

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

MODELAGEM MATEMÁTICA DE ESTRUTURAS FLEXÍVEIS DO TIPO CABO EM
DIVERSAS APLICAÇÕES TECNOLÓGICAS

por

Samuel da Silva Gomes

Tese para obtenção do Título de
Doutor em Modelagem Computacional

Rio Grande, agosto, 2022

Ficha Catalográfica

G633m Gomes, Samuel da Silva.
Modelagem matemática de estruturas flexíveis do tipo cabo em
diversas aplicações tecnológicas / Samuel da Silva Gomes. – 2022.
141 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande –
FURG, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional,
Rio Grande/RS, 2022.
Orientador: Dr. Sebastião Cícero Pinheiro Gomes.

1. Cabos 2. Estruturas flexíveis 3. Modelagem dinâmica
4. Algoritmos genéticos I. Gomes, Sebastião Cícero Pinheiro II. Título.

CDU 510.67

Catlogação na Fonte: Bibliotecário José Paulo dos Santos CRB 10/2344

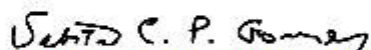
Samuel da Silva Gomes

**“MODELAGEM MATEMÁTICA DE ESTRUTURAS FLEXÍVEIS DO TIPO CABO EM
DIVERSAS APLICAÇÕES TECNOLÓGICAS”**

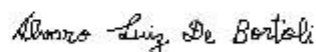
Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande - FURG, como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor. Área de concentração: Modelagem Computacional.

Aprovado em: 12/08/2022

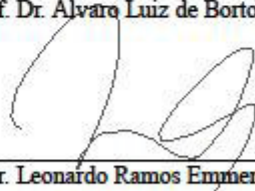
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Sebastião Cicero Pinheiro Gomes (Orientador – FURG)



Prof. Dr. Alvaro Luiz de Bortoli (UFRGS)



Prof. Dr. Leonardo Ramos Emmendorfer (UFSM)



Prof. Dr. Matheus Jatkoske Lazo (FURG)

Rio Grande - RS
2022

Este trabalho é dedicado a Deus e a minha família.

AGRADECIMENTOS

A Santíssima Trindade Pai, Filho e Espírito Santo pelas bênçãos recebidas.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, IFRS Campus Rio Grande, por proporcionar afastamento das minhas atividades docentes, contribuindo de maneira relevante à elaboração e conclusão deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Sebastião Cícero Pinheiro Gomes pela excelente orientação, amizade e confiança depositada em meu trabalho.

A minha família, em especial aos meus pais Odilon e Elisabete, a minha amada filha Manuela e a Rita, pelo apoio e amor incondicional.

RESUMO

Esta tese aborda a modelagem dinâmica de uma estrutura flexível do tipo cabo baseada em um método novo que utiliza um formalismo discreto. A flexibilidade contínua do cabo é aproximada por uma equivalente discreta, formada por uma cadeia poliarticulada de elos rígidos conectados por articulações fictícias que têm atrito e elasticidade e que permitem movimentos de elevação no plano vertical (quando se considera o movimento contido neste plano) ou elevação e azimute no espaço tridimensional. Neste trabalho considera-se a estrutura flexível em três cenários. O primeiro é quando o cabo está fixo na sua extremidade superior e livre na outra que contém uma carga terminal (m_c). Neste caso houve a realização de uma validação experimental. O segundo é quando o cabo do cenário anterior, ao invés de estar fixo na sua extremidade superior, está articulado a uma base móvel que se desloca nas direções horizontal (ação de correntes oceânicas ou propulsão por hélices) e vertical (oscilações na superfície do mar). Este acoplamento do cabo com a base móvel gera as seguintes situações práticas de aplicações aquáticas e subaquáticas: ancoragem, amarração, reboque de estruturas subaquáticas ou de embarcações de superfície. Na modelagem dinâmica do reboque de embarcações, um empuxo motor é aplicado ao rebocador e forças verticais geradas por controle proporcional e derivativo foram aplicadas ao rebocador e à embarcação rebocada, simulando assim os movimentos das ondas na superfície do mar. Um procedimento algorítmico também é proposto para determinar a tensão dinâmica no cabo. Por fim, o último cenário considera o cabo articulado a uma base móvel e, neste caso, a base, o cabo e a carga terminal se movem no espaço tridimensional, de modo que esta técnica proposta é a mais geral possível e pode ser adaptada a diferentes aplicações práticas, tais como: transporte de cargas suspensas por cabos, reboque de embarcações tridimensionais e várias aplicações subaquáticas. Todos os modelos dinâmicos foram desenvolvidos analiticamente usando as equações do movimento de Euler Lagrange para os casos do cabo aproximado por dois, três e quatro elos, fato que permitiu a identificação de padrões de crescimento dos vetores e matrizes dos modelos. Uma vez identificados estes padrões, eles permitiram a obtenção de algoritmos genéricos, capazes de gerar de forma automática os modelos dinâmicos para um número qualquer de elos (n_e) utilizados na aproximação discreta da flexibilidade contínua do cabo. Resultados de simulações visualizados em animação computacional mostraram uma ótima sensação de realidade física, indicando que a modelagem dinâmica proposta é realista e pode representar bem os sistemas físicos nas diversas aplicações consideradas nesta tese.

Palavras-chaves: Cabos, estruturas flexíveis, modelagem dinâmica, algoritmos genéricos.

ABSTRACT

This thesis addresses the dynamic modeling of a flexible cable structure based on a new method that uses a discrete formalism. The continuous flexibility of the cable is approximated by a discrete equivalent, formed by a polyarticulated chain of rigid links connected by fictitious joints that have friction and elasticity and that allow elevation movements in the vertical plane (when considering the movement contained in this plane) or elevation and azimuth in three-dimensional space. In this work, the flexible structure is considered in three scenarios. The first is when the cable is fixed at its upper end and free at the other end which contains a terminal load (m_c). In this case, an experimental validation was carried out. The second is when the cable of the previous scenario, instead of being fixed at its upper end, is articulated to a mobile base that moves in the horizontal (action of ocean currents or propeller propulsion) and vertical (oscillations on the sea surface) directions. This cable coupling with the mobile base generates the following practical situations for aquatic and underwater applications: mooring, towing of underwater structures or towing of surface vessels. In the dynamic modeling of vessel towing, the motor thrust is applied to the tug and vertical forces generated by proportional and derivative control were applied to the tugboat and the towed vessel, thus simulating the movements of waves on the sea surface. An algorithmic procedure is also proposed to determine the dynamic tension in the cable. Finally, the last scenario considers the cable articulated to a mobile base and in this case, the base, the cable and the terminal load move in three-dimensional space, so this proposed technique is the most general possible and can be adapted to different practical applications, such as: transport of suspended loads by cables, towing vessels in three-dimensional space and various underwater applications. All dynamic models were developed analytically using Euler Lagrange's equations of motion for the cases of the cable approximated by two, three and four links, a fact that allowed the identification of growth patterns of the models' vectors and matrices. Once these patterns were identified, they made it possible to obtain generic algorithms capable of automatically generating dynamic models for any number of links (n_e) used in the discrete approximation of the cable's continuous flexibility. Simulation results visualized in computer animation showed a great feeling of physical reality, indicating that the proposed dynamic modeling is realistic and can represent physical systems well in the various applications considered in this thesis.

Keywords: Cables, flexible structures, dynamic modeling, generic algorithms.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	19
1.1. Objetivos	22
1.2. Revisão bibliográfica	23
1.3. Estrutura da tese	25
2. MODELAGEM DINÂMICA DO CABO	27
3. ALGORITMOS GENÉRICOS PARA O MODELO DO CABO E VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL	35
3.1. Algoritmos genéricos	35
3.2. Validação experimental	38
4. MODELAGEM DINÂMICA CABO-BASE MÓVEL	46
5. ALGORITMOS GENÉRICOS PARA O MODELO DO CABO ACOPLADO A BASE MÓVEL E SIMULAÇÕES	55
5.1. Algoritmos genéricos	55
5.2. Simulações e animações	60
5.2.1. Simulação 1 (carga terminal mc livre)	61
5.2.2. Simulação 2 (carga terminal mc articulada ao fundo do mar)	62
5.3. Considerações finais	64
6. SISTEMA DE REBOQUE DE EMBARCAÇÕES	65
7. ALGORITMOS GENÉRICOS APLICADO AO REBOQUE DE EMBARCAÇÕES	72
7.1. Algoritmos genéricos	72
7.2. Forças externas	77
7.3. Simulações	78
8. TENSÃO DINÂMICA NO CABO	83
9. MODELAGEM DINÂMICA DE CABOS E APLICAÇÕES NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL	86
9.1. Modelagem dinâmica	87

9.2. Algoritmos genéricos	93
9.2.1. Matriz de inércia	93
9.2.2. Matrizes de coeficientes de atrito e de constantes elásticas	97
9.2.3. Vetor Coriolis-centrífugo	98
9.2.4. Vetor gravitacional	101
9.2.5. Vetor com os esforços externos	102
9.3. Simulações	102
10. CONCLUSÕES	110
11. REFERÊNCIAS	114
ANEXO 1	121
APÊNDICE 1	122
Apêndice 1.1.	122
Apêndice 1.2.	131

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1. - Cabos em aplicações subaquáticas	19
Figura 1.2. - Situações práticas geradas pelo acoplamento cabo-base móvel	20
Figura 2.1. - Linhas de ancoragem e risers	27
Figura 2.2. - Modelo do cabo considerando cinco articulações fictícias	28
Figura 3.1. - Algoritmo da matriz de inércia	35
Figura 3.2. - Algoritmo da matriz de coeficientes de atrito e de constantes elásticas	36
Figura 3.3. - Algoritmo do vetor gravitacional	37
Figura 3.4. - Algoritmo do vetor Coriolis-centrífugo	37
Figura 3.5. - Configuração espacial inicial	38
Figura 3.6. - Layout e projeção do experimento	39
Figura 3.7. - Simulação (azul) x Experimental (vermelho): a plano do fundo; b plano do cabo	40
Figura 3.8. - Conceito inicial adotado no algoritmo da conversão/distorção	40
Figura 3.9. - Frames com resultados de simulação (azul) e experimentais (vermelho)	43
Figura 3.10. - Coordenadas do ponto médio	44
Figura 3.11. - Coordenadas da carga terminal	44
Figura 3.12. - Média dos 16 erros de posição	45
Figura 4.1. - Plataformas petrolíferas	46
Figura 4.2. - Base móvel acoplada ao modelo do cabo que considera três elos	47
Figura 5.1. - Algoritmo da matriz de inércia	56
Figura 5.2. - Algoritmo da matriz de coeficientes de atrito e de constantes elásticas	57
Figura 5.3. - Algoritmo do vetor gravitacional	58
Figura 5.4. - Algoritmo do vetor Coriolis-centrífugo	59
Figura 5.5. - Cabo aproximado por 60 elos e com carga terminal livre	61
Figura 5.6. - Movimentos da base móvel (carga terminal livre)	62
Figura 5.7. - Cabo aproximado por 60 elos e fixo no fundo do mar	63
Figura 5.8. - Movimentos da base móvel (cabo fixo ao fundo do mar)	64
Figura 6.1. - Configuração inicial do sistema de reboque	65
Figura 7.1. - Algoritmo da matriz de inércia	73
Figura 7.2. - Algoritmo da matriz de coeficientes de atrito e de constantes elásticas	74
Figura 7.3. - Algoritmo do vetor gravitacional	75
Figura 7.4. - Algoritmo do vetor Coriolis-centrífugo	76

Figura 7.5. - Algoritmo de Torques	77
Figura 7.6. - Algoritmo da força de reboque	77
Figura 7.7. - Velocidades horizontais e verticais do rebocador e embarcação rebocada	80
Figura 7.8. - Configurações espaciais do cabo durante a ação de reboque	81
Figure 7.9. - Velocidades horizontais, sem ondas na superfície do mar	82
Figure 7.10. - Posições angulares dos elos: com (a) e sem (b) ondas na superfície do mar	82
Figura 8.1. - Algoritmo da tensão dinâmica do cabo	84
Figura 8.2. - Tensão dinâmica no cabo em simulação com (a) e sem (b) movimento das ondas na superfície do mar	85
Figura 9.1. - Estrutura flexível no espaço tridimensional e sua aproximação discreta	86
Figura 9.2. - Aplicações de cabos no espaço tridimensional	87
Figura 9.3. - Flexibilidade contínua e sua aproximação discreta	88
Figura 9.4. - Coordenadas angulares da primeira articulação	88
Figura 9.5. - Os dois primeiros sistemas de referência e suas coordenadas angulares	88
Figura 9.6. - Algoritmo da submatriz de inércia I_c	94
Figura 9.7. - Algoritmo da submatriz de inércia N_c	94
Figura 9.8. - Algoritmo da submatriz simétrica de inércia I_e	95
Figura 9.9. - Algoritmo da submatriz de inércia N_e	95
Figura 9.10. - Algoritmo da submatriz simétrica de inércia N_a	96
Figura 9.11. - Algoritmo da submatriz simétrica de coeficientes de atrito e de constantes elásticas	98
Figura 9.12. - Algoritmo do subvetor Coriolis-centrífugo $\vec{F}_c$	99
Figura 9.13. - Algoritmo do subvetor Coriolis-centrífugo $\vec{F}_e$	100
Figura 9.14. - Algoritmo do subvetor Coriolis-centrífugo $\vec{F}_a$	101
Figura 9.15. - Algoritmo do vetor gravitacional	102
Figura 9.16. - Representação gráfica do sistema dinâmico modelado e simulado, ressaltando a limitação de movimento da base móvel na direção inercial Z	104
Figura 9.17. - Resultados de simulação mostrando animação com frames a cada 0,25s	105
Figura 9.18. - Movimentação da base móvel nas três direções inerciais	106
Figura 9.19. - Algoritmo das forças nas direções inerciais Y e X na base móvel	107
Figura 9.20. - Simulação aplicando forças na base móvel, nas direções inerciais X e Y	108

Figura 9.21. - Movimentação da base móvel nas três direções inerciais, considerando forças aplicadas na base móvel 109

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1. - Vetores com coordenadas de posição dos elos	31
Tabela 2.2. - Elementos das matrizes simétricas de inércia	32
Tabela 2.3. - Matrizes simétricas de coeficientes de atrito	32
Tabela 2.4. - Matrizes simétricas de constantes elásticas	32
Tabela 2.5. - Vetores Coriolis-centrífugos	33
Tabela 2.6. - Vetores gravitacionais	33
Tabela 2.7. - Vetores torques externos	33
Tabela 3.1. - Parâmetros físicos do modelo	42
Tabela 4.1. - Vetores com coordenadas de posição	52
Tabela 4.2. - Elementos das matrizes simétricas de inércia	52
Tabela 4.3. - Matrizes simétricas de coeficientes de atrito	53
Tabela 4.4. - Matrizes simétricas de constantes elásticas	53
Tabela 4.5. - Vetores Coriolis-centrífugos	53
Tabela 4.6. - Vetores gravitacionais	54
Tabela 4.7. - Vetores torques externos	54
Tabela 5.1. - Parâmetros físicos do modelo	60
Tabela 6.1. - Vetores com coordenadas de posição	69
Tabela 6.2. - Elementos das matrizes simétricas de inércia	69
Tabela 6.3. - Matrizes simétricas de coeficientes de atrito	70
Tabela 6.4. - Matrizes simétricas de constantes elásticas	70
Tabela 6.5. - Vetores Coriolis-centrífugos	70
Tabela 6.6. - Vetores gravitacionais	71
Tabela 6.7. - Vetores forças externas	71
Tabela 7.1. - Parâmetros físicos do modelo	79
Tabela 9.1.- Parâmetros físicos do modelo 3D simulado	103

LISTA DE SÍMBOLOS

C	Matriz de coeficientes de atrito
$c_i, i = 1, \dots, n$	Coeficientes de atrito de cada articulação
c_{Mx}	Coeficiente de atrito relativo ao movimento horizontal da base móvel na direção x
c_{My}	Coeficiente de atrito relativo ao movimento vertical da base móvel no plano e coeficiente de atrito relativo ao movimento horizontal y no espaço
c_{Mz}	Coeficiente de atrito relativo ao movimento vertical da base móvel no espaço
γ	Arrasto atmosférico
E_c	Energia Cinética
E_{cR}	Energia Cinética de rotação
E_{cT}	Energia Cinética de translação
E_p	Energia Potencial
E_{pE}	Energia Potencial elástica
E_{pG}	Energia Potencial gravitacional
$\vec{F}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}}), \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}), \vec{F}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}), \vec{F}$	Vetores Coriolis-centrífugos
$\vec{F}_c, \vec{F}_e, \vec{F}_a$	Subvetores Coriolis-centrífugos
$\vec{F}_c, \vec{F}_b$	Forças externas
F_{cx}	Projeção da força externa na direção horizontal
F_{cy}	Projeção da força externa na direção vertical
g	Aceleração gravitacional
$\vec{G}(\vec{\theta}), \vec{G}(\vec{r}), \vec{G}(\vec{q}), \vec{G}$	Vetor de esforços gravitacionais
$h_i, i = 1, \dots, n$	Alturas dos centros de massa
I_{Ri}	Momentos de inércia rotacional
$I(\vec{\theta}), I(\vec{r}), I(\vec{q}), I$	Matrizes de inércia
$\vec{i}$	Vetor unitário na direção horizontal
$\vec{j}$	Vetor unitário na direção vertical

$\vec{k}$	Vetor unitário na direção perpendicular às direções horizontal e vertical
K	Matriz de constantes elásticas
k_i	Constantes elásticas de cada articulação
k_M	Constante elástica relativo ao movimento vertical da base móvel
L	Lagrangeano do sistema físico
L_c	Comprimento do cabo
l_i	Comprimento de cada elo
M, M_v, M_t	Massas (base móvel, embarcação rebocada e rebocador)
m_c	Massa da carga terminal
m_i	Massas dos elos
ρ_c	Densidade linear do cabo
ρ_a	Densidade volumétrica da água
ρ	Densidade linear do cabo
n_e	Número de elos
n	Número de graus de liberdade
r_i	Raio de cada elo
$u_x(t)$	Força externa aplicada na direção horizontal da estrutura flutuante
$u_y(t)$	Força externa aplicada na direção vertical da estrutura flutuante
t	Tempo
$\vec{T}_e$	Vetor de torques externos
F_{xv}	Força horizontal aplicada à embarcação rebocada
F_{yv}	Força vertical aplicada à embarcação rebocada
τ_i	Torques de elevação cada articulação
τ_{n_e}	Torque que a força externa exerce sobre a última articulação fictícia
$\ddot{\vec{r}}, \ddot{\vec{\theta}}, \ddot{\vec{q}}$	Vetores coordenadas de aceleração
$\dot{\vec{r}}, \dot{\vec{\theta}}, \dot{\vec{q}}$	Vetores coordenadas de velocidade
$\vec{r}, \vec{\theta}, \vec{q}$	Vetores coordenadas de posição

(x_t, y_t)	Coordenadas de posição do rebocador
(x_v, y_v)	Coordenadas de posição da embarcação rebocada
J	Matriz diagonal com determinante alto
α	Plano ao qual visualiza-se a imagem coletada
β	Plano ao qual o cabo está inserido
γ	Plano ao qual o celular está fixado na parede
(x_M, y_M)	Coordenadas de posição da base móvel
(X_M, Y_M, Z_M)	Coordenadas de posição da base móvel tridimensional
$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right), \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_M} \right), \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_M} \right)$	Derivadas totais em relação ao tempo
$\frac{\partial L}{\partial \theta_i}, \frac{\partial L}{\partial x_M}, \frac{\partial L}{\partial y_M}$	Derivadas parciais do Lagrangeano
θ_i	Ângulos de elevação
θ_{ei}	Ângulos de elevação
θ_{ai}	Ângulos de azimute
θ_{Ti}	Ângulos de torção
$\dot{\theta}_i$	Velocidades angulares
r	Reta projeção
F_t	Empuxo do motor, aplicado horizontalmente ao rebocador
F_{yt}	Força que a superfície do mar exerce na vertical sobre o rebocador
F_{yv}	Força que a superfície do mar exerce na vertical sobre a embarcação rebocada
F_{ht}	Arrasto hidrodinâmico aplicado no rebocador
F_{hv}	Arrasto hidrodinâmico aplicado na embarcação rebocada
F_{vt}	Força de reboque
y_{rt}, y_{rv}	Ondas da superfície do mar em relação ao seu nível médio no rebocador e na embarcação rebocada
k_p, k_d	Ganhos proporcional e derivativo do controle
λ	Parâmetro lambda usado na parametrização da reta
$X_0 Y_0$	Sistema no referencial inercial
$M_c, I_c, N_c, M_e, I_e, N_e, M_a, I_a, N_a$	Submatrizes da matriz de inércia tridimensional

τ_{ei}, τ_{ai}	Torques de elevação e torques de azimute
(x_{ei}, y_{ei})	Coordenadas experimentais de cada articulação fictícia em pixels
(x_{emi}, y_{emi})	Coordenadas experimentais de cada articulação fictícia em metros
(x_c, y_c)	Coordenadas do centro de massa da carga terminal
(x_i, y_i)	Coordenadas do centro de massa do <i>i-ésimo</i> elo
$X_0 Y_0 Z_0$	Sistema de referência do centro de massa da base móvel
T_i	Tensão em cada elo no cabo
T_m	Tensão média no cabo
T_0	Tensão mínima no cabo
D	Distância entre rebocador e embarcação rebocada
τ_Z	Força na direção Z

LISTA DE ABREVIATURAS

MatLab	Matrix Laboratory
FPSO	Floating, production, storage and offloading
TEM	Transverse electromagnetic resonator

1. INTRODUÇÃO

Além de ser composto por uma imensa quantidade de biodiversidade e de riquezas minerais, o território econômico marítimo brasileiro possui uma extensa área e é responsável por escoar grande parte do nosso comércio exterior através dos portos, sendo por esses motivos, classificado como um dos mais importantes no mundo.

Neste ambiente estão presentes as estruturas flexíveis do tipo cabo (amarração ou ancoragem de estruturas flutuantes, risers, cabos de reboque de embarcações e cabos umbilicais de robôs subaquáticos), que são amplamente utilizadas para aplicações tecnológicas em ambientes aquáticos e subaquáticos, relacionadas principalmente à indústria de extração de petróleo offshore (Fig. 1.1) e gás. Em virtude disso, houve um crescente interesse dos pesquisadores no desenvolvimento de modelos que representem de maneira precisa e realista o comportamento dinâmico desses cabos por meio de simulações e animações.



Figura 1.1. - Cabos em aplicações subaquáticas

(fonte: <https://cbie.com.br/artigos/quais-as-diferencas-entre-os-tipos-de-producao-de-petroleo/>)

A presente tese está inserida nesse contexto, pois aborda o modelo da estrutura flexível em três cenários. O primeiro é quando o cabo está fixo na sua extremidade superior e livre na outra com

carga terminal (m_c). Neste caso foi realizada uma validação experimental do modelo dinâmico. O segundo é quando o cabo do cenário anterior, ao invés de estar fixo na sua extremidade superior, está articulado a uma base móvel ou embarcação de superfície. Este acoplamento do cabo com a base gera as seguintes situações práticas (Fig. 1.2): **(a)** cabo articulado a uma base móvel em uma extremidade e preso ao fundo do mar na outra, caracterizando ancoragem ou amarração; **(b)** cabo articulado a uma embarcação de superfície numa extremidade e livre na outra, caracterizando uma situação de reboque de estruturas subaquáticas; **(c)** cabo articulado a duas bases móveis, numa situação prática de reboque de embarcações.

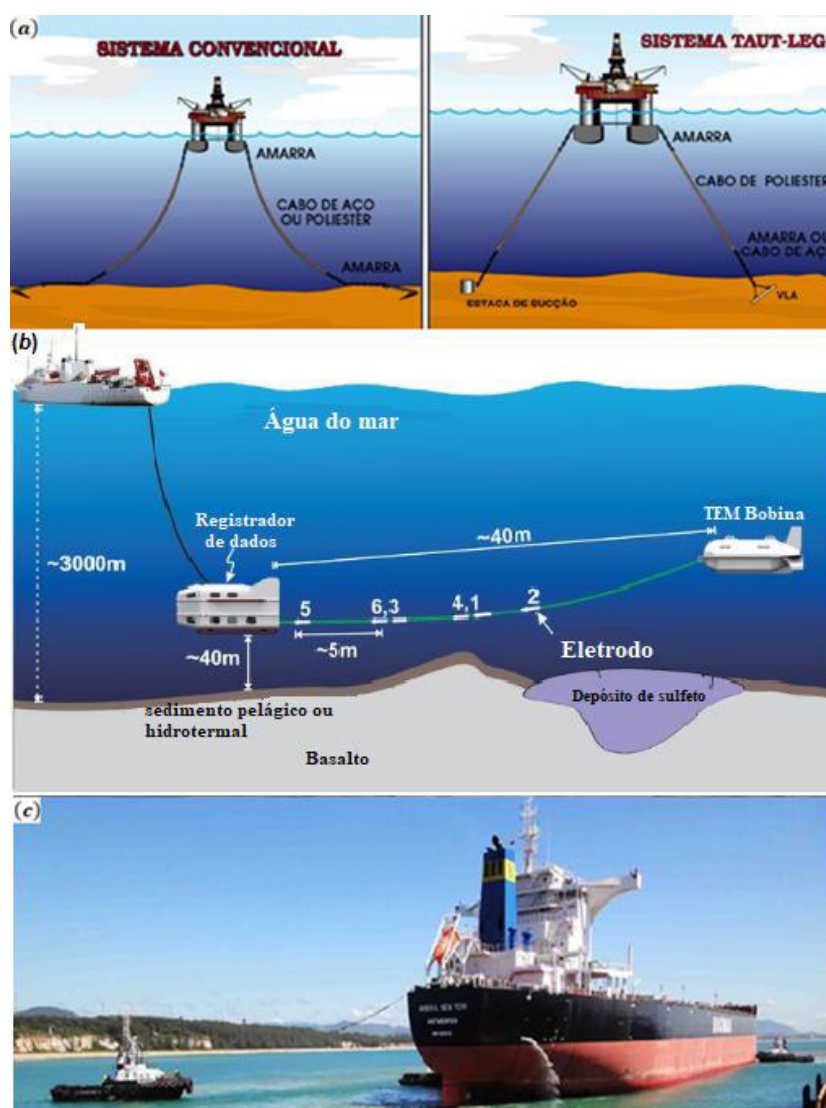


Figura 1.2. - Situações práticas geradas pelo acoplamento cabo-base móvel

(fontes: (a) <https://xdocs.com.br/doc/aula-5-tecnologia-offshore-sistemas-de-amarraao-jovm7q6lp4ov>

(b) https://www.researchgate.net/publication/346313530_Self-Potential_Tomography_of_a_Deep-Sea_Polymetallic_Sulfide_Deposit_on_Southwest_Indian_Ridge/figures?lo=1

(c) <https://rebocador.blogspot.com/>)

Por fim, o último cenário considera o cabo articulado a uma base móvel e, neste caso, o cabo e a carga terminal se movem no espaço tridimensional (3D), de modo que esta técnica proposta é a mais geral possível e pode ser adaptada a diferentes aplicações práticas, tais como: transporte de cargas suspensas por cabos, reboque de embarcações em movimentos no espaço 3D e várias aplicações submarinas.

Admite-se o cabo contido no plano vertical, modelado segundo o formalismo discreto, semelhante ao usado por Gomes *et al.* (2016). A ideia principal deste método é supor que o cabo (estrutura de flexibilidade contínua) seja aproximado de modo discreto por inúmeras hastes rígidas (elos) conectadas por articulações fictícias que recebem a ação de esforços elásticos e de atrito conhecidos. Os ângulos de elevação (θ_{ei}) são formados entre os elos e as retas paralelas ao eixo vertical (Y_0) que passam pelas respectivas articulações fictícias. Todo esse processo gera um sistema cujo número de graus de liberdade é igual ao total de elos ($n = n_e$).

Depois dessa etapa de modelagem e posterior validação experimental, considera-se o modelo do cabo acoplado a uma base móvel flutuante ou embarcação de superfície. Como a base pode se mover nas direções horizontal (ação de correntes oceânicas ou propulsão por hélices) e vertical (oscilações que ocorrem na superfície do mar), a dinâmica acoplada gera um sistema cujo número de graus de liberdade (n) é sempre equivalente à quantidade de elos (n_e) mais dois ($n = n_e + 2$), devido aos dois movimentos possíveis da base. Na sequência, desenvolvem-se analiticamente as equações do movimento de Euler-Lagrange para os casos do cabo aproximado por dois, três e quatro elos. Percebe-se que estas equações crescem muito com o aumento da quantidade de elos (n_e), de forma que se torna inviável o desenvolvimento manual das mesmas, para além de cinco elos. Porém, com os equacionamentos para dois, três e quatro elos foi possível detectar a existência de padrões de crescimento para os vetores e matrizes do modelo dinâmico. Uma vez obtidos esses padrões, algoritmos genéricos foram desenvolvidos para gerar de forma automática as equações dos modelos, considerando-se um número grande de elos para aproximar de forma discreta a flexibilidade contínua do cabo.

Após as etapas de desenvolvimento anteriormente citadas, propõe-se um novo método para a modelagem dinâmica de sistemas de reboque de embarcações, constituído por um cabo conectado nas suas extremidades a duas bases móveis (rebocador e rebocado) que sofrem influência das perturbações decorrentes do movimento das ondas na superfície do mar. Outra contribuição importante é a proposta de um algoritmo para determinar a tensão dinâmica no cabo durante a situação de reboque.

No modelo dinâmico proposto no último caso ocorre a situação mais geral possível, na qual

o cabo é acoplado a uma base móvel e todo o sistema (base móvel, cabo e carga terminal) se desloca no espaço tridimensional. Devido ao fato das articulações fictícias presentes neste modelo permitirem movimentos de elevação (θ_{ei}) e de azimute (θ_{ai}) e a base móvel se movimentar no espaço tridimensional, o número de graus de liberdade (n) é sempre equivalente a duas vezes a quantidade de elos (n_e) mais três ($n = 2n_e + 3$). Novamente após o desenvolvimento analítico das equações do movimento de Euler-Lagrange para os casos do cabo aproximado por dois, três e quatro elos, padrões de crescimento foram identificados e algoritmos genéricos foram desenvolvidos para aproximar de forma discreta a flexibilidade contínua do cabo. Como é exposto na sequência do texto desta tese, os resultados de simulações para os modelos fornecem uma grande sensação de realismo físico, especialmente quando vistos em animações computacionais.

1.1. Objetivos

Após a explanação feita anteriormente, fica evidenciada a extrema importância das estruturas flexíveis do tipo cabo no desenvolvimento tecnológico das nações, visto que, abrange diversas ciências e possui uma infinidade de aplicações. A contribuição desta tese se fundamenta na proposição e no desenvolvimento de modelos dinâmicos de sistemas que dependem das estruturas flexíveis do tipo cabo. Portanto, os objetivos específicos desta tese são:

- Modelar a dinâmica de cabos.
- Programar um algoritmo que converta os dados experimentais captados do vídeo de pixels para coordenadas cartesianas em metros e que também corrija a distorção gráfica presente na imagem coletada.
- Validar experimentalmente o modelo do cabo.
- Propor um modelo dinâmico para o acoplamento entre cabo e embarcações de superfície.
- Propor e desenvolver um algoritmo que calcula as tensões internas no cabo em situações dinâmicas durante o reboque.
- Propor um modelo dinâmico tridimensional para o acoplamento entre cabo e embarcações de superfície.
- Propor algoritmos genéricos para geração automática dos modelos.
- Realizar simulações e animações com o propósito de atestar qualitativamente que os modelos acoplados permitem a obtenção de resultados físicos consistentes e esperados.

Desta forma, o objetivo central deste trabalho é propor um novo modelo dinâmico tridimensional para estruturas flexíveis do tipo cabo acoplado a embarcações, com aplicações no reboque de estruturas subaquáticas ou de embarcações de superfície. Aplicações aéreas também

podem utilizar a modelagem dinâmica proposta, tais como drones transportando cargas suportadas por cabos. Faz parte também do objetivo central a proposição de um algoritmo capaz de calcular as tensões dinâmicas ao longo do cabo. Para alcançar esses objetivos principais foi necessário desenvolver o acoplamento entre as dinâmicas do cabo e das embarcações, com base no formalismo discreto. Conforme será visto posteriormente, os modelos propostos apresentam bons resultados de simulação, atestando qualitativamente o trabalho de modelagem dinâmica. Como o acoplamento só tem seus resultados analisados de forma qualitativa, para aumentar a confiança no modelo, dados experimentais são utilizados para validar a modelagem analítica discreta que é aplicada à estrutura flexível do tipo cabo, na situação em que o cabo está fixo numa extremidade e livre na outra, na qual se posiciona uma carga terminal de massa conhecida.

1.2. Revisão bibliográfica

Na presente seção apresenta-se um resumo sobre as principais referências utilizadas no presente trabalho.

Elementos finitos são amplamente utilizados na modelagem de cabos, incluindo análises dinâmica e estática. Fang *et al.* (2012) propuseram um novo método de elementos finitos para modelar a deformação de cabos em um sistema de reboque de embarcações, usando funções de interpolação de spline cúbica. Bi *et al.* (2013) aplica o Método dos Elementos Finitos para estudar as tensões presentes nos cabos umbilicais submarinos. Eidsvik e Schjølberg (2018) apresentaram um novo modelo de cabo tridimensional para veículos operados remotamente usando a teoria dos feixes de Euler-Bernoulli, com as equações resultantes discretizadas espacialmente por elementos finitos.

Outros utilizam uma formulação analítica, com solução de equações diferenciais parciais por diferenças finitas (Sun *et al.*, (2021)). Alguns artigos trazem aplicações práticas que utilizam estruturas flexíveis de cabos em robótica (Goodarzi *et al.*, (2022), Peng *et al.*, (2020)). Uma revisão interessante e atual do estado da arte focada na dinâmica cabos é apresentada em (Jafari *et al.*, (2020)).

Alguns autores usam outros métodos para estudar a dinâmica dos cabos. Masciola *et al.* (2012) estudam um método de solução para a configuração estática do cabo, a partir de uma aproximação discreta. Bamdad (2013) propôs uma solução analítica baseada no método de separação de variáveis para a dinâmica de manipuladores suspensos por cabos. Liu *et al.* (2013) estudam características dinâmicas de cabos em linhas de transmissão, com base na formulação Lagrangiana. Guo *et al.* (2016) estudaram a influência do suporte do cabo na dinâmica do próprio cabo, considerando que o suporte possui massa, rigidez e atrito conhecidos. Zhu e Yoo (2017) propõem um novo quadro de referência de elementos para o modelo de massa concentrada pelo qual a dinâmica de cabos marítimos pode ser

analisada com eficiência. Vu *et al.* (2017) propõem o uso do método da equação da catenária para identificar os esforços aplicados pelo cabo em um veículo subaquático. González *et al.* (2017) propuseram dois novos métodos de simulação baseados em modelos simplificados de cabos, com aplicação em tempo real de manobras rápidas de retirada e enrolamento de cabos com equipamentos de pesca rebocados.

Percebe-se que a maioria dos trabalhos que abordam a modelagem de cabos usam a técnica de elementos geométricos finitos, diferenças finitas ou massa concentrada. A técnica utilizada na presente pesquisa baseia-se em uma estratégia de discretização, proposta inicialmente por Pereira (2010), que investigou a interação fluido-estrutura de um cabo submerso em um fluido, feita a partir do acoplamento entre a modelagem da dinâmica do cabo com o movimento do fluido. Na modelagem dinâmica do cabo criou-se um formalismo discreto (Euler-Lagrange) que foi adotado no presente estudo. Recentemente Gomes *et al.* (2016) e Gomes *et al.* (2020) propuseram, respectivamente, o uso de algoritmos genéricos que independem do número de elos rígidos para gerar de forma automática o modelo dinâmico do cabo que foi proposto por Pereira (2010), além uma nova modelagem de cabos que considera a ação de forças externas na sua carga terminal.

Um dos assuntos principais desta tese é o reboque de embarcações e, portanto, foram consultados alguns artigos envolvendo na modelagem de cabos o contexto desta aplicação. Buckham *et al.* (2003) descrevem o desenvolvimento de um modelo numérico que captura com precisão a dinâmica dos sistemas de caça de minas e usa a aproximação de massa concentrada para o cabo de reboque. Sun *et al.* (2011) introduziram um novo método de elementos finitos para a modelagem de um corpo rebocado por cabo. O método das diferenças finitas implícita central é usado por Srivastava (2014) para resolver um modelo tridimensional de sistema de reboque subaquático. Yuan *et al.* (2014) utilizam o método das diferenças finitas para resolver as equações dinâmicas não lineares do sistema rebocado, incluindo ganhos em termos de eficiência computacional. Park e Kim (2015) introduziram uma formulação de coordenadas nodais absolutas para modelar um cabo de reboque e mostraram resultados de simulação. O método das diferenças finitas é utilizado por Wang e Sun (2015) para integrar as equações diferenciais da dinâmica de um sistema de reboque, bem como mostraram um estudo sobre a influência de alguns parâmetros no comportamento dinâmico do modelo. Um método baseado em massa concentrada (lumped mass) é usado por Gao e Wang (2018) para simular um sistema de reboque por cabo. Du *et al.* (2019) utilizaram a abordagem de massa concentrada para modelar um cabo de reboque de um sonar e mostraram simulações que incluíam os efeitos do arrasto hidrodinâmico. Sun *et al.* (2019) propuseram um modelo de movimento de acoplamento cabo-barcaça para sistema rebocado com freio usando diferenças finitas para realizar simulações numéricas.

A seguir é apresentado a estrutura da tese.

1.3. Estrutura da tese

A presente tese está dividida em nove capítulos. O capítulo 1 traz a apresentação geral da tese, bem como explicações sobre os objetivos do estudo e a revisão bibliográfica. A divisão dos demais capítulos é descrita a seguir.

No capítulo 2 apresenta-se a modelagem dinâmica da estrutura flexível do tipo cabo, considerando-o fixo em uma das extremidades e livre na outra, na qual contém a carga terminal.

No capítulo 3 são apresentados os algoritmos genéricos para a geração automática do modelo dinâmico do cabo desenvolvido no capítulo 2. Neste capítulo também são mostrados os resultados das comparações entre simulações e resultados experimentais. O objetivo é aferir a confiabilidade da modelagem discreta aplicada à estrutura flexível do tipo cabo.

No capítulo 4 apresenta-se o modelo matemático da estrutura flexível acoplada a uma base móvel que se move tanto na horizontal quanto na vertical. O acoplamento dinâmico base móvel, cabo e carga terminal constitui uma das proposições novas da presente tese.

No capítulo 5 desenvolvem-se os algoritmos genéricos para a geração automática do modelo dinâmico apresentado no capítulo anterior. Neste capítulo também são mostrados os resultados de simulações e animações gráficas, com o objetivo de atestar de modo qualitativo que o modelo é confiável e que se comporta conforme o esperado fisicamente. As animações gráficas mostram resultados com uma boa sensação de realidade física.

No capítulo 6 é apresentada a dinâmica do cabo em uma situação prática de reboque de embarcações. Todo o acoplamento dinâmico é desenvolvido analiticamente e esta é mais uma contribuição original da presente tese.

No capítulo 7 desenvolvem-se os algoritmos genéricos para a geração automática do modelo de reboque de embarcações. Neste capítulo também são mostrados como atuam as forças externas e ainda, os resultados de simulações e animações gráficas, com o propósito de provar de forma qualitativa que o modelo permite a obtenção de resultados físicos muito consistentes. As animações gráficas mostram resultados com uma ótima sensação de realidade física.

No capítulo 8 é proposto um novo formalismo para o cálculo das tensões dinâmicas ao longo do cabo. São propostos ainda algoritmos para a determinação das tensões para um número qualquer de elos utilizados na aproximação discreta da flexibilidade contínua do cabo. A teoria e os resultados deste capítulo também constituem uma proposição nova da presente tese.

No capítulo 9 apresenta-se o modelo matemático tridimensional da estrutura flexível acoplada

a uma base móvel. Algoritmos genéricos são usados para gerar de forma automática o modelo proposto. Também são mostrados os resultados de simulações e animações gráficas, com o objetivo de atestar de modo qualitativo que o modelo dinâmico acoplado é bem representativo, confiável e comporta-se conforme o esperado fisicamente. A teoria e os resultados deste capítulo também constituem uma contribuição nova e original da presente tese.

No Capítulo 10 são apresentadas as principais conclusões da presente tese. Sugestões para a continuação da pesquisa em trabalhos futuros também são formuladas. Ressalta-se que os desenvolvimentos dos algoritmos genéricos de todas as situações de aplicações são também proposições novas desta tese.

2. MODELAGEM DINÂMICA DO CABO

No presente capítulo desenvolve-se o modelo dinâmico de uma estrutura flexível do tipo cabo, que tem movimento contido no plano vertical, com uma extremidade fixa a uma base (origem do sistema inercial) e a outra livre, na qual contém a carga terminal de massa m_c .

Muitas aplicações práticas permitem aproximações de movimentos contidos no plano vertical, tais como cabos de ancoragem e de amarrações, risers, etc., conforme ilustrado na Fig. 2.1.

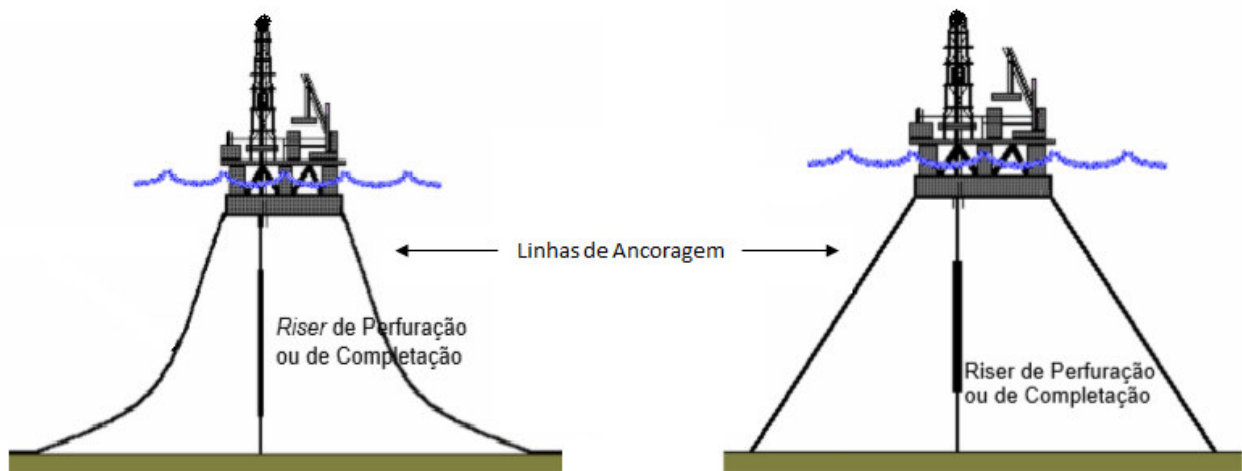


Figura 2.1. - Linhas de ancoragem e risers

(fonte: <https://cbie.com.br/wp-content/uploads/2019/10/vc-sabia-img-1.png>)

As equações do modelo dinâmico foram obtidas a partir da abordagem discreta, na qual o cabo (estrutura flexível contínua) é aproximado por uma cadeia de corpos poliarticulados rígidos conectados por articulações fictícias que recebem a ação de esforços conhecidos de atrito e elasticidade, ou seja, os coeficientes de atrito (c_i) e as constantes elásticas (k_i) de cada articulação são conhecidos, com ($i = 1, \dots, n_e$).

Para o desenvolvimento destes modelos dinâmicos considerou-se a massa (m_i , $i = 1, \dots, n_e$) de cada elo concentrada no seu respectivo centro de massa e todos os elos (l_i , $i = 1, \dots, n_e$) de mesmo tamanho. Os ângulos de elevação (θ_i , $i = 1, \dots, n_e$) são tomados em relação à vertical e o sentido da gravidade coincide com o sentido positivo do eixo Y_0 . A Figura 2.2 ilustra a ideia principal do modelo.

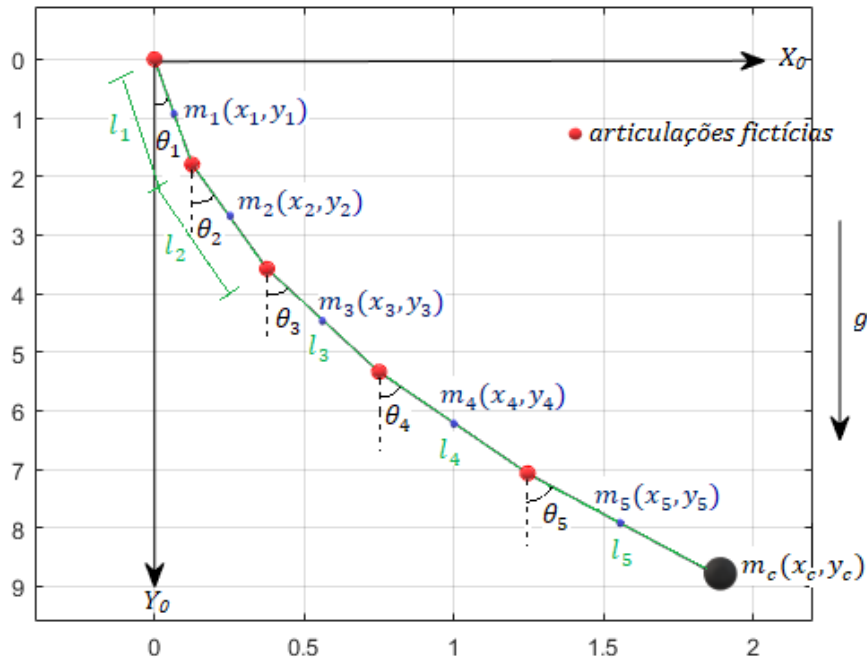


Figura 2.2. – Modelo do cabo considerando cinco articulações fictícias

Utilizando o formalismo discreto obtém-se analiticamente o Lagrangeano ($L = E_C - E_P$) genérico do sistema, conforme demonstrado a seguir.

Sabe-se que as coordenadas de posição (x_i, y_i) das massas (m_i) dos elos (l_i) estão concentradas em seus respectivos centros de massa, com $(i = 1, \dots, n_e)$, de modo que as equações (2.1) a (2.4) podem ser facilmente obtidas:

$$x_i = \frac{l_i}{2} \sin(\theta_i) + \sum_{j=1}^{i-1} l_j \sin(\theta_j) \quad (2.1)$$

$$y_i = \frac{l_i}{2} \cos(\theta_i) + \sum_{j=1}^{i-1} l_j \cos(\theta_j) \quad (2.2)$$

$$x_c = \sum_{j=1}^{n_e} l_j \sin(\theta_j) \quad (2.3)$$

$$y_c = \sum_{j=1}^{n_e} l_j \cos(\theta_j) \quad (2.4)$$

onde (x_c, y_c) são as coordenadas de posição da carga terminal (m_c) livre.

A energia cinética de translação pode ser escrita de acordo com a Eq. (2.5):

$$E_{C_{Ti}} = \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) \quad (2.5)$$

onde: m_i são as massas de cada elo; $\dot{x}_i$ e $\dot{y}_i$ são as coordenadas das velocidades horizontal e vertical, respectivamente, dos centros de massa de cada elo, com $(i = 1, \dots, n_e)$.

A energia cinética de rotação, Eq. (2.6), é devida aos movimentos angulares em torno dos centros de massa dos elos, sobre eixos perpendiculares aos elos e passando por seus centros de massa:

$$E_{C_{Ri}} = \frac{1}{2} I_{Ri} \dot{\theta}_i^2 \quad (2.6)$$

onde: $I_{Ri} = \left(\frac{m_i}{12}\right) l_i^2$ são os momentos de inércia rotacionais de cada elo e $\dot{\theta}_i$ são as velocidades angulares oriundas do movimento de elevação do cabo, com $(i = 1, \dots, n_e)$.

A energia cinética total da estrutura é descrita conforme Eq. (2.7):

$$E_C = \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \sum_{i=1}^{n_e} (E_{C_{Ti}} + E_{C_{Ri}}) \quad (2.7)$$

onde: $\dot{x}_c$ e $\dot{y}_c$ são, respectivamente, as coordenadas das velocidades horizontal e vertical do centro de massa da carga terminal m_c .

A energia potencial devida à elasticidade em cada articulação é representada na Eq. (2.8):

$$E_{P_{Ei}} = \frac{1}{2} k_i (\theta_i - \theta_{i-1})^2 \quad (2.8)$$

onde: k_i e θ_i são, respectivamente, as constantes elásticas e os ângulos de elevação em cada articulação fictícia, com $(i = 1, \dots, n_e)$ e $(\theta_0 = 0)$.

A energia potencial gravitacional em cada elo, com $(i = 1, \dots, n_e)$, é descrita na Eq. (2.9):

$$E_{P_{Gi}} = m_i g h_i \quad (2.9)$$

onde: h_i correspondem às alturas dos centros de massa de cada elo, relativas às posições destes quando a estrutura se encontra em repouso e na posição vertical; g é a aceleração gravitacional na superfície da Terra. A energia potencial total da estrutura é obtida a partir da Eq. (2.10):

$$E_P = m_c g h_c + \sum_{i=1}^{n_e} (E_{P_{Ei}} + E_{P_{Gi}}) \quad (2.10)$$

onde: m_c e h_c correspondem à massa e à altura da carga terminal, respectivamente, quando esta é livre.

Uma vez determinadas as equações com as energias cinética (2.7) e potencial (2.10) da estrutura e considerando as equações (2.1) a (2.4) com as coordenadas de posição das massas (elos e carga terminal), bem como suas derivadas temporais, o Lagrangeano do sistema ($L = E_C - E_P$) pode ser obtido de forma genérica (equação (2.11)), escrito em termos de $\vec{\theta}$ e $\dot{\vec{\theta}}$, com $\vec{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_{n_e}]^T$,

onde a quantidade de elos (n_e) determina o total de graus de liberdade do sistema.

$$\begin{aligned}
L = & \frac{1}{2} m_c \left[\left(\sum_{j=1}^{n_e} (l_j \cos \theta_j \dot{\theta}_j) \right)^2 + \left(- \sum_{j=1}^{n_e} (l_j \sin \theta_j \dot{\theta}_j) \right)^2 \right] \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_e} \left\{ m_i \left[\left(\frac{l_i}{2} \cos \theta_i \dot{\theta}_i + \sum_{j=1}^{i-1} (l_j \cos \theta_j \dot{\theta}_j) \right)^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(- \frac{l_i}{2} \sin \theta_i \dot{\theta}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (l_j \sin \theta_j \dot{\theta}_j) \right)^2 \right] + I_{Ri} \dot{\theta}_i^2 \right\} \\
& - \sum_{i=1}^{n_e} \left\{ \left[\frac{1}{2} k_i (\theta_i - \theta_{i-1})^2 \right] + m_i g \left[\frac{l_i}{2} (1 - \cos \theta_i) + \sum_{j=1}^{i-1} l_j (1 - \cos \theta_j) \right] \right\} \\
& - m_c g \left[\sum_{i=1}^{n_e} l_i (1 - \cos \theta_i) \right]
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Por exemplo, se dois ($n_e = 2$) e depois três ($n_e = 3$) elos forem considerados, a equação (2.11) gera, respectivamente, as equações (2.12) e (2.13).

O Lagrangeano para o cabo com dois elos é descrito na Eq. (2.12):

$$\begin{aligned}
L = & \left(\frac{m_1}{8} + \frac{m_2}{2} + \frac{m_c}{2} \right) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \left(\frac{m_2}{2} + m_c \right) l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \left(\frac{m_2}{8} + \frac{m_c}{2} \right) l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \\
& + \frac{1}{2} I_{R1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{R2} \dot{\theta}_2^2 - \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_c \right) g l_1 (1 - \cos \theta_1) \\
& - \left(\frac{m_2}{2} + m_c \right) g l_2 (1 - \cos \theta_2) - \frac{1}{2} k_1 \theta_1^2 - \frac{1}{2} k_2 (\theta_2 - \theta_1)^2
\end{aligned} \tag{2.12}$$

O Lagrangeano para o cabo com três elos é mostrado na Eq. (2.13):

$$\begin{aligned}
L = & \left(\frac{m_1}{8} + \frac{m_2}{2} + \frac{m_3}{2} + \frac{m_c}{2} \right) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\
& + \left(\frac{m_2}{8} + \frac{m_3}{2} + \frac{m_c}{2} \right) l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) l_2 l_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \\
& + \left(\frac{m_3}{8} + \frac{m_c}{2} \right) l_3^2 \dot{\theta}_3^2 + \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) l_1 l_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \frac{1}{2} I_{R1} \dot{\theta}_1^2 \\
& + \frac{1}{2} I_{R2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} I_{R3} \dot{\theta}_3^2 - \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_c \right) g l_1 (1 - \cos \theta_1) \\
& - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) g l_2 (1 - \cos \theta_2) - \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) g l_3 (1 - \cos \theta_3) \\
& - \frac{1}{2} k_1 \theta_1^2 - \frac{1}{2} k_2 (\theta_2 - \theta_1)^2 - \frac{1}{2} k_3 (\theta_3 - \theta_2)^2
\end{aligned} \tag{2.13}$$

A partir do Lagrangeano do sistema aplica-se a equação de Euler-Lagrange (equação do

movimento) em cada um dos graus de liberdade do sistema.

As equações (2.14) e (2.15) são para o cabo dividido em 2 elos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \tau_1 - c_1 \dot{\theta}_1 - c_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = \tau_1 - (c_1 + c_2) \dot{\theta}_1 + c_2 \dot{\theta}_2 \quad (2.14)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \tau_2 - c_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \quad (2.15)$$

As equações (2.16), (2.17) e (2.18) são para o cabo dividido em 3 elos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \tau_1 - c_1 \dot{\theta}_1 - c_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = \tau_1 - (c_1 + c_2) \dot{\theta}_1 + c_2 \dot{\theta}_2 \quad (2.16)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \tau_2 - c_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) - c_3 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) = \tau_2 + c_2 \dot{\theta}_1 - (c_2 + c_3) \dot{\theta}_2 + c_3 \dot{\theta}_3 \quad (2.17)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_3} = \tau_3 - c_3 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2) = \tau_3 + c_3 \dot{\theta}_2 - c_3 \dot{\theta}_3 \quad (2.18)$$

onde: c_i são os coeficientes de atrito das articulações fictícias e τ_i são os torques de elevação externos, com $(i = 1, \dots, n_e)$. A matriz de coeficientes de atrito e o vetor de esforços externos são gerados diretamente das equações (2.14) a (2.18). Observa-se que a matriz de coeficientes de atrito tem a mesma formação da matriz de constantes elásticas.

Desenvolvendo-se as equações do movimento para todos os graus de liberdade, obtém-se (Eq. (2.19)) o seguinte sistema de equações diferenciais de segunda ordem:

$$[I(\vec{\theta})] \ddot{\vec{\theta}} + [C] \dot{\vec{\theta}} + [K] \vec{\theta} + \vec{F}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}}) + \vec{G}(\vec{\theta}) = \vec{T}_e \quad (2.19)$$

onde $[I(\vec{\theta})]$ é a matriz de inércia, $\ddot{\vec{\theta}}$ é o vetor com as coordenadas de aceleração, $[C]$ é a matriz dos coeficientes de atrito, $\dot{\vec{\theta}}$ é o vetor com as coordenadas de velocidade, $[K]$ é a matriz de constantes elásticas, $\vec{\theta}$ é o vetor com as coordenadas de posição, $\vec{F}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}})$ é o vetor com os esforços Coriolis-centrífugos, $\vec{G}(\vec{\theta})$ é o vetor de esforços gravitacionais e $\vec{T}_e$ é o vetor de torques externos. Todas as matrizes são simétricas ($n \times n$) e os vetores são ($n \times 1$).

Os vetores com as coordenadas de posição para a estrutura com 2 e 3 elos são apresentados na Tab. 2.1 (o expoente T significa transposto).

Tabela 2.1. - Vetores com coordenadas de posição dos elos

2 elos: $\vec{\theta}_{2 \times 1}$	3 elos: $\vec{\theta}_{3 \times 1}$
$\vec{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2]^T$	$\vec{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$

Os elementos das matrizes simétricas de inércia para 2 e 3 elos estão na Tab. 2.2.

Tabela 2.2. - Elementos das matrizes simétricas de inércia

2 elos: $I_{2 \times 2}(\vec{\theta})$	3 elos: $I_{3 \times 3}(\vec{\theta})$
$I_{11} = \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_c\right) l_1^2 + I_{R1}$	$I_{11} = \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_c\right) l_1^2 + I_{R1}$
$I_{12} = \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$	$I_{12} = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$
	$I_{13} = \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_1 l_3 \cos(\theta_1 - \theta_3)$
$I_{22} = \left(\frac{m_2}{4} + m_c\right) l_2^2 + I_{R2}$	$I_{22} = \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c\right) l_2^2 + I_{R2}$
	$I_{23} = \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_2 l_3 \cos(\theta_2 - \theta_3)$
	$I_{33} = \left(\frac{m_3}{4} + m_c\right) l_3^2 + I_{R3}$

As matrizes simétricas de constantes de atrito para 2 e 3 elos são representadas na Tab. 2.3.

Tabela 2.3. - Matrizes simétricas de coeficientes de atrito

2 elos: $[C]_{2 \times 2}$	3 elos: $[C]_{3 \times 3}$
$\begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}$

As matrizes simétricas de constantes elásticas para 2 e 3 elos são descritas na Tab. 2.4.

Tabela 2.4. - Matrizes simétricas de constantes elásticas

2 elos: $[K]_{2 \times 2}$	3 elos: $[K]_{3 \times 3}$
$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$

Observa-se que as matrizes de constantes elásticas (Tab. 2.4) têm configurações idênticas às matrizes de coeficientes de atrito (Tab. 2.3).

A Tabela 2.5 traz os vetores Coriolis-centrífgos para 2 e 3 elos.

Tabela 2.5. - Vetores Coriolis-centrífugos

$\vec{F}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}})$ 2 elos (2x1)	$\begin{pmatrix} \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 \\ -\left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 \end{pmatrix}$
$\vec{F}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}})$ 3 elos (3x1)	$\begin{pmatrix} \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_3^2 \\ -\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_3^2 \\ -\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_1^2 - \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2^2 \end{pmatrix}$

Percebe-se que o termo $F(1)$ do vetor Coriolis-centrífugo surge da aplicação da equação do movimento no primeiro grau de liberdade do sistema, o qual está relacionado com o ângulo de elevação (θ_1). Este termo depende do quadrado das velocidades ($\dot{\theta}_i^2$) oriundas do movimento de elevação do cabo nos demais elos, com ($i = 2, \dots, n_e$). Relação semelhante é adotada para os demais termos do vetor Coriolis-centrífugo.

Os vetores gravitacionais para 2 e 3 elos são mostrados na Tab. 2.6.

Tabela 2.6. - Vetores gravitacionais

2 elos: $\vec{G}(\vec{\theta})_{2x1}$	3 elos: $\vec{G}(\vec{\theta})_{3x1}$
$\vec{G}(\vec{\theta}) = \begin{pmatrix} \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_c\right) gl_1 \sin\theta_1 \\ \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) gl_2 \sin\theta_2 \end{pmatrix}$	$\vec{G}(\vec{\theta}) = \begin{pmatrix} \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_c\right) gl_1 \sin\theta_1 \\ \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) gl_2 \sin\theta_2 \\ \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) gl_3 \sin\theta_3 \end{pmatrix}$

Os vetores torques externos para 2 e 3 elos são visualizados na Tab. 2.7.

Tabela 2.7. - Vetores torques externos

2 elos: $\vec{T}_{e2x1}$	3 elos: $\vec{T}_{e3x1}$
$\vec{T}_e = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}$	$\vec{T}_e = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix}$

É muito importante observar que, à medida que o número de elos aumenta, o determinante da matriz de inércia se aproxima de zero, dificultando ao integrador numérico apresentar uma solução estável. Para superar essa dificuldade, foi utilizado um artifício matemático, conforme explicado abaixo. A equação (2.19) pode ser reescrita na forma da Eq. (2.20):

$$JI(\vec{\theta})\ddot{\vec{\theta}} = J\{\vec{T}_e - [C]\dot{\vec{\theta}} - [K]\vec{\theta} - \vec{F}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}}) - \vec{G}(\vec{\theta})\} \quad (2.20)$$

J é uma matriz diagonal de ordem $n = n_e$, com um determinante alto (10^4 , por exemplo). Portanto, pode-se isolar o vetor de acelerações na forma da Eq. (2.21):

$$\ddot{\vec{\theta}} = [JI(\vec{\theta})]^{-1}J\{\vec{T}_e - [C]\dot{\vec{\theta}} - [K]\vec{\theta} - \vec{F}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}}) - \vec{G}(\vec{\theta})\} \quad (2.21)$$

A rotina MATLAB ODE45 foi utilizada para a integração numérica da equação (2.21). Na função com o modelo dinâmico, a matriz $JI(\vec{\theta})$ é invertida, evitando-se assim a inversão direta da matriz de inércia $I(\vec{\theta})$. Esse fato simples torna a simulação numérica mais estável quando o modelo dinâmico considera um grande número de elos na representação discreta da flexibilidade contínua.

3. ALGORITMOS GENÉRICOS PARA O MODELO DO CABO E VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL

Neste capítulo são apresentados os algoritmos genéricos para a geração automática do modelo dinâmico do cabo, desenvolvido no capítulo 2. Neste capítulo mostra-se também os resultados das comparações entre simulações e resultados experimentais. O objetivo é aferir a confiabilidade da modelagem discreta aplicada à estrutura flexível do tipo cabo.

3.1. Algoritmos genéricos

O desenvolvimento analítico das equações dos modelos dinâmicos do cabo, para os casos de dois, três e quatro elos permitiu a identificação dos padrões de crescimento dos vetores e matrizes dos modelos. Uma vez identificados, os padrões de crescimento permitiram a obtenção de algoritmos genéricos, capazes de gerar de forma automática os modelos dinâmicos, para um número qualquer de elos considerados na aproximação discreta da flexibilidade contínua do cabo.

A matriz de inércia $[I(\vec{\theta})]$ é simétrica e de ordem $n = n_e$, de forma que o seu algoritmo de geração, como mostra a Figura 3.1, determina apenas os elementos da diagonal principal e os acima desta, onde: m_c é a massa da carga terminal livre e l_i , m_i e $I_{Ri} = \left(\frac{m_i}{12}\right) l_i^2$, com $(i = 1, \dots, n_e)$, são, respectivamente, os comprimentos, massas e momentos de inércia rotacionais de cada um dos elos.

```

for i = 1:n_e
    for j = 1:n_e
        if i == j

$$I(i, i) = \left( \frac{m_i}{4} + m_c + \sum_{k=i+1}^{n_e} m_k \right) l_i^2 + I_{Ri};$$

        end
        if j > i

$$I(i, j) = \left( \frac{m_j}{2} + m_c + \sum_{k=j+1}^{n_e} m_k \right) l_i l_j \cos(\theta_i - \theta_j);$$

        end
        I(j, i) = I(i, j);
    end
end
end

```

Figura 3.1. - Algoritmo da matriz de inércia

As matrizes de constantes elásticas $[K]$ e coeficientes de atrito $[C]$ são idênticas, conforme foi mostrado nas Tabelas 2.3 e 2.4, portando o mesmo algoritmo pode ser usado, apenas trocando C por K . Cabe lembrar, que ambas são simétricas, de mesma ordem da matriz de inércia e outra vez o algoritmo determina apenas os elementos da diagonal principal e os acima desta. Os elementos c_i e k_i com $(i = 1, \dots, n_e)$, correspondem aos coeficientes de atrito e constantes elásticas em cada articulação fictícia do cabo, conforme mostrado na Fig. 3.2.

Matriz $[C]$	Matriz $[K]$
<pre> for i = 1:n for j = 1:n if i == j if i == n C(i,i) = c_(n); else C(i,i) = c_(i) + c_(i+1); end end if j > i if j == i + 1 C(i,j) = -c_(j); else C(i,j) = 0; end end C(j,i) = C(i,j); end end end </pre>	<pre> for i = 1:n for j = 1:n if i == j if i == n K(i,i) = k_(n); else K(i,i) = k_(i) + k_(i+1); end end if j > i if j == i + 1 K(i,j) = -k_(j); else K(i,j) = 0; end end K(j,i) = K(i,j); end end end </pre>

Figura 3.2. - Algoritmo da matriz de coeficientes de atrito e de constantes elásticas

A Figura 3.3 mostra o algoritmo do vetor gravitacional.

```

for i = 1:n
    
$$G(i) = \left( \frac{m_i}{2} + m_c + \sum_{k=i+1}^{n_e} m_k \right) g l_i \sin(\theta_i);$$

end

```

Figura 3.3. - Algoritmo do vetor gravitacional

A Figura 3.4 mostra o algoritmo do vetor Coriolis-centrífugo (o expoente T significa transposto).

```

for i = 1:n
    for j = 1:n
        if j == i
            f(i,j) = 0;
        end
        if j > i
            
$$f(i,j) = \left( \frac{m_j}{2} + m_c + \sum_{k=j+1}^{n_e} m_k \right) l_i l_j \sin(\theta_i - \theta_j);$$

        end
        f(j,i) = -f(i,j);
    end
end
for i = 1:n
    velf(i) =  $\dot{\theta}_i^2$ ;
end
F = f.velfT;

```

Figura 3.4. - Algoritmo do vetor Coriolis-centrífugo

Conforme explicado anteriormente, os modelos dinâmicos foram desenvolvidos analiticamente usando as equações de Euler-Lagrange para 2, 3 e 4 elos. Os mesmos modelos gerados com os algoritmos genéricos combinavam perfeitamente com os desenvolvidos analiticamente. Repetiu-se a mesma comparação para 5 elos e o resultado foi o mesmo. Em resumo, os algoritmos são capazes de gerar exatamente o mesmo modelo dinâmico desenvolvido analiticamente aplicando

o formalismo de Euler-Lagrange, mas com a grande vantagem de gerar modelos dinâmicos, independentemente do número de elos. O desenvolvimento manual analítico, por outro lado, é impraticável para um número de elos maior que seis (por exemplo), porque as equações se tornam muito grandes.

3.2. Validação experimental

No laboratório do Núcleo de Matemática Aplicada e Controle (NuMA-FURG), foi utilizado um suporte metálico para prender a uma distância de $0,156\text{ m}$ da parede do fundo, uma das extremidades de um cabo de fibra sintética de $2,61\text{ m}$ de comprimento, preso no teto da sala, enquanto que na outra extremidade tinha uma carga terminal m_c livre de massa $2,0\text{ kg}$. Nesta estrutura flexível foram marcadas 16 articulações fictícias (marcações em vermelho, vistas na Figura 3.5) igualmente espaçadas, formando 16 elos de mesmo tamanho. A Figura 3.5 mostra a configuração espacial inicial do cabo em equilíbrio estático, que corresponde ao primeiro frame captado pela câmera do celular que estava fixada na parede oposta e cujo eixo longitudinal estava alinhado e afastado a uma distância de $2,804\text{ m}$ do eixo longitudinal do cabo.

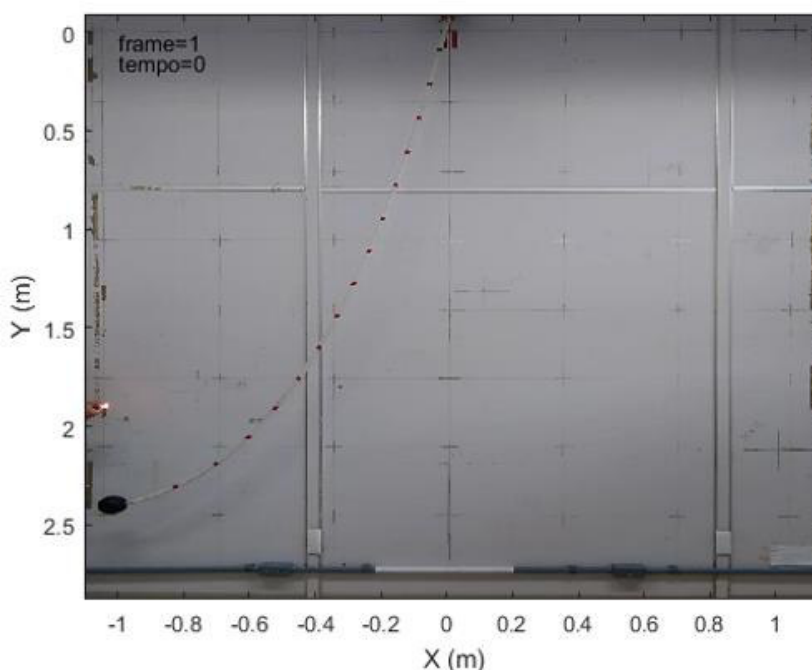


Figura 3.5. - Configuração espacial inicial

Como o plano vertical (β) que contém o cabo está afastado $0,156\text{ m}$ do plano do fundo (α) no qual visualizam-se os frames (fotografias) coletados do vídeo, é necessário encontrar a reta r que interseccionada ao plano beta, projeta os pontos do cabo vistos na parede do fundo na imagem final

para o plano do cabo mais à frente, conforme mostra a Fig. (3.6).

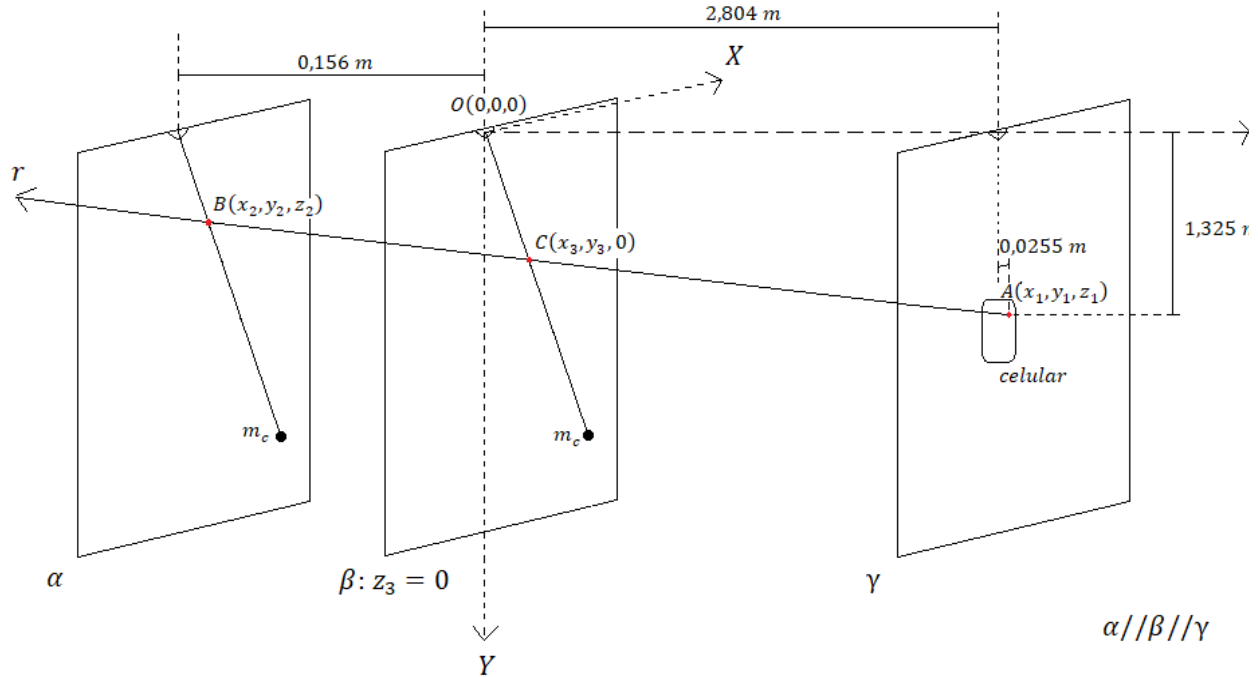


Figura 3.6. - Layout e projeção do experimento

Como as coordenadas dos pontos $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ são conhecidas, pode-se obter a reta r conforme a Eq. (3.1).

$$r: \begin{cases} x = x_2 + (x_2 - x_1) \cdot \lambda \\ y = y_2 + (y_2 - y_1) \cdot \lambda \\ z = z_2 + (z_2 - z_1) \cdot \lambda \end{cases} \quad (3.1)$$

Interseccionando a reta r com o plano (β), encontra-se o parâmetro lambda $\left(\lambda = \frac{-z_2}{z_2 - z_1} = \frac{-0,156}{2,96}\right)$ necessário para obter o ponto C , conforme Eq. (3.2).

$$C = (r \cap \beta) \Rightarrow \begin{cases} x_3 = x_{em} + (x_{em} - 0,0255) \cdot \left(\frac{-0,156}{2,96}\right) \\ y_3 = y_{em} + (y_{em} - 1,325) \cdot \left(\frac{-0,156}{2,96}\right) \end{cases} \quad (3.2)$$

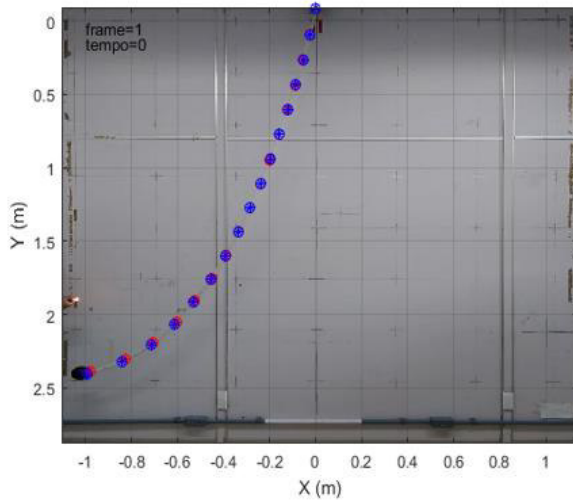
onde x_{em} e y_{em} são as coordenadas experimentais do ponto B transformadas de pixels para metros.

Isolando x_{em} e y_{em} na equação (3.2) encontra-se a projeção contrária, de beta para alfa, necessária para quando deseja-se confrontar os resultados da simulação com os resultados experimentais no vídeo.

É importante lembrar que os dados da simulação encontram-se originalmente no plano beta, enquanto os dados experimentais coletados da imagem estão sempre no plano alfa. Para comparar simulação versus experimento é obrigatório que todos os dados estejam contidos no mesmo plano,

seja α ou β , conforme indicado na Fig. (3.7).

(a) Plano alfa (α)



(b) Plano beta (β)

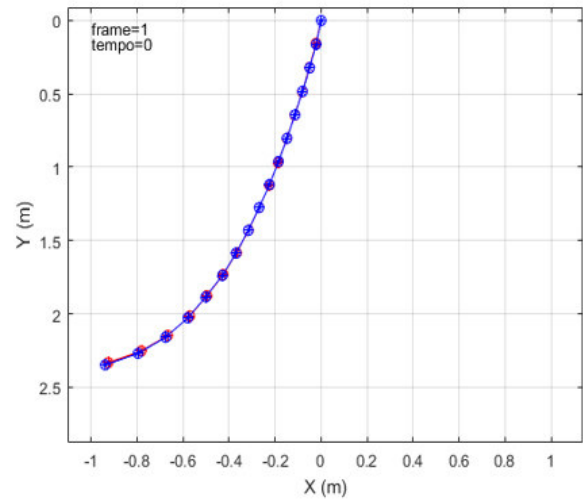
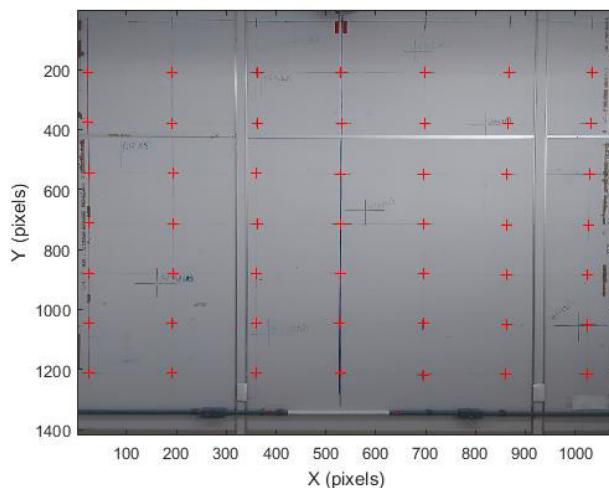


Figura 3.7. - Simulação (azul) x Experimental (vermelho): **a** plano do fundo; **b** plano do cabo

Todos os 16 pontos ($x_{ei}, y_{ei}, i = 1, \dots, 16$) coletados das articulações fictícias do cabo nos frames (*plano α*) são conhecidos em pixels, sendo necessário converte-los para metros. A Figura 3.8 ilustra o conceito utilizado no desenvolvimento do algoritmo que é capaz de converter os pontos e também de corrigir a distorção da imagem captada.

(a) grade em pixels



(b) grade em metros

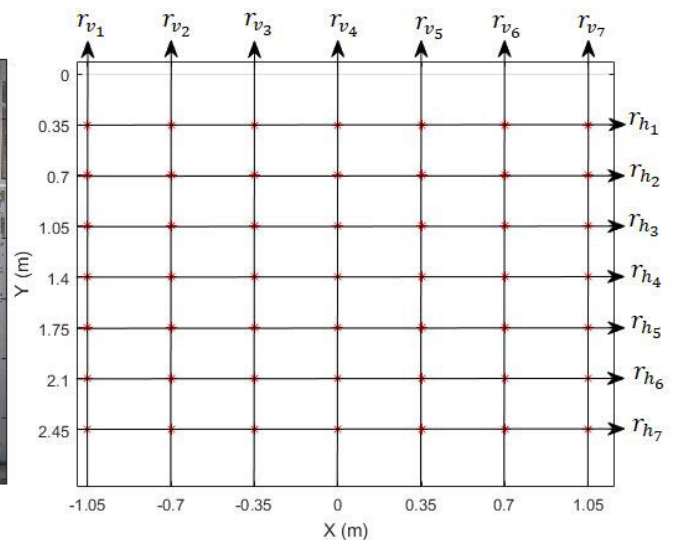


Figura 3.8. - Conceito inicial adotado no algoritmo da conversão/distorção

Inicialmente foi desenhado sobre o plano alfa da Figura (3.8 (a)), o plano cartesiano da Figura (3.8 (b)), que tem origem coincidindo com a primeira articulação fictícia do cabo, vista na Figura (3.7

(b)).

Percebe-se no plano cartesiano da Figura (3.8 (b)) a presença de 7 retas horizontais $(r_{h_1}, r_{h_2}, r_{h_3}, r_{h_4}, r_{h_5}, r_{h_6}, r_{h_7})$ e 7 verticais $(r_{v_1}, r_{v_2}, r_{v_3}, r_{v_4}, r_{v_5}, r_{v_6}, r_{v_7})$ igualmente espaçadas em $0,35\text{ m}$ a partir da origem, formando 49 pontos, que são utilizados para relacionar os valores em pixels com os valores reais em metros. As retas horizontais têm suas abscissas coletadas e as retas verticais as suas ordenadas, sempre em ordem crescente. Sabe-se que todos os valores coletados da imagem estão sempre em pixels. O processo descrito a seguir para uma das retas é o mesmo empregado nas 14 retas.

Usa-se como exemplo a reta r_{h_1} . Coleta-se (clicando-se com o mouse sobre as marcações da reta) os valores em pixels dessa reta na imagem, para ajustar, no sentido dos mínimos quadrados, aos valores reais de x $(-1,05; -0,7; -0,35; 0; 0,35; 0,7; 1,05)$ em metros. Este procedimento é repetido 7 vezes, devido a dificuldade de visualização do ponto na imagem e consequente precisão de click. Cada vez que a sequência completa de cliques em todos os pontos da reta é concluída, geram-se os coeficientes da reta que ajusta estes pontos. Conhecidos todos esses coeficientes, médias aritméticas simples são calculadas com a finalidade de obter um coeficiente médio para cada reta de conversão/distorção obtida.

Por fim, cada coordenada dos 16 pontos $(x_{ei}, y_{ei}, i = 1, \dots, 16)$ coletados das articulações fictícias do cabo é enquadrada em relação às retas horizontais e verticais, que foram obtidas conforme explicado anteriormente.

É importante lembrar que todas as coordenadas são influenciadas por no máximo duas retas de conversão/distorção, salvo aquelas coordenadas que estão sobre as retas, ou as que estão acima da reta r_{h_1} ou abaixo da r_{h_7} , para as horizontais e a esquerda da r_{v_1} ou a direita da r_{v_7} , para as verticais.

Concluído esse processo, os 16 pontos $(x_{ei}, y_{ei}, i = 1, \dots, 16)$ que antes estavam em pixels ficam convertidos para metros com a correção da distorção da imagem também inclusa e passam a ser chamados de $(x_{emi}, y_{emi}, i = 1, \dots, 16)$.

Como os parâmetros relacionados à massa e ao comprimento dos elos, densidade linear e raio do cabo e massa da carga terminal são bem conhecidos, é necessário identificar apenas três parâmetros, coeficiente de atrito (c) , constante elástica (k) e arrasto atmosférico (γ) . As posições das articulações fictícias $(x_{emi}, y_{emi}, i = 1, \dots, 16)$ marcadas em vermelho no cabo já foram identificadas experimentalmente e transformadas para metros. A primeira articulação fictícia é fixa na origem do sistema de referência e não é levada em consideração na obtenção do erro. O último ponto marcado em vermelho corresponde à carga terminal. O cabo é colocado em uma configuração

espaçial inicial (Figura 3.7) e, a seguir, é liberado para que sua dinâmica evolua apenas sob a ação da gravidade.

Foi realizada uma simulação considerando o modelo com 16 elos, sob as mesmas condições do experimento, e as posições simuladas ($x_i, y_i, i = 1, \dots, 16$) são comparadas com as respectivas posições experimentais usando-se a seguinte equação de erro (Eq. (3.3)).

$$E_R = \frac{1}{n_f} \sum_{j=1}^{n_f} \left[\left(\sum_{i=1}^{16} \sqrt{(x_{emi} - x_i)^2 + (y_{emi} - y_i)^2} \right) / 16 \right] \quad (3.3)$$

onde n_f é o número de frames do vídeo, que corresponde ao número de passos de integração da simulação. Os parâmetros (c, k e γ) foram identificados de forma que o erro (Eq. (3.3)) fosse mínimo. Para a identificação dos parâmetros, utilizou-se o método de Nelder-Mead Simplex (Lagarias *et al.*, 1998) programado em MatLab. A Tabela 3.1 mostra todos os parâmetros do modelo.

Tabela 3.1. - Parâmetros físicos do modelo

Parâmetros físicos	Valor
Comprimento do cabo (L_c)	$L_c = 2,61 \text{ (m)}$
Número de elos (n_e)	$n_e = 16$
Comprimento de cada elo ($l_i = \frac{L_c}{n_e}, i = 1, \dots, 16$)	$l_i = 0,1631 \text{ (m)}$
Densidade linear do cabo (ρ)	$\rho = 0,1495 \text{ (kg/m)}$
Massa de cada elo ($m_i = \rho l_i, i = 1, \dots, 16$)	$m_i = 0,0244 \text{ (kg)}$
Massa da carga terminal (m_c)	$m_c = 2,0 \text{ (kg)}$
Raio do cabo (r)	$r = 0,008 \text{ (m)}$
Constante elástica das articulações fictícias ($k_i, i = 1, \dots, 16$)	$k_i = 3,0743 \cdot 10^{-5} \text{ (Nm/rd)}$
Coeficiente de atrito das articulações fictícias ($c_i, i = 1, \dots, 16$)	$c_i = 1,4881 \cdot 10^{-4} \left(\frac{Nms}{rd} \right)$
Arrasto atmosférico (γ)	$\gamma = 0,2885 \left(\frac{Ns^2}{(rd \cdot m)^2} \right)$

Para melhor analisar os resultados da simulação, foi desenvolvido um software que permite a animação gráfica. A Figura 3.9 mostra vinte e quatro frames com os resultados da simulação (azul) e experimental (vermelho) no plano do cabo (β). Os primeiros 16 círculos marcam as posições das articulações fictícias e o último marca a posição da carga terminal. O primeiro frame em $t = 0$ mostra a configuração espacial inicial, quando a dinâmica começa a evoluir sob o efeito da gravidade.

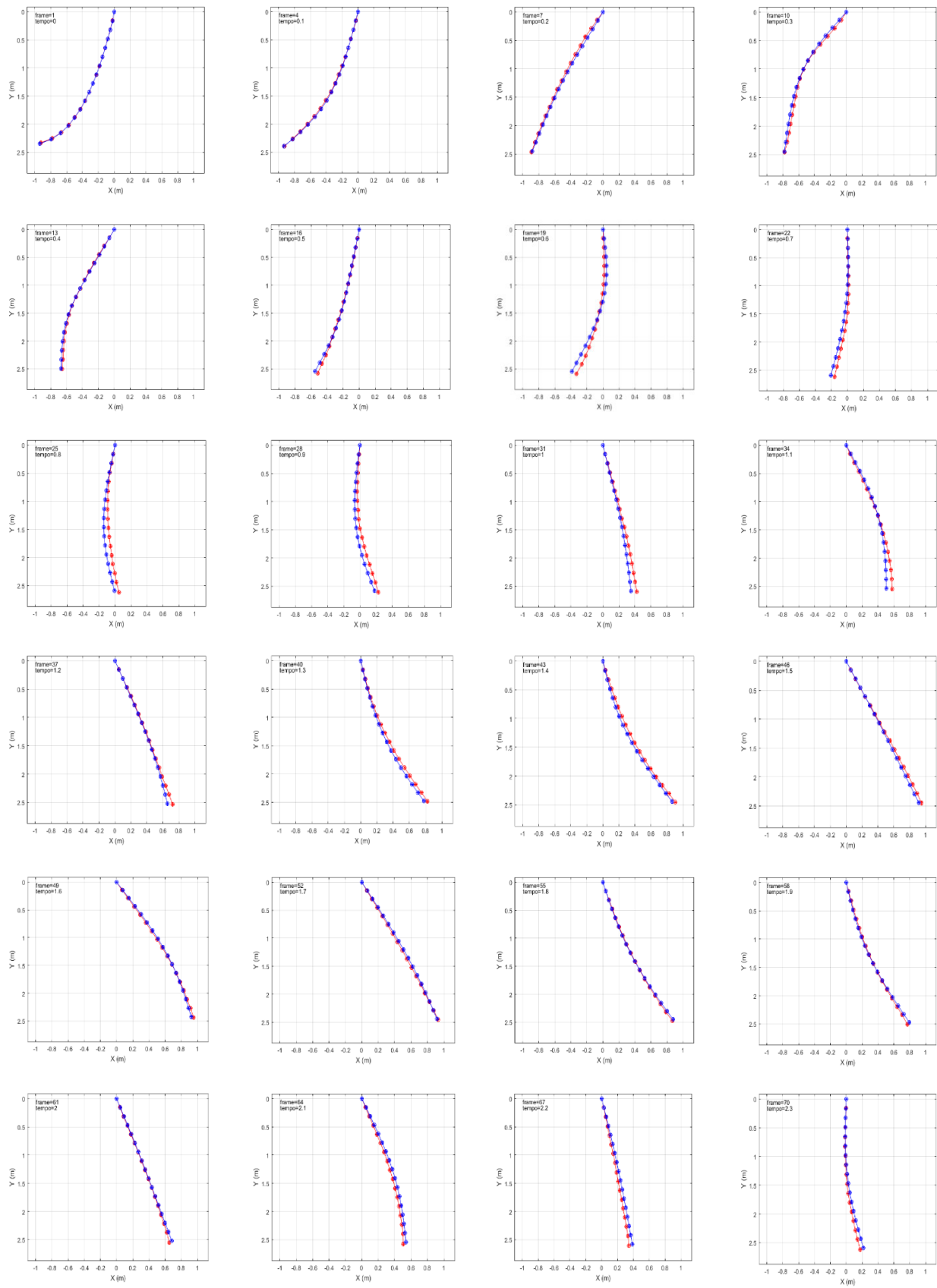


Figura 3.9. - Frames com resultados de simulação (azul) e experimentais (vermelho)

É importante comparar simulação e experimento nos primeiros segundos do movimento, pois os modos flexíveis ainda estão ativos e não totalmente atenuados. Observa-se que a diferença entre simulação e experimento presente nos frames da (Fig. 3.9) deve-se ao fato de o experimento estar com a sua carga terminal no primeiro frame amarrada numa posição aproximada de quase $0,2776\text{ m}$ acima de quando o cabo está totalmente esticado e na vertical ($2,61\text{ m}$), correspondendo a um percentual aproximado de $10,636\%$ do seu comprimento total, que em queda livre, gera uma situação de impacto no momento em que o cabo fica plenamente distendido, circunstância não considerada no modelo e que acaba por afetar um pouco os resultados. A Figura 3.10 mostra as posições do ponto médio e a Fig. 3.11 da carga terminal, nas quais os dois primeiros modos de vibração são observados.

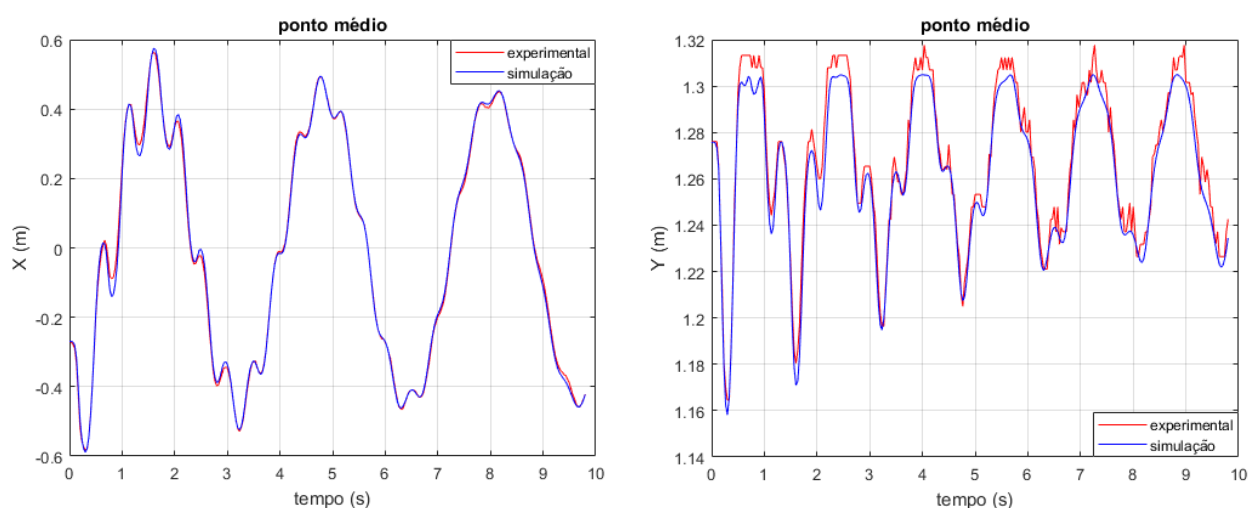


Figura 3.10. - Coordenadas do ponto médio

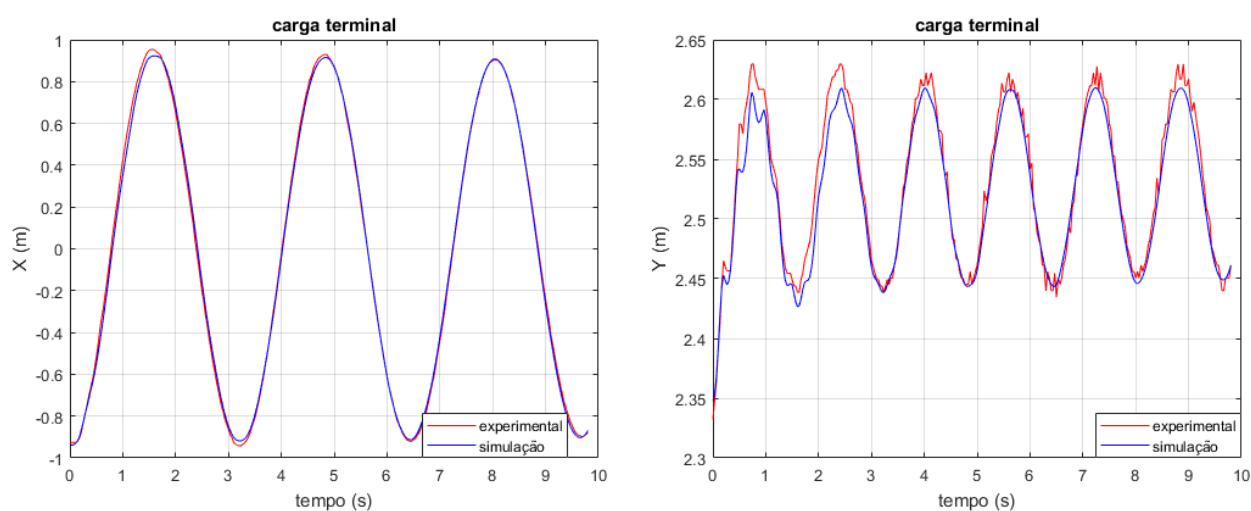


Figura 3.11. - Coordenadas da carga terminal

A evolução da média dos erros de posição é vista na Fig. (3.12).

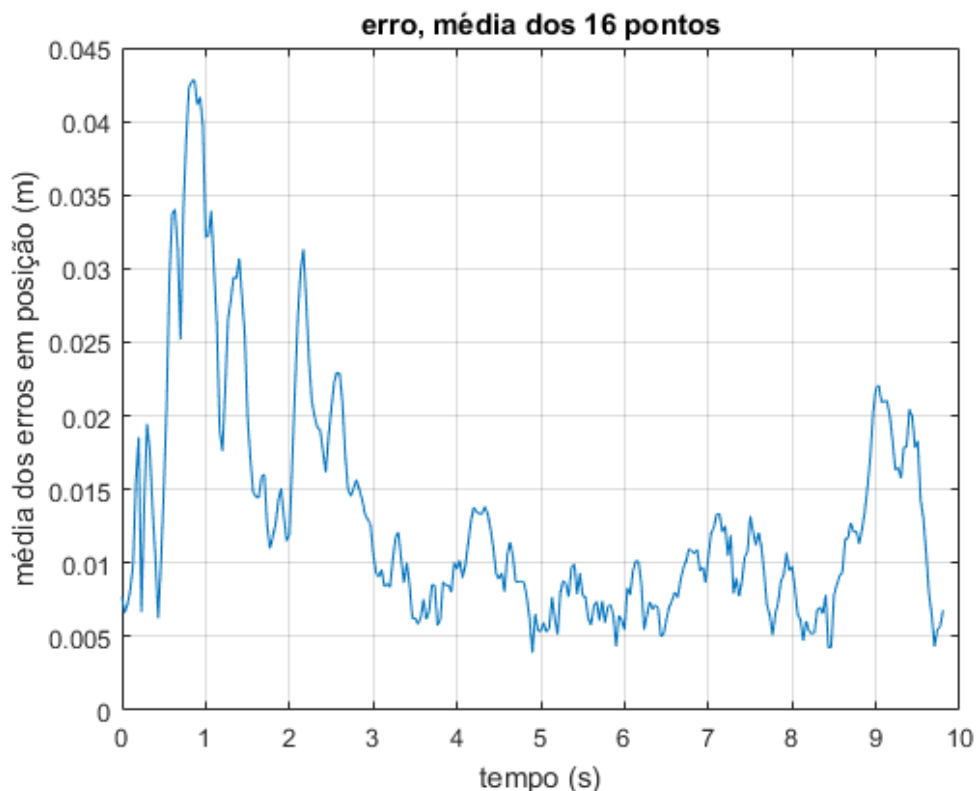


Figura 3.12. - Média dos erros em posição nos 16 pontos, plotada ao longo do tempo

As Figuras (3.9) a (3.12) mostram que a simulação fornece um resultado próximo ao experimento. O valor do erro total descrito pela Eq. (3.3) para este experimento foi de $0,0131\text{ m}$, equivalente a $0,5\%$ do comprimento do cabo. Acredita-se que se outros experimentos forem realizados a partir de uma configuração espacial inicial onde a carga terminal esteja amarrada numa posição mais abaixo do que a considerada no primeiro frame do experimento da Fig. (3.9), de forma a evitar uma situação de choque, e com uma quantidade maior que 16 articulações fictícias, os erros irão se tornar ainda menores.

4. MODELAGEM DINÂMICA CABO-BASE MÓVEL

Adota-se que o cabo tem movimento contido no plano vertical com origem na superfície média do mar e que a sua extremidade superior está articulada a uma base flutuante ou embarcação de superfície que se move verticalmente e horizontalmente, enquanto na outra extremidade, há uma carga terminal inicialmente livre, de massa m_c . Posteriormente serão abordadas simulações nas quais essa carga terminal será considerada fixa ao fundo do mar. Ressalta-se que muitas aplicações reais são semelhantes ao modelo em estudo neste capítulo, conforme exemplos vistos na Fig. 4.1.

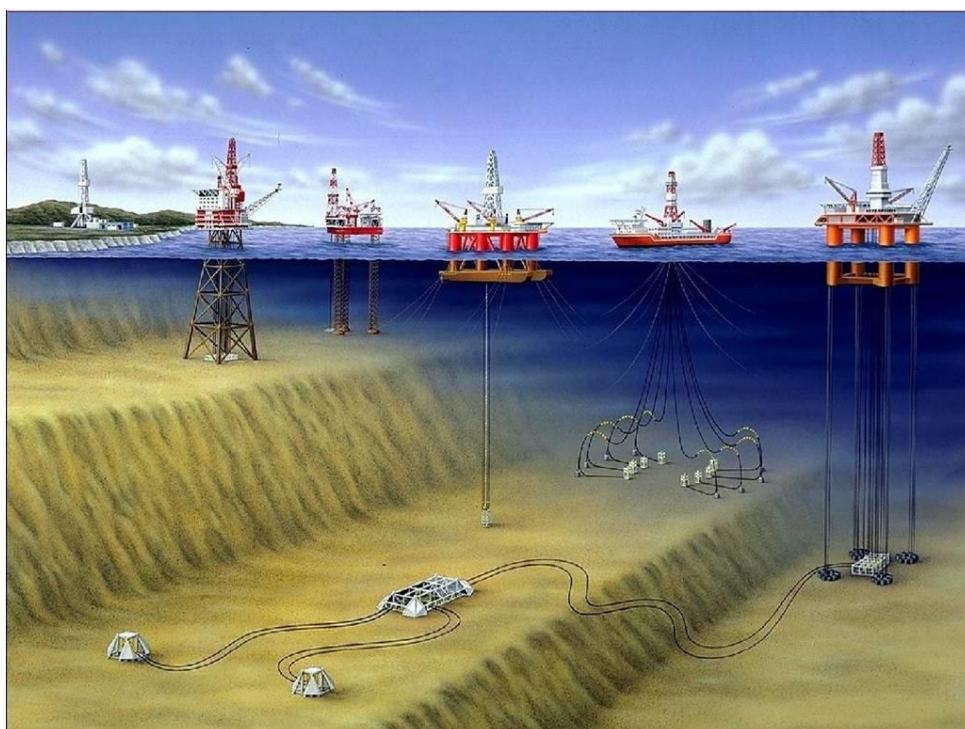


Figura 4.1. - Plataformas petrolíferas

(fonte: <https://crea-al.sfo2.cdn.digitaloceanspaces.com/2015/11/esplorafolhelho.jpg>)

As equações do modelo dinâmico foram obtidas a partir da abordagem discreta, com o cabo (estrutura contínua) dividido em partes rígidas (elos) conectadas por articulações fictícias elásticas. Para o desenvolvimento destes modelos dinâmicos considerou-se a massa m_i de cada elo concentrada no seu respectivo centro de massa e todos os elos (l_i) de mesmo tamanho. Supõe-se ainda que cada articulação fictícia possui a sua constante elástica (k_i) e o seu coeficiente de atrito (c_i) conhecidos, com ($i = 1, \dots, n_e$).

Considera-se no modelo acoplado da Figura 4.2 que o empuxo anula o peso da base móvel na superfície e que a dinâmica imposta pelo movimento vertical da superfície do mar foi aproximada por um sistema massa–mola–amortecedor. As forças de empuxo são consideradas

atuando nos centros de massa de cada corpo rígido da estrutura e ainda, na mesma direção da força gravitacional, mas com sentido oposto.

A água foi considerada em repouso (ausência de correntes oceânicas) e em cada elo a força de arrasto atua no seu centro de massa e é proporcional ao quadrado da sua velocidade linear.

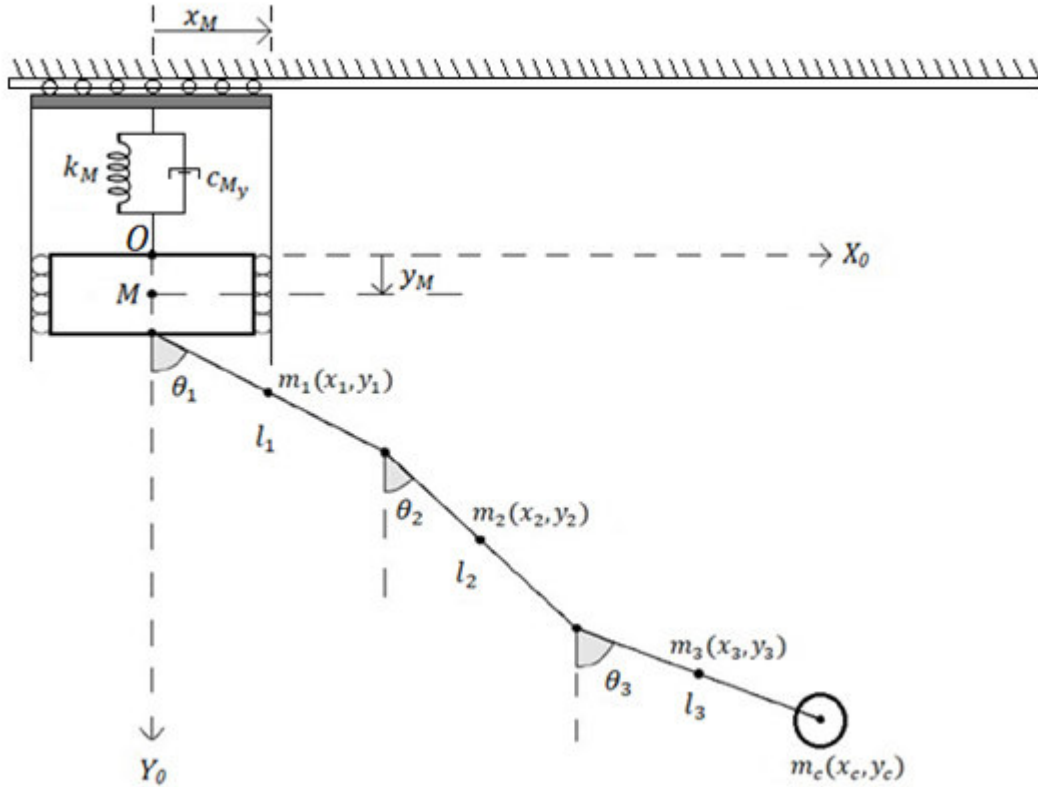


Figura 4.2. - Representação da base móvel acoplada ao cabo que considera três elos

Utilizando o formalismo discreto obteve-se analiticamente o Lagrangeano ($L = E_C - E_P$) do sistema considerando o cabo com dois e três elos, conforme demonstrado a seguir.

Sabe-se que as coordenadas de posição (x_i, y_i) das massas (m_i) dos elos (l_i) estão concentradas em seus respectivos centros de massa, com $(i = 1, \dots, n_e)$, de modo que as equações (4.1) a (4.4) podem ser facilmente obtidas:

$$x_i = x_M + \frac{l_i}{2} \sin(\theta_i) + \sum_{j=1}^{i-1} l_j \sin(\theta_j) \quad (4.1)$$

$$y_i = y_M + \frac{l_i}{2} \cos(\theta_i) + \sum_{j=1}^{i-1} l_j \cos(\theta_j) \quad (4.2)$$

$$x_c = x_M + \sum_{j=1}^{n_e} l_j \sin(\theta_j) \quad (4.3)$$

$$y_c = y_M + \sum_{j=1}^{n_e} l_j \cos(\theta_j) \quad (4.4)$$

onde: (x_c, y_c) são as coordenadas de posição da carga terminal (m_c) livre; x_M e y_M são as coordenadas de posição dos deslocamentos do centro de massa relativos aos movimentos horizontal e vertical da embarcação (base móvel).

A energia cinética de translação pode ser escrita de acordo com a Eq. (4.5):

$$E_{C_{Ti}} = \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) \quad (4.5)$$

onde: m_i são as massas de cada elo; $\dot{x}_i$ e $\dot{y}_i$ são as coordenadas das velocidades horizontal e vertical, respectivamente, dos centros de massa de cada elo, com $(i = 1, \dots, n_e)$.

A energia cinética de rotação, Eq. (4.6), é devida aos movimentos angulares em torno dos centros de massa dos elos, sobre eixos perpendiculares aos elos e passando por seus centros de massa:

$$E_{C_{Ri}} = \frac{1}{2} I_{Ri} \dot{\theta}_i^2 \quad (4.6)$$

onde: $I_{Ri} = \left(\frac{m_i}{12}\right) l_i^2$ são os momentos de inércia rotacionais e $\dot{\theta}_i$ são as velocidades oriundas do movimento de elevação do cabo, com $(i = 1, \dots, n_e)$.

A energia cinética total da estrutura é descrita conforme Eq. (4.7):

$$E_C = \frac{1}{2} M (\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2) + \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \sum_{i=1}^n (E_{C_{Ti}} + E_{C_{Ri}}) \quad (4.7)$$

onde: M é a massa da base móvel; $\dot{x}_M$, $\dot{y}_M$ e $\dot{x}_c$, $\dot{y}_c$ são, respectivamente, as coordenadas das velocidades horizontal e vertical da base M e da carga terminal m_c .

A energia potencial devida à elasticidade em cada articulação é representada na Eq. (4.8):

$$E_{P_{Ei}} = \frac{1}{2} k_i (\theta_i - \theta_{i-1})^2 \quad (4.8)$$

onde: k_i e θ_i são, respectivamente as constantes elásticas e os ângulos de elevação em cada articulação fictícia, com $(i = 1, \dots, n_e)$ e $(\theta_0 = 0)$.

A energia potencial gravitacional em cada elo, com $i = 1, \dots, n_e$, é descrita na Eq. (4.9):

$$E_{P_{Gi}} = m_i g h_i \quad (4.9)$$

onde: h_i correspondem às alturas dos centros de massa de cada elo, relativas às posições destes quando a estrutura se encontra em repouso e na posição vertical; g é a aceleração gravitacional na superfície da Terra. A energia potencial total da estrutura é obtida a partir da Eq. (4.10):

$$E_p = \frac{1}{2} k_M y_M^2 + m_c g h_c + \sum_{i=1}^n (E_{p_{Ei}} + E_{p_{Gi}}) \quad (4.10)$$

onde: m_c e h_c correspondem à massa e à altura da carga terminal, respectivamente, quando esta é livre; k_M e y_M são, respectivamente, a constante elástica e o deslocamento do centro de massa relativos ao movimento vertical da embarcação (base móvel). Uma vez determinadas as equações com as energias cinética (4.7) e potencial (4.10) da estrutura e considerando as equações (4.1) a (4.4) com as coordenadas de posição das massas (elos e carga terminal), bem como suas derivadas temporais, o Lagrangeano do sistema ($L = E_c - E_p$) pode ser obtido de forma genérica (equação (4.11)), escrito em termos de $\vec{r}$ e $\dot{\vec{r}}$, com $\vec{r} = [y_M \ x_M \ \theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_{n_e}]^T$. Nesse caso, o sistema possui $n = n_e + 2$ graus de liberdade.

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} M (\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2) + \frac{1}{2} m_c \left[\left(\dot{x}_M + \sum_{j=1}^{n_e} (l_j \cos \theta_j \dot{\theta}_j) \right)^2 + \left(\dot{y}_M - \sum_{j=1}^{n_e} (l_j \sin \theta_j \dot{\theta}_j) \right)^2 \right] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_e} \left\{ m_i \left[\left(\dot{x}_M + \frac{l_i}{2} \cos \theta_i \dot{\theta}_i + \sum_{j=1}^{i-1} (l_j \cos \theta_j \dot{\theta}_j) \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\dot{y}_M - \frac{l_i}{2} \sin \theta_i \dot{\theta}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (l_j \sin \theta_j \dot{\theta}_j) \right)^2 \right] + I_{Ri} \dot{\theta}_i^2 \right\} - \frac{1}{2} k_M y_M^2 \\ & - \sum_{i=1}^{n_e} \left\{ \left[\frac{1}{2} k_i (\theta_i - \theta_{i-1})^2 \right] \right. \\ & \left. + m_i g \left[-y_M + \frac{l_i}{2} (1 - \cos \theta_i) + \sum_{j=1}^{i-1} l_j (1 - \cos \theta_j) \right] \right\} \\ & - m_c g \left[-y_M + \sum_{i=1}^{n_e} l_i (1 - \cos \theta_i) \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Por exemplo, se dois ($n_e = 2$) e depois três ($n_e = 3$) elos forem considerados, a equação (4.11) gera, respectivamente, as equações (4.12) e (4.13).

O Lagrangeano para o cabo com dois elos é descrito pela Eq. (4.12):

$$\begin{aligned}
L = & \frac{1}{2}(M + m_1 + m_2 + m_c)(\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2) \\
& + \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_c\right) l_1 \dot{\theta}_1 (\dot{x}_M \cos \theta_1 - \dot{y}_M \sin \theta_1) \\
& + \left(\frac{m_1}{8} + \frac{m_2}{2} + \frac{m_c}{2}\right) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_2 \dot{\theta}_2 (\dot{x}_M \cos \theta_2 - \dot{y}_M \sin \theta_2) \\
& + \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \left(\frac{m_2}{8} + \frac{m_c}{2}\right) l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} I_{R1} \dot{\theta}_1^2 \\
& + \frac{1}{2} I_{R2} \dot{\theta}_2^2 + (m_1 + m_2 + m_c) g y_M - \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_c\right) g l_1 (1 - \cos \theta_1) \\
& - \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) g l_2 (1 - \cos \theta_2) - \frac{1}{2} k_1 \theta_1^2 - \frac{1}{2} k_2 (\theta_2 - \theta_1)^2 - \frac{1}{2} k_M y_M^2
\end{aligned} \tag{4.12}$$

O Lagrangeano para o cabo com três elos é mostrado na Eq. (4.13):

$$\begin{aligned}
L = & \frac{1}{2}(M + m_1 + m_2 + m_3 + m_c)(\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2) \\
& + \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_c\right) l_1 \dot{\theta}_1 (\dot{x}_M \cos \theta_1 - \dot{y}_M \sin \theta_1) \\
& + \left(\frac{m_1}{8} + \frac{m_2}{2} + \frac{m_3}{2} + \frac{m_c}{2}\right) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\
& + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_2 \dot{\theta}_2 (\dot{x}_M \cos \theta_2 - \dot{y}_M \sin \theta_2) \\
& + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \left(\frac{m_2}{8} + \frac{m_3}{2} + \frac{m_c}{2}\right) l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \\
& + \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_2 l_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \left(\frac{m_3}{8} + \frac{m_c}{2}\right) l_3^2 \dot{\theta}_3^2 \\
& + \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_3 \dot{\theta}_3 (\dot{x}_M \cos \theta_3 - \dot{y}_M \sin \theta_3) \\
& + \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_1 l_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \frac{1}{2} I_{R1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{R2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} I_{R3} \dot{\theta}_3^2 \\
& + (m_1 + m_2 + m_3 + m_c) g y_M - \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_c\right) g l_1 (1 - \cos \theta_1) \\
& - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) g l_2 (1 - \cos \theta_2) - \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) g l_3 (1 - \cos \theta_3) \\
& - \frac{1}{2} k_1 \theta_1^2 - \frac{1}{2} k_2 (\theta_2 - \theta_1)^2 - \frac{1}{2} k_3 (\theta_3 - \theta_2)^2 - \frac{1}{2} k_M y_M^2
\end{aligned} \tag{4.13}$$

A partir do Lagrangeano do sistema aplica-se a equação de Euler-Lagrange (equação do movimento) em cada um dos graus de liberdade do sistema.

As equações (4.14) a (4.17) são para o cabo dividido em 2 elos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_M} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_M} = u_y(t) - c_{My} \dot{y}_M \tag{4.14}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_M} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_M} = u_x(t) - c_{Mx} \dot{x}_M \quad (4.15)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \tau_1 - c_1 \dot{\theta}_1 - c_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = \tau_1 - (c_1 + c_2) \dot{\theta}_1 + c_2 \dot{\theta}_2 \quad (4.16)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \tau_2 - c_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \quad (4.17)$$

As equações (4.18) a (4.22) são para o cabo dividido em 3 elos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_M} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_M} = u_y(t) - c_{My} \dot{y}_M \quad (4.18)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_M} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_M} = u_x(t) - c_{Mx} \dot{x}_M \quad (4.19)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \tau_1 - c_1 \dot{\theta}_1 - c_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = \tau_1 - (c_1 + c_2) \dot{\theta}_1 + c_2 \dot{\theta}_2 \quad (4.20)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \tau_2 - c_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) - c_3 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) = \tau_2 + c_2 \dot{\theta}_1 - (c_2 + c_3) \dot{\theta}_2 + c_3 \dot{\theta}_3 \quad (4.21)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_3} = \tau_3 - c_3 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2) = \tau_3 + c_3 \dot{\theta}_2 - c_3 \dot{\theta}_3 \quad (4.22)$$

onde: c_{My} e c_{Mx} são os coeficientes de atrito relativos ao movimento vertical e horizontal da base móvel; c_i e τ_i são, respectivamente, os coeficientes de atrito das articulações fictícias e os torques de elevação externos, com $(i = 1, \dots, n_e)$; $u_y(t)$ são as oscilações da superfície do mar e $u_x(t)$ pode ser a propulsão das hélices ou ação de correntes oceânicas.

Desenvolvendo-se as equações do movimento para todos os graus de liberdade, obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais de segunda ordem:

$$[I(\vec{r})] \ddot{\vec{r}} + [C] \dot{\vec{r}} + [K] \vec{r} + \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) + \vec{G}(\vec{r}) = \vec{T}_e \quad (4.23)$$

onde $[I(\vec{r})]$ é a matriz de inércia, $\ddot{\vec{r}}$ é o vetor com as coordenadas de aceleração, $[C]$ é a matriz dos coeficientes de atrito, $\dot{\vec{r}}$ é o vetor com as coordenadas de velocidade, $[K]$ é a matriz de constantes elásticas, $\vec{r}$ é o vetor com as coordenadas de posição, $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ é o vetor com os esforços Coriolis-centrífgos, $\vec{G}(\vec{r})$ é o vetor de esforços gravitacionais e $\vec{T}_e$ é o vetor de torques externos. Todas as matrizes são simétricas ($n \times n$) e os vetores são ($n \times 1$).

As tabelas (4.1) a (4.7) mostram os elementos dos vetores e das matrizes, para os casos com 2 e 3 elos (o expoente T significa transposto).

Tabela 4.1. - Vetores com coordenadas de posição

2 elos: $\vec{r}_{4x1}$	3 elos: $\vec{r}_{5x1}$
$\vec{r} = [y_M \ x_M \ \theta_1 \ \theta_2]^T$	$\vec{r} = [y_M \ x_M \ \theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$

Tabela 4.2. - Elementos das matrizes simétricas de inércia

2 elos: $I_{4x4}(\vec{r})$	3 elos: $I_{5x5}(\vec{r})$
$I_{11} = M + m_1 + m_2 + m_c$	$I_{11} = M + m_1 + m_2 + m_3 + m_c$
$I_{12} = 0$	$I_{12} = 0$
$I_{13} = -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_c\right) l_1 \sin\theta_1$	$I_{13} = -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_c\right) l_1 \sin\theta_1$
$I_{14} = -\left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_2 \sin\theta_2$	$I_{14} = -\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_2 \sin\theta_2$
	$I_{15} = -\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_3 \sin\theta_3$
$I_{22} = M + m_1 + m_2 + m_c$	$I_{22} = M + m_1 + m_2 + m_3 + m_c$
$I_{23} = \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_c\right) l_1 \cos\theta_1$	$I_{23} = \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_c\right) l_1 \cos\theta_1$
$I_{24} = \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_2 \cos\theta_2$	$I_{24} = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_2 \cos\theta_2$
	$I_{25} = \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_3 \cos\theta_3$
$I_{33} = \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_c\right) l_1^2 + I_{R1}$	$I_{33} = \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_c\right) l_1^2 + I_{R1}$
$I_{34} = \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$	$I_{34} = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$
	$I_{35} = \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_1 l_3 \cos(\theta_1 - \theta_3)$
$I_{44} = \left(\frac{m_2}{4} + m_c\right) l_2^2 + I_{R2}$	$I_{44} = \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c\right) l_2^2 + I_{R2}$
	$I_{45} = \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_2 l_3 \cos(\theta_2 - \theta_3)$
	$I_{55} = \left(\frac{m_3}{4} + m_c\right) l_3^2 + I_{R3}$

Tabela 4.3. - Matrizes simétricas de coeficientes de atrito

2 elos: $[C]_{4 \times 4}$	3 elos: $[C]_{5 \times 5}$
$\begin{bmatrix} c_{My} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{Mx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} c_{My} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{Mx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & 0 & -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & 0 & 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}$

Tabela 4.4. - Matrizes simétricas de constantes elásticas

2 elos: $[K]_{4 \times 4}$	3 elos: $[K]_{5 \times 5}$
$\begin{bmatrix} k_M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k_M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$

Observa-se que as matrizes de constantes elásticas têm as mesmas formas das matrizes de atrito com apenas uma diferença referente ao elemento $[K(2,2)] \neq [C(2,2)]$, devendo-se isto ao fato da base móvel possuir coeficiente de atrito e não possuir constante elástica relacionada ao movimento horizontal do seu centro de massa.

Tabela 4.5. - Vetores Coriolis-centrífugos

$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ 2 elos (4x1)	$\begin{pmatrix} -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_c\right) l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2^2 \\ -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_c\right) l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 \\ \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 \\ -\left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 \end{pmatrix}$
$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ 3 elos (5x1)	$\begin{pmatrix} -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_c\right) l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2^2 - \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3^2 \\ -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_c\right) l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 - \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_3^2 \\ \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_3^2 \\ -\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_3^2 \\ -\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_1^2 - \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2^2 \end{pmatrix}$

Tabela 4.6. - Vetores gravitacionais

2 elos: $\vec{G}(\vec{r})_{4 \times 1}$	3 elos: $\vec{G}(\vec{r})_{5 \times 1}$
$\vec{G}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -(m_1 + m_2 + m_c)g \\ 0 \\ \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_c\right)gl_1\text{sen}\theta_1 \\ \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right)gl_2\text{sen}\theta_2 \end{pmatrix}$	$\vec{G}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -(m_1 + m_2 + m_3 + m_c)g \\ 0 \\ \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_c\right)gl_1\text{sen}\theta_1 \\ \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right)gl_2\text{sen}\theta_2 \\ \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right)gl_3\text{sen}\theta_3 \end{pmatrix}$

Tabela 4.7. - Vetores torques externos

2 elos: $\vec{T}_e_{4 \times 1}$	3 elos: $\vec{T}_e_{5 \times 1}$
$\vec{T}_e = \begin{pmatrix} u_y(t) \\ u_x(t) \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}$	$\vec{T}_e = \begin{pmatrix} u_y(t) \\ u_x(t) \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix}$

É muito importante observar que, à medida que o número de elos aumenta, o determinante da matriz de inércia se aproxima de zero, dificultando ao integrador numérico apresentar uma solução estável. Para superar essa dificuldade, foi utilizado um artifício matemático, idêntico ao já utilizado anteriormente, conforme explicado abaixo. A equação (4.23) pode ser reescrita na forma da Eq. (4.24):

$$JI(\vec{r})\ddot{\vec{r}} = J\{\vec{T}_e - [C]\dot{\vec{r}} - [K]\vec{r} - \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) - \vec{G}(\vec{r})\} \quad (4.24)$$

J é uma matriz diagonal de ordem $n = n_e + 2$, com um determinante alto (10^4 , por exemplo). Portanto, pode-se isolar o vetor de acelerações na forma da Eq. (4.25):

$$\ddot{\vec{r}} = [JI(\vec{r})]^{-1}J\{\vec{T}_e - [C]\dot{\vec{r}} - [K]\vec{r} - \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) - \vec{G}(\vec{r})\} \quad (4.25)$$

A rotina MATLAB ODE45 foi utilizada para integração numérica da equação (4.25). Na função com o modelo dinâmico, a matriz $JI(\vec{r})$ é invertida, evitando-se assim a inversão direta da matriz de inércia $I(\vec{r})$. Esse fato simples torna a simulação numérica mais estável quando o modelo dinâmico considera um grande número de elos na representação discreta da flexibilidade contínua.

5. ALGORITMOS GENÉRICOS PARA O MODELO DO CABO ACOPLADO A BASE MÓVEL E SIMULAÇÕES

Neste capítulo desenvolvem-se os algoritmos genéricos para a geração automática do modelo dinâmico apresentado no capítulo anterior. São mostrados os resultados de simulações e animações gráficas, com o objetivo de atestar de modo qualitativo que o modelo é confiável e que se comporta conforme o esperado fisicamente. As animações gráficas mostram resultados com uma boa sensação de realidade física.

5.1. Algoritmos genéricos

O desenvolvimento analítico das equações dos modelos dinâmicos do cabo, para os casos de dois, três e quatro elos permitiu a identificação dos padrões de crescimento dos vetores e matrizes dos modelos. Uma vez identificados, os padrões de crescimento permitiram a obtenção de algoritmos genéricos, capazes de gerar de forma automática os modelos dinâmicos, para um número qualquer de elos considerados na aproximação discreta da flexibilidade contínua do cabo.

A matriz de inércia $[I(\vec{r})]$ é simétrica e de ordem $n = n_e + 2$, de forma que o seu algoritmo de geração, como mostra a Figura 5.1, determina apenas os elementos da diagonal principal e os acima desta, onde: M e m_c são as massas da base móvel flutuante e da carga terminal, enquanto l_i , m_i e $I_{Ri} = \left(\frac{m_i}{12}\right) l_i^2$, com $(i = 1, \dots, n_e)$, são, respectivamente, aos comprimentos, massas e momentos de inércia rotacionais de cada um dos elos.

```

for i = 1:n
    for j = 1:n
        if i == j
            if i == 1

$$I(i, i) = M + m_c + \sum_{k=1}^{n_e} m_k;$$

            elseif i == 2

$$I(i, i) = M + m_c + \sum_{k=1}^{n_e} m_k;$$

            else

$$I(i, i) = \left( \frac{m_{(i-2)}}{4} + m_c + \sum_{k=i-1}^{n_e} m_k \right) l_{(i-2)}^2 + I_{R(i-2)};$$

            end
        end
        if j > i
            if j == 2

$$I(i, j) = 0;$$

            elseif i == 1

$$I(i, j) = - \left( \frac{m_{(j-2)}}{2} + m_c + \sum_{k=j-1}^{n_e} m_k \right) l_{(j-2)} \text{sen}(\theta_{(j-2)});$$

            elseif i == 2

$$I(i, j) = \left( \frac{m_{(j-2)}}{2} + m_c + \sum_{k=j-1}^{n_e} m_k \right) l_{(j-2)} \cos(\theta_{(j-2)});$$

            else

$$I(i, j) = \left( \frac{m_{(j-2)}}{2} + m_c + \sum_{k=j-1}^{n_e} m_k \right) l_{(i-2)} l_{(j-2)} \cos(\theta_{(i-2)} - \theta_{(j-2)});$$

            end
        end
        I(j, i) = I(i, j);
    end
end
end

```

Figura 5.1. - Algoritmo da matriz de inércia

Os algoritmos das matrizes de constantes elásticas $[K]$ e coeficientes de atrito $[C]$ têm a mesma forma, conforme é mostrado na Fig. 5.2. A única diferença é que não há constante de mola restringindo o movimento horizontal da base móvel ($[K(2,2)] = 0$), enquanto que no mesmo movimento há atrito ($[C(2,2)] = c_{Mx}$), conforme foi mostrado nas Tabelas 4.3 e 4.4. Cabe lembrar, que ambas são simétricas, de mesma ordem da matriz de inércia e outra vez o algoritmo determina apenas os elementos da diagonal principal e os acima desta. Sendo c_{My} e c_{Mx} os coeficientes de atrito referentes, respectivamente, ao movimento vertical e horizontal da estrutura flutuante, k_M é a constante elástica referente ao movimento vertical, enquanto $c_{(n-i)}$ e $k_{(n-i)}$ com $i = 2, \dots, n-1$, correspondem aos coeficientes de atrito e constante elástica em cada articulação fictícia do cabo.

Matriz $[C]$	Matriz $[K]$
<pre> for i = 1:n for j = 1:n if i == j if i == 1 C(i,i) = c_{My}; elseif i == 2 C(i,i) = c_{Mx}; elseif i == n C(i,i) = c_(n-2); else C(i,i) = c_(i-2) + c_(i-1); end end if j > i if i < 3 C(i,j) = 0; elseif j == i + 1 C(i,j) = -c_(i-1); else C(i,j) = 0; end end C(j,i) = C(i,j); end end </pre>	<pre> for i = 1:n for j = 1:n if i == j if i == 1 K(i,i) = k_M; elseif i == 2 K(i,i) = 0; elseif i == n K(i,i) = k_(n-2); else K(i,i) = k_(i-2) + k_(i-1); end end if j > i if i < 3 K(i,j) = 0; elseif j == i + 1 K(i,j) = -k_(i-1); else K(i,j) = 0; end end K(j,i) = K(i,j); end end </pre>

Figura 5.2. - Algoritmo da matriz de coeficientes de atrito e de constantes elásticas

O algoritmo para a geração dos elementos do vetor gravitacional pode ser visto na Fig. 5.3. Conforme é mostrado nesta figura, a massa M da base móvel não aparece no termo $G(1)$ porque sua flutuação na superfície do mar foi considerada igual à sua força peso. Nota-se também que o segundo termo $G(2)$ será sempre nulo, pois não há esforços gravitacionais agindo em relação ao deslocamento horizontal da embarcação.

```

for i = 1:n
    if i == 1

        
$$G(i) = -\left(m_c + \sum_{k=1}^{n_e} m_k\right)g$$


    elseif i == 2
         $G(i) = 0;$ 
    else
        
$$G(i) = \left(\frac{m_{(i-2)}}{2} + m_c + \sum_{k=i-1}^{n_e} m_k\right)gl_{(i-2)}\text{sen}(\theta_{(i-2)});$$

    end
end

```

Figura 5.3 - Algoritmo do vetor gravitacional

Observa-se na Fig. 5.4 que os dois primeiros termos do vetor Coriolis-centrífugo $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ possuem as mesmas características, apenas trocando o cosseno pelo seno e isto acontece porque ambos estão relacionados com deslocamento da estrutura flutuante. O expoente T significa transposto.

$$F_1 = - \sum_{i=1}^{n_e} \left(\frac{m_i}{2} + m_c + \sum_{k=i+1}^{n_e} m_k \right) l_i \cos(\theta_i) \dot{\theta}_i^2;$$

$$F_2 = - \sum_{i=1}^{n_e} \left(\frac{m_i}{2} + m_c + \sum_{k=i+1}^{n_e} m_k \right) l_i \sin(\theta_i) \dot{\theta}_i^2;$$

```

for i = 1:n_e
    for i = 1:n_e
        if j == i
            f(i,j) = 0;
        end
        if j > i
            f(i,j) = \left( \frac{m_j}{2} + m_c + \sum_{k=j+1}^{n_e} m_k \right) l_i l_j \sin(\theta_i - \theta_j);
        end
        f(j,i) = -f(i,j);
    end
end
end
velf(i) = \dot{\theta}_i^2;
end
F_3 = f.velef^T;
F = [F_1 F_2 F_3]^T;

```

Figura 5.4. - Algoritmo do vetor Coriolis-centrífugo

Conforme explicado anteriormente, os modelos dinâmicos foram desenvolvidos analiticamente usando as equações de Euler-Lagrange para 2, 3 e 4 elos. Os mesmos modelos gerados com os algoritmos genéricos mostraram-se iguais aos desenvolvidos analiticamente. Repetiu-se a mesma comparação para 5 elos e o resultado foi o mesmo. Em resumo, os algoritmos são capazes de gerar exatamente o mesmo modelo dinâmico desenvolvido analiticamente aplicando o formalismo de Euler-Lagrange, mas com a grande vantagem de gerar modelos dinâmicos, independentemente do número de elos. O desenvolvimento manual analítico, por outro lado, é impraticável para um número de elos maior que seis (por exemplo), porque as equações se tornam muito grandes.

5.2. Simulações e animações

Nesta seção são apresentadas simulações e animações realizadas no MatLab. Utiliza-se a função integradora ode45 para a integração numérica das equações diferenciais dos modelos dinâmicos. Os resultados obtidos ilustram o comportamento do modelo acoplado em dois casos: no primeiro uma das extremidades do cabo está articulada à base móvel e na outra extremidade a carga terminal m_c é considerada livre, enquanto no segundo, o cabo é articulado à base móvel em uma extremidade e na outra está articulado a uma estrutura fixa ao fundo do mar. O modelo da segunda situação é idêntico ao da primeira, com a diferença que se tem uma carga terminal muito grande (considerou-se $m_c = 10^8 \text{ kg}$) para representar o cabo fixo à Terra. Em ambos os casos, a estrutura estava submersa, sujeita a ação do arrasto hidrodinâmico e do empuxo (adotou-se o empuxo igual ao peso para a base móvel). A Tabela 5.1 mostra todos os parâmetros do modelo.

Tabela 5.1. - Parâmetros físicos do modelo

Parâmetros físicos	Valor
Comprimento do cabo (L_c)	$L_c = 32 \text{ (m)}$
Número de graus de liberdade (n)	$n = 62$
Quantidade de elos (n_e)	$n_e = 60$
Comprimento de cada elo ($l_i = \frac{L_c}{n_e}, i = 1, \dots, n_e$)	$l_i = 0,5333 \text{ (m)}$
Densidade linear do cabo (ρ_c)	$\rho_c = 0,5695 \text{ (kg/m)}$
Densidade volumétrica da água (ρ_a)	$\rho_a = 1000 \text{ (kg/m}^3\text{)}$
Massa de cada elo ($m_i, i = 1, \dots, n_e$)	$m_i = 0,2095 \text{ (kg)}$
Massa da carga terminal (m_c)	$m_c = 35 \text{ (kg)}$
Massa da carga terminal quando o cabo é fixo ao fundo do mar (m_c)	$m_c = 10^8 \text{ (kg)}$
Raio do cabo (r)	$r = 0,0075 \text{ (m)}$
Massa da base móvel flutuante (M)	$M = 100 \text{ (Kg)}$
Constante elástica das articulações fictícias ($k_i, i = 1, \dots, n_e$)	$k_i = 20 \text{ (Nm/rd)}$
Constante elástica relativa ao movimento vertical da base móvel (k_M)	$k_M = 1200 \text{ (N/rd)}$
Coeficiente de atrito das articulações fictícias ($c_i, i = 1, \dots, n_e$)	$c_i = 0,9 \text{ (Nms/rd)}$
Coeficiente de atrito do movimento horizontal da base móvel (c_{Mx})	$c_{Mx} = 200 \text{ (Ns/m)}$
Coeficiente de atrito do movimento vertical da base móvel (c_{My})	$c_{My} = 150 \text{ (Ns/m)}$
Coeficiente de arrasto hidrodinâmico (γ)	$\gamma = 8,5 \text{ (Ns/m)}$

Para melhor analisar os resultados das simulações foi desenvolvido um software que permite

a animação gráfica. As Figuras (5.5) e (5.7) mostradas a seguir estão na forma de uma sequência de 20 frames, relativos à configuração espacial do cabo em cada diferente instante de tempo. Foram considerados 60 elos ($n_e = n - 2$) nas duas simulações.

5.2.1. Simulação 1 (carga terminal m_c livre)

O cabo e a base móvel estavam inicialmente em repouso quando foi aplicada uma força horizontal na base móvel $u_x(t) = 2000\text{ N}$ para $t < 0,5$, $u_x(t) = -2400\text{ N}$ para $t < 0,75$ e $u_x(t) = 0$ para $t \leq 15$. A Figura 5.5 ilustra os primeiros 4,75 s do movimento do cabo nesta situação, cujo tempo total foi de 15 s, com frames mostrados a cada 0,25 s.

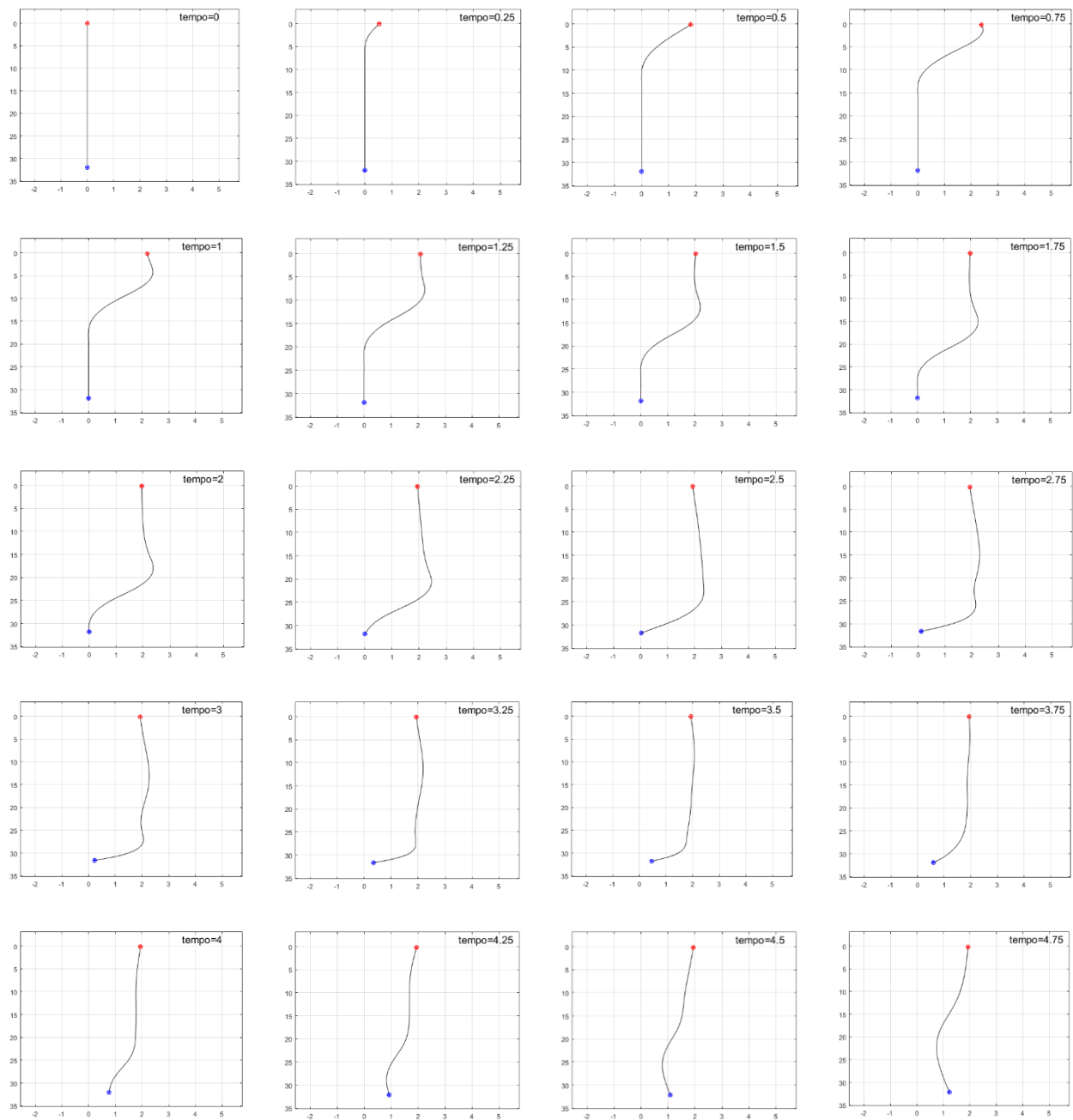


Figura 5.5. - Cabo aproximado por 60 elos e com carga terminal livre

A figura 5.6 mostra o comportamento dos movimentos vertical e horizontal da base móvel na simulação que gerou a animação da Fig. 5.5.

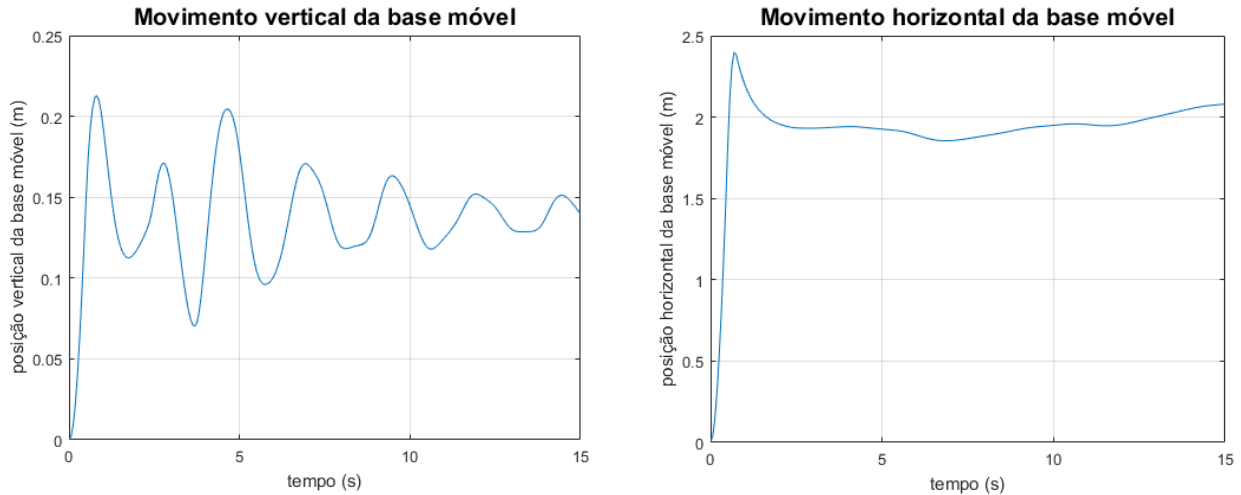


Figura 5.6. - Movimentos da base móvel (carga terminal livre)

Pode-se atestar de forma qualitativa que os resultados obtidos nas figuras (5.5) e (5.6) mostram um comportamento dinâmico muito consistente com o esperado fisicamente. As animações gráficas mostram uma boa sensação de realidade física.

5.2.2. Simulação 2 (carga terminal m_c articulada ao fundo do mar)

Esta segunda simulação consiste no cabo articulado a uma estrutura fixa ao fundo do mar e também sujeito ao arrasto hidrodinâmico e ao empuxo. O modelo dinâmico dessa animação é idêntico ao da primeira, com apenas duas diferenças: a primeira é que se considera uma carga terminal muito grande (considerou-se $m_c = 10^8 \text{ kg}$ no lugar do $m_c = 35 \text{ kg}$ da simulação anterior) para representar o cabo fixo ao fundo do mar; a segunda é que a carga terminal não foi considerada na composição dos esforços gravitacionais (a carga é fixa e o seu empuxo é igual ao seu peso). Na base móvel foi aplicada uma força horizontal equivalente a $u_x(t) = -800 \sin(\pi t) \text{ N}$ durante todo o intervalo de tempo. A Figura 5.7 ilustra os primeiros 4,75 s do movimento do cabo nesta condição, com um tempo total de 15 s e frames mostrados a cada 0,25 s.

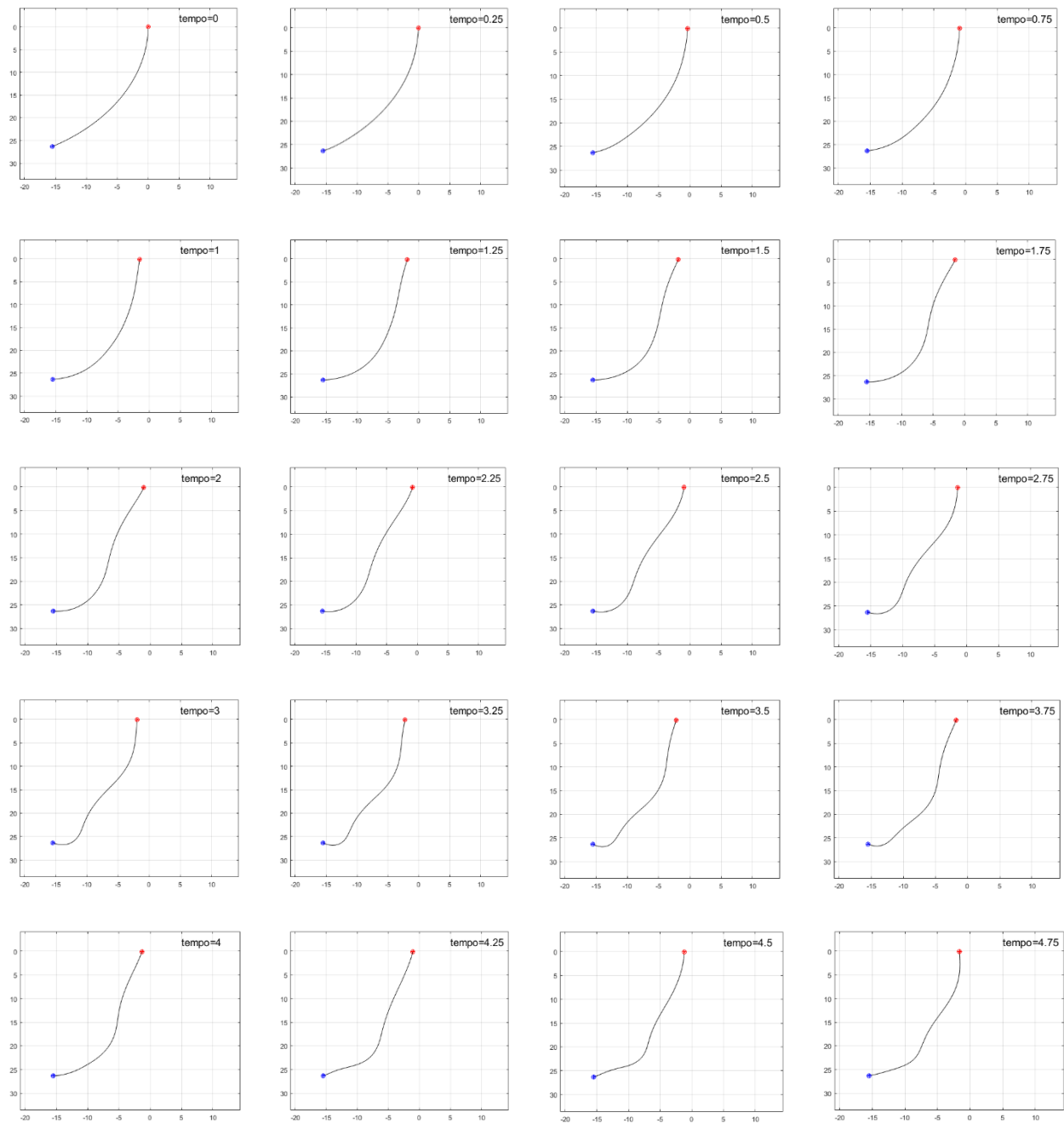


Figura 5.7. - Cabo aproximado por 60 elos e fixo no fundo do mar

A figura 5.8 mostra o comportamento dos movimentos vertical e horizontal da base móvel na simulação que gerou a animação da Fig. 5.7.

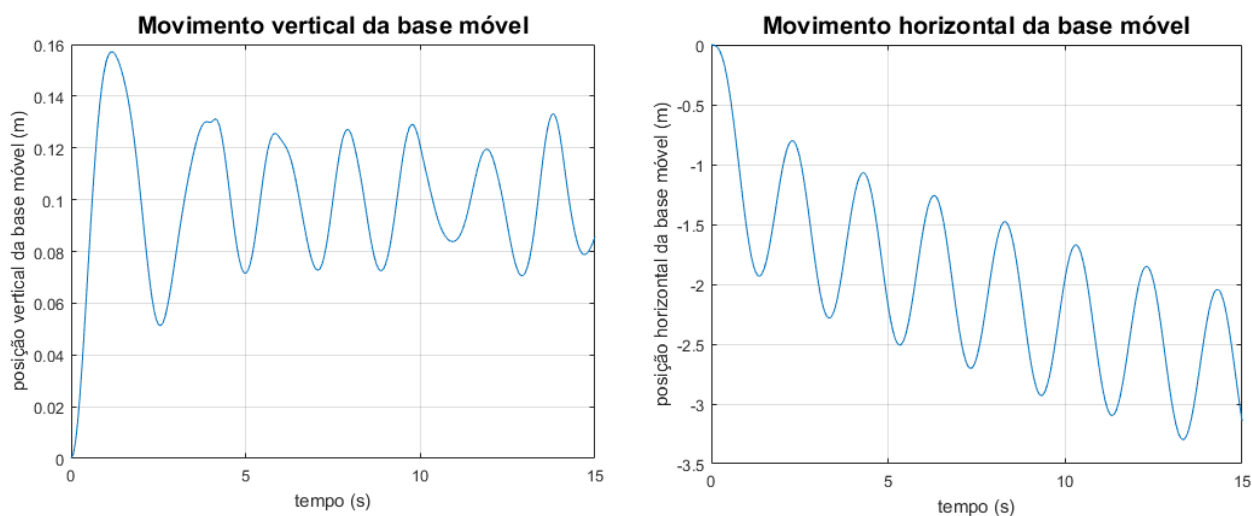


Figura 5.8. – Movimentos da base móvel (cabo fixo ao fundo do mar)

As figuras (5.7) e (5.8) mostram novamente resultados físicos dentro do esperado, comprovando que a pequena alteração feita no modelo para poder representar o cabo fixo ao fundo do mar, mostrou-se confiável, conseguindo validar qualitativamente o modelo acoplado desenvolvido no capítulo 4 e seus algoritmos genéricos.

5.3. Considerações finais

Este capítulo tratou das simulações e animações referentes à modelagem dinâmica contida no plano vertical de uma estrutura flexível do tipo cabo acoplada a uma base móvel com $n_e + 2$ graus de liberdade (desenvolvida no capítulo 4) que se desloca nas direções horizontal (ação de correntes oceânicas ou propulsores) e vertical (oscilações na superfície do mar). Trata-se de um exemplo que desperta grande interesse em razão de aplicações tecnológicas, principalmente vinculadas à indústria de petróleo offshore. Diversas simulações com diferentes números de elos permitiram concluir que quanto maior for o número de elos, mais a flexibilidade discreta do modelo aproxima-se da flexibilidade real contínua do cabo. Outra importante constatação é que quando o cabo é submetido a esforços externos que geram movimentos com baixíssimas velocidades, o vetor com os esforços Coriolis-centrífugos é insignificante e pode ser negligenciado. Caso contrário, é importante que este vetor de esforços esteja presente no modelo dinâmico do cabo. Um software para a animação gráfica foi construído especialmente para a visualização dos resultados de simulações e estas animações mostraram uma ótima sensação de realidade física, atestando assim de forma qualitativa a modelagem dinâmica proposta.

6. SISTEMA DE REBOQUE DE EMBARCAÇÕES

No presente capítulo desenvolve-se o modelo dinâmico de um sistema de reboque de embarcações, composto por embarcação rebocada, cabo e rebocador. A Figura 6.1 ilustra a ideia principal do sistema, no qual o cabo está conectado nas suas extremidades a duas embarcações: o rebocador (M_t) e a embarcação rebocada (M_v). Os ângulos de elevação (θ_i) são tomados em relação à vertical e o sentido da gravidade coincide com o sentido positivo do eixo Y . As seguintes forças atuam nas embarcações: F_t é o empuxo do motor, aplicado horizontalmente ao rebocador; F_{ht} é o arrasto hidrodinâmico aplicado ao rebocador; F_{yt} é a força que a superfície do mar exerce na vertical sobre o rebocador; F_{yv} é a força que a superfície do mar exerce verticalmente sobre a embarcação rebocada; F_{hv} é o arrasto hidrodinâmico aplicado a embarcação rebocada.

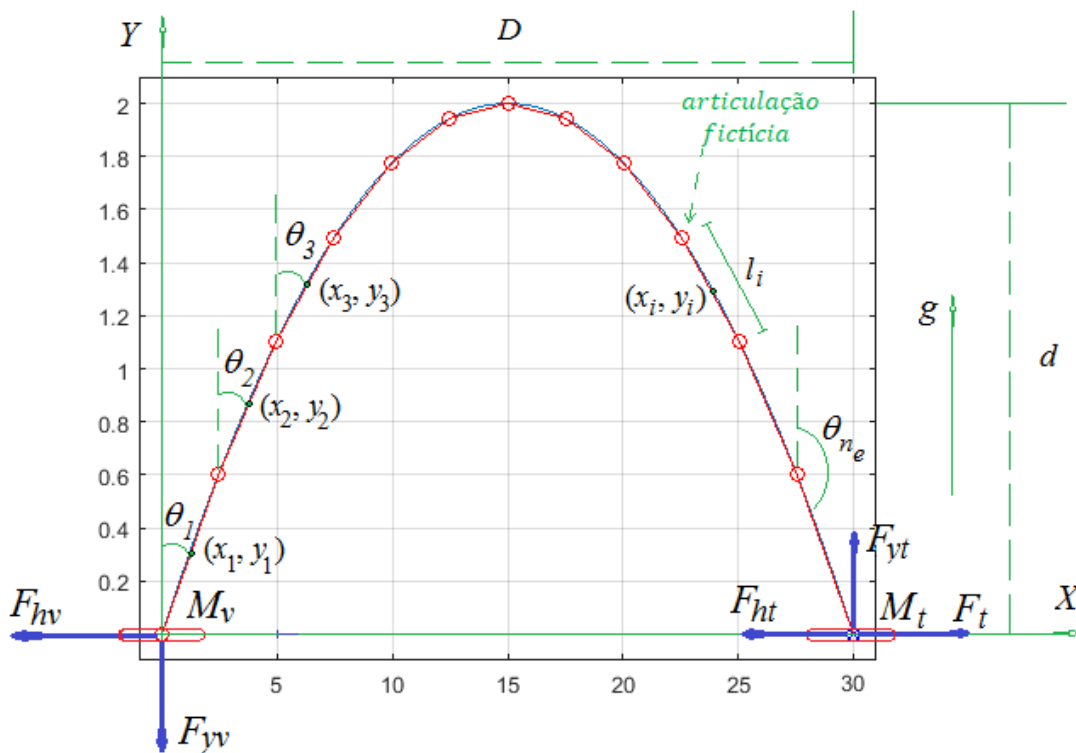


Figura 6.1. - Configuração inicial do sistema de reboque

Supõe-se que os centros de massa (x_i, y_i) dos elos estejam concentrados em seus respectivos centros de massa, de modo que as equações (6.1) a (6.4) podem ser facilmente obtidas ($i = 1, \dots, n_e$):

$$x_i = x_v + \frac{l_i}{2} \sin(\theta_i) + \sum_{j=1}^{i-1} l_j \sin(\theta_j) \quad (6.1)$$

$$y_i = y_v + \frac{l_i}{2} \cos(\theta_i) + \sum_{j=1}^{i-1} l_j \cos(\theta_j) \quad (6.2)$$

$$x_t = x_v + \sum_{j=1}^{n_e} l_j \sin(\theta_j) \quad (6.3)$$

$$y_t = y_v + \sum_{j=1}^{n_e} l_j \cos(\theta_j) \quad (6.4)$$

onde (x_t, y_t) e (x_v, y_v) são as coordenadas de posição do rebocador e da embarcação rebocada, respectivamente. As forças de arrasto hidrodinâmicas assumem as formas das Eq. (6.5) e (6.6):

$$F_{hv} = -[\gamma_1 + \gamma_2 |\dot{x}_v|] \dot{x}_v \quad (6.5)$$

$$F_{ht} = -[\beta_1 + \beta_2 |\dot{x}_t|] \dot{x}_t \quad (6.6)$$

cujos coeficientes γ_i e β_i ($i = 1, 2$) são supostamente conhecidos. As forças que a superfície do mar exerce sobre as embarcações (rebocador e rebocado) são definidas, respectivamente, pelas Eq. (6.7) e (6.8):

$$F_{yt} = k_{pt}(y_{rt} - y_t) + k_{dt}(\dot{y}_{rt} - \dot{y}_t) \quad (6.7)$$

$$F_{yv} = k_{pv}(y_{rv} - y_v) + k_{dv}(\dot{y}_{rv} - \dot{y}_v) \quad (6.8)$$

onde: y_{rt} e y_{rv} correspondem às ondas da superfície do mar em relação ao seu nível médio, nas posições do rebocador e da embarcação rebocada, respectivamente. Essas ondas do mar serão definidas como senoidais posteriormente. Obviamente elas serão nulas se o mar for considerado sem movimento das ondas. As equações (6.7) e (6.8) constituem um controle proporcional e derivativo (PD), cujo objetivo é fazer com que as embarcações permaneçam na superfície do mar e sigam os movimentos naturais das ondas. Posteriormente, os ganhos constantes k_{pt} , k_{dt} , k_{pv} e k_{dv} serão projetados para alcançar um desempenho pré-estabelecido.

O sistema é uma cadeia de corpos poliarticulados rígidos com todas as coordenadas de posição das massas (elos e rebocador) conhecidas (equações (6.1) a (6.4)), bem como suas respectivas derivadas no tempo. A energia cinética é devida aos movimentos de translação e rotação e é definida conforme Eq. (6.9):

$$E_c = \frac{1}{2} M_v (\dot{x}_v^2 + \dot{y}_v^2) + \frac{1}{2} M_t (\dot{x}_t^2 + \dot{y}_t^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_e} [m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) + I_{Ri} \dot{\theta}_i^2] \quad (6.9)$$

Os momentos de inércia rotacionais de cada elo são definidos como: $I_{Ri} = \left(\frac{m_i}{12}\right) l_i^2$, $i =$

$1, \dots, n_e$. A energia potencial é devida a efeitos elásticos e gravitacionais e pode ser escrita na forma da Eq. (6.10):

$$E_p = \sum_{i=1}^{n_e} \left\{ \frac{1}{2} k_i (\theta_i - \theta_{i-1})^2 + m_i g \left[-y_v + \frac{l_i}{2} (1 - \cos \theta_i) + \sum_{j=1}^{i-1} l_j (1 - \cos \theta_j) \right] \right\} \quad (6.10)$$

com $\theta_0 = 0$. Uma vez determinadas as equações com as energias cinética (6.9) e potencial (6.10) da estrutura e considerando as equações (6.1) a (6.4) com as coordenadas de posição das massas (elos e rebocador), bem como suas derivadas temporais, o Lagrangeano do sistema ($L = E_c - E_p$) pode ser obtido de forma genérica (equação (6.11)), escrito em termos de $\vec{r}$ e $\dot{\vec{r}}$, com $\vec{r} = [y_v \ x_v \ \theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_{n_e}]^T$. Nesse caso, o sistema possui $n = n_e + 2$ graus de liberdade.

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} M_v (\dot{x}_v^2 + \dot{y}_v^2) + \frac{1}{2} M_t \left[\left(\dot{x}_v + \sum_{j=1}^{n_e} (l_j \cos \theta_j \dot{\theta}_j) \right)^2 + \left(\dot{y}_v - \sum_{j=1}^{n_e} (l_j \sin \theta_j \dot{\theta}_j) \right)^2 \right] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_e} \left\{ m_i \left[\left(\dot{x}_v + \frac{l_i}{2} \cos \theta_i \dot{\theta}_i + \sum_{j=1}^{i-1} (l_j \cos \theta_j \dot{\theta}_j) \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\dot{y}_v - \frac{l_i}{2} \sin \theta_i \dot{\theta}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (l_j \sin \theta_j \dot{\theta}_j) \right)^2 \right] + I_{Ri} \dot{\theta}_i^2 \right\} \\ & - \sum_{i=1}^{n_e} \left\{ \left[\frac{1}{2} k_i (\theta_i - \theta_{i-1})^2 \right] \right. \\ & \left. + m_i g \left[-y_v + \frac{l_i}{2} (1 - \cos \theta_i) + \sum_{j=1}^{i-1} l_j (1 - \cos \theta_j) \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Por exemplo, se apenas três elos forem considerados, $n_e = 3$ e a equação (6.11) pode gerar a equação (6.12):

$$\begin{aligned}
L = & \frac{1}{2}(M_v + m_1 + m_2 + m_3 + M_t)(\dot{x}_v^2 + \dot{y}_v^2) \\
& + \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + M_t\right) l_1 \dot{\theta}_1 (\dot{x}_v \cos \theta_1 - \dot{y}_v \sin \theta_1) \\
& + \left(\frac{m_1}{8} + \frac{m_2}{2} + \frac{m_3}{2} + \frac{M_t}{2}\right) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\
& + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + M_t\right) l_2 \dot{\theta}_2 (\dot{x}_v \cos \theta_2 - \dot{y}_v \sin \theta_2) \\
& + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + M_t\right) l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \left(\frac{m_2}{8} + \frac{m_3}{2} + \frac{M_t}{2}\right) l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \\
& + \left(\frac{m_3}{2} + M_t\right) l_2 l_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \left(\frac{m_3}{8} + \frac{M_t}{2}\right) l_3^2 \dot{\theta}_3^2 \\
& + \left(\frac{m_3}{2} + M_t\right) l_3 \dot{\theta}_3 (\dot{x}_v \cos \theta_3 - \dot{y}_v \sin \theta_3) \\
& + \left(\frac{m_3}{2} + M_t\right) l_1 l_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \frac{1}{2} I_{R1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{R2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} I_{R3} \dot{\theta}_3^2 \\
& + (m_1 + m_2 + m_3) g y_v - \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3\right) g l_1 (1 - \cos \theta_1) \\
& - \left(\frac{m_2}{2} + m_3\right) g l_2 (1 - \cos \theta_2) - \left(\frac{m_3}{2}\right) g l_3 (1 - \cos \theta_3) - \frac{1}{2} k_1 \theta_1^2 \\
& - \frac{1}{2} k_2 (\theta_2 - \theta_1)^2 - \frac{1}{2} k_3 (\theta_3 - \theta_2)^2
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Como as embarcações flutuam na superfície do mar, a flutuabilidade é considerada igual ao seu peso, o que equivale a considerar que as massas das embarcações são nulas apenas na composição dos esforços gravitacionais. Quando n_e elos são considerados na aproximação discreta da flexibilidade contínua, o sistema terá $n = n_e + 2$ graus de liberdade. As equações de Euler-Lagrange são aplicadas a todos os n graus de liberdade, determinando o modelo dinâmico, que pode ser colocado na forma da Eq. (6.13):

$$[I(\vec{r})]\ddot{\vec{r}} + [C]\dot{\vec{r}} + [K]\vec{r} + \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) + \vec{G}(\vec{r}) = \vec{T}_e \tag{6.13}$$

$[I(\vec{r})]$ é a matriz de inércia, $\ddot{\vec{r}}$ é o vetor com as coordenadas de aceleração, $[C]$ é a matriz de coeficientes de atrito, $\dot{\vec{r}}$ é o vetor com as coordenadas de velocidade, $[K]$ é a matriz constantes elásticas, $\vec{r}$ é o vetor com as coordenadas de posição, $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ é o vetor de esforços Coriolis-centrífgos, $\vec{G}(\vec{r})$ é o vetor gravitacional e $\vec{T}_e$ é o vetor de esforços externos. Todas as matrizes são simétricas ($n \times n$) e os vetores são ($n \times 1$).

Modelos dinâmicos foram desenvolvidos considerando dois, três e quatro elos. Como no caso da equação (6.12), também foi determinado o Lagrangeano para os casos dois e quatro elos, bem como todas as matrizes e vetores dos modelos dinâmicos. As tabelas (6.1) a (6.7) mostram os

elementos dos vetores e das matrizes, para os casos com 2 e 3 elos (o expoente T significa transposto).

Tabela 6.1. - Vetores com coordenadas de posição

2 elos: $\vec{r}_{4 \times 1}$	3 elos: $\vec{r}_{5 \times 1}$
$\vec{r} = [y_v \ x_v \ \theta_1 \ \theta_2]^T$	$\vec{r} = [y_v \ x_v \ \theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$

Tabela 6.2. - Elementos das matrizes simétricas de inércia

2 elos: $I_{4 \times 4}(\vec{r})$	3 elos: $I_{5 \times 5}(\vec{r})$
$I_{11} = M_v + m_1 + m_2 + M_t$	$I_{11} = M_v + m_1 + m_2 + m_3 + M_t$
$I_{12} = 0$	$I_{12} = 0$
$I_{13} = -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + M_t\right) l_1 \sin \theta_1$	$I_{13} = -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + M_t\right) l_1 \sin \theta_1$
$I_{14} = -\left(\frac{m_2}{2} + M_t\right) l_2 \sin \theta_2$	$I_{14} = -\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + M_t\right) l_2 \sin \theta_2$
	$I_{15} = -\left(\frac{m_3}{2} + M_t\right) l_3 \sin \theta_3$
$I_{22} = M_v + m_1 + m_2 + M_t$	$I_{22} = M_v + m_1 + m_2 + m_3 + M_t$
$I_{23} = \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + M_t\right) l_1 \cos \theta_1$	$I_{23} = \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + M_t\right) l_1 \cos \theta_1$
$I_{24} = \left(\frac{m_2}{2} + M_t\right) l_2 \cos \theta_2$	$I_{24} = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + M_t\right) l_2 \cos \theta_2$
	$I_{25} = \left(\frac{m_3}{2} + M_t\right) l_3 \cos \theta_3$
$I_{33} = \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + M_t\right) l_1^2 + I_{R1}$	$I_{33} = \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + M_t\right) l_1^2 + I_{R1}$
$I_{34} = \left(\frac{m_2}{2} + M_t\right) l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$	$I_{34} = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + M_t\right) l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$
	$I_{35} = \left(\frac{m_3}{2} + M_t\right) l_1 l_3 \cos(\theta_1 - \theta_3)$
$I_{44} = \left(\frac{m_2}{2} + M_t\right) l_2^2 + I_{R2}$	$I_{44} = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + M_t\right) l_2^2 + I_{R2}$
	$I_{45} = \left(\frac{m_3}{2} + M_t\right) l_2 l_3 \cos(\theta_2 - \theta_3)$
	$I_{55} = \left(\frac{m_3}{4} + M_t\right) l_3^2 + I_{R3}$

Tabela 6.3. - Matrizes simétricas de coeficientes de atrito

2 elos: $[C]_{4 \times 4}$	3 elos: $[C]_{5 \times 5}$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & 0 & -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & 0 & 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}$

É importante notar que o termo $[C(1,1)]$ (referente ao movimento vertical da embarcação rebocada) aparece nulo nas matrizes dos coeficientes de atrito, porque já foi considerado na força externa F_{yv} e é equivalente ao ganho constante K_{dv} presente na eq. (6.8).

Tabela 6.4. - Matrizes simétricas de constantes elásticas

2 elos: $[K]_{4 \times 4}$	3 elos: $[K]_{5 \times 5}$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$

Observa-se que as matrizes dos coeficientes de atrito e constantes elásticas têm a mesma forma. Também é importante observar que o termo $[K(1,1)]$ (referente ao movimento vertical da embarcação rebocada) aparece nulo nas matrizes de constantes elásticas, porque já foi considerado na força externa F_{yv} e é equivalente a o ganho constante K_{pv} (eq. (6.8)).

Tabela 6.5. - Vetores Coriolis-centrífugos

$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ 2 elos (4x1)	$\begin{pmatrix} -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + M_t\right) l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - \left(\frac{m_2}{2} + M_t\right) l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2^2 \\ -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + M_t\right) l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - \left(\frac{m_2}{2} + M_t\right) l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 \\ \left(\frac{m_2}{2} + M_t\right) l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 \\ -\left(\frac{m_2}{2} + M_t\right) l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 \end{pmatrix}$
$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ 3 elos (5x1)	$\begin{pmatrix} -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + M_t\right) l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + M_t\right) l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2^2 - \left(\frac{m_3}{2} + M_t\right) l_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3^2 \\ -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + M_t\right) l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + M_t\right) l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 - \left(\frac{m_3}{2} + M_t\right) l_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_3^2 \\ \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + M_t\right) l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \left(\frac{m_3}{2} + M_t\right) l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_3^2 \\ -\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + M_t\right) l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + \left(\frac{m_3}{2} + M_t\right) l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_3^2 \\ -\left(\frac{m_3}{2} + M_t\right) l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_1^2 - \left(\frac{m_3}{2} + M_t\right) l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2^2 \end{pmatrix}$

Tabela 6.6. - Vetores gravitacionais

2 elos: $\vec{G}(\vec{r})_{4 \times 1}$	3 elos: $\vec{G}(\vec{r})_{5 \times 1}$
$\vec{G}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -(m_1 + m_2)g \\ 0 \\ \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right)gl_1 \sin \theta_1 \\ \left(\frac{m_2}{2}\right)gl_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix}$	$\vec{G}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -(m_1 + m_2 + m_3)g \\ 0 \\ \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3\right)gl_1 \sin \theta_1 \\ \left(\frac{m_2}{2} + m_3\right)gl_2 \sin \theta_2 \\ \left(\frac{m_3}{2}\right)gl_3 \sin \theta_3 \end{pmatrix}$

Tabela 6.7. - Vetores forças externas

2 elos	3 elos
$\vec{T}_e = \begin{pmatrix} F_{yv} \\ F_{xv} \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}$	$\vec{T}_e = \begin{pmatrix} F_{yv} \\ F_{xv} \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix}$

As forças externas aplicadas ao rebocador ($\vec{F}_{ht}$, $\vec{F}_t$ and $\vec{F}_{yt}$) não aparecem explicitamente nos vetores de esforços externos (Tabela 6.7), mas contribuem para a formação de torques de elevação externos (τ_i , $i = 1, \dots, n_e$) e o componente externo de F_{xv} , conforme será explicado no capítulo 7. F_{yv} e F_{xv} são as forças verticais e horizontais aplicadas à embarcação rebocada, respectivamente.

É muito importante observar que, à medida que o número de elos aumenta, o determinante da matriz de inércia se aproxima de zero, dificultando ao integrador numérico apresentar uma solução estável. Um procedimento idêntico aos já utilizados anteriormente foi também utilizado no presente caso. A equação (6.13) é reescrita na forma da Eq. (6.14):

$$JI(\vec{r})\ddot{\vec{r}} = J\{\vec{T}_e - [C]\dot{\vec{r}} - [K]\vec{r} - \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) - \vec{G}(\vec{r})\} \quad (6.14)$$

J é uma matriz diagonal de ordem $n = n_e + 2$, com um determinante alto (10^4 , por exemplo). Portanto, pode-se isolar o vetor de acelerações na forma da Eq. (6.15):

$$\ddot{\vec{r}} = [JI(\vec{r})]^{-1}J\{\vec{T}_e - [C]\dot{\vec{r}} - [K]\vec{r} - \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) - \vec{G}(\vec{r})\} \quad (6.15)$$

A rotina MATLAB ODE45 foi utilizada para integração numérica da equação (6.15). Na função com o modelo dinâmico, a matriz $JI(\vec{r})$ é invertida em vez de inverter apenas a matriz de inércia $I(\vec{r})$. Esse fato simples torna a simulação numérica mais estável quando o modelo dinâmico considera um grande número de elos na representação discreta da flexibilidade contínua.

7. ALGORITMOS GENÉRICOS APLICADO AO REBOQUE DE EMBARCAÇÕES

No presente capítulo desenvolvem-se os algoritmos genéricos para a geração automática do modelo para o sistema de reboque de embarcações. Neste capítulo também são mostrados como atuam as forças externas e ainda, os resultados de simulações e animações gráficas, com o propósito de provar de forma qualitativa que o modelo permite a obtenção de resultados físicos muito consistentes. As animações gráficas mostram resultados com uma ótima sensação de realidade física.

7.1. Algoritmos genéricos

O desenvolvimento analítico das equações dinâmicas do modelo de cabo, para os casos de dois, três e quatro elos, permitiu a identificação dos padrões de crescimento dos vetores e matrizes dos modelos. Uma vez identificados, esses padrões de crescimento permitiram a geração de algoritmos genéricos, capazes de gerar automaticamente modelos dinâmicos, para qualquer número de elos considerados na aproximação discreta da flexibilidade contínua do cabo.

A matriz de inércia $I(\vec{r})$ é simétrica e de ordem n ($n = n_e + 2$), de modo que seu algoritmo de geração (Fig. 7.1) determina apenas os elementos da diagonal principal e aqueles acima desta.

```

for i = 1:n
    for j = 1:n
        if i == j
            if i == 1

$$I(i, i) = M_v + M_t + \sum_{k=1}^{n_e} m_k;$$

            elseif i == 2

$$I(i, i) = M_v + M_t + \sum_{k=1}^{n_e} m_k;$$

            else

$$I(i, i) = \left( \frac{m_{(i-2)}}{4} + M_t + \sum_{k=i-1}^{n_e} m_k \right) l_{(i-2)}^2 + I_{R(i-2)};$$

            end
        end
        if j > 1
            if j == 2

$$I(i, j) = 0;$$

            elseif i == 1

$$I(i, j) = - \left( \frac{m_{(j-2)}}{4} + M_t + \sum_{k=j-1}^{n_e} m_k \right) l_{(j-2)}^2 \text{sen}(\theta_{(j-2)});$$

            elseif i == 2

$$I(i, j) = \left( \frac{m_{(j-2)}}{2} + M_t + \sum_{k=j-1}^{n_e} m_k \right) l_{(j-2)}^2 \cos(\theta_{(j-2)});$$

            else

$$I(i, j) = \left( \frac{m_{(j-2)}}{2} + M_t + \sum_{k=j-1}^{n_e} m_k \right) l_{(i-2)} l_{(j-2)} \cos(\theta_{(i-2)} - \theta_{(j-2)});$$

            end
        end
        I(i, j) = I(j, i);
    end
end
end

```

Fig 7.1. - Algoritmo da matriz de inércia

As matrizes de constantes elásticas e coeficientes de atrito têm a mesma forma (algoritmo da Fig. 7.2). A única diferença é que não há uma constante de mola restringindo o movimento horizontal da embarcação rebocada ($[K(2,2)] = 0$), enquanto há atrito neste mesmo movimento ($[C(2,2)] = c_{vx} = \gamma_1$), como mostrado nas tabelas (6.3) e (6.4).

Matriz [C]	Matriz [K]
<pre> for i = 1:n for j = 1:n if i == j if i == 1 C(i,i) = 0; elseif i == 2 C(i,j) = c_{vx}; elseif i == n C(i,i) = c_(n-2); else C(i,i) = c_(i-2) + c_(i-1); end end if j > i if i < 3 C(i,j) = 0; elseif j == i + 1 C(i,j) = -c_(i-1); else C(i,j) = 0; end end C(j,i) = C(i,j); end end </pre>	<pre> for i = 1:n for j = 1:n if i == j if i == 1 K(i,i) = 0; elseif i == 2 K(i,j) = 0; elseif i == n K(i,i) = k_(n-2); else K(i,i) = k_(i-2) + k_(i-1); end end if j > i if i < 3 K(i,j) = 0; elseif j == i + 1 K(i,j) = -k_(i-1); else K(i,j) = 0; end end K(j,i) = K(i,j); end end </pre>

Fig 7.2 - Algoritmo da matriz de coeficientes de atrito e de constantes elásticas

O segundo termo do vetor gravitacional ($G(2)$ figura (7.3)) está relacionado com o movimento horizontal da embarcação rebocada e sempre será nulo, uma vez que evidentemente não há esforços gravitacionais agindo em relação à direção horizontal. As massas M_v e M_t não aparecem no termo $G(1)$ porque sua flutuação na superfície do mar foi considerada igual às suas forças peso.

```

for i = 1:n
    if i == 1

        
$$G(i) = -\left(\sum_{k=1}^{n_e} m_k\right) g;$$


    elseif i == 2
        
$$G(i) = 0;$$

    else
        
$$G(i) = \left(\frac{m_{(i-2)}}{2} + \sum_{k=i-1}^{n_e} m_k\right) gl_{(i-2)} \text{sen}(\theta_{(i-2)});$$

    end
end

```

Figura 7.3. - Algoritmo do vetor gravitacional

Observa-se que os dois primeiros elementos do vetor Coriolis-centrífugo (figura (7.4)) têm as mesmas características, apenas trocando cosseno por seno e esses elementos estão relacionados ao movimento vertical e horizontal da embarcação rebocada. O expoente T significa transposto.

$$F_1 = - \sum_{i=1}^{n_e} \left(\frac{m_i}{2} + M_t + \sum_{k=i+1}^{n_e} m_k \right) l_i \cos(\theta_i) \dot{\theta}_i^2;$$

$$F_2 = - \sum_{i=1}^{n_e} \left(\frac{m_i}{2} + M_t + \sum_{k=i+1}^{n_e} m_k \right) l_i \sin(\theta_i) \dot{\theta}_i^2;$$

```

for i = 1:n_e
    for j = 1:n_e
        if j == i
            f(i,j) = 0;
        end
        if j > i
            f(i,j) = \left( \frac{m_j}{2} + M_t + \sum_{k=j+1}^{n_e} m_k \right) l_i l_j \sin(\theta_i - \theta_j);
        end
        f(j,i) = -f(i,j);
    end
end
end
for i = 1:n_e
    velf(i) = \dot{\theta}_i^2;
end
F_3 = f.velf^T;
F = [F_1 F_2 F_3]^T;

```

Figura 7.4. - Algoritmo do vetor Coriolis-centrífugo

Conforme explicado anteriormente, os modelos dinâmicos foram desenvolvidos analiticamente usando Euler-Lagrange para 2, 3 e 4 elos. Os mesmos modelos gerados com os algoritmos genéricos mostraram-se idênticos aos desenvolvidos analiticamente. Repetiu-se a mesma comparação para 5 elos e o resultado foi o mesmo. Em resumo, os algoritmos são capazes de gerar exatamente o mesmo modelo dinâmico desenvolvido analiticamente aplicando o formalismo Euler-Lagrange, mas com a grande vantagem de gerar modelos dinâmicos independentemente do número de elos. O desenvolvimento manual analítico, por outro lado, é impraticável para um número de elos maior que seis (por exemplo), porque as equações se tornam muito grandes.

7.2. Forças externas

O objetivo desta seção é mostrar como as forças externas que atuam no rebocador atuarão no sistema dinâmico, gerando forças e torques nas outras massas do sistema. É importante lembrar que as forças externas que atuam na embarcação rebocada entraram nas equações de Euler-Lagrange e, portanto, seus efeitos dinâmicos já são naturalmente incorporados ao sistema dinâmico. Conforme mostrado na Figura 6.1, as forças externas que atuam no rebocador podem ser escritas na forma da Eq. (7.1).

$$\vec{F}_c = (F_t + F_{ht})\vec{l} + F_{yt}\vec{j} = F_{cx}\vec{l} + F_{cy}\vec{j} \quad (7.1)$$

A cada instante de tempo, a configuração geométrica do cabo é conhecida, de modo que o torque que a força externa ($\vec{F}_c$) exerce sobre a última articulação fictícia pode ser obtido na Eq. (7.2):

$$\tau_{ne} = [(F_t + F_{ht})l_n \cos(\theta_{n_e}) - F_{yt}l_n \sin(\theta_{n_e})]\vec{k} \quad (7.2)$$

Pode-se provar que, para calcular os torques nas outras articulações fictícias, é necessário multiplicar a força externa sucessivamente pelo cosseno da diferença de ângulo entre dois elos sucessivos, conforme explicado no algoritmo da Fig. 7.5:

```

s = 1;
for i = (ne - 1): -1: 1
    s = s * cos(θi+1 - θi);
    τi = s[(Ft + Fht)li cos(θi) - Fytli sen(θi)] $\vec{k}$ ;
end

```

Figura 7.5. - Algoritmo de Torques

A equação (7.2) e a figura (7.5) mostram os torques de elevação nas articulações fictícias, causados pelas forças externas que atuam no rebocador (equação (7.1)). A força que move a embarcação rebocada horizontalmente também é causada pela força externa no rebocador, mais precisamente pela sua componente horizontal: $F_{cx} = (F_t + F_{ht})$. Pode-se demonstrar que a força de reboque (F_{vt}) que o cabo transmitirá para a embarcação rebocada é determinada a partir do algoritmo visto na Fig. (7.6).

```

Tn = Fcx cos(θne -  $\frac{\pi}{2}$ );
p = 1;
for i = 1: ne - 1
    p = p * cos(θi+1 - θi);
end
Fvt = pTn sen(θ1);

```

Figura 7.6. - Algoritmo da força de reboque

O algoritmo da Fig. (7.6) poderia ser representado por uma única equação, na forma da Eq. (7.3).

$$F_{vt} = (F_t + F_{ht}) \cos\left(\theta_{n_e} - \frac{\pi}{2}\right) \sin(\theta_1) \prod_{i=1}^{n_e-1} \cos(\theta_{i+1} - \theta_i) \quad (7.3)$$

As forças verticais agindo no rebocador (F_{yt}) e na embarcação rebocada (F_{yv}) foram definidas nas equações (6.7) e (6.8), respectivamente. Os ganhos foram definidos com base na seguinte especificação de controle: $t_s = 1$ s e $\xi = 0,9$, correspondente ao tempo de estabilização e taxa de amortecimento, respectivamente. Desta forma, os ganhos constantes são calculados a partir das seguintes equações presentes na Eq. (7.4).

$$w_n = \frac{4}{\xi t_s}; \quad k_{pt} = M_t w_n^2; \quad k_{pv} = M_v w_n^2; \quad k_{dt} = 2M_t \xi w_n; \quad k_{dv} = 2M_v \xi w_n \quad (7.4)$$

w_n é a frequência natural não amortecida.

7.3. Simulações

Nas duas simulações apresentadas a seguir, o sistema está inicialmente em repouso, na configuração espacial mostrada na Figura 6.1, com $D = 30$ m e $d = 2$ m. Uma curva parabólica foi considerada para esta configuração espacial inicial do cabo em equilíbrio estático (Benedettini *et al.*, 1995), conforme mostra a Eq. (7.5)

$$y(x) = \frac{4d}{D} \left(x - \frac{1}{D} x^2 \right) \quad (7.5)$$

Um empuxo motor é aplicado ao rebocador, de modo que sua derivada no tempo obedeça a um perfil trapezoidal, cujo objetivo é trazer este empuxo motor de zero a 320000 N em 80 s. Após $t = 80$ s o empuxo motor permanece constante e igual a $F_t = 320000$ N, sendo cancelado a partir de $t = 115$ s. O tempo total de simulação foi 120 s. O empuxo motor aplicado em função do tempo pode ser visto na Figura 7.7a. O objetivo de usar este perfil de empuxo é garantir uma transição suave entre os estados não esticado e esticado para o cabo.

Para a primeira simulação, foram considerados movimentos de ondas na superfície do mar, de acordo com as seguintes equações presentes na Eq. (7.6)

$$y_{rv}(k) = 0,25 \sin(0,5\pi t(k)) ; \quad y_{rt}(k) = -0,25 \sin(0,5\pi t(k)) \quad (7.6)$$

com $k = 1, \dots, n_{pt}$ (número de pontos no domínio discreto do tempo).

As equações (7.6) correspondem a posições de referência vertical para a embarcação rebocada e para o rebocador. Essas equações e suas derivadas no tempo são substituídas nas equações (6.7) e (6.8) para gerar as forças verticais que o mar exerce sobre a embarcação rebocada (y_{rv}) e o rebocador

(y_{rt}) , reescritas aqui para cada instante discreto $t(k)$:

$$F_{yt}(k) = k_{pt}[y_{rt}(k) - y_t(k)] + k_{dt}[\dot{y}_{rt}(k) - \dot{y}_t(k)] \quad (7.7)$$

$$F_{yv}(k) = k_{pv}[y_{rv}(k) - y_v(k)] + k_{dv}[\dot{y}_{rv}(k) - \dot{y}_v(k)] \quad (7.8)$$

Os parâmetros físicos utilizados para realizar as simulações podem ser vistos na Tab. 7.1.

Tabela 7.1. - Parâmetros físicos do modelo

Parâmetros físicos	Valor
Massa do rebocador (M_t)	$M_t = 41600 \text{ (kg)}$
Massa da embarcação rebocada (M_v)	$M_v = 65600 \text{ (kg)}$
Densidade linear do cabo (ρ)	$\rho = 0,7047 \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}}\right)$
Comprimento do cabo (L_c)	$L_c = 30,592 \text{ (m)}$
Número de elos (n_e)	$n_e = 20$
Graus de liberdade (n)	$n = 22$
Comprimento de cada elo $\left(l_i = \frac{L_c}{n_e}, i = 1, \dots, n_e\right)$	$l_i = 1,5296 \text{ (m)}$
Massa de cada elo ($m_i = \rho l_i, i = 1, \dots, n_e$)	$m_i = 1,0779 \text{ (kg)}$
Raio do cabo (r)	$r = 0,03 \text{ (m)}$
Constante elástica de cada articulação ($k_i, i = 1, \dots, n_e$)	$k_i = 0,2n_e \left(\frac{\text{Nm}}{\text{rd}}\right)$
Coefficiente de atrito de cada articulação ($c_i, i = 1, \dots, n_e$)	$c_i = 30n_e \left(\frac{\text{Nms}}{\text{rd}}\right)$
Coefficientes de arrasto hidrodinâmico do rebocador ($\beta_i, i = 1,2$)	$\beta_1 = 180000 \left(\frac{\text{Ns}}{\text{m}}\right); \beta_2 = 0$
Coefficientes de arrasto hidrodinâmico da embarcação rebocada ($\gamma_i, i = 1,2$)	$\gamma_1 = 260000 \left(\frac{\text{Ns}}{\text{m}}\right); \gamma_2 = 0$

As figuras 7.7a, 7.7b, 7.7c e 7.7d mostram o empuxo motor, velocidades horizontais, uma ampliação de uma região nas velocidades verticais e uma ampliação de uma região nas velocidades horizontais, respectivamente.

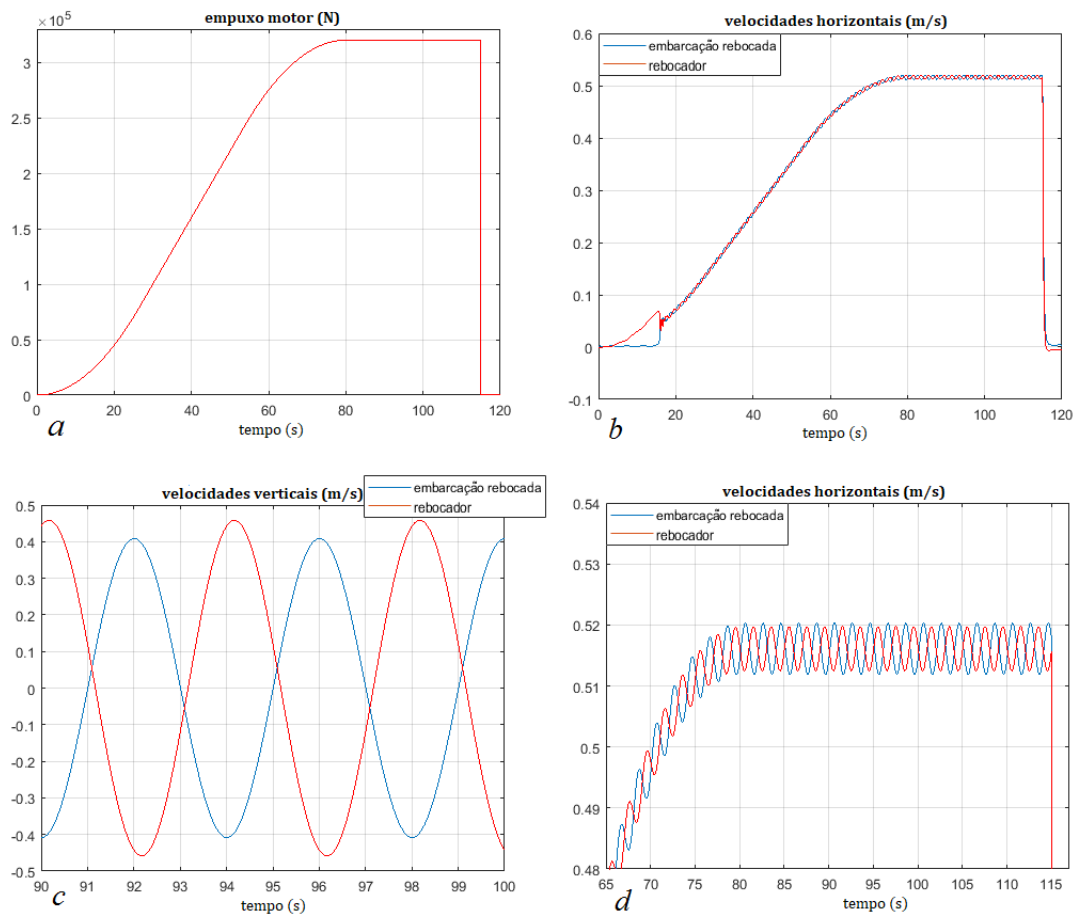


Figura 7.7. - Velocidades horizontais e verticais do rebocador e da embarcação rebocada

No início, o cabo não está esticado e apenas o rebocador se move. A velocidade da embarcação rebocada torna-se diferente de zero no instante $t = 15,8$ s, quando o choque ocorre e o cabo fica esticado. Neste momento, a velocidade do rebocador cai abruptamente passando em seguida a aumentar novamente, juntamente com a velocidade da embarcação rebocada. Um dos objetivos desse tipo de simulação foi verificar como as perturbações decorrentes das ondulações da superfície do mar (Figura 7.7c) interferem na dinâmica do reboque. Conforme pode ser visto na Figura 7.7d, flutuações nas velocidades horizontais aparecem, mesmo em um estado estacionário e isso ocorre devido a perturbações das ondas na superfície do mar.

Foi desenvolvido um software que permite animar graficamente a configuração espacial do cabo a partir da sobreposição de frames sucessivos (Figura 7.8). A Figura 7.8 foi formada com frames capturados a partir da animação gráfica. Na primeira linha os frames são espaçados no tempo em 1,6 s, enquanto nas outras linhas em 0,2 s.

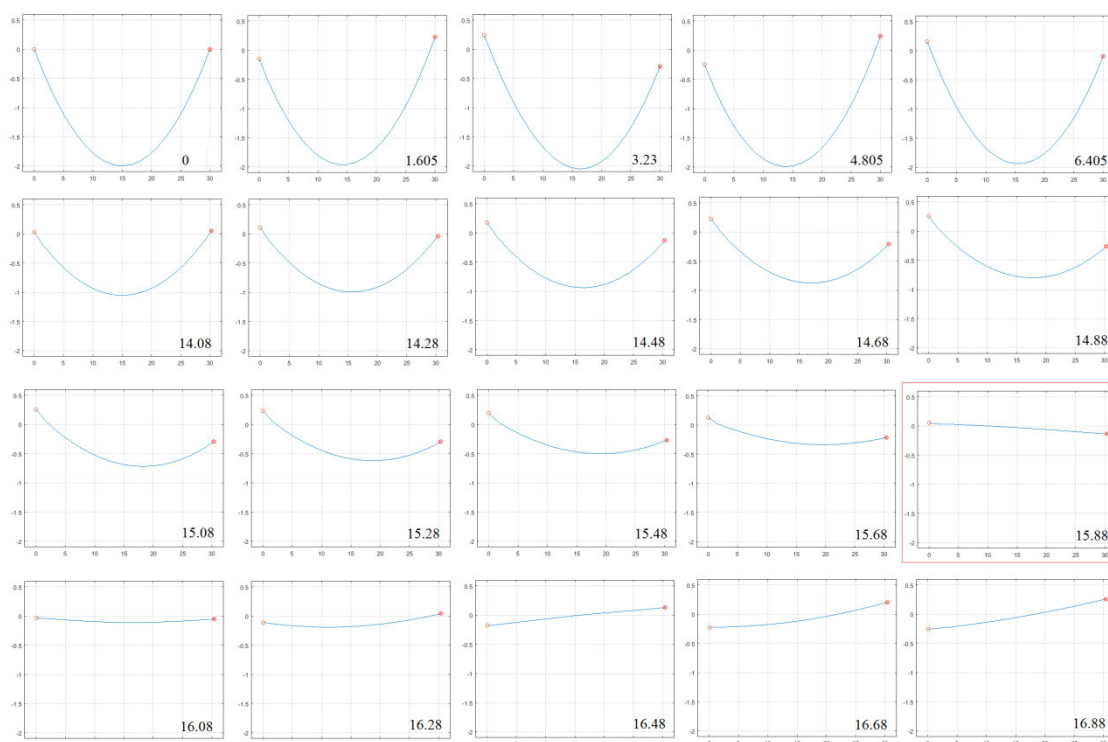


Figura 7.8. - Configurações espaciais do cabo durante a ação de reboque

Conforme o rebocador se afasta lentamente da embarcação rebocada na direção horizontal, o cabo se aproxima da situação esticada. O quadro marcado em vermelho mostra o instante do choque em aproximadamente 15,8 s, quando o cabo torna-se esticado. Durante todo o tempo, tanto o rebocador quanto a embarcação rebocada também se movem verticalmente, acompanhando o movimento das ondas da superfície do mar. Nos exemplos de simulação apresentados nesta tese, considera-se os dois pontos de conexão do cabo no rebocador e na embarcação rebocada na mesma linha horizontal. Porém, esta não é uma restrição imposta pelo formalismo de modelagem. As simulações realizadas mostraram um bom comportamento do modelo considerando diferentes níveis de altura nestes pontos de conexão.

Foi realizada uma simulação semelhante à anterior, mas sem considerar as ondas na superfície do mar. A Figura 7.9a mostra as velocidades horizontais e a Figura 7.9b mostra uma ampliação de uma região destacando a resposta no regime estacionário, quando o empuxo motor torna-se constante. Comparando as figuras 7.7d e 7.9b, observa-se que as oscilações nas velocidades horizontais ocorrem apenas quando o movimento ondulatório é considerado na superfície do mar.

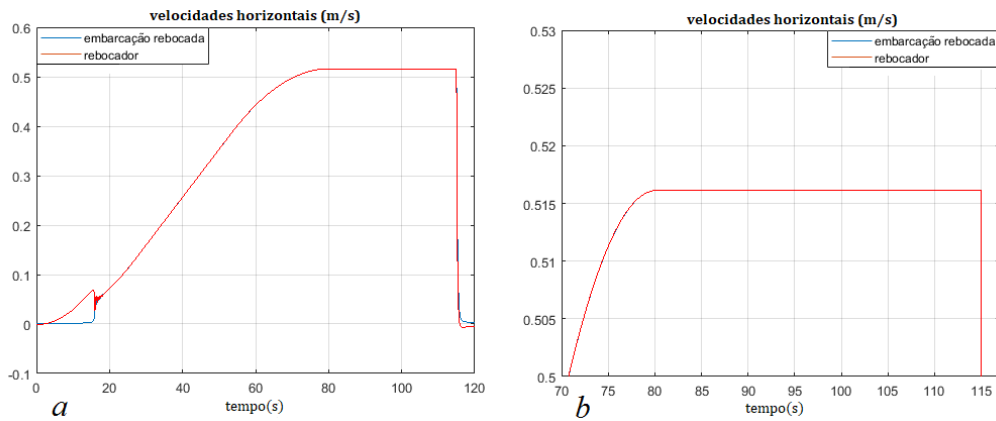


Figure 7.9. - Velocidades horizontais, sem ondas na superfície do mar

Os efeitos das perturbações das ondas na superfície do mar também podem ser vistos nas posições angulares dos elos. A Figura 7.10 mostra estas posições para dinâmica com (7.10a) e sem (7.10b) ondas na superfície do mar. Observa-se que, entre 15,8 e 115 s, o cabo fica totalmente esticado e todos os ângulos são iguais. No caso da Figura 7.10b, os ângulos são iguais a $\frac{\pi}{2}$ nesse intervalo de tempo, enquanto oscilam em torno de $\frac{\pi}{2}$ na Figura 7.10a.

É importante notar que o período dessas oscilações é a metade do período das oscilações das ondas do mar. Isso ocorre porque cada pico (positivo ou negativo) do movimento da superfície do mar corresponde a um mínimo na velocidade horizontal devido ao empuxo do motor no rebocador, projetado na direção do cabo esticado, atingir um mínimo. Este mesmo período é observado nas oscilações da Figura 7.7d. Em resumo, o período das oscilações observadas nas Figuras 7.7d e 7.10a correspondem à metade do período das oscilações observadas na Figura 7.7c.

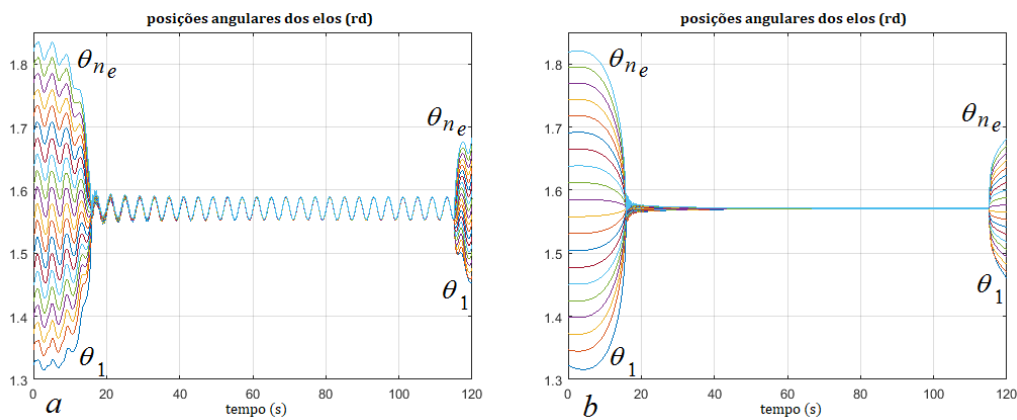


Figure 7.10. - Posições angulares dos elos: com (a) e sem (b) ondas na superfície do mar

8. TENSÃO DINÂMICA NO CABO

O cabo estará dinamicamente sujeito a duas situações possíveis: esticado ou não esticado. A maneira de calcular a tensão dinâmica no cabo muda radicalmente nessas duas situações. Considera-se que o cabo está inicialmente em repouso, na configuração espacial mostrada na Fig. 6.1. O vão é $D = 30 \text{ m}$ (distância entre rebocador e embarcação rebocada) e a flecha é $d = 2 \text{ m}$.

O cabo é considerado em situação não esticada se $|L_c - |x_t - x_v|| > 0,015 \text{ m}$ (L_c é o comprimento do cabo). Neste caso, o cabo estará sujeito apenas ao seu próprio peso. Se essa inequação não for satisfeita, o cabo será considerado esticado. Esta tolerância de $0,015 \text{ m}$ foi adotada apenas por razões numéricas para evitar possíveis comutações de alta frequência entre os modos esticado e não esticado, evitando assim instabilidade numérica. Esse mesmo valor de tolerância foi utilizado para diferentes comprimentos de cabos, tendo-se observado que a eficiência em evitar comutações de alta frequência entre os modos foi mantida. Considera-se que o rebocador lentamente se afasta da embarcação rebocada no início do movimento, de modo que D e d variem lentamente (D cresce e d diminui quase estaticamente). Assim, a tensão no cabo pode ser calculada como explicado no algoritmo da Fig. 8.1, mais precisamente na primeira parte do algoritmo. Neste algoritmo, n_{pt} é o número de passos da simulação numérica e $\rho_0 = \rho g$ a densidade linear do cabo em N/m .

Quando o cabo está esticado, a situação de reboque é estabelecida. A tensão no cabo pode ser obtida a partir da equação diferencial que descreve o equilíbrio dinâmico horizontal na embarcação rebocada, conforme Eq. (8.1):

$$M_v \ddot{x}_v = F_0 + F_{hv} \quad (8.1)$$

com F_0 igual à força que o cabo exerce sobre a embarcação rebocada. $\dot{x}_v$ e $\ddot{x}_v$ são conhecidos a partir dos dados da simulação numérica, permitindo a determinação de F_0 , como explicado no algoritmo da Fig. 8.1. Observa-se que, neste algoritmo, A é a área da seção transversal do cabo.

```

for  $k = 1:n_{pt}$ 
     $D = |x_t(k) - x_v(k)|;$ 
    if  $|L_c - D| > 0,015$  (cabo não esticado)

         $d = \sqrt{\frac{3D}{8}(L_c - D)};$ 

         $T_0 = \frac{\rho_0 D^2}{8d};$  (tensão mínima no cabo)

         $x = -\frac{D}{2} : \frac{D}{n_e - 1} : \frac{D}{2};$ 

        for  $i = 1:n_e$ 

             $T_i = \frac{\sqrt{T_0^2 + (\rho_0 x(i))^2}}{A};$  (tensão em cada elo)

        end

         $T_m(k) = \frac{1}{n_e} \sum_{i=1}^{n_e} T_i;$  (tensão média no cabo)

    else (cabo esticado)

         $F_{hv(k)} = -[\gamma_1 + \gamma_2 |\dot{x}_v(k)|] \dot{x}_v(k);$ 

         $F_0 = M_v \ddot{x}_v(k) - F_{hv(k)};$ 

         $T_m(k) = \frac{|F_0|}{A};$  (tensão no cabo esticado)

    end
end

```

Figura 8.1. - Algoritmo da tensão dinâmica no cabo

O algoritmo da Fig. 8.1 foi usado para determinar a tensão no cabo a partir dos dados de simulações, nas situações com (Figura 8.2 a) e sem (Figura 8.2 b) ondas na superfície do mar. A tensão é muito pequena no início porque apenas o rebocador está em um movimento muito lento e, portanto, o cabo não está esticado e a tensão é devida ao seu próprio peso. Aos 15,8 s o choque ocorre quando o cabo torna-se esticado, causando oscilações de mais alta frequência na tensão dinâmica, que são rapidamente atenuadas. Após este tempo, a tensão aumenta, assim como a velocidade horizontal e o empuxo do motor. Oscilações visíveis nas velocidades horizontais do rebocador e da embarcação rebocada (Figura 7.7d) também causam oscilações na tensão, como pode ser visto na

Figura 8.2a. Essas oscilações estão relacionadas ao movimento ondulatório da superfície do mar e têm o mesmo período que as oscilações observadas nas Figuras 7.10a e 7.7d. Depois dos 115 s, o empuxo motor no rebocador torna-se nulo e este desacelera o suficiente para que o cabo volte ao modo não esticado e, portanto, a tensão cai abruptamente.

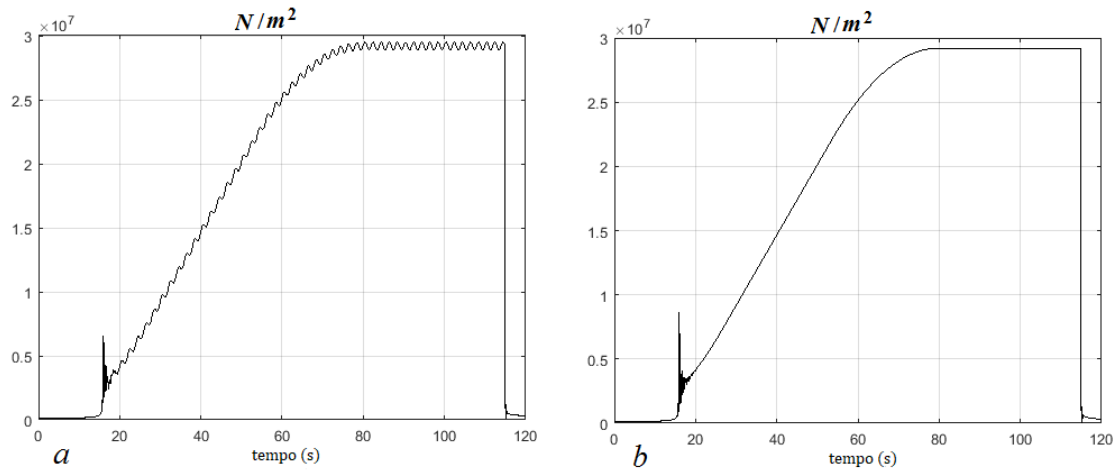


Figura 8.2. - Tensão dinâmica no cabo em simulação com (a) e sem (b) movimento das ondas na superfície do mar

9. MODELAGEM DINÂMICA DE CABOS E APLICAÇÕES NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

No presente capítulo, o cabo é considerado articulado em uma base que se move no espaço tridimensional (3D). O cabo e a carga terminal também se movem no espaço 3D, de modo que a técnica proposta neste capítulo é a mais geral possível e pode ser adaptada a diferentes aplicações. A Fig. 9.1a mostra um desenho da estrutura no espaço, incluindo a base móvel, cabo e carga terminal e a Fig. 9.1b mostra uma aproximação discreta da flexibilidade contínua do cabo. Considera-se a aplicação de uma força externa à base móvel $\vec{F}_b$. Evidentemente, um maior número de elos melhora a representação discreta da flexibilidade contínua.

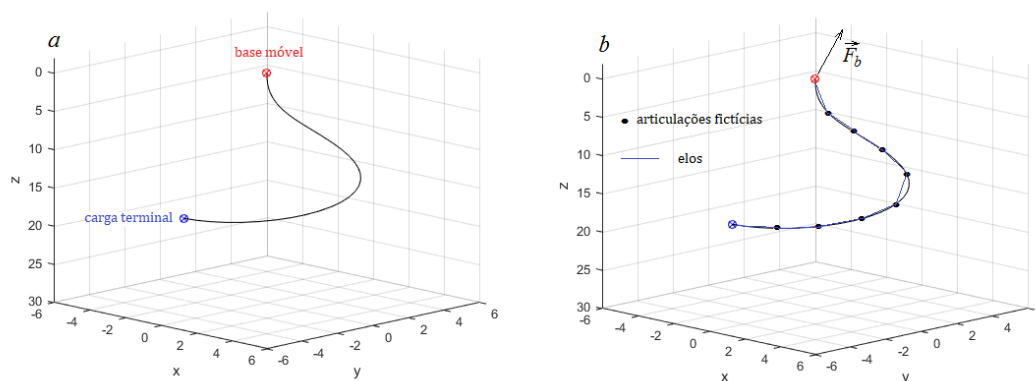


Figura 9.1. - Estrutura flexível no espaço tridimensional e sua aproximação discreta

Conforme ilustrado na Fig. 9.1, a estrutura flexível do cabo é articulada para uma base móvel em uma de suas extremidades. Na outra ponta está a carga terminal. Todo o sistema se move no espaço tridimensional. Várias aplicações podem ser associadas a este sistema físico cuja modelagem dinâmica é proposta neste capítulo. Um exemplo de aplicação seria um drone que transporta um cabo e uma carga terminal, como visto na Fig. 9.2a. Há também várias aplicações possíveis no ambiente subaquático, como cabos de amarração ou amarração de plataformas, como ilustrado na Fig. 9.2b. Outra aplicação seria no caso de rebocar embarcações. Há ainda outras aplicações como, por exemplo, robôs subaquáticos ROV (*Remotely Operated Vehicle*), bem como robôs aéreos que compartilham tarefas de transporte usando cabos. O modelo dinâmico que está sendo proposto é genérico o suficiente para se adaptar a qualquer uma dessas aplicações porque tem as seguintes características:

- i) A massa da base móvel e a massa da carga terminal movem-se no espaço tridimensional;
- ii) O cabo que conecta a base móvel e a carga terminal também se move no espaço tridimensional;

iii) Tanto a base móvel quanto a carga terminal podem ter suas próprias dinâmicas, com atuadores causando forças e torques.

Essas três características garantem a adaptação do modelo proposto a qualquer problema prático de aplicação que envolva o uso de estruturas flexíveis de cabos.

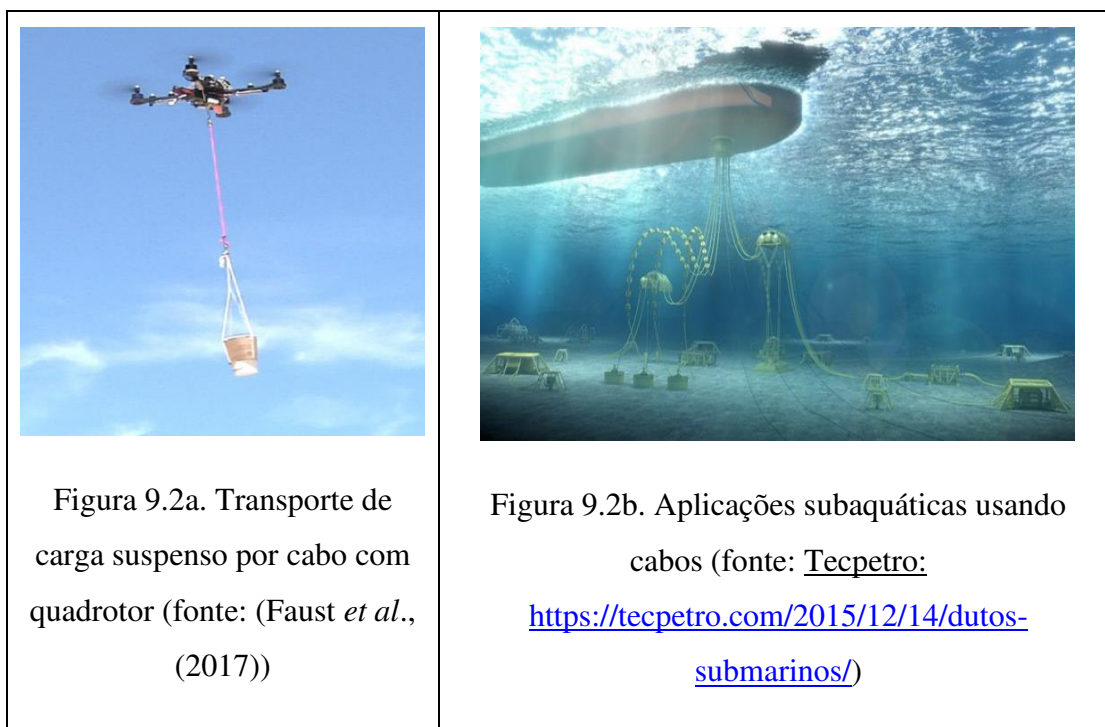


Figura 9.2 - Aplicações de cabos no espaço tridimensional

9.1. Modelagem dinâmica

Como explicado anteriormente, o modelo dinâmico proposto utiliza uma aproximação discreta da flexibilidade contínua do cabo. A Fig. 9.3 mostra o cabo e sua aproximação discreta, que usa cinco elos de comprimentos constantes ($l_i, i = 1, \dots, 5$). O sistema de referência ($X_0Y_0Z_0$) é fixado no centro de massa (CM) da base móvel e se move com ele. No entanto, considera-se que o cabo é articulado nesta base com uma junta esférica, de modo que os movimentos de arfagem, guinada e rolamento não alteram o cabo dinamicamente. Ao se deslocar no espaço tridimensional, a base arrasta o cabo em seu movimento, uma vez que o cabo é articulado ao seu CM. As articulações fictícias são esféricas, ou seja, permitem movimentos de elevação (θ_{ei}), torção (θ_{Ti}) e azimute (θ_{ai}) como representado na Fig. 9.4. Os eventuais movimentos de torção do cabo podem ser aproximados como sendo desacoplados em relação à dinâmica de elevação e azimute e, no presente trabalho, considera-se o movimento sem torção, ou seja, todos os ângulos θ_{Ti} nulos. No caso de se considerar o

utilização das equações de Euler-Lagrange, podendo ser escrito na forma da Eq. (9.1):

$$[I(\vec{q})]\ddot{\vec{q}} + [C]\dot{\vec{q}} + [K]\vec{q} + \vec{F}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) + \vec{G}(\vec{q}) = \vec{\tau} \quad (9.1)$$

$[I(\vec{q})]$ é a matriz de inércia, $[C]$ é a matriz de coeficientes de atrito, $[K]$ é a matriz de constantes elásticas, $\vec{F}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ é o vetor de esforços Coriolis-centrífugos, $\vec{G}(\vec{q})$ é vetor de esforços gravitacionais e $\vec{\tau}$ é o vetor de esforços externos. O vetor com as coordenadas generalizadas do sistema foi chamado de $\vec{q}$, cujas primeiras três coordenadas são as posições cartesianas do CM da base móvel. Por exemplo, no caso de se considerar apenas dois elos o vetor de coordenadas generalizadas seria: $\vec{q} = [x_M \ y_M \ z_M \ \theta_{e1} \ \theta_{e2} \ \theta_{a1} \ \theta_{a2}]^T$. Portanto, considerando-se dois elos o sistema teria 7 graus de liberdade, ou seja, considerando-se n_e elos, o sistema teria $2n_e + 3$ graus de liberdade. Foram desenvolvidos modelos considerando-se 2, 3 e 4 elos. As equações dos elementos dos vetores e matrizes aumentam muito de tamanho, de forma que fica inviável a obtenção analítica manual dos modelos para sistemas com cinco ou mais elos. Por exemplo, considerando-se 2 elos, o elemento I_{47} da matriz de inércia possui a forma da Eq. (9.2):

$$I_{47} = -\left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_1 l_2 \cos\theta_{e1} \sin\theta_{e2} \sin\theta_{a2} \quad (9.2)$$

No caso de se considerar 3 elos, o mesmo elemento assumiria a forma:

$$I_{47} = -\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_1 l_2 \cos\theta_{e1} \sin\theta_{e2} \sin\theta_{a2} \\ - \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_1 l_3 \cos\theta_{e1} \sin\theta_{e3} \sin(\theta_{a2} + \theta_{a3}) \quad (9.3)$$

Todos os elementos das matrizes simétricas de inércia quando o cabo é aproximado por 2, 3 e 4 elos estão descritos no apêndice 1.1.

As matrizes simétricas de coeficientes de atrito $[C]$ e de constantes elásticas $[K]$ têm a mesma estrutura de formação. Por exemplo, considerando-se 2 e 3 elos, as matrizes de coeficientes de atrito estão representadas nas equações (9.4) e (9.5), respectivamente:

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{Mx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{My} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{Mz} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{e1} + c_{e2} & -c_{e2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{e2} & c_{e2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{a1} + c_{a2} & -c_{a2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{a2} & c_{a2} \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{Mx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{My} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{Mz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{e1} + c_{e2} & -c_{e2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{e2} & c_{e2} + c_{e3} & -c_{e3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{e3} & c_{e3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{a1} + c_{a2} & -c_{a2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{a2} & c_{a2} + c_{a3} & -c_{a3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{a3} & c_{a3} \end{bmatrix} \quad (9.5)$$

Para obter as matrizes de constantes elásticas, basta trocar c por k nas equações (9.4) e (9.5). Porém, conforme será explicado na subseção 9.2.2, as constantes k_{Mx} e k_{My} são nulas.

O vetor Coriolis-centrífugo tem estrutura mais complexa. No caso de se considerar 2 e 3 elos, o quarto elemento do vetor (f_4) possui as formas conforme apresentadas nas equações (9.6) e (9.7), respectivamente:

$$\begin{aligned} f_4 = & -\left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_c\right) l_1^2 \cos\theta_{e1} \sin\theta_{e1} \dot{\theta}_{a1}^2 \\ & -\left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_1 l_2 \cos\theta_{e1} \sin\theta_{e2} \cos\theta_{a2} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2})^2 \\ & -\left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_1 l_2 (\cos\theta_{e1} \sin\theta_{e2} \cos\theta_{a2} - \sin\theta_{e1} \cos\theta_{e2}) \dot{\theta}_{e2}^2 \\ & - (m_2 + 2m_c) l_1 l_2 \cos\theta_{e1} \cos\theta_{e2} \sin\theta_{a2} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \dot{\theta}_{e2} \end{aligned} \quad (9.6)$$

$$\begin{aligned} f_4 = & -\left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_c\right) l_1^2 \cos\theta_{e1} \sin\theta_{e1} \dot{\theta}_{a1}^2 \\ & -\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_1 l_2 \cos\theta_{e1} \sin\theta_{e2} \cos\theta_{a2} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2})^2 \\ & -\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_1 l_2 (\cos\theta_{e1} \sin\theta_{e2} \cos\theta_{a2} - \sin\theta_{e1} \cos\theta_{e2}) \dot{\theta}_{e2}^2 \\ & - (m_2 + 2m_3 + 2m_c) l_1 l_2 \cos\theta_{e1} \cos\theta_{e2} \sin\theta_{a2} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \dot{\theta}_{e2} \\ & -\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_1 l_3 \cos\theta_{e1} \sin\theta_{e3} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3})^2 \\ & -\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_1 l_3 [\cos\theta_{e1} \sin\theta_{e3} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3}) - \sin\theta_{e1} \cos\theta_{e3}] \dot{\theta}_{e3}^2 \\ & - (m_3 + 2m_c) l_1 l_3 \cos\theta_{e1} \cos\theta_{e3} \sin(\theta_{a2} + \theta_{a3}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3}) \dot{\theta}_{e3} \end{aligned} \quad (9.7)$$

Todos os elementos dos vetores Coriolis-centrífgos quando o cabo é aproximado por 2, 3 e 4 elos estão descritos no apêndice 1.2.

O vetor gravitacional tem estrutura mais simples, conforme visto nas equações (9.8) e (9.9) para 2 e 3 elos, respectivamente:

$$\vec{G}(\vec{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(m_1 + m_2 + m_c)g \\ \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_c\right)gl_1 \sin \theta_{e1} \\ \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right)gl_2 \sin \theta_{e2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.8)$$

$$\vec{G}(\vec{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(m_1 + m_2 + m_3 + m_c)g \\ \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_c\right)gl_1 \sin \theta_{e1} \\ \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right)gl_2 \sin \theta_{e2} \\ \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right)gl_3 \sin \theta_{e3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.9)$$

Analisando-se o crescimento das equações dos elementos para dinâmicas com 2, 3 e 4 elos, foi possível encontrar padrões de crescimento, que permitiram a programação de algoritmos para a geração automática dos modelos dinâmicos, conforme será mostrado na próxima seção. Analisando-se também os Lagrangeanos para dois, três e quatro elos, foi possível encontrar um padrão de crescimento e assim, escrever um Lagrangeano genérico, para n_e elos, representado pela Eq. (9.10):

$$\begin{aligned}
L = & \frac{1}{2} M (\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2 + \dot{z}_M^2) \\
& + \frac{1}{2} m_c \left\{ \left[\dot{x}_M + \sum_{j=1}^{n_e} l_j \left[\sin \theta_{ej} \cos \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ai} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{ai} + \cos \theta_{ej} \sin \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ai} \right) \dot{\theta}_{ej} \right] \right]^2 \right. \\
& + \left[\dot{y}_M + \sum_{j=1}^{n_e} l_j \left[-\sin \theta_{ej} \sin \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ai} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{ai} + \cos \theta_{ej} \cos \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ai} \right) \dot{\theta}_{ej} \right] \right]^2 \\
& + \left(\dot{z}_M - \sum_{j=1}^{n_e} l_j \sin \theta_{ej} \dot{\theta}_{ej} \right)^2 \Big\} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_e} \left\{ m_j \left\{ \left[\dot{x}_M + \frac{l_j}{2} \left[\sin \theta_{ej} \cos \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ai} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{ai} + \cos \theta_{ej} \sin \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ai} \right) \dot{\theta}_{ej} \right] \right. \right. \quad (9.10) \\
& + \sum_{k=1}^{j-1} l_k \left[\sin \theta_{ek} \cos \left(\sum_{i=1}^k \theta_{ai} \right) \sum_{i=1}^k \dot{\theta}_{ai} + \cos \theta_{ek} \sin \left(\sum_{i=1}^k \theta_{ai} \right) \dot{\theta}_{ek} \right] \Big]^2 \\
& + \left[\dot{y}_M + \frac{l_j}{2} \left[-\sin \theta_{ej} \sin \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ai} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{ai} + \cos \theta_{ej} \cos \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ai} \right) \dot{\theta}_{ej} \right] \right. \\
& + \sum_{k=1}^{j-1} l_k \left[-\sin \theta_{ek} \sin \left(\sum_{i=1}^k \theta_{ai} \right) \sum_{i=1}^k \dot{\theta}_{ai} + \cos \theta_{ek} \cos \left(\sum_{i=1}^k \theta_{ai} \right) \dot{\theta}_{ek} \right] \Big]^2 \\
& + \left(\dot{z}_M - \frac{l_j}{2} \sin \theta_{ej} \dot{\theta}_{ej} - \sum_{k=1}^{j-1} l_k \sin \theta_{ek} \dot{\theta}_{ek} \right)^2 \Big\} + I r_{ej} \dot{\theta}_{ej}^2 + I r_{aj} \dot{\theta}_{aj}^2 \Big\} - \frac{1}{2} k_M z_M^2 \\
& - \sum_{j=1}^{n_e} \left\{ \frac{1}{2} [k_{ej} (\theta_{ej} - \theta_{e(j-1)})^2 + k_{aj} (\theta_{aj} - \theta_{a(j-1)})^2] \right. \\
& + m_j g \left[-z_M + \frac{l_j}{2} (1 - \cos \theta_{ej}) + \sum_{k=1}^{j-1} l_k (1 - \cos \theta_{ek}) \right] \Big\} \\
& - m_c g \left[-z_M + \sum_{j=1}^{n_e} l_j (1 - \cos \theta_{ej}) \right]
\end{aligned}$$

As coordenadas cartesianas que ainda aparecem no Lagrangeano genérico (equação (9.10)) correspondem às posições do centro de massa da base X_M, Y_M e Z_M , posições estas medidas com relação ao referencial inercial (em vermelho na Fig. 9.3), escolhido neste trabalho como sendo fixo à Terra, com eixo Z na direção radial e apontando para o centro da Terra, o eixo Y apontando na direção do polo sul sobre o meridiano, e o eixo X formando o triedro, sendo que os eixos X e Y formam o plano horizontal tangente à superfície da Terra. A equação (9.10) tem significativa importância porque permite a obtenção analítica do Lagrangeano, qualquer que seja o número de elos (n_e)

escolhido para a representação discreta da flexibilidade contínua.

9.2. Algoritmos genéricos

As equações (9.2) a (9.9) já permitem a percepção de que há um padrão de crescimento das expressões analíticas dos elementos dos vetores e matrizes do sistema. Conforme dito anteriormente, desenvolveram-se os modelos considerando 2, 3 e 4 elos e analisou-se esse crescimento minuciosamente, de forma que foi possível encontrar os padrões de crescimento para os elementos de todas as matrizes e vetores do sistema dinâmico, conforme apresentados na próxima subseção.

9.2.1. Matriz de inércia

Mostra-se inicialmente o algoritmo genérico de formação da matriz de inércia. Primeiro, escreve-se a matriz de inércia utilizando-se nove submatrizes, conforme descrito na Eq. (9.11):

$$[I(\vec{q})] = \begin{bmatrix} M_c & I_c & N_c \\ M_e & I_e & N_e \\ M_a & I_a & N_a \end{bmatrix} \quad (9.11)$$

Entretanto, como a matriz de inércia é simétrica, há a necessidade de se definir apenas seis das submatrizes, pois $M_e = I_c^T$, $I_a = N_e^T$ e $M_a = N_c^T$ (o expoente T significa transposto). Define-se o número de elos como sendo n_e , de forma que o número de graus de liberdade é $n = 2n_e + 3$. Observa-se que a submatriz M_c é sempre diagonal de ordem 3 com todos os elementos iguais a soma das massas envolvidas no sistema (eq. 9.12).

$$M_c(i, i) = M + m_c + \sum_{j=1}^{n_e} m_j, \quad i = 1, 2, 3 \quad (9.12)$$

As figuras (9.6), (9.7), (9.8), (9.9) e (9.10) mostram os algoritmos para a formação das submatrizes I_c , N_c , I_e , N_e e N_a , respectivamente. I_c e N_c são de ordem $(3 \times n_e)$, I_e e N_a são também simétricas de ordem n_e e N_e é de ordem n_e , de forma que a matriz de inércia $[I(\vec{q})]$ possui ordem $n = 2n_e + 3$.

```

for i = 1:3
    for j = 1:ne
        if i == 1

$$I_c(i,j) = \left( \frac{m_j}{2} + m_c + \sum_{k=j+1}^{n_e} m_k \right) l_j \cos \theta_{ej} \sin \left( \sum_{z=1}^j \theta_{az} \right);$$

        elseif i == 2

$$I_c(i,j) = \left( \frac{m_j}{2} + m_c + \sum_{k=j+1}^{n_e} m_k \right) l_j \cos \theta_{ej} \cos \left( \sum_{z=1}^j \theta_{az} \right);$$

        else

$$I_c(i,j) = - \left( \frac{m_j}{2} + m_c + \sum_{k=j+1}^{n_e} m_k \right) l_j \sin \theta_{ej};$$

        end
    end
end
end

```

Figura 9.6. - Algoritmo da submatriz de inércia I_c

```

for i = 1:3
    for j = 1:ne
        if i == 1

$$N_c(i,j) = \sum_{h=j}^{n_e} \left[ \left( \frac{m_h}{2} + m_c + \sum_{k=h+1}^{n_e} m_k \right) l_h \sin \theta_{eh} \cos \left( \sum_{z=1}^h \theta_{az} \right) \right];$$

        elseif i == 2

$$N_c(i,j) = - \sum_{h=j}^{n_e} \left[ \left( \frac{m_h}{2} + m_c + \sum_{k=h+1}^{n_e} m_k \right) l_h \sin \theta_{eh} \sin \left( \sum_{z=1}^h \theta_{az} \right) \right];$$

        else

$$N_c(i,j) = 0;$$

        end
    end
end
end

```

Figura 9.7. - Algoritmo da submatriz de inércia N_c

```

for i = 1:ne
    for j = 1:ne
        if i == j

$$I_e(i, i) = \left( \frac{m_i}{4} + m_c + \sum_{k=i+1}^{n_e} m_k \right) l_i^2 + I_{r_{ei}};$$

        end
        if j > i

$$I_e(i, j) = \left( \frac{m_j}{2} + m_c + \sum_{k=j+1}^{n_e} m_k \right) l_i l_j \left[ \sin \theta_{ei} \sin \theta_{ej} + \cos \theta_{ei} \cos \theta_{ej} \cos \left( \sum_{z=i+1}^j \theta_{az} \right) \right];$$

        end
        Ie(j, i) = Ie(i, j);
    end
end
end

```

Figura 9.8. - Algoritmo da submatriz simétrica de inércia I_e

```

for i = 1:ne
    for j = 1:ne
        I = 0;
        for u = j:ne
            if i == u
                w = 0;
            elseif i < u

$$w = - \left( \frac{m_u}{2} + m_c + \sum_{k=u+1}^{n_e} m_k \right) l_i l_u \cos \theta_{ei} \sin \theta_{eu} \sin \left( \sum_{z=i+1}^u \theta_{az} \right);$$

            else

$$w = \left( \frac{m_i}{2} + m_c + \sum_{k=i+1}^{n_e} m_k \right) l_i l_u \cos \theta_{ei} \sin \theta_{eu} \sin \left( \sum_{z=u+1}^i \theta_{az} \right);$$

            end
            I = I + w;
        end
        Ne(i, j) = I;
    end
end
end

```

Figura 9.9. - Algoritmo da submatriz de inércia N_e

```

for i = 1:n_e
    for j = 1:n_e
        if i == j
            
$$I_1 = \sum_{h=i}^{n_e} \left[ \left( \frac{m_h}{4} + m_c + \sum_{k=h+1}^{n_e} m_k \right) l_h^2 \sin^2 \theta_{eh} \right] + Ir_{ai};$$

            
$$I_2 = 0;$$

            for u = i:(n_e - 1)
                
$$w = \sum_{h=u+1}^{n_e} \left[ \left( m_h + 2m_c + 2 \sum_{k=h+1}^{n_e} m_k \right) l_u l_h \sin \theta_{eu} \sin \theta_{eh} \cos \left( \sum_{z=u+1}^h \theta_{az} \right) \right];$$

                
$$I_2 = I_2 + w;$$

            end
            
$$N_a(i, i) = I_1 + I_2;$$

        end
        if j > i
            
$$I_1 = \sum_{h=j}^{n_e} \left[ \left( \frac{m_h}{4} + m_c + \sum_{k=h+1}^{n_e} m_k \right) l_h^2 \sin^2 \theta_{eh} \right];$$

            
$$I_2 = 0;$$

            for u = i:(n_e - 1)
                if u < j
                    
$$w = \sum_{h=j}^{n_e} \left[ \left( \frac{m_h}{2} + m_c + \sum_{k=h+1}^{n_e} m_k \right) l_u l_h \sin \theta_{eu} \sin \theta_{eh} \cos \left( \sum_{z=u+1}^h \theta_{az} \right) \right];$$

                else
                    
$$w = \sum_{h=u+1}^{n_e} \left[ \left( m_h + 2m_c + 2 \sum_{k=h+1}^{n_e} m_k \right) l_u l_h \sin \theta_{eu} \sin \theta_{eh} \cos \left( \sum_{z=u+1}^h \theta_{az} \right) \right];$$

                end
                
$$I_2 = I_2 + w;$$

            end
            
$$N_a(i, j) = I_1 + I_2;$$

        end
        
$$N_a(j, i) = N_a(i, j);$$

    end
end
end

```

Figura 9.10. - Algoritmo da submatriz simétrica de inércia N_a

9.2.2. Matrizes de coeficientes de atrito e de constantes elásticas

Mostra-se inicialmente o algoritmo genérico de formação das matrizes de coeficientes de atrito e de constantes elásticas, matrizes de ordem $n = 2n_e + 3$. Primeiro, representa-se as matrizes descritas nas equações (9.4) e (9.5) na forma da Eq. (9.13).

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{Mx} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & c_{My} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & c_{Mz} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & [\bar{C}] & & \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & k_{Mz} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & & [\bar{K}] & \end{bmatrix} \quad (9.13)$$

Para realizar as simulações considera-se que a base móvel está sujeita a uma mola e a um amortecedor no movimento da direção Z (vertical), mola de constante k_{Mz} . Nas direções X e Y não há restrições, de forma que k_{Mx} e k_{My} são nulas. Porém, há atritos atuando nas três direções inerciais, de forma que os coeficientes c_{Mx} , c_{My} e c_{Mz} são constantes positivas.

As submatrizes $[\bar{C}]$ e $[\bar{K}]$ possuem a forma descrita pela Eq. (9.14) abaixo.

$$[\bar{C}] = \begin{bmatrix} [C_e] & [0] \\ [0] & [C_a] \end{bmatrix} \quad [\bar{K}] = \begin{bmatrix} [K_e] & [0] \\ [0] & [K_a] \end{bmatrix} \quad (9.14)$$

Os algoritmos descritos na figura (9.11) servem pra gerar as submatrizes de coeficientes de atrito $[C_e]$ e $[C_a]$ e as submatrizes de constantes elásticas $[K_e]$ e $[K_a]$. Todas são simétricas e de ordem n_e . Percebe-se que o algoritmo utilizado é o mesmo para as quatro submatrizes, apenas trocando-se o índice e pelo índice a para a obtenção das matrizes C_a e K_a .

Matriz $[C_e]$	Matriz $[K_e]$
<pre> for i = 1:n for j = 1:n if i == j if i == n_e C_e(i,i) = c_{e(n_e)}; else C_e(i,i) = c_{e(i)} + c_{e(i+1)}; end end if j > i if j == i + 1 C_e(i,j) = -c_{e(j)}; else C_e(i,j) = 0; end end C_e(j,i) = C_e(i,j); end end end </pre>	<pre> for i = 1:n for j = 1:n if i == j if i == n_e K_e(i,i) = k_{e(n_e)}; else K_e(i,i) = k_{e(i)} + k_{e(i+1)}; end end if j > i if j == i + 1 K_e(i,j) = -k_{e(j)}; else K_e(i,j) = 0; end end K_e(j,i) = K_e(i,j); end end end </pre>

Figura 9.11. - Algoritmo das submatrizes simétricas de coeficientes de atrito e de constantes elásticas

9.2.3. Vetor Coriolis-centrífugo

Divide-se o vetor Coriolis-centrífugo em três subvetores: $\vec{F}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = [\vec{F}_c \quad \vec{F}_e \quad \vec{F}_a]^T$. O $\vec{F}_c$ é 3×1 , o $\vec{F}_e$ e o $\vec{F}_a$ são $n_e \times 1$, conforme definidos nos algoritmos das figuras (9.12), (9.13) e (9.14):

for $i = 1:n_e$

$$F_x = - \sum_{i=1}^{n_e} \left(\frac{m_i}{2} + m_c + \sum_{k=i+1}^{n_e} m_k \right) l_i \left\{ \sin \theta_{ei} \sin \left(\sum_{z=1}^i \theta_{az} \right) \left[\dot{\theta}_{ei}^2 + \left(\sum_{z=1}^i \dot{\theta}_{az} \right)^2 \right] \right. \\ \left. - 2 \cos \theta_{ei} \cos \left(\sum_{z=1}^i \theta_{az} \right) \dot{\theta}_{ei} \sum_{z=1}^i \dot{\theta}_{az} \right\}$$

$$F_y = - \sum_{i=1}^{n_e} \left(\frac{m_i}{2} + m_c + \sum_{k=i+1}^{n_e} m_k \right) l_i \left\{ \sin \theta_{ei} \cos \left(\sum_{z=1}^i \theta_{az} \right) \left[\dot{\theta}_{ei}^2 + \left(\sum_{z=1}^i \dot{\theta}_{az} \right)^2 \right] \right. \\ \left. + 2 \cos \theta_{ei} \sin \left(\sum_{z=1}^i \theta_{az} \right) \dot{\theta}_{ei} \sum_{z=1}^i \dot{\theta}_{az} \right\}$$

$$F_z = - \sum_{i=1}^{n_e} \left(\frac{m_i}{2} + m_c + \sum_{k=i+1}^{n_e} m_k \right) l_i \cos \theta_{ei} \dot{\theta}_{ei}^2;$$

end

$$F_c = [F_x \ F_y \ F_z]^T;$$

Figura 9.12. - Algoritmo do subvetor Coriolis-centrífugo $\vec{F}_c$

```

for i = 1:n_e
    f = 0;
    for j = 1:n_e
        if i == j

$$f_e = -\left(\frac{m_i}{4} + m_c + \sum_{k=i+1}^{n_e} m_k\right) l_i^2 \cos \theta_{ei} \sin \theta_{ei} \left(\sum_{z=1}^i \dot{\theta}_{az}\right)^2;$$

        elseif j > i

$$f_{e1} = -\left(\frac{m_j}{2} + m_c + \sum_{k=j+1}^{n_e} m_k\right) l_i l_j \cos \theta_{ei} \sin \theta_{ej} \cos \left(\sum_{z=i+1}^j \theta_{az}\right) \left[\dot{\theta}_{ej}^2 + \left(\sum_{z=1}^j \dot{\theta}_{az}\right)^2\right];$$


$$f_{e2} = \left(\frac{m_j}{2} + m_c + \sum_{k=j+1}^{n_e} m_k\right) l_i l_j \sin \theta_{ei} \cos \theta_{ej} \dot{\theta}_{ej}^2;$$


$$f_{e3} = -\left(m_j + 2m_c + 2 \sum_{k=j+1}^{n_e} m_k\right) l_i l_j \cos \theta_{ei} \cos \theta_{ej} \sin \left(\sum_{z=i+1}^j \theta_{az}\right) \dot{\theta}_{ej} \sum_{z=1}^j \dot{\theta}_{az};$$


$$f_e = f_{e1} + f_{e2} + f_{e3};$$

        else

$$f_{e1} = -\left(\frac{m_i}{2} + m_c + \sum_{k=i+1}^{n_e} m_k\right) l_i l_j \cos \theta_{ei} \sin \theta_{ej} \cos \left(\sum_{z=j+1}^i \theta_{az}\right) \left[\dot{\theta}_{ej}^2 + \left(\sum_{z=1}^j \dot{\theta}_{az}\right)^2\right];$$


$$f_{e2} = \left(\frac{m_i}{2} + m_c + \sum_{k=i+1}^{n_e} m_k\right) l_i l_j \sin \theta_{ei} \cos \theta_{ej} \dot{\theta}_{ej}^2;$$


$$f_{e3} = \left(m_i + 2m_c + 2 \sum_{k=i+1}^{n_e} m_k\right) l_i l_j \cos \theta_{ei} \cos \theta_{ej} \sin \left(\sum_{z=j+1}^i \theta_{az}\right) \dot{\theta}_{ej} \sum_{z=1}^j \dot{\theta}_{az};$$


$$f_e = f_{e1} + f_{e2} + f_{e3};$$

        end
        f = f + f_e;
    end
end
F_e(i) = f;
end

```

Figura 9.13. - Algoritmo do subvetor Coriolis-centrífugo $\vec{F}_e$

```

for i = 1:n_e
    f = 0;
    for u = 1:(n_e - 1)
        for w = i:n_e
            if u < w
                if i > u

$$f_a = \left( \frac{m_w}{2} + m_c + \sum_{k=w+1}^{n_e} m_k \right) l_u l_w \sin \theta_{eu} \sin \theta_{ew} \sin \left( \sum_{z=u+1}^w \theta_{az} \right) \left[ \dot{\theta}_{eu}^2 + \left( \sum_{z=1}^u \dot{\theta}_{az} \right)^2 \right];$$

                else

$$f_{a1} = \left( \frac{m_w}{2} + m_c + \sum_{k=w+1}^{n_e} m_k \right) l_u l_w \sin \theta_{eu} \sin \theta_{ew} \sin \left( \sum_{z=u+1}^w \theta_{az} \right) \left[ \dot{\theta}_{eu}^2 - \dot{\theta}_{ew}^2 + \left( \sum_{z=1}^u \dot{\theta}_{az} \right)^2 - \left( \sum_{z=1}^w \dot{\theta}_{az} \right)^2 \right];$$


$$f_{a2} = \left( m_w + 2m_c + 2 \sum_{k=w+1}^{n_e} m_k \right) l_u l_w \sin \theta_{eu} \cos \theta_{ew} \cos \left( \sum_{z=u+1}^w \theta_{az} \right) \dot{\theta}_{ew} \sum_{z=1}^w \dot{\theta}_{az};$$


$$f_a = f_{a1} + f_{a2};$$

                end

$$f_{aa} = f_a + \left( m_w + 2m_c + 2 \sum_{k=w+1}^{n_e} m_k \right) l_u l_w \cos \theta_{eu} \sin \theta_{ew} \cos \left( \sum_{z=u+1}^w \theta_{az} \right) \dot{\theta}_{eu} \sum_{z=1}^u \dot{\theta}_{az};$$

            else
                faa = 0;
            end
            f = f + faa;
        end
    end
end

$$F_a(i) = f + \sum_{j=i}^{n_e} \left( \frac{m_j}{4} + m_c + \sum_{k=j+1}^{n_e} m_k \right) l_j^2 \sin(2 \theta_{ej}) \dot{\theta}_{ej} \sum_{z=1}^j \dot{\theta}_{az};$$

end

```

Figura 9.14. - Algoritmo do subvetor Coriolis-centrífugo $\vec{F}_a$

9.2.4. Vetor gravitacional

O vetor gravitacional possui o algoritmo mais simples de todos, conforme visto na figura (9.15). O laço mais externo varia de 1 até $n = 2n_e + 3$, sendo n o número de graus de liberdade.

```

for i = 1:n
    if i == 3
        
$$G(i) = -\left(m_c + \sum_{k=i-2}^{n_e} m_k\right)g;$$

    elseif i > 3 & i < n_e + 4
        
$$G(i) = \left(\frac{m_{(i-3)}}{2} + m_c + \sum_{k=i-2}^{n_e} m_k\right)gl_{(i-3)} \text{ sen } \theta_{e(i-3)};$$

    else
        G(i) = 0;
    end
end
end

```

Figura 9.15. - Algoritmo do vetor gravitacional

9.2.5. Vetor com os esforços externos

As três primeiras componentes do vetor com os esforços externos são as forças que atuam na base móvel, consideradas atuando no CM e nas direções inerciais: τ_x , τ_y e τ_z . Portanto, este vetor terá $n = 2n_e + 3$ componentes, conforme definido na equação (9.15):

$$\vec{\tau} = [\tau_x \ \tau_y \ \tau_z \ \tau_{e1} \ \dots \ \tau_{en_e} \ \tau_{a1} \ \dots \ \tau_{an_e}]^T \quad (9.15)$$

$\tau_{e1} \ \dots \ \tau_{en_e}$ são os torques de elevação atuando nas n_e articulações fictícias, enquanto $\tau_{a1} \ \dots \ \tau_{an_e}$ são os torques de azimuth atuando nas mesmas articulações. Estes esforços externos dependem de cada aplicação prática. Por exemplo, se houver forças externas atuando na carga terminal, conhecendo-se a direção e o sentido da resultante é possível encontrar todos os torques nas articulações fictícias causados por essas forças externas (Gomes *et al* (2020)).

9.3. Simulações

Os parâmetros físicos adotados para a realização das simulações estão expostos na Tabela 9.1. Em aplicações práticas, estes parâmetros podem ser estimados a partir de técnicas não lineares de

estimação paramétrica, conforme descrito na subseção 3.2 do capítulo 3 que aborda a validação experimental.

Tabela 9.1. Parâmetros físicos do modelo 3D simulado

Parâmetros físicos	Valor
Comprimento do cabo	$l_c = 80 \text{ (m)}$
Comprimento de cada elo	$l_i = l_c/n_l \text{ (m)}$
Número de elos	$n_l = 20$
Massa da base móvel	$M = 80 \text{ (kg)}$
Densidade linear do cabo	$\rho = 8000 \text{ (kg/m)}$
Massa do cabo	$m_{cab} = \rho l_c \text{ (m)}$
Massa de cada elo	$m_i = m_{cab}/n_l \text{ (kg)}$
Massa da carga terminal	$m_c = 80 \text{ (kg)}$
Constante elástica da base móvel	$K_M = 80 \text{ (N/m)}$
Coeficiente de atrito da base (direção Z)	$c_{Mz} = 80 \text{ (Ns/m)}$
Coeficiente de atrito da base (direção Y)	$c_{My} = 80 \text{ (Ns/m)}$
Coeficiente de atrito da base (direção X)	$c_{Mx} = 80 \text{ (Ns/m)}$
Coeficiente de atrito de elevação (cada articulação)	$c_{ei} = 80 \text{ (Nms/rd)}$
Coeficiente de atrito de azimute (cada articulação)	$c_{ai} = 80 \text{ (Nms/rd)}$
Constante elástica de elevação de cada articulação	$k_{ei} = 80 \text{ (Nm/rd)}$
Constante elástica de azimute de cada articulação	$k_{ai} = 0 \text{ (Nm/rd)}$

A Figura 9.16 tenta ilustrar o sistema dinâmico considerado para a realização de simulações. A base móvel de massa M tem movimento na direção inercial Z limitado por uma mola de constante k_{Mz} e um amortecedor de constante c_{Mz} . Portanto, a força externa na direção Z obedece à Eq. (9.16):

$$\tau_z = -(k_{Mz}z + c_{Mz}\dot{z}) \quad (9.16)$$

Esta força na direção Z seria como um controle proporcional e derivativo com referências de

posição e velocidade nulas. Já nas direções inerciais X e Y todo o conjunto que forma a base móvel de massa M se desloca livremente, movido pelas forças τ_x e τ_y .

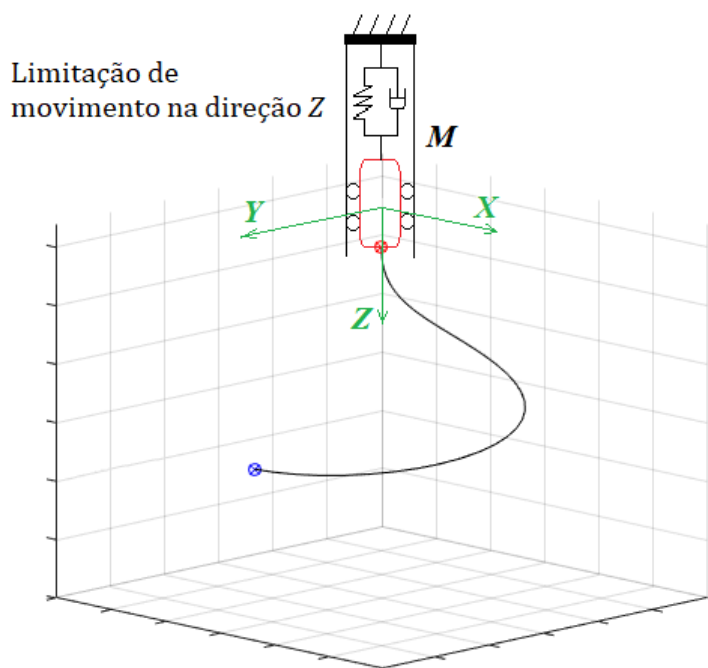


Figura 9.16. - Representação gráfica do sistema dinâmico modelado e simulado, ressaltando a limitação de movimento da base móvel na direção inercial Z

Os resultados da primeira simulação podem ser vistos nas Figs. 9.17 e 9.18. Inicialmente, o cabo é disposto em uma condição inicial idêntica à mostrada na primeira imagem da Fig. 9.17. O cabo e a carga terminal são soltos do repouso. A força externa aplicada na base móvel M na direção Z obedece à equação (9.16) e as outras forças externas τ_x e τ_y foram consideradas nulas. Todos os torques externos nas articulações fictícias também foram considerados nulos. Diversas configurações espaciais do cabo ao longo do tempo são vistas na Fig. 9.17, com frames a cada 0,25 s. Estes frames foram copiados de um software para animação tridimensional, desenvolvido especificamente para a visualização dos resultados das simulações. Os 20 frames vistos na Fig. 9.17 constituem a evolução no tempo de 0 a 5,75 s, já que o primeiro frame é a própria condição inicial, formada com posições inerciais da base móvel nulas, ângulos iniciais de elevação e azimuth crescentes, e todas as velocidades nulas (o sistema parte do repouso). A Fig. 9.17 permite visualizar uma boa sensação de realidade física, além de mostrar que o modelo dinâmico permite simulações com resultados coerentes e esperados fisicamente. A sensação de realidade física é excelente quando visualiza-se a animação computacional, com frames a cada 0,01 s, por exemplo. A excelente sensação de realidade

física deve-se também ao fato de termos considerado a aproximação discreta da dinâmica com 28 elos.

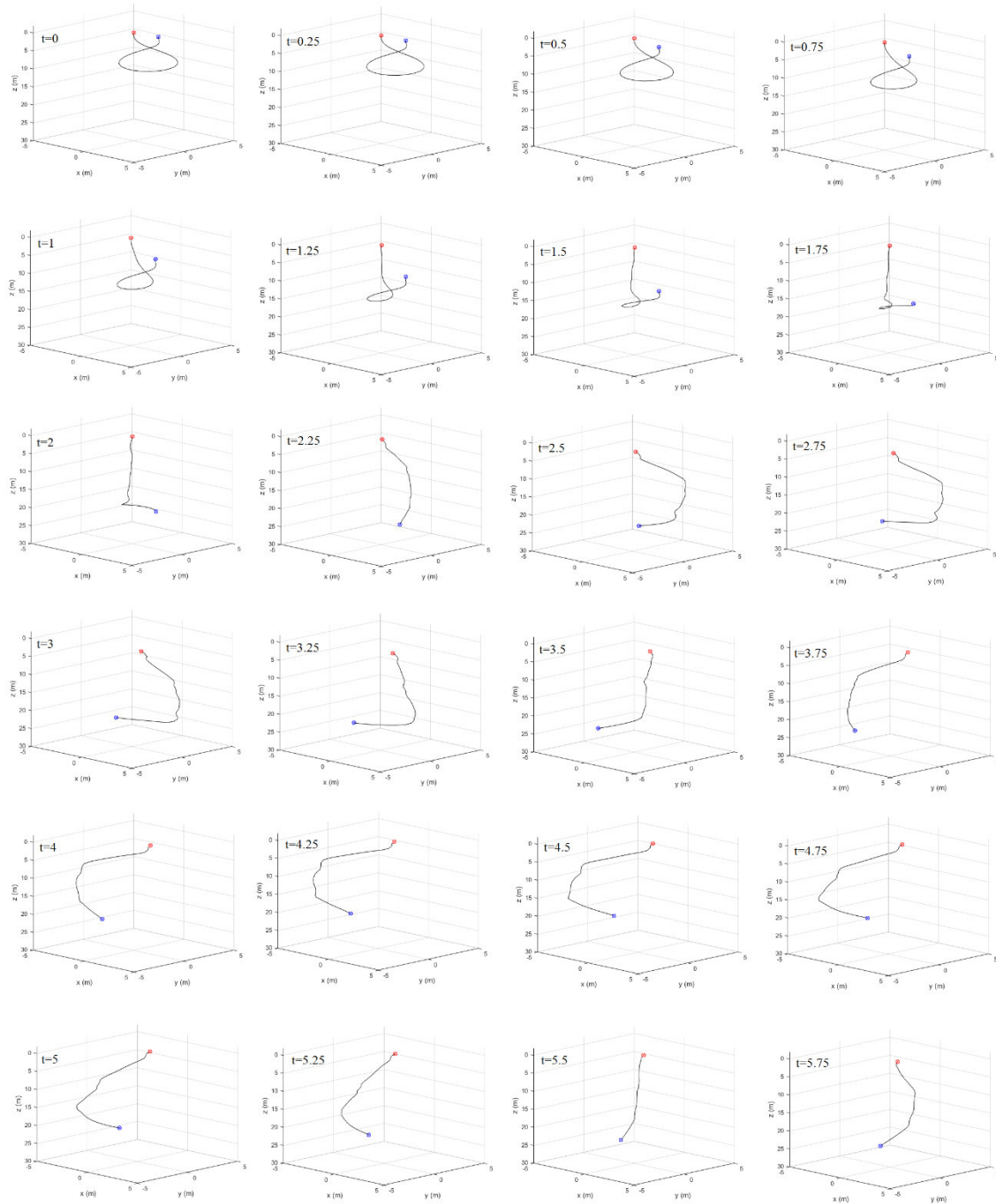


Figura 9.17. - Resultados de simulação mostrando animação com frames a cada 0,25 s

As posições inerciais x_M , y_M e z_M da base móvel são vistas na Fig. 9.18. Lembra-se que a base móvel é livre para se movimentar nas direções inerciais X e Y , com a vinculação de uma mola e um amortecedor na direção Z . Como as dinâmicas da carga terminal, do cabo e da base móvel são acopladas (acoplamento não linear), a carga terminal e o cabo, ao se deslocarem no espaço, provocam movimentos também na base móvel. Por exemplo, a posição na direção Z (z_M) apresenta o primeiro e maior pico positivo quando a carga terminal chega ao ponto mais baixo, provocando um choque mecânico em toda a estrutura. Lembra-se que o sentido positivo da direção inercial Z aponta para o centro da Terra.

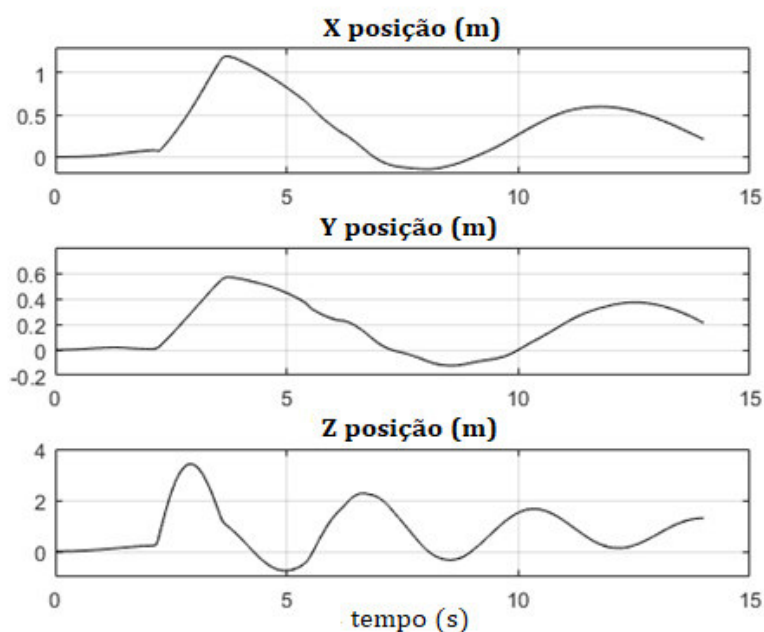


Figura 9.18. - Movimentação da base móvel nas três direções inerciais

Outra simulação foi realizada aplicando forças na base móvel, nas direções inerciais. Toda a estrutura (base móvel, cabo e carga terminal) está inicialmente em repouso. Aplica-se forças na base móvel, sequencialmente nas direções inerciais Y e X , de acordo com o algoritmo da figura 9.19.

```

if  $t < 6$ 

     $\tau_x = 0; \tau_y = 900N;$ 

elseif  $t < 12$ 

     $\tau_x = 0; \tau_y = -900N;$ 

elseif  $t < 18$ 

     $\tau_x = 900N; \tau_y = 0;$ 

else

     $\tau_x = -900N; \tau_y = 0;$ 

end

```

Figura 9.19. - Algoritmo das forças nas direções inerciais Y e X na base móvel

Em síntese, provocam-se acelerações seguidas de desacelerações na base móvel. Primeiro na direção inercial Y e depois na direção inercial X . A Fig. 9.20 mostra a configuração espacial do cabo em uma sequência de frames captados da animação computacional a cada segundo. Este tipo de simulação não ativa modos de mais alta frequência, de forma que o cabo permanece esticado, como se fosse um pêndulo simples esférico. Percebe-se que os resultados são coerentes com o esperado fisicamente e ainda, que a animação computacional permite visualizar uma boa sensação de realidade física.

A Fig. 9.21 mostra os deslocamentos da base móvel nas três direções inerciais. Pode-se perceber que a posição x_M permanece nula, enquanto as forças são aplicadas apenas na direção inercial Y . Após 12 s as forças começam a atuar também na direção inercial X , fazendo com que a posição x_M comece a crescer. As variações na posição z_M são devidas à força peso de toda a estrutura, bem como à mola e ao amortecedor que vinculam o movimento na direção Z inercial. Analisando-se esta figura percebe-se a influência que as dinâmicas do cabo e carga terminal exercem sobre a base móvel, resultado também fisicamente coerente uma vez que há um forte acoplamento dinâmico de natureza não linear.

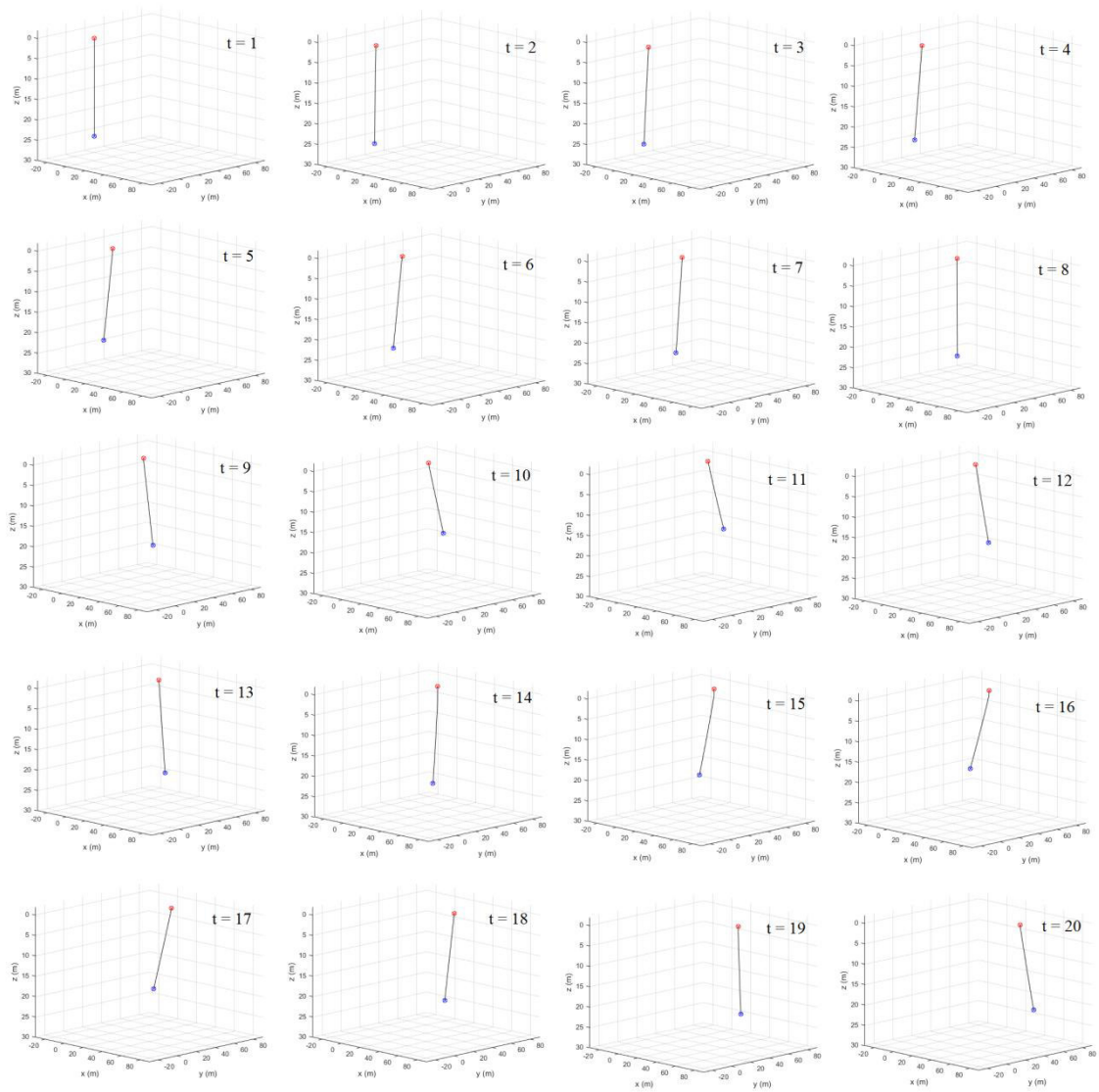


Figura 9.20. - Simulação aplicando forças na base móvel, nas direções inerciais X e Y

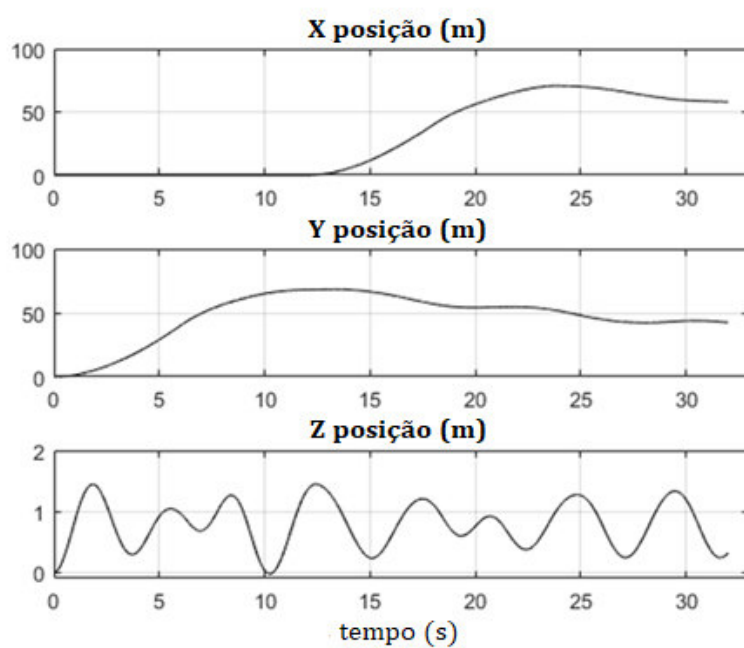


Figura 9.21 - Movimentação da base móvel nas três direções inerciais, considerando forças aplicadas na base móvel.

10. CONCLUSÕES

Esta tese tratou da modelagem dinâmica de uma estrutura flexível do tipo cabo, que foi modelada segundo um formalismo discreto proposto para ser genérico, qualquer que seja o número de elos para representar de forma discreta a flexibilidade contínua. Visando aplicações práticas, trabalhou-se sob a perspectiva de três cenários, os dois primeiros contidos no plano vertical e o terceiro no espaço tridimensional. O primeiro foi quando o cabo é fixo na sua extremidade superior e livre na outra que contém a carga terminal (m_c). Neste caso, além da modelagem analítica, foi realizada uma validação experimental do modelo dinâmico, cujos resultados experimentais foram confrontados aos de simulações nos primeiros segundos do movimento, quando os modos flexíveis ainda estão ativos e não totalmente atenuados. As simulações mostraram resultados razoavelmente próximos aos dos experimentos, indicando que a modelagem dinâmica proposta pode ser utilizada com confiabilidade.

O segundo cenário é quando o cabo, ao invés de estar fixo na sua extremidade superior, está articulado a uma base móvel ou embarcação de superfície que se desloca nas direções horizontal (ação de correntes oceânicas ou propulsores) e vertical (oscilações na superfície do mar). Este acoplamento do cabo com a base móvel é um exemplo que desperta grande interesse em razão de ser correlato a aplicações tecnológicas, principalmente vinculadas à indústria de petróleo *offshore*. Uma das contribuições do presente trabalho consiste na adaptação de um formalismo de modelagem discreta para acoplar a dinâmica de um cabo e sua carga terminal à dinâmica de uma base móvel na superfície do mar, constituindo assim uma dinâmica única acoplada, com $(n_e + 2)$ graus de liberdade. Escolheu-se um número de elos (n_e) para representar de forma discreta a flexibilidade contínua do cabo. Após essa escolha, os algoritmos genéricos propostos permitem a obtenção de todos os elementos das matrizes e vetores dos modelos dinâmicos de forma automática, possibilitando assim a realização de simulações muito realistas. Isto porque, quanto maior o número de elos, mais a flexibilidade discreta do modelo aproxima-se da flexibilidade real contínua do cabo. Um software para a animação gráfica foi construído especialmente para a visualização de resultados de simulações e estas animações mostraram uma ótima sensação de realidade física, atestando assim de forma qualitativa a modelagem dinâmica proposta.

Após esta etapa do acoplamento cabo-base móvel, um novo método para a modelagem dinâmica de sistemas de reboque de embarcações foi proposto, considerando que as embarcações e o cabo têm movimentos contidos no plano vertical. Além do movimento horizontal de todo o sistema, o rebocador e a embarcação rebocada também foram considerados movimentando-se verticalmente

devido ao movimento ondulatório na superfície do mar. Análises qualitativas dos resultados de simulações indicam um comportamento dinâmico bastante consistente com o que é fisicamente esperado. É importante explicar que muitas simulações foram realizadas assumindo diferentes tipos de cabo e os resultados permaneceram estáveis e com respostas dinâmicas esperadas fisicamente. Descobriu-se que a modelagem proposta é de fato genérica. Aplica-se a cabos muito flexíveis e também a cabos com baixa flexibilidade. O sistema dinâmico consiste em duas massas (rebocador e embarcação rebocada) conectadas às extremidades de um cabo. Os algoritmos genéricos propostos permitem que o modelo dinâmico seja gerado automaticamente, para qualquer número de elos na representação discreta da flexibilidade contínua do cabo. Isto é muito significativo porque as simulações são realistas, conforme demonstrado por animações gráficas.

As simulações que foram realizadas no problema de reboque de embarcações consideraram vinte elos e as animações gráficas mostraram um comportamento aproximadamente contínuo, em termos de sensação de realidade física, conforme ficou demonstrado a partir das animações gráficas. Outra contribuição original desta tese é o algoritmo para determinar a tensão dinâmica no cabo. O algoritmo detecta se o cabo está esticado ou não e calcula a tensão dinâmica nestas duas situações. Este algoritmo é aplicado aos dados provenientes das simulações e os resultados são muito consistentes fisicamente.

No último cenário foi proposta a modelagem dinâmica de uma estrutura flexível do tipo cabo, conectado a uma base móvel em uma extremidade e a uma carga terminal na outra extremidade. Toda a estrutura se movimenta no espaço tridimensional, inclusive a base móvel e a carga terminal. Este sistema dinâmico pode ser adaptado a diversas aplicações práticas, tais como reboque de embarcações no espaço 3D, ancoragem de plataformas flutuantes, drones movimentando cargas suportadas por cabos, etc. Nesta abordagem, a flexibilidade contínua do cabo é aproximada por uma equivalente discreta, considerando-se elos rígidos conectados por articulações fictícias esféricas, com elasticidade e atrito. À medida que se considera mais elos rígidos amplia-se a complexidade das equações do modelo, que aumentam muito de tamanho, inviabilizando o desenvolvimento analítico manual dos modelos dinâmicos. Foram desenvolvidos os modelos considerando dois, três e quatro elos e encontraram-se os padrões de crescimento das equações, fato que possibilitou o desenvolvimento de algoritmos genéricos para a determinação das matrizes e vetores dos modelos para um número qualquer de elos adotado na representação discreta da flexibilidade contínua. Utilizando-se o formalismo de Euler-Lagrange foi possível também desenvolver um Lagrangeano genérico, para um número n_e qualquer de elos. Simulações foram realizadas e resultados fisicamente esperados foram obtidos. Um software para mostrar os resultados na forma de animação computacional tridimensional

foi desenvolvido especialmente para auxiliar na interpretação dos resultados. A animação computacional permitiu concluir que o modelo dinâmico apresenta resultados de simulações com grande sensação de realidade física. Outra vantagem da modelagem dinâmica proposta é que se pode trabalhar tanto com a base móvel quanto com a carga terminal possuindo dinâmicas próprias, recebendo forças externas vindo de atuadores. Por exemplo, a base móvel pode ser uma embarcação de superfície e a carga terminal pode ser um veículo do tipo ROV, ou ainda, a base móvel pode ser um veículo aéreo do tipo drone e a carga terminal pode ser um objeto a ser transportado. Pode-se ainda citar um terceiro exemplo, no qual a base móvel poderia ser uma embarcação de superfície do tipo rebocador e a carga terminal poderia ser uma embarcação rebocada, ou vice-versa.

Apesar de ter a mesma origem discreta, o formalismo proposto não é igual à abordagem clássica de massa concentrada (*lumped mass*) e isso é importante destacar. Nesta tese o formalismo é o de Euler-Lagrange aplicado a uma cadeia poliarticulada de corpos rígidos. A abordagem discreta proposta no formalismo aproxima-se da verdadeira flexibilidade contínua ao aumentar-se o número de elos. Cada novo elo considerado aumenta a dinâmica do cabo em um grau de liberdade para os modelos inseridos no plano vertical e em dois graus de liberdade para o modelo tridimensional, fazendo com que suas equações cresçam consideravelmente em tamanho e complexidade. Todos os fenômenos da natureza possuem um determinado padrão de crescimento no seu desenvolvimento, por mais que muitos desses padrões ainda sejam desconhecidos pelo fato de não terem sido identificados devido às nossas limitações. Nos problemas dinâmicos estudados neste trabalho foi possível identificar esses padrões de crescimento, permitindo a proposição de algoritmos genéricos que geram automaticamente modelos dinâmicos para qualquer número de elos considerados na aproximação discreta da flexibilidade estrutural contínua, sendo esta mais uma importante contribuição da presente tese.

Em resumo, as principais vantagens do formalismo de modelagem proposto são: permite simulações muito realistas; é relativamente simples interagir com outras dinâmicas, como embarcações nas extremidades do cabo; os algoritmos genéricos permitem a determinação automática das matrizes e vetores do modelo dinâmico, para qualquer número de elos, permitindo uma boa aproximação entre a flexibilidade discreta do modelo com a estrutura física contínua.

A continuação da presente pesquisa será no sentido de aplicar a modelagem genérica tridimensional desenvolvida a diversas aplicações práticas específicas. Também como trabalho futuro, será implementado o reboque de embarcações no espaço 3D. Além disso, pretende-se como trabalho futuro, desenvolver uma lei de controle de velocidade para o rebocador, de tal forma que uma trajetória de referência é seguida impondo-se a condição de tensão mínima no cabo, com especial

atenção para realizar uma passagem suave do cabo não esticado até a condição esticado.

11. REFERÊNCIAS

- ANTUNES, E. B. **Modelagem e Simulação de Estruturas Flexíveis – Cabos e Placas**. Rio de Janeiro, RJ, 2010. 145 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), PUC-RJ – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- ASSIS, M. R. de, **Modelagem e Validação Experimental de uma Estrutura Flexível**. Dissertação de Mestrado, Universidade de Taubaté, 2012.
- BAMDAD, M., 2013. **Analytical dynamic solution of a flexible cable-suspended manipulator**. *Front Mech Eng*, 8(4), 350–359.
- BANERJEE, A.K; DO, V.N. **Deployment Control of a Cable Connecting a Ship to an Underwater Vehicle**. *Applied Mathematics and Computation*. 70:97-116 (1995).
- BENEDETTINI F, REGA G AND ALAGGIO R., 1995. **Non-linear oscillations of a four-degree-of-freedom model of a suspended cable under multiple internal resonance conditions**. *Journal of Sound and Vibration*, Apr; 182(5): 775-798.
- BI, G., ZHU, S., LIU, J., FANG, X., WANG, L., 2013. **Dynamic simulation and tension compensation research on subsea umbilical cable laying system**. *J Marine Sci Appl*, 12, 452–458, (2013). <http://dx.doi.org/10.1007/s11804-013-1216-8>.
- BUCKHAM B., NAHON M., SETO M. L. AND LAMBERT C., 2003. **Dynamics and control of a towed underwater vehicle system, part I: Model development**. *Ocean Engineering* 30(4):453-470.
- CAMPOS, J. M., **Um estudo sobre a modelagem dinâmica de cabos articulados a plataformas móveis**. Rio Grande, RS, 2016. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional), FURG – Universidade Federal do Rio Grande.
- CHANG, S.; PARK, J.; LEE, K. **Nonlinear Dynamic Analysis of Spatially Suspended Elastic Catenary Cable with Finite Element Method**. In: *KSCE Journal of Civil Engineering*, v. 12, no. 2, p. 121-128, March 2008.
- CORDOVÉS, D.C.S. **Análise de Confiabilidade Estrutural de Cabos Umbilicais**. São Paulo, 2008. 134 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia), Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

- DI MARZO, G. R. **Aplicação do Método dos Elementos Finitos na Análise de Tensões Induzidas em Cabos Umbilicais**. São Paulo, SP, 2010. 106 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia), Escola Politécnica da USP – Universidade de São Paulo.
- DU, X., CUIB H. AND ZHANG Z., 2019. **A numerical method for analyzing the influence of underwater vehicle flow field on dynamic behavior of towed sonar cable array**. Ocean Engineering 175, 163–175.
- EIDSVIK, O. A. N. AND SCHJØLBERG, I., 2018. **Finite element cable-model for Remotely Operated Vehicles (ROVs) by application of beam theory**. Ocean Engineering, 163, 322–336, (2018). <http://dx.doi.org/10.1016/j.oceaneng.2018.06.012>.
- FANG, Z., HE, Q., XIANG, B., XIAO, H., HE, K., DU, Y., 2012. **A finite element cable model and its applications based on the cubic spline curve**. China Ocean Engineering, 27(5), 683–692, (2013). <https://fr.art1lib.org/book/28233953/7c6104>.
- FAUST, A., PALUNKO, I., CRUZ, P., FIERRO, R. AND TAPIA, L. **Automated aerial suspended cargo delivery through reinforcement learning**, Artificial Intelligence, Volume 247, Pages 381-398, ISSN 0004-3702, (2017). <https://doi.org/10.1016/j.artint.2014.11.009>.
- GAO H. AND WANG Z., 2018. **Dynamic Behavior of Two Part Towing Cable System During Turning**. J. Shanghai Jiao Tong Univ. (Sci.), 23(3): 444-455.
- GOBAT, J. I.; GROSENBAUGH, M. A. **Application of the Generalized- α Method to the Time Integration of the Cable Dynamics Equations**. In: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 190, Issues 37-38, p. 4817-4829, June 2001.
- GOMES, S. C. P., OLIVEIRA, V. S. AND MENEZES, G. M., 2020. **Dynamic modeling of cables with external forces applied to the terminal load**. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, v. 42, p. 472, (2020). <https://doi.org/10.1007/s40430-020-02559-0>.
- GOMES, S. C. P., ZANELA, E. B. AND PEREIRA, A. E. L., 2016. **Automatic generation of dynamic models of cables**. Ocean Engineering, Volume 121, Pages 559-571, ISSN 0029-8018, (2016). <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2016.05.041>.
- GOMES, S. C. P; ZANELA, E. B.; PEREIRA, A. E. L. **Automatic Generation of Dinamic Models of**

- Cables.** In: Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 121, p. 559-571, 2016.
- GOMES, S. S. AND GOMES, S. C. P., 2016. **A new dynamic model of towing cables.** Ocean Engineering, Volume 220, 107653, ISSN 0029-8018, (2021). <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2020.107653>.
- GONZÁLEZ, F., DE LA PRADA, A., LUACES, A., GONZÁLEZ, M., 2017. **Real-time simulation of cable pay-out and reel-in with towed fishing gears.** Ocean Engineering, 131, 295-307.
- GOODARZI, R., KORAYEM, M.H., TOURAJIZADEH, H., *et al.* **Nonlinear dynamic modeling of a mobile spatial cable-driven robot with flexible cables.** Nonlinear Dyn (2022). <https://doi.org/10.1007/s11071-022-07397-4>.
- GROSENBAUGH, M. A.; HOWELL, C. T.; MOXNES, S. **Simulating the Dynamics of Underwater Vehicles with Low-tension Tethers.** In: International Journal of Offshore and Polar Engineering, v. 3, no. 3, ISSN 1053-5381, September 1993.
- GUO, T., KANG, H., WANG, L. AND ZHAO, Y., 2016. **Cable dynamics under non-ideal support excitations: Nonlinear dynamic interactions and asymptotic modelling.** Journal of Sound and Vibration 384, 253–272.
- GUO, A.; XU, Y.; LI, H. **Dynamic Performance of Cable-stayed Bridge Tower with Multi-stage Pendulum Mass Damper Underwind Excitations – I: Theory.** In: Earthquake Engineering and Engineering Vibration, v. 6, Issue 3, p. 295-306, September 2007.
- ISOLDI, L. A. **Análise Numérica da Dinâmica de Cabos Altamente Extensíveis.** Rio Grande, RS, 2002. 143 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Oceânica), FURG – Universidade Federal do Rio Grande.
- JAFARI, M., HOU, F. AND ABDELKEFI, A. **Wind-induced vibration of structural cables.** Nonlinear Dyn 100, 351–421 (2020). <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05541-6>.
- LIU, Y.; QIAN, Z.; XIA, K.; **Mechanical Response of Transmission Lines Based on Sliding Cable Element.** In: J. Cent. South Univ., v. 21, p. 3370-3377, August 2013.
- LUONGO, A.; ZULLI, D.; PICCARDO, G. **Analytical and Numerical Approaches to Nonlinear Galloping of Internally-resonant Suspended Cables.** In: Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 315(3), p. 375-393, 2008.

- LAGARIAS, J. C., REEDS, J. A., WRIGHT, M. H. WRIGHT, P. E., **Convergence properties of the Nelder-Mead simplex method in low dimensions**. SIAM Journal on Optimization, Vol 9, 1, 112-147, 1998.
- LIU, Y., QIAN, Z., XIA, K., 2013. **Mechanical response of transmission lines based on sliding cable element**. Journal of Central South University, 21, 3370–3377.
- MACHADO, C. C., **Modelagem Matemática e Controle Ativo de um Manipulador com um Elo Flexível**. Tese de Doutorado, Universidade Federal do rio Grande do Sul (UFRGS), 2007.
- MACHADO, C. C.; PEREIRA, A. E. L.; GOMES, S. C. P.; DE BORTOLI, A. L. **Um Novo Algoritmo para a Modelagem Dinâmica de Manipuladores Flexíveis**. In: Revista Controle e Automação, v. 13, p. 134-140, 2002.
- MARZO, G.R. **Aplicação do Método dos Elementos Finitos na Análise de Tensões Induzidas em Cabos Umbilicais**. São Paulo, 2010. 106 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia), Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- MASCIOLA, M. D., NAHON, M., DRISCOLL, F. R., 2012. **Static analysis of the lumped mass cable model using a shooting algorithm**. J Waterway, Port, Coastal, Ocean Engineering, 138(2), 164–171.
- NAHON, M. **Dynamics and Control of a Novel Radio Telescope Antenna**. In: The American Institute of Aeronautics and Astronautics, AIAA-99-4120, p. 214-222, 1999.
- NASCIMENTO, C. A. M. **Modelagem Numérica de Vibrações em Cabos de Transmissão de Energia Elétrica**. Brasília, DF, 2011. 71 p. Monografia (Graduação em Engenharia Mecânica), UnB – Universidade de Brasília.
- OLIVEIRA, V. S., **Algoritmos Genéricos para a Geração de Modelos Dinâmicos de Cabos Umbilicais de Veículos Subaquáticos**. Rio Grande, RS, 2015. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional), FURG – Universidade Federal do Rio Grande.
- OMURTAG, A.; LYTTON, W. W. **Spectral Method and High-order Finite Differences for the Nonlinear Cable Equation**. In: Neural Comput., v. 22(8), p. 2113-2136, August 2010.
- PARK J. AND KIM N., 2015. **Dynamics modeling of a semi-submersible autonomous underwater vehicle with a towfish towed by a cable**. Int. J. Nav. Archit. Ocean Eng. 7:409–425.

- PATHOTE, P. **Efficient Mathematical Model for Prestressing Cables and Its Implementation in Computer Analysis**. In: IOSR Journal of Mathematics (IOSR- JM), e-ISSN: 2278-5728, p-ISSN: 2319-765X, v. 10, Issue 3, Ver. V, p. 32-38, May-June 2014
- PENG, J., XU, W., YANG, T., *et al.* **Dynamic modeling and trajectory tracking control method of segmented linkage cable-driven hyper-redundant robot**. *Nonlinear Dyn* 101, 233–253 (2020). <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05764-7>.
- PEREIRA, A. E. L. **Um Estudo sobre Modelagem Matemática de Estruturas Flexíveis**. Porto Alegre, RS, 1999. 144 p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada), UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- PEREIRA, A. E. L. **O Método da Decomposição de Adomian Aplicado à Interação Fluido-estrutura de um Cabo**. Porto Alegre, RS, 2010. 178 p. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada), UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- POUZADA, T. A., **Algoritmos Genéricos para a Geração Automática de Modelos de Cabos em Três Situações Práticas de Aplicações Subaquáticas**. Rio Grande, RS, 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia Oceânica), FURG – Universidade Federal do Rio Grande.
- ROCHINHA, A; SAMPAIO, R; LE TALLEC, P. **O Método do Lagrangeano Aumentado no Estudo de Cabos Umbilicais**. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*. Vol. 6,1, 97-108 (1990).
- SANTOS, L. R. **Modelagem Não-linear da Dinâmica de Cabos Submarinos**. Rio de Janeiro, RJ, 2007. 100 p. Tese (Doutorado em Ciências em Engenharia Mecânica), COPPE-UFRJ – Coordenação dos Programas de Pós-Graduação em Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- SRIVASTAVA V. **Analyzing parabolic profile path for underwater towed-cable**. *Journal of Marine Science and Application*, 2014, Vol.13(2), pp.185-192.
- SRIVASTAVA, V. K.; YVSS, S.; TAMSIR, M. **Dynamic Behavior of Underwater Towed-cable in Linear Profile**. 2011. In: *International Journal of Scientific & Engineering Research*, v. 2, Issue 7, ISSN 2229-5518, July 2011.
- SUN H., CHEN G. AND LIN W., 2019. **A hydrodynamic model of bridle towed system**. *Journal of*

Marine Science and Technology, 24:200–207.

SUN H., LI, G. AND CHEN G. **Dynamic model of cable tension and configuration for vessel at anchor.** Journal of Marine Science and Technology, 26, 1144–1152 (2021). <https://doi.org/10.1007/s00773-021-00802-4>.

SUN F. J., ZHU Z. H. AND LAROSA M., 2011. **Dynamic modeling of cable towed body using nodal position finite element method.** Ocean Engineering, 38, 529-540.

VAZ, M. A.; PATEL, M. H. **Transient Behaviour of Towed Marine Cables in Two Dimensions.** In: Applied Ocean Research, Elsevier, v. 17(1995), p. 143-153, August 1995.

VAZ, M.A; PATEL, M.H. **Three-Dimensional Behaviour of Elastic Marine Cables in Sheared Currents.** Applied Ocean Research. Vol. 22, Issue 1, p. 45-53, February 2000.

VU, M. T., CHOIA, H., KANGB, J., JIA D. H. AND JEONGA, S. K., 2017. **A study on hovering motion of the underwater vehicle with umbilical cable.** Ocean Engineering 135, 137–157.

WANG, PH, FUNG, RF, LEE, MJ. **Finite element analysis of a three-dimensional underwater cable with time-dependent length:** 1998. J. Sound Vib. 209 (2), 223–249.

WANG, F, HUANG, G, DENG, D. **Steady state analysis of towed marine cables:** 2008 J. Shanghai Jiaotong Univ. Sci. 13 (2), 239–244

WANG, Z. AND SUN, G., 2015. **Parameters influence on maneuvered towed cable system dynamics.** Applied Ocean Research 49:27-41.

YUAN Z., JIN L., CHI W. AND TIAN H., 2014. **Finite difference method for solving the nonlinear dynamic equation of underwater towed system.** International Journal of Computational Methods, Vol. 11, No. 04.

ZANELA, E. B. **Modelagem Analítica de Estruturas do Tipo Cabo para Aplicações Subaquáticas.** Rio Grande, RS, 2013. 147 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Oceânica), FURG – Universidade Federal do Rio Grande.

ZHAO, W.; CHEN, L.; JEAN, W. Z. **A Finite Difference Method for Simulating Transverse Vibrations of an Axially Moving Viscoelastic String.** In: Applied Mathematics and Mechanics (English Edition),

Editorial Committee of Appl. Math. Mech., ISSN 0253-4827, 27(1), p. 23-28, September 2005.

ZHU, X. AND YOO, W. S., 2017. **Suggested new element reference frame for dynamic analysis.** Nonlinear Dyn, 87:489–501.

ANEXO 1

Publicação

Parte do trabalho contido na presente tese já foi publicado na revista internacional Ocean Engineering, ISSN: 0029-8018, conforme encontrado em <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2020.107653>.

Esta revista é A1 no QUALIS, conforme indicado a seguir:

Título:

☒ Ocean Engineering

Classificação:

☐ -- SELECIONE --

Consultar

Cancelar

Periódicos

ISSN	Título	Área de Avaliação	Classificação
0029-8018	OCEAN ENGINEERING	ENGENHARIAS I	A1

« Início « Anterior 1 » Próxima » Fim »

1 a 1 de 1 registro(s)

APÊNDICE 1

As matrizes simétricas de inércia e os vetores Coriolis-centrífgos descritos a seguir foram gerados no desenvolvimento do formalismo de modelagem proposto no capítulo nove da presente tese.

Apêndice 1.1.

Elementos da matriz simétrica de inércia I quando o cabo é aproximado por dois elos:

2 elos: $I_{7 \times 7}(\vec{q})$

$$I_{11} = M + m_1 + m_2 + m_c$$

$$I_{12} = 0$$

$$I_{13} = 0$$

$$I_{14} = \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_c\right) l_1 \cos \theta_{e1} \sin \theta_{a1}$$

$$I_{15} = \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_2 \cos \theta_{e2} \sin(\theta_{a1} + \theta_{a2})$$

$$I_{16} = \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_c\right) l_1 \sin \theta_{e1} \cos \theta_{a1} + \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_2 \sin \theta_{e2} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2})$$

$$I_{17} = \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_2 \sin \theta_{e2} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2})$$

$$I_{22} = M + m_1 + m_2 + m_c$$

$$I_{23} = 0$$

$$I_{24} = \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_c\right) l_1 \cos \theta_{e1} \cos \theta_{a1}$$

$$I_{25} = \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_2 \cos \theta_{e2} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2})$$

$$I_{26} = -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_c\right) l_1 \sin \theta_{e1} \sin \theta_{a1} - \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_2 \sin \theta_{e2} \sin(\theta_{a1} + \theta_{a2})$$

$$I_{27} = -\left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_2 \sin \theta_{e2} \sin(\theta_{a1} + \theta_{a2})$$

$$I_{33} = M + m_1 + m_2 + m_c$$

$$I_{34} = -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_c\right) l_1 \sin \theta_{e1}$$

$$I_{35} = -\left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_2 \sin \theta_{e2}$$

$$I_{36} = 0$$

$$I_{37} = 0$$

$$I_{44} = Ir_{e1} + \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_c\right) l_1^2$$

$$I_{45} = \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_1 l_2 (\cos\theta_{e1} \cos\theta_{e2} \cos\theta_{a2} + \sin\theta_{e1} \sin\theta_{e2})$$

$$I_{46} = -\left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_1 l_2 \cos\theta_{e1} \sin\theta_{e2} \sin\theta_{a2}$$

$$I_{47} = -\left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_1 l_2 \cos\theta_{e1} \sin\theta_{e2} \sin\theta_{a2}$$

$$I_{55} = Ir_{e2} + \left(\frac{m_2}{4} + m_c\right) l_2^2$$

$$I_{56} = \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_2 l_1 \cos\theta_{e2} \sin\theta_{e1} \sin\theta_{a2}$$

$$I_{57} = 0$$

$$I_{66} = Ir_{a1} + \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_c\right) l_1^2 \sin^2\theta_{e1} + \left(\frac{m_2}{4} + m_c\right) l_2^2 \sin^2\theta_{e2} \\ + (m_2 + 2m_c) l_1 l_2 \sin\theta_{e1} \sin\theta_{e2} \cos\theta_{a2}$$

$$I_{67} = \left(\frac{m_2}{4} + m_c\right) l_2^2 \sin^2\theta_{e2} + \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_1 l_2 \sin\theta_{e1} \sin\theta_{e2} \cos\theta_{a2}$$

$$I_{77} = Ir_{a2} + \left(\frac{m_2}{4} + m_c\right) l_2^2 \sin^2\theta_{e2}$$

Elementos da matriz simétrica de inércia I quando o cabo é aproximado por três elos:

3 elos: $I_{9 \times 9}(\vec{q})$

$$I_{11} = M + m_1 + m_2 + m_3 + m_c$$

$$I_{12} = 0$$

$$I_{13} = 0$$

$$I_{14} = \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_c\right) l_1 \cos\theta_{e1} \sin\theta_{a1}$$

$$I_{15} = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_2 \cos\theta_{e2} \sin(\theta_{a1} + \theta_{a2})$$

$$I_{16} = \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_3 \cos\theta_{e3} \sin(\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3})$$

$$I_{17} = \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_c\right) l_1 \sin\theta_{e1} \cos\theta_{a1} + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_2 \sin\theta_{e2} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2}) \\ + \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_3 \sin\theta_{e3} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3})$$

$$I_{18} = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_2 \sin\theta_{e2} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2}) + \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_3 \sin\theta_{e3} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3})$$

$$I_{19} = \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_3 \sin\theta_{e3} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3})$$

$$I_{22} = M + m_1 + m_2 + m_3 + m_c$$

$$I_{23} = 0$$

$$I_{24} = \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_c\right) l_1 \cos \theta_{e1} \cos \theta_{a1}$$

$$I_{25} = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_2 \cos \theta_{e2} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2})$$

$$I_{26} = \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_3 \cos \theta_{e3} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3})$$

$$I_{27} = -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_c\right) l_1 \sin \theta_{e1} \sin \theta_{a1} - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_2 \sin \theta_{e2} \sin(\theta_{a1} + \theta_{a2}) \\ - \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_3 \sin \theta_{e3} \sin(\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3})$$

$$I_{28} = -\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_2 \sin \theta_{e2} \sin(\theta_{a1} + \theta_{a2}) - \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_3 \sin \theta_{e3} \sin(\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3})$$

$$I_{29} = -\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_3 \sin \theta_{e3} \sin(\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3})$$

$$I_{33} = M + m_1 + m_2 + m_3 + m_c$$

$$I_{34} = -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_c\right) l_1 \sin \theta_{e1}$$

$$I_{35} = -\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_2 \sin \theta_{e2}$$

$$I_{36} = -\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_3 \sin \theta_{e3}$$

$$I_{37} = 0$$

$$I_{38} = 0$$

$$I_{39} = 0$$

$$I_{44} = I r_{e1} + \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_c\right) l_1^2$$

$$I_{45} = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_1 l_2 (\cos \theta_{e1} \cos \theta_{e2} \cos \theta_{a2} + \sin \theta_{e1} \sin \theta_{e2})$$

$$I_{46} = \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_1 l_3 [\cos \theta_{e1} \cos \theta_{e3} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3}) + \sin \theta_{e1} \sin \theta_{e3}]$$

$$I_{47} = -\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_1 l_2 \cos \theta_{e1} \sin \theta_{e2} \sin \theta_{a2} \\ - \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_1 l_3 \cos \theta_{e1} \sin \theta_{e3} \sin(\theta_{a2} + \theta_{a3})$$

$$I_{48} = -\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_1 l_2 \cos \theta_{e1} \sin \theta_{e2} \sin \theta_{a2} \\ - \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_1 l_3 \cos \theta_{e1} \sin \theta_{e3} \sin(\theta_{a2} + \theta_{a3})$$

$$I_{49} = -\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_1 l_3 \cos \theta_{e1} \sin \theta_{e3} \sin(\theta_{a2} + \theta_{a3})$$

$$\begin{aligned}
I_{55} &= Ir_{e2} + \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c\right) l_2^2 \\
I_{56} &= \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_2 l_3 (\cos\theta_{e2} \cos\theta_{e3} \cos\theta_{a3} + \sin\theta_{e2} \sin\theta_{e3}) \\
I_{57} &= \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_2 l_1 \cos\theta_{e2} \sin\theta_{e1} \sin\theta_{a2} - \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_2 l_3 \cos\theta_{e2} \sin\theta_{e3} \sin\theta_{a3} \\
I_{58} &= -\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_2 l_3 \cos\theta_{e2} \sin\theta_{e3} \sin\theta_{a3} \\
I_{59} &= -\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_2 l_3 \cos\theta_{e2} \sin\theta_{e3} \sin\theta_{a3} \\
I_{66} &= Ir_{e3} + \left(\frac{m_3}{4} + m_c\right) l_3^2 \\
I_{67} &= \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_3 l_1 \cos\theta_{e3} \sin\theta_{e1} \sin(\theta_{a2} + \theta_{a3}) + \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_3 l_2 \cos\theta_{e3} \sin\theta_{e2} \sin\theta_{a3} \\
I_{68} &= \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_3 l_2 \cos\theta_{e3} \sin\theta_{e2} \sin\theta_{a3} \\
I_{69} &= 0 \\
I_{77} &= Ir_{a1} + \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_c\right) l_1^2 \sin^2\theta_{e1} + \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c\right) l_2^2 \sin^2\theta_{e2} \\
&\quad + \left(\frac{m_3}{4} + m_c\right) l_3^2 \sin^2\theta_{e3} + (m_2 + 2m_3 + 2m_c) l_1 l_2 \sin\theta_{e1} \sin\theta_{e2} \cos\theta_{a2} \\
&\quad + (m_3 + 2m_c) l_1 l_3 \sin\theta_{e1} \sin\theta_{e3} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3}) \\
&\quad + (m_3 + 2m_c) l_2 l_3 \sin\theta_{e2} \sin\theta_{e3} \cos\theta_{a3} \\
I_{78} &= \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c\right) l_2^2 \sin^2\theta_{e2} + \left(\frac{m_3}{4} + m_c\right) l_3^2 \sin^2\theta_{e3} \\
&\quad + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_1 l_2 \sin\theta_{e1} \sin\theta_{e2} \cos\theta_{a2} \\
&\quad + \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_1 l_3 \sin\theta_{e1} \sin\theta_{e3} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3}) \\
&\quad + (m_3 + 2m_c) l_2 l_3 \sin\theta_{e2} \sin\theta_{e3} \cos\theta_{a3} \\
I_{79} &= \left(\frac{m_3}{4} + m_c\right) l_3^2 \sin^2\theta_{e3} + \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_1 l_3 \sin\theta_{e1} \sin\theta_{e3} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3}) \\
&\quad + \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_2 l_3 \sin\theta_{e2} \sin\theta_{e3} \cos\theta_{a3} \\
I_{88} &= Ir_{a2} + \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c\right) l_2^2 \sin^2\theta_{e2} + \left(\frac{m_3}{4} + m_c\right) l_3^2 \sin^2\theta_{e3} \\
&\quad + (m_3 + 2m_c) l_2 l_3 \sin\theta_{e2} \sin\theta_{e3} \cos\theta_{a3} \\
I_{89} &= \left(\frac{m_3}{4} + m_c\right) l_3^2 \sin^2\theta_{e3} + \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_2 l_3 \sin\theta_{e2} \sin\theta_{e3} \cos\theta_{a3} \\
I_{99} &= Ir_{a3} + \left(\frac{m_3}{4} + m_c\right) l_3^2 \sin^2\theta_{e3}
\end{aligned}$$

Elementos da matriz simétrica de inércia I quando o cabo é aproximado por quatro elos:

4 elos: $I_{11 \times 11}(\vec{r})$

$$I_{11} = M + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_c$$

$$I_{12} = 0$$

$$I_{13} = 0$$

$$I_{14} = \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c\right) l_1 \cos \theta_{e1} \sin \theta_{a1}$$

$$I_{15} = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_2 \cos \theta_{e2} \sin(\theta_{a1} + \theta_{a2})$$

$$I_{16} = \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_3 \cos \theta_{e3} \sin(\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3})$$

$$I_{17} = \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_4 \cos \theta_{e4} \sin(\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4})$$

$$\begin{aligned} I_{18} = & \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c\right) l_1 \sin \theta_{e1} \cos \theta_{a1} \\ & + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_2 \sin \theta_{e2} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2}) \\ & + \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_3 \sin \theta_{e3} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3}) \\ & + \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_4 \sin \theta_{e4} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{19} = & \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_2 \sin \theta_{e2} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2}) \\ & + \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_3 \sin \theta_{e3} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3}) \\ & + \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_4 \sin \theta_{e4} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{110} = & \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_3 \sin \theta_{e3} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3}) \\ & + \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_4 \sin \theta_{e4} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4}) \end{aligned}$$

$$I_{111} = \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_4 \sin \theta_{e4} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4})$$

$$I_{22} = M + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_c$$

$$I_{23} = 0$$

$$I_{24} = \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c\right) l_1 \cos \theta_{e1} \cos \theta_{a1}$$

$$I_{25} = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_2 \cos \theta_{e2} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2})$$

$$I_{26} = \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_3 \cos \theta_{e3} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3})$$

$$I_{27} = \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_4 \cos \theta_{e4} \cos (\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4})$$

$$\begin{aligned} I_{28} = & -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c\right) l_1 \sin \theta_{e1} \sin \theta_{a1} \\ & -\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_2 \sin \theta_{e2} \sin (\theta_{a1} + \theta_{a2}) \\ & -\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_3 \sin \theta_{e3} \sin (\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3}) \\ & -\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_4 \sin \theta_{e4} \sin (\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{29} = & -\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_2 \sin \theta_{e2} \sin (\theta_{a1} + \theta_{a2}) \\ & -\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_3 \sin \theta_{e3} \sin (\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3}) \\ & -\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_4 \sin \theta_{e4} \sin (\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{210} = & -\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_3 \sin \theta_{e3} \sin (\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3}) \\ & -\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_4 \sin \theta_{e4} \sin (\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4}) \end{aligned}$$

$$I_{211} = -\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_4 \sin \theta_{e4} \sin (\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4})$$

$$I_{33} = M + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_c$$

$$I_{34} = -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c\right) l_1 \sin \theta_{e1}$$

$$I_{35} = -\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_2 \sin \theta_{e2}$$

$$I_{36} = -\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_3 \sin \theta_{e3}$$

$$I_{37} = -\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_4 \sin \theta_{e4}$$

$$I_{38} = 0$$

$$I_{39} = 0$$

$$I_{310} = 0$$

$$I_{311} = 0$$

$$I_{44} = I r_{e1} + \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c\right) l_1^2$$

$$I_{45} = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_1 l_2 (\cos \theta_{e1} \cos \theta_{e2} \cos \theta_{a2} + \sin \theta_{e1} \sin \theta_{e2})$$

$$I_{46} = \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_1 l_3 [\cos \theta_{e1} \cos \theta_{e3} \cos (\theta_{a2} + \theta_{a3}) + \sin \theta_{e1} \sin \theta_{e3}]$$

$$I_{47} = \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_1 l_4 [\cos\theta_{e1} \cos\theta_{e4} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4}) + \sin\theta_{e1} \sin\theta_{e4}]$$

$$I_{48} = -\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_1 l_2 \cos\theta_{e1} \sin\theta_{e2} \sin\theta_{a2} \\ - \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_1 l_3 \cos\theta_{e1} \sin\theta_{e3} \sin(\theta_{a2} + \theta_{a3}) \\ - \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_1 l_4 \cos\theta_{e1} \sin\theta_{e4} \sin(\theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4})$$

$$I_{49} = -\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_1 l_2 \cos\theta_{e1} \sin\theta_{e2} \sin\theta_{a2} \\ - \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_1 l_3 \cos\theta_{e1} \sin\theta_{e3} \sin(\theta_{a2} + \theta_{a3}) \\ - \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_1 l_4 \cos\theta_{e1} \sin\theta_{e4} \sin(\theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4})$$

$$I_{410} = -\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_1 l_3 \cos\theta_{e1} \sin\theta_{e3} \sin(\theta_{a2} + \theta_{a3}) \\ - \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_1 l_4 \cos\theta_{e1} \sin\theta_{e4} \sin(\theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4})$$

$$I_{411} = -\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_1 l_4 \cos\theta_{e1} \sin\theta_{e4} \sin(\theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4})$$

$$I_{55} = Ir_{e2} + \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_2^2$$

$$I_{56} = \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_2 l_3 (\cos\theta_{e2} \cos\theta_{e3} \cos\theta_{a3} + \sin\theta_{e2} \sin\theta_{e3})$$

$$I_{57} = \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_2 l_4 [\cos\theta_{e2} \cos\theta_{e4} \cos(\theta_{a3} + \theta_{a4}) + \sin\theta_{e2} \sin\theta_{e4}]$$

$$I_{58} = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_2 l_1 \cos\theta_{e2} \sin\theta_{e1} \sin\theta_{a2} \\ - \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_2 l_3 \cos\theta_{e2} \sin\theta_{e3} \sin\theta_{a3} \\ - \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_2 l_4 \cos\theta_{e2} \sin\theta_{e4} \sin(\theta_{a3} + \theta_{a4})$$

$$I_{59} = -\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_2 l_3 \cos\theta_{e2} \sin\theta_{e3} \sin\theta_{a3} \\ - \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_2 l_4 \cos\theta_{e2} \sin\theta_{e4} \sin(\theta_{a3} + \theta_{a4})$$

$$I_{510} = -\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_2 l_3 \cos\theta_{e2} \sin\theta_{e3} \sin\theta_{a3} \\ - \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_2 l_4 \cos\theta_{e2} \sin\theta_{e4} \sin(\theta_{a3} + \theta_{a4})$$

$$I_{511} = -\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_2 l_4 \cos\theta_{e2} \sin\theta_{e4} \sin(\theta_{a3} + \theta_{a4})$$

$$I_{66} = Ir_{e3} + \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c\right) l_3^2$$

$$I_{67} = \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_3 l_4 (\cos\theta_{e3} \cos\theta_{e4} \cos\theta_{a4} + \sin\theta_{e3} \sin\theta_{e4})$$

$$I_{68} = \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_3 l_1 \cos\theta_{e3} \sin\theta_{e1} \sin(\theta_{a2} + \theta_{a3}) \\ + \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_3 l_2 \cos\theta_{e3} \sin\theta_{e2} \sin\theta_{a3} \\ - \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_3 l_4 \cos\theta_{e3} \sin\theta_{e4} \sin\theta_{a4}$$

$$I_{69} = \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_3 l_2 \cos\theta_{e3} \sin\theta_{e2} \sin\theta_{a3} - \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_3 l_4 \cos\theta_{e3} \sin\theta_{e4} \sin\theta_{a4}$$

$$I_{610} = -\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_3 l_4 \cos\theta_{e3} \sin\theta_{e4} \sin\theta_{a4}$$

$$I_{611} = -\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_3 l_4 \cos\theta_{e3} \sin\theta_{e4} \sin\theta_{a4}$$

$$I_{77} = Ir_{e4} + \left(\frac{m_4}{4} + m_c\right) l_4^2$$

$$I_{78} = \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_4 l_1 \cos\theta_{e4} \sin\theta_{e1} \sin(\theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4}) \\ + \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_4 l_2 \cos\theta_{e4} \sin\theta_{e2} \sin(\theta_{a3} + \theta_{a4}) \\ + \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_4 l_3 \cos\theta_{e4} \sin\theta_{e3} \sin\theta_{a4}$$

$$I_{79} = \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_4 l_2 \cos\theta_{e4} \sin\theta_{e2} \sin(\theta_{a3} + \theta_{a4}) + \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_4 l_3 \cos\theta_{e4} \sin\theta_{e3} \sin\theta_{a4}$$

$$I_{710} = \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_4 l_3 \cos\theta_{e4} \sin\theta_{e3} \sin\theta_{a4}$$

$$I_{711} = 0$$

$$I_{88} = Ir_{a1} + \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c\right) l_1^2 \sin^2\theta_{e1} + \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_2^2 \sin^2\theta_{e2} \\ + \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c\right) l_3^2 \sin^2\theta_{e3} + \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_4^2 \sin^2\theta_{e4} \\ + (m_2 + 2m_3 + 2m_4 + 2m_c) l_1 l_2 \sin\theta_{e1} \sin\theta_{e2} \cos\theta_{a2} \\ + (m_3 + 2m_4 + 2m_c) l_1 l_3 \sin\theta_{e1} \sin\theta_{e3} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3}) \\ + (m_4 + 2m_c) l_1 l_4 \sin\theta_{e1} \sin\theta_{e4} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4}) \\ + (m_3 + 2m_4 + 2m_c) l_2 l_3 \sin\theta_{e2} \sin\theta_{e3} \cos\theta_{a3} \\ + (m_4 + 2m_c) l_2 l_4 \sin\theta_{e2} \sin\theta_{e4} \cos(\theta_{a3} + \theta_{a4}) \\ + (m_4 + 2m_c) l_3 l_4 \sin\theta_{e3} \sin\theta_{e4} \cos\theta_{a4}$$

$$\begin{aligned}
I_{89} = & \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_2^2 \sin^2 \theta_{e2} + \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c\right) l_3^2 \sin^2 \theta_{e3} + \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_4^2 \sin^2 \theta_{e4} \\
& + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_1 l_2 \sin \theta_{e1} \sin \theta_{e2} \cos \theta_{a2} \\
& + \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_1 l_3 \sin \theta_{e1} \sin \theta_{e3} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3}) \\
& + \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_1 l_4 \sin \theta_{e1} \sin \theta_{e4} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4}) \\
& + (m_3 + 2m_4 + 2m_c) l_2 l_3 \sin \theta_{e2} \sin \theta_{e3} \cos \theta_{a3} \\
& + (m_4 + 2m_c) l_2 l_4 \sin \theta_{e2} \sin \theta_{e4} \cos(\theta_{a3} + \theta_{a4}) \\
& + (m_4 + 2m_c) l_3 l_4 \sin \theta_{e3} \sin \theta_{e4} \cos \theta_{a4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{810} = & \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c\right) l_3^2 \sin^2 \theta_{e3} + \left(\frac{m_4}{4} + m_c\right) l_4^2 \sin^2 \theta_{e4} \\
& + \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_1 l_3 \sin \theta_{e1} \sin \theta_{e3} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3}) \\
& + \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_1 l_4 \sin \theta_{e1} \sin \theta_{e4} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4}) \\
& + \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_2 l_3 \sin \theta_{e2} \sin \theta_{e3} \cos \theta_{a3} \\
& + \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_2 l_4 \sin \theta_{e2} \sin \theta_{e4} \cos(\theta_{a3} + \theta_{a4}) \\
& + (m_4 + 2m_c) l_3 l_4 \sin \theta_{e3} \sin \theta_{e4} \cos \theta_{a4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{811} = & \left(\frac{m_4}{4} + m_c\right) l_4^2 \sin^2 \theta_{e4} + \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_1 l_4 \sin \theta_{e1} \sin \theta_{e4} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4}) \\
& + \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_2 l_4 \sin \theta_{e2} \sin \theta_{e4} \cos(\theta_{a3} + \theta_{a4}) \\
& + \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_3 l_4 \sin \theta_{e3} \sin \theta_{e4} \cos \theta_{a4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{99} = & I_{r_{a2}} + \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_2^2 \sin^2 \theta_{e2} + \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c\right) l_3^2 \sin^2 \theta_{e3} \\
& + \left(\frac{m_4}{4} + m_c\right) l_4^2 \sin^2 \theta_{e4} + (m_3 + 2m_4 + 2m_c) l_2 l_3 \sin \theta_{e2} \sin \theta_{e3} \cos \theta_{a3} \\
& + (m_4 + 2m_c) l_2 l_4 \sin \theta_{e2} \sin \theta_{e4} \cos(\theta_{a3} + \theta_{a4}) \\
& + (m_4 + 2m_c) l_3 l_4 \sin \theta_{e3} \sin \theta_{e4} \cos \theta_{a4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{910} = & \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c\right) l_3^2 \sin^2 \theta_{e3} + \left(\frac{m_4}{4} + m_c\right) l_4^2 \sin^2 \theta_{e4} \\
& + \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_2 l_3 \sin \theta_{e2} \sin \theta_{e3} \cos \theta_{a3} \\
& + \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_2 l_4 \sin \theta_{e2} \sin \theta_{e4} \cos(\theta_{a3} + \theta_{a4}) \\
& + (m_4 + 2m_c) l_3 l_4 \sin \theta_{e3} \sin \theta_{e4} \cos \theta_{a4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{911} &= \left(\frac{m_4}{4} + m_c\right) l_4^2 \sin^2 \theta_{e4} + \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_2 l_4 \sin \theta_{e2} \sin \theta_{e4} \cos(\theta_{a3} + \theta_{a4}) \\
&\quad + \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_3 l_4 \sin \theta_{e3} \sin \theta_{e4} \cos \theta_{a4} \\
I_{1010} &= I r_{a3} + \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c\right) l_3^2 \sin^2 \theta_{e3} + \left(\frac{m_4}{4} + m_c\right) l_4^2 \sin^2 \theta_{e4} \\
&\quad + (m_4 + 2m_c) l_3 l_4 \sin \theta_{e3} \sin \theta_{e4} \cos \theta_{a4} \\
I_{1011} &= \left(\frac{m_4}{4} + m_c\right) l_4^2 \sin^2 \theta_{e4} + \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_3 l_4 \sin \theta_{e3} \sin \theta_{e4} \cos \theta_{a4} \\
I_{1111} &= I r_{a4} + \left(\frac{m_4}{4} + m_c\right) l_4^2 \sin^2 \theta_{e4}
\end{aligned}$$

Apêndice 1.2.

Elementos do vetor Coriolis-centrífugo $\vec{F}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ quando o cabo é aproximado por dois elos:

2 elos: $\vec{F}_{7x1}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$

$$\begin{aligned}
f_1 &= -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_c\right) l_1 \sin \theta_{e1} \sin \theta_{a1} \dot{\theta}_{e1}^2 - \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_c\right) l_1 \sin \theta_{e1} \sin \theta_{a1} \dot{\theta}_{a1}^2 \\
&\quad - \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_2 \sin \theta_{e2} \sin(\theta_{a1} + \theta_{a2}) \dot{\theta}_{e2}^2 \\
&\quad - \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_2 \sin \theta_{e2} \sin(\theta_{a1} + \theta_{a2}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2})^2 \\
&\quad + (m_1 + 2m_2 + 2m_c) l_1 \cos \theta_{e1} \cos \theta_{a1} \dot{\theta}_{e1} \dot{\theta}_{a1} \\
&\quad + (m_2 + 2m_c) l_2 \cos \theta_{e2} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2}) \dot{\theta}_{e2} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \\
f_2 &= -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_c\right) l_1 \sin \theta_{e1} \cos \theta_{a1} \dot{\theta}_{e1}^2 - \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_c\right) l_1 \sin \theta_{e1} \cos \theta_{a1} \dot{\theta}_{a1}^2 \\
&\quad - \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_2 \sin \theta_{e2} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2}) \dot{\theta}_{e2}^2 \\
&\quad - \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_2 \sin \theta_{e2} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2})^2 \\
&\quad - (m_1 + 2m_2 + 2m_c) l_1 \cos \theta_{e1} \sin \theta_{a1} \dot{\theta}_{e1} \dot{\theta}_{a1} \\
&\quad - (m_2 + 2m_c) l_2 \cos \theta_{e2} \sin(\theta_{a1} + \theta_{a2}) \dot{\theta}_{e2} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \\
f_3 &= -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_c\right) l_1 \cos \theta_{e1} \dot{\theta}_{e1}^2 - \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_2 \cos \theta_{e2} \dot{\theta}_{e2}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_4 = & -\left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_c\right) l_1^2 \cos \theta_{e1} \sin \theta_{e1} \dot{\theta}_{a1}^2 \\
& - \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_1 l_2 \cos \theta_{e1} \sin \theta_{e2} \cos \theta_{a2} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2})^2 \\
& - \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_1 l_2 (\cos \theta_{e1} \sin \theta_{e2} \cos \theta_{a2} - \sin \theta_{e1} \cos \theta_{e2}) \dot{\theta}_{e2}^2 \\
& - (m_2 + 2m_c) l_1 l_2 \cos \theta_{e1} \cos \theta_{e2} \sin \theta_{a2} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \dot{\theta}_{e2} \\
f_5 = & -\left(\frac{m_2}{4} + m_c\right) l_2^2 \cos \theta_{e2} \sin \theta_{e2} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2})^2 - \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_2 l_1 \cos \theta_{e2} \sin \theta_{e1} \cos \theta_{a2} \dot{\theta}_{a1}^2 \\
& - \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_2 l_1 (\cos \theta_{e2} \sin \theta_{e1} \cos \theta_{a2} - \sin \theta_{e2} \cos \theta_{e1}) \dot{\theta}_{e1}^2 \\
& + (m_2 + 2m_c) l_2 l_1 \cos \theta_{e2} \cos \theta_{e1} \sin \theta_{a2} \dot{\theta}_{a1} \dot{\theta}_{e1} \\
f_6 = & (m_2 + 2m_c) l_1 l_2 [\cos \theta_{e1} \sin \theta_{e2} \cos \theta_{a2} \dot{\theta}_{a1} \dot{\theta}_{e1} + \sin \theta_{e1} \cos \theta_{e2} \cos \theta_{a2} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \dot{\theta}_{e2}] \\
& + \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_1 l_2 \sin \theta_{e1} \sin \theta_{e2} \sin \theta_{a2} [\dot{\theta}_{e1}^2 - \dot{\theta}_{e2}^2 + \dot{\theta}_{a1}^2 - (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2})^2] \\
& + \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_c\right) l_1^2 \sin(2\theta_{e1}) \dot{\theta}_{a1} \dot{\theta}_{e1} \\
& + \left(\frac{m_2}{4} + m_c\right) l_2^2 \sin(2\theta_{e2}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \dot{\theta}_{e2} \\
f_7 = & (m_2 + 2m_c) l_1 l_2 \cos \theta_{e1} \sin \theta_{e2} \cos \theta_{a2} \dot{\theta}_{a1} \dot{\theta}_{e1} \\
& + \left(\frac{m_2}{2} + m_c\right) l_1 l_2 \sin \theta_{e1} \sin \theta_{e2} \sin \theta_{a2} (\dot{\theta}_{e1}^2 + \dot{\theta}_{a1}^2) \\
& + \left(\frac{m_2}{4} + m_c\right) l_2^2 \sin(2\theta_{e2}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \dot{\theta}_{e2}
\end{aligned}$$

Elementos do vetor Coriolis-centrífugo $\vec{F}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ quando o cabo é aproximado por três elos:

3 elos: $\vec{F}_{9x1}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$

$$\begin{aligned}
f_1 = & -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_c\right) l_1 \sin \theta_{e1} \sin \theta_{a1} \dot{\theta}_{e1}^2 - \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_c\right) l_1 \sin \theta_{e1} \sin \theta_{a1} \dot{\theta}_{a1}^2 \\
& - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_2 \sin \theta_{e2} \sin (\theta_{a1} + \theta_{a2}) \dot{\theta}_{e2}^2 \\
& - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_2 \sin \theta_{e2} \sin (\theta_{a1} + \theta_{a2}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2})^2 \\
& - \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_3 \sin \theta_{e3} \sin (\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3}) \dot{\theta}_{e3}^2 \\
& - \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_3 \sin \theta_{e3} \sin (\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3})^2 \\
& + (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + 2m_c) l_1 \cos \theta_{e1} \cos \theta_{a1} \dot{\theta}_{e1} \dot{\theta}_{a1} \\
& + (m_2 + 2m_3 + 2m_c) l_2 \cos \theta_{e2} \cos (\theta_{a1} + \theta_{a2}) \dot{\theta}_{e2} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \\
& + (m_3 + 2m_c) l_3 \cos \theta_{e3} \cos (\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3}) \dot{\theta}_{e3} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2 = & -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_c\right) l_1 \sin \theta_{e1} \cos \theta_{a1} \dot{\theta}_{e1}^2 - \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_c\right) l_1 \sin \theta_{e1} \cos \theta_{a1} \dot{\theta}_{a1}^2 \\
& - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_2 \sin \theta_{e2} \cos (\theta_{a1} + \theta_{a2}) \dot{\theta}_{e2}^2 \\
& - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_2 \sin \theta_{e2} \cos (\theta_{a1} + \theta_{a2}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2})^2 \\
& - \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_3 \sin \theta_{e3} \cos (\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3}) \dot{\theta}_{e3}^2 \\
& - \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_3 \sin \theta_{e3} \cos (\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3})^2 \\
& - (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + 2m_c) l_1 \cos \theta_{e1} \sin \theta_{a1} \dot{\theta}_{e1} \dot{\theta}_{a1} \\
& - (m_2 + 2m_3 + 2m_c) l_2 \cos \theta_{e2} \sin (\theta_{a1} + \theta_{a2}) \dot{\theta}_{e2} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \\
& - (m_3 + 2m_c) l_3 \cos \theta_{e3} \sin (\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3}) \dot{\theta}_{e3} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3}) \\
f_3 = & -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_c\right) l_1 \cos \theta_{e1} \dot{\theta}_{e1}^2 - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_2 \cos \theta_{e2} \dot{\theta}_{e2}^2 \\
& - \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_3 \cos \theta_{e3} \dot{\theta}_{e3}^2 \\
f_4 = & -\left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_c\right) l_1^2 \cos \theta_{e1} \sin \theta_{e1} \dot{\theta}_{a1}^2 \\
& - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_1 l_2 \cos \theta_{e1} \sin \theta_{e2} \cos \theta_{a2} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2})^2 \\
& - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_1 l_2 (\cos \theta_{e1} \sin \theta_{e2} \cos \theta_{a2} - \sin \theta_{e1} \cos \theta_{e2}) \dot{\theta}_{e2}^2 \\
& - (m_2 + 2m_3 + 2m_c) l_1 l_2 \cos \theta_{e1} \cos \theta_{e2} \sin \theta_{a2} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \dot{\theta}_{e2} \\
& - \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_1 l_3 \cos \theta_{e1} \sin \theta_{e3} \cos (\theta_{a2} + \theta_{a3}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3})^2 \\
& - \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_1 l_3 [\cos \theta_{e1} \sin \theta_{e3} \cos (\theta_{a2} + \theta_{a3}) - \sin \theta_{e1} \cos \theta_{e3}] \dot{\theta}_{e3}^2 \\
& - (m_3 + 2m_c) l_1 l_3 \cos \theta_{e1} \cos \theta_{e3} \sin (\theta_{a2} + \theta_{a3}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3}) \dot{\theta}_{e3} \\
f_5 = & -\left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c\right) l_2^2 \cos \theta_{e2} \sin \theta_{e2} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2})^2 \\
& - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_2 l_1 \cos \theta_{e2} \sin \theta_{e1} \cos \theta_{a2} \dot{\theta}_{a1}^2 \\
& - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_2 l_1 (\cos \theta_{e2} \sin \theta_{e1} \cos \theta_{a2} - \sin \theta_{e2} \cos \theta_{e1}) \dot{\theta}_{e1}^2 \\
& + (m_2 + 2m_3 + 2m_c) l_2 l_1 \cos \theta_{e2} \cos \theta_{e1} \sin \theta_{a2} \dot{\theta}_{a1} \dot{\theta}_{e1} \\
& - \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_2 l_3 \cos \theta_{e2} \sin \theta_{e3} \cos \theta_{a3} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3})^2 \\
& - \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_2 l_3 (\cos \theta_{e2} \sin \theta_{e3} \cos \theta_{a3} - \sin \theta_{e2} \cos \theta_{e3}) \dot{\theta}_{e3}^2 \\
& - (m_3 + 2m_c) l_2 l_3 \cos \theta_{e2} \cos \theta_{e3} \sin \theta_{a3} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3}) \dot{\theta}_{e3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_6 = & -\left(\frac{m_3}{4} + m_c\right) l_3^2 \cos \theta_{e3} \sin \theta_{e3} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3})^2 \\
& - \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_3 l_1 \cos \theta_{e3} \sin \theta_{e1} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3}) \dot{\theta}_{a1}^2 \\
& - \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_3 l_1 [\cos \theta_{e3} \sin \theta_{e1} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3}) - \sin \theta_{e3} \cos \theta_{e1}] \dot{\theta}_{e1}^2 \\
& + (m_3 + 2m_c) l_3 l_1 \cos \theta_{e3} \cos \theta_{e1} \sin(\theta_{a2} + \theta_{a3}) \dot{\theta}_{a1} \dot{\theta}_{e1} \\
& - \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_3 l_2 \cos \theta_{e3} \sin \theta_{e2} \cos \theta_{a3} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2})^2 \\
& - \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_3 l_2 (\cos \theta_{e3} \sin \theta_{e2} \cos \theta_{a3} - \sin \theta_{e3} \cos \theta_{e2}) \dot{\theta}_{e2}^2 \\
& + (m_3 + 2m_c) l_3 l_2 \cos \theta_{e3} \cos \theta_{e2} \sin \theta_{a3} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \dot{\theta}_{e2} \\
f_7 = & (m_2 + 2m_3 + 2m_c) l_1 l_2 [\cos \theta_{e1} \sin \theta_{e2} \cos \theta_{a2} \dot{\theta}_{a1} \dot{\theta}_{e1} \\
& + \sin \theta_{e1} \cos \theta_{e2} \cos \theta_{a2} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \dot{\theta}_{e2}] \\
& + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_1 l_2 \sin \theta_{e1} \sin \theta_{e2} \sin \theta_{a2} [\dot{\theta}_{e1}^2 - \dot{\theta}_{e2}^2 + \dot{\theta}_{a1}^2 - (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2})^2] \\
& + (m_3 + 2m_c) l_1 l_3 [\cos \theta_{e1} \sin \theta_{e3} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3}) \dot{\theta}_{a1} \dot{\theta}_{e1} \\
& + \sin \theta_{e1} \cos \theta_{e3} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3}) \dot{\theta}_{e3}] \\
& + \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_1 l_3 \sin \theta_{e1} \sin \theta_{e3} \sin(\theta_{a2} + \theta_{a3}) [\dot{\theta}_{e1}^2 - \dot{\theta}_{e3}^2 + \dot{\theta}_{a1}^2 - (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3})^2] \\
& + (m_3 + 2m_c) l_2 l_3 [\cos \theta_{e2} \sin \theta_{e3} \cos \theta_{a3} \dot{\theta}_{e2} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \\
& + \sin \theta_{e2} \cos \theta_{e3} \cos \theta_{a3} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3}) \dot{\theta}_{e3}] \\
& + \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_2 l_3 \sin \theta_{e2} \sin \theta_{e3} \sin \theta_{a3} [\dot{\theta}_{e2}^2 - \dot{\theta}_{e3}^2 + (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2})^2 - (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3})^2] \\
& + \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_c\right) l_1^2 \sin(2\theta_{e1}) \dot{\theta}_{a1} \dot{\theta}_{e1} \\
& + \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c\right) l_2^2 \sin(2\theta_{e2}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \dot{\theta}_{e2} \\
& + \left(\frac{m_3}{4} + m_c\right) l_3^2 \sin(2\theta_{e3}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3}) \dot{\theta}_{e3} \\
f_8 = & (m_2 + 2m_3 + 2m_c) l_1 l_2 \cos \theta_{e1} \sin \theta_{e2} \cos \theta_{a2} \dot{\theta}_{a1} \dot{\theta}_{e1} \\
& + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) l_1 l_2 \sin \theta_{e1} \sin \theta_{e2} \sin \theta_{a2} (\dot{\theta}_{e1}^2 + \dot{\theta}_{a1}^2) \\
& + (m_3 + 2m_c) l_1 l_3 \cos \theta_{e1} \sin \theta_{e3} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3}) \dot{\theta}_{a1} \dot{\theta}_{e1} \\
& + \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) l_1 l_3 \sin \theta_{e1} \sin \theta_{e3} \sin(\theta_{a2} + \theta_{a3}) (\dot{\theta}_{e1}^2 + \dot{\theta}_{a1}^2) \\
& + (m_3 + 2m_c) l_2 l_3 [\cos \theta_{e2} \sin \theta_{e3} \cos \theta_{a3} \dot{\theta}_{e2} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \\
& + \sin \theta_{e2} \cos \theta_{e3} \cos \theta_{a3} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3}) \dot{\theta}_{e3}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) l_2 l_3 \sin \theta_{e2} \sin \theta_{e3} \sin \theta_{a3} \left[\dot{\theta}_{e2}^2 - \dot{\theta}_{e3}^2 + (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2})^2 - (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3})^2 \right] \\
& + \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c \right) l_2^2 \sin(2\theta_{e2}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \dot{\theta}_{e2} \\
& + \left(\frac{m_3}{4} + m_c \right) l_3^2 \sin(2\theta_{e3}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3}) \dot{\theta}_{e3} \\
f_9 = & \left(\frac{m_3}{4} + m_c \right) l_3^2 \sin(2\theta_{e3}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3}) \dot{\theta}_{e3} \\
& + (m_3 + 2m_c) l_1 l_3 \cos \theta_{e1} \sin \theta_{e3} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3}) \dot{\theta}_{a1} \dot{\theta}_{e1} \\
& + \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) l_1 l_3 \sin \theta_{e1} \sin \theta_{e3} \sin(\theta_{a2} + \theta_{a3}) (\dot{\theta}_{e1}^2 + \dot{\theta}_{a1}^2) \\
& + (m_3 + 2m_c) l_2 l_3 \cos \theta_{e2} \sin \theta_{e3} \cos \theta_{a3} \dot{\theta}_{e2} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \\
& + \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) l_2 l_3 \sin \theta_{e2} \sin \theta_{e3} \sin \theta_{a3} \left[\dot{\theta}_{e2}^2 + (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2})^2 \right]
\end{aligned}$$

Elementos do vetor Coriolis-centrífugo $\vec{F}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ quando o cabo é aproximado por quatro elos:

4 elos: $\vec{F}_{11 \times 1}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$

$$\begin{aligned}
f_1 = & - \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c \right) l_1 \sin \theta_{e1} \sin \theta_{a1} \dot{\theta}_{e1}^2 \\
& - \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c \right) l_1 \sin \theta_{e1} \sin \theta_{a1} \dot{\theta}_{a1}^2 \\
& - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c \right) l_2 \sin \theta_{e2} \sin(\theta_{a1} + \theta_{a2}) \dot{\theta}_{e2}^2 \\
& - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c \right) l_2 \sin \theta_{e2} \sin(\theta_{a1} + \theta_{a2}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2})^2 \\
& - \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) l_3 \sin \theta_{e3} \sin(\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3}) \dot{\theta}_{e3}^2 \\
& - \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) l_3 \sin \theta_{e3} \sin(\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3})^2 \\
& - \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) l_4 \sin \theta_{e4} \sin(\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4}) \dot{\theta}_{e4}^2 \\
& - \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \sin \theta_{e4} \sin(\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3} + \dot{\theta}_{a4})^2 \\
& + (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + 2m_4 + 2m_c) l_1 \cos \theta_{e1} \cos \theta_{a1} \dot{\theta}_{e1} \dot{\theta}_{a1} \\
& + (m_2 + 2m_3 + 2m_4 + 2m_c) l_2 \cos \theta_{e2} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2}) \dot{\theta}_{e2} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \\
& + (m_3 + 2m_4 + 2m_c) l_3 \cos \theta_{e3} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3}) \dot{\theta}_{e3} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3}) \\
& + (m_4 + 2m_c) l_4 \cos \theta_{e4} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4}) \dot{\theta}_{e4} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3} + \dot{\theta}_{a4})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2 = & -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c\right) l_1 \sin \theta_{e1} \cos \theta_{a1} \dot{\theta}_{e1}^2 \\
& -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c\right) l_1 \sin \theta_{e1} \cos \theta_{a1} \dot{\theta}_{a1}^2 \\
& -\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_2 \sin \theta_{e2} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2}) \dot{\theta}_{e2}^2 \\
& -\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_2 \sin \theta_{e2} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2})^2 \\
& -\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_3 \sin \theta_{e3} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3}) \dot{\theta}_{e3}^2 \\
& -\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_3 \sin \theta_{e3} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3})^2 \\
& -\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_4 \sin \theta_{e4} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4}) \dot{\theta}_{e4}^2 \\
& -\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) \sin \theta_{e4} \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3} + \dot{\theta}_{a4})^2 \\
& - (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + 2m_4 + 2m_c) l_1 \cos \theta_{e1} \sin \theta_{a1} \dot{\theta}_{e1} \dot{\theta}_{a1} \\
& - (m_2 + 2m_3 + 2m_4 + 2m_c) l_2 \cos \theta_{e2} \sin(\theta_{a1} + \theta_{a2}) \dot{\theta}_{e2} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \\
& - (m_3 + 2m_4 + 2m_c) l_3 \cos \theta_{e3} \sin(\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3}) \dot{\theta}_{e3} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3}) \\
& - (m_4 + 2m_c) l_4 \cos \theta_{e4} \sin(\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4}) \dot{\theta}_{e4} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3} + \dot{\theta}_{a4}) \\
f_3 = & -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c\right) l_1 \cos \theta_{e1} \dot{\theta}_{e1}^2 - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_2 \cos \theta_{e2} \dot{\theta}_{e2}^2 \\
& - \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_3 \cos \theta_{e3} \dot{\theta}_{e3}^2 - \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_4 \cos \theta_{e4} \dot{\theta}_{e4}^2 \\
f_4 = & -\left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c\right) l_1^2 \cos \theta_{e1} \sin \theta_{e1} \dot{\theta}_{a1}^2 \\
& - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_1 l_2 \cos \theta_{e1} \sin \theta_{e2} \cos \theta_{a2} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2})^2 \\
& - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_1 l_2 (\cos \theta_{e1} \sin \theta_{e2} \cos \theta_{a2} - \sin \theta_{e1} \cos \theta_{e2}) \dot{\theta}_{e2}^2 \\
& - (m_2 + 2m_3 + 2m_4 + 2m_c) l_1 l_2 \cos \theta_{e1} \cos \theta_{e2} \sin \theta_{a2} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \dot{\theta}_{e2} \\
& - \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_1 l_3 \cos \theta_{e1} \sin \theta_{e3} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3})^2 \\
& - \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_1 l_3 [\cos \theta_{e1} \sin \theta_{e3} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3}) - \sin \theta_{e1} \cos \theta_{e3}] \dot{\theta}_{e3}^2 \\
& - (m_3 + 2m_4 + 2m_c) l_1 l_3 \cos \theta_{e1} \cos \theta_{e3} \sin(\theta_{a2} + \theta_{a3}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3}) \dot{\theta}_{e3} \\
& - \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_1 l_4 \cos \theta_{e1} \sin \theta_{e4} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3} + \dot{\theta}_{a4})^2 \\
& - \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_1 l_4 (\cos \theta_{e1} \sin \theta_{e4} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4}) - \sin \theta_{e1} \cos \theta_{e4}) \dot{\theta}_{e4}^2 \\
& - (m_4 + 2m_c) l_1 l_4 \cos \theta_{e1} \cos \theta_{e4} \sin(\theta_{a2} + \theta_{a3}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3} + \dot{\theta}_{a4}) \dot{\theta}_{e4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_5 = & -\left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_2^2 \cos\theta_{e2} \sin\theta_{e2} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2})^2 \\
& - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_2 l_1 \cos\theta_{e2} \sin\theta_{e1} \cos\theta_{a2} \dot{\theta}_{a1}^2 \\
& - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_2 l_1 (\cos\theta_{e2} \sin\theta_{e1} \cos\theta_{a2} - \sin\theta_{e2} \cos\theta_{e1}) \dot{\theta}_{e1}^2 \\
& + (m_2 + 2m_3 + 2m_4 + 2m_c) l_2 l_1 \cos\theta_{e2} \cos\theta_{e1} \sin\theta_{a2} \dot{\theta}_{a1} \dot{\theta}_{e1} \\
& - \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_2 l_3 \cos\theta_{e2} \sin\theta_{e3} \cos\theta_{a3} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3})^2 \\
& - \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_2 l_3 (\cos\theta_{e2} \sin\theta_{e3} \cos\theta_{a3} - \sin\theta_{e2} \cos\theta_{e3}) \dot{\theta}_{e3}^2 \\
& - (m_3 + 2m_4 + 2m_c) l_2 l_3 \cos\theta_{e2} \cos\theta_{e3} \sin\theta_{a3} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3}) \dot{\theta}_{e3} \\
& - \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_2 l_4 \cos\theta_{e2} \sin\theta_{e4} \cos(\theta_{a3} + \theta_{a4}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3} + \dot{\theta}_{a4})^2 \\
& - \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_2 l_4 [\cos\theta_{e2} \sin\theta_{e4} \cos(\theta_{a3} + \theta_{a4}) - \sin\theta_{e2} \cos\theta_{e4}] \dot{\theta}_{e4}^2 \\
& - (m_4 + 2m_c) l_2 l_4 \cos\theta_{e2} \cos\theta_{e4} \sin(\theta_{a3} + \theta_{a4}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3} + \dot{\theta}_{a4}) \dot{\theta}_{e4} \\
f_6 = & -\left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c\right) l_3^2 \cos\theta_{e3} \sin\theta_{e3} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3})^2 \\
& - \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_3 l_1 \cos\theta_{e3} \sin\theta_{e1} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3}) \dot{\theta}_{a1}^2 \\
& - \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_3 l_1 [\cos\theta_{e3} \sin\theta_{e1} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3}) - \sin\theta_{e3} \cos\theta_{e1}] \dot{\theta}_{e1}^2 \\
& + (m_3 + 2m_4 + 2m_c) l_3 l_1 \cos\theta_{e3} \cos\theta_{e1} \sin(\theta_{a2} + \theta_{a3}) \dot{\theta}_{a1} \dot{\theta}_{e1} \\
& - \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_3 l_2 \cos\theta_{e3} \sin\theta_{e2} \cos\theta_{a3} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2})^2 \\
& - \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_3 l_2 (\cos\theta_{e3} \sin\theta_{e2} \cos\theta_{a3} - \sin\theta_{e3} \cos\theta_{e2}) \dot{\theta}_{e2}^2 \\
& + (m_3 + 2m_4 + 2m_c) l_3 l_2 \cos\theta_{e3} \cos\theta_{e2} \sin\theta_{a3} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \dot{\theta}_{e2} \\
& - \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_3 l_4 \cos\theta_{e3} \sin\theta_{e4} \cos\theta_{a4} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3} + \dot{\theta}_{a4})^2 \\
& - \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_3 l_4 (\cos\theta_{e3} \sin\theta_{e4} \cos\theta_{a4} - \sin\theta_{e3} \cos\theta_{e4}) \dot{\theta}_{e4}^2 \\
& - (m_4 + 2m_c) l_3 l_4 \cos\theta_{e3} \cos\theta_{e4} \sin\theta_{a4} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3} + \dot{\theta}_{a4}) \dot{\theta}_{e4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_7 = & -\left(\frac{m_4}{4} + m_c\right) l_4^2 \cos \theta_{e4} \sin \theta_{e4} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3} + \dot{\theta}_{a4})^2 \\
& - \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_4 l_1 \cos \theta_{e4} \sin \theta_{e1} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4}) \dot{\theta}_{a1}^2 \\
& - \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_4 l_1 [\cos \theta_{e4} \sin \theta_{e1} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4}) - \sin \theta_{e4} \cos \theta_{e1}] \dot{\theta}_{e1}^2 \\
& + (m_4 + 2m_c) l_4 l_1 \cos \theta_{e4} \cos \theta_{e1} \sin(\theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4}) \dot{\theta}_{a1} \dot{\theta}_{e1} \\
& - \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_4 l_2 \cos \theta_{e4} \sin \theta_{e2} \cos(\theta_{a3} + \theta_{a4}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2})^2 \\
& - \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_4 l_2 [\cos \theta_{e4} \sin \theta_{e2} \cos(\theta_{a3} + \theta_{a4}) - \sin \theta_{e4} \cos \theta_{e2}] \dot{\theta}_{e2}^2 \\
& + (m_4 + 2m_c) l_4 l_2 \cos \theta_{e4} \cos \theta_{e2} \sin(\theta_{a3} + \theta_{a4}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \dot{\theta}_{e2} \\
& - \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_4 l_3 \cos \theta_{e4} \sin \theta_{e3} \cos \theta_{a4} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3})^2 \\
& - \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_4 l_3 (\cos \theta_{e4} \sin \theta_{e3} \cos \theta_{a4} - \sin \theta_{e4} \cos \theta_{e3}) \dot{\theta}_{e3}^2 \\
& + (m_4 + 2m_c) l_4 l_3 \cos \theta_{e4} \cos \theta_{e3} \sin \theta_{a4} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3}) \dot{\theta}_{e3} \\
f_8 = & (m_2 + 2m_3 + 2m_4 + 2m_c) l_1 l_2 [\cos \theta_{e1} \sin \theta_{e2} \cos \theta_{a2} \dot{\theta}_{a1} \dot{\theta}_{e1} \\
& + \sin \theta_{e1} \cos \theta_{e2} \cos \theta_{a2} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \dot{\theta}_{e2}] \\
& + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_1 l_2 \sin \theta_{e1} \sin \theta_{e2} \sin \theta_{a2} [\dot{\theta}_{e1}^2 - \dot{\theta}_{e2}^2 + \dot{\theta}_{a1}^2 - (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2})^2] \\
& + (m_3 + 2m_4 + 2m_c) l_1 l_3 [\cos \theta_{e1} \sin \theta_{e3} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3}) \dot{\theta}_{a1} \dot{\theta}_{e1} \\
& + \sin \theta_{e1} \cos \theta_{e3} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3}) \dot{\theta}_{e3}] \\
& + \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_1 l_3 \sin \theta_{e1} \sin \theta_{e3} \sin(\theta_{a2} + \theta_{a3}) [\dot{\theta}_{e1}^2 - \dot{\theta}_{e3}^2 + \dot{\theta}_{a1}^2 - (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3})^2] \\
& + (m_4 + 2m_c) l_1 l_4 [\cos \theta_{e1} \sin \theta_{e4} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4}) \dot{\theta}_{a1} \dot{\theta}_{e1} \\
& + \sin \theta_{e1} \cos \theta_{e4} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3} + \dot{\theta}_{a4}) \dot{\theta}_{e4}] \\
& + \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_1 l_4 \sin \theta_{e1} \sin \theta_{e4} \sin(\theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4}) [\dot{\theta}_{e1}^2 - \dot{\theta}_{e4}^2 + \dot{\theta}_{a1}^2 \\
& - (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3} + \dot{\theta}_{a4})^2] \\
& + (m_3 + 2m_4 + 2m_c) l_2 l_3 [\cos \theta_{e2} \sin \theta_{e3} \cos \theta_{a3} \dot{\theta}_{e2} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \\
& + \sin \theta_{e2} \cos \theta_{e3} \cos \theta_{a3} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3}) \dot{\theta}_{e3}] \\
& + \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) l_2 l_3 \sin \theta_{e2} \sin \theta_{e3} \sin \theta_{a3} [\dot{\theta}_{e2}^2 - \dot{\theta}_{e3}^2 + (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2})^2 \\
& - (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3})^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (m_4 + 2m_c)l_2l_4[\cos\theta_{e2}\sin\theta_{e4}\cos(\theta_{a3} + \theta_{a4})\dot{\theta}_{e2}(\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \\
& + \sin\theta_{e2}\cos\theta_{e4}\cos(\theta_{a3} + \theta_{a4})(\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3} + \dot{\theta}_{a4})\dot{\theta}_{e4}] \\
& + \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)l_2l_4\sin\theta_{e2}\sin\theta_{e4}\sin(\theta_{a3} + \theta_{a4})\left[\dot{\theta}_{e2}^2 - \dot{\theta}_{e4}^2 + (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2})^2\right. \\
& \left. - (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3} + \dot{\theta}_{a4})^2\right] \\
& + (m_4 + 2m_c)l_3l_4[\cos\theta_{e3}\sin\theta_{e4}\cos\theta_{a4}\dot{\theta}_{e3}(\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3}) \\
& + \sin\theta_{e3}\cos\theta_{e4}\cos\theta_{a4}(\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3} + \dot{\theta}_{a4})\dot{\theta}_{e4}] \\
& + \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)l_3l_4\sin\theta_{e3}\sin\theta_{e4}\sin\theta_{a4}\left[\dot{\theta}_{e3}^2 - \dot{\theta}_{e4}^2 + (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3})^2\right. \\
& \left. - (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3} + \dot{\theta}_{a4})^2\right] + \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c\right)l_1^2\sin(2\theta_{e1})\dot{\theta}_{a1}\dot{\theta}_{e1} \\
& + \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 + m_c\right)l_2^2\sin(2\theta_{e2})(\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2})\dot{\theta}_{e2} \\
& + \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c\right)l_3^2\sin(2\theta_{e3})(\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3})\dot{\theta}_{e3} \\
& + \left(\frac{m_4}{4} + m_c\right)l_4^2\sin(2\theta_{e4})(\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3} + \dot{\theta}_{a4})\dot{\theta}_{e4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_9 = & (m_2 + 2m_3 + 2m_4 + 2m_c)l_1l_2\cos\theta_{e1}\sin\theta_{e2}\cos\theta_{a2}\dot{\theta}_{a1}\dot{\theta}_{e1} \\
& + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right)l_1l_2\sin\theta_{e1}\sin\theta_{e2}\sin\theta_{a2}(\dot{\theta}_{e1}^2 + \dot{\theta}_{a1}^2) \\
& + (m_3 + 2m_4 + 2m_c)l_1l_3\cos\theta_{e1}\sin\theta_{e3}\cos(\theta_{a2} + \theta_{a3})\dot{\theta}_{a1}\dot{\theta}_{e1} \\
& + \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right)l_1l_3\sin\theta_{e1}\sin\theta_{e3}\sin(\theta_{a2} + \theta_{a3})(\dot{\theta}_{e1}^2 + \dot{\theta}_{a1}^2) \\
& + (m_4 + 2m_c)l_1l_4\cos\theta_{e1}\sin\theta_{e4}\cos(\theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4})\dot{\theta}_{a1}\dot{\theta}_{e1} \\
& + \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)l_1l_4\sin\theta_{e1}\sin\theta_{e4}\sin(\theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4})(\dot{\theta}_{e1}^2 + \dot{\theta}_{a1}^2) \\
& + (m_3 + 2m_4 + 2m_c)l_2l_3[\cos\theta_{e2}\sin\theta_{e3}\cos\theta_{a3}\dot{\theta}_{e2}(\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \\
& + \sin\theta_{e2}\cos\theta_{e3}\cos\theta_{a3}(\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3})\dot{\theta}_{e3}] \\
& + \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right)l_2l_3\sin\theta_{e2}\sin\theta_{e3}\sin\theta_{a3}\left[\dot{\theta}_{e2}^2 - \dot{\theta}_{e3}^2 + (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2})^2\right. \\
& \left. - (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3})^2\right] \\
& + (m_4 + 2m_c)l_2l_4[\cos\theta_{e2}\sin\theta_{e4}\cos(\theta_{a3} + \theta_{a4})\dot{\theta}_{e2}(\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \\
& + \sin\theta_{e2}\cos\theta_{e4}\cos(\theta_{a3} + \theta_{a4})(\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3} + \dot{\theta}_{a4})\dot{\theta}_{e4}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) l_2 l_4 \sin \theta_{e2} \sin \theta_{e4} \sin(\theta_{a3} + \theta_{a4}) \left[\dot{\theta}_{e2}^2 - \dot{\theta}_{e4}^2 + (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2})^2 \right. \\
& \left. - (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3} + \dot{\theta}_{a4})^2 \right] \\
& + (m_4 + 2m_c) l_3 l_4 [\cos \theta_{e3} \sin \theta_{e4} \cos \theta_{a4} \dot{\theta}_{e3} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3}) \\
& + \sin \theta_{e3} \cos \theta_{e4} \cos \theta_{a4} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3} + \dot{\theta}_{a4}) \dot{\theta}_{e4}] \\
& + \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) l_3 l_4 \sin \theta_{e3} \sin \theta_{e4} \sin \theta_{a4} \left[\dot{\theta}_{e3}^2 - \dot{\theta}_{e4}^2 + (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3})^2 \right. \\
& \left. - (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3} + \dot{\theta}_{a4})^2 \right] \\
& + \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 + m_c \right) l_2^2 \sin(2\theta_{e2}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \dot{\theta}_{e2} \\
& + \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c \right) l_3^2 \sin(2\theta_{e3}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3}) \dot{\theta}_{e3} \\
& + \left(\frac{m_4}{4} + m_c \right) l_4^2 \sin(2\theta_{e4}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3} + \dot{\theta}_{a4}) \dot{\theta}_{e4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{10} = & (m_3 + 2m_4 + 2m_c) l_1 l_3 \cos \theta_{e1} \sin \theta_{e3} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3}) \dot{\theta}_{a1} \dot{\theta}_{e1} \\
& + \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) l_1 l_3 \sin \theta_{e1} \sin \theta_{e3} \sin(\theta_{a2} + \theta_{a3}) (\dot{\theta}_{e1}^2 + \dot{\theta}_{a1}^2) \\
& + (m_4 + 2m_c) l_1 l_4 \cos \theta_{e1} \sin \theta_{e4} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4}) \dot{\theta}_{a1} \dot{\theta}_{e1} \\
& + \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) l_1 l_4 \sin \theta_{e1} \sin \theta_{e4} \sin(\theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4}) (\dot{\theta}_{e1}^2 + \dot{\theta}_{a1}^2) \\
& + (m_3 + 2m_4 + 2m_c) l_2 l_3 \cos \theta_{e2} \sin \theta_{e3} \cos \theta_{a3} \dot{\theta}_{e2} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \\
& + \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) l_2 l_3 \sin \theta_{e2} \sin \theta_{e3} \sin \theta_{a3} [\dot{\theta}_{e2}^2 + (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2})^2] \\
& + (m_4 + 2m_c) l_2 l_4 \cos \theta_{e2} \sin \theta_{e4} \cos(\theta_{a3} + \theta_{a4}) \dot{\theta}_{e2} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \\
& + \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) l_2 l_4 \sin \theta_{e2} \sin \theta_{e4} \sin(\theta_{a3} + \theta_{a4}) [\dot{\theta}_{e2}^2 + (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2})^2] \\
& + (m_4 + 2m_c) l_3 l_4 [\cos \theta_{e3} \sin \theta_{e4} \cos \theta_{a4} \dot{\theta}_{e3} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3}) \\
& + \sin \theta_{e3} \cos \theta_{e4} \cos \theta_{a4} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3} + \dot{\theta}_{a4}) \dot{\theta}_{e4}] \\
& + \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) l_3 l_4 \sin \theta_{e3} \sin \theta_{e4} \sin \theta_{a4} [\dot{\theta}_{e3}^2 - \dot{\theta}_{e4}^2 + (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3})^2 \\
& - (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3} + \dot{\theta}_{a4})^2] \\
& + \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c \right) l_3^2 \sin(2\theta_{e3}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3}) \dot{\theta}_{e3} \\
& + \left(\frac{m_4}{4} + m_c \right) l_4^2 \sin(2\theta_{e4}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3} + \dot{\theta}_{a4}) \dot{\theta}_{e4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{11} = & (m_4 + 2m_c)l_1l_4 \cos \theta_{e1} \sin \theta_{e4} \cos(\theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4}) \dot{\theta}_{a1}\dot{\theta}_{e1} \\
& + \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_1l_4 \sin \theta_{e1} \sin \theta_{e4} \sin(\theta_{a2} + \theta_{a3} + \theta_{a4}) (\dot{\theta}_{e1}^2 + \dot{\theta}_{a1}^2) \\
& + (m_4 + 2m_c)l_2l_4 \cos \theta_{e2} \sin \theta_{e4} \cos(\theta_{a3} + \theta_{a4}) \dot{\theta}_{e2}(\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \\
& + \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_2l_4 \sin \theta_{e2} \sin \theta_{e4} \sin(\theta_{a3} + \theta_{a4}) \left[\dot{\theta}_{e2}^2 + (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2})^2\right] \\
& + (m_4 + 2m_c)l_3l_4 \cos \theta_{e3} \sin \theta_{e4} \cos \theta_{a4} \dot{\theta}_{e3}(\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3}) \\
& + \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) l_3l_4 \sin \theta_{e3} \sin \theta_{e4} \sin \theta_{a4} \left[\dot{\theta}_{e3}^2 + (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3})^2\right] \\
& + \left(\frac{m_4}{4} + m_c\right) l_4^2 \sin(2\theta_{e4}) (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2} + \dot{\theta}_{a3} + \dot{\theta}_{a4})\dot{\theta}_{e4}
\end{aligned}$$