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Fazendo o mínimo múltiplo comum (MMC), reescreve-se a Eq.(5.23) como

$$\hat{C}(s, y) = \left(\frac{e^{-0,25s} - e^{-0,3s}}{s} \right) \cdot$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left[\frac{\sinh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right) \cosh \left(\sqrt{Pe_y us y} \right) - \cosh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right) \sinh \left(\sqrt{Pe_y us y} \right)}{\sinh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right)} \right] + \\
& - \frac{D}{us^2} \left[\frac{\sinh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right) \cosh \left(\sqrt{Pe_y us y} \right) - \cosh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right) \sinh \left(\sqrt{Pe_y us y} \right)}{\sinh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right)} \right] + \\
& - \frac{D}{us^2} \left[\frac{\sinh \left(\sqrt{Pe_y us y} \right)}{\sinh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right)} \right] + \frac{D}{us^2}.
\end{aligned}$$

Utilizando-se a relação trigonométrica

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x) \cosh(y) \pm \cosh(x) \sinh(y),$$

escreve-se a solução geral como:

$$\begin{aligned}
\hat{C}(s, y) = & \left(\frac{e^{-0,25s} - e^{-0,3s}}{s} \right) \frac{\sinh \left[\sqrt{Pe_y us} \left(\frac{1}{10} - y \right) \right]}{\sinh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right)} + \\
& - \frac{D}{us^2} \frac{\sinh \left[\sqrt{Pe_y us} \left(\frac{1}{10} - y \right) \right]}{\sinh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right)} + \\
& - \frac{D}{us^2} \left[\frac{\sinh (\sqrt{Pe_y us} y)}{\sinh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right)} \right] + \frac{D}{us^2}.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

(vi) **Sexta etapa**

Aplica-se a Transformada Inversa de Laplace em Eq.(5.24). Como

$$\mathcal{L}^{-1}\{\hat{C}(s, y)\} = C(x, y),$$

emprega-se o Teorema 10.15 do Anexo

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{as}\hat{C}(s, y)\} = C(x - a, y)\mathcal{H}(x - a),$$

onde $a > 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
C(x, y) = & \mathcal{H}(x - 0, 25)\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sinh \left[\sqrt{Pe_y us} \left(\frac{1}{10} - y \right) \right]}{s \left[\sinh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right) \right]} \right\}_{x \rightarrow x-0,25} + \\
& - \mathcal{H}(x - 0, 3)\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sinh \left[\sqrt{Pe_y us} \left(\frac{1}{10} - y \right) \right]}{s \left[\sinh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right) \right]} \right\}_{x \rightarrow x-0,3} + \\
& - \frac{D}{u}\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sinh \left[\sqrt{Pe_y us} \left(\frac{1}{10} - y \right) \right]}{s^2 \left[\sinh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right) \right]} \right\} + \\
& - \frac{D}{u}\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sinh (\sqrt{Pe_y us} y)}{s^2 \left[\sinh \left(\sqrt{Pe_y us} \frac{1}{10} \right) \right]} \right\} + \frac{D}{u}\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\}.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Na solução analítica de Eq.(5.25), utilizam-se as Transformadas Inversa de Laplace tabeladas por Spiegel (1965):

1.

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sinh \left[\sqrt{k}s(a-y) \right]}{s \left[\sinh \left(\sqrt{k}sa \right) \right]} \right\} = \frac{a-y}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} \left(n\pi \frac{a-y}{a} \right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{a^2k}t}, \quad (5.26)$$

2.

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sinh \left[\sqrt{k}s(a-y) \right]}{s^2 \left[\sinh \left(\sqrt{k}sa \right) \right]} \right\} = \left(\frac{a-y}{a} \right) t + \frac{2a^2k}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \operatorname{sen} \left(n\pi \frac{a-y}{a} \right) \left(1 - e^{-\frac{n^2\pi^2}{a^2k}t} \right), \quad (5.27)$$

3.

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sinh \left(\sqrt{k}sy \right)}{s^2 \left[\sinh \left(\sqrt{k}sa \right) \right]} \right\} = \left(\frac{yt}{a} \right) t + \frac{2a^2k}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a}y \right) \left(1 - e^{-\frac{n^2\pi^2}{a^2k}t} \right). \quad (5.28)$$

A demonstração da obtenção das Transformadas Inversas de Laplace, Eq.(5.26), Eq.(5.27) e Eq.(5.28), podem ser encontradas em Spiegel (1965).

Então, utilizam-se as expressões tabeladas nas Eq.(5.26), Eq.(5.27) e Eq.(5.28) em Eq.(5.25) e, fazendo simplificações, determina-se assim a Transformada Inversa de Laplace de Eq. 5.24 (Conza, 2017). Portanto, segundo a solução da Eq.(5.2) é

$$\begin{aligned} C(x, y) = & \left((1 - 10y) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}(10n\pi y) e^{-\frac{100n^2\pi^2}{Pe_y u}(x-0,25)} \right) \mathcal{H}(x - 0, 25) + \\ & - \left((1 - 10y) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}(10n\pi y) e^{-\frac{100n^2\pi^2}{Pe_y u}(x-0,3)} \right) \mathcal{H}(x - 0, 3) + \\ & + \frac{Pe_y D}{50\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^n)}{n^3} \operatorname{sen}(10n\pi y) \left(1 - e^{-\frac{100n^2\pi^2}{Pe_y u}x} \right). \end{aligned} \quad (5.29)$$

6 RESULTADOS

Para a inversão numérica da Transformada de Laplace aplicados ao problema de difusão de mercúrio na água, Eq. (5.24), utilizou-se os métodos de Zakian (seção 3.1), Stehfest (seção 3.2), Talbot (seção 3.3) e Talbot-Racional (seção 3.4).

Para os métodos de Stehfest, Talbot e Talbot-Racional, aplicou-se $N = 18$, esse valor foi escolhido por indicação da literatura, que sugere valores de N entre 18 e 32, e a partir dos testes realizados com o objetivo de indicar o melhor valor de N (Apêndice). Para Zakian, empregou-se $N = 5$, valor máximo do parâmetro utilizado pela técnica.

Os dados considerados para o estudo do problema de difusão de mercúrio na água, expostos na Tabela 6.1, foram escolhidos de acordo com a literatura (Conza, 2017).

Tabela 6.1: Dados para o problema de difusão do mercúrio

Símbolos	Descrição	Valores
$x(\text{cm})$	$[x_0, x_f]$	$[0, 1]$
$y(\text{cm})$	$[y_0, y_f]$	$\left[0, \frac{1}{10}\right]$
k_x	Coeficiente de difusão em x	$1.67 \times 10^{-9} \text{m}^2/\text{s}$
k_y	Coeficiente de difusão em y	$300 \times k_x$
v	Velocidade	$v = \frac{Re\nu}{L}$
L	Comprimento característico	10m
ν	Viscosidade cinemática	$1.003 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$
$Re = \frac{VL}{\nu}$	Número de Reynolds	700
$Pe_y = \frac{VL}{k_y}$	Número de Péclet em y	1401.4
u	Velocidade média da água	0.5
$D = \frac{1}{Pe_y}$	Termo fonte	0.5

Tendo em vista a dificuldade em analisar a diferença entre os resultados analítico e numérico tridimensional, escolheu-se três valores para y , a fim de observar o comportamento em x , e gerar as tabelas contendo os erros absolutos resultantes do processo de inversão. Optou-

se por escolher dois valores bem próximos às fronteiras e um valor intermediário. Os valores escolhidos foram: $y = 0.01$, $y = 0.05$ e $y = 0.09$.

Os gráficos das soluções analítica e numérica e os erros absolutos, a partir de cada método, são apresentados nas seções 6.1, 6.2, 6.3 e 6.4. O erro relativo não é apresentado, visto que, não traria nenhuma contribuição significativa para a análise dos resultados.

6.1 Método de Zakian aplicado à solução do problema de difusão de mercúrio na água

A Figura 6.1 apresenta a transformada inversa analítica e numérica, através do método de Zakian, para o problema de difusão de mercúrio na água, respectivamente. A Tabela 6.2 mostra os erros absolutos obtidos, considerando os valores de $y = 0.01, 0.05$ e 0.09 cm.

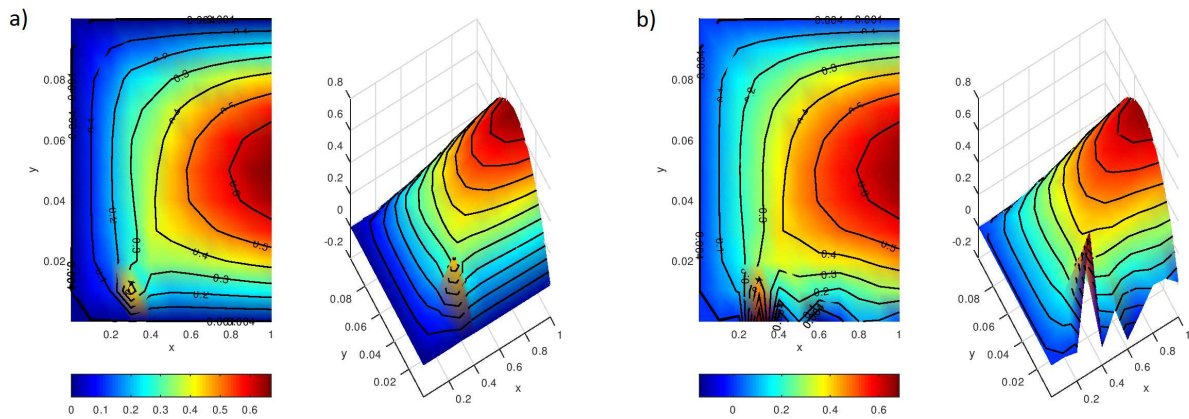


Figura 6.1: a) Perfil da solução analítica e b) Perfil da solução numérica - Zakian.

Tabela 6.2: Erro absoluto - Zakian

Parâmetro		$N = 5$		
$x(\text{cm})$	$y = 0.01\text{cm}$	$y = 0.05\text{cm}$	$y = 0.09\text{cm}$	
0.01	5.78332×10^{-05}	2.82815×10^{-05}	5.78332×10^{-05}	
0.10	1.10176×10^{-04}	7.61124×10^{-05}	1.08048×10^{-04}	
0.20	4.10763×10^{-03}	7.51008×10^{-05}	1.04875×10^{-04}	
0.30	2.65624×10^{-02}	1.77693×10^{-02}	7.73603×10^{-03}	
0.04	5.49424×10^{-02}	3.71788×10^{-04}	9.76372×10^{-05}	
0.05	4.57727×10^{-02}	2.11962×10^{-04}	9.51653×10^{-05}	
0.60	9.47150×10^{-03}	6.19681×10^{-04}	1.03897×10^{-04}	
0.70	4.08130×10^{-02}	2.53633×10^{-04}	1.12186×10^{-04}	
0.80	3.72719×10^{-05}	5.90226×10^{-04}	9.21849×10^{-05}	
0.90	3.36061×10^{-02}	1.50096×10^{-04}	1.00623×10^{-04}	
1.00	3.43322×10^{-02}	8.70167×10^{-04}	1.38166×10^{-04}	

A Figura 6.1 e Tabela 6.2 mostram o desempenho numérico do método de Zakian. Observa-se perda de precisão no início do domínio, no caso em que $y = 0.01$ tem-se erros absolutos, na maioria, da ordem de 10^{-02} . Para $y = 0.05$ e $y = 0.09$, os erros absolutos variam entre as ordens de 10^{-04} e 10^{-05} .

6.1.1 Concentração de mercúrio segundo Método de Zakian

A Tabela 6.3 apresenta a concentração de mercúrio através da solução analítica e do método numérico de inversão de Zakian, aplicado ao problema de difusão de mercúrio na água, para os valores de $y = 0.01, 0.05$ e 0.09 cm.

Tabela 6.3: Concentração de mercúrio: comparação com o método de Zakian

Método	Analítico	Zakian	Analítico	Zakian	Analítico	Zakian
$x(\text{cm})$	$y = 0.01\text{cm}$	$y = 0.01\text{cm}$	$y = 0.05\text{cm}$	$y = 0.05\text{cm}$	$y = 0.09\text{cm}$	$y = 0.09\text{cm}$
0.01	9.42166×10^{-04}	1.00000×10^{-03}	1.02828×10^{-03}	1.00000×10^{-03}	9.42166×10^{-04}	1.00000×10^{-03}
0.10	6.47328×10^{-02}	6.48429×10^{-02}	9.99814×10^{-02}	9.99053×10^{-02}	6.47328×10^{-02}	6.48408×10^{-02}
0.20	1.02298×10^{-01}	1.06406×10^{-01}	1.96574×10^{-01}	1.96499×10^{-01}	1.02298×10^{-01}	1.02403×10^{-01}
0.30	4.480974×10^{-01}	4.74659×10^{-01}	3.01940×10^{-01}	2.84170×10^{-01}	1.39373×10^{-01}	1.31637×10^{-01}
0.40	2.30999×10^{-01}	1.76057×10^{-01}	3.74170×10^{-01}	3.73799×10^{-01}	1.56036×10^{-01}	1.56133×10^{-01}
0.50	2.09625×10^{-01}	2.55398×10^{-01}	4.538985×10^{-01}	4.54110×10^{-01}	1.77591×10^{-01}	1.77686×10^{-01}
0.60	2.14378×10^{-01}	2.04906×10^{-01}	5.13871×10^{-01}	5.13251×10^{-01}	1.97194×10^{-01}	1.97297×10^{-01}
0.70	2.23948×10^{-01}	1.83135×10^{-01}	5.62735×10^{-01}	5.62988×10^{-01}	2.14276×10^{-01}	2.14388×10^{-01}
0.80	2.34190×10^{-01}	2.34152×10^{-01}	6.04251×10^{-01}	6.04841×10^{-01}	2.28695×10^{-01}	2.28787×10^{-01}
0.90	2.43928×10^{-01}	2.77534×10^{-01}	6.40050×10^{-01}	6.39900×10^{-01}	2.40801×10^{-01}	2.40902×10^{-01}
1.00	2.52802×10^{-01}	2.87134×10^{-01}	6.71072×10^{-01}	6.70202×10^{-01}	2.51022×10^{-01}	2.51160×10^{-01}

Note que, de acordo com a Tabela 6.3, avaliando-se as casas decimais apresentadas neste trabalho, a concentração de mercúrio através da solução analítica e do método de Zakian, geram para $y = 0.01$, a concordância de apenas uma casa decimal para poucos valores de x . Quanto a $y = 0.05$, de forma geral, a concordância varia entre uma e duas casas decimais. E para $y = 0.09$, verificou-se a concordância de duas casas decimais para a maioria dos valores de x .

6.2 Método de Stehfest aplicado à solução do problema de difusão de mercúrio na água

A Figura 6.2 mostra a transformada inversa analítica e numérica, através do método de Stehfest, para o problema de difusão de mercúrio na água, respectivamente. A Tabela 6.4 apresenta os erros absolutos obtidos, considerando os valores de $y = 0.01, 0.05$ e 0.09 cm.

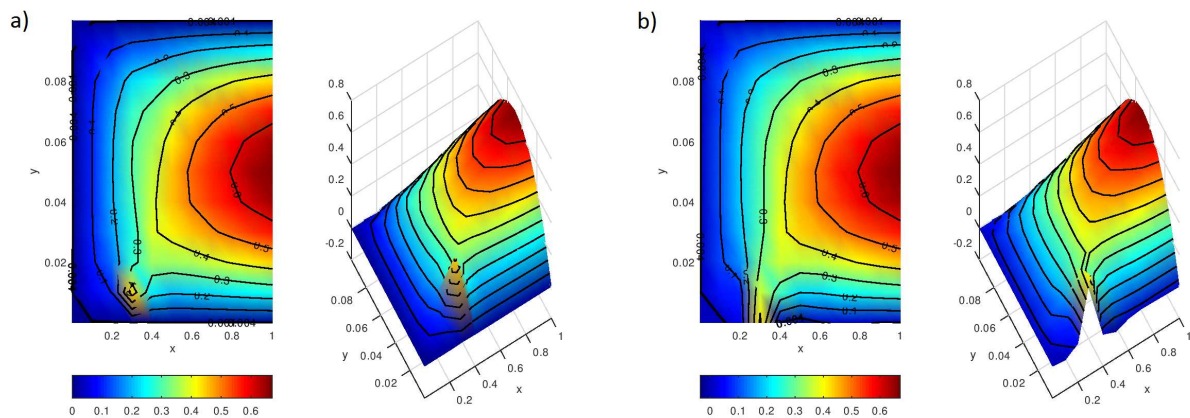


Figura 6.2: a) Perfil da solução analítica e b) Perfil da solução numérica - Stehfest.

Tabela 6.4: Erro absoluto - Stehfest

Parâmetro		$N = 18$		
$x(\text{cm})$	$y = 0.01\text{cm}$	$y = 0.05\text{cm}$	$y = 0.09\text{cm}$	
0.01	5.78333×10^{-05}	2.82815×10^{-05}	5.78333×10^{-05}	
0.10	3.34124×10^{-03}	6.32820×10^{-05}	1.07337×10^{-04}	
0.20	3.12489×10^{-02}	3.11559×10^{-04}	1.00421×10^{-04}	
0.30	8.09377×10^{-02}	1.81053×10^{-02}	7.70779×10^{-03}	
0.04	3.71600×10^{-02}	7.93507×10^{-05}	5.46943×10^{-05}	
0.05	8.64940×10^{-03}	8.41581×10^{-04}	1.81980×10^{-04}	
0.60	7.79570×10^{-03}	2.75324×10^{-04}	1.12823×10^{-04}	
0.70	5.55491×10^{-04}	3.29836×10^{-04}	5.05357×10^{-05}	
0.80	2.21028×10^{-03}	3.39156×10^{-05}	7.17941×10^{-05}	
0.90	2.15524×10^{-03}	1.66017×10^{-04}	1.11518×10^{-04}	
1.00	1.31932×10^{-03}	2.24619×10^{-04}	1.33597×10^{-04}	

Para o problema de difusão de mercúrio na água, conforme a Figura 6.2 e Tabela 6.4, o método de Stehfest produziu resultados satisfatórios. Resulta em erros da ordem de 10^{-05} quando $x = 0,01$ para todos os valores de y ; e variando entre 10^{-02} e 10^{-05} nos valores maiores de x considerados.

6.2.1 Concentração de mercúrio segundo Método de Stehfest

A Tabela 6.5 apresenta a concentração de mercúrio através da solução analítica e do método numérico de inversão de Stehfest, aplicado ao problema de difusão de mercúrio na água, para os valores de $y = 0.01, 0.05$ e 0.09 cm.

Tabela 6.5: Concentração de mercúrio: comparação com o método de Stehfest

Método	Analítico	Stehfest	Analítico	Stehfest	Analítico	Stehfest
$x(\text{cm})$	$y = 0.01\text{cm}$	$y = 0.01\text{cm}$	$y = 0.05\text{cm}$	$y = 0.05\text{cm}$	$y = 0.09\text{cm}$	$y = 0.09\text{cm}$
0.01	9.42166×10^{-04}	1.00000×10^{-03}	1.02828×10^{-03}	1.00000×10^{-03}	9.42166×10^{-04}	1.00000×10^{-03}
0.10	6.47328×10^{-02}	6.13915×10^{-02}	9.99814×10^{-02}	9.99181×10^{-02}	6.47328×10^{-02}	6.48401×10^{-02}
0.20	1.02298×10^{-01}	7.10497×10^{-02}	1.96574×10^{-01}	1.96886×10^{-01}	1.02298×10^{-01}	1.02399×10^{-01}
0.30	4.48097×10^{-01}	3.67159×10^{-01}	3.01940×10^{-01}	2.83834×10^{-01}	1.39373×10^{-01}	1.31665×10^{-01}
0.40	2.30999×10^{-01}	2.68159×10^{-01}	3.74170×10^{-01}	3.74091×10^{-01}	1.56036×10^{-01}	1.56090×10^{-01}
0.50	2.09625×10^{-01}	2.00976×10^{-01}	4.53898×10^{-01}	4.53056×10^{-01}	1.77591×10^{-01}	1.77773×10^{-01}
0.60	2.14378×10^{-01}	2.06582×10^{-01}	5.13871×10^{-01}	5.14146×10^{-01}	1.97194×10^{-01}	1.97306×10^{-01}
0.70	2.23948×10^{-01}	2.23393×10^{-01}	5.62735×10^{-01}	5.63065×10^{-01}	2.14276×10^{-01}	2.14326×10^{-01}
0.80	2.34190×10^{-01}	2.36400×10^{-01}	6.04251×10^{-01}	6.04284×10^{-01}	2.28695×10^{-01}	2.28767×10^{-01}
0.90	2.43928×10^{-01}	2.46083×10^{-01}	6.40050×10^{-01}	6.39884×10^{-01}	2.40801×10^{-01}	2.40913×10^{-01}
1.00	2.52802×10^{-01}	2.54121×10^{-01}	6.71072×10^{-01}	6.70848×10^{-01}	2.51022×10^{-01}	2.51155×10^{-01}

Conforme a Tabela 6.5, pode-se observar que a concentração de mercúrio através da solução analítica e do método de Stehfest, para o valor de $y = 0.01$, apresentam a concordância de uma casa decimal para os valores a partir de $x = 0.5$, exceto para $x = 0.6$. Verificou-se que para $y = 0.05$, a concordância varia entre uma, duas e três casas decimais, para a maioria dos valores de x . Com relação ao valor de $y = 0.09$, predominantemente, a concordância é de duas casas decimais.

6.3 Método de Talbot aplicado à solução do problema de difusão de mercúrio na água

A Figura 6.3 mostra a transformada inversa analítica e numérica, através do método de Talbot, para o problema de difusão de mercúrio na água, respectivamente. A Tabela 6.6 apresenta os erros absolutos obtidos, considerando os valores de $y = 0.01, 0.05$ e 0.09 cm.

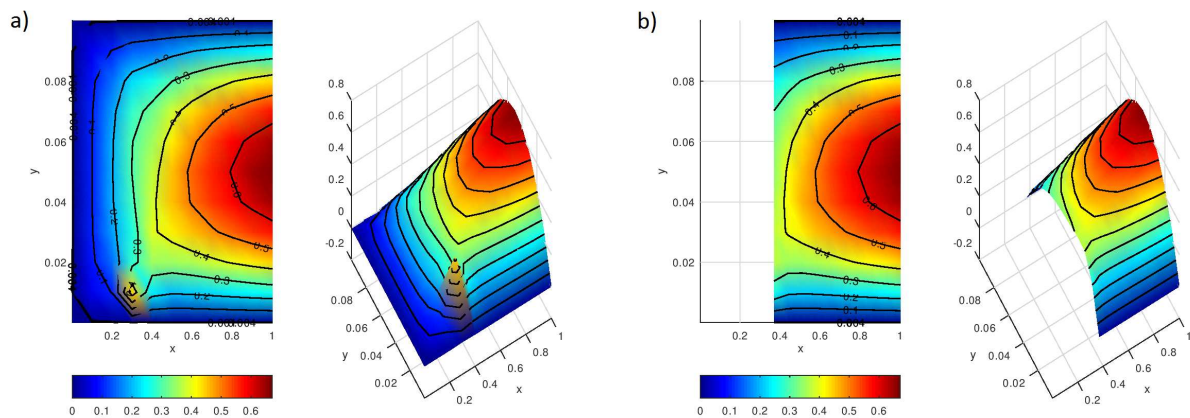


Figura 6.3: a) Perfil da solução analítica e b) Perfil da solução numérica - Talbot (gerado a partir de $x = 0.3$).

Tabela 6.6: Erro absoluto - Talbot

Parâmetro		$N = 18$		
$x(\text{cm})$	$y = 0.01\text{cm}$	$y = 0.05\text{cm}$	$y = 0.09\text{cm}$	
0.01	—	—	—	
0.10	—	—	—	
0.20	—	—	—	
0.30	4.17884×10^{-02}	1.08681×10^{-02}	1.26025×10^{-02}	
0.40	1.07437×10^{-04}	7.61242×10^{-05}	1.07480×10^{-04}	
0.50	1.07438×10^{-04}	7.61154×10^{-05}	1.07437×10^{-04}	
0.60	1.07438×10^{-04}	7.61155×10^{-05}	1.07438×10^{-04}	
0.70	1.07438×10^{-04}	7.61154×10^{-05}	1.07438×10^{-04}	
0.80	1.07438×10^{-04}	7.61154×10^{-05}	1.07438×10^{-04}	
0.90	1.07438×10^{-04}	7.61154×10^{-05}	1.07438×10^{-04}	
1.00	1.07438×10^{-04}	7.61154×10^{-05}	1.07438×10^{-04}	

De acordo com Murli and Rizzardi (1990), o método de Talbot e a função Heaviside são aplicados apenas para valores maiores que o coeficiente de s no argumento da exponencial, no caso do problema de difusão do mercúrio, esse valor é 0.3. De fato, nos testes realizados, constatou-se que essa técnica apresenta resultados satisfatório somente a partir desse valor, como pode ser visto na Figura 6.3 e na Tabela 6.6. Em todos os caso de y , percebe-se overflow para os primeiros valores de x .

Quando $x = 0.30$, tem-se um erro absoluto da ordem de 10^{-02} , e para valores maiores, os erros absolutos variam entre as ordens de 10^{-04} e 10^{-05} .

6.3.1 Concentração de mercúrio segundo Método Talbot

A tabela 6.7 apresenta a concentração de mercúrio através da solução analítica e do método numérico de inversão de Talbot, aplicado ao problema de difusão de mercúrio na água, para os valores de $y = 0.01, 0.05$ e 0.09 cm.

Tabela 6.7: Concentração de mercúrio: comparação com o método de Talbot

Método	Analítico	Talbot	Analítico	Talbot	Analítico	Talbot
$x(\text{cm})$	$y = 0.01\text{cm}$	$y = 0.01\text{cm}$	$y = 0.05\text{cm}$	$y = 0.05\text{cm}$	$y = 0.09\text{cm}$	$y = 0.09\text{cm}$
0.01	9.42166×10^{-04}	—	1.02828×10^{-03}	—	9.42166×10^{-04}	—
0.10	6.47328×10^{-02}	—	9.99814×10^{-02}	—	6.47328×10^{-02}	—
0.20	1.02298×10^{-01}	—	1.96574×10^{-01}	—	1.02298×10^{-01}	—
0.30	4.48097×10^{-01}	4.06308×10^{-01}	3.01940×10^{-01}	3.12808×10^{-01}	1.39373×10^{-01}	1.26770×10^{-01}
0.40	2.30999×10^{-01}	2.31106×10^{-01}	3.74170×10^{-01}	3.74094×10^{-01}	1.56036×10^{-01}	1.56143×10^{-01}
0.50	2.09625×10^{-01}	2.09733×10^{-01}	4.53898×10^{-01}	4.53822×10^{-01}	1.77591×10^{-01}	1.77698×10^{-01}
0.60	2.14378×10^{-01}	2.14485×10^{-01}	5.13871×10^{-01}	5.13795×10^{-01}	1.97194×10^{-01}	1.97301×10^{-01}
0.70	2.23948×10^{-01}	2.240566×10^{-01}	5.62735×10^{-01}	5.62659×10^{-01}	2.14276×10^{-01}	2.14383×10^{-01}
0.80	2.34190×10^{-01}	2.34297×10^{-01}	6.04251×10^{-01}	6.04174×10^{-01}	2.28695×10^{-01}	2.28803×10^{-01}
0.90	2.43928×10^{-01}	2.44035×10^{-01}	6.40050×10^{-01}	6.39974×10^{-01}	2.40801×10^{-01}	2.40909×10^{-01}
1.00	2.52802×10^{-01}	2.52909×10^{-01}	6.71072×10^{-01}	6.70996×10^{-01}	2.51022×10^{-01}	2.51129×10^{-01}

Conforme a Tabela 6.7, a comparação da concentração de mercúrio entre a solução analítica e o método de Talbot, os valores de $y = 0.01$ e $y = 0.05$, de modo geral, apresentam a concordância de uma ou duas casas decimais para os valores a partir de $x = 0.4$. Note que, de modo similar, para $y = 0.09$, a concordância de duas casas decimais ocorre em todos os valores a partir de $x = 0.4$.

6.4 Método de Talbot-Racional aplicado à solução do problema de difusão de mercúrio na água

A Figura 6.4 apresenta a transformada inversa analítica e numérica, através do método de Talbot-Racional, para o problema de difusão de mercúrio na água, respectivamente. A Tabela 6.8 mostra os erros absolutos obtidos, considerando os valores de $y = 0.01, 0.05$ e 0.09 cm.

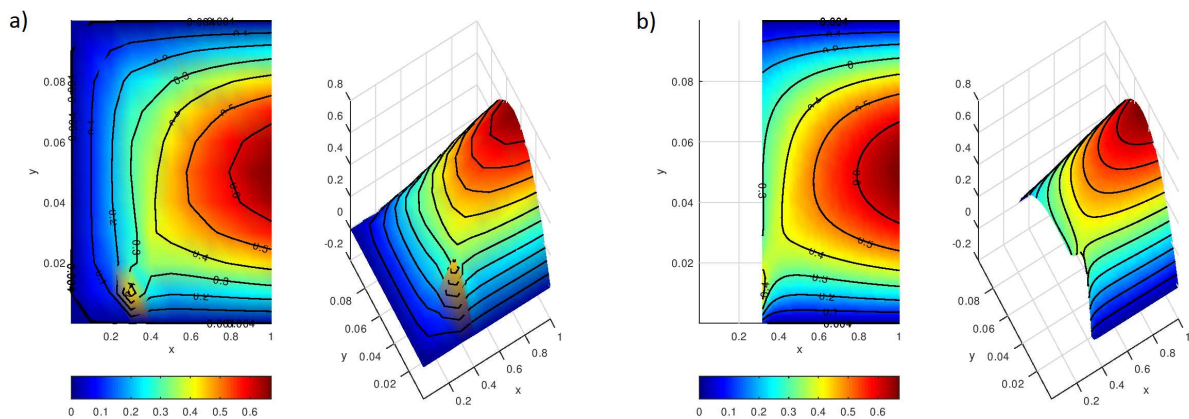


Figura 6.4: a) Perfil da solução analítica e b) Perfil da solução numérica - Talbot-Racional (gerado a partir de $x = 0.3$).

Tabela 6.8: Erro absoluto - Talbot-Racional

Parâmetro		$N = 18$		
$x(\text{cm})$	$y = 0.01\text{cm}$	$y = 0.05\text{cm}$	$y = 0.09\text{cm}$	
0.01	—	—	—	
0.10	—	—	—	
0.20	—	—	4.56531×10^{-01}	
0.30	1.26173×10^{-01}	1.92669×10^{-02}	7.63543×10^{-03}	
0.04	1.43940×10^{-04}	7.94431×10^{-05}	1.07789×10^{-04}	
0.05	1.06976×10^{-04}	7.60757×10^{-05}	1.07438×10^{-04}	
0.60	1.07437×10^{-04}	7.61191×10^{-05}	1.07438×10^{-04}	
0.70	1.07441×10^{-04}	7.61154×10^{-05}	1.07438×10^{-04}	
0.80	1.07439×10^{-04}	7.61154×10^{-05}	1.07438×10^{-04}	
0.90	1.07438×10^{-04}	7.61154×10^{-05}	1.07438×10^{-04}	
1.00	1.07438×10^{-04}	7.61154×10^{-05}	1.07438×10^{-04}	

Para o problema de difusão de mercúrio na água, a técnica de Talbot-Racional comportou-se de maneira semelhante ao método de Talbot. Apresentou desempenho não satisfatório no intervalo $x = [0.01, 0.20]$ em todos os caso de y . Dados aos problemas numéricos inerentes da aplicação da Heaviside, não foi possível gerar perfis para esse valores.

Quando $x = 0.30$, tem-se um erro absoluto da ordem de 10^{-01} para $y = 0.01$, erro absoluto da ordem de 10^{-02} para $y = 0.05$ e da ordem de 10^{-03} para $y = 0.09$. A partir de $x = 0.30$, os erros absolutos variam entre as ordens de 10^{-04} e 10^{-05} .

6.4.1 Concentração de mercúrio segundo Método de Talbot-Racional

A Tabela 6.9 apresenta a concentração de mercúrio através da solução analítica e do método numérico de inversão de Talbot-Racional, aplicado ao problema de difusão de mercúrio na água, para os valores de $y = 0.01, 0.05$ e 0.09 cm.

Tabela 6.9: Concentração de mercúrio: comparação com o método de Talbot-Racional

Método	Analítico	Talbot-Racional	Analítico	Talbot-Racional	Analítico	Talbot-Racional
$x(\text{cm})$	$y = 0.01\text{cm}$	$y = 0.01\text{cm}$	$y = 0.05\text{cm}$	$y = 0.05\text{cm}$	$y = 0.09\text{cm}$	$y = 0.09\text{cm}$
0.01	9.42166×10^{-04}	—	1.02828×10^{-03}	—	9.42166×10^{-04}	—
0.10	6.47328×10^{-02}	—	9.99814×10^{-02}	—	6.47328×10^{-02}	—
0.20	1.02298×10^{-01}	$-4.09866 \times 10^{+00}$	1.96574×10^{-01}	$2.88814 \times 10^{+01}$	1.02298×10^{-01}	5.58829×10^{-01}
0.30	4.48097×10^{-01}	5.74270×10^{-01}	3.01940×10^{-01}	2.82673×10^{-01}	1.39373×10^{-01}	1.31737×10^{-01}
0.40	2.30999×10^{-01}	2.31143×10^{-01}	3.74170×10^{-01}	3.74091×10^{-01}	1.56036×10^{-01}	1.56144×10^{-01}
0.50	2.09625×10^{-01}	2.09732×10^{-01}	4.53898×10^{-01}	4.53822×10^{-01}	1.77591×10^{-01}	1.77698×10^{-01}
0.60	2.14378×10^{-01}	2.14485×10^{-01}	5.13871×10^{-01}	5.13795×10^{-01}	1.97194×10^{-01}	1.97301×10^{-01}
0.70	2.23948×10^{-01}	2.24056×10^{-01}	5.62735×10^{-01}	5.62659×10^{-01}	2.14276×10^{-01}	2.14383×10^{-01}
0.80	2.34190×10^{-01}	2.34297×10^{-01}	6.04251×10^{-01}	6.04174×10^{-01}	2.28695×10^{-01}	2.28803×10^{-01}
0.90	2.43928×10^{-01}	2.44035×10^{-01}	6.40050×10^{-01}	6.39974×10^{-01}	2.40801×10^{-01}	2.40909×10^{-01}
1.00	2.52802×10^{-01}	2.52909×10^{-01}	6.71072×10^{-01}	6.70996×10^{-01}	2.51022×10^{-01}	2.51129×10^{-01}

Analisando a Tabela 6.9, observa-se que, a concentração de mercúrio através da solução analítica e do método de Talbot-Racional, procedeu de forma análoga ao método de Talbot para todos os valores de y .

7 CONCLUSÕES

Nas últimas décadas, a busca por soluções de problemas ambientais causados pela poluição tem aumentado consideravelmente. Nessa temática, é importante estudar o processo de espalhamento de contaminantes e o impacto nos diversos ecossistemas envolvidos. Os modelos matemáticos que tem sido amplamente aplicados na dispersão de poluentes, são as Equações Diferenciais. Uma poderosa técnica para resolver tais equações é a Transformada de Laplace, dada sua importância e potencialidade. No entanto, determinar sua inversa é uma etapa importante, geralmente, de difícil execução analítica para uma Equação Diferencial mais complicada. Assim, técnicas de inversão numérica são utilizadas para converter a solução do domínio de Laplace para o domínio real.

Neste contexto, no presente trabalho foram apresentados quatro métodos de inversão numérica da Transformada de Laplace: Zakian, Stehfest, Talbot e Talbot-Racional. Inicialmente, testou-se os métodos citados nas funções ditas elementares, buscando avaliar o desempenho para a inversão de diferentes classes de funções, validar e recomendar os algoritmos implementados. Com base nos resultados obtidos, conclui-se que a técnica de Zakian gerou melhores resultados na maioria dos testes realizados com número reduzido para N . O método de Stehfest, não se mostrou o mais indicado para funções trigonométricas, função exponencial e função exponencial decrescente multiplicada por uma função polinomial ou função trigonométrica. Talbot, de forma geral, funciona bem na inversão da maioria das funções consideradas. E, por fim, Talbot-Racional comportou-se de maneira semelhante a Talbot. Além disso, os métodos também foram aplicados para inverter numericamente as funções elementares para valores maiores de N (resultados do Apêndice), com a finalidade de recomendar o melhor valor de N para cada técnica estudada.

Após, com o objetivo de avaliar o potencial de resolução desses recursos, utilizou-se os mesmos em um conjunto de funções ditas especiais, cuja inversa analítica não é facilmente obtida. Para isso, analisou-se entre eles a melhor concordância em dígitos significativos.

Posteriormente, abordando um tópico extremamente importante relacionado à distribuição do mercúrio e seus compostos no meio ambiente, os métodos citados foram aplicados para inverter numericamente a solução da equação de difusão de mercúrio na água. Os resultados numéricos obtidos foram comparados com a solução analítica. Calculou-se o erro absoluto dos perfis numéricos gerados pelos métodos. Os valores de N usados seguiram a recomendação da literatura, bem como as observações feitas durante os testes das funções ditas elementares e especiais. Todos mostraram-se adequados para aproximar este tipo de solução. Deve-se ressaltar que ao tratar dos métodos de Talbot e Talbot-Racional e a função Heaviside, devem ser aplicados apenas para valores maiores que o coeficiente de s no argumento da exponencial. No caso do problema de difusão do mercúrio, esse valor é 0.3. Isso pode justificar, por exemplo, o fato dessas técnicas apresentarem resultados satisfatórios somente a partir desse valor.

Para atingir os objetivos deste trabalho, realizaram-se simulações utilizando o software livre Octave. Aqui também é fornecido um pouco do estudo teórico sobre a Transformada de Laplace, suas propriedades e aplicações, e um referencial teórico dos métodos mencionados para o cálculo da Transformada Inversa.

A contribuição principal deste estudo está na aplicação dos métodos de Stehfest, Zakian, Talbot e Talbot-Racional para inversão da Transformada de Laplace em um problema de difusão de mercúrio na água. Além disso, as funções testes aqui abordadas não haviam sido testadas através do método de Talbot-Racional. Destaca-se ainda, a aplicação desses recursos em um conjunto de funções especiais. Sendo assim, entende-se o quão significativos podem ser os resultados obtidos para outros pesquisadores.

Diante do exposto, considera-se que os objetivos deste trabalho foram atingidos, visto que, como pretendido, ao invés de apontar um melhor método, através dos comparativos estabelecidos, apresentaram-se recomendações ao emprego dessas técnicas. Critérios devem ser seguidos para a escolha do método a ser utilizado, como nos casos em que o problema envolve o uso da função Heaviside. Em trabalhos futuros, esta análise pode contribuir para a escolha de métodos mais adequados para inverter transformadas de funções com essa característica.

Por fim, destaca-se que alguns resultados preliminares deste trabalho foram publicados em Freitas et al. (2021).

8 REFERÊNCIAS

- Abate, J. and Valkó, P. P. (2004). Multi-precision Laplace Transform Inversion. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60:979–993.
- Amaral, G. C. M. (2016). Análise Comparativa do Desempenho Numérico de Técnicas de Inversão da Transformada de Laplace. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Universidade Federal do Rio Grande.
- Barichelo, L. B. (1988). Inversão Numérica da Transformada de Laplace por polinômios trigonométricos e de Laguerre. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática*. Contexto, São Paulo.
- Bellman, R., Kalaba, R., and Hiffmn, B. (1963). *A Numerical Inversion of the Laplace Transform*. The Rand Corporation.
- Boyce, W. E. and DiPrima, R. C. D. (1999). *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. LTC, Rio de Janeiro.
- Brown, J. W. and Churchill, R. V. (1960). *Complex Variables and Applications*. McGraw-Hill Book Company.
- Buligon, L. (2004). Solução da Equação de Difusão Unidimensional Transiente para o estudo da dispersão de poluentes na Camada Limite Planetária. Dissertação Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Burden, R. L. and Faires, J. D. (2011). Taylor series approach to functional approximation for Inversion of Laplace Transforms. *Numerical Analysis*, 22:1219 – 1221.
- Chung, H. Y. and Sun, Y. (1986). Taylor series approach to functional approximation for Inversion of Laplace Transforms. *Electronics Letters*, 22:1219 – 1221.
- Cohen, A. M. (2007). *Numerical Methods for Laplace Transform Inversion*. Springer, New York.
- Conza, A. O. (2017). Modelagem Matemática da Difusão do Mercúrio na água e Comparação com Solução Analítica. Dissertação (mestrado).
- Crump, K. S. (1976). Numerical Inversion of Laplace Transforms using Fourier Series Approximation. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 26:89–96.
- Cullen, M. R. and Zill, D. G. (2001). *Equações Diferenciais*. Pearson, São Paulo.

- da Silva, R. R., Branco, J. C., Thomaz, S. M. T., and Cesar, A. (2017). Convenção de Minamata: análise dos impactos socioambientais de uma solução em longo prazo. *Saúde Debate*, 41:50–62.
- Davies, B. and Martin, B. (1979). Numerical Inversion of the Laplace Transform: a survey and comparison of methods. *Journal of Computational Physics*, 33:1–32.
- de Hoog, F., Knight, J., and Stokes, A. (1982). An improved method for numerical Inversion of Laplace Transforms. *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing*, 3:357–366.
- Defreitas, C. and Kane, S. (2017). The noise handling properties of the Talbot algorithm for numerically Inverting the Laplace Transform. *Journal of Algorithms and Computational Technology*, 13.
- Dubner, H. and Abate, J. (1968). Numerical Inversion of Laplace Transform by relating them to the Fourier cosine transform. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 15:115–123.
- Duffy, D. G. (1993). On the Numerical Inversion of Laplace Transform: comparison of three new methods on characteristic problems from applications. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 19:333–359.
- Durbin, F. (1974). Numerical Inversion of Laplace Transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate’s method. *The Computer Journal*, 17:371–376.
- D’Ambrósio, U. (1997). *Transdisciplinaridade*. Palas Athena, São Paulo.
- Erwin, K. (2009). *Matemática Superior para Engenharia, v. 1, 9. ed.* LTC.
- Ferreira, J. A. (2021). Análise Comparativa do Desempenho Numérico de Técnicas de Inversão da Transformada de Laplace Aplicados a um Problema de Difusão de Íons. Dissertação de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, FURG.
- Ferreira, J. A., Calixto, G. R. L., Konflanz, E., Rodriguez, B. D. A., and Filho, J. F. P. (2021). Aspectos computacionais da inversão numérica da Transformada de Laplace aplicada a um problema de transporte. *Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia (Ripe)*.
- Freitas, E. K., Calixto, G. R. L., Ferreira, J. A., do Amaral Rodriguez, B. D., and Filho, J. F. P. (2021). Parameter N Analysis on the Rational-Talbot Algorithm for Numerical Inversion of Lplace Transform. *Vetor*, 31:50–60.
- Galdino, K. E. (1995). Transformada Inversa de Laplace: Inversão Algébrica via Tabela e Inversão Numérica. Dissertação de Pós-Graduação em Informática, Universidade Federal da Paraíba.
- Gaver, D. P. J. (1966). Observing Stochastic Processes, and Approximate Transform Inversion. *Operations Research*, 14:444–459.

- Gilat, A. and Subramaniam, V. (2008). *Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas*. Bookman, Porto Alegre.
- Junqueira, S. L. M. (1990). Aplicação da Transformada de Laplace ao problema inverso da condução do calor. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas.
- Kristopher, K. (2012). Review of Inverse Laplace Transform Algorithms for Laplace-Space Numerical Approaches. *Numerical Algorithms*, 63:339–355.
- Longman, I. M. (1974). Best rational function approximation for Laplace Transform Inversion. *SIAM J. Math.*, 5:574–580.
- Moench, A. F. and Ogata, A. (1981). A Numerical Inversion of the Laplace Transform Solution to Radial Dispersion in a Porous Medium. *Water Resources Research*, 17:250–252a.
- Murli, A. and Rizzardi, M. (1990). Algorithm 682: Talbot’s Method for the Laplace Inversion Problem. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 16:158 – 168.
- Nascimento, E. S. and Chasin, A. A. M. (2001). Ecotoxicologia do mercúrio e seus compostos. *Centro de Recursos Ambientais*.
- Papoulis, A. (1956). A new method of Inversion of the Laplace Transform. *Quarterly of Applied Mathematics*, 14:405–414.
- Piessens, R. (1971). Gaussian quadrature formulas for the numerical integration of Bromwich’s integral and the Inversion of the Laplace Transform. *Journal of Engineering Mathematics*, 5:1–9.
- Pilatti, C. (2019). Análise Comparativa do Desempenho Numérico de Técnicas de Inversão da Transformada de Laplace Aplicados a um Problema de Transporte de Solute em Meio Poroso. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Universidade Federal do Rio Grande.
- Robledo, F. M. and Pereira, P. C. (2015). Educação Matemática & Educação Ambiental: uma ação interdisciplinar. *VII Encontro Mineiro de Educação Matemática*.
- Spiegel, M. R. (1965). *Schaum’s Outline of Theory and Problems of Laplace Transforms*. McGraw-Hill.
- Stehfest, H. (1970). Remark on algorithm 368: Numerical Inversion of Laplace Transforms. Communications of the ACM. *Association for Computing Machinery*, 13:624.
- Talbot, A. (1979). The accurate numerical Inversion of Laplace Transforms. Oxford University Press. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 23:97–120.
- Trefethen, L. N., Weideman, J. A. C., and Schmelze, T. (2006). Talbot Quadratures and Rational Aproximations. *BIT Numerical Mathematics*, 46:653–670.

- Weeks, W. T. (1966). Numerical Inversion of Laplace Transforms using Laguerre functions. *Journal of the ACM*, 13:419–429.
- Weideman, J. A. C. (2006). Optimizing Talbot’s Contours for the Inversion of The Laplace Transform. Society for Industrial and Applied Mathematics. *Siam J. Numer. Anal.*, 44:2342–2362.
- Weideman, J. A. C. and Dingfelder, B. (2014). An improved Talbot method for numerical Laplace Transform Inversion. *Springer Science Business*, 68:167–183.
- Zakian, V. (1969). Numerical Inversion of Laplace Transform. *Electronics Letters Institution of Engineering and Technology*, 5:120–121.
- Zhang, W., Cui, Y., Jiang, R., Xu, J., Qiao, X., Jiang, Y., Zhang, H., and Wang, X. (2019). Production performance analysis for horizontal wells in gas condensate reservoir using thre-region model. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, 61:226–236.

9 APÊNDICE

Neste capítulo, apresentam-se os resultados obtidos para a inversão das funções elementares exibidas na Tab. 4.1, através dos métodos de Stehfest, Talbot e Talbot-Racional, com a finalidade de indicar o melhor valor de N , a partir de cada método.

Testou-se, para cada função elementar, diferentes valores de N . Inicialmente, foram avaliados aqueles indicados pela literatura: $N = 18$, $N = 24$ e $N = 32$. Entretanto, observou-se que, para o conjunto de funções testes, estes nem sempre geravam os melhores resultados. Optou-se, então, por testar valores menores e maiores dos recomendados. Obteve-se, ainda, os valores máximos do parâmetro livre N , até os quais, as técnicas fornecem um desempenho que classificou-se aqui como satisfatório.

9.1 Inversão de $F_1(s)$

9.1.1 Método de Stehfest

Tabela 9.1: Erro absoluto da inversão de $F_1(s)$, pelo método de Stehfest com diferentes valores de N

t	$N = 10$	$N = 14$	$N = 18$	$N = 24$	$N = 32$
10^{-4}	3.47916×10^{-10}	3.60849×10^{-12}	2.16042×10^{-12}	1.23234×10^{-08}	2.87292×10^{-03}
1	3.47916×10^{-05}	3.61618×10^{-07}	4.04892×10^{-07}	1.01327×10^{-03}	$2.32871 \times 10^{+02}$
2	6.95833×10^{-05}	7.23237×10^{-07}	8.09784×10^{-07}	2.02655×10^{-03}	$4.65742 \times 10^{+02}$
3	1.04374×10^{-04}	1.08114×10^{-06}	3.44589×10^{-08}	2.85816×10^{-03}	$2.25367 \times 10^{+02}$
4	1.39166×10^{-04}	1.44647×10^{-06}	1.61956×10^{-06}	4.05311×10^{-03}	$9.31484 \times 10^{+02}$
5	1.73958×10^{-04}	1.80574×10^{-06}	5.45755×10^{-07}	2.84862×10^{-03}	$6.07617 \times 10^{+02}$
6	2.08749×10^{-04}	2.16229×10^{-06}	6.89178×10^{-08}	5.71632×10^{-03}	$4.50734 \times 10^{+02}$
7	2.43541×10^{-04}	2.52999×10^{-06}	7.48783×10^{-07}	5.29670×10^{-03}	$8.36609 \times 10^{+02}$
8	2.78333×10^{-04}	2.89294×10^{-06}	3.23913×10^{-06}	8.10623×10^{-03}	$1.86296 \times 10^{+03}$
9	3.13124×10^{-04}	3.24737×10^{-06}	2.31340×10^{-06}	5.64575×10^{-04}	$1.44843 \times 10^{+02}$
10	3.47916×10^{-04}	3.61149×10^{-06}	1.09151×10^{-06}	5.69725×10^{-03}	$1.21523 \times 10^{+03}$

De acordo com a Tabela 9.1, na inversão de $F_1(s)$ através do método de Stehfest, recomenda-se, de forma geral, valores de $N = 14$ até $N = 18$.

9.1.2 Método de Talbot

Tabela 9.2: Erro absoluto da inversão de $F_1(s)$, pelo método de Talbot com diferentes valores de N

t	$N = 18$	$N = 24$	$N = 32$	$N = 50$	$N = 90$
10^{-4}	5.23466×10^{-19}	8.82608×10^{-19}	2.21922×10^{-19}	7.16091×10^{-15}	2.96643×10^{-08}
1	5.10702×10^{-14}	3.97459×10^{-14}	5.45785×10^{-13}	1.34277×10^{-04}	4.39453×10^{-03}
2	1.02140×10^{-13}	7.94919×10^{-14}	1.09157×10^{-12}	1.11758×10^{-09}	8.78906×10^{-03}
3	1.42108×10^{-13}	5.30686×10^{-13}	4.85078×10^{-12}	2.48352×10^{-10}	2.26562×10^{-02}
4	2.04281×10^{-13}	1.58983×10^{-13}	2.18314×10^{-12}	2.23517×10^{-09}	1.75781×10^{-02}
5	2.45137×10^{-13}	3.09086×10^{-13}	2.03748×10^{-12}	8.49366×10^{-09}	3.62499×10^{-02}
6	2.84217×10^{-13}	1.06137×10^{-12}	9.70157×10^{-12}	4.96704×10^{-10}	4.53124×10^{-02}
7	3.29514×10^{-13}	5.15143×10^{-14}	4.15667×10^{-13}	8.30207×10^{-09}	4.19642×10^{-02}
8	4.08562×10^{-13}	3.17967×10^{-13}	4.36628×10^{-12}	4.47034×10^{-09}	3.51562×10^{-02}
9	4.54747×10^{-13}	7.69162×10^{-13}	0.00000	1.98682×10^{-09}	1.87500×10^{-02}
10	4.90274×10^{-13}	6.18172×10^{-13}	4.07496×10^{-12}	1.69873×10^{-08}	7.24999×10^{-02}

Na inversão de $F_1(s)$, como mostra a Tabela 9.2, indica-se valores entre $N = 18$ e $N = 24$ para a técnica de Talbot.

9.1.3 Método de Talbot-Racional

Tabela 9.3: Erro absoluto da inversão de $F_1(s)$, pelo método de Talbot-Racional com diferentes valores de N

t	$N = 18$	$N = 24$	$N = 32$	$N = 50$	$N = 180$
10^{-4}	5.66096×10^{-14}	2.24107×10^{-17}	1.06726×10^{-19}	1.06726×10^{-19}	8.98066×10^{-10}
1	5.66096×10^{-09}	2.24065×10^{-12}	1.04360×10^{-14}	1.04360×10^{-14}	6.24623×10^{-05}
2	1.13219×10^{-08}	4.48130×10^{-12}	2.08721×10^{-14}	2.08721×10^{-14}	1.24924×10^{-04}
3	1.69829×10^{-08}	6.72262×10^{-12}	2.66453×10^{-14}	2.66453×10^{-14}	1.83703×10^{-04}
4	2.26438×10^{-08}	8.96260×10^{-12}	4.17443×10^{-14}	4.17443×10^{-14}	2.49849×10^{-04}
5	2.83048×10^{-08}	1.12034×10^{-11}	5.15143×10^{-14}	5.15143×10^{-14}	4.32380×10^{-04}
6	3.39658×10^{-08}	1.34452×10^{-11}	5.32907×10^{-14}	5.32907×10^{-14}	3.67407×10^{-04}
7	3.96267×10^{-08}	1.56816×10^{-11}	6.30606×10^{-14}	6.30606×10^{-14}	6.46714×10^{-04}
8	4.52877×10^{-08}	1.79252×10^{-11}	8.34887×10^{-14}	8.34887×10^{-14}	4.99698×10^{-04}
9	5.09487×10^{-08}	2.01616×10^{-11}	9.05941×10^{-14}	9.05941×10^{-14}	5.00259×10^{-04}
10	5.66096×10^{-08}	2.24069×10^{-11}	1.03028×10^{-13}	1.03028×10^{-14}	8.64761×10^{-04}

Na inversão de $F_1(s)$, conforme Tabela 9.3, a técnica de Talbot-Racional fornece excelentes resultados e com boa precisão numérica de $N = 32$ até $N = 50$.

9.2 Inversão de $F_2(s)$ para $a = 0.5$

9.2.1 Método de Stehfest

Tabela 9.4: Erro absoluto da inversão de $F_2(s)$ para $a = 0.5$, pelo método de Stehfest com diferentes valores de N

t	$N = 8$	$N = 12$	$N = 18$	$N = 24$	$N = 32$
10^{-4}	7.70380×10^{-10}	2.54299×10^{-10}	7.63036×10^{-07}	1.06060×10^{-02}	$1.70753 \times 10^{+03}$
1	2.34392×10^{-04}	9.73698×10^{-07}	1.60641×10^{-06}	6.56748×10^{-03}	$3.50779 \times 10^{+03}$
2	7.21448×10^{-04}	1.00519×10^{-05}	5.34742×10^{-07}	4.31294×10^{-03}	$4.14053 \times 10^{+03}$
3	2.77258×10^{-05}	5.99695×10^{-06}	1.18198×10^{-06}	1.79281×10^{-02}	$4.85730 \times 10^{+03}$
4	1.10526×10^{-03}	5.76479×10^{-05}	7.65429×10^{-07}	9.80631×10^{-03}	$4.52823 \times 10^{+03}$
5	1.86366×10^{-03}	9.71645×10^{-05}	2.31103×10^{-07}	5.53096×10^{-03}	$3.86332 \times 10^{+03}$
6	2.03619×10^{-03}	9.09280×10^{-05}	3.11433×10^{-07}	2.05278×10^{-05}	$4.97035 \times 10^{+03}$
7	1.75214×10^{-03}	4.13521×10^{-05}	2.47131×10^{-06}	2.94518×10^{-03}	$2.64259 \times 10^{+03}$
8	1.22274×10^{-03}	2.95800×10^{-05}	1.80258×10^{-06}	5.73221×10^{-03}	$1.38810 \times 10^{+03}$
9	6.23718×10^{-04}	9.86922×10^{-05}	4.40534×10^{-06}	9.66584×10^{-03}	$1.09336 \times 10^{+03}$
10	6.67214×10^{-05}	1.50542×10^{-04}	4.49223×10^{-06}	5.81622×10^{-03}	$3.16043 \times 10^{+03}$

Para aproximação de $F_2(s)$ com $a = 0.5$ através do método de Stehfest, de acordo com a Tabela 9.4, aponta-se valores entre $N = 8$ e $N = 18$.

9.2.2 Método de Talbot

Tabela 9.5: Erro absoluto da inversão de $F_2(s)$ para $a = 0.5$, pelo método de Talbot com diferentes valores de N

t	$N = 18$	$N = 24$	$N = 32$	$N = 50$	$N = 88$
10^{-4}	1.19659×10^{-12}	1.02740×10^{-12}	8.11350×10^{-13}	6.46341×10^{-09}	1.77104×10^{-02}
1	1.23245×10^{-12}	4.19442×10^{-13}	4.46687×10^{-12}	1.11090×10^{-08}	2.13744×10^{-02}
2	1.29007×10^{-12}	4.65794×10^{-13}	6.05926×10^{-12}	6.16952×10^{-09}	2.25669×10^{-02}
3	1.30848×10^{-12}	1.37670×10^{-12}	1.13508×10^{-11}	1.41512×10^{-09}	7.52134×10^{-02}
4	1.31736×10^{-12}	4.41979×10^{-13}	5.26231×10^{-12}	1.24107×10^{-08}	1.65852×10^{-02}
5	1.35634×10^{-12}	1.51254×10^{-13}	2.47957×10^{-12}	3.20510×10^{-08}	1.10400×10^{-02}
6	1.38008×10^{-12}	1.14133×10^{-12}	1.27222×10^{-11}	2.48266×10^{-09}	6.85370×10^{-02}
7	1.39725×10^{-12}	5.90014×10^{-14}	3.83883×10^{-12}	1.72838×10^{-08}	3.41166×10^{-03}
8	1.41810×10^{-12}	3.09658×10^{-13}	1.90127×10^{-12}	8.65374×10^{-09}	1.75343×10^{-02}
9	1.40095×10^{-12}	3.95456×10^{-13}	2.15112×10^{-12}	4.56844×10^{-09}	6.04145×10^{-02}
10	1.46167×10^{-12}	2.97517×10^{-13}	4.06656×10^{-13}	2.54988×10^{-08}	1.01370×10^{-02}

Segundo a Tabela 9.5, no método de Talbot para aproximação de $F_2(s)$ com $a = 0.5$, indica-se valores de $N = 18$ até $N = 32$.

9.2.3 Método de Talbot-Racional

Tabela 9.6: Erro absoluto da inversão de $F_2(s)$ para $a = 0.5$

t	$N = 18$	$N = 24$	$N = 32$	$N = 50$	$N = 180$
10^{-4}	5.55124×10^{-11}	1.90958×10^{-14}	8.16013×10^{-14}	7.95141×10^{-13}	1.22822×10^{-03}
1	1.76022×10^{-11}	1.23234×10^{-14}	7.10542×10^{-14}	8.88733×10^{-13}	2.57927×10^{-04}
2	2.53052×10^{-11}	1.16573×10^{-15}	6.79456×10^{-14}	8.05688×10^{-13}	2.80697×10^{-04}
3	3.01191×10^{-11}	5.77315×10^{-15}	6.00908×10^{-14}	6.85007×10^{-13}	4.24368×10^{-06}
4	9.60964×10^{-12}	4.88498×10^{-15}	5.98965×10^{-14}	6.93722×10^{-13}	1.57152×10^{-04}
5	1.33855×10^{-11}	2.26207×10^{-15}	5.53029×10^{-14}	7.14234×10^{-13}	1.29955×10^{-03}
6	3.18867×10^{-11}	4.86416×10^{-15}	5.32976×10^{-14}	6.55739×10^{-13}	5.62179×10^{-05}
7	5.43039×10^{-12}	7.86870×10^{-15}	5.14796×10^{-14}	5.72063×10^{-13}	9.33083×10^{-04}
8	1.96197×10^{-11}	3.23005×10^{-15}	4.79685×10^{-14}	6.06452×10^{-13}	1.27127×10^{-04}
9	1.07390×10^{-11}	5.04110×10^{-15}	4.66068×10^{-14}	5.56053×10^{-13}	5.39632×10^{-07}
10	1.98574×10^{-11}	4.76788×10^{-15}	4.52008×10^{-14}	5.70154×10^{-13}	1.08556×10^{-03}

Segundo a Tabela 9.6, o método de Talbot-Racional mostrou-se mais adequado para aproximação de $F_2(s)$ com $a = 0.5$ para os valores entre $N = 24$ e $N = 50$.

9.3 Inversão de $F_2(s)$ para $a = 2$

9.3.1 Método de Stehfest

Tabela 9.7: Erro absoluto da inversão de $F_2(s)$ para $a = 2$, pelo método de Stehfest com diferentes valores de N

t	$N = 10$	$N = 14$	$N = 18$	$N = 24$	$N = 32$
10^{-4}	6.98351×10^{-10}	1.77665×10^{-10}	1.49885×10^{-06}	1.49885×10^{-06}	$2.26362 \times 10^{+03}$
1	2.80590×10^{-04}	1.01682×10^{-05}	7.65429×10^{-07}	7.65429×10^{-07}	$4.52823 \times 10^{+03}$
2	1.20893×10^{-04}	2.01591×10^{-05}	1.80258×10^{-06}	1.80258×10^{-06}	$1.38810 \times 10^{+03}$
3	5.07677×10^{-04}	4.61653×10^{-05}	1.78705×10^{-07}	1.78705×10^{-07}	$4.04137 \times 10^{+03}$
4	4.27179×10^{-04}	1.23442×10^{-05}	4.63216×10^{-06}	4.63216×10^{-06}	$2.48259 \times 10^{+03}$
5	1.55520×10^{-04}	4.78922×10^{-05}	3.01208×10^{-06}	3.01208×10^{-06}	$1.88821 \times 10^{+03}$
6	3.75873×10^{-05}	4.38670×10^{-05}	2.10040×10^{-06}	2.10040×10^{-06}	$1.67249 \times 10^{+03}$
7	1.29489×10^{-04}	2.39658×10^{-05}	4.79151×10^{-06}	4.79151×10^{-06}	$1.88087 \times 10^{+03}$
8	1.56536×10^{-04}	4.87033×10^{-06}	5.84203×10^{-06}	5.84203×10^{-06}	$9.05343 \times 10^{+03}$
9	1.50852×10^{-04}	7.95395×10^{-06}	4.17079×10^{-06}	4.17079×10^{-06}	$1.02721 \times 10^{+03}$
10	1.31643×10^{-04}	1.46211×10^{-05}	2.25772×10^{-06}	2.25770×10^{-06}	$1.76946 \times 10^{+03}$

Para aproximação de $F_2(s)$ com $a = 2$ através do método de Stehfest, de acordo com a Tabela 9.7, sugere-se valores entre $N = 18$ e $N = 24$.

9.3.2 Método de Talbot

Tabela 9.8: Erro absoluto da inversão de $F_2(s)$ para $a = 2$, pelo método de Talbot com diferentes valores de N

t	$N = 18$	$N = 24$	$N = 32$	$N = 50$	$N = 80$
10^{-4}	4.33686×10^{-12}	9.56235×10^{-13}	3.03368×10^{-12}	8.19758×10^{-09}	8.08420×10^{-03}
1	2.19838×10^{-12}	4.41979×10^{-13}	5.26231×10^{-12}	1.24107×10^{-08}	3.88997×10^{-03}
2	9.25058×10^{-12}	3.09658×10^{-13}	1.90127×10^{-12}	8.65374×10^{-09}	3.17892×10^{-03}
3	1.94125×10^{-12}	9.82498×10^{-13}	7.19737×10^{-12}	1.62989×10^{-09}	4.43187×10^{-03}
4	4.33376×10^{-12}	2.15454×10^{-13}	2.12539×10^{-12}	6.46899×10^{-09}	2.72804×10^{-03}
5	5.95008×10^{-12}	9.63466×10^{-13}	1.99549×10^{-12}	2.29818×10^{-08}	9.26414×10^{-03}
6	5.53752×10^{-12}	6.12990×10^{-13}	6.43375×10^{-12}	1.45700×10^{-09}	3.71708×10^{-03}
7	8.12865×10^{-12}	1.47027×10^{-13}	3.17912×10^{-12}	1.35799×10^{-08}	3.96288×10^{-03}
8	1.11907×10^{-12}	1.29023×10^{-13}	2.06169×10^{-12}	5.55652×10^{-09}	2.49034×10^{-03}
9	1.23600×10^{-12}	1.96210×10^{-13}	3.17902×10^{-12}	1.65800×10^{-09}	5.16494×10^{-03}
10	1.30087×10^{-12}	3.42201×10^{-14}	6.02426×10^{-13}	1.82044×10^{-08}	7.89062×10^{-03}

Na inversão de $F_2(s)$ com $a = 2$, conforme Tabela 9.8, a técnica de Talbot fornece excelentes resultados e com boa precisão numérica de $N = 18$ até $N = 32$.

9.3.3 Método de Talbot-Racional

Tabela 9.9: Erro absoluto da inversão de $F_2(s)$ para $a = 2$, pelo método de Talbot-Racional com diferentes valores de N

t	$N = 18$	$N = 24$	$N = 32$	$N = 50$	$N = 180$
10^{-4}	5.54279×10^{-11}	1.77635×10^{-14}	8.31557×10^{-14}	8.26672×10^{-13}	1.38751×10^{-03}
1	9.60964×10^{-12}	4.88498×10^{-15}	5.98965×10^{-14}	6.93722×10^{-13}	1.57152×10^{-04}
2	1.96197×10^{-11}	3.23005×10^{-15}	4.79685×10^{-14}	6.06452×10^{-13}	1.27127×10^{-04}
3	1.16001×10^{-11}	4.26525×10^{-15}	4.10374×10^{-14}	5.09768×10^{-13}	1.58993×10^{-04}
4	5.38091×10^{-12}	6.55779×10^{-16}	3.77519×10^{-14}	5.14792×10^{-13}	6.96676×10^{-05}
5	2.50162×10^{-12}	1.27756×10^{-15}	3.03187×10^{-14}	4.43146×10^{-13}	9.30432×10^{-04}
6	2.18098×10^{-12}	9.22266×10^{-17}	2.99676×10^{-14}	4.09278×10^{-13}	2.89370×10^{-04}
7	1.98294×10^{-12}	8.98199×10^{-17}	2.71913×10^{-14}	3.55776×10^{-13}	5.03595×10^{-04}
8	2.43229×10^{-12}	1.02739×10^{-16}	2.49636×10^{-14}	3.56748×10^{-13}	1.65856×10^{-04}
9	2.17639×10^{-12}	3.62854×10^{-16}	2.13404×10^{-14}	3.17209×10^{-13}	2.51443×10^{-04}
10	2.20374×10^{-12}	5.61878×10^{-17}	1.95374×10^{-14}	2.89702×10^{-13}	5.62838×10^{-04}

Para aproximação de $F_2(s)$ com $a = 2$, de acordo com a Tabela 9.9, aponta-se valores entre $N = 18$ e $N = 50$, para o método de Talbot-Racional.

9.4 Inversão de $F_2(s)$ para $a = 50$

9.4.1 Método de Stehfest

Tabela 9.10: Erro absoluto da inversão de $F_2(s)$ para $a = 50$, pelo método de Stehfest com diferentes valores de N

t	$N = 10$	$N = 12$	$N = 14$	$N = 18$	$N = 24$
10^{-4}	1.74096×10^{-08}	7.44113×10^{-10}	7.87769×10^{-10}	4.46367×10^{-07}	2.41103×10^{-03}
1	7.17051×10^{-06}	8.09541×10^{-06}	1.33305×10^{-06}	2.76602×10^{-07}	1.61743×10^{-03}
2	4.65295×10^{-06}	3.55096×10^{-07}	6.12351×10^{-07}	1.44354×10^{-07}	6.51359×10^{-04}
3	1.73890×10^{-06}	5.23781×10^{-07}	7.84639×10^{-08}	5.70435×10^{-08}	2.42710×10^{-04}
4	7.27065×10^{-07}	3.35352×10^{-07}	2.11948×10^{-08}	4.51691×10^{-08}	3.90529×10^{-04}
5	3.27011×10^{-07}	2.07167×10^{-07}	3.47554×10^{-08}	3.16649×10^{-08}	6.23226×10^{-04}
6	1.49158×10^{-07}	1.31537×10^{-07}	3.11811×10^{-08}	4.10946×10^{-08}	4.35352×10^{-04}
7	6.32358×10^{-08}	8.63674×10^{-08}	2.51029×10^{-08}	3.01515×10^{-08}	3.41892×10^{-04}
8	1.93772×10^{-08}	5.84528×10^{-08}	1.96232×10^{-08}	1.89756×10^{-08}	3.48806×10^{-04}
9	3.71927×10^{-09}	4.05678×10^{-08}	1.54004×10^{-08}	3.32947×10^{-08}	8.98838×10^{-05}
10	1.59690×10^{-08}	2.87237×10^{-08}	1.21262×10^{-08}	1.83936×10^{-08}	1.28626×10^{-04}

De acordo com a Tabela 9.10, na inversão de $F_2(s)$ com $a = 50$ através do método de Stehfest, recomenda-se os valores de $N = 10$ e $N = 18$.

9.4.2 Método de Talbot

Tabela 9.11: Erro absoluto da inversão de $F_2(s)$ para $a = 50$, pelo método de Talbot com diferentes valores de N

t	$N = 18$	$N = 24$	$N = 32$	$N = 50$	$N = 90$
10^{-4}	1.17483×10^{-12}	1.04471×10^{-12}	1.76547×10^{-12}	5.68721×10^{-09}	6.01309×10^{-02}
1	1.56745×10^{-12}	7.38964×10^{-14}	1.92874×10^{-22}	2.98023×10^{-09}	6.25000×10^{-02}
2	9.57811×10^{-13}	4.54747×10^{-14}	3.63797×10^{-13}	1.86264×10^{-09}	3.98437×10^{-02}
3	6.55594×10^{-13}	7.95807×10^{-14}	4.85063×10^{-13}	4.96705×10^{-10}	3.43750×10^{-02}
4	4.91517×10^{-13}	1.42108×10^{-14}	1.36424×10^{-13}	1.02445×10^{-09}	2.57812×10^{-02}
5	3.91793×10^{-13}	4.54747×10^{-15}	2.18278×10^{-13}	2.45869×10^{-09}	2.56250×10^{-02}
6	3.25073×10^{-13}	3.78956×10^{-14}	2.42531×10^{-13}	3.72529×10^{-10}	2.03125×10^{-02}
7	2.77010×10^{-13}	1.62409×10^{-15}	2.85841×10^{-13}	1.11758×10^{-09}	4.91071×10^{-03}
8	2.41495×10^{-13}	1.42108×10^{-14}	4.54747×10^{-14}	6.51925×10^{-10}	1.36718×10^{-02}
9	2.13241×10^{-13}	1.01054×10^{-14}	1.61687×10^{-13}	3.72529×10^{-10}	1.00694×10^{-02}
10	1.92201×10^{-13}	2.27373×10^{-15}	9.09494×10^{-14}	1.19209×10^{-09}	1.37500×10^{-02}

Segundo a Tabela 9.11, no método de Talbot para aproximação de $F_2(s)$ com $a = 50$, indica-se valores de $N = 18$ até $N = 32$.

9.4.3 Método de Talbot-Racional

Tabela 9.12: Erro absoluto da inversão de $F_2(s)$ para $a = 50$, pelo método de Talbot-Racional com diferentes valores de N

t	$N = 18$	$N = 24$	$N = 32$	$N = 50$	$N = 180$
10^{-4}	5.27362×10^{-11}	1.73194×10^{-14}	7.21644×10^{-14}	7.85704×10^{-13}	1.38973×10^{-03}
1	1.83865×10^{-12}	9.33582×10^{-17}	1.05508×10^{-14}	1.65000×10^{-13}	2.16278×10^{-04}
2	1.23773×10^{-12}	1.27484×10^{-16}	5.60468×10^{-15}	9.11479×10^{-13}	2.01484×10^{-04}
3	8.96243×10^{-13}	1.47175×10^{-16}	3.78499×10^{-15}	6.32691×10^{-14}	2.42774×10^{-04}
4	6.94878×10^{-13}	9.56493×10^{-17}	2.92428×10^{-15}	4.66251×10^{-14}	1.22788×10^{-04}
5	5.65051×10^{-13}	1.22115×10^{-16}	2.21756×10^{-15}	3.66689×10^{-14}	4.39199×10^{-05}
6	4.75186×10^{-13}	9.48836×10^{-17}	1.88680×10^{-15}	3.33607×10^{-14}	1.31419×10^{-04}
7	4.09581×10^{-13}	9.02434×10^{-17}	1.68549×10^{-15}	2.56465×10^{-14}	2.29507×10^{-05}
8	3.59675×10^{-13}	8.06432×10^{-17}	1.49004×10^{-15}	2.37806×10^{-14}	6.61072×10^{-05}
9	3.20494×10^{-13}	9.06864×10^{-17}	1.24910×10^{-15}	2.24891×10^{-14}	6.55125×10^{-05}
10	2.88944×10^{-13}	7.09160×10^{-17}	1.14307×10^{-15}	1.81754×10^{-14}	1.61902×10^{-05}

Na inversão de $F_2(s)$ com $a = 50$, conforme Tabela 9.12, a técnica de Talbot-Racional fornece excelentes resultados e com boa precisão numérica de $N = 24$ a $N = 32$.

9.5 Inversão de $F_3(s)$ para $a = 0.5$

9.5.1 Método de Stehfest

Tabela 9.13: Erro absoluto da inversão de $F_3(s)$ para $a = 0.5$, pelo método de Stehfest com diferentes valores de N

t	$N = 14$	$N = 16$	$N = 18$	$N = 20$	$N = 24$
10^{-4}	1.80716×10^{-12}	2.11776×10^{-13}	9.57624×10^{-13}	1.49053×10^{-12}	1.11218×10^{-09}
1	2.59109×10^{-06}	9.53772×10^{-07}	1.54756×10^{-07}	2.02628×10^{-06}	6.17157×10^{-04}
2	6.96804×10^{-05}	6.41145×10^{-05}	2.90405×10^{-07}	3.81649×10^{-06}	2.10663×10^{-03}
3	2.89346×10^{-03}	4.36789×10^{-04}	1.08381×10^{-04}	2.36198×10^{-05}	1.42259×10^{-03}
4	6.30167×10^{-03}	2.23828×10^{-03}	1.01586×10^{-03}	8.97269×10^{-06}	3.11473×10^{-03}
5	2.88737×10^{-02}	9.98579×10^{-03}	5.56794×10^{-04}	1.22928×10^{-03}	4.51062×10^{-04}
6	9.91714×10^{-03}	1.97232×10^{-02}	1.11862×10^{-02}	1.28199×10^{-03}	1.15961×10^{-03}
7	1.04147×10^{-01}	2.48964×10^{-02}	1.02105×10^{-02}	1.03386×10^{-02}	2.77639×10^{-04}
8	1.21624×10^{-01}	9.06341×10^{-02}	3.29649×10^{-02}	1.81789×10^{-03}	8.81284×10^{-03}
9	1.47694×10^{-02}	7.05716×10^{-02}	7.23161×10^{-02}	3.53163×10^{-02}	1.31403×10^{-02}
10	2.24732×10^{-01}	6.80001×10^{-02}	2.79262×10^{-02}	5.22529×10^{-02}	1.18847×10^{-02}

Como pode-se observar através da Tabela 9.13, na inversão de funções da classe de $F_3(s)$ com $a = 0.5$, recomenda-se valores de $N = 16$ a $N = 20$ para a técnica de Stehfest.

9.5.2 Método de Talbot

Tabela 9.14: Erro absoluto da inversão de $F_3(s)$ para $a = 0.5$, pelo método de Talbot com diferentes valores de N

t	$N = 18$	$N = 24$	$N = 26$	$N = 32$	$N = 90$
10^{-4}	2.52415×10^{-19}	4.63327×10^{-19}	9.91028×10^{-20}	1.88634×10^{-18}	1.65374×10^{-08}
1	2.50355×10^{-14}	1.50435×10^{-14}	8.88178×10^{-16}	1.88515×10^{-13}	1.39819×10^{-03}
2	5.12923×10^{-14}	7.01660×10^{-14}	4.18554×10^{-14}	2.69229×10^{-13}	3.28739×10^{-03}
3	6.94999×10^{-14}	2.28927×10^{-13}	2.43138×10^{-14}	2.94986×10^{-12}	1.14272×10^{-02}
4	1.01474×10^{-13}	7.17204×10^{-14}	1.49880×10^{-14}	1.60660×10^{-12}	6.56305×10^{-03}
5	1.21902×10^{-13}	1.50879×10^{-13}	1.27675×10^{-14}	1.36957×10^{-12}	1.75346×10^{-02}
6	1.38472×10^{-13}	4.24271×10^{-13}	1.66533×10^{-16}	4.30477×10^{-12}	2.23700×10^{-02}
7	2.03670×10^{-13}	4.16333×10^{-15}	9.50906×10^{-14}	6.07847×10^{-14}	2.24310×10^{-02}
8	3.02180×10^{-12}	2.35367×10^{-13}	1.89848×10^{-13}	1.41764×10^{-12}	1.15568×10^{-02}
9	1.79978×10^{-12}	3.17301×10^{-13}	1.35558×10^{-13}	2.68784×10^{-13}	1.08634×10^{-02}
10	7.70780×10^{-10}	1.88626×10^{-13}	1.56874×10^{-13}	2.02582×10^{-12}	3.73257×10^{-02}

Para aproximação de $F_3(s)$ com $a = 0.5$, de acordo com a Tabela 9.14, aponta-se valores entre $N = 18$ e $N = 32$, para o método de Talbot.

9.5.3 Método de Talbot-Racional

Tabela 9.15: Erro absoluto da inversão de $F_3(s)$ para $a = 0.5$ pelo método de Talbot-Racional com diferentes valores de N .

t	$N = 18$	$N = 24$	$N = 32$	$N = 50$	$N = 190$
10^{-4}	2.83048×10^{-14}	1.12045×10^{-17}	5.08219×10^{-20}	3.94717×10^{-19}	2.47343×10^{-09}
1	4.14681×10^{-08}	2.47298×10^{-11}	3.10862×10^{-15}	4.21884×10^{-14}	1.76633×10^{-04}
2	8.85256×10^{-07}	1.19575×10^{-10}	1.82631×10^{-13}	8.16013×10^{-14}	3.64507×10^{-04}
3	6.61380×10^{-06}	6.33273×10^{-09}	3.63875×10^{-12}	9.78106×10^{-14}	5.15523×10^{-04}
4	6.99579×10^{-06}	1.53707×10^{-07}	5.33404×10^{-11}	1.61315×10^{-13}	7.12507×10^{-04}
5	3.06850×10^{-04}	1.23017×10^{-06}	4.50719×10^{-10}	2.12163×10^{-13}	5.69064×10^{-04}
6	3.06850×10^{-04}	1.23017×10^{-06}	4.50719×10^{-10}	1.72528×10^{-13}	9.97091×10^{-04}
7	6.99009×10^{-04}	1.03413×10^{-06}	8.40225×10^{-10}	2.18158×10^{-13}	1.82826×10^{-03}
8	1.14825×10^{-02}	1.00589×10^{-04}	1.37125×10^{-07}	2.74225×10^{-13}	1.36974×10^{-03}
9	4.76481×10^{-02}	4.19901×10^{-04}	4.67158×10^{-09}	2.44249×10^{-13}	4.98028×10^{-04}
10	6.06787×10^{-02}	1.71803×10^{-03}	3.16154×10^{-06}	3.55937×10^{-13}	1.15734×10^{-03}

Segundo a Tabela 9.15, para aproximação de $F_3(s)$ com $a = 0.5$ através método de Talbot-Racional, indica-se os valores entre $N = 32$ e $N = 50$.

9.6 Inversão de $F_3(s)$ para $a = 1$

9.6.1 Método de Stehfest

Tabela 9.16: Erro absoluto da inversão de $F_3(s)$ para $a = 1$, pelo método de Stehfest com diferentes valores de N

t	$N = 10$	$N = 18$	$N = 24$	$N = 32$	$N = 50$
10^{-4}	3.47916×10^{-10}	9.62170×10^{-12}	7.31936×10^{-09}	2.92566×10^{-03}	$5.75534 \times 10^{+08}$
1	4.68526×10^{-03}	1.87227×10^{-03}	2.10663×10^{-03}	$3.14853 \times 10^{+02}$	$1.12762 \times 10^{+14}$
2	4.28830×10^{-02}	3.52894×10^{-02}	3.11473×10^{-03}	$5.96125 \times 10^{+02}$	$7.88169 \times 10^{+13}$
3	2.36720×10^{-01}	1.09091×10^{-01}	1.15961×10^{-03}	$3.26101 \times 10^{+02}$	$1.74063 \times 10^{+13}$
4	9.95772×10^{-02}	6.32448×10^{-02}	8.81284×10^{-03}	$9.53092 \times 10^{+02}$	$3.79743 \times 10^{+14}$
5	5.52843×10^{-01}	3.98934×10^{-01}	1.18847×10^{-02}	$6.92216 \times 10^{+02}$	$7.38833 \times 10^{+13}$
6	2.05765×10^{-01}	2.56706×10^{-01}	1.23773×10^{-02}	$1.10263 \times 10^{+03}$	$1.49149 \times 10^{+14}$
7	5.73414×10^{-01}	4.36919×10^{-01}	9.96929×10^{-02}	$6.01764 \times 10^{+02}$	$5.32724 \times 10^{+14}$
8	8.76160×10^{-01}	7.72513×10^{-01}	2.32689×10^{-02}	$1.67485 \times 10^{+03}$	$4.08352 \times 10^{+14}$
9	3.20066×10^{-01}	2.79461×10^{-01}	2.41893×10^{-01}	$4.05400 \times 10^{+02}$	$3.93591 \times 10^{+14}$
10	6.05387×10^{-01}	5.99253×10^{-01}	8.57974×10^{-03}	$1.65962 \times 10^{+03}$	$2.21759 \times 10^{+14}$

De acordo com a Tabela 9.16, na inversão de $F_3(s)$ com $a = 1$ através do método de Stehfest, nenhum valor de N apresentou resultados satisfatórios em todos os instantes de t .

9.6.2 Método de Talbot

Tabela 9.17: Erro absoluto da inversão de $F_3(s)$ para $a = 1$, pelo método de Talbot com diferentes valores de N

t	$N = 18$	$N = 24$	$N = 32$	$N = 50$	$N = 90$
10^{-4}	5.25160×10^{-19}	9.23265×10^{-19}	1.71778×10^{-18}	6.45214×10^{-15}	3.08012×10^{-08}
1	5.12923×10^{-14}	7.01660×10^{-14}	2.69229×10^{-13}	4.46376×10^{-10}	3.28739×10^{-03}
2	1.01474×10^{-13}	7.17204×10^{-14}	1.60660×10^{-12}	8.95639×10^{-10}	6.56305×10^{-03}
3	1.38472×10^{-13}	4.24271×10^{-13}	4.30477×10^{-12}	8.16059×10^{-10}	2.23700×10^{-02}
4	3.02180×10^{-12}	2.35367×10^{-13}	1.41764×10^{-12}	1.41531×10^{-09}	1.15568×10^{-02}
5	7.70780×10^{-10}	1.88626×10^{-13}	2.02582×10^{-12}	7.22210×10^{-09}	3.73257×10^{-02}
6	6.67230×10^{-08}	6.45428×10^{-13}	6.19332×10^{-12}	1.26347×10^{-09}	4.29803×10^{-02}
7	1.89325×10^{-06}	2.33946×10^{-12}	1.32449×10^{-12}	8.04089×10^{-09}	3.91294×10^{-02}
8	1.26677×10^{-05}	7.84746×10^{-11}	2.83428×10^{-12}	3.24209×10^{-09}	2.68582×10^{-02}
9	1.78618×10^{-03}	5.18026×10^{-09}	1.64607×10^{-12}	2.64615×10^{-09}	2.46870×10^{-02}
10	4.08945×10^{-02}	5.30016×10^{-07}	1.96331×10^{-12}	1.28716×10^{-08}	6.84788×10^{-02}

Como observa-se através da Tabela 9.17, nos testes realizados para gerar os resultados, para a técnica de Talbot na inversão de funções da classe de $F_3(s)$ com $a = 1$, recomenda-se valores de $N = 24$ a $N = 50$.

9.6.3 Método de Talbot-Racional

Tabela 9.18: Erro absoluto da inversão de $F_3(s)$, para $a = 1$ pelo método de Talbot-Racional com diferentes valores de N .

t	$N = 18$	$N = 32$	$N = 38$	$N = 50$	$N = 190$
10^{-4}	5.66096×10^{-14}	1.16890×10^{-19}	1.25360×10^{-19}	7.77576×10^{-19}	5.14472×10^{-09}
1	8.85256×10^{-07}	1.82631×10^{-13}	1.43218×10^{-14}	8.16013×10^{-14}	3.64507×10^{-04}
2	6.99579×10^{-06}	5.33404×10^{-11}	5.46229×10^{-14}	1.61315×10^{-13}	7.12507×10^{-04}
3	6.99009×10^{-04}	8.40225×10^{-10}	7.50641×10^{-12}	1.72528×10^{-13}	9.97091×10^{-04}
4	1.14825×10^{-02}	1.37125×10^{-07}	3.02304×10^{-10}	2.74225×10^{-13}	1.36974×10^{-03}
5	6.06787×10^{-02}	3.16154×10^{-06}	1.70955×10^{-08}	3.55937×10^{-13}	1.15734×10^{-03}
6	$2.07481 \times 10^{+00}$	4.41917×10^{-05}	3.33262×10^{-07}	7.82396×10^{-12}	2.02972×10^{-03}
7	5.29908×10^{-01}	5.14164×10^{-04}	4.33940×10^{-06}	2.22198×10^{-10}	3.68621×10^{-03}
8	9.63822×10^{-01}	5.51945×10^{-03}	4.90577×10^{-05}	3.27708×10^{-09}	2.76653×10^{-03}
9	4.07475×10^{-01}	4.96307×10^{-02}	5.45643×10^{-04}	3.36747×10^{-08}	9.85159×10^{-04}
10	5.44755×10^{-01}	3.20423×10^{-01}	5.81064×10^{-03}	2.92661×10^{-07}	2.30380×10^{-03}

Na inversão de $F_3(s)$ com $a = 1$, como mostra a Tabela 9.18, sugere-se valores entre $N = 38$ e $N = 50$ para a técnica de Talbot-Racional.

9.7 Inversão de $F_3(s)$ para $a = 2$

9.7.1 Método de Stehfest

Tabela 9.19: Erro absoluto da inversão de $F_3(s)$ para $a = 2$, pelo método de Stehfest com diferentes valores de N

t	$N =$	$N = 12$	$N = 18$	$N = 24$	$N = 32$
10^{-4}	3.08124×10^{-09}	1.92433×10^{-11}	5.98219×10^{-12}	4.71795×10^{-09}	5.02186×10^{-03}
1	7.49059×10^{-02}	3.52894×10^{-02}	1.01586×10^{-03}	3.11473×10^{-03}	$5.96125 \times 10^{+02}$
2	3.20443×10^{-01}	6.32448×10^{-02}	3.29649×10^{-02}	8.81284×10^{-03}	$9.53092 \times 10^{+02}$
3	1.73321×10^{-01}	2.56706×10^{-01}	2.07120×10^{-01}	1.23773×10^{-02}	$1.10263 \times 10^{+03}$
4	9.63816×10^{-01}	7.72513×10^{-01}	4.16603×10^{-01}	2.32689×10^{-02}	$1.67485 \times 10^{+03}$
5	5.76910×10^{-01}	5.99253×10^{-01}	3.52049×10^{-01}	8.57974×10^{-03}	$1.65962 \times 10^{+03}$
6	5.58007×10^{-01}	5.19863×10^{-01}	3.73882×10^{-01}	3.46120×10^{-01}	$1.95886 \times 10^{+03}$
7	9.78401×10^{-01}	$1.01527 \times 10^{+00}$	9.81744×10^{-01}	7.25125×10^{-01}	$1.59691 \times 10^{+03}$
8	2.94538×10^{-01}	2.71070×10^{-01}	3.35482×10^{-01}	3.64805×10^{-01}	$3.80116 \times 10^{+02}$
9	7.54481×10^{-01}	7.41867×10^{-01}	7.79540×10^{-01}	6.91720×10^{-01}	$1.33850 \times 10^{+03}$
10	9.11194×10^{-01}	9.17131×10^{-01}	9.04622×10^{-01}	9.56173×10^{-01}	$1.68257 \times 10^{+03}$

De acordo com a Tabela 9.19, na inversão de $F_3(s)$ com $a = 2$ através do método de Stehfest, nenhum valor de N apresentou resultados satisfatórios em todos os instantes de t .

9.7.2 Método de Talbot

Tabela 9.20: Erro absoluto da inversão de $F_3(s)$ para $a = 2$, pelo método de Talbot com diferentes valores de N

t	$N = 24$	$N = 32$	$N = 36$	$N = 50$	$N = 88$
10^{-4}	1.81603×10^{-18}	2.87652×10^{-18}	8.96974×10^{-17}	9.73588×10^{-15}	1.57046×10^{-08}
1	7.17204×10^{-14}	1.60660×10^{-12}	5.79025×10^{-12}	8.95639×10^{-10}	4.66741×10^{-03}
2	2.35367×10^{-13}	1.41764×10^{-12}	1.41764×10^{-12}	1.41531×10^{-09}	9.92749×10^{-03}
3	6.45428×10^{-13}	6.19332×10^{-12}	2.94764×10^{-11}	1.26347×10^{-09}	1.51157×10^{-02}
4	7.84746×10^{-12}	2.83428×10^{-12}	2.17517×10^{-11}	3.24209×10^{-09}	1.80636×10^{-02}
5	5.30016×10^{-07}	1.96331×10^{-12}	7.78410×10^{-12}	1.28716×10^{-08}	1.97288×10^{-02}
6	3.61310×10^{-04}	1.11779×10^{-11}	3.44180×10^{-11}	2.93315×10^{-09}	3.00937×10^{-02}
7	1.66784×10^{-02}	6.23019×10^{-08}	9.29474×10^{-11}	1.19739×10^{-08}	3.30533×10^{-02}
8	1.63191×10^{-01}	1.39654×10^{-05}	3.34574×10^{-09}	4.07136×10^{-09}	3.00908×10^{-02}
9	7.48599×10^{-01}	4.46907×10^{-03}	7.67583×10^{-06}	1.46364×10^{-09}	2.54016×10^{-02}
10	9.12984×10^{-01}	$1.49811 \times 10^{+00}$	8.01022×10^{-04}	1.80225×10^{-08}	3.10702×10^{-02}

Segundo a Tabela 9.20, para aproximação de $F_3(s)$ com $a = 2$ através método de Talbot, indica-se os valores entre $N = 36$ e $N = 50$.

9.7.3 Método de Talbot-Racional

Tabela 9.21: Erro absoluto da inversão de $F_3(s)$, para $a = 2$ pelo método de Talbot-Racional com diferentes valores de N .

t	$N = 32$	$N = 64$	$N = 90$	$N = 120$	$N = 190$
10^{-4}	2.23616×10^{-19}	1.07698×10^{-16}	5.54874×10^{-15}	3.49846×10^{-13}	1.00413×10^{-08}
1	5.33404×10^{-11}	1.06820×10^{-11}	5.40069×10^{-10}	3.21499×10^{-08}	7.12507×10^{-04}
2	1.37125×10^{-07}	1.97515×10^{-11}	1.02796×10^{-09}	6.26819×10^{-08}	1.36974×10^{-03}
3	4.41917×10^{-05}	2.67643×10^{-11}	1.50277×10^{-09}	9.38129×10^{-08}	2.02972×10^{-03}
4	5.51945×10^{-03}	3.02134×10^{-11}	1.71677×10^{-09}	1.20654×10^{-07}	2.76653×10^{-03}
5	3.20423×10^{-01}	3.73712×10^{-11}	1.98031×10^{-09}	1.43664×10^{-07}	2.30380×10^{-03}
6	5.96833×10^{-01}	2.56183×10^{-09}	2.12663×10^{-09}	1.69997×10^{-07}	3.78582×10^{-03}
7	9.90046×10^{-01}	4.15239×10^{-07}	2.17794×10^{-09}	1.96481×10^{-07}	6.95537×10^{-03}
8	2.87832×10^{-01}	4.02757×10^{-05}	2.06524×10^{-09}	1.94620×10^{-07}	5.09579×10^{-03}
9	7.50979×10^{-01}	2.16334×10^{-03}	1.97539×10^{-09}	2.28767×10^{-07}	2.22158×10^{-03}
10	9.12945×10^{-01}	1.36130×10^{-02}	1.57773×10^{-09}	2.12388×10^{-07}	4.14141×10^{-03}

Como pode-se observar através da Tabela 9.21, na inversão de funções da classe de $F_3(s)$ para $a = 2$, para a técnica de Talbot-Racional, recomenda-se valores entre $N = 90$ e $N = 120$.

9.8 Inversão de $F_4(s)$

9.8.1 Método de Stehfest

Tabela 9.22: Erro absoluto da inversão de $F_4(s)$, pelo método de Stehfest com diferentes valores de N

t	$N = 12$	$N = 18$	$N = 24$	$N = 32$	$N = 50$
10^{-4}	9.62191×10^{-12}	2.62888×10^{-12}	5.49673×10^{-09}	3.06902×10^{-03}	$8.08879 \times 10^{+08}$
1	1.13330×10^{-02}	5.29460×10^{-05}	2.45303×10^{-04}	$4.08559 \times 10^{+02}$	$1.22076 \times 10^{+14}$
2	1.14906×10^{-01}	8.66251×10^{-03}	2.05676×10^{-03}	$5.50004 \times 10^{+02}$	$9.46524 \times 10^{+13}$
3	7.72553×10^{-01}	7.84508×10^{-02}	6.23119×10^{-03}	$5.70180 \times 10^{+02}$	$1.24425 \times 10^{+14}$
4	$1.63898 \times 10^{+00}$	4.46192×10^{-01}	4.68779×10^{-02}	$9.96138 \times 10^{+02}$	$7.95513 \times 10^{+14}$
5	$1.41671 \times 10^{+00}$	9.59940×10^{-01}	2.20116×10^{-01}	$7.95948 \times 10^{+02}$	$2.55171 \times 10^{+14}$
6	$3.27286 \times 10^{+00}$	6.92530×10^{-01}	4.58909×10^{-01}	$1.07594 \times 10^{+03}$	$1.58710 \times 10^{+13}$
7	$4.65132 \times 10^{+00}$	$3.15920 \times 10^{+00}$	3.95774×10^{-01}	$7.90050 \times 10^{+02}$	$1.55237 \times 10^{+14}$
8	6.36752×10^{-01}	$2.03405 \times 10^{+00}$	$2.23037 \times 10^{+00}$	$7.79257 \times 10^{+02}$	$5.81234 \times 10^{+14}$
9	$7.40399 \times 10^{+00}$	$4.32276 \times 10^{+00}$	3.58773×10^{-01}	$8.49032 \times 10^{+01}$	$4.65502 \times 10^{+14}$
10	$7.75682 \times 10^{+00}$	$6.72963 \times 10^{+00}$	$4.57135 \times 10^{+00}$	$5.50062 \times 10^{+02}$	$2.65250 \times 10^{+14}$

Na inversão de $F_4(s)$, como mostra a Tabela 9.22, nenhum valor de N apresentou resultados satisfatórios em todos os instantes de t para a técnica de Stehfest.

9.8.2 Método de Talbot

Tabela 9.23: Erro absoluto da inversão de $F_4(s)$, pelo método de Talbot com diferentes valores de N

t	$N = 18$	$N = 24$	$N = 32$	$N = 50$	$N = 90$
10^{-4}	5.37018×10^{-19}	7.36918×10^{-19}	5.87840×10^{-19}	4.49250×10^{-15}	3.30749×10^{-08}
1	5.02931×10^{-14}	4.69624×10^{-14}	1.77746×10^{-13}	4.52378×10^{-10}	2.89996×10^{-03}
2	1.01807×10^{-13}	1.02917×10^{-13}	8.75854×10^{-13}	1.41483×10^{-10}	7.15945×10^{-03}
3	9.63673×10^{-14}	4.20552×10^{-13}	3.58868×10^{-12}	4.39176×10^{-10}	2.27308×10^{-02}
4	6.71973×10^{-11}	1.31450×10^{-13}	2.72315×10^{-12}	2.09383×10^{-10}	1.43317×10^{-02}
5	2.17265×10^{-08}	5.68434×10^{-14}	6.59472×10^{-14}	6.84004×10^{-09}	3.51859×10^{-02}
6	2.47055×10^{-06}	3.67705×10^{-13}	3.49764×10^{-12}	8.39989×10^{-10}	4.01883×10^{-02}
7	1.18905×10^{-04}	1.35828×10^{-10}	1.18749×10^{-12}	6.29064×10^{-09}	3.98157×10^{-02}
8	2.39816×10^{-03}	1.01227×10^{-08}	1.61315×10^{-12}	2.56093×10^{-09}	2.34997×10^{-02}
9	2.42707×10^{-03}	2.78508×10^{-07}	1.42108×10^{-12}	8.59889×10^{-10}	2.10056×10^{-02}
10	8.72397×10^{-01}	4.78897×10^{-06}	2.00550×10^{-12}	8.50315×10^{-09}	6.11597×10^{-02}

Para aproximação de $F_4(s)$ de acordo com a Tabela 9.23, aponta-se valores entre $N = 24$ e $N = 32$, para o método de Talbot.

9.8.3 Método de Talbot-Racional

Tabela 9.24: Erro absoluto da inversão de $F_4(s)$ pelo método de Talbot-Racional com diferentes valores de N .

t	$N = 32$	$N = 38$	$N = 70$	$N = 100$	$N = 210$
10^{-4}	1.05032×10^{-19}	1.32137×10^{-19}	1.03033×10^{-16}	2.37902×10^{-15}	3.91428×10^{-08}
1	9.22817×10^{-13}	1.60982×10^{-14}	9.52993×10^{-12}	1.53434×10^{-10}	1.11365×10^{-03}
2	4.65338×10^{-10}	1.36790×10^{-12}	1.86014×10^{-11}	2.98813×10^{-10}	1.88326×10^{-03}
3	6.22009×10^{-08}	1.50071×10^{-11}	2.51283×10^{-11}	4.57032×10^{-10}	4.88038×10^{-03}
4	2.57867×10^{-06}	1.23378×10^{-08}	3.02775×10^{-11}	5.36871×10^{-10}	4.06071×10^{-03}
5	3.09477×10^{-05}	3.14633×10^{-07}	3.25219×10^{-11}	6.29956×10^{-10}	4.93728×10^{-02}
6	1.27082×10^{-04}	2.46652×10^{-06}	3.26272×10^{-11}	5.82057×10^{-10}	2.38822×10^{-03}
7	1.96847×10^{-04}	1.50185×10^{-05}	3.02939×10^{-11}	5.54688×10^{-10}	9.89466×10^{-03}
8	9.42173×10^{-03}	5.52510×10^{-04}	2.69140×10^{-11}	4.57580×10^{-10}	3.16175×10^{-04}
9	2.98689×10^{-01}	6.00475×10^{-03}	2.34532×10^{-11}	9.03566×10^{-10}	6.05298×10^{-02}
10	$7.49848 \times 10^{+00}$	2.44193×10^{-02}	2.18154×10^{-11}	3.33574×10^{-10}	7.19238×10^{-02}

De acordo com a Tabela 9.24, na inversão de $F_4(s)$ através do método de Talbot-Racional, sugere-se valores a partir de $N = 70$ até $N = 100$.

9.9 Inversão de F_5

9.9.1 Método de Stehfest

Tabela 9.25: Erro absoluto da inversão de $F_5(s)$, pelo método de Stehfest com diferentes valores de N

t	$N = 8$	$N = 12$	$N = 18$	$N = 24$	$N = 32$
10^{-4}	1.54020×10^{-09}	9.62616×10^{-12}	7.48733×10^{-13}	8.17969×10^{-09}	8.02694×10^{-04}
1	2.17881×10^{-04}	1.12829×10^{-05}	1.60816×10^{-07}	7.93883×10^{-04}	$2.75829 \times 10^{+02}$
2	4.10632×10^{-03}	2.16829×10^{-04}	1.41351×10^{-06}	4.26139×10^{-04}	$6.65764 \times 10^{+02}$
3	5.41059×10^{-04}	1.84085×10^{-04}	3.75713×10^{-06}	1.81524×10^{-03}	$1.89600 \times 10^{+02}$
4	4.70578×10^{-03}	5.87037×10^{-04}	8.50946×10^{-06}	2.79974×10^{-05}	$3.46766 \times 10^{+02}$
5	5.13581×10^{-03}	4.04140×10^{-04}	4.23891×10^{-06}	7.22649×10^{-04}	$3.45075 \times 10^{+02}$
6	3.43561×10^{-03}	6.58685×10^{-05}	2.00171×10^{-05}	7.13386×10^{-04}	$4.21797 \times 10^{+02}$
7	1.34933×10^{-03}	4.48254×10^{-04}	2.27900×10^{-05}	4.78576×10^{-03}	$6.62587 \times 10^{+02}$
8	2.99517×10^{-04}	6.06780×10^{-04}	9.87298×10^{-06}	3.99106×10^{-03}	$1.37028 \times 10^{+03}$
9	1.33277×10^{-03}	5.73585×10^{-04}	8.51283×10^{-06}	1.31545×10^{-03}	$9.70870 \times 10^{+01}$
10	1.84730×10^{-03}	4.32664×10^{-04}	2.32495×10^{-05}	1.91969×10^{-03}	$1.08385 \times 10^{+03}$

Segundo a Tabela 9.25, para aproximação de $F_5(s)$ através método de Stehfest, aponta-se os valores entre $N = 12$ e $N = 18$.

9.9.2 Método de Talbot

Tabela 9.26: Erro absoluto da inversão de $F_5(s)$, pelo método de Talbot com diferentes valores de N

t	$N = 18$	$N = 24$	$N = 32$	$N = 50$	$N = 80$
10^{-4}	5.23466×10^{-19}	1.06556×10^{-18}	3.89635×10^{-19}	4.16938×10^{-15}	2.74134×10^{-09}
1	4.64073×10^{-14}	5.65658×10^{-14}	7.84206×10^{-13}	4.41889×10^{-10}	1.21262×10^{-04}
2	8.80406×10^{-14}	7.67719×10^{-14}	8.83959×10^{-13}	9.33116×10^{-10}	2.17685×10^{-04}
3	1.33421×10^{-13}	2.63539×10^{-13}	2.63578×10^{-12}	3.69950×10^{-10}	3.94733×10^{-04}
4	1.66811×10^{-13}	1.13131×10^{-13}	1.23864×10^{-12}	1.55301×10^{-09}	3.68268×10^{-04}
5	2.00665×10^{-13}	1.59726×10^{-13}	7.23608×10^{-13}	4.70870×10^{-09}	1.40457×10^{-03}
6	2.30832×10^{-13}	3.47076×10^{-13}	5.10676×10^{-12}	6.51454×10^{-10}	6.47252×10^{-04}
7	2.67626×10^{-13}	2.14637×10^{-14}	3.68319×10^{-13}	3.87917×10^{-09}	6.91209×10^{-04}
8	2.34620×10^{-13}	8.65444×10^{-14}	6.32241×10^{-13}	2.95066×10^{-09}	6.93954×10^{-04}
9	1.93403×10^{-13}	2.05763×10^{-13}	1.67385×10^{-12}	1.27081×10^{-09}	1.39280×10^{-03}
10	3.00731×10^{-13}	8.12561×10^{-14}	4.17769×10^{-13}	7.49348×10^{-09}	2.11415×10^{-03}

Como observa-se na Tabela 9.26, para inversão de $F_5(s)$ através da técnica de Talbot, recomenda-se valores entre $N = 18$ e $N = 32$

9.9.3 Método de Talbot-Racional

Tabela 9.27: Erros absoluto da inversão de $F_5(s)$, pelo método de Talbot-Racional.

t	$N = 18$	$N = 24$	$N = 32$	$N = 50$	$N = 190$
10^{-4}	5.65885×10^{-14}	2.24023×10^{-17}	1.08420×10^{-19}	7.84352×10^{-19}	4.98470×10^{-09}
1	2.31081×10^{-10}	1.04138×10^{-13}	7.93809×10^{-15}	6.53921×10^{-14}	3.40393×10^{-04}
2	3.33604×10^{-10}	1.04527×10^{-13}	1.31561×10^{-14}	1.22957×10^{-13}	6.39544×10^{-04}
3	1.74951×10^{-11}	1.05915×10^{-13}	1.36002×10^{-14}	1.15490×10^{-13}	8.85495×10^{-04}
4	1.47164×10^{-10}	9.62285×10^{-14}	1.60704×10^{-14}	1.79023×10^{-13}	1.18737×10^{-03}
5	1.02407×10^{-10}	4.69693×10^{-14}	1.62855×10^{-14}	1.70016×10^{-13}	9.45698×10^{-04}
6	1.51842×10^{-11}	3.35426×10^{-14}	1.80185×10^{-14}	1.57068×10^{-13}	1.56931×10^{-03}
7	1.20906×10^{-10}	4.23680×10^{-14}	1.86422×10^{-14}	1.83593×10^{-13}	2.85559×10^{-03}
8	1.15990×10^{-10}	4.96633×10^{-14}	1.91756×10^{-14}	2.21624×10^{-13}	1.95302×10^{-03}
9	8.90277×10^{-12}	3.89881×10^{-14}	1.82093×10^{-14}	1.95585×10^{-13}	8.29490×10^{-04}
10	5.74680×10^{-11}	8.28774×10^{-15}	1.65081×10^{-14}	2.16218×10^{-13}	1.57339×10^{-03}

Na inversão de $F_5(s)$, como mostra a Tabela 9.27, indica-se valores entre $N = 18$ e $N = 50$ para a técnica de Talbot-Racional.

9.10 Inversão de F_6

9.10.1 Método de Stehfest

Tabela 9.28: Erro absoluto da inversão de $F_6(s)$, pelo método de Stehfest com diferentes valores de N

t	$N = 8$	$N = 12$	$N = 18$	$N = 24$	$N = 32$
10^{-4}	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	5.68885×10^{-04}	1.47755×10^{-05}	6.03401×10^{-07}	4.10403×10^{-04}	$4.30625 \times 10^{+02}$
2	3.15825×10^{-04}	2.14995×10^{-05}	7.97330×10^{-07}	4.48632×10^{-03}	$5.62036 \times 10^{+01}$
3	1.46604×10^{-04}	8.35559×10^{-06}	5.70610×10^{-07}	5.56521×10^{-03}	$4.21176 \times 10^{+02}$
4	7.25484×10^{-05}	2.49722×10^{-06}	1.21927×10^{-06}	1.29953×10^{-03}	$1.59212 \times 10^{+03}$
5	3.78719×10^{-05}	8.55803×10^{-08}	5.71712×10^{-07}	3.99455×10^{-03}	$6.02088 \times 10^{+02}$
6	2.04902×10^{-05}	8.80534×10^{-07}	7.89029×10^{-07}	4.53334×10^{-03}	$6.14716 \times 10^{+02}$
7	1.13612×10^{-05}	1.22468×10^{-06}	1.92600×10^{-07}	7.79412×10^{-03}	$2.28254 \times 10^{+03}$
8	6.44560×10^{-06}	1.29560×10^{-06}	7.06416×10^{-07}	3.07126×10^{-03}	$1.07969 \times 10^{+03}$
9	3.79433×10^{-06}	1.24671×10^{-06}	3.06849×10^{-07}	2.83604×10^{-03}	$9.17942 \times 10^{+02}$
10	2.40649×10^{-06}	1.14938×10^{-06}	1.03568×10^{-06}	4.51471×10^{-03}	$2.00363 \times 10^{+03}$

Para aproximação de $F_6(s)$ de acordo com a Tabela 9.28, aponta-se valores entre $N = 8$ e $N = 18$, para o método de Stehfest.

9.10.2 Método de Talbot

Tabela 9.29: Erro absoluto da inversão de $F_6(s)$, pelo método de Talbot com diferentes valores de N

t	$N = 18$	$N = 24$	$N = 32$	$N = 50$	$N = 80$
10^{-4}	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	2.38697×10^{-14}	5.01265×10^{-14}	9.54014×10^{-13}	1.88857×10^{-10}	1.06011×10^{-04}
2	4.04620×10^{-13}	9.83657×10^{-14}	1.36035×10^{-12}	8.12993×10^{-10}	3.68549×10^{-04}
3	6.26332×10^{-13}	5.12423×10^{-13}	6.07552×10^{-12}	8.22060×10^{-11}	6.42823×10^{-04}
4	6.77180×10^{-13}	2.06668×10^{-13}	2.20762×10^{-12}	1.31733×10^{-09}	8.31169×10^{-04}
5	6.19476×10^{-13}	2.14966×10^{-13}	7.60669×10^{-13}	9.58174×10^{-09}	2.44919×10^{-03}
6	5.30492×10^{-13}	6.00686×10^{-13}	5.60290×10^{-12}	5.10069×10^{-10}	1.13789×10^{-04}
7	4.49473×10^{-13}	5.40123×10^{-14}	2.42761×10^{-12}	7.93210×10^{-09}	1.21417×10^{-04}
8	3.52440×10^{-13}	1.44911×10^{-13}	1.91843×10^{-12}	3.80979×10^{-09}	1.19538×10^{-04}
9	2.68923×10^{-13}	2.81830×10^{-13}	1.96159×10^{-12}	2.97050×10^{-09}	2.46405×10^{-03}
10	1.81438×10^{-13}	1.82354×10^{-13}	7.63528×10^{-13}	1.12673×10^{-09}	3.65583×10^{-03}

De acordo com a Tabela 9.29, na inversão de $F_6(s)$ através do método de Talbot, sugere-se valores a partir de $N = 18$ até $N = 32$.

9.10.3 Método de Talbot-Racional

Tabela 9.30: Erros absoluto da inversão de $F_6(s)$, pelo método de Talbot-Racional.

t	$N = 18$	$N = 24$	$N = 32$	$N = 50$	$N = 180$
10^{-4}	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	3.04478×10^{-13}	4.44089×10^{-16}	1.67643×10^{-14}	9.83657×10^{-14}	8.39028×10^{-05}
2	2.60902×10^{-14}	1.66533×10^{-16}	2.12052×10^{-14}	1.69975×10^{-13}	2.03116×10^{-04}
3	1.36446×10^{-13}	1.66533×10^{-16}	2.43693×10^{-14}	2.02726×10^{-13}	2.94339×10^{-04}
4	1.82576×10^{-13}	8.88178×10^{-16}	2.89768×10^{-14}	2.68840×10^{-13}	3.03410×10^{-04}
5	1.62647×10^{-13}	0.00000	2.73947×10^{-14}	2.78277×10^{-13}	5.03343×10^{-04}
6	1.10855×10^{-13}	9.15933×10^{-16}	2.49522×10^{-14}	2.44526×10^{-13}	3.45638×10^{-04}
7	4.46309×10^{-14}	6.38378×10^{-16}	2.63400×10^{-14}	2.76501×10^{-13}	5.80300×10^{-04}
8	2.53681×10^{-14}	5.55111×10^{-17}	2.94209×10^{-14}	3.14998×10^{-13}	3.17049×10^{-04}
9	9.58122×10^{-14}	6.93889×10^{-16}	2.73114×10^{-14}	2.72504×10^{-13}	2.61368×10^{-04}
10	1.62619×10^{-13}	6.66133×10^{-16}	2.70061×10^{-14}	3.09280×10^{-13}	5.66594×10^{-04}

Segundo a Tabela 9.30, para aproximação de $F_6(s)$ recomenda-se valores entre $N = 18$ e $N = 50$ para método de Talbot-Racional.

9.11 Inversão de F_7

9.11.1 Método de Stehfest

Tabela 9.31: Erro absoluto da inversão de $F_7(s)$, pelo método de Stehfest com diferentes valores de N

t	$N = 8$	$N = 12$	$N = 18$	$N = 24$	$N = 32$
10^{-4}	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	7.63084×10^{-04}	2.11602×10^{-04}	5.31134×10^{-07}	1.40134×10^{-03}	$1.63901 \times 10^{+03}$
2	6.76903×10^{-04}	4.73471×10^{-05}	3.31041×10^{-06}	8.93956×10^{-03}	$3.63509 \times 10^{+02}$
3	5.01144×10^{-04}	4.43410×10^{-05}	1.96247×10^{-07}	1.35128×10^{-02}	$1.65749 \times 10^{+03}$
4	3.18338×10^{-04}	2.66737×10^{-05}	1.58326×10^{-06}	1.04059×10^{-02}	$3.01613 \times 10^{+03}$
5	2.00583×10^{-04}	1.47859×10^{-05}	2.84810×10^{-07}	9.50752×10^{-03}	$1.33156 \times 10^{+03}$
6	1.27236×10^{-04}	7.73700×10^{-06}	2.60088×10^{-07}	3.54087×10^{-03}	$1.72676 \times 10^{+03}$
7	8.07401×10^{-05}	3.61998×10^{-06}	4.70530×10^{-07}	2.67101×10^{-03}	$3.38236 \times 10^{+03}$
8	5.05243×10^{-05}	1.20729×10^{-06}	2.18890×10^{-07}	6.85850×10^{-03}	$9.13956 \times 10^{+02}$
9	3.04310×10^{-05}	2.08610×10^{-07}	2.64882×10^{-07}	2.43821×10^{-03}	$1.49128 \times 10^{+03}$
10	1.68116×10^{-05}	1.03134×10^{-06}	6.24734×10^{-07}	6.47449×10^{-03}	$2.71288 \times 10^{+03}$

Como pode-se observar na Tabela 9.31, para inversão de $F_7(s)$ através da técnica de Stehfest, sugere-se valores entre $N = 8$ e $N = 18$

9.11.2 Método de Talbot

Tabela 9.32: Erro absoluto da inversão de $F_7(s)$, pelo método de Talbot com diferentes valores de N

t	$N = 18$	$N = 24$	$N = 32$	$N = 40$	$N = 84$
10^{-4}	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	6.08707×10^{-13}	2.04114×10^{-13}	3.79665×10^{-12}	4.78626×10^{-11}	6.16855×10^{-04}
2	1.83986×10^{-12}	2.94597×10^{-13}	3.88711×10^{-12}	1.22714×10^{-10}	7.53199×10^{-04}
3	1.29398×10^{-12}	9.11534×10^{-13}	9.58205×10^{-12}	1.99965×10^{-10}	2.65572×10^{-03}
4	5.48276×10^{-13}	2.75945×10^{-13}	4.23225×10^{-12}	2.15973×10^{-11}	2.81205×10^{-03}
5	8.37975×10^{-14}	2.17947×10^{-13}	1.43733×10^{-12}	1.55687×10^{-10}	6.17210×10^{-05}
6	5.56592×10^{-13}	6.28597×10^{-13}	6.93442×10^{-12}	2.31716×10^{-10}	5.28711×10^{-03}
7	8.92700×10^{-13}	5.30443×10^{-14}	3.55895×10^{-12}	6.67060×10^{-11}	1.67759×10^{-02}
8	1.12887×10^{-12}	1.65376×10^{-13}	1.27950×10^{-12}	7.62094×10^{-11}	3.54162×10^{-03}
9	1.29568×10^{-12}	2.75033×10^{-13}	3.01935×10^{-12}	4.53816×10^{-11}	2.65894×10^{-04}
10	1.43747×10^{-12}	8.91526×10^{-14}	2.00268×10^{-12}	1.42574×10^{-10}	3.17463×10^{-03}

Na inversão de $F_7(s)$, como mostra a Tabela 9.32, indica-se valores entre $N = 18$ e $N = 40$ para a técnica de Talbot.

9.11.3 Método de Talbot-Racional

Tabela 9.33: Erros absoluto da inversão de $F_7(s)$, pelo método de Talbot-Racional.

t	$N = 18$	$N = 24$	$N = 32$	$N = 50$	$N = 180$
10^{-4}	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	2.86048×10^{-13}	1.66533×10^{-16}	4.06619×10^{-14}	2.97484×10^{-13}	3.79261×10^{-04}
2	9.57386×10^{-13}	2.77555×10^{-16}	4.27852×10^{-14}	4.01845×10^{-13}	5.75724×10^{-04}
3	7.13061×10^{-13}	6.93889×10^{-17}	3.95031×10^{-14}	4.18415×10^{-13}	5.35136×10^{-04}
4	2.19421×10^{-13}	3.53883×10^{-16}	4.09394×10^{-14}	4.26783×10^{-13}	5.22330×10^{-04}
5	2.51153×10^{-13}	1.97758×10^{-16}	3.26579×10^{-14}	4.14602×10^{-13}	9.58958×10^{-04}
6	6.38301×10^{-13}	6.34908×10^{-16}	3.10966×10^{-14}	3.58980×10^{-13}	2.77954×10^{-04}
7	9.42409×10^{-13}	2.16840×10^{-16}	2.81285×10^{-14}	3.37516×10^{-13}	6.97240×10^{-04}
8	1.17582×10^{-12}	2.93168×10^{-16}	2.68673×10^{-14}	3.59363×10^{-13}	1.66939×10^{-04}
9	1.35433×10^{-12}	2.35922×10^{-16}	2.39270×10^{-14}	3.25670×10^{-13}	3.06982×10^{-05}
10	1.48964×10^{-12}	3.81639×10^{-17}	2.42410×10^{-14}	3.37013×10^{-13}	6.35933×10^{-04}

Conforme a Tabela 9.33, para aproximação de $F_7(s)$ através método de Talbot-Racional, recomenda-se os valores entre $N = 24$ e $N = 32$.

9.12 Inversão de F_8

9.12.1 Método de Stehfest

Tabela 9.34: Erro absoluto da inversão de $F_8(s)$, pelo método de Stehfest com diferentes valores de N

t	$N = 8$	$N = 12$	$N = 18$	$N = 24$	$N = 32$
10^{-4}	1.53999×10^{-09}	9.62887×10^{-12}	1.37902×10^{-12}	1.30372×10^{-08}	4.08322×10^{-03}
1	1.82671×10^{-03}	6.77000×10^{-05}	3.01563×10^{-07}	5.50942×10^{-06}	$4.28732 \times 10^{+02}$
2	1.17476×10^{-04}	8.72277×10^{-05}	2.13425×10^{-06}	5.65519×10^{-04}	$5.11343 \times 10^{+02}$
3	2.77226×10^{-03}	2.74554×10^{-04}	9.96312×10^{-07}	1.01293×10^{-03}	$2.71952 \times 10^{+02}$
4	2.39522×10^{-03}	3.99058×10^{-05}	7.36420×10^{-06}	7.08657×10^{-04}	$1.48931 \times 10^{+02}$
5	9.67547×10^{-04}	2.05817×10^{-04}	6.93574×10^{-06}	2.08200×10^{-03}	$3.99380 \times 10^{+02}$
6	1.93952×10^{-04}	2.87151×10^{-04}	1.34335×10^{-06}	4.37943×10^{-04}	$6.70505 \times 10^{+02}$
7	8.37495×10^{-04}	2.41250×10^{-04}	8.05132×10^{-06}	5.20115×10^{-03}	$9.19952 \times 10^{+02}$
8	1.08047×10^{-03}	1.43647×10^{-04}	1.02730×10^{-05}	1.21198×10^{-03}	$6.46351 \times 10^{+02}$
9	1.08626×10^{-03}	4.53169×10^{-05}	8.79083×10^{-06}	2.49491×10^{-03}	$2.30351 \times 10^{+02}$
10	9.75678×10^{-04}	3.11571×10^{-05}	4.97830×10^{-06}	1.94015×10^{-03}	$1.78960 \times 10^{+02}$

Segundo a Tabela 9.34, para aproximação de $F_8(s)$ indica-se valores entre $N = 12$ e $N = 18$ para método de Stehfest.

9.12.2 Método de Talbot

Tabela 9.35: Erro absoluto da inversão de $F_8(s)$, pelo método de Talbot com diferentes valores de N

t	$N = 18$	$N = 24$	$N = 32$	$N = 50$	$N = 90$
10^{-4}	9.64990×10^{-17}	9.80796×10^{-17}	9.84099×10^{-17}	5.43271×10^{-15}	2.83774×10^{-08}
1	4.43256×10^{-14}	2.95319×10^{-14}	5.69572×10^{-13}	4.17709×10^{-10}	3.05197×10^{-03}
2	8.79296×10^{-14}	4.70595×10^{-14}	5.41608×10^{-13}	6.37096×10^{-10}	5.88683×10^{-03}
3	1.24435×10^{-13}	2.19470×10^{-13}	2.49320×10^{-12}	2.63093×10^{-10}	1.89228×10^{-02}
4	1.55195×10^{-13}	7.14636×10^{-14}	1.39679×10^{-13}	1.06715×10^{-09}	9.38642×10^{-03}
5	1.54668×10^{-13}	7.38411×10^{-14}	3.62715×10^{-13}	4.45412×10^{-09}	2.45050×10^{-02}
6	2.22610×10^{-13}	3.01296×10^{-13}	3.18894×10^{-12}	4.87128×10^{-11}	2.74726×10^{-02}
7	2.61360×10^{-13}	3.42253×10^{-14}	6.15413×10^{-13}	3.89763×10^{-09}	2.36789×10^{-02}
8	1.95654×10^{-13}	8.64312×10^{-14}	6.36939×10^{-14}	1.65752×10^{-09}	1.47884×10^{-02}
9	1.83453×10^{-13}	1.50028×10^{-13}	1.42642×10^{-12}	2.86054×10^{-10}	1.44599×10^{-02}
10	1.95942×10^{-13}	7.12213×10^{-14}	3.74431×10^{-13}	5.82053×10^{-09}	3.12953×10^{-02}

Como observa-se na Tabela 9.35, para inversão de $F_8(s)$ através da técnica de Talbot, sugere-se valores entre $N = 18$ e $N = 32$.

9.12.3 Método de Talbot-Racional

Tabela 9.36: Erros absoluto da inversão de $F_8(s)$, pelo método de Talbot-Racional.

t	$N = 18$	$N = 24$	$N = 32$	$N = 50$	$N = 180$
10^{-4}	5.64809×10^{-14}	7.46202×10^{-17}	9.69158×10^{-17}	9.77933×10^{-17}	9.09961×10^{-10}
1	1.56954×10^{-11}	6.66133×10^{-15}	6.74460×10^{-15}	6.50035×10^{-14}	4.72315×10^{-05}
2	1.00099×10^{-11}	8.88178×10^{-15}	1.05609×10^{-14}	9.61314×10^{-14}	7.77715×10^{-05}
3	4.34867×10^{-11}	7.07767×10^{-16}	1.03667×10^{-14}	1.01106×10^{-13}	1.13779×10^{-04}
4	2.50009×10^{-11}	2.94902×10^{-15}	1.21604×10^{-14}	1.42465×10^{-13}	1.09359×10^{-04}
5	1.73557×10^{-11}	3.44949×10^{-15}	1.15367×10^{-14}	1.47779×10^{-13}	2.36788×10^{-04}
6	1.37813×10^{-11}	3.38010×10^{-15}	1.25767×10^{-14}	1.25153×10^{-13}	1.30849×10^{-04}
7	5.93938×10^{-12}	2.37559×10^{-15}	1.23318×10^{-14}	1.33124×10^{-13}	2.65212×10^{-04}
8	2.94856×10^{-12}	6.87872×10^{-16}	1.26434×10^{-14}	1.48400×10^{-13}	1.37264×10^{-04}
9	5.09098×10^{-12}	1.26770×10^{-15}	1.16965×10^{-14}	1.35907×10^{-13}	9.75548×10^{-05}
10	2.97794×10^{-13}	1.51402×10^{-15}	1.11167×10^{-14}	1.35948×10^{-13}	3.08249×10^{-04}

Na inversão de $F_8(s)$, conforme Tabela 9.36, recomenda-se valores a partir de $N = 24$ até $N = 32$ para a técnica de Talbot-Racional.

9.13 Inversão de F_9

9.13.1 Método de Stehfest

Tabela 9.37: Erro absoluto da inversão de $F_9(s)$, pelo método de Stehfest com diferentes valores de N

t	$N = 8$	$N = 12$	$N = 18$	$N = 24$	$N = 32$
10^{-4}	1.54041×10^{-09}	9.62389×10^{-12}	1.34774×10^{-12}	9.04828×10^{-09}	1.76234×10^{-04}
1	6.98836×10^{-03}	5.85402×10^{-05}	3.89571×10^{-07}	1.07065×10^{-03}	$1.90624 \times 10^{+02}$
2	2.51592×10^{-02}	4.45455×10^{-04}	2.85959×10^{-05}	5.87409×10^{-04}	$5.40026 \times 10^{+02}$
3	1.11342×10^{-02}	5.31632×10^{-03}	1.46354×10^{-04}	2.50302×10^{-04}	$1.69003 \times 10^{+02}$
4	4.02907×10^{-02}	7.40252×10^{-03}	2.04906×10^{-04}	1.25393×10^{-03}	$1.01589 \times 10^{+03}$
5	4.48660×10^{-02}	1.34674×10^{-02}	1.33089×10^{-03}	2.63184×10^{-03}	$6.26517 \times 10^{+02}$
6	1.05341×10^{-02}	2.50275×10^{-04}	5.57900×10^{-04}	3.43366×10^{-03}	$8.83707 \times 10^{+02}$
7	2.15453×10^{-02}	1.42407×10^{-02}	2.37114×10^{-03}	3.87097×10^{-03}	$2.41117 \times 10^{+02}$
8	3.14944×10^{-02}	1.60732×10^{-02}	2.85117×10^{-03}	2.54560×10^{-03}	$1.51744 \times 10^{+02}$
9	2.39180×10^{-02}	7.50403×10^{-03}	4.35951×10^{-06}	1.39458×10^{-03}	$2.42752 \times 10^{+02}$
10	1.13631×10^{-02}	2.46949×10^{-03}	3.04487×10^{-03}	1.25876×10^{-03}	$1.39407 \times 10^{+03}$

Para aproximação de $F_9(s)$ de acordo com a Tabela 9.37, aponta-se valores entre $N = 12$ e $N = 18$, para o método de Stehfest.

9.13.2 Método de Talbot

Tabela 9.38: Erro absoluto da inversão de $F_9(s)$, pelo método de Talbot com diferentes valores de N

t	$N = 18$	$N = 24$	$N = 32$	$N = 50$	$N = 90$
10^{-4}	5.14996×10^{-19}	1.09944×10^{-18}	2.68678×10^{-18}	6.77040×10^{-15}	3.18880×10^{-08}
1	5.18474×10^{-14}	4.97379×10^{-14}	3.05533×10^{-13}	3.26359×10^{-10}	3.03844×10^{-03}
2	9.80882×10^{-14}	9.37028×10^{-14}	8.66806×10^{-13}	1.09526×10^{-09}	5.80306×10^{-03}
3	1.36751×10^{-13}	3.89993×10^{-13}	3.77028×10^{-12}	7.24090×10^{-10}	2.07426×10^{-02}
4	1.92353×10^{-13}	1.31665×10^{-13}	1.07525×10^{-12}	1.87809×10^{-09}	1.37513×10^{-02}
5	1.45106×10^{-13}	1.33740×10^{-13}	1.09780×10^{-12}	5.70370×10^{-09}	3.08075×10^{-02}
6	9.14456×10^{-13}	5.40734×10^{-13}	4.20903×10^{-12}	1.14968×10^{-09}	3.50451×10^{-02}
7	2.52792×10^{-10}	6.16390×10^{-14}	6.78949×10^{-13}	5.12637×10^{-09}	3.29812×10^{-02}
8	4.53364×10^{-09}	1.46061×10^{-13}	1.31703×10^{-12}	2.63848×10^{-09}	2.13088×10^{-02}
9	2.66947×10^{-08}	3.81495×10^{-13}	7.83297×10^{-14}	1.42487×10^{-09}	1.77508×10^{-02}
10	3.00507×10^{-09}	1.41859×10^{-12}	7.64196×10^{-13}	8.25170×10^{-09}	5.16354×10^{-02}

Como pode-se observar na Tabela 9.38, para inversão de $F_8(s)$ através da técnica de Talbot, sugere-se valores entre $N = 18$ e $N = 32$

9.13.3 Método de Talbot-Racional

Tabela 9.39: Erros absoluto da inversão de $F_9(s)$, pelo método de Talbot-Racional.

t	$N = 18$	$N = 24$	$N = 32$	$N = 50$	$N = 190$
10^{-4}	5.65991×10^{-14}	2.24040×10^{-17}	1.08420×10^{-19}	8.08069×10^{-19}	5.04782×10^{-09}
1	2.13226×10^{-08}	2.14920×10^{-11}	6.66133×10^{-15}	7.33857×10^{-14}	3.33759×10^{-04}
2	1.35424×10^{-07}	5.09335×10^{-10}	3.53606×10^{-14}	1.29563×10^{-13}	6.49540×10^{-04}
3	3.69815×10^{-06}	1.04562×10^{-08}	1.99326×10^{-12}	1.34253×10^{-13}	9.55364×10^{-04}
4	2.10386×10^{-05}	5.44210×10^{-08}	1.36557×10^{-11}	2.03254×10^{-13}	1.28441×10^{-03}
5	7.34205×10^{-05}	9.35699×10^{-08}	1.59235×10^{-10}	2.39946×10^{-13}	1.00813×10^{-03}
6	2.04600×10^{-04}	3.19940×10^{-08}	5.42230×10^{-10}	2.10761×10^{-13}	1.81914×10^{-03}
7	4.31495×10^{-04}	9.74553×10^{-08}	9.05862×10^{-10}	2.36382×10^{-13}	3.15305×10^{-03}
8	4.84274×10^{-04}	2.47957×10^{-06}	4.46986×10^{-10}	2.49194×10^{-13}	2.24617×10^{-03}
9	5.76268×10^{-04}	1.51737×10^{-05}	2.08846×10^{-10}	2.64564×10^{-13}	8.71704×10^{-04}
10	4.99630×10^{-03}	5.42285×10^{-05}	1.69937×10^{-08}	2.57624×10^{-13}	1.82784×10^{-03}

Conforme a Tabela 9.39, para inversão de funções da classe de $F_9(s)$, indica-se valores de $N = 32$ até $N = 50$ para a técnica de Talbot-Racional.

10 ANEXO

10.1 Fundamentação Matemática

Neste capítulo, apresenta-se uma breve descrição, dos conceitos, definições e propriedades da Transformada de Laplace, segundo Spiegel (1965), Boyce and DiPrima (1999), Cullen and Zill (2001) e Erwin (2009).

Equações Diferenciais modelam problemas envolvendo sistemas físicos, processos químicos, dinâmica das populações, entre outros. A Transformada de Laplace é um importante método operacional amplamente conhecido e estudado, principalmente nas ciências exatas e engenharias, frequentemente aplicada na resolução de Equações Diferenciais, utilizado no capítulo 5 na resolução analítica do problema de difusão de mercúrio na água.

10.1.1 Transformada de Laplace

Segundo Amaral (2016), por volta do século XVIII, Leonard Euler (1707 - 1783) foi um dos precursores do estudo na busca por possibilidades eficientes para solucionar Equações Diferenciais. Ainda neste mesmo período, Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827), usou a transformada integral em seu trabalho sobre teoria das probabilidades. Mesmo não sendo seu propósito criar técnicas para resolução de Equações Diferenciais, sua teoria contribuiu como base do desenvolvimento do método operacional conhecido como Transformada de Laplace. A partir do século XIX, estudos sobre integrais definidas com limites complexos foram realizados por Cauchy (1789 - 1857). Contudo, credita à Heaviside (1850 - 1925) o mérito pela consolidação da Teoria da Transformada de Laplace. Porém, as regras operacionais propostas por ele, foram demonstradas somente no início do século XX. Bromwich, Carson, Van der Pol, entre outros matemáticos, também contribuíram, dedicando-se à teoria das variáveis complexas.

De acordo com Erwin (2009), os problemas que envolvem Equações Diferenciais são resolvidos, quando possível, mais diretamente, com a aplicação da Transformada de Laplace, pois são reescritos de forma mais simples. No caso de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), a transformação possibilita obter uma equação algébrica em função da nova variável s , o que permite resolver a EDO mais facilmente. No entanto, também é utilizada na resolução de Equações Diferenciais Parciais (EDP), uma vez que, quando possível reduz uma EDP a uma EDO, para o mesmo propósito.

De uma forma geral, quando tem-se uma EDP, os passos para obter tais soluções são:

- (i) Obtém-se a Transformada de Laplace referente a uma das variáveis. Isto fornece uma EDO para a transformada da função desconhecida, incorporando as condições iniciais e de contorno.
- (ii) Resolve-se a EDO, obtendo-se a transformada da função desconhecida.

(iii) Obtendo-se a transformada inversa, determina-se a solução do problema dado.

10.1.2 Definição da Transformada de Laplace

Segundo Cullen and Zill (2001), obter a Transformada de Laplace de uma função, é transformar uma função $f(t)$ em outra função $F(s)$ por meio da integral.

Definição 10.1. Seja $f(t)$ uma função definida para $t \geq 0$, então a integral

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt, \quad (10.1)$$

é chamada de Transformada de Laplace de f , desde que a integral (10.1) convirja.

O resultado dessa operação é uma função de s , com parâmetro real ou complexo, a dependência temporal é substituída, e $F(s)$ é a função correspondente a $f(t)$ no domínio de Laplace.

10.1.3 Existência e Unicidade

De acordo com Spiegel (1965), a integral que define a Transformada de Laplace não converge necessariamente. As condições que garantem a existência da Transformada de Laplace são:

Definição 10.2. Contínua por partes. Uma função é dita seccionalmente contínua ou contínua por partes em um intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ se o intervalo puder ser subdividido em um número finito de sub-intervalos em cada um dos quais a função é contínua e tem limites finitos, à direita e à esquerda.

Definição 10.3. Ordem Exponencial. Se existem constantes reais $M > 0$ e γ tais que, para todo $t \geq N$,

$$|f(t)| \leq Me^{\gamma t}, \quad (10.2)$$

diz-se que $f(t)$ é uma função de ordem exponencial γ quando $t \rightarrow \infty$ ou, simplesmente, que é de ordem exponencial.

Teorema 10.1. Condições Suficientes de Existência. Se $f(t)$ é seccionalmente contínua em todo intervalo finito $0 \leq t \leq N$ e de ordem exponencial γ para $t > N$, então sua Transformada de Laplace existe para todo $s > \gamma$.

10.1.4 Propriedades Operacionais

As propriedades operacionais facilitam o cálculo da $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

A seguir, enunciam-se algumas propriedades importantes da Transformada de Laplace. No entanto, para que as Transformadas de Laplace existam, toma-se que todas as funções satisfaçam as condições do Teorema 10.1.

As demonstrações das propriedades apresentadas neste trabalho podem ser encontradas em Spiegel (1965).

Teorema 10.2. Linearidade. Para quaisquer constantes α e β , $f(t)$ e $g(t)$ funções com Transformadas de Laplace $F(s)$ e $G(s)$, respectivamente, então

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s). \quad (10.3)$$

O resultado é facilmente estendido a mais de duas funções. Devido à propriedade expressa no Teorema 10.2, a Transformada de Laplace é um operador linear.

Teorema 10.3. Translação sobre o eixo s . Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ (onde $s > k$ para algum k) e a é uma constante, então

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a), \text{ para } s - a > k. \quad (10.4)$$

Teorema 10.4. Translação sobre o eixo t . Se

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \text{ e } g(t) = \begin{cases} f(t - a), & t > a \\ 0, & t < a \end{cases},$$

então,

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-as}F(s). \quad (10.5)$$

Teorema 10.5. Mudança de Escala. Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), \text{ para } a \neq 0. \quad (10.6)$$

Teorema 10.6. Transformada de uma derivada. Se $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ são contínuas para todo $t > 0$, e se $f^{(n)}$ é contínua por partes e de ordem exponencial em $[0, \infty)$, tem-se

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0),$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{n-2}(0) - f^{n-1}(0). \quad (10.7)$$

Teorema 10.7. Transformada de integrais. Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s}F(s). \quad (10.8)$$

Teorema 10.8. Multiplicação por t^n . Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s). \quad (10.9)$$

Teorema 10.9. Divisão por t . Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)du, \quad (10.10)$$

contanto que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$ exista.

Teorema 10.10. Teorema do valor inicial. Se os limites indicados existem, então

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s). \quad (10.11)$$

Teorema 10.11. Teorema do valor final. Se os limites indicados existem, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} F(s). \quad (10.12)$$

10.1.5 Funções Especiais - Função Degrau Unitário ou Função de Heaviside

De acordo com Boyce and DiPrima (1999), algumas das aplicações elementares mais interessantes desse método de transformada acontecem na resolução de Equações Diferenciais Lineares envolvendo funções descontínuas, que aparecem com frequência na análise do fluxo de corrente em circuitos elétricos ou nas vibrações de sistemas mecânicos. Para tratar de maneira efetiva funções com saltos, é útil definir uma função conhecida como função degrau unitário, ou função de Heaviside, definida por

$$\mathcal{H}(t - a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ 1, & t \geq a. \end{cases} \quad (10.13)$$

A Figura 10.1 mostra o gráfico da função Heaviside.

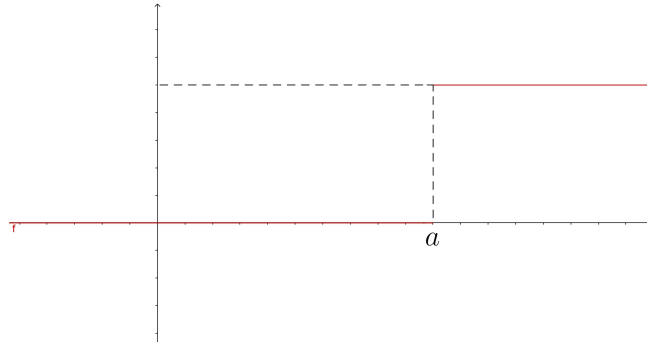


Figura 10.1: Função de Heaviside.

Fonte: Próprio autor.

Seja uma função $f(t)$ definida para $t > 0$. A função

$$\mathcal{H}(t-a)f(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ f(t-a), & t \geq a \end{cases} \quad (10.14)$$

representa a translação de $f(t)$, a unidades na direção positiva do eixo t .

A função degrau unitário é particularmente importante no uso da transformada devido a relação existente entre $\mathcal{L}\{f(t)\}$ e a translação $\mathcal{H}(t-a)f(t-a)$, dada por

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{H}(t-a)\} = e^{-as}F(s). \quad (10.15)$$

Teorema 10.12. Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > a \geq 0$, então

$$\mathcal{H}(t)f(t-a) = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-as}F(s), s > a. \quad (10.16)$$

10.2 Transformada Inversa de Laplace

Conforme Spiegel (1965), se a Transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é denotada por $F(s)$, então $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, logo, $f(t)$ é chamada de Transformada Inversa de Laplace de $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, onde $\mathcal{L}^{-1}$ é denominado operador da Transformada Inversa de Laplace. Contudo, a Transformada Inversa de Laplace pode não ser única (Spiegel, 1965).

A Transformada Inversa de Laplace pode ser definida pela fórmula integral de Bromwich,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st}F(s)ds, \quad (10.17)$$

onde $\sigma > 0$ é uma constante real, maior que as partes reais de todas as singularidades de $F(s)$.

10.2.1 Propriedades Operacionais

No cálculo de transformadas inversas ocorre frequentemente que uma função de s não satisfaça completamente a forma tabelada. Neste caso, as propriedades operacionais facilitam o cálculo.

A seguir, apresentam-se algumas das propriedades conforme Spiegel (1965).

Teorema 10.13. Linearidade. Se α e β são constantes quaisquer, enquanto $F(s)$ e $G(s)$ são funções com Transformadas Inversa de Laplace $f(t)$ e $g(t)$, respectivamente, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \alpha f(t) + \beta g(t), \quad (10.18)$$

onde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$.

Teorema 10.14. Translação sobre o eixo s . Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, para a qualquer, tem-se

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s - a)\} = e^{at}f(t). \quad (10.19)$$

Teorema 10.15. Translação sobre o eixo t . Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ então

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-at}F(s)\} = \begin{cases} f(t - a), & t > a \\ 0, & t < a \end{cases}.$$

Teorema 10.16. Mudança de escala. Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(as)\} = \frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right), \text{ para } a \neq 0. \quad (10.20)$$

Teorema 10.17. Transformada Inversa de uma derivada. Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ então

$$\mathcal{L}^{-1}\{F^n(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d^n}{ds^n}F(s)\right\} = (-1)^n t^n f(t). \quad (10.21)$$

Teorema 10.18. Transformada Inversa de integrais. Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty F(u)du\right\} = \frac{f(t)}{t}. \quad (10.22)$$

Teorema 10.19. Multiplicação por s^n . Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ e $f(0) = 0$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{sF(s)\} = f'(t). \quad (10.23)$$

A multiplicação por s tem o efeito de derivar $f(t)$. Se $f(0) \neq 0$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{sF(s) - f(0)\} = f'(t).$$

Teorema 10.20. Divisão por s . Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)du. \quad (10.24)$$

10.2.2 Inversão por Convolução

Algumas vezes é possível identificar uma Transformada de Laplace $H(s)$ como o produto de duas outras transformadas $F(s)$ e $G(s)$.

Teorema 10.21. Teorema da Convolução. Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ e $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(u)g(t-u)du = f * g. \quad (10.25)$$

A integral $\int_0^t f(u)g(t-u)du = f * g$ é chamada Convolução de f e g .

Propriedades da Convolução

- (i) Lei comutativa: $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$.
- (ii) Lei distributiva: $f(t) * [g(t) + h(t)] = f(t) * g(t) + f(t) * h(t)$.
- (iii) Lei associativa: $[f(t) * g(t)] * h(t) = f(t) * [g(t) * h(t)]$.
- (iv) $\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s)$.
- (v) $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$.

10.2.3 Métodos Analíticos de Inversão da Transformada de Laplace

Existem várias técnicas para inversão analítica da Transformada de Laplace, entre elas: o método das frações parciais, a fórmula de desenvolvimento de Heaviside, a fórmula complexa da inversão, a utilização de tabelas, que podem ser encontradas em Spiegel (1965) e a aplicação das propriedades vistas na subseção 10.2.1.

Na sequência, apresentam-se os métodos das frações parciais e a fórmula de desenvolvimento de Heaviside, segundo Spiegel (1965).

Método das Frações Parciais. Uma função racional, $F(s) = \frac{G(s)}{H(s)}$, onde $G(s)$ e $H(s) \neq 0$ são polinômios, com o grau de $G(s)$ menor do que o de $H(s)$, pode ser escrita como uma soma de funções racionais, as denominadas frações parciais:

- (i) A cada fator linear da forma $(as + b)$ de $H(s)$ corresponde uma fração parcial da forma $\frac{A}{(as + b)}$, A constante.
- (ii) A cada fator linear repetido da forma $(as + b)^n$, corresponde uma fração parcial da forma $\frac{A_1}{(as + b)} + \frac{A_2}{(as + b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(as + b)^n}$, $A_1, A_2, \dots, A_n$ constantes.
- (iii) A cada fator quadrático da forma $(as^2 + bs + c)$, corresponde uma fração parcial da forma $\frac{As + B}{(as^2 + bs + c)}$, A e B constantes.
- (iv) A cada fator quadrático repetido da forma $(as^2 + bs + c)^n$, corresponde uma fração parcial da forma $\frac{A_1s + B_1}{(as^2 + bs + c)} + \frac{A_2s + B_2}{(as^2 + bs + c)^2} + \dots + \frac{A_ns + B_n}{(as^2 + bs + c)^n}$, $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$, constantes.

Para determinar a Transformada Inversa de Laplace de cada um das frações parciais $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, iguala-se a fração $\frac{G(s)}{H(s)}$ à soma de frações obtida, eliminando os denominadores e identificando os coeficientes de potências iguais de s , chega-se a um conjunto de equações lineares. As constantes A, B , etc., podem ser encontradas resolvendo-se esse sistema.

Fórmula de Desenvolvimento de Heaviside. Seja $F(s) = \frac{G(s)}{H(s)}$ uma função racional que satisfaz às condições:

- (i) $G(s)$ e $H(s)$ são polinômios, e $H(s) \neq 0$;
- (ii) grau $(G) <$ grau (H) ,

suponha que $H(s)$ tem n zeros distintos $\alpha_k = 1, 2, 3, \dots, n$. Então

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{H(s)} \right\} = \sum_{k=1}^n \frac{G(\alpha_k)}{H'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t}, \quad (10.26)$$

onde $H'(\alpha_k)$ é a derivada de $H(\alpha_k)$ avaliada na sua k -ésima raiz.