

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

**MODELOS GARCH E MSGARCH PARA A PREVISÃO DA
COTAÇÃO DA CRIPTOMOEDA ETHEREUM**

por

Richard de Freitas Pinto

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Modelagem Computacional

Rio Grande, setembro, 2023

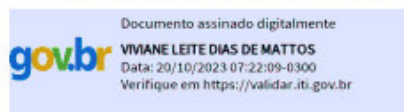
Richard de Freitas Pinto

**“MODELOS GARCH E MSGARCH PARA A PREVISÃO DA COTAÇÃO DA
CRIPTOMOEDA ETHEREUM”**

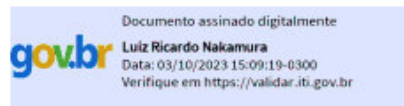
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande - FURG, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área de concentração: Modelagem Computacional.

Aprovada em: 26/09/2023.

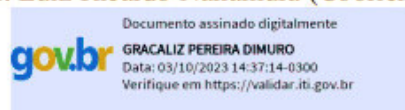
BANCA EXAMINADORA



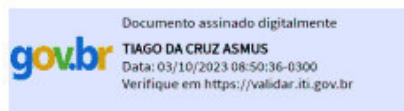
Profa. Dra. Viviane Leite Dias de Mattos (Orientadora – FURG)



Prof. Dr. Luiz Ricardo Nakamura (Coorientador - UFLA)



Profa. Dra. Graçaliz Pereira Dimuro (FURG)



Prof. Dr. Tiago da Cruz Asmus (FURG)



Profa. Dra. Andréa Cristina Konrath (UFSC)

Rio Grande - RS
2023

Ficha Catalográfica

P659m Pinto, Richard de Freitas.

Modelos *Garch* e *Msgarch* para a previsão da cotação da criptomoeda *Ethereum* / Richard de Freitas Pinto. – 2023.
67 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Rio Grande/RS, 2023.

Orientadora: Dra. Viviane Leite Dias de Mattos.

Coorientador: Dr. Luiz Ricardo Nakamura.

1. Criptomoedas 2. GARCH 3. MSGARH 4. Previsão 5. Ethereum
I. Mattos, Viviane Leite Dias de II. Nakamura, Luiz Ricardo III. Título.

CDU 004

Catálogo na Fonte: Bibliotecário José Paulo dos Santos CRB 10/2344

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), a bolsa de Mestrado que fez com que a realização deste trabalho fosse possível.

Agradeço à Universidade Federal de Rio Grande (FURG) e ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional (PPGMC), por me proporcionarem a oportunidade de ingressar no programa e aprofundar meus conhecimentos acadêmicos.

Agradeço a minha orientadora, Viviane Leite de Mattos, pela paciência e por todos os ensinamentos transmitidos durante o mestrado.

Agradeço ao meu coorientador, Luiz Ricardo Nakamura, pelo apoio e ensinamentos.

Por fim, agradeço a minha família, minha noiva e amigos pelo apoio durante os anos de mestrado.

Resumo

Este estudo tem como objetivo comparar a capacidade preditiva dos modelos Autorregressivos de Heterocedasticidade Condicional Generalizados (GARCH) e modelos Autorregressivos de Heterocedasticidade Condicional Generalizados com mudança de Regime (MSGARCH), aplicados em conjunto com o modelo Autorregressivo e de Médias Moveis (ARMA), na modelagem da volatilidade das cotações diárias da criptomoeda *Ethereum*. Foram utilizados os dados referentes ao período de janeiro de 2020 até setembro de 2022 para ajuste do modelo, e os dados referentes a outubro de 2022, para avaliar a capacidade preditiva. Depois de realizar a análise exploratória dos dados, estes foram transformados no logaritmo da taxa de retorno. Após, foi executada a modelagem ARMA, seguida de GARCH nos respectivos resíduos quadráticos. Procedimento similar foi realizado na modelagem MSGARCH, com até 3 regimes. A análise da capacidade preditiva, que utilizou a volatilidade realizada, identificou o modelo encontrado pelo MSGARCH com três regimes e erros com distribuição t de Student como o que possui a melhor capacidade preditiva, para os três horizontes de previsão considerados: 7, 15 e 30 dias. Mesmo tendo havido uma mudança no padrão de comportamento das criptomoedas, em função de alguns fenômenos sociais e políticos, o modelo encontrado foi satisfatório.

Abstract

This study aims to compare the predictive capacity of Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (GARCH) models and Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity models with Regime Switching (MSGARCH), applied in conjunction with the Autoregressive Moving Average (ARMA) model, in modeling the volatility of daily quotes of the cryptocurrency Ethereum. Data from January 2020 to September 2022 were used for model fitting, with data from October 2022 used to evaluate predictive capacity. After conducting exploratory data analysis, the data were transformed into the logarithm of the rate of return. Subsequently, ARMA modeling was performed, followed by GARCH on the respective squared residuals. A similar procedure was carried out in MSGARCH modeling, with up to three regimes. The analysis of predictive capacity, using realized volatility, identified the MSGARCH model with three regimes and errors with a Student's t-distribution as having the best predictive capacity for the three forecast horizons considered: 7, 15, and 30 days. Even though there has been a change in the behavioral pattern of cryptocurrencies due to some social and political phenomena, the model found was satisfactory.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Dinâmica de funcionamento do mercado de criptomoedas	21
Figura 2 – Fluxograma da metodologia utilizada no estudo	42
Figura 3 – Gráfico em Linhas das cotações diárias da criptomoeda Ethereum, JAN 2020 - OUT 2022	43
Figura 4 – Histograma (a) e Boxplot (b) das cotações diárias da moeda Ethereum, JAN 2020 - OUT 2022	44
Figura 5 – Gráfico em Linhas das cotações diárias dos retornos da moeda Ethereum, JAN 2020 - OUT 2022	45
Figura 6 – Histograma (a) e Boxplot (b) das cotações diárias dos retornos da moeda Ethereum, JAN 2020 - OUT 2022	46
Figura 7 – FAC(a) e FACP(b) da Taxa de Retorno, JAN 2020 - OUT 2022.	47
Figura 8 – FAC(a) e FACP(b) dos Resíduos ao quadrado do modelo ARIMA(1,0,1)	49
Figura 9 – FAC(a) e FACP(b) dos Resíduos ao quadrado do modelo ARIMA(2,0,1)	49
Figura 10 – FAC(a) e FACP(b) dos Resíduos ao quadrado do modelo ARIMA(5,0,0)	49
Figura 11 – FAC(a) e FACP(b) dos Resíduos ao quadrado do modelo ARIMA(4,1,1)	50
Figura 12 – FAC(a) e FACP(b) dos Resíduos ao quadrado do modelo ARIMA(3,0,3)	50
Figura 13 – FAC(a) e FACP(b) dos Resíduos ao quadrado do modelo ARIMA(3,0,4)	50
Figura 14 – FAC(a) e FACP(b) dos Resíduos ao quadrado do modelo ARIMA(4,0,3)	51
Figura 15 – FAC(a) e FACP(b) dos Resíduos ao quadrado do modelo ARIMA(4,0,4)	51
Figura 16 – FAC(a) e FACP(b) dos Resíduos ao quadrado do modelo ARIMA(4,1,2)	51
Figura 17 – FAC(a) e FACP(b) dos Resíduos ao quadrado do modelo ARIMA(3,0,5)	52
Figura 18 – FAC(a) e FACP(b) dos Resíduos ao quadrado do modelo ARIMA(4,0,5)	52
Figura 19 – FAC(a) e FACP(b) dos Resíduos ao quadrado do modelo ARIMA(4,1,4)	52
Figura 20 – FAC(a) e FACP(b) dos Resíduos ao quadrado do modelo ARIMA(10,0,10)	53
Figura 21 – Gráfico da previsão do modelo ARIMA(3,0,3)GARCH(2,1) para 7 dias, 28 SET 2022 – 04 OUT 2022	56
Figura 22 – Gráfico da previsão do modelo ARIMA(3,0,3)GARCH(2,1) para 15 dias, 28 SET 2022 – 12 OUT 2022	57
Figura 23 – Gráfico da previsão do modelo ARIMA(3,0,3)GARCH(4,2) para 30 dias, 28 SET 2022 – 27 OUT 2022	57
Figura 24 – Gráfico da previsão do modelo MS(3)-GARCH-t para 7 dias, 28 SET 2022 – 04 OUT 2022	61
Figura 25 – Gráfico da previsão do modelo MS(3)-GARCH-t para 15 dias, 28 SET 2022 – 12 OUT 2022	61

Figura 26 – Gráfico da previsão do modelo MS(3)-GARCH-t para 30 dias, 28 SET
2022 – 27 OUT 2022 62

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Estatísticas descritivas das cotações diárias da moeda Ethereum, JAN 2020 - OUT 2022.	44
Tabela 2 – Estatísticas descritivas das cotações diárias dos retornos da moeda Ethereum, JAN 2020 - OUT 2022.	45
Tabela 3 – Resultados dos testes que avaliam a tendência da série de retornos das cotações diárias da criptomoeda Ethereum, JAN 2020 - OUT 2022 . . .	46
Tabela 4 – Critério de informação BIC e valor p identificado pelos testes Ljung-Box, Jarque-Bera, ARCH e McLeod-Li para os 12 modelos candidatos . . .	48
Tabela 5 – Critério de informação BIC e valor p obtido nos testes Ljung-Box, Jarque-Bera, ARCH e McLeod-Li para o modelo candidato com as defasagens que extrapolaram os limites do intervalo de confiança da FAC e FACP	48
Tabela 6 – Critério de informação BIC e resultados dos testes Ljung-Box, Jarque-Bera e ARCH para os modelos GARCH	53
Tabela 7 – Previsão de 7 dias - MAE, RMSE e MAPE dos modelos GARCH . . .	54
Tabela 8 – Previsão de 15 dias - MAE, RMSE e MAPE dos modelos GARCH . . .	54
Tabela 9 – Previsão de 30 dias - MAE, RMSE e MAPE dos modelos GARCH . . .	55
Tabela 10 – Parâmetros do modelo ARIMA(3,0,3)GARCH(2,1)	55
Tabela 11 – Parâmetros do modelo ARIMA(3,0,3)GARCH(4,2)	56
Tabela 12 – Método e os resultados dos testes Ljung-Box, Jarque-Bera e ARCH para os modelos MSGARCH para 1 regime	58
Tabela 13 – Método e os resultados dos testes Ljung-Box, Jarque-Bera e ARCH para os modelos MSGARCH para 2 regimes	58
Tabela 14 – Método e os resultados dos testes Ljung-Box, Jarque-Bera e ARCH para os modelos MSGARCH para 3 regime	59
Tabela 15 – Previsão de 7 dias - MAE, RMSE e MAPE dos modelos MSGARCH . .	59
Tabela 16 – Previsão de 15 dias - MAE, RMSE e MAPE dos modelos MSGARCH .	60
Tabela 17 – Previsão de 30 dias - MAE, RMSE e MAPE dos modelos MSGARCH .	60
Tabela 18 – Parâmetros do modelo MS(3)-GARCH-t Máxima verossimilhança . . .	60
Tabela 19 – Capacidade preditiva do modelo selecionado pelo GARCH e do modelo selecionado pelo MSGARCH	62

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Autor, citações, objetivos e tipo de estudo dos artigos selecionados na base Science Direct	35
Quadro 2 – Autor, dados, técnicas utilizadas e principal conclusão dos artigos selecionados na base Science Direct	36

LISTA DE SÍMBOLOS

a_t	Valores do processo de ruído branco
A_0	Matriz de α do regime 0
A_1	Matriz de α do regime 1
B	Operador de defasagem
B_1	Matriz de β , correspondente a parcela referente às variâncias passadas
d	Ordem de diferenciação de um modelo ARIMA
DF	Valor da estatística Dickey-Fuller
E_t	t-ésima estado do modelo MSGARCH
F	Subconjuntos associado a um espaço amostral
h_t	Desvio padrão condicional no t-ésimo tempo
H_t	Matriz de desvio padrão condicional no t-ésimo tempo
H_0	Hipótese nula
H_1	Hipótese alternativa
i	Defasagem do processo autorregressivo
j	Defasagem do processo de médias móveis
JB	Valor do teste de Jarque-Bera
KPSS	Valor da estatística KPSS
m	Número de defasagens dos retornos de um modelo GARCH
M	Número de períodos no qual o dia é dividido para calcular os retornos intradiários
n	Número de defasagens das variâncias passadas de um modelo GARCH
N	Soma do número de parâmetros do modelo
n_Q	Número de defasagens do teste de Ljung-Box

p	Número de defasagens de um processo autorregressivo
P	Probabilidade associada a um espaço amostral
p_t	Logarítmo do preço P_t no t-ésimo tempo
P_t	Preço no t-ésimo tempo
q	Número de defasagens de um processo de médias móveis
Q	Valor da estatística de Ljung-Box
RB	Ruido Branco
$r_{d,m}$	Retorno intradiário do dia d correspondente ao período m
r_t	Log-retorno ou retorno no t-ésimo tempo
$\bar{r}_t$	Resíduos padronizados
R_t	Taxa de retorno no t-ésimo tempo
s	Um processo estocástico
S_t	Soma parcial dos resíduos estimados da regressão do teste KPSS
S^2	Variância incondicional amostral
t	Tempo
T	Quantidade de observações
x_t	Sequência de observações que formam um passeio aleatório
y_t	t-ésimo valor observado

Letras Gregas

α	Coefficiente da regressão do teste ADF
α_i	i-ésimo parâmetro de um modelo GARCH, correspondente a parcela referente aos retornos
β_j	j-ésimo parâmetro de um modelo GARCH, correspondente a parcela referente às variâncias passadas
ϵ_t	t-ésimo erro
γ	Covariância
γ_j	j-ésima autocovariância

μ	Média
ϕ	coeficiente associado ao i-ésimo termo autorregressivos
ρ	j-ésima correlação
σ	Desvio padrão
σ^2	Variância
σ_t^2	Variância a longo prazo
θ	coeficiente associado ao j-ésimo termo de médias moveis
	Estimativa do coeficiente α
$s(\hat{\alpha})$	Desvio padrão do ecoeficiente estimado $\hat{\alpha}$

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Apresentação do tema	15
1.2	Objetivos	16
1.2.1	Objetivo Geral	16
1.2.2	Objetivos Específicos	17
1.3	Justificativa	17
1.4	Estrutura do trabalho	18
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	19
2.1	Criptomoeda	19
2.2	Conceitos básicos sobre modelagem de séries temporais	20
2.2.1	Modelos lineares e não lineares	20
2.2.2	Processo estocástico	22
2.2.3	Estacionariedade e ergodicidade	22
2.2.4	Ruído branco	23
2.3	Modelos	23
2.3.1	Modelo ARIMA	24
2.3.1.1	Testes de Estacionariedade	25
2.3.1.2	Autocovariância e autocorrelação	27
2.3.1.3	Critério de informação Bayesiano	28
2.3.1.4	Teste Jarque-Bera	28
2.3.1.5	Teste ARCH	29
2.3.1.6	Teste Ljung-Box	29
2.3.1.7	Teste McLeod-Li	30
2.3.2	GARCH	30
2.3.2.1	Volatilidade Realizada	31
2.3.3	MSGARCH	32
2.4	Estudos relacionados	34
3	METODOLOGIA	39
4	RESULTADOS	43
4.1	Análise exploratória dos dados	43
4.2	Modelagem ARIMA-GARCH	46
4.3	MSGARCH	56
4.4	GARCH x MSGARCH	61

5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	65
---	--------------------------------	----

1 INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação do tema

O mercado de ações se baseia na obtenção de lucro, razão pela qual os investidores têm interesse em prever eventuais mudanças nas cotações das ações, bem como a ocorrência de qualquer evento capaz de provocar estas modificações. De acordo com Müller (2005), essa previsão é um elemento fundamental no funcionamento deste mercado, por ter efeito direto sobre o comportamento dos investidores e, por consequência, na dinâmica dos preços. Ainda, o autor evidencia que as variações dos preços das ações estão sob o efeito da lei da oferta e procura, dependendo das atitudes dos próprios investidores.

Para o bom funcionamento do mercado, é necessário que as empresas funcionem de maneira transparente, fornecendo subsídios aos investidores para a tomada de decisão. Além das empresas que entram no mercado de ações serem obrigadas a divulgar periodicamente balanços e relatórios sobre o seu desempenho econômico, alguns investidores são proibidos de realizar transações na bolsa por possuírem informações privilegiadas relativas aos seus desempenhos.

Yen e Lee (2008) conceituam mercado eficiente como aquele no qual as informações públicas disponíveis aos investidores são completamente refletidas nos preços das ações. Entre estas estão os dados históricos que podem auxiliar na identificação do mecanismo que os gerou. De acordo com Cardoso et al. (2021), informações sobre ações brasileiras, tais como: preço de abertura, preço de fechamento, preço máximo e preço mínimo, podem ser encontrados em alguns sites, como: B3¹ (oficial), BovDB², Info Money³, Yahoo Finance⁴ e Kaggle⁵.

As moedas digitais ou criptomoedas são comercializadas de maneira semelhante às ações, mas nos últimos anos que antecederam 2021 apresentaram um lucro muito superior. Diferentemente das ações, as criptomoedas, por não possuírem regulamentação governamental, apresentam um risco muito maior. Entretanto, de acordo Pal e Mitra (2019), apesar de sua alta volatilidade, até 2019 elas apresentaram uma alta eficiência no mercado em termos de lucratividade. Shahzad et al. (2019) afirmaram que, neste período, as criptomoedas, além de figurar como porto seguro de investimento, foram utilizadas como cobertura para o dólar e ações. No final de 2021/início de 2022, houve uma queda

¹ <http://www.b3.com.br> (acesso em: 22 de Abril de 2022)

² <https://github.com/Ginfofinance/BovDBrepository> (acesso em 22 de Abril de 2022)

³ <https://www.infomoney.com.br> (acesso em 22 de Abril de 2022)

⁴ <https://finance.yahoo.com> (acesso em: 22 de Abril de 2022)

⁵ <https://www.kaggle.com/datasets> (acesso em: 22 de Abril de 2022)

abrupta nas cotações das criptomoedas, levando a uma insegurança dos investidores acerca deste mercado.

Uma abordagem que pode ser utilizada na tentativa de obter o máximo de lucro das negociações das ações e/ou criptomoedas, é a utilização de métodos de previsão, classificados em dois grupos principais: o método humano, que se fundamenta na opinião de especialistas, e o método estatístico (HUBER; HUBER; HUEBER, 2019). Neste segundo grande grupo existem várias técnicas de análise de séries históricas ou temporais, como as técnicas econométricas, que podem ser utilizadas para explicar fatos do passado, testar hipóteses e realizar previsões. Não podemos esquecer, entretanto, as técnicas computacionais, tais como *Machine Learning* (LANTZ, 2019) e Redes Neurais (AGGARWAL, 2018), que vem alcançando excelente desempenho.

Cabe ressaltar que as séries temporais financeiras apresentam, de uma maneira geral, uma característica bastante importante, a grande volatilidade, que nada mais é do que uma medida da variabilidade dos retornos financeiros. De acordo com Morettin (2016), essas séries geralmente são não serialmente correlacionadas, mas dependentes. Esta propriedade faz com que modelos mais simples como os modelos Autorregressivos de Médias Móveis (ARMA) não apresentem desempenho satisfatório, cedendo espaço a modelos mais robustos como, por exemplo, os modelos Autorregressivos de Heterocedasticidade Condicional generalizados (GARCH) e o *Markov-Switching* GARCH (MSGARCH).

Entretanto, quando houver algum tipo de autocorrelação, modelos híbridos são especialmente indicados. Usa-se um modelo linear para remover a autocorrelação antes da aplicação do modelo não linear. Muitos estudos já desenvolvidos evidenciam a superioridade da acurácia das previsões obtidas com modelos híbridos, independentemente das técnicas ou métodos utilizados na hibridização, tais como em Henao, Mejia e Cardona (2013), Sigauke (2017) e Yang et al. (2016), entre outros. Portanto, como se comportariam os modelos híbridos ARMA-GARCH e ARMA-MSGARCH na modelagem da volatilidade da criptomoeda *Ethereum*? Conseguiriam prever com elevada acurácia os ativos referentes?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

Este estudo tem como objetivo geral comparar a capacidade preditiva dos modelos GARCH e MSGARCH, aplicados em conjunto como o modelo ARMA, na modelagem da volatilidade das cotações diárias da criptomoeda *Ethereum*.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Identificar propriedades dos dados que compõem a série temporal das cotações da criptomoeda *Ethereum*;
- Estimar modelos GARCH a partir da série supracitada, a fim de identificar aquele que apresenta as melhores estimativas e previsões da volatilidade no curto prazo;
- Estimar modelos MSGARCH a partir da série supracitada, a fim de identificar aquele que apresenta as melhores estimativas e previsões da volatilidade no curto prazo;
- Refletir criticamente sobre as diversas etapas utilizadas nas modelagens GARCH e MSGARCH, identificando e discutindo as principais semelhanças e diferenças.

1.3 Justificativa

Nos últimos anos, as criptomoedas têm ganhado cada vez mais destaque e importância no cenário econômico global. O surgimento do *Bitcoin*¹ em 2009 e o subsequente surgimento de várias outras criptomoedas trouxeram consigo um novo paradigma econômico baseado em tecnologia *blockchain*. De acordo com [Luo et al. \(2022\)](#), as criptomoedas se tornaram uma classe de ativos atrativa para investidores (*traders*) e até mesmo para instituições financeiras tradicionais em função de seu crescimento exponencial. Portanto, compreender e prever o comportamento dessas moedas digitais é de extrema importância para uma gestão eficiente de investimentos nesse novo setor do mercado financeiro.

As criptomoedas, entretanto, são conhecidas por sua alta volatilidade, o que pode ser extremamente vantajoso em determinado momento, deixando de ser no momento seguinte. Os preços desses ativos podem sofrer flutuações significativas em curtos períodos, resultando em oportunidades de lucro substanciais, mas também em riscos consideráveis ([CORBET et al., 2019](#)). Nesse contexto, a capacidade de prever os movimentos dos preços das criptomoedas pode fornecer uma vantagem estratégica para os investidores, permitindo-lhes tomar decisões mais consistentes de compra, venda ou retenção desses ativos. Portanto, pode-se dizer que a previsão dos preços desses ativos tem o potencial de reduzir riscos e aumentar a lucratividade dos investimentos.

O mercado de criptomoedas é caracterizado por uma série de desafios únicos. Diferentemente do mercado de ações tradicional, as criptomoedas não são regulamentadas por autoridades governamentais e estão sujeitas a uma série de influências externas, como mudanças na legislação e regulamentação, eventos geopolíticos e avanços tecnológicos ([CORBET et al., 2019](#)). Além disso, o mercado de criptomoedas é altamente descentralizado e operado 24 horas por dia, sete dias por semana, tornando a análise e a previsão dos preços

¹ Livros públicos onde são registradas todas as transações de criptomoedas

ainda mais complexas ([ARAS, 2021](#)). Portanto, a pesquisa e o desenvolvimento de métodos de previsão específicos para criptomoedas são necessários para enfrentar esses desafios e fornecer previsões valiosas aos investidores. A previsão de cotações de criptomoedas é um campo emergente de pesquisa que apresenta oportunidades de contribuição tanto para a academia quanto para a prática financeira ([BERNARDO; VIEIRA; PEIXE, 2022](#)). Para a academia, por possibilitar o estudo de cenários mais complexos, propiciando o desenvolvimento de novos métodos e técnicas, e para área financeira, por possibilitar um maior controle sobre os riscos em investimentos.

Em suma, o desenvolvimento deste estudo sobre previsão de cotações da criptomoeda *Ethereum* é justificado pela crescente importância desses ativos no mercado financeiro e pela necessidade de lidar com a sua alta volatilidade.

1.4 Estrutura do trabalho

O trabalho foi estruturado em cinco capítulos. No primeiro é introduzido o tema, mostrando sua importância no contexto atual, os objetivos do estudo e a sua justificativa, além da sua estrutura. O segundo capítulo trata da revisão de literatura, apresentando o embasamento teórico necessário para o entendimento dos procedimentos realizados na execução deste trabalho, além de comentários sobre estudos relacionados ao tema. Já no terceiro capítulo está a metodologia empregada em seu desenvolvimento, que explica quais foram os passos efetuados para a sua realização. No quarto capítulo são apresentados os resultados da análise exploratórias de dados, da modelagem ARIMA-GARCH e da modelagem MSGARCH, acompanhados das respectivas discussões. Finalizando, o último capítulo manifesta as conclusões originadas do desenvolvimento deste estudo e faz algumas recomendações para futuros trabalhos relacionados ao tema.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta capítulo serão apresentados os principais conceitos que embasaram o desenvolvimento deste trabalho. Primeiramente, apresenta-se o conceito de criptomoeda, algumas das suas características e métodos de comercialização. Posteriormente, apresentam-se alguns conceitos sobre séries temporais. Em seguida são descritos os modelos ARIMA, GARCH e MSGARCH, seus principais fundamentos e protocolos de aplicação. Finalizando, são apresentados resumidamente e comentados alguns resultados de estudos similares.

2.1 Criptomoeda

As criptomoedas são ativos digitais que funcionam como meio de troca, garantindo a segurança por utilizar um sistema de criptografia, que também é utilizado para controlar a criação de novas unidades de *blockchains*, que são protocolos de registros distribuídos, e verificar transações. Por utilizar criptografia, elas não podem ser falsificadas, embora sejam mais suscetíveis a ações de pessoas maliciosas por terem seus ativos em carteiras digitais (CAMACHO; SILVA, 2019). Ainda, funcionam como uma moeda algorítmica, com oferta determinística e taxa de crescimento ligado ao rigor da matemática, sendo menos vulneráveis a flutuações do mercado (MATTOS; ABOUCHEDID; SILVA, 2020). Esta ideia, entretanto, não é compartilhada por Vo e Xu (2017), que consideram que toda informação se reflete quase que instantaneamente no preço das criptomoedas. Do ponto de vista histórico, as criptomoedas foram idealizadas por um grupo de anarquistas nas décadas de 1980 e 1990 e não são vinculadas a nenhum país, sendo muito pouco influenciadas por interferências ou manipulações governamentais, conforme evidenciam Mattos, Abouché e Silva (2020).

Importante enfatizar que, segundo Camacho e Silva (2019), as criptomoedas não são consideradas moedas por não possuírem os três requisitos mínimos para essa nomenclatura, a saber: funcionar como meio de troca, unidade de conta e reserva de valor (YERMACK, 2013). Em 2008, a crise financeira global reestruturou boa parte das instituições financeiras, fazendo com que o mercado buscasse soluções não ortodoxas (VO; XU, 2017). Assim, a primeira criptomoeda foi criada em 2009 por uma pessoa ou grupo que utilizou o pseudônimo de Satoshi Nakamoto, que havia lançado no ano anterior um artigo sobre sistema de pagamento eletrônico baseado em criptografia (ZHANG; XUE; LIU, 2019). Cabe destacar que, dada a esta crise, a falta de confiança no sistema bancário cresceu e, assim, um aumento na procura por criptomoedas foi observado (MATTOS; ABOUCHEDID; SILVA, 2020; CAPORALE; ZEKOKH, 2019). De acordo com Vo e Xu (2017), no ano de 2017 existiam mais de 700 tipos criptomoedas, e atualmente, segundo Danial (2023),

existem mais de 20000 tipos criptomoedas (*Altcoins*: criptomoedas alternativas), que compartilham características de mineração, ou seja, características de validação e inclusão de novas criptomoedas em *blockchains*.

É possível adquirir criptomoedas, comercializadas por empresas ou indivíduos chamados de mineradores, em sites criados para sua comercialização, tais como: *Binance*¹, *FTX*², *Coinbase Exchange*³, *Kraken*⁴, *KuCoin*⁵, entre outros. O seu preço segue a lei da oferta e da procura, da mesma forma que no mercado financeiro, sendo afetado por notícias sociais, econômicas e políticas. Além disso, seu preço e a quantidade comercializada também são afetados pela resolução de um algoritmo, pois as empresas que comercializam este produto só conseguem adquirir mais criptomoedas quando o resolvem.

A aquisição de criptomoeda, normalmente em blocos, é registrada em *blockchains*, que se caracterizam como livros públicos onde são registradas todas as transações, mesmo que ocorram de pessoa para pessoa, sem a necessidade de um repositório central que atuaria como administrador. Para adquirir criptomoedas, o comprador solicita ao minerador a quantidade desejada, este minerador gera uma chave pública criptografada com instruções específicas e envia ao comprador. Assim, ao utilizar esta chave privada e ao ler as instruções, a transação é efetivada e a operação é registrada no *blockchain* (MATTOS; ABOUCHEDID; SILVA, 2020), conforme exposto na Figura 1.

Uma das principais criptomoedas disponíveis no mercado é denominada *Ethereum* e foi proposta por Vitalik Buterin em meados de 2013. Ela utiliza os chamados contratos inteligentes de linguagem de baixo nível (*bytecode*) e uma rede (*Ethereum*) capaz de prover uma máquina virtual que executa esse código. Entre julho e agosto de 2014 foi realizada uma venda online com oferecimento 11,9 milhões de moedas pré-mineradas, em plataformas classificadas em financeira (moedas, sistemas de *token*), semi-financeira (detecção de multidões) e não financeira (votação online, governança descentralizada) (PUSTIEK; KOS, 2017). Atualmente, a criptomoeda *Ethereum* é considerada a segunda maior criptomoeda do mercado, atrás somente da criptomoeda *Bitcoin*.

2.2 Conceitos básicos sobre modelagem de séries temporais

2.2.1 Modelos lineares e não lineares

Uma série temporal nada mais é do que um conjunto de observações de uma variável ordenadas no tempo. Ela pode ser descrita por um modelo linear, segundo Box et al.

¹ <https://www.binance.com/> (acesso em 22 de Abril de 2022)

² <https://ftx.com/> (acesso em 22 de Abril de 2022)

³ <https://pro.coinbase.com> (acesso em 22 de Abril de 2022)

⁴ <https://www.kraken.com> (acesso em 22 de Abril de 2022)

⁵ <https://www.kucoin.com> (acesso em 22 de Abril de 2022)

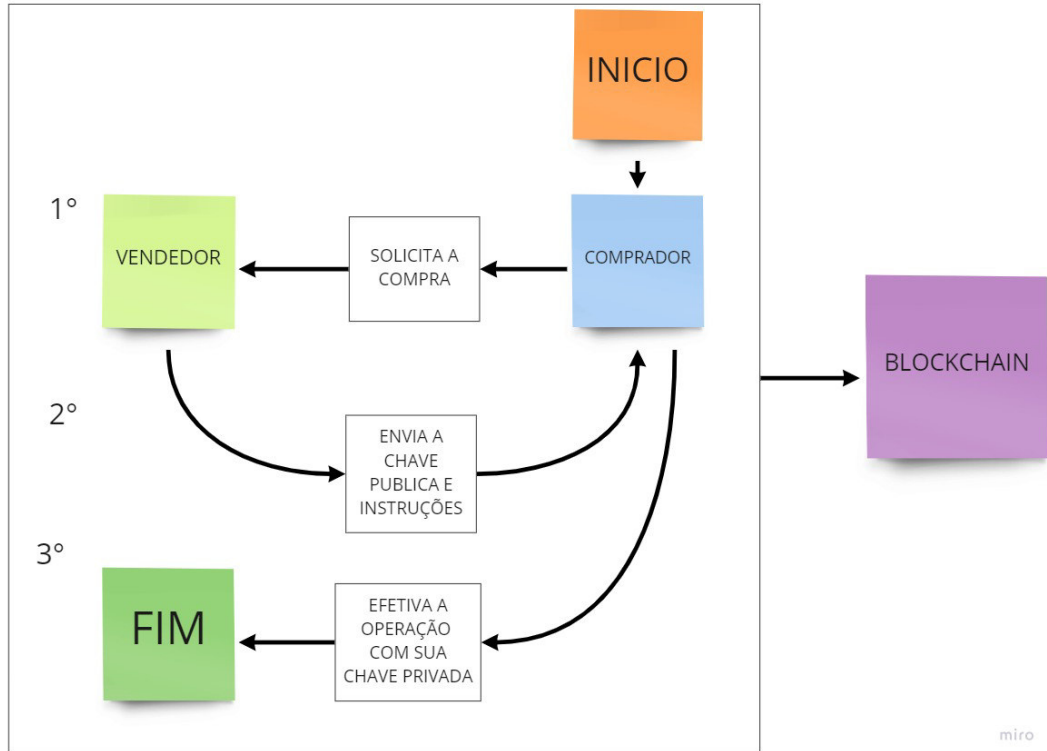


Figura 1 – Dinâmica de funcionamento do mercado de criptomoedas
Fonte: Autor

(2020), quando puder ser escrita conforme Eq. 2.1:

$$\tilde{y}_t = a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots = a_t + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i a_{t-i}, \quad (2.1)$$

onde: que y_t é a t-ésima observação do processo, $\tilde{y}_t = y_t - \mu$ é o t-ésimo desvio do processo de alguma origem ou da sua média (μ) caso o processo seja estacionário, a_t é uma variável aleatória com comportamento de ruído branco e ψ_i s são os coeficientes da combinação linear, $i = 1, 2, \dots, \infty$.

Isto significa que os valores de $\tilde{y}_t$ resultam de uma soma ponderada de valores presentes e passados de um processo de ruído branco a_t , que pode ser considerado como uma série de choques que impulsionam o sistema. Mais detalhes sobre ruído branco são apresentados na seção 2.2.4.

Os modelos não lineares devem ser utilizados em séries temporais que não podem ser escritas na forma da Eq. 2.1, por possuírem, segundo Morettin e Toloi (2018), um comportamento de mudanças repentinas, variância(condicional) evoluindo no tempo (volatilidade) e irreversibilidade no tempo. Portanto, nestes modelos a variância não é constante no tempo, dependendo de estados passados, e sofre alterações, sendo impossível o regresso ao estado inicial. Para modelar séries com estas propriedades são utilizados modelos não lineares ou híbridos, como modelos ARCH-GARCH, muito usados na modelagem da volatilidade estocástica, ou seja, com a variabilidade comporta-se como processo estocástico.

2.2.2 Processo estocástico

Sejam (Ω, F, P) um espaço de probabilidade, onde Ω representa o espaço amostral, F , os subconjuntos de Ω e P a probabilidade relacionada a cada um deles.

Seja $\mathbb{Z}$ um conjunto de índices de números reais.

Seja $y(\cdot, \cdot)$ uma função definida por $y(\cdot, \cdot): S \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, onde S representa várias sequências de realizações de um processo estocástico.

De acordo com [Bueno \(2020\)](#), a sequência ordenada de variáveis aleatórias $\{y(\cdot, t), t \in \mathbb{Z}\}$ é um processo estocástico (aleatório). Portanto, para cada $t \in \mathbb{Z}$, $y(\cdot, t)$ representa uma variável aleatória em S . Para qualquer $s \in S$, a sequência $y(s, \cdot)$ representa uma realização de um processo estocástico. Portanto, $y(s, t)$ é um número real.

2.2.3 Estacionariedade e ergodicidade

Estacionariedade

Para os métodos estatísticos, estacionariedade é um dos principais conceitos para a modelagem de uma série temporal. Esta propriedade pode ser fraca ou estrita. Segundo [Bueno \(2020\)](#), um processo estocástico ou série temporal, $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ considerando $\mathbb{Z} = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$, é fracamente estacionário se:

1. $E(y^2) < \infty$;
2. $E(y_t) = \mu$, para todo $t \in \mathbb{Z}$; e
3. $E(y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu) = \gamma_j$,

em que: E representa valor esperado, μ é a média, γ_j é autocovariancia com j defasagens.

Isto significa que o valor esperado e a variância são constantes ao longo do período e a autocovariância não depende do tempo, apenas da distância temporal entre as observações.

O processo estocástico ou série temporal é estritamente estacionário se, além das propriedades supracitadas, a função distribuição conjunta F de $\{y_{t_i}\}_{i=1}^2$ for igual à função de distribuição conjunta de $\{y_{t_j+h}\}_{i=1}^k$, $h \in \mathbb{Z}$, isto é:

$$F(y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_k}) = F(y_{t_1+h}, y_{t_2+h}, \dots, y_{t_k+h}). \quad (2.2)$$

Portanto, uma estacionariedade estrita não implica em estacionariedade fraca, pois na primeira não há garantia de que existam momentos finitos e independentes. Uma estacionariedade fraca não implica em estacionariedade estrita porque na primeira não há garantia de que a distribuição seja a mesma. Salienta-se que, para a modelagem estatística de uma série temporal basta que ela seja fracamente estacionária. Para maiores informações sobre processos estacionários consulte [Bueno \(2020\)](#) e [Morettin e Toloi \(2018\)](#)

Ergodicidade

A ergodicidade é outro conceito essencial, segundo [Bueno \(2020\)](#), para a modelagem de séries temporais. Esta propriedade permite considerar a própria série temporal como uma amostra representativa da variável a ser analisada.

Segundo [Bueno \(2020\)](#), um processo fracamente estacionário é ergódico para o primeiro momento se:

$$E(\bar{y}^{(s)}) \equiv \rho \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t^{(s)} = \rho \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S y_t^{(s)} \equiv E(y_t), \quad (2.3)$$

em que: s é uma realização específica do processo estocástico, S são todas as realizações do processo estocástico, y_t é a t -ésima observação de s ($t = 1, 2, \dots, T$), $E(\bar{y}^{(s)})$ representa o valor esperado das observações de s .

Um processo fracamente estacionário é ergódico para segundo momento se:

$$\frac{1}{T-j} \sum_{t=1}^T (y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu) \xrightarrow{P} \gamma_j \quad \forall j, \quad (2.4)$$

em que: y_t é a t -ésima observação ($t = 1, 2, \dots, T$), μ é a média das observações, γ_j é a autocovariância com j defasagens.

Essa expressão $\xrightarrow{P}$ converge em probabilidade para γ_j , ou seja, para o verdadeira valor da autocovariância com j defasagens a medida que o tamanho amostral cresce.

2.2.4 Ruído branco

O ruído branco é uma sequência de variáveis aleatórias em que a média é nula, a variância é constante e finita e a autocovariância também é nula.

([BUENO, 2020](#)) o define da seguinte maneira: seja uma sequência de variáveis aleatórias ϵ_t . Se para esta sequência:

1. $E(\epsilon_t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{Z}$;
2. $E(\epsilon_t^2) = \sigma_t^2$, para todo $t \in \mathbb{Z}$; e
3. $E(\epsilon_t; \epsilon_{t-j}) = 0$,

então este processo é um ruído branco, sendo representado por $RB(0, \sigma_t^2)$.

2.3 Modelos

Esta seção é destinada à apresentação dos modelos ARIMA, GARCH e MSGARCH e dos conceitos necessários para sua geração e validação.

2.3.1 Modelo ARIMA

O modelo autorregressivo integrado e de médias móveis (ARIMA) que pode, segundo [Morettin e Toloi \(2018\)](#), apresentar ou não sazonalidade, pode ser analisado por uma metodologia que faz uso de modelos paramétricos, conhecida como abordagem de Box-Jenkins ([WILSON, 2016](#)).

Esta metodologia considera dois tipos de componentes no modelo: os termos autorregressivos (AR) e os termos de médias móveis (MA), sendo identificado como ARMA(p,q). Neste caso, p representa a quantidade de termos autorregressivos e q representa a quantidade de termos de médias móveis. Um modelo ARMA(p,q) pode ser representado pela Eq. 2.5:

$$y_t - \mu = \phi_1(y_{t-1} - \mu) + \dots + \phi_p(y_{t-p} - \mu) + \epsilon_t - \theta_1\epsilon_{t-1} - \dots - \theta_q\epsilon_{t-q}, \quad (2.5)$$

onde: y_t é o t-ésimo valor observado ($t = 1, 2, \dots, T$), T é a quantidade de observações, μ é a média do processo, i é a defasagem do processo autorregressivo ($i = 1, 2, \dots, p$), j é a defasagem do processo de médias móveis ($j = 1, 2, \dots, q$), ϕ_i é o coeficiente associado ao i-ésimo termo autorregressivos e θ_j é o coeficiente associado ao j-ésimo termo de médias móveis e $\epsilon_t \sim \text{RB}(0, \sigma^2)$ é o t-ésimo erro.

Essa função, por motivos operacionais, costuma ser escrita usando-se o operador de retardo (B), conforme Eq. 2.6:

$$\phi(B)\tilde{y}_t = \theta(B)\epsilon_t, \quad (2.6)$$

onde: $\tilde{y}_t = y_t - \mu$ e $\phi_p(\cdot)$ e $\theta_q(\cdot)$ são polinômios de ordens p e q, associados aos termos autorregressivos e de médias móveis, respectivamente, e B ($B^k y_t = y_{t-k}$) é o operador de retardo.

Quando $\mu = 0$, o modelo descrito pela Eq. 2.5, pode ser reescrito conforme Eq. 2.7:

$$y_t = \theta_0 + \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \epsilon_{t-q}, \quad (2.7)$$

onde: $\theta_0 = \mu(1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)$.

Para que se faça esta modelagem, é necessário que a série seja estacionária. Quando a série não o for, é possível transformá-la por meio de diferenciações para adquirir esta propriedade. Se considerarmos d como a quantidade de diferenciações necessárias, teremos que um processo $\{y_t, t \in Z\}$ segue um modelo ARIMA(p,d,q) se $\Delta^d y_t$ seguir um modelo ARMA(p,q), ou seja:

$$\phi(B)\Delta^d y_t = \theta(B)\epsilon_t. \quad (2.8)$$

2.3.1.1 Testes de Estacionariedade

- *Teste de Dickey-Fuller e teste de Dickey-Fuller Aumentado*

O teste de Dickey-Fuller Aumentado (ADF) foi criado por Dickey e Fuller (1979, 1981). Ele analisa a estacionariedade da série em função da presença de raiz unitária, ou seja, se forem encontradas evidências de ausência de raiz unitária, a série pode ser considerada estacionária.

O teste proposto inicialmente, teste Dickey-Fuller (DF), considera um processo autorregressivo de ordem 1 com erro com comportamento de ruído branco (Eq. 2.9), o que nem sempre acontece.

$$y_t = \phi y_{t-1} + \epsilon_t. \quad (2.9)$$

De acordo com o teste DF, se o coeficiente de y_{t-1} for igual a 1 tem-se uma raiz unitária, o que gera uma situação de não estacionariedade. O teste considera então, como hipótese nula, $\phi = 1$, indicando presença de raiz unitária, como hipótese alternativa, $\phi < 1$, indicando ausência de raiz unitária.

Uma forma alternativa de considerar a Eq. 2.9 está representada na Eq. 2.10:

$$\Delta y_t = \alpha y_{t-1} + \epsilon_t, \quad (2.10)$$

em que: $\alpha = \phi - 1$.

Logo, $H_0: \phi = 1$ é equivalente $H_0: \alpha = 0$. Neste caso $\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = \epsilon_t$, ou seja, a primeira diferença das observações da série temporal, caracterizando como um caminho aleatório. Por caminho aleatório entende-se por um processo onde a variável evolui ao longo do tempo de maneira aleatória.

Supondo uma série com $T + 1$ observações, a partir da Eq. 2.10, o parâmetro ϕ , pode ser estimado por mínimos quadrados ordinários, e subtraindo 1 do valor estimado, obtêm-se uma estimativa do parâmetro α , conforme a Eq. 2.11:

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{t=1}^T y_{t-1} y_t}{\sum_{t=1}^T y_{t-1}^2} - 1. \quad (2.11)$$

Considerando a variância amostral determinada pela Eq. 2.12:

$$S^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (\Delta y_t - \hat{\alpha} y_{t-1})^2, \quad (2.12)$$

o desvio-padrão do coeficiente $\hat{\alpha}$ pode ser determinado pela Eq. 2.13:

$$s(\hat{\alpha}) = \frac{S}{\sqrt{\sum_{t=1}^T y_{t-1}^2}}. \quad (2.13)$$

As estimativas obtidas pelas Equações 2.11 e 2.13 são usadas para determinar a estatística t , conforme a Eq. 2.14:

$$DF = \frac{\hat{\alpha}}{s(\hat{\alpha})}. \quad (2.14)$$

A estatística t calculada de modo convencional é conhecida como estatística τ , cujos valores críticos foram tabulados em Dickey e Fuller (1979) com base em simulações de Monte Carlo. Esse ajuste foi feito em função da presença de correlação serial.

Na proposição do teste DF foram considerados modelos com tendência e constante (TC), só com constante (C) e sem tendência e nem constante (N).

No teste DF, o termo de erro (ϵ_t) tem que ser independente, o que nem sempre acontece. Para contornar esse problema, Dickey e Fuller propuseram o teste Dickey-Fuller aumentado (ADF), modificando a Eq. 2.10 na Eq. 2.15:

$$\Delta y_t = \alpha y_{t-1} + \sum_{i=1}^m \beta_i \cdot \Delta y_{t-i} + \epsilon_t. \quad (2.15)$$

A modificação consistiu em acrescentar o termo $\sum_{i=1}^m \beta_i \cdot \Delta y_{t-i}$, que nada mais é que uma combinação linear entre m diferenças defasadas, ou seja: $\Delta y_{t-1} = y_{t-1} - y_{t-2}$; $\Delta y_{t-2} = y_{t-2} - y_{t-3}$, e assim sucessivamente. Os coeficientes β_i são os pesos atribuídos à i -ésima diferença da defaseagem. Essa modificação não altera os valores críticos da estatística t recalculada, portanto pode-se utilizar os mesmos valores já definidos Dickey e Fuller (1979). No teste ADF também foram consideradas três situações: modelos com tendência e constante (TC), só com constante (C) e sem tendência e nem constante (N).

- *Teste de Phillips – Perron*

Outro teste usado para avaliar a estacionariedade é o Phillips-Perron, e como dito por Bueno (2020), ele faz um retoque não paramétrico no teste de Dickey e Fuller (1979), o que torna possível aplicar o teste mesmo com variáveis defasadas dependentes e correlação serial nos erros. Como as estimações das equações e dos testes são idênticos ao teste de Dickey e Fuller (1979), sua interpretação é análoga, sendo também considerados modelos com tendência e constante, só com constante e sem tendência e nem constante.

- *Teste KPSS*

Também pode ser utilizado para verificar a presença de raiz unitária, o Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin (KPSS), que esse faz uma abordagem diferente para contornar a dificuldade do teste ADF. Este último tem um baixo poder, principalmente quando a raiz está muito próxima do círculo unitário ($\phi < 1$), o que faz com que não consiga rejeitar a hipótese nula de presença de raiz unitária.

Seja um processo estocástico na forma da Eq. 2.16:

$$y_t = x_t + u_t \quad (2.16)$$

onde: x_t é o componente nível, u_t é o componente regular como se comporta como um ruído branco, u_t é $RB(0, \sigma^2)$.

O teste KPSS verifica se a variância de x_t é nula, sendo o processo considerado estacionário. Suas hipóteses são: $H_0 : \sigma^2 = 0$ e $H_1 : \sigma^2 > 0$, o inverso em comparação com o teste ADF.

A estatística de teste é calculada conforme Eq. 2.17:

$$KPSS = \sum_{t=1}^T \frac{S_t^2}{T^2 \sigma_l^2}, \quad (2.17)$$

em que: S_t é a soma parcial dos resíduos que foram estimados na regressão ($t = 1, 2, \dots, T$) e σ_l^2 é a variância de longo prazo (BUENO, 2020).

2.3.1.2 Autocovariância e autocorrelação

Ao avaliar a evolução de uma variável no tempo, mede-se a magnitude do evento que ocorre em determinado tempo. Sua análise no domínio do tempo é feita em função da autocovariância (γ) e da autocorrelação. A autocovariância, que mede a associação entre os resultados com j defasagens, e de acordo com Bueno (2020), pode ser descrita como uma particular realização, s , de um processo estocástico, definido pela Eq. 2.18:

$$\gamma_{t,t-j} \equiv E[(y_t - \mu_t)(y_{t-j} - \mu_{t-j})] = p \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S (y_t^{(s)} - \mu_t)(y_{t-j}^{(s)} - \mu_{t-j}). \quad (2.18)$$

Outro ponto ressaltado por Bueno (2020), é que se $j = 0$, tem-se a variância equivalente a γ_{0t} .

A autocorrelação nada mais é do que a autocovariância padronizada e pode ser facilmente definida pela Eq. 2.19:

$$\rho_{jt} \equiv \frac{\gamma_{jt}}{\gamma_{0t}}. \quad (2.19)$$

A autocorrelação serve para medir o comprimento e a memória de um processo, ou seja, o quanto uma observação depende dos valores passados. Quando o resultado for próximo de 1, a indicativo de uma forte autocorrelação positiva entre os valores da série; Quando o resultado for próximo de -1, a um indicativo de uma forte autocorrelação negativa entre os valores da série. Quando o resultado é próximo de 0 indicam que não há correlação entre os valores da série.

Na modelagem ARMA/ARIMA as ordens do modelo p e q podem ser definidas pelas função de autocorrelação (FAC) e autocorrelação parcial (FACP). Estas funções nada

mais são que uma sequência de autocorrelações ou autocorrelações parciais determinada para diferentes defasagens. Conforme evidenciado por [Thomaz \(2019\)](#), a FAC de um AR(p) decai exponencialmente, o que na prática significa que a autocorrelação tende a desaparecer com o tempo, o que é lógico de se pensar, visto que, em geral, quanto maior a distância temporal entre dois eventos, menor será a relação entre eles. Já a FACP de um modelo AR(p) é truncada na ordem p, enquanto que é exponencialmente declinante no caso de um modelo MA(q). Portanto, em teoria, é possível identificar a ordem q de um processo AR(p) puro e a ordem q de um processo MA(q) puro pela interpretação conjunta da FAC e da FACP.

2.3.1.3 Critério de informação Bayesiano

O critério de informação é uma métrica utilizada para avaliar a adequação de um modelo, de acordo com sua parcimonialidade. Isto significa que, além de considerar os erros cometidos pelo modelo, também considera a precisão com que o erro é determinado, estando diretamente ligado ao tamanho da série e à quantidade de coeficientes do modelo.

Neste estudo foi utilizado o critério de Informação Bayesiano (BIC), que se baseia nos princípios da Teoria da Decisão Bayesiana, pois segundo [Silveira \(2023\)](#), esse critério é o que faz com que o teste ADF apresente melhor desempenho. O teste foi proposto por [Schwarz \(1978\)](#) como uma extensão do Critério de Informação Akaike (AIC), combinando a verossimilhança dos dados com uma penalização para o número de parâmetros do modelo. A ideia subjacente é que modelos mais complexos têm maior capacidade de ajuste aos dados de treinamento, mas podem sofrer de sobre ajuste e ter uma menor capacidade de generalização para novos dados ([VRIEZE, 2012](#)). O critério BIC pode ser calculado conforme Eq. 2.20 :

$$BIC(p, q) = \ln \hat{\sigma}^2 + N \frac{\ln T}{T}, \quad (2.20)$$

em que: p e q são parâmetros da modelagem ARMA(p,q), N é a quantidade de parâmetro do modelo sendo $N = p + q$, se os modelos não têm constante, e se o modelo tem constante $N = p + q + 1$ e T é o número de observações. Quanto menor o valor de BIC, melhor é a qualidade do ajuste.

2.3.1.4 Teste Jarque-Bera

O teste de Jarque-Bera é um teste utilizado para verificar se os dados de uma determinada amostra seguem uma distribuição Normal. A hipótese nula do teste de Jarque-Bera é que a amostra segue uma distribuição Normal. A hipótese alternativa é que a amostra não segue uma distribuição Normal. Ele é baseado em duas medidas estatísticas: coeficiente de assimetria (igual a 0) e coeficiente de curtose (igual a 3). A estatística de teste (JB), calculada conforme Eq. 2.21, que segue uma distribuição Qui-quadrado com dois graus de liberdade sob a hipótese nula.

$$H_0 : E(\epsilon_t^s)^3 = 0 \wedge E(\epsilon_t^s)^4 = 3$$

$$H_1 : E(\epsilon_t^s)^3 \neq 0 \vee E(\epsilon_t^s)^4 \neq 3$$

$$JB = \frac{T}{6} \left[\frac{\sum_{t=1}^T (\hat{\epsilon}_t)^3}{T} \right] + \frac{T}{24} \left[\frac{\sum_{t=1}^T (\hat{\epsilon}_t)^4}{T} - 3 \right] \xrightarrow{d} \chi_2^2, \quad (2.21)$$

em que: ϵ_t é o t-ésimo resíduo padronizado ($t= 1,2,...,T$), $E(\epsilon_t^s)^3$ é uma métrica para a assimetria, $E(\epsilon_t^s)^4$ é uma métrica para a curtose, χ_2^2 é a estatística Qui-Quadrado com dois graus de liberdade.

A rejeição da hipótese nula indica a não normalidade da série, a não rejeição indica apenas que o terceiro e quarto momentos da distribuição empírica coincidem com os da distribuição Normal (BUENO, 2020).

2.3.1.5 Teste ARCH

O teste Heterocedasticidade Condicional Autorregressiva (ARCH) é um teste estatístico utilizado para detectar a presença de heteroscedasticidade condicional em uma série temporal. Esse teste é frequentemente aplicado em modelos econométricos para verificar a adequação dos pressupostos sobre a variância dos erros. A heteroscedasticidade condicional ocorre quando a variância dos resíduos de um modelo varia conforme a informação disponível no próprio modelo, como os próprios resíduos passados. Essa variância variável pode afetar a eficiência das estimativas e invalidar a inferência estatística.

Considerando que a variância segue o modelo descrito na Eq. 2.22:

$$\hat{\epsilon}_t^2 = \beta_1 \hat{\epsilon}_{t-1}^2 + \beta_2 \hat{\epsilon}_{t-2}^2 + \dots + \beta_h \hat{\epsilon}_{t-h}^2 + u_t, \quad (2.22)$$

o teste ARCH verifica as hipóteses:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_h = 0$$

$$H_1 : \text{Pelo menos um } \beta_i \neq 0, \text{ sendo } i = 1, 2, 3...h.$$

É possível mostrar que a estatística utilizada pelo teste ARCH ($LM_h = T \cdot R^2$) segue uma distribuição Qui-quadrado com h graus de liberdade.

2.3.1.6 Teste Ljung-Box

O teste Ljung-Box é um teste estatístico amplamente utilizado para verificar a presença de autocorrelação serial em uma série temporal. Especificamente, ele testa a hipótese nula de ausência de autocorrelação serial até uma determinada defasagem, contra a hipótese alternativa de presença de autocorrelação serial (CHEN, 2002). A estatística Q

de Ljung-Box é calculada conforme Eq. 2.23:

$$Q = T(T+2) \sum_{j=1}^n \frac{\hat{\rho}_j^2}{T-j} \xrightarrow{d} \chi_n^2, \quad (2.23)$$

em que a média amostral da série de resíduos ϵ_t é dada pela Eq. 2.24 e a autocorrelação amostral pela Eq 2.25, apresentadas a seguir:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sum_{t=1}^T \epsilon_t}{T}. \quad (2.24)$$

$$\hat{\rho}_j = \frac{\frac{\sum_{t=j+1}^T (\epsilon_t - \bar{\epsilon})(\epsilon_{t-1} - \bar{\epsilon})}{T}}{\frac{\sum_{t=1}^T (\epsilon_t - \bar{\epsilon})^2}{T}}, j = 1, 2, \dots, \quad (2.25)$$

2.3.1.7 Teste McLeod-Li

O teste McLeod-Li, segundo [Chen \(2002\)](#), é um teste estatístico utilizado para verificar a presença de autocorrelação serial em uma série temporal. Especificamente, ele testa a hipótese nula de ausência de autocorrelação serial, contra a hipótese alternativa de presença de autocorrelação serial em uma série temporal. No teste McLeod-Li, a estatística de Q de Ljung-Box é ajustada pelo número de defasagens e pelo tamanho da amostra, considerando o viés que pode ocorrer em pequenas amostras. Sua determinação é feita conforme Eq. 2.26:

$$Q = T(T+2) \sum_{j=1}^n \frac{\hat{\rho}_2^2(j)}{T-j} \quad (2.26)$$

onde:

$$\hat{\rho}_2(j) = \frac{\sum_{t=j+1}^n (\epsilon_t^2 - \hat{\sigma}_T^2)(\epsilon_{t-j}^2 - \hat{\sigma}_T^2)}{\sum_{t=1}^T (\epsilon_t^2 - \hat{\sigma}_T^2)}, \quad (2.27)$$

e

$$\hat{\sigma}_T^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \epsilon_t^2. \quad (2.28)$$

2.3.2 GARCH

Antes de falarmos dos modelos heterocedasticidade condicional autorregressivo generalizado (GARCH) é necessário entender os modelos autorregressivos com heterocedasticidade condicional (ARCH), que foram desenvolvidos por [Engle \(1982\)](#) com o objetivo de estimar a variância da inflação. De acordo com [Morettin \(2016\)](#), este modelo parte da ideia que o retorno r_t é não correlacionado serialmente, mas a variância condicional (volatilidade) depende dos retornos por meio de uma função quadrática.

Um modelo ARCH(m) pode ser escrito pelas equações 2.29 e 2.30:

$$r_t = \sqrt{h_t} \epsilon_t, \quad (2.29)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m r_{t-m}^2, \quad (2.30)$$

em que: ϵ_t é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média zero, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, (m-1)$ e $\alpha_m > 0$, h_t é a t -ésima variância condicional que é resultante de m resíduos quadraticos passado. De acordo com [Morettin \(2016\)](#), é bastante usual considerar que os erros seguem uma distribuição normal ou distribuição t de Student.

Uma generalização do modelo ARCH, sugerida por Bollerslev ([1986,1987,1988](#)), é o modelo denominado autoregressivo de heterocedasticidade condicional generalizado (GARCH). De acordo com [Morettin \(2016\)](#), um modelo GARCH é mais parcimonioso que um modelo ARMA, e pode ser usado na descrição da volatilidade por conter menos parâmetros do que um modelo ARCH, por captar melhor a não linearidade.

Um modelo GARCH(m,n) é definido pelas equações [2.31](#) e [2.32](#), onde m representa a quantidade de resíduos quadraticos passado e n a quantidade de variâncias condicionais passadas:

$$r_t = \sqrt{h_t} \epsilon_t, \quad (2.31)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^n \beta_j h_{t-j}, \quad (2.32)$$

em que: ϵ_t são variáveis aleatórias, independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), com média zero, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, (m-1)$, $\beta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, (n-1)$, $\alpha_m > 0$, $\beta_n > 0$, $\sum_{i=1}^q (\alpha_i + \beta_j) < 1$ e $q = \max(m, n)$.

De acordo com [Morettin \(2016\)](#), os coeficientes positivos impõem uma condição suficiente, mas não necessária, para que $h_t > 0$. Este autor também evidencia que, na prática, na maioria dos casos os erros seguem distribuição Normal, distribuição t de Student ou a distribuição de Erro Generalizada.

2.3.2.1 Volatilidade Realizada

A volatilidade realizada é uma abordagem que utiliza os retornos históricos para modelar a volatilidade futura de um ativo, considerando-a uma variável latente (não observada), sendo normalmente utilizado em modelos da família ARCH e modelos de volatilidade estocástica ([MORETTIN, 2016](#)). É chamada de “realizada”, por ser calculada com base nos retornos reais observados, em oposição a estimativas ou previsões. Ao calcular a volatilidade realizada, é comum usar uma medida de dispersão, como a variância ou o desvio padrão dos retornos. Essas medidas fornecem uma estimativa da extensão das variações dos retornos em relação à sua média.

Como dito por [Morettin \(2016\)](#), é bastante usual utilizar os dados intradiários para modelar e prever a volatilidade. A ideia é considerar a soma dos quadrados dos retornos obtidos em intervalos de minutos durante um dia para estimar a volatilidade desse dia, criando uma série temporal que pode ser modelada. No presente estudo, a volatilidade realizada foi utilizada no período de teste ou validação, permitindo estimar a capacidade preditiva dos modelos gerados.

2.3.3 MSGARCH

O modelo de heteroscedasticidade condicional autorregressivo generalizado com mudança de regime Markoviano (MSGARCH) vem sendo aplicado em várias áreas da ciência, tais como economia, finanças, meteorologia e engenharia. Uma das suas vantagens é que ele captura as variações da variabilidade nos períodos de baixa e de alta volatilidade, permitindo a utilização de diferentes modelos GARCH.

Como dito por [Oliveira e Pereira \(2018\)](#), a mudança de regime consiste em modelos que se caracterizam por dois processos, um modelo autorregressivo e um processo estocástico. A mudança de regime Markoviano é um modelo dinâmico, com parâmetros variantes no tempo, conforme o estado onde o processo se encontra, entre os considerados na modelagem. Esses autores consideram o modelo MSGARCH flexível para descrever a dinâmica da volatilidade. Neste caso, as autocorrelações nos períodos de alta e de baixa da volatilidade diferem, havendo uma transição da volatilidade no tempo.

No modelo MSGARCH, como os parâmetros são condicionais aos estados, a volatilidade também o será. Em ambos os modelos, MSGARCH e GARCH, a volatilidade depende dos choques passados e da volatilidade passada.

Para tornar tratável a estimação da volatilidade com mudança de regime temos diferentes abordagens. Neste trabalho utilizaremos a abordagem de [Haas, Mitnik e Paolella \(2004\)](#), que considera a desagregação da volatilidade nos estados, permitindo um modelo, com propriedades dinâmicas mais claras e estimação compreensiva.

O modelo MS(2)GARCH(1,1), que denota o modelo GARCH(1,1) com mudança de regime com dois estados (E_t), é dado pela Eq. 2.33 :

$$r_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2); \quad (2.33)$$

$$h_t(E_t = 1) = \alpha_{0_1} + \alpha_{1_1} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_{1_1} h_{t-1}^2, \quad \text{se } E_t = 1; \quad (2.34)$$

$$h_t(E_t = 2) = \alpha_{0_2} + \alpha_{1_2} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_{1_2} h_{t-1}^2, \quad \text{se } E_t = 2; \quad (2.35)$$

com as probabilidades de transição:

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix},$$

onde: p_{11} representa a probabilidade do processo permanecer no estado 1, p_{12} representa a probabilidade de transição do processo do estado 1 para o estado 2, p_{21} representa a probabilidade de transição do processo do estado 2 para o estado 1 e p_{22} é a probabilidade do processo de permanecer no estado 2.

A mudança de regime é útil por possibilitar a identificação de diferentes mecanismos gerador de dados em uma mesma série temporal, o que pode ser bastante interessante em modelagens de series financeiras.

No modelo MSGARCH do [Haas, Mittnik e Paoletta \(2004\)](#), a volatilidade depende da chegada de nova informação e volatilidade passada no mesmo estado. Quando temos um modelo onde uma volatilidade maior (ou menor) no passado resulta em uma volatilidade também maior (ou menor) no presente, dentro da mesma situação, isso significa que não relacionamos mais a volatilidade entre diferentes cenários. Uma vantagem nesta abordagem é que os parâmetros têm interpretação igual ao modelo GARCH, em que α_1 mensura o impacto do choque passado e β_1 sendo a memória da volatilidade. Pode-se generalizar o modelo MSGARCH com mudança de regime para E estados, com a seguinte especificação matricial:

$$H_t = A_0 + A_1 \varepsilon_{t-1}^2 + B_1 H_{t-1} \quad (2.36)$$

$$H_t = [h_t^2(s=1)h_t^2(s=2)| \cdot h_t^2(s=E)]', \quad (2.37)$$

$$A_0 = [\alpha_{0_1}, \alpha_{0_2}, \dots, \alpha_{0_E}]', \quad (2.38)$$

$$A_1 = [\alpha_{1_1}, \alpha_{1_2}, \dots, \alpha_{1_E}]', \quad (2.39)$$

$$B_1 = \text{diag}(\beta_{1_1}, \beta_{1_2}, \dots, \beta_{1_E}), \quad (2.40)$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1E} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2E} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{E1} & p_{E2} & \cdots & p_{EE} \end{bmatrix}$$

em que: ε_t^2 é um vetor com os erros quadráticos passados, A_0 é o vetor com constantes, A_1 é o vetor com os pesos atribuídos aos erros quadraticos passados, B_1 é a diagonal da matriz

que com os pesos atribuídos as variâncias condicionais passadas. P_{ij} são os elementos da matriz de transição que apresentam a probabilidade de passagem do estado i para o estado j .

A estimação do MSGARCH é feita a partir da maximização do logaritmo da função de verossimilhança. O método da máxima verossimilhança tem sido um dos mais utilizados na estimação de coeficientes de modelos que descrevem o comportamento por produzir estimadores com propriedades estatísticas, principalmente se a amostra for grande. Neste caso o estimador é aproximadamente não tendencioso e sua variância é aproximadamente tão pequena quanto seria possível encontrar com outro estimador. Mais detalhes podem ser encontrados em [Magalhães \(2004\)](#).

2.4 Estudos relacionados

A busca foi realizada na base de dados Science Direct em janeiro de 2023 por meio das palavras-chave MSGARCH e *crypto currencies*. Foram localizados 8 artigos publicados entre os anos de 2019 e 2023. As principais informações estão apresentadas no Quadro 1 e no Quadro 2. Conforme mostrado no Quadro 1, a maioria dos trabalhos utilizou dados reais, com exceção de [Corbet et al. \(2019\)](#), que apresenta uma revisão sistemática e ressalta alguns pontos sobre a literatura das criptomoedas, sendo o trabalho com mais citações entre os selecionados. Estas quantidades apresentadas no Quadro 1 foram atualizadas em julho de 2023.

As informações apresentadas no Quadro 2 evidenciam que a série mais utilizada foi com informações sobre o *Bitcoin*, sendo empregadas diversas técnicas de modelagem para posterior previsão. Além do GARCH, foram utilizadas muitas de suas variações, tais como: MSGARCH, Glosten-Jagannathan-Runkle GARCH (GJR-GARCH) e Exponencial GARCH (EGARCH), mais detalhes sobre esses modelos [Morettin \(2016\)](#) e [Morettin e Tolo \(2020\)](#). Também foram utilizados métodos ou técnicas computacionais, tais como: KNN, SVM e *random forest* ([ASSOULINE; POGAM; PITTET, 2021](#)) ([CARDOSO et al., 2023](#)), entre outros. Dentre estes procedimentos, o MSGARCH apresentou bom desempenho, fornecendo previsões mais precisas que outros modelos já consagrados.

O artigo de [Ardia et al. \(2018\)](#) teve como objetivo criar modelos GARCH de regime único para comparar com modelos com mudança de regime (MSGARCH), os quais utilizaram como dados o log-retorno dos dados diários de 426 ações selecionadas pelo índice SP 500. Os dados foram obtidos do *Datastream*, sendo cada série de preços expressa na moeda local. Foi descoberto que os modelos MSGARCH, que recorrem à mudança de regime de Markov, forneceram previsões de *Value-at-Risk* (medida que informa o quanto se pode perder com uma determinada probabilidade sobre um horizonte pré fixado), *expected shortfall* (medida de risco que complementa o valor em risco) e distribuição da cauda

Quadro 1 – Autor, citações, objetivos e tipo de estudo dos artigos selecionados na base Science Direct

Autor (ano)	Citações	Objetivo	Tipo de estudo
Ardia et al. (2018)	89	Testar a presença de mudança de regime e comparar ao MSGARCH com um regime	Empírico
Corbet et al. (2018)	571	Revisão sistemática de literatura sobre criptomoedas	Teórico
Caporale; Zekokh (2019)	105	Selecionar o melhor modelo ou conjunto de modelos	Empírico
Muhammad et al. (2019)	22	Modelar a volatilidade dos quatro metais preciosos mais famosos	Empírico
Xiao (2019)	22	Estudar os efeitos de contágio de risco do mercado chinês de ações	Empírico
Aras (2021)	21	Estudar o efeito de diferentes ordens do modelo GARCH nas previsões do Bitcoin por modelo de aprendizado de máquina	Empírico
Tan et al. (2021)	13	Comparar modelos na previsão do <i>Bitcoin</i> e realizar buscas diárias no Google	Empírico
Wu (2021)	8	Investigar o efeito da janela na estimativa de coeficientes	Empírico

esquerda melhores do que seus equivalentes de regime único.

O artigo do [Corbet et al. \(2019\)](#) apresenta uma revisão sistemática da literatura com base nos principais tópicos associados ao mercado de criptomoedas desde o seu desenvolvimento como um ativo financeiro em 2009, abrangendo publicações sobre criptomoedas até agosto de 2018. Sua principal conclusão foi a identificação de existência de lacunas na literatura relacionada às criptomoedas, como: ampliar conjuntos de dados e o número de criptomoedas estudadas, estudar as questões legais, econômicas e regulatórias das criptomoedas, questões de informação assimétrica, desenvolvimento teórico, benefícios e usos alternativos potenciais da tecnologia *blockchain*, avaliar os benefícios das criptomoedas separadamente e não como uma única classe de ativos, avaliar as criptomoedas com base em sua utilização, além do seu desempenho financeiro, abordar os desafios ambientais das criptomoedas, avaliar os benefícios das criptomoedas como classe de ativos em um portfólio diversificado, estudo contínuo das criptomoedas, visto que seu comportamento

Quadro 2 – Autor, dados, técnicas utilizadas e principal conclusão dos artigos selecionados na base Science Direct

Autor (ano)	Dados	Técnica(s)	Conclusão
Ardia et al. (2018)	Cotação diária do <i>Bitcoin</i>	GARCH MSGARCH	Os modelos MSGARCH obtiveram melhores previsões
Corbet et al. (2018)	Múltiplas fontes de periódicos	Revisão sistemática	Demonstram que existem várias lacunas na literatura relacionada às criptomoedas
Caporale; Zekokh (2019)	Cotação diária <i>Bitcoin</i> <i>Ethereum</i> <i>Ripple</i> <i>Litecoin</i>	GARCH	GARCH padrão pode levar a previsões incorretas
Muhammad et al. (2019)	Volatilidade do Ouro, Prata, Paládio e Platina	MSGARCH	MSGARCH pode fornecer previsões precisas
Xiao (2019)	Ações do mercado da Ásia	MSEGARCH TVE	Os resultados mostram efeitos de contágio
Aras (2021)	Cotação diária Bitcoin	GARCH ANN SVM <i>Random Forest</i> KNN	Modelos com ordens de mais elevados fornecem previsões mais precisas
Tan et al. (2021)	Volume diário de <i>Bitcoin</i> e as buscas diárias no Google	GARCH GJRGARCH MSGARCH, MSGJRGARCH	O melhor modelo foi o TV-MSGARCH _{lnV} (1,1)-STD
Wu (2021)	Fechamento diário do <i>Bitcoin</i> , <i>Ethereum</i> e <i>Ripple</i>	EGARCH MSGARCH	Tamanhos específicos de janelas mostram uma precisão melhor nas previsões

está em constante mudança.

No artigo de [Caporale e Zekokh \(2019\)](#) foram modelados mais de 1000 modelos GARCH e de MSGARCH dos log-retornos dos preços de Bitcoin, Ethereum, Ripple e Litecoin, para previsão do *Value-at-Risk* (VaR), *expected shortfall* (ES). Os modelos MSGARCH de dois regimes produziram melhores previsões de VaR e ES do que modelos de regime único. Outro ponto ressaltado foi que os modelos simétricos foram melhores para um regime no caso do Bitcoin, Ethereum e Litecoin, o mesmo não acontecendo para Ripple.

Já no artigo de [Naeem et al. \(2019\)](#) foi utilizado o MSGARCH para modelar o log-retorno diário de quatro metais preciosos: ouro, prata, platina e paládio, no período de dezembro de 2018 a janeiro de 2020. Foram ajustados vários modelos MSGARCH,

com e sem mudança de regime. A análise mostrou que os modelos com mudança de regime superaram seus equivalentes de regime único em todos os caso na previsão do *Value-at-Risk*.

O artigo de [Xiao \(2020\)](#) estudou os efeitos de transmissão de risco do mercado de ações da China para os principais mercados de ações do leste asiático durante períodos turbulentos e calmos. Foi usado o modelo MSGARCH junto do valor extremo teórico (EVT) e da função copula vine, que segundo seus autores, é um metodo eficaz para modelar estruturas multivariadas com dependências complexas e medir o valor em risco. O autor descreveu como interessantes as descobertas, que foram os efeitos de transbordamento (*spillovers*) durante os três períodos, indicando uma dependência mais forte, exceto para a China-Japão e a China-Coreia do Sul no período turbulento. Além disso, foi identificado que o mercado de ações chinês tem efeito nas bolsas de valores do Japão e da Coreia do Sul.

No artigo de [Aras \(2021\)](#) foi investigado o efeito de diferentes ordens de modelos do processo GARCH nas previsões de volatilidade do Bitcoin, obtidas pelos quatro modelos de aprendizado de máquina mais utilizados. Também foi proposta uma metodologia de combinação de modelos baseada em modelos híbridos combinando GARCH e *Support vector machine*(SVM) para melhorar ainda mais os resultados. O modelo híbrido mostrou melhor desempenho entre as técnicas de aprendizado de máquina. Além disso, os modelos híbridos que utilizaram LASSO (é um tipo de regressão linear que ajuda a diminuir as limitações do modelo) como técnica de seleção de características antes da meta-aprendizagem, tornaram os modelos melhores para previsão. Eles concluíram que os modelos de ordem mais alta, especialmente para modelos de aprendizado de máquina, tendem a ter melhores resultados.

No artigo de [Tan et al. \(2021\)](#) foi utilizado modelos GARCH, GJRGARCH, MSGARCH E MSGJRGARCH com probabilidade de transição variável no tempo (TV), juntamente com o volume diário de negociações de Bitcoin e buscas diárias no Google. Em termos de desempenho de previsão de volatilidade, foi utilizado o procedimento Conjunto de Confiança do Modelo (MCS), realizado usando o Erro Médio Quadrático (MSE). O resultado encontrado sugere que o modelo obtido usando o TV-MSGARCH apresenta o melhor desempenho na previsão de volatilidade.

No artigo de [Wu \(2021\)](#) foi estudado a interferência da presença de quebras estruturais na série e o efeito da utilização de janela na estimação de coeficientes do modelo e na previsão. O estudo ainda contribui para compreensão da seleção do tamanho da janela da amostra, fator importante na economia e em finanças. O estudo apoia a ideia de que utilização de janelas de tamanho adequado na estimativa de coeficientes, quando houver quebra estrutural, fornece melhores resultados. Para alguns tamanhos de janela, encontra-se uma precisão muito melhor das previsões de cauda esquerda e padrões estáveis ao longo da linha do tempo. O estudo propõe uma nova abordagem para uma escolha de

janelas com o propósito de obter uma previsão mais precisa a partir de dados históricos.

Finalizando, o estudo de [Ardia et al. \(2018\)](#) evidencia a eficácia dos modelos MSGARCH ao compará-los com modelos GARCH de regime único, revelando que a incorporação de mudanças de regime proporciona previsões mais precisas para métricas cruciais como *Value-at-Risk* e *expected shortfall*. Já os artigos de [Caporale e Zekokh \(2019\)](#), [Naeem et al. \(2019\)](#) e [Xiao \(2020\)](#), oferecem percepções valiosos sobre a volatilidade, previsões de risco e interconexões em mercados financeiros, entretanto os trabalhos de [Aras \(2021\)](#) e [Tan et al. \(2021\)](#) destacam a utilidade de combinações de modelos e abordagens híbridas, demonstrando como a integração de diferentes técnicas, como GARCH e aprendizado de máquina podem melhorar suas previsões. Agora, no âmbito mais teórico, temos o trabalho de [Corbet et al. \(2019\)](#) que destaca a necessidade de aprofundar a pesquisa sobre criptomoedas, apontando lacunas importantes nas áreas de dados, regulação, benefícios e usos alternativos de blockchain, bem como avaliação individualizada das criptomoedas, enquanto o trabalho de [Wu \(2021\)](#) oferece uma perspectiva valiosa sobre a seleção de tamanho de janela, evidenciando a importância de abordagens mais estruturadas e consistentes para evitar decisões ad hoc, para decidir o tamanho da amostra para séries financeiras.

Esses artigos mostram pontos importantes, que não apenas enriquecem nosso entendimento, mas também orientam práticas futuras e pesquisas adicionais para melhor apreender as nuances desses mercados em evolução. Eles também forneceram motivação e subsídios para a utilização dos modelos GARCH e MSGARCH na modelagem da volatilidade das cotações da criptomoeda *Ethereum*.

3 METODOLOGIA

Os dados sobre as cotações da criptomoeda Ethereum foram obtidos em [CoinMarketCap \(2022\)](#) e se referem ao período de 01 de janeiro de 2020 até 27 de outubro de 2022.

Inicialmente foi feita uma análise exploratória dos dados utilizando métodos gráficos e analíticos, visando conhecer algumas das suas propriedades, tais como: centralidade, dispersão, assimetria, curtose, presença de tendência, valores fora do padrão e presença de quebra estrutural, entre outros. Além de gráficos em linhas, histograma e boxplot, foram determinados valores máximos e mínimos, média aritmética, mediana, desvio padrão, coeficiente de variação, coeficiente de assimetria e coeficiente de curtose. Também foram utilizados os testes de Cox-Stuart, Mann-Kendall e Wald-Wolfowitz para avaliar tendência.

Como o objetivo principal da análise é modelar a volatilidade da referida criptomoeda, foram consideradas as variações dos preços das cotações da moeda *Ethereum*. De acordo com [Morettin \(2016\)](#), considerando o preço de um ativo como P_t , a variação de preços nos instantes t e $(t - 1)$ como $\Delta P = P_t - P_{t-1}$, o retorno líquido simples pode ser escrito como Eq. 3.1:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{\Delta P_t}{P_{t-1}}, \quad (3.1)$$

em que: R_t é chamado de taxa de retorno e geralmente expressa em porcentagem. Aplicando a transformação logarítmica na série de preços, denotado por $p_t = \ln(P_t)$, é definido o log-retorno (ou simplesmente retorno) conforme Eq. 3.2:

$$r_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = p_t - p_{t-1}. \quad (3.2)$$

Após calcular os retornos, definidos conforme a equação (3.2), nova análise exploratória, utilizando as mesmas técnicas já citadas, foi realizada para conhecer algumas das suas propriedades.

Em sequência, a série foi dividida em período de ajuste ou treino para gerar um modelo (de 01 de janeiro de 2020 até 27 de setembro de 2022) e período de validação ou teste para avaliar sua capacidade preditiva (de 28 de setembro de 2022 até 27 de outubro de 2022).

Para os dados de ajuste ou treino foram estimados os modelos ARMA-GARCH, passando por todas as etapas usuais da sua metodologia, a saber: identificação, estimação, diagnóstico e validação, conforme a Figura 2, adaptada de [Thomaz \(2019\)](#).

Depois da análise exploratória, a estacionariedade foi verificada por meio do teste ADF, sendo considerados três cenários: modelo com tendência e constante, modelo com

constante e modelo sem tendência e sem constante. Em caso da série não apresentar estacionariedade, deve-se tirar a primeira diferença dos retornos e gerar um modelo ARIMA desta primeira diferença. Essa análise foi complementada com a aplicação dos testes KPSS e PP. Como houve divergência nos resultados desses testes, conforme mostrado na próximo capítulo, foram gerados modelos com duas ordens de integração.

Após, foram traçados os gráficos da FAC e FACP para determinação das ordens dos modelos candidatos obtidos por ARMA/ARIMA. Entretanto, eles foram inconclusivos, razão pela qual foram considerados inicialmente todos os modelos com ordem entre 0 e 5 para os termos autorregressivos e ordem entre 0 e 5 para os termos de médias móveis, totalizando 36 modelos para cada uma das ordens de integração. Além destes, também foi considerado um modelo formado com as defasagens que apresentaram correlação significativa conforme a FAC e a FACP.

Os coeficientes dos 73 modelos foram estimados pelo método de máximo verossimilhança e hierarquizados de acordo com sua parcimonia, o que foi feito conforme o BIC. Em sequência, foram aplicados os testes de Ljung-Box, Jarque-Bera, ARCH e McLeod-Li em seus resíduos, sendo selecionados os modelos que apresentaram resíduos independentes e resíduos quadráticos autocorrelacionados.

Inicia-se então a modelagem GARCH propriamente dita, nos resíduos quadráticos, que também devem passar pelas etapas de identificação, estimação, diagnóstico e validação. Então foram novamente traçados os gráficos da FAC e FACP para determinar as ordens m e n do modelo. Como foram inconclusivos, foram gerados modelos considerando todas as combinações possíveis entre m e n , fazendo-os variar entre 0 a 5. Além disso, também foram considerados 3 modelos teóricos para os resíduos: distribuição t de Student, distribuição Normal e distribuição de Erros Generalizados. Os modelos mais parcimoniosos foram escolhidos pelo BIC, sendo complementada pela avaliação da autocorrelação e da heterocedasticidade. Nestes casos foram utilizados os mesmos testes identificados na etapa anterior.

A próxima etapa consiste na validação do modelo com a realização de previsões. Como a volatilidade é uma medida latente, é necessário escolher um proxy para medi-la, sendo utilizada a variância realizada. De acordo com [Andersen e Bollerslev \(1998\)](#), isto pode ser feito a partir de dados diários, utilizando os retornos intradiários, para encontrar uma medida mais robusta da volatilidade. No período de validação ou teste foram coletadas diariamente as cotações da criptomoeda Ethereum a cada 20 minutos, calculando-se posteriormente as variâncias. A partir destes resultados foram estimadas as volatilidades observadas, fornecendo subsídios para o cálculo das medidas que avaliam a capacidade preditiva: erro absoluto médio (MAE), erro absoluto percentual médio (MAPE) e raiz quadrada do erro quadrático médio (RMSE). Estas métricas foram determinadas para um horizonte de 7 dias, 15 dias e 30 dias.

A modelagem MSGARCH segue alguns dos princípios utilizados na modelagem GARCH, como passar pelas etapas de definição, estimação, diagnóstico e validação. Nesse estudo essa modelagem foi executada por meio da função *CreateSpec*, do pacote MSGARCH do software RStudio. Entre os argumentos dessa função que precisam ser determinados estão a quantidade de regimes, a distribuição de probabilidade dos erros (t de Student, Distribuição Normal e Distribuição dos erros generalizados) e o tipo de modelo desejado (GARCH, GARCH integrado - IGARCH, Exponencial GARCH - EGARCH ou Threshold GARCH - TGARCH, entre outros). Depois que o modelo é criado, ele é treinado ou otimizado por meio do método de Máxima Verossimilhança e/ou pelo método de Monte Carlo. Quando o método de Máxima Verossimilhança é utilizado, a parcimonialidade é avaliada pelo critério de informação BIC, Akaike (AIC) e Akaike corrigido (AICc). Quando utilizado o método de Monte Carlo, essa parcimonialidade é avaliada pelo critério de informação deviance (DIC), que é uma generalização do critério de informação AIC especialmente indicado quando os modelos são obtidos por Cadeia de markov com simulações de monte carlo. A análise dos resíduos foi feita por meio do Ljung-Box (autocorrelação), Jarque-Bera (normalidade) e ARCH (heterocedasticidade) e a capacidade preditiva do modelo avaliada por meio das métricas MAE, MAPE e RMSE, sendo utilizada a volatilidade realizada, da mesma forma que no caso anterior.

Após identificar os modelos GARCH e o MSGARCH de melhor desempenho, suas capacidades preditivas foram comparadas.

A análise realizada nesse estudo foi feita com auxílio do software RStudio ([TEAM, 2021](#)) empregando os pacotes *feasts* ([O'HARA-WILD et al., 2022](#)), *forecast* ([HYNDMAN et al., 2021](#)), *ggplot2* ([WICKHAM et al., 2022a](#)), *tseries* ([WICKHAM et al., 2022b](#)), *urca* ([PFAFF, 2008](#)) e *msgarch* ([ARDIA et al., 2019](#)), entre outros. As análises inferenciais foram feitas com nível de significância de 1% e 5%.

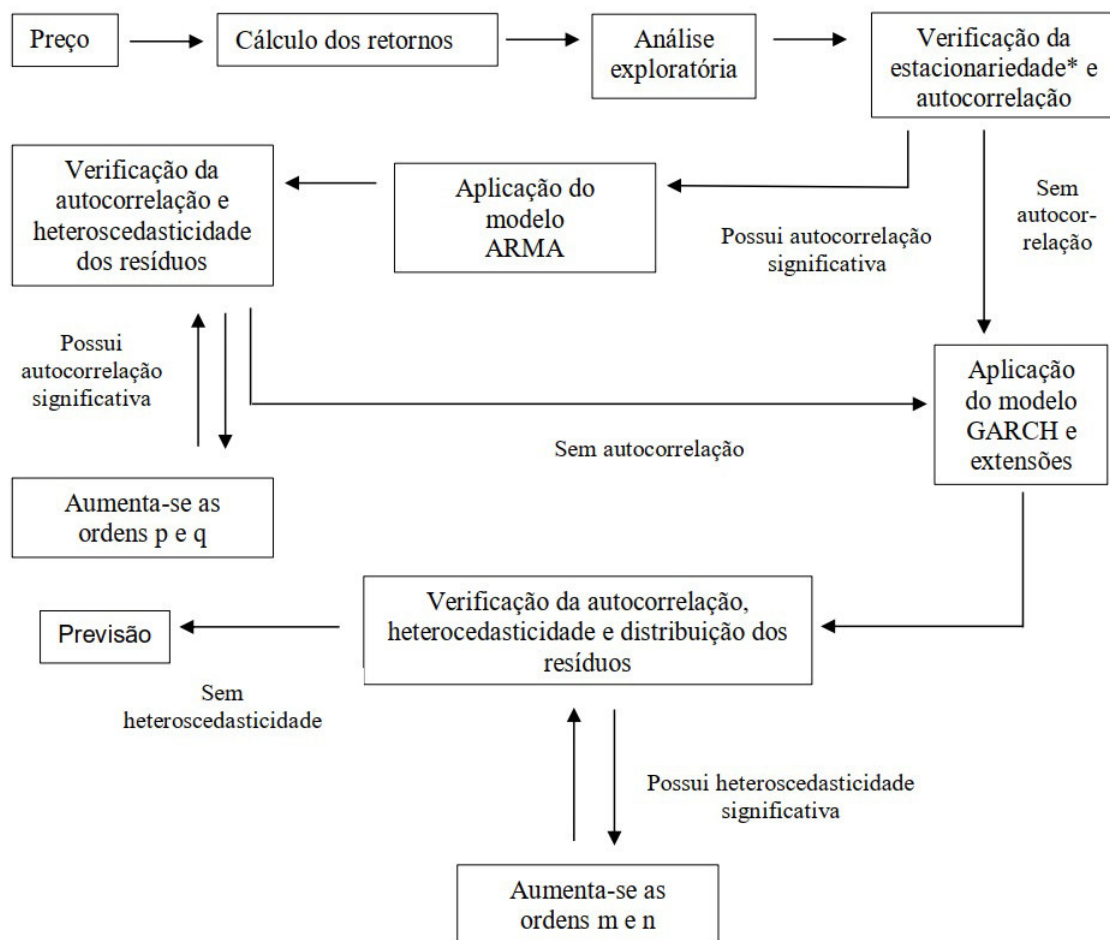


Figura 2 – Fluxograma da metodologia utilizada no estudo
 Fonte: Thomaz (2019).

4 RESULTADOS

4.1 Análise exploratória dos dados

A análise iniciou com a representação gráfica dos dados, que pode ser visualizada na Figura 3. Durante o ano de 2020, observa-se que o crescimento das cotações diárias da criptomoeda Ethereum foi lento, o mesmo não acontecendo no ano de 2021, quando aparecem períodos de crescimento extremamente rápidos, quase explosivos, seguido de quedas bruscas. Além disso, em determinado dia do mês de dezembro de 2021, por exemplo, sua cotação ultrapassou o valor de US\$4.500, e já no início do mês de janeiro de 2022 caiu para aproximadamente US\$2.500, mostrando ser uma série com alta volatilidade.

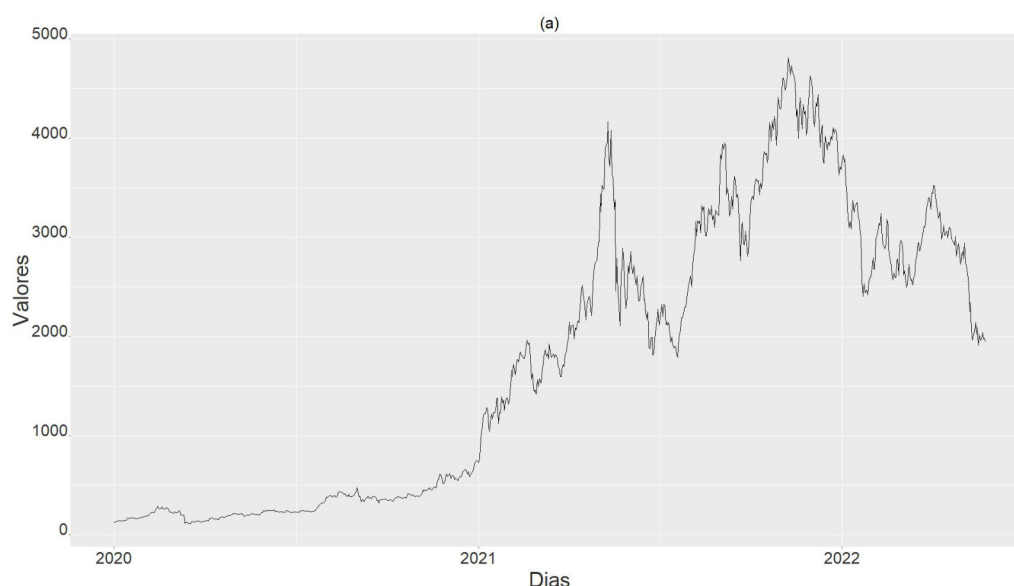


Figura 3 – Gráfico em Linhas das cotações diárias da criptomoeda Ethereum, JAN 2020 - OUT 2022

Fonte: Acervo do Autor

As medidas descritivas da série analisada estão apresentadas na Tabela 1. Neste período, a cotação mínima da criptomoeda Ethereum foi de US \$110,60, enquanto a máxima foi de US \$4.812,09, ficando os valores distribuídos em torno da média de US \$1.713,00, não muito diferente da mediana, sinalizando a presença de assimetria não muito acentuada, confirmada pelo coeficiente de assimetria. Já o coeficiente de curtose indica que a distribuição dos dados tem caudas leves, caracterizando-se como platicúrtica.

Foi evidenciado que o histograma, apresentado no gráfico (a) da Figura 4, parece identificar duas distribuições: uma para valores menores de mil dólares e outra para valores superiores, sendo a propriedade platicúrtica identificada para valores maiores do que mil

dólares. A variabilidade presente nos dados foi elevada, chegando a atingir um coeficiente de variação de 76,24%.

Tabela 1 – Estatísticas descritivas das cotações diárias da moeda Ethereum, JAN 2020 - OUT 2022.

Mínimo (US\$)	Máximo (US\$)	Média (US\$)	Mediana (US\$)	Desvio padrão (US\$)	Coeficiente de variação (%)	Assimetria	Curtose
110,60	4812,10	1713,09	1610,60	1306,761	76,245	0,418	-0,988

O boxplot apresentado no gráfico (b) da Figura 4 confirma a presença de assimetria não acentuada, principalmente entre os 50% centrais, não identificando nenhum valor fora do padrão.

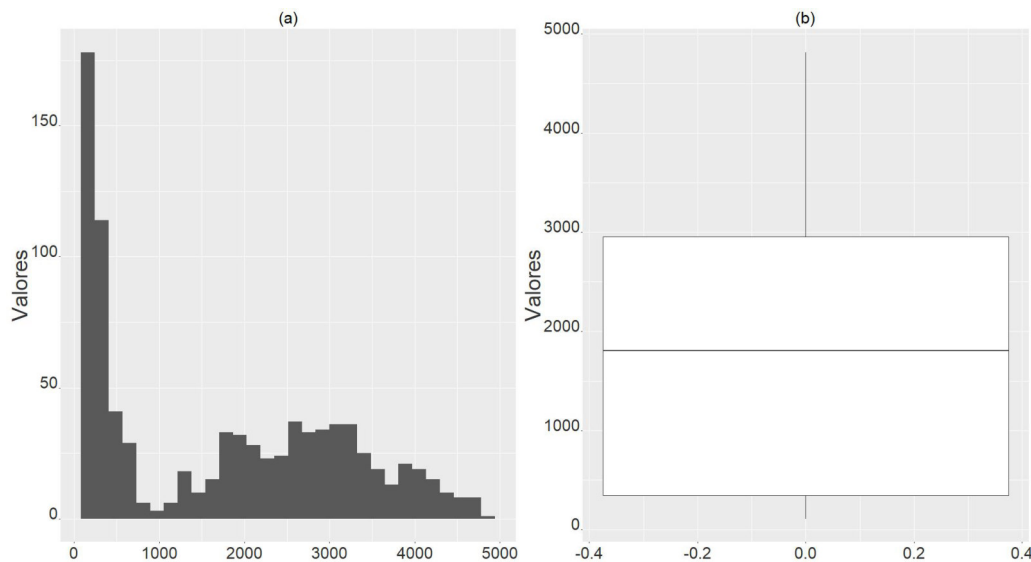


Figura 4 – Histograma (a) e Boxplot (b) das cotações diárias da moeda Ethereum, JAN 2020 - OUT 2022

Fonte: Acervo do Autor

Para modelar a volatilidade dos dados, eles foram transformados no logaritmo neperiano do retorno, conforme a Eq. 4.2, e nas próximas etapas serão denominados simplesmente de retornos. Nova análise exploratória foi realizada.

As medidas descritivas da nova série formada pelos retornos estão apresentadas na Tabela 2. Observa-se que a média e a mediana são bastante próximas uma da outra, além de serem próximas de zero. A variabilidade dos dados foi pequena, mas como a média e mediana assumiram valores quase nulos, o coeficiente de variação continuou extremamente alto. O coeficiente de assimetria indica uma assimetria forte e negativa, enquanto o coeficiente de curtose, que também é alto, indica caudas pesadas, sendo a distribuição identificada como leptocúrtica.

Tabela 2 – Estatísticas descritivas das cotações diárias dos retornos da moeda Ethereum, JAN 2020 - OUT 2022.

Mínimo	Máximo	Média	Mediana	Desvio padrão	Coefficiente de variação (%)	Assimetria	Curtose
-0,550	0,230	0,003	0,002	0,051	2184,641	-1,382	14,692

O gráfico apresentado na Figura 5 mostra os retornos com um comportamento bastante diferente dos dados originais, pois a série parece se tornar estacionária em torno da média zero, embora apresente alguns valores fora do padrão, principalmente valores inferiores.

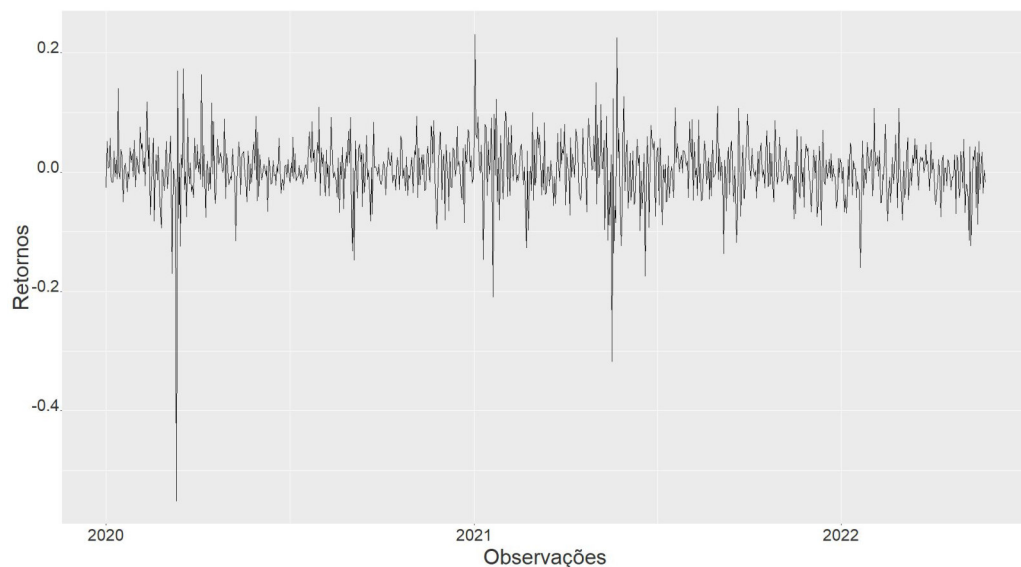


Figura 5 – Gráfico em Linhas das cotações diárias dos retornos da moeda Ethereum, JAN 2020 - OUT 2022

Fonte: Acervo do Autor

Os gráficos apresentados na Figura 6 confirmam uma distribuição leptocúrtica e a presença de vários valores fora do padrão, embora não sugiram uma assimetria acentuada. Os valores fora do padrão podem ser a causa de um coeficiente de assimetria tão elevado.

Comparando as séries das cotações e dos retornos por meio das figuras 3, 4, 5 e 6, e Tabelas 1 e 2, nota-se uma grande diferença nas propriedades estatísticas das duas distribuições, sendo a segunda com características mais adequadas às modelagens neste estudo. As análises subsequentes são realizadas apenas nesta série de retornos.

Dando sequência, foram aplicados os testes de Cox-Stuart (COX; STUART, 1955), Mann-Kendall (LIBISELLER; GRIMVALL, 2002) e Wald-Wolfwitz (WALD; WOLFOWITZ, 1943) para avaliar a presença de tendência, sendo testada a hipótese nula de que a série não apresenta tendência. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 3. De acordo com estes testes, ao nível de significância de 5%, rejeita-se a hipótese nula, não sendo identificadas evidências da presença de tendência, o mesmo não acontecendo para

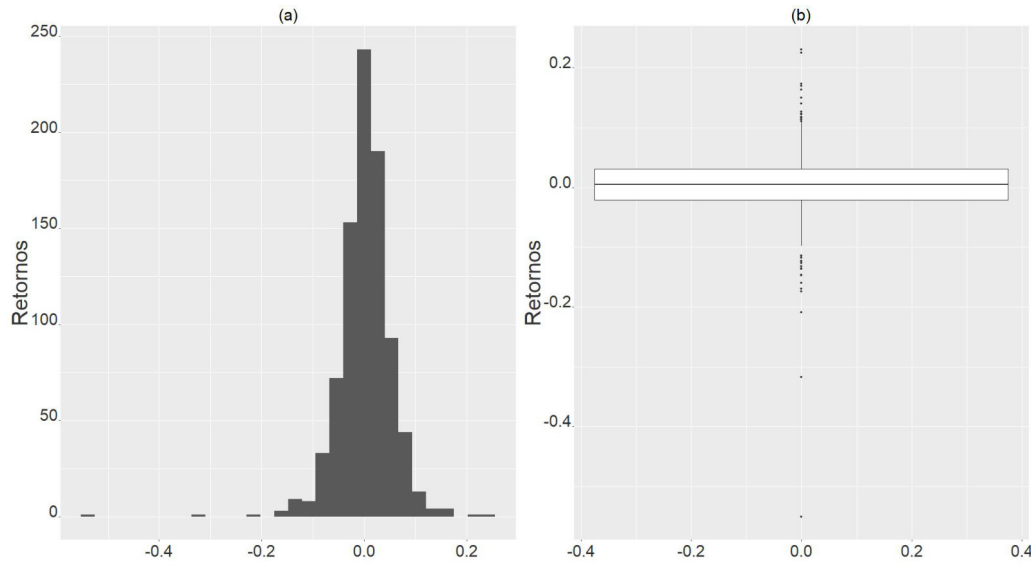


Figura 6 – Histograma (a) e Boxplot (b) das cotações diárias dos retornos da moeda Ethereum, JAN 2020 - OUT 2022
Fonte: Acervo do Autor

nível de significância de 1%. Além disso, esta propriedade não é facilmente visualizada no gráfico da Figura 5.

Tabela 3 – Resultados dos testes que avaliam a tendência da série de retornos das cotações diárias da criptomoeda Ethereum, JAN 2020 - OUT 2022

Teste	Estatística de teste	valor-p
Cox-Stuart	1,997	0,045
Mann-Kendall	2,360	0,018
Wald-Wolfowitz	2,292	0,021

4.2 Modelagem ARIMA-GARCH

Em continuidade, iniciou-se a modelagem ARIMA (p, d, q) pela etapa de identificação, visando determinar os valores atribuídos a p , d e q .

Foi realizado o teste ADF, que rejeitou a hipótese nula de que a série de retornos não é estacionária, identificando-a como estacionária ao nível ($\tau_{calculado} = -21,46$ e $\tau_{critico} = -3,96$) para modelo com tendência ($\phi_{3calculado} = 230,46$ e $\phi_{3critico} = 8,27$) e com constante ($\phi_{2calculado} = 153,64$ e $\phi_{2critico} = 6,09$), logo $d = 0$. A identificação da presença de tendência corrobora com os resultados dos testes de Cox-Stuart, Mann-Kendall e Wald-Wolfowitz. Também foram realizados os testes PP e KPSS para analisar a estacionariedade e ambos concordaram com o resultado obtido por meio do teste ADF.

Após, foram gerados os gráficos da FAC e FACP, que podem ser observados, respectivamente, nos gráficos (a) e (b) na Figura 7. Analisando o gráfico (a) que representa

a FAC, pode-se observar que as autocorrelações para as defasagens 1, 2, 4 e 10 extrapolam os limites dos intervalos de confiança, o mesmo acontecendo no gráfico (b) que representa a FACP. Como estes gráficos não apresentaram características que permitissem identificar prováveis valores de p e q , na próxima etapa da metodologia proposta — a estimação — foram considerados todos as combinações possíveis entre p e q , que variaram entre 0 e 5, gerando 36 modelos.

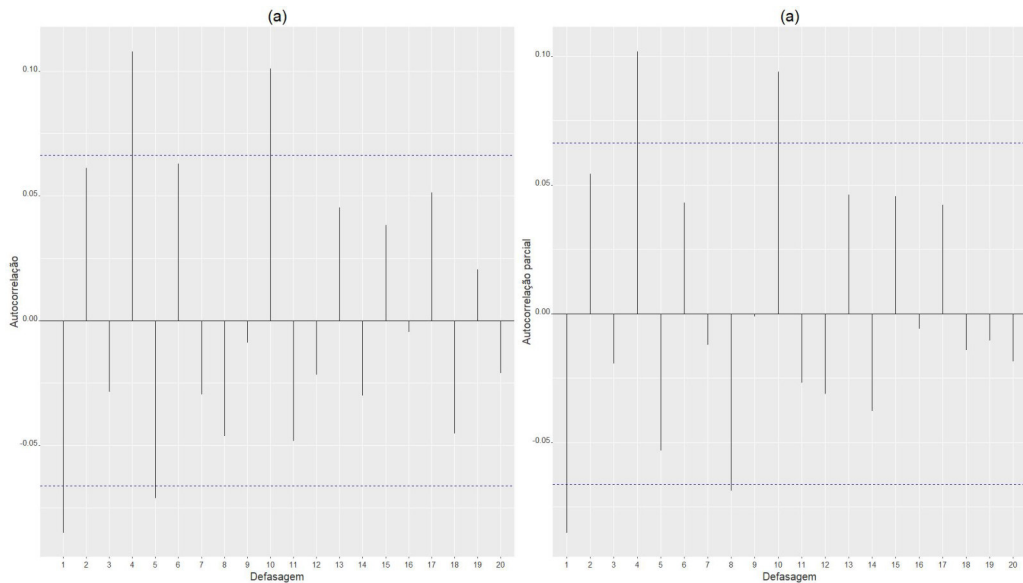


Figura 7 – FAC(a) e FACP(b) da Taxa de Retorno, JAN 2020 - OUT 2022.

Fonte: Acervo do Autor

Os coeficientes destes 36 modelos foram estimados com ordem de integração 0 e presença de tendência e constante por meio do método da Máxima Verossimilhança. Também foi considerada a ordem de integração 1 para eliminar o efeito desta tendência, sendo gerados modelos apenas com constante.

Entre os 72 modelos, foram selecionados os 12 mais parcimoniosos para formar o conjunto de modelos candidatos, o que foi feito pelo critério de informação BIC, desde que não apresentassem resíduos autocorrelacionados. Esses 12 modelos candidatos estão apresentados na Tabela 4, com os respectivos resultados do BIC e dos testes Ljung-Box, Jarque-Bera e ARCH. Nesta tabela também são apresentados os resultados do teste McLeod-Li, que avalia a presença de autocorrelação nos resíduos quadráticos.

Em todos os 12 modelos candidatos, apresentados na Tabela 4, o teste Ljung-Box não encontrou evidências de resíduos autocorrelacionados e o teste ARCH não encontrou evidências de resíduos heterocedásticos, considerando um nível de significância de 1%. Entretanto, para todos os 12 modelos, foram encontradas evidências de que eles não são gaussianos, o que não impossibilita, de acordo com Bueno (2020), a determinação de previsões bastante satisfatórias. Já o teste McLeod-li, ao nível de significância de 1%, encontrou evidências de autocorrelação nos resíduos quadráticos de todos os modelos,

Tabela 4 – Critério de informação BIC e valor p identificado pelos testes Ljung-Box, Jarque-Bera, ARCH e McLeod-Li para os 12 modelos candidatos

Modelo	BIC	Valor-p			
		Ljung-Box	Jarque-Bera	ARCH	McLeod-Li
ARIMA(1,0,1)	-3038,911	0,014	<0,001	0,059	0,005
ARIMA(2,0,1)	-3032,032	0,015	<0,001	0,059	0,006
ARIMA(5,0,0)	-3021,329	0,016	<0,001	0,047	<0,001
ARIMA(4,1,1)	-3015,618	0,092	<0,001	0,022	0,009
ARIMA(3,0,3)	-3015,244	0,038	<0,001	0,067	0,005
ARIMA(3,0,4)	-3013,340	0,022	<0,001	0,132	0,003
ARIMA(4,0,3)	-3013,330	0,085	<0,001	0,132	0,008
ARIMA(4,0,4)	-3011,741	0,053	<0,001	0,217	0,004
ARIMA(4,1,2)	-3011,166	0,061	<0,001	0,045	0,005
ARIMA(3,0,5)	-3006,544	0,012	<0,001	0,143	0,001
ARIMA(4,0,5)	-3000,774	0,031	<0,001	0,109	0,002
ARIMA(4,1,4)	-2996,257	0,022	<0,001	0,033	0,001

indicando a possibilidade da utilização da modelagem GARCH.

Por último, foi gerado um modelo utilizando somente as defasagens que extrapolaram os limites do intervalo de confiança na FAC e FACP. Seus resultados estão apresentados na Tabela 5, constatando-se uma pequena piora na parcimonialidade, mas resíduos atendendo a duas suposições do modelo teórico: independência e homoscedasticidade. Da mesma forma, os resíduos não são gaussianos e seus quadrados apresentam evidências de autocorrelação.

Tabela 5 – Critério de informação BIC e valor p obtido nos testes Ljung-Box, Jarque-Bera, ARCH e McLeod-Li para o modelo candidato com as defasagens que extrapolaram os limites do intervalo de confiança da FAC e FACP

Modelo	BIC	Valor-p			
		Ljung-Box	Jarque-Bera	ARCH	McLeod-Li
ARMA(10,10)	-2586,44	0,088	<0,001	0,073	<0,001

A modelagem GARCH foi então aplicada aos 13 modelos candidatos selecionados na etapa anterior, sendo a determinação das ordens m e n dos modelos feita de maneira similar à determinação das ordens p e q na modelagem ARIMA. Logo, foram construídos os gráficos da FAC e FACP dos resíduos quadráticos de cada um dos 13 modelos selecionados, que estão apresentados nas figuras 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 14, 15, 16, 17, 18, 19 e 20.

Neles observa-se que, em todos os gráficos da FAC e da FACP, a autocorrelação da defasagem 4 ultrapassa o limite de confiança. Já no modelo ARIMA(1,0,1), a autocorrelação da defasagem 7 no gráfico da FAC ficou no limite de confiança, o que não se ocorreu na FACP. Foi possível notar que a medida que p e q aumentava, foi aumentando a distância até o limite de confiança. Já na FAC e FACP de todos os modelos construídos com uma

diferenciação, a autocorrelação na defasagem 7 também ultrapassou o limite de confiança, o que também ocorreu no modelo ARMA(5,0,0) e no modelo ARMA(10,0,10).

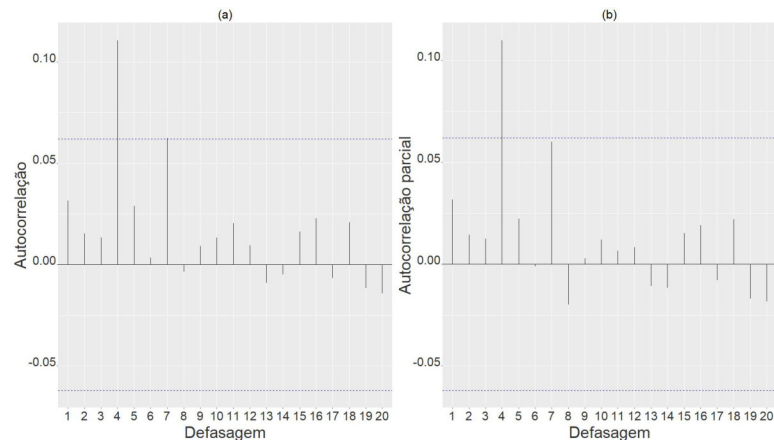


Figura 8 – FAC(a) e FACP(b) dos Resíduos ao quadrado do modelo ARIMA(1,0,1)
Fonte: Acervo do Autor

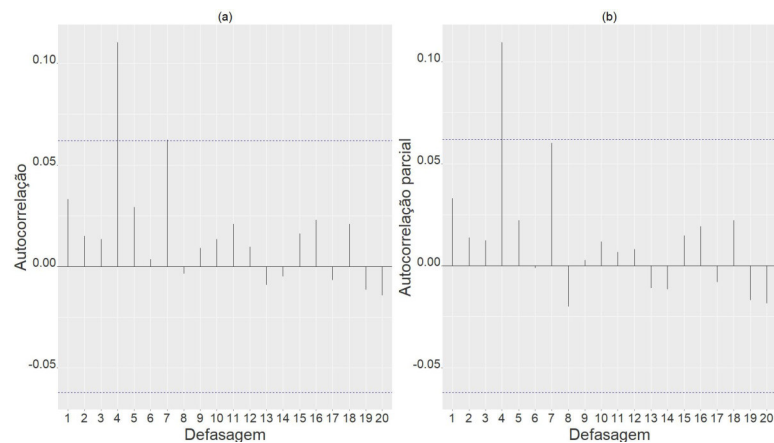


Figura 9 – FAC(a) e FACP(b) dos Resíduos ao quadrado do modelo ARIMA(2,0,1)
Fonte: Acervo do Autor

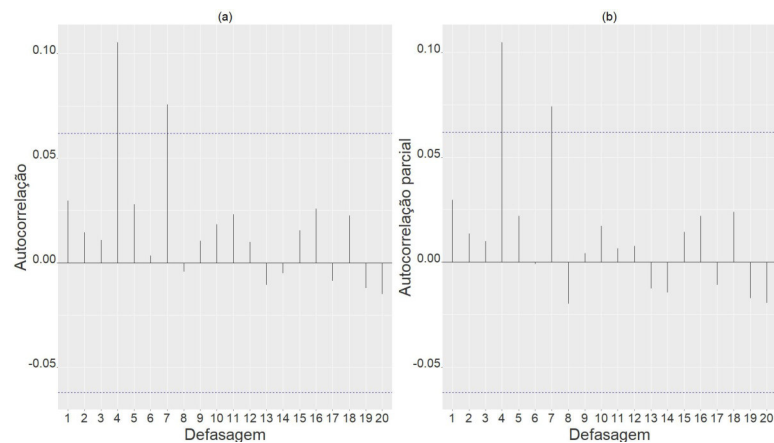


Figura 10 – FAC(a) e FACP(b) dos Resíduos ao quadrado do modelo ARIMA(5,0,0)
Fonte: Acervo do Autor

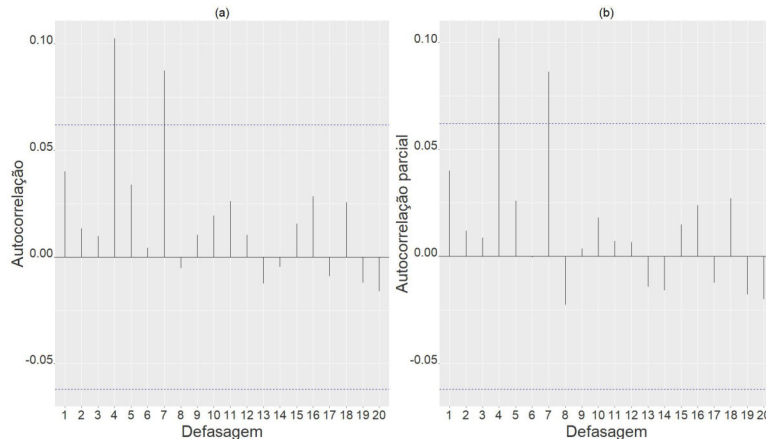


Figura 11 – FAC(a) e FACP(b) dos Resíduos ao quadrado do modelo ARIMA(4,1,1)
Fonte: Acervo do Autor

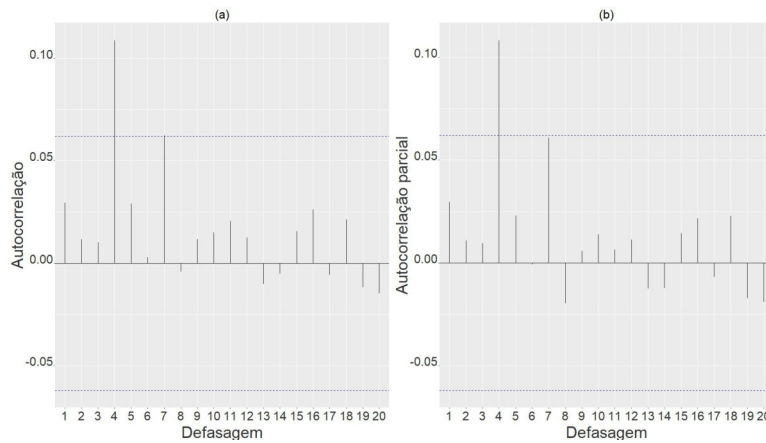


Figura 12 – FAC(a) e FACP(b) dos Resíduos ao quadrado do modelo ARIMA(3,0,3)
Fonte: Acervo do Autor

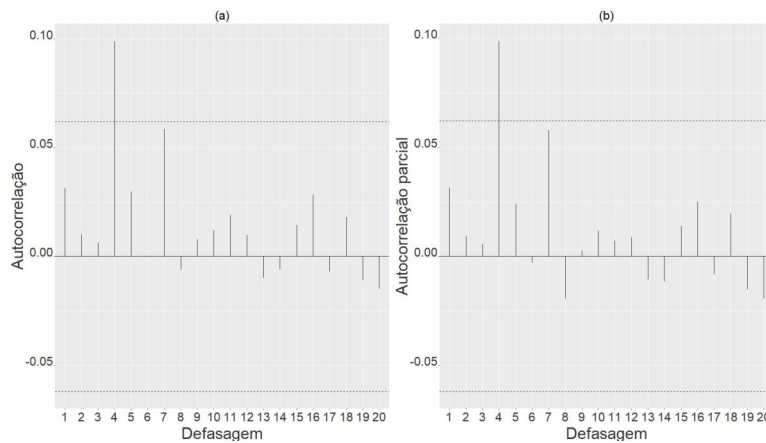


Figura 13 – FAC(a) e FACP(b) dos Resíduos ao quadrado do modelo ARIMA(3,0,4)
Fonte: Acervo do Autor

Como os gráficos da FAC e da FACP não se enquadraram no padrão de comportamento definido para determinação de m e n , constituindo o conjunto de modelos candidatos, foram considerados todos os modelos possíveis para m e n variando entre 0 e 5, totalizando 468 modelos. Além disso, foram utilizadas três distribuições para descrever o

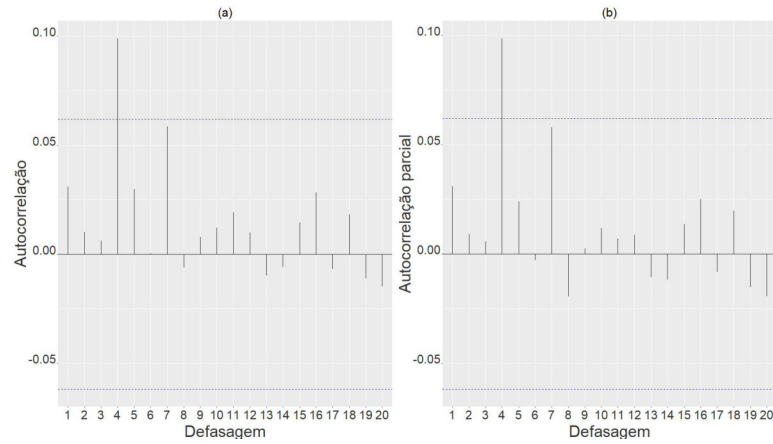


Figura 14 – FAC(a) e FACP(b) dos Resíduos ao quadrado do modelo ARIMA(4,0,3)
Fonte: Acervo do Autor

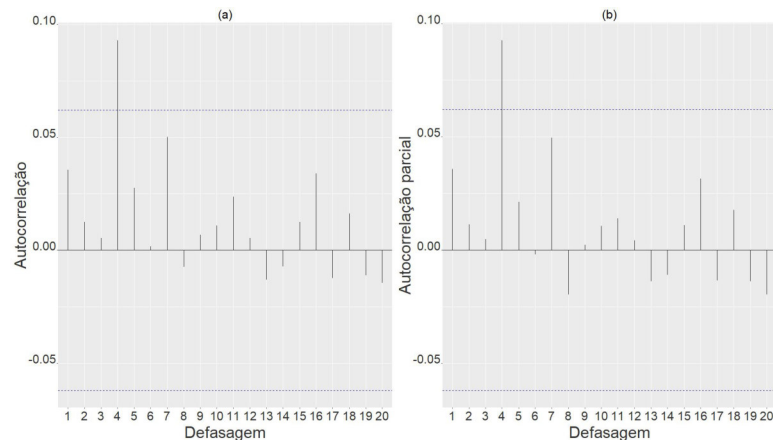


Figura 15 – FAC(a) e FACP(b) dos Resíduos ao quadrado do modelo ARIMA(4,0,4)
Fonte: Acervo do Autor

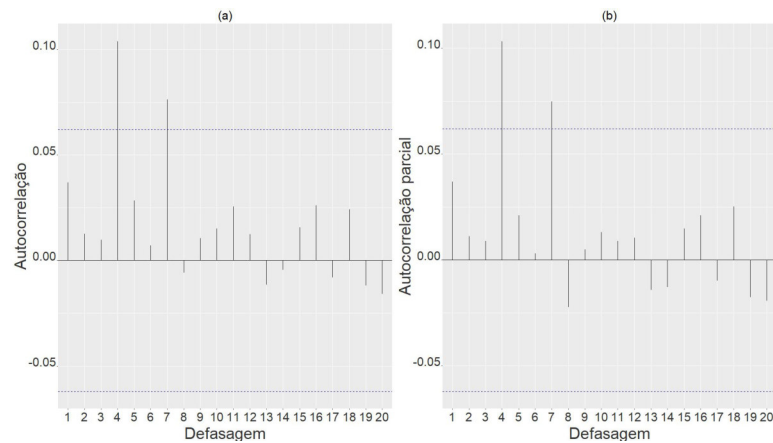


Figura 16 – FAC(a) e FACP(b) dos Resíduos ao quadrado do modelo ARIMA(4,1,2)
Fonte: Acervo do Autor

comportamento dos erros: Normal, t de Student e GED, totalizando 1391 modelos analisados. Dentre estes, foram selecionados pelo critério de informação BIC, os 10 com melhores resultados, e que também não apresentassem evidências de resíduos autocorrelacionados. Estes modelos estão apresentados na Tabela 6, onde é possível observar que só existe um

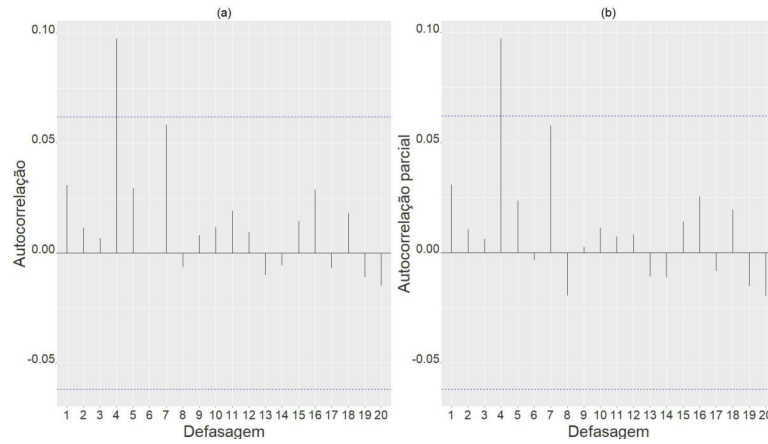


Figura 17 – FAC(a) e FACP(b) dos Resíduos ao quadrado do modelo ARIMA(3,0,5)
Fonte: Acervo do Autor

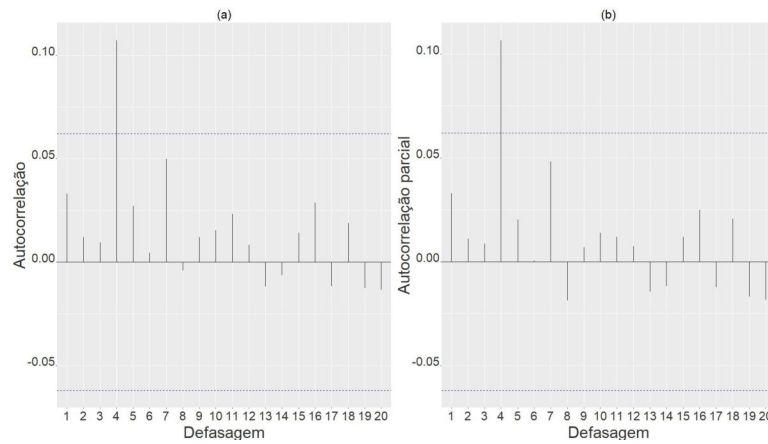


Figura 18 – FAC(a) e FACP(b) dos Resíduos ao quadrado do modelo ARIMA(4,0,5)
Fonte: Acervo do Autor

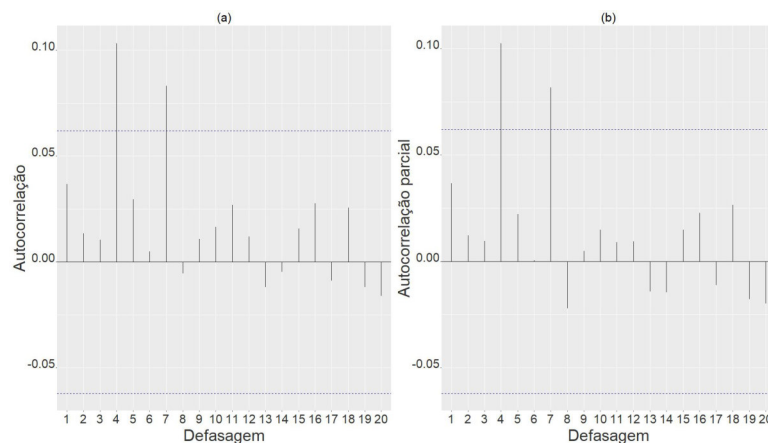


Figura 19 – FAC(a) e FACP(b) dos Resíduos ao quadrado do modelo ARIMA(4,1,4)
Fonte: Acervo do Autor

modelo com ordem de integração 1.

Conforme as informações da Tabela 6, o modelo ARIMA(1,0,1)GARCH(2,1) é o mais parcimonioso. Entretanto, os resultados dos BICs ficaram muito próximos uns ao

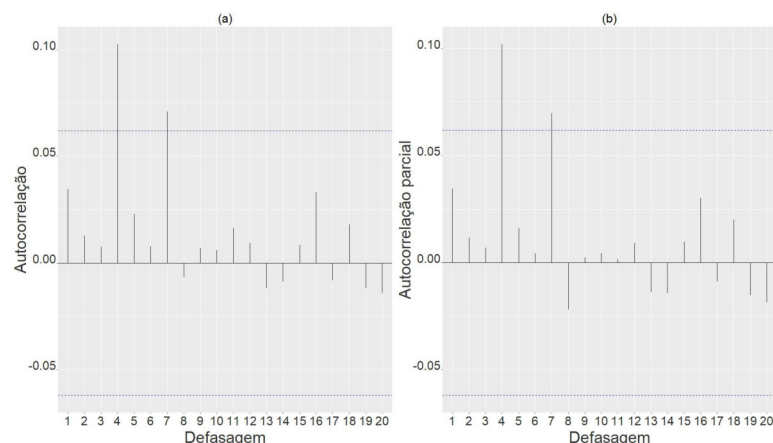


Figura 20 – FAC(a) e FACP(b) dos Resíduos ao quadrado do modelo ARIMA(10,0,10)
Fonte: Acervo do Autor

Tabela 6 – Critério de informação BIC e resultados dos testes Ljung-Box, Jarque-Bera e ARCH para os modelos GARCH

Modelo	Distribuição dos erros	BIC	Valor-p		
			Ljung-Box	Jarque-Bera	ARCH
ARIMA(1,0,1)GARCH(2,1)	t de Student	-3,254	0,015	<0,001	0,487
ARIMA(1,0,1)GARCH(1,3)	t de Student	-3,244	0,015	<0,001	0,464
ARIMA(1,0,1)GARCH(4,1)	t de Student	-3,240	0,067	<0,001	0,481
ARIMA(2,0,1)GARCH(4,1)	t de Student	-3,239	0,119	<0,001	0,431
ARIMA(3,0,3)GARCH(2,1)	t de Student	-3,238	0,058	<0,001	0,270
ARIMA(3,0,3)GARCH(4,2)	t de Student	-3,237	0,025	<0,001	0,616
ARIMA(4,0,3)GARCH(4,1)	t de Student	-3,235	0,361	<0,001	0,252
ARIMA(2,0,1)GARCH(5,0)	t de Student	-3,234	0,046	<0,001	0,122
ARIMA(5,0,0)GARCH(2,1)	t de Student	-3,234	0,010	<0,001	0,454
ARIMA(4,1,2)GARCH(2,1)	t de Student	-3,234	0,036	<0,001	0,244

outros, pois a diferença entre o melhor e o pior não ultrapassa o valor de 0,02.

No conjunto de modelos candidatos, observa-se que os valores de p são maiores ou iguais aos valores de q, relação que se repete em relação a m e n em quase todos os modelos candidatos, sugerindo que os valores passados interferem mais que os erros passados. A exceção foi o modelo ARIMA(1,0,1)GARCH(1,3). Além disso, todos os modelos candidatos utilizam a distribuição t de Student para os erros e não apresentam evidências de resíduos autocorrelacionados e heterocedásticos para um nível de significância de 0,01.

As previsões dos modelos foram então realizadas para 7, 15 e 30 dias, podendo ser visualizadas, respectivamente, nas tabelas 7, 8 e 9, onde os modelos foram ordenados conforme o RMSE. Para os três horizontes de previsão, observou-se que o modelo de ordem de integração 1 obteve resultados menos satisfatórios em relação ao MAE, RMSE e MAPE.

Na previsão para 7 dias (Tabela 7), o modelo ARIMA(3,0,3)GARCH(2,1) se sobressaiu nas medidas de precisão perante aos outros modelos testados, obtendo os valores 0,02772, 0,02951 e 0,9975 para MAE, RMSE e MAPE, respectivamente. Chama-se a

atenção para que o melhor MAPE, que ocorreu para o modelo ARIMA(3,0,3)GARCH(4,2).

Com as previsões para 15 dias (Tabela 8) o mesmo modelo ARIMA(3,0,3)GARCH(2,1) foi identificado como o de melhor capacidade preditiva, obtendo os valores 0,02284, 0,02458 e 0,9803 para MAE, RMSE e MAPE, respectivamente.

Com as previsões para 30 dias (Tabela 9), o modelo ARIMA(3,0,3)GARCH(4,2) se sobressaiu nas medidas de precisão MAE e RMSE, esta última considerada a mais adequada para este tipo de modelagem, assumindo os valores 0,02653 e 0,03137, respectivamente. Entretanto, o menor MAPE foi obtido pelo modelo ARIMA(3,0,3)GARCH(2,1).

Tabela 7 – Previsão de 7 dias - MAE, RMSE e MAPE dos modelos GARCH

Modelo	Distribuição dos erros	MAE	RMSE	MAPE (%)
ARIMA(3,0,3)GARCH(2,1)	t de Student	0,02772	0,02951	99,75
ARIMA(5,0,0)GARCH(2,1)	t de Student	0,02776	0,02982	99,09
ARIMA(1,0,1)GARCH(2,1)	t de Student	0,02801	0,02993	100,03
ARIMA(1,0,1)GARCH(1,3)	t de Student	0,02804	0,02998	100,09
ARIMA(1,0,1)GARCH(4,1)	t de Student	0,02795	0,02980	100,10
ARIMA(2,0,1)GARCH(4,1)	t de Student	0,02805	0,02999	100,10
ARIMA(3,0,3)GARCH(4,2)	t de Student	0,02819	0,03119	98,51
ARIMA(2,0,1)GARCH(5,0)	t de Student	0,03050	0,03225	105,06
ARIMA(4,1,2)GARCH(2,1)	t de Student	0,03063	0,03237	105,31
ARIMA(4,0,3)GARCH(4,1)	t de Student	0,03369	0,04722	107,04

Tabela 8 – Previsão de 15 dias - MAE, RMSE e MAPE dos modelos GARCH

Modelo	Distribuição dos erros	MAE	RMSE	MAPE (%)
ARIMA(3,0,3)GARCH(2,1)	t de Student	0,02284	0,02458	98,03
ARIMA(4,0,3)GARCH(4,1)	t de Student	0,02364	0,02586	102,07
ARIMA(1,0,1)GARCH(1,3)	t de Student	0,02350	0,02521	99,47
ARIMA(1,0,1)GARCH(2,1)	t de Student	0,02349	0,02521	99,35
ARIMA(1,0,1)GARCH(4,1)	t de Student	0,02353	0,02525	99,54
ARIMA(5,0,0)GARCH(2,1)	t de Student	0,02352	0,02553	98,84
ARIMA(3,0,3)GARCH(4,2)	t de Student	0,02402	0,02628	99,90
ARIMA(2,0,1)GARCH(4,1)	t de Student	0,02556	0,02706	104,49
ARIMA(2,0,1)GARCH(5,0)	t de Student	0,02572	0,02721	104,82
ARIMA(4,1,2)GARCH(2,1)	t de Student	0,03930	0,04877	129,58

Foram então selecionados os modelos ARIMA(3,0,3)GARCH(2,1), para a previsão com horizonte de 7 e 15 dias, e ARIMA(3,0,3)GARCH(4,2), para a previsão com horizonte de 30 dias. Conforme evidenciado na Tabela 10, o modelo ARIMA(3,0,3)GARCH(2,1) possui uma maior quantidade de coeficientes significativos se comparado ao modelo ARIMA(3,0,3)GARCH(4,2), como visto na Tabela 10. Os parâmetros de ϕ , θ , α e

Tabela 9 – Previsão de 30 dias - MAE, RMSE e MAPE dos modelos GARCH

Modelo	Distribuição dos erros	MAE	RMSE	MAPE (%)
ARIMA(3,0,3)GARCH(4,2)	t de Student	0,02653	0,03137	101,01
ARIMA(1,0,1)GARCH(2,1)	t de Student	0,02655	0,03178	99,94
ARIMA(5,0,0)GARCH(2,1)	t de Student	0,02642	0,03180	99,38
ARIMA(1,0,1)GARCH(1,3)	t de Student	0,02656	0,03183	99,90
ARIMA(1,0,1)GARCH(4,1)	t de Student	0,02657	0,03184	99,88
ARIMA(3,0,3)GARCH(2,1)	t de Student	0,02649	0,03186	99,33
ARIMA(2,0,1)GARCH(4,1)	t de Student	0,02835	0,03328	104,39
ARIMA(2,0,1)GARCH(5,0)	t de Student	0,02845	0,03336	104,61
ARIMA(4,0,3)GARCH(4,1)	t de Student	0,02761	0,03386	102,67
ARIMA(4,1,2)GARCH(2,1)	t de Student	0,04301	0,05353	145,39

β , no modelo ARIMA(3,0,3)GARCH(2,1), obtiveram valores de significância na modelagem, menos o α_1 , diferentemente do modelo ARIMA(3,0,3)GARCH(4,2), em que todos os parâmetros α e β não tiveram significância comprovada.

Tabela 10 – Parâmetros do modelo ARIMA(3,0,3)GARCH(2,1)

Parâmetro	Parâmetros Estimados	Erro padrão	Valor de t
ϕ_1	1,044967	0,000712	< 0,0001
ϕ_2	0,538079	0,000791	< 0,0001
ϕ_3	-0,583583	0,000840	< 0,0001
θ_1	-1,094349	0,000042	< 0,0001
θ_2	-0,475488	0,000093	< 0,0001
θ_3	0,571154	0,000123	< 0,0001
ω^1	0,000316	0,000014	< 0,0001
α_1	0,031144	0,025804	0,227459
α_2	0,077097	0,024469	0,001628
β_1	0,775476	0,028852	< 0,0001
Shape ²	4,258502	0,591979	< 0,0001

¹Interceptação de variância ²Graus de Liberdade

Finalizando a análise do modelo ARIMA-GARCH, se realizou a construção dos gráficos com a representação da volatilidade realizada e prevista para 7, 15 e 30 dias, apresentados na Figura 21. Figura 22 e Figura 23, respectivamente.

No gráfico com previsões para 7 dias (Figura 21), nota-se que existem valores previstos negativos, o que se mantém no gráfico com previsões para 15 dias (Figura 22). Neste último, porém, parece existir uma estabilização de seu valor.

No gráfico com previsões para 30 dias (Figura 23), no qual o modelo utilizado difere dos anteriores, observa-se uma maior variação, sendo bem mais nítido quando o modelo prevê positiva ou negativamente a volatilidade. O modelo ARIMA(3,0,3)GARCH(2,1) deixou as previsões mais suaves nos primeiros dias, quando a série não possuía muito picos de volatilidade, o que pode ser observado nas figuras 21 e 22. No gráfico com previsões para

Tabela 11 – Parâmetros do modelo ARIMA(3,0,3)GARCH(4,2)

Parâmetro	Parâmetros Estimados	Erro padrão	Valor de t
ϕ_1	0,866478	0,000100	< 0,0001
ϕ_2	-0,701505	0,000089	< 0,0001
ϕ_3	-0,257388	0,000037	< 0,0001
θ_1	-0,906786	0,000097	< 0,0001
θ_2	0,755471	0,000092	< 0,0001
θ_3	0,235726	0,000034	< 0,0001
ω^1	0,000335	0,000606	0,58030
α_1	0,033419	0,025626	0,19220
α_2	0,096250	0,161630	0,55151
α_3	0,000007	0,351927	0,99998
α_4	0,000054	0,244036	0,99982
β_1	0,492510	3,406195	0,88503
β_2	0,248154	2,899368	0,93179
Shape ²	4,545190	0,581743	< 0,0001

¹Interceptação de variância ²Graus de Liberdade

30 dias, como visto na Figura 23, existe maior variabilidade na parte final do horizonte de previsão. O modelo ARIMA(3,0,3)GARCH(4,2) conseguiu captar melhor esses súbitos crescimentos e decrescimentos na volatilidade, tendo um melhor desempenho.

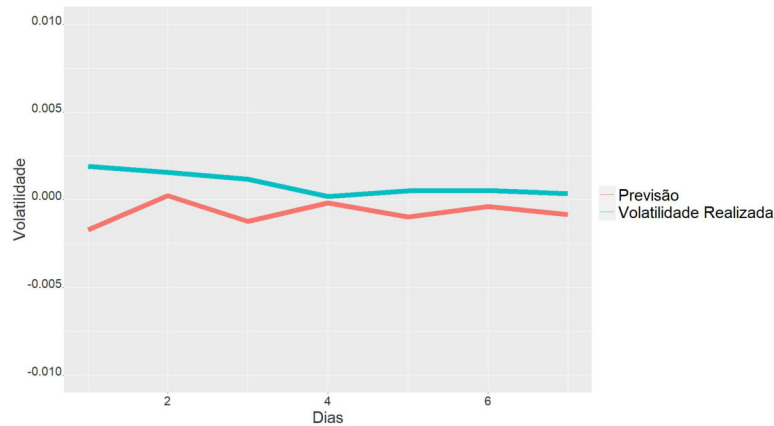


Figura 21 – Gráfico da previsão do modelo ARIMA(3,0,3)GARCH(2,1) para 7 dias, 28 SET 2022 – 04 OUT 2022

Fonte: Acervo do Autor

4.3 MSGARCH

A modelagem MSGARCH foi realizada para 1, 2 e 3 regimes (K), utilizando as mesmas premissas teóricas usadas na modelagem GARCH. Os coeficientes dos modelos foram estimados por Máxima Verossimilhança, por Monte Carlo ou por uma combinação de ambos os métodos. sendo o modelo mais parcimonioso identificado pelo critério de informação BIC ou DIC. Além de utilizar diferentes quantidades de regimes, também foram

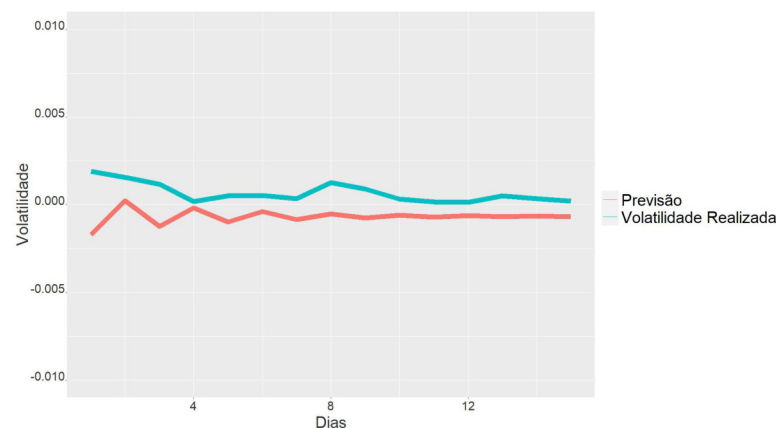


Figura 22 – Gráfico da previsão do modelo ARIMA(3,0,3)GARCH(2,1) para 15 dias, 28 SET 2022 – 12 OUT 2022
Fonte: Acervo do Autor

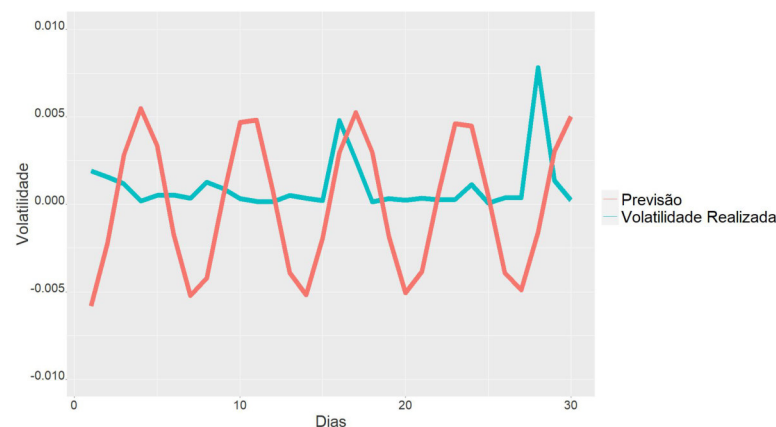


Figura 23 – Gráfico da previsão do modelo ARIMA(3,0,3)GARCH(4,2) para 30 dias, 28 SET 2022 – 27 OUT 2022
Fonte: Acervo do Autor

utilizadas diferentes distribuições para o erro: t, N ou G, respectivamente, distribuição t de Student, distribuição Gaussiana(Normal) e distribuição de erro generalizada.

Os modelos gerados com apenas 1 regime podem ser observados na Tabela 12. Eles têm resíduos não autocorrelacionados e homocedásticos, porém não podem ser considerados modelos gaussianos ao nível de confiança de 1%.

Alguns dos modelos com 2 regimes, apresentados na Tabela 13, não satisfizeram as suposições teóricas, tendo resíduos correlacionados e/ou heterocedásticos, sendo eliminados. Além disso, todos os modelos não são gaussianos ao nível de significância de 1%. Observou-se que os modelos cujos coeficientes foram estimados usando Monte Carlos foram os que apresentaram problemas nos resíduos. O modelo MS(2)-GARCH-t foi o pior, tendo o resíduo que falhou nas 3 premissas teóricas.

Entre os modelos gerados com 3 regimes (Tabela 14), somente um teve falha na premissa de não possuir autocorrelação, sendo seus coeficientes obtidos e otimizados

Tabela 12 – Método e os resultados dos testes Ljung-Box, Jarque-Bera e ARCH para os modelos MSGARCH para 1 regime

Modelo	Distribuição dos erros	Método	Valor-p		
			Ljung-Box	Jarque-Bera	ARCH
MS(1)-GARCH-N	Normal	M.V. ¹	0,357	<0,001	0,730
MS(1)-GARCH-t	t de Student	M.V. ¹	0,298	<0,001	0,929
MS(1)-GARCH-G	GED ³	M.V. ¹	0,067	<0,001	0,481
MS(1)-GARCH-N	Normal	M.C. ²	0,298	<0,001	0,742
MS(1)-GARCH-t	t de Student	M.C. ²	0,240	<0,001	0,883
MS(1)-GARCH-G	GED ³	M.C. ²	0,259	<0,001	0,850
MS(1)-GARCH-N	Normal	M.V. ¹ e M.C. ²	0,291	<0,001	0,739
MS(1)-GARCH-t	t de Student	M.V. ¹ e M.C. ²	0,243	<0,001	0,883
MS(1)-GARCH-G	GED ³	M.V. ¹ e M.C. ²	0,258	<0,001	0,852

¹Máxima verossimilhança ²Monte Carlo ³Distribuição de erro generalizada

Tabela 13 – Método e os resultados dos testes Ljung-Box, Jarque-Bera e ARCH para os modelos MSGARCH para 2 regimes

Modelo	Distribuição dos erros	Método	Valor-p		
			Ljung-Box	Jarque-Bera	ARCH
MS(2)-GARCH-N	Normal	M.V. ¹	0,194	<0,001	0,943
MS(2)-GARCH-t	t de Student	M.V. ¹	0,309	<0,001	0,910
MS(2)-GARCH-G	GED ³	M.V. ¹	0,288	<0,001	0,571
MS(2)-GARCH-N ⁴	Normal	M.C. ²	<0,001	<0,001	0,996
MS(2)-GARCH-t ⁴	t de Student	M.C. ²	<0,001	<0,001	<0,001
MS(2)-GARCH-G	GED ³	M.C. ²	0,245	<0,001	0,713
MS(2)-GARCH-N	Normal	M.V. ¹ e M.C. ²	0,042	<0,001	0,975
MS(2)-GARCH-t	t de Student	M.V. ¹ e M.C. ²	0,188	<0,001	0,946
MS(2)-GARCH-G	GED ³	M.V. ¹ e M.C. ²	0,093	<0,001	0,971

¹Máxima verossimilhança ²Monte Carlo ³Distribuição de erro generalizada

⁴Modelos com os resíduos insatisfatórios

utilizando Máxima Verossimilhança combinada com Monte Carlo e usando a distribuição de t de Student. Ao nível de confiança de 1%, foram encontradas evidências de que todos os modelos não são gaussianos e não são heterocedásticos.

As tabelas 15, 16 e 17 exibem os 10 modelos candidatos ordenados pelo RMSE para previsões de 7 dias, 15 dias e 30 dias, respectivamente.

Nas previsões com horizonte de 7 dias, observando a tabela 15, identifica-se o modelo MS(3)-GARCH-t como apresentando melhor capacidade preditiva de acordo com todas as métricas: MAE, RSME e MAPE, assumindo os valores, 0,0098, 0,01082 e 68,02, respectivamente. As previsões para um horizonte de 15 dias, conforme abela 16, identifica o o modelo MS(3)-GARCH-t como apresentando os menores resultados para as métricas de precisão, tendo MAE, RMSE e MAPE, respectivamente, assumido os valores de 0,01072, 0,01197 e 78,10. Conforme pode-se observar na Tabela 17, as previsões com horizonte de

Tabela 14 – Método e os resultados dos testes Ljung-Box, Jarque-Bera e ARCH para os modelos MSGARCH para 3 regime

Modelo	Distribuição dos erros	Método	Valor-p		
			Ljung-Box	Jarque-Bera	ARCH
MS(3)-GARCH-N	Normal	M.V. ¹	0,194	<0,001	0,943
MS(3)-GARCH-t	t de Student	M.V. ¹	0,314	<0,001	0,998
MS(3)-GARCH-G	GED ³	M.V. ¹	0,254	<0,001	0,702
MS(3)-GARCH-N	Normal	M.C. ²	0,073	<0,001	0,997
MS(3)-GARCH-t	t de Student	M.C. ²	0,084	<0,001	0,986
MS(3)-GARCH-G	GED ³	M.C. ²	0,012	<0,001	0,987
MS(3)-GARCH-N	Normal	M.V. ¹ e M.C. ²	0,017	<0,001	0,996
MS(3)-GARCH-t ⁴	t de Student	M.V. ¹ e M.C. ²	0,005	<0,001	0,993
MS(3)-GARCH-G	GED ³	M.V. ¹ e M.C. ²	0,040	<0,001	0,913

¹Máxima verossimilhança ²Monte Carlo ³Distribuição de erro generalizada

⁴Modelos resíduos insatisfatórios

30 dias, identificam que o modelo MS(3)-GARCH-t se sobressaiu nas medidas de precisão: MAE, RMSE e MAPE, que assumiram os valores, respectivamente, de 0,01422, 0,01792 e 83,20%

Tabela 15 – Previsão de 7 dias - MAE, RMSE e MAPE dos modelos MSGARCH

Modelo	Método	MAE	RMSE	MAPE (%)
MS(3)-GARCH-t	M.V. ¹	0,00980	0,01082	68,02
MS(1)-GARCH-G	M.C. ²	0,01742	0,02036	93,95
MS(1)-GARCH-G	M.V. ¹ e M.C. ²	0,01717	0,02039	93,69
MS(1)-GARCH-N	M.V. ¹ e M.C. ²	0,01732	0,02082	94,55
MS(1)-GARCH-N	M.C. ²	0,01736	0,02083	94,60
MS(1)-GARCH-t	M.C. ²	0,01796	0,02095	95,29
MS(1)-GARCH-N	M.V. ¹	0,01767	0,02096	94,97
MS(1)-GARCH-t	M.V. ¹ e M.C. ²	0,01811	0,02102	95,52
MS(1)-GARCH-G	M.V. ¹	0,01797	0,02111	95,37
MS(2)-GARCH-G	M.V. ¹	0,01797	0,02111	95,37

¹Máxima verossimilhança ²Monte Carlo

Como pode ser observado, o modelo MS(3)-GARCH-t obteve os melhores resultados de previsão, tanto para 30, 15 ou 7 dias. Seus coeficientes podem ser vistos na tabela 18.

Na matriz de transição de regime podem ser vistas as probabilidades de mudança e permanência de cada regime, onde se constata que: se a série estiver no regime 1, a maior probabilidade é de que ela continue no regime 1; se ela estiver no regime 2, a maior probabilidade é que ela passa para o regime 3; e se ela estiver no regime 3, a probabilidade de passar para o regime 2 ou continuar no 3 são similares.

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9977 & 0,0000 & 0,0023 \\ 0,0000 & 0,0001 & 0,9999 \\ 0,0214 & 0,4866 & 0,4920 \end{bmatrix}$$

Tabela 16 – Previsão de 15 dias - MAE, RMSE e MAPE dos modelos MSGARCH

Modelo	Método	MAE	RMSE	MAPE (%)
MS(3)-GARCH-t	M.V. ¹	0,01072	0,01197	78,10
MS(1)-GARCH-G	M.C. ²	0,02246	0,025001	113,28
MS(1)-GARCH-G	M.V. ¹ e M.C. ² e M.C. ²	0,02262	0,02504	113,50
MS(1)-GARCH-t	M.C. ²	0,02312	0,02564	114,84
MS(1)-GARCH-t	M.V. ¹	0,02320	0,02576	115,16
MS(1)-GARCH-t	M.V. ¹ e M.C. ²	0,02340	0,02586	115,33
MS(1)-GARCH-N	M.V. ¹	0,02327	0,02589	115,34
MS(2)-GARCH-N	M.C. ²	0,02366	0,02611	115,86
MS(1)-GARCH-N	M.C. ²	0,02367	0,02635	116,39
MS(1)-GARCH-N	M.V. ¹ e M.C. ²	0,02366	0,02637	116,41

¹Máxima verossimilhança ²Monte Carlo

Tabela 17 – Previsão de 30 dias - MAE, RMSE e MAPE dos modelos MSGARCH

Modelo	Método	MAE	RMSE	MAPE (%)
MS(3)-GARCH-t	M.V. ¹	0,01422	0,01792	83,20
MS(1)-GARCH-t	M.V. ¹	0,02591	0,02836	122,19
MS(1)-GARCH-G	M.V. ¹ e M.C. ²	0,02642	0,02875	123,28
MS(1)-GARCH-G	M.C. ¹	0,02649	0,02888	123,56
MS(2)-GARCH-t	M.V. ¹	0,02661	0,02891	123,16
MS(1)-GARCH-N	M.V. ¹	0,02661	0,02903	123,95
MS(2)-GARCH-G	M.V. ¹	0,02697	0,02925	124,40
MS(2)-GARCH-N	M.V. ¹	0,02708	0,02930	124,42
MS(3)-GARCH-N	M.V. ¹	0,02708	0,02931	124,43
MS(3)-GARCH-G	M.V. ¹	0,02712	0,02940	124,78

¹Máxima verossimilhança ²Monte Carlo

Tabela 18 – Parâmetros do modelo MS(3)-GARCH-t Máxima verossimilhança

Parâmetro	Parâmetros Estimados	Erro padrão	Valor de t
α_0	$1,8010 \times 10^{-05}$	$2,2731 \times 10^{-05}$	$7,9229 \times 10^{-01}$
α_1	$6,0086 \times 10^{-02}$	$8,8412 \times 10^{-02}$	$6,7961 \times 10^{-01}$
β_1	$7,5489 \times 10^{-01}$	$1,2148 \times 10^{-01}$	6,2140
ν_1 ¹	$9,9606 \times 10^{01}$	$4,8697 \times 10^{-01}$	$2,0454 \times 10^{02}$
α_0	$2,4356 \times 10^{-04}$	$4,1611 \times 10^{-04}$	$5,8534 \times 10^{-01}$
α_1	$6,9334 \times 10^{-02}$	$2,0473 \times 10^{-01}$	$3,3864 \times 10^{-01}$
β_2	$8,4315 \times 10^{-01}$	$5,7127 \times 10^{-02}$	$1,4759 \times 10^{-01}$
ν_2 ¹	4,7316	$9,5699 \times 10^{-01}$	4,9442
α_0	$5,8018 \times 10^{-07}$	$3,2645 \times 10^{-07}$	1,7771
α_1	$3,7302 \times 10^{-02}$	$6,1352 \times 10^{-02}$	$6,0801 \times 10^{-01}$
β_3	$9,6258 \times 10^{-01}$	$1,1003 \times 10^{-05}$	$8,7477 \times 10^{04}$
ν_3 ¹	$9,8272 \times 10^{01}$	2,1279	$4,6181 \times 10^{01}$

¹Parâmetro associado ao regime

Na série analisada, em 86,38% do tempo, os dados estiveram no regime 1, em 4,46% do tempo os dados estiveram no regime 2 e em 9,16% do tempo, os dados estiveram no regime 3. Tal fato caracteriza o modelo encontrado como “modelo de mudança de regime

altamente persistente” ou “modelo com dominância de regime”.

Finalizando a análise, assim como no modelo ARIMA-GARCH, se realizou a construção dos gráficos com a representação da volatilidade realizada e prevista para 7, 15 e 30 dias, apresentados respectivamente na Figura 24, Figura 25 e Figura 26 para o modelo MS(3)-GARCH-t.

Nos três casos, as previsões se mantiveram todas positivas, não havendo muita variação nas diferenças entre os resultados previstos e a volatilidade realizada.

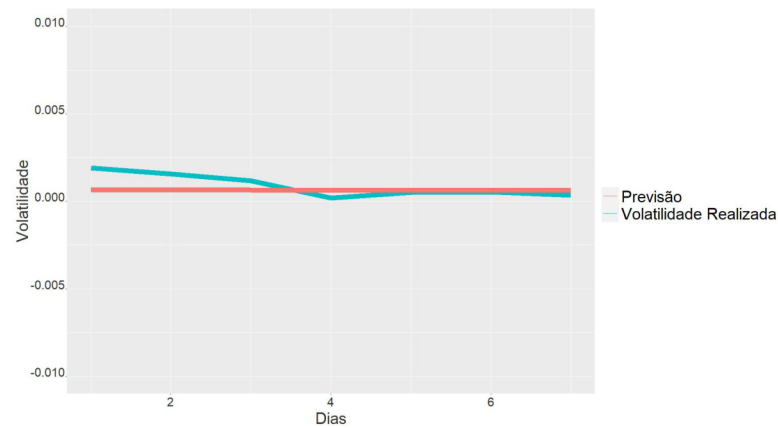


Figura 24 – Gráfico da previsão do modelo MS(3)-GARCH-t para 7 dias, 28 SET 2022 – 04 OUT 2022

Fonte: Acervo do Autor

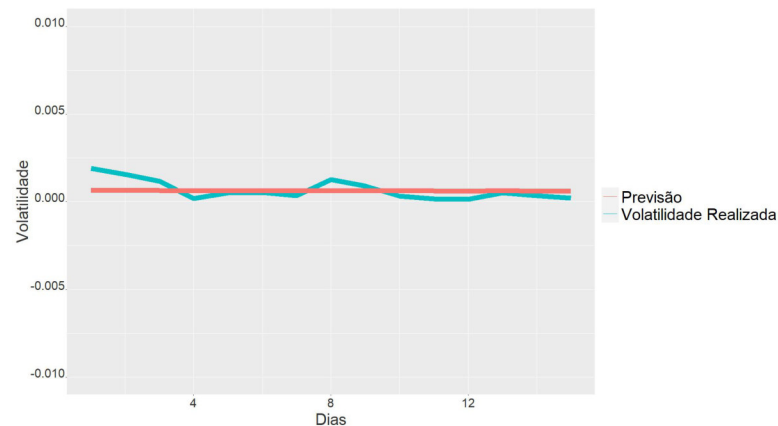


Figura 25 – Gráfico da previsão do modelo MS(3)-GARCH-t para 15 dias, 28 SET 2022 – 12 OUT 2022

Fonte: Acervo do Autor

4.4 GARCH x MSGARCH

A capacidade preditiva dos modelos considerados como apresentando melhor desempenho, tanto na modelagem GARCH como MSGARCH, está apresentada na Tabela 19. Observa-se que, independentemente da especificação do modelo e do horizonte de

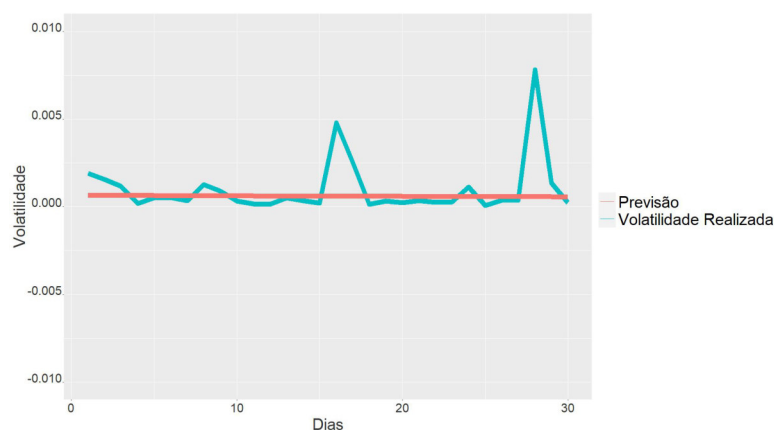


Figura 26 – Gráfico da previsão do modelo MS(3)-GARCH-t para 30 dias, 28 SET 2022 – 27 OUT 2022

Fonte: Acervo do Autor

previsão, os modelos obtidos por MSGARCH apresentaram melhores resultados. Esses achados concordam com [Ardia et al. \(2018\)](#), que também comprovaram a superioridade do MSGARCH ao examinar a cotação diária do Bitcoin. A qualidade da capacidade preditiva obtida pelos modelos MSGARCH também foi evidenciada nos trabalhos de [Naeem et al. \(2019\)](#), [Xiao \(2020\)](#) e [Tan et al. \(2021\)](#), este ultimo, entretanto, o utilizou em um modelo híbrido.

Tabela 19 – Capacidade preditiva do modelo selecionado pelo GARCH e do modelo selecionado pelo MSGARCH

Modelo	Distribuição dos erros	Horizonte de previsão	MAE	RMSE	MAPE (%)
ARIMA(3,0,3)GARCH(2,1)	t de Student	7	0,02772	0,02951	99,75
ARIMA(3,0,3)GARCH(2,1)	t de Student	15	0,02284	0,02458	98,03
ARIMA(3,0,3)GARCH(4,2)	t de Student	30	0,02653	0,03137	101,01
MS(3)-GARCH	t de Student	7	0,00980	0,01082	68,02
MS(3)-GARCH	t de Student	15	0,01072	0,01197	78,10
MS(3)-GARCH	t de Student	30	0,01422	0,01792	83,20

Na modelagem GARCH houve dificuldade na determinação dos valores de p, q, m e n. As funções de autocorrelação e autocorrelação parcial foram inconclusivas, fazendo que fossem necessários gerar uma quantidade muito grande de modelos para identificar os mais parcimoniosos. Uma outra dificuldade foi encontrada na identificação da distribuição de probabilidade mais adequada aos resíduos, sendo necessário gerar modelos utilizando distribuição Normal, distribuição t de Student e distribuição de erro generalizada. Salienta-se que neste estudo, assim como na maioria da literatura consultada, a escolha recaiu na distribuição t de Student. Além disso, na mensuração da capacidade preditiva, embora tenham sido encontrado para MAE e RSME (2,2% e 3,1%) valores satisfatórios, os modelos selecionados para previsão com horizontes de 7 e 15 dias subestimaram a volatilidade.

Os modelos MSGARCH superaram os modelos GARCH. Houve uma certa dificuldade em definir a quantidade de regimes a serem utilizados, pois não foi encontrado na literatura pesquisada um consenso desse procedimento. Teoricamente um MSGARCH com 1 regime deveria ser igual ao GARCH, o que não aconteceu no presente estudo. Há que considerar, entretanto, que a modelagem GARCH foi executada passo a passo enquanto a modelagem MSGARCH, de forma automatizada utilizando a função *CreateSpec* do pacote MSGARCH do Rstudio.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nos últimos anos o mercado de criptomoedas cresceu muito, propiciando o aparecimento de uma classe de ativos muito atrativa para investidores. Então, a modelagem da volatilidade do preço de criptomoedas se torna extremamente importante para uma gestão eficiente de investimentos, tendo em vista que o comportamento deste mercado funciona de maneira diferente do mercado tradicional de ações.

Este estudo teve como objetivo geral comparar a capacidade preditiva dos modelos GARCH e MSGARCH, aplicados em conjunto com o modelo ARMA, na modelagem da volatilidade das cotações diárias da criptomoeda *Ethereum*, sendo identificado que a modelagem MSGARCH conduziu a melhores resultados. Esses achados concordam com os resultados da literatura consultada, não só em relação à superioridade do MSGARCH com também em relação distribuição de probabilidade associada aos erros.

Para isso, foi feita uma análise exploratória dos dados e do logaritmo da taxa de retorno, sendo identificado que o logaritmo da taxa de retorno apresenta propriedades mais adequadas para a modelagem. Neste logaritmo foi realizada a modelagem GARCH e a modelagem MSGARCH, o que possibilitou fazer previsões e determinar a capacidade preditiva dos modelos encontrados.

A superioridade do MSGARCH pode ser atribuída a alta volatilidade da criptomoeda *Ethereum*, onde este efeito estaria sendo contornado pela mudança de regime. Alguns autores, entre os quais [Shahzad et al. \(2019\)](#), em 2019, afirmaram que o investimento em criptomoedas seria seguro, chegando a compará-lo ao investimento em ouro. Entretanto, no final de 2021/início de 2022, houve uma queda abrupta das cotações das criptomoedas, que contribuiu para a complexidade das previsões. Alguns motivos são apontados para esse fenômeno, entre eles, a falência da criptomoeda conhecida como “Luna Terra”, cujo valor despencou de US\$ 86,00 para US\$ 0,02 no período de uma semana. Esse evento provocou inquietação nos investidores, que também foram impactados pelo cenário macroeconômico da época, marcado pelo ápice da pandemia. Estes cenários parecem indicar que as cotações das criptomoedas são influenciadas por fatores sociais e políticos, discordando de [Shahzad et al. \(2019\)](#) e concordando com [Corbet et al. \(2019\)](#).

O desenvolvimento deste estudo permitiu comprovar a afirmação de [Ardia et al. \(2018\)](#) de que o MSGARCH apresentou melhor capacidade preditiva do que o GARCH, quando usado para prever a volatilidade de cotações de criptomoedas. Além disso, as previsões obtidas pelo MSGARCH foram satisfatórias, pois apresentaram RMSE inferior a 1,7%. Portanto, o modelo encontrado pode ser utilizado para prever a volatilidade das cotações das criptomoedas, contribuindo para a redução de riscos e aumentando da

lucratividade dos investidores.

Para futuros trabalhos sugere-se criar uma estratégia para definição da quantidade de regimes a serem utilizados em uma modelagem MSGARCH. Outra possibilidade seria desenvolver um pacote com diversas funções, que permitissem a realização de uma modelagem MSGARCH passo a passo, assim como foi realizado na modelagem GARCH.