

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

**MÉTODOS DE INVERSÃO NUMÉRICA DA TRANSFORMADA
DE LAPLACE APLICADOS NA SOLUÇÃO DE UM
PROBLEMA DE SECAGEM DA MADEIRA**

Jovane Rosca da Silva

Profa. Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez

Orientadora

Prof. Dr. João Francisco Prolo Filho

Coorientador

Jovane Rosca da Silva

“Métodos de Inversão Numérica da Transformada de Laplace Aplicados na Solução de um Problema de Secagem da Madeira”

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande - FURG, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área de concentração: Modelagem Computacional.

Aprovada em: 26/02/2026

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 **BARBARA DENICOL DO AMARAL RODRIGUEZ**
Data: 26/02/2026 11:51:58-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez (Orientadora – FURG)

Documento assinado digitalmente
 **JOAO FRANCISCO PROLO FILHO**
Data: 27/02/2026 14:32:30-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. . João Francisco Prolo Filho (Coorientador – FURG)

Documento assinado digitalmente
 **MATHEUS JATKOSKE LAZO**
Data: 26/02/2026 21:22:39-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Matheus Jatkoske Lazo (FURG)

Documento assinado digitalmente
 **PATRICIA RODRIGUES FORTES**
Data: 26/02/2026 12:44:24-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Patrícia Rodrigues Fortes (UFSM)

Rio Grande - RS
2026

S586m

Silva, Jovane Rosca da

Métodos de inversão numérica da Transformada de *Laplace* aplicados na solução de um problema de secagem da madeira. / Jovane Rosca da Silva. -- 2026.
71 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, 2026.

Orientadora: Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez
Coorientador: Dr. João Francisco Prolo Filho

1. Modelagem Computacional. 2 Transformada de Laplace. 3. Métodos de inversão numérica. 4. Equação diferencial parcial parabólica. 5. Problema de secagem de Madeira I. Rodriguez, Bárbara Denicol do Amaral. II. Prolo Filho, João Francisco. III. Título.

CDU 004.414.23

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo principal analisar e discutir os aspectos computacionais de três técnicas de inversão numérica da Transformada de Laplace (TL): Quadratura Gaussiana (QG), Série de Potências (SP) e Método de Weeks (MW). A originalidade do estudo está atrelada à comparação sistemática realizada entre esses métodos. Nesse processo, foram selecionadas oito funções de naturezas distintas, incluindo características polinomiais, exponenciais e oscilatórias. Nessas funções, foram introduzidos parâmetros A e B com o objetivo de testar o comportamento dos métodos mediante a mudança de amplitude (parâmetro A) e frequência (parâmetro B). Em seguida, utilizou-se a TL para obter a solução de uma Equação Diferencial Parcial Parabólica (EDPP), classe de modelos matemáticos fundamental na descrição de fenômenos de transporte. Finalizada essa etapa, os resultados permitiram avaliar previamente qual seria o comportamento dos métodos de inversão quando aplicados a um problema de secagem de madeira. Os perfis de solução obtidos numericamente foram comparados às soluções analíticas correspondentes, com o objetivo de verificar a precisão e a eficácia dos algoritmos. Como resultado, verificou-se que os métodos de Quadratura Gaussiana e Weeks apresentaram elevada eficiência na inversão de funções elementares, enquanto o método da Série de Potências evidenciou limitações no tratamento de funções oscilatórias. No problema de secagem de madeira, os métodos de Quadratura Gaussiana e Série de Potências mantiveram estabilidade numérica, com erros na ordem de 10^{-4} a 10^{-2} , ao passo que o Método de Weeks apresentou instabilidade para valores de tempo elevados. Por fim, conclui-se que os métodos estudados constituem alternativas viáveis para a inversão numérica da TL, com destaque para a Quadratura Gaussiana e a Série de Potências em aplicações práticas. A avaliação de desempenho foi conduzida por meio da métrica do Erro Absoluto Médio, utilizada para estimar o número ótimo de termos do somatório, N ótimo (N_o), necessário para obter a melhor aproximação entre os perfis analítico e numérico de solução.

Palavras-chaves: Transformada de Laplace; Métodos de Inversão Numérica; Equação Diferencial Parcial Parabólica; Problema de secagem de Madeira.

ABSTRACT

The primary objective of this study is to analyze and discuss the computational aspects of three numerical inversion methods for the Laplace Transform (LT): Gaussian Quadrature (GQ), Power Series (PS), and the Weeks Method (WM). The originality of this research stems from the systematic comparison conducted between these methods. In this process, eight functions of distinct natures were selected, encompassing polynomial, exponential, and oscillatory characteristics. Parameters A and B were introduced into these functions to test the methods' behavior regarding changes in amplitude (parameter A) and frequency (parameter B). Subsequently, the LT was utilized to obtain the solution for a Parabolic Partial Differential Equation (PPDE), a class of mathematical models fundamental to describing transport phenomena. Upon completion of this stage, the results allowed for a preliminary evaluation of the inversion methods' performance when applied to a wood drying problem. The numerically obtained solution profiles were compared to the corresponding analytical solutions to verify the precision and efficacy of the algorithms. As a result, it was found that the Gaussian Quadrature and Weeks methods exhibited high efficiency in inverting elementary functions, whereas the Power Series method showed limitations in handling oscillatory functions. In the wood drying problem, the Gaussian Quadrature and Power Series methods maintained numerical stability, with errors ranging from 10^{-4} to 10^{-2} , while the Weeks Method presented instability for large time values. Finally, it is concluded that the studied methods constitute viable alternatives for the numerical inversion of the LT, with Gaussian Quadrature and Power Series standing out in practical applications. The performance evaluation was conducted using the Mean Absolute Error metric to estimate the optimal number of summation terms, denoted as optimal N (N_o), required to achieve the best approximation between the analytical and numerical solution profiles.

Keywords: Laplace Transform; Numerical Inversion Methods; Parabolic Partial Differential Equation; Wood Drying Problem.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	11
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	13
3	MÉTODOS NUMÉRICOS DE INVERSÃO	15
3.1	Método da Quadratura Gaussiana	15
3.2	Série de Potências	17
3.3	Método de Weeks	18
4	RESULTADOS	20
4.1	Testes para um conjunto de funções elementares	20
4.1.1	Inversão da função $F_1(s)$	21
4.1.2	Inversão da função $F_2(s)$	23
4.1.3	Inversão da função $F_3(s)$	24
4.1.4	Inversão da função $F_4(s)$	25
4.1.5	Inversão da função $F_5(s)$	26
4.1.6	Inversão da função $F_6(s)$	27
4.1.7	Inversão da função $F_7(s)$	29
4.1.8	Inversão da função $F_8(s)$	30
4.1.9	Análise geral dos resultados	31
4.2	Inserção do parâmetros A e B	32
4.2.1	Inserção do parâmetro A e inversão da função $F_3(s)$	33
4.2.2	Inserção do parâmetro B e inversão da função $F_4(s)$	33
4.2.3	Inserção do parâmetro B e inversão da função $F_5(s)$	34
4.2.4	Inserção do parâmetro A e inversão da função $F_6(s)$	34
4.2.5	Inserção dos parâmetros A_1 e A_2 e inversão da função $F_7(s)$	34
4.2.6	Inserção dos parâmetros A e B e inversão da função $F_8(s)$	35
4.3	Testes para a obtenção da solução de uma EDPP por meio da TL	35
4.3.1	Formulação matemática para a obtenção da solução de uma EDPP	36
4.3.2	Inversão numérica da EDPP	37
4.3.3	Análise geral dos resultados	45
5	PROBLEMA DE SECAGEM DE MADEIRA	46
5.1	Inversão numérica e resultados obtidos	49
5.2	Análise dos resultados	57
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	58
7	ANEXO I	65
7.1	Fundamentação Matemática	65
7.2	Transformada de Laplace	65
7.3	Conceitos Básicos e Condição de Existência	65
7.4	Propriedades Operacionais da Transformada de Laplace	66
7.5	Convolução de Funções	67

7.6	Propriedades da Convolução:	67
7.7	Transformada Inversa de Laplace	68
7.8	Propriedades Operacionais	68
7.9	Métodos Analíticos para determinar a Transformada Inversa de Laplace	69
7.10	Método de Frações Parciais	69
7.11	Fórmula de Desenvolvimento de Heaviside	70

LISTA DE FIGURAS

3.1	Fluxograma: Método da Quadratura Gaussiana	17
3.2	Fluxograma: Método da Série de Potências	18
3.3	Fluxograma: Método de Weeks	19
4.1	Erro Absoluto Médio para $F_1(s)$	22
4.2	Erro Absoluto Médio para $F_1(s)$ (ampliado)	22
4.3	Perfil da solução numérica x analítica para F_1	23
4.4	Erro Absoluto Médio para $F_2(s)$	23
4.5	Perfil da solução numérica x analítica para F_2	24
4.6	Perfil da solução numérica x analítica para F_2 (ampliado).	24
4.7	Erro Absoluto Médio para $F_3(s)$	25
4.8	Perfil da solução numérica x analítica para F_3	25
4.9	Erro Absoluto Médio para $F_4(s)$	26
4.10	Perfil da solução numérica x analítica para F_4	26
4.11	Erro Absoluto Médio para $F_5(s)$	27
4.12	Perfil da solução numérica x analítica para F_5	27
4.13	Erro Absoluto Médio para $F_6(s)$	28
4.14	Erro Absoluto Médio para $F_6(s)$ (ampliado).	28
4.15	Perfil da solução numérica x analítica para F_6	29
4.16	Erro Absoluto Médio para $F_7(s)$	29
4.17	Perfil da solução numérica x analítica para F_7	30
4.18	Erro Absoluto Médio para $F_8(s)$	30
4.19	Perfil da solução numérica x analítica para F_8	31
4.20	Erro Absoluto Médio e N_0 para $t = 0,005$	38
4.21	Erro Absoluto Médio e N_0 para $t = 0,005$ (ampliado).	38
4.22	Erro Absoluto Médio e N_0 para $t = 0,05$	39
4.23	Erro Absoluto Médio e N_0 para $t = 0,05$ (ampliado).	39
4.24	Erro Absoluto Médio e N_0 para $t = 0,5$	40
4.25	Erro Absoluto Médio e N_0 para $t = 0,5$ (ampliado).	40
4.26	Perfis de soluções numéricas e analítica com $t = 0,005$	41
4.27	Perfis de soluções numéricas e analítica com $t = 0,05$	42
4.28	Perfis de soluções numéricas e analítica com $t = 0,5$	42
4.29	Quadratura Gaussiana com $10^{-5} \leq t \leq 0,005$	44
4.30	Quadratura Gaussiana com $10^{-5} \leq t \leq 0,05$	44
4.31	Quadratura Gaussiana com $10^{-5} \leq t \leq 0,5$	45
5.1	Erro Absoluto Médio e N_0 para $t = 5$	49
5.2	Erro Absoluto Médio e N_0 para $t = 5$ (ampliado).	50
5.3	Erro Absoluto Médio e N_0 para $t = 50$	50
5.4	Erro Absoluto Médio e N_0 para $t = 50$ (ampliado).	51

5.5	Erro Absoluto Médio e N_0 para $t = 500$	51
5.6	Erro Absoluto Médio e N_0 para $t = 5000$	52
5.7	Perfis de soluções numéricas e analítica com $t = 5$	53
5.8	Perfis de soluções numéricas e analítica com $t = 50$	53
5.9	Perfis de soluções numéricas e analítica com $t = 500$	54
5.10	Perfis de soluções numéricas e analítica com $t = 5000$	54
5.11	Quadratura Gaussiana com $10^{-5} \leq t \leq 5$	56
5.12	Quadratura Gaussiana com $10^{-5} \leq t \leq 50$	56
5.13	Quadratura Gaussiana com $10^{-5} \leq t \leq 500$	56
5.14	Quadratura Gaussiana com $10^{-5} \leq t \leq 5000$	57

LISTA DE TABELAS

4.1	Funções $f(t)$ e suas transformadas $F(s)$	21
4.2	Funções $f(t)$, N ótimos e respectivos Erros Absolutos Médios.	31
4.3	Funções $f(t)$ e suas respectivas transformadas $F(s)$ após a inserção de parâmetros.	33
4.4	Resultado da inserção dos parâmetros A e B	35
4.5	Resultado da influência dos parâmetros A_1 e A_2 na inversão de $F_7(s)$	35
4.6	Avaliação do Erro Absoluto Médio em Função do Número de Termos N_o e do Tempo t	41
4.7	Soluções numéricas e analítica para $t = 0,005$	43
4.8	Soluções numéricas e analítica para $t = 0,05$	43
4.9	Soluções numéricas e analítica para $t = 0,5$	43
5.1	Erro Absoluto Médio X N_o em função do Tempo t	52
5.2	Soluções numéricas e analítica para $t = 5$	55
5.3	Soluções numéricas e analítica para $t = 50$	55
5.4	Soluções numéricas e analítica para $t = 500$	55
5.5	Soluções numéricas e analítica para $t = 5000$	55

LISTA DE SÍMBOLOS

F	Função no domínio de Laplace
$F^{(n)}$	Enésima derivada de F
f	Função no domínio real
$f^{(n)}$	Enésima derivada de f
G	Função no domínio de Laplace
g	Função no domínio real
$\mathcal{L}$	Operador da Transformada de Laplace
$\mathcal{L}^{-1}$	Operador da Transformada Inversa de Laplace
s	Parâmetro na transformação de Laplace
t	tempo
N	Número de termos do somatório dos métodos numéricos
N_o	Número que melhor ajusta os perfis numéricos aos analíticos
A	Parâmetro responsável pela amplitude das funções elementares
A_1	Parâmetro responsável pela amplitude das funções elementares
A_2	Parâmetro responsável pela amplitude das funções elementares
B	Parâmetro responsável pela frequência das funções elementares

Símbolos Gregos

α	Parâmetro livre dos métodos numéricos
σ	Parâmetro livre dos métodos numéricos
γ	Parâmetro livre dos métodos numéricos
Ψ	Parâmetro livre dos métodos numéricos
θ	Variável dos métodos numéricos

LISTA DE ABREVIATURAS

EDDP	Equação Diferencial Parcial Parabólica
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
ED	Equação Diferencial
QG	Método da Quadratura Gaussiana
TL	Transformada de Laplace
MW	Método de Weeks
SP	Método de Série de Potências
$\overline{E}_{abs}$	Erro Absoluto Médio
Re	Parte Real
Im	Parte imaginária

1 INTRODUÇÃO

Segundo Bassanezi (2002) e Gershenfeld (1998), a modelagem matemática atua como uma ponte entre a teoria pura e as ciências aplicadas, consistindo na arte de traduzir problemas complexos da realidade para a linguagem matemática, a fim de interpretá-los sob a ótica do mundo real. Grande parte desses problemas pode ser descrito por meio de Equações Diferenciais (EDs), que constituem a base matemática de diversas áreas das Ciências e Engenharias (Zill, 2011). Essas equações surgem da tentativa de representar sistemas físicos por meio de linguagem matemática, e são caracterizadas pela presença de derivadas de uma função desconhecida. As EDs podem ser classificadas como equações diferenciais ordinárias (EDOs), quando envolvem apenas uma variável independente, ou equações diferenciais parciais (EDPs), quando dependem de duas ou mais variáveis independentes (Zill, 2011).

Entre as EDPs, destacam-se as Equações Diferenciais Parciais Parabólicas (EDPPs), presentes em uma ampla gama de aplicações, tais como em problemas relacionados à difusão de partículas e à mecânica de fluidos (Tani, 1977), ao processo de secagem de madeira (da Silva et al., 2010), às variações de temperatura no solo (Lima e de Paula Araújo, 2019) e à condução de calor (Brociek et al., 2024). Cahyono et al. (2008) utiliza uma Equação Diferencial Parcial Parabólica (EDPP) para fundamentar a modelagem matemática voltada à otimização do processo de secagem industrial de madeira em estufas. Já Zanuncio et al. (2017) demonstram a importância econômica da secagem na redução de custos de transporte em cadeias produtivas de madeira.

Os autores Galvão e Jankowsky (1985) relatam diversos benefícios oriundos do processo de secagem da madeira, entre eles estão: redução na movimentação dimensional a limites aceitáveis. Como consequência, as peças de madeira podem ser produzidas com maior precisão de dimensões, proporcionando melhor desempenho em serviço, melhora a atuação dos vernizes e tintas aplicadas sobre a madeira, reduz os riscos do ataque de fungos apodrecedores e manchadores e também aumenta a resistência mecânica.

Nesse contexto, a Transformada de Laplace (TL) surge como uma ferramenta que auxilia na obtenção de soluções para esses modelos. Segundo Pacheco (2011), a Transformada de Laplace pode ser caracterizada pela aplicação de um operador integral em uma função f , geralmente, no domínio temporal ($f(t)$). Por meio desse procedimento, a função $f(t)$ é conduzida a um novo domínio ($F(s)$), este processo é geralmente utilizado para transformar EDs em equações algébricas, facilitando as manipulações matemáticas. De forma equivalente, se a TL é utilizada na resolução de problemas físicos (modelados por EDPs), as expressões obtidas como solução são dependentes da variável s (do Amaral, 2016). Uma vez que existe a necessidade de representar essas soluções no domínio temporal, a conversão é feita por meio da inversão da Transformada de Laplace. Esta inversão pode ser realizada de forma numérica ou analítica. A inversão numérica da Transformada de Laplace torna-se necessária quando a transformada $F(s)$ não possui uma inversa analítica conhecida ou quando sua expressão é complexa demais para a

aplicação de métodos tradicionais (como frações parciais ou tabelas de transformadas).

Na literatura é possível encontrar diferentes métodos de inversão numérica, os quais baseiam-se, por exemplo, na expansão da função original em uma série de funções ortogonais (Cohen, 2007), na fórmula de Post-Widder (Wang e Zhan, 2015), na deformação do contorno de integração de Bromwich (Pilatti, 2019), ou ainda, no emprego das aproximações por séries de Fourier (Lemos et al., 2021).

Segundo Pilatti (2019), a necessidade do desenvolvimento de diferentes métodos para a inversão numérica da Transformada de Laplace está diretamente associada ao fato de não existir um método universal, que seja capaz de lidar de forma eficiente com todos os tipos de funções. Tal demanda pode ser comprovada por meio do aumento significativo das publicações na área: de acordo com a plataforma Scopus, no ano de 2010 foram publicados 42 trabalhos envolvendo a inversão numérica da TL, já no ano de 2024 houve um registro de 84 publicações. Além disso, estudos recentes indicam que a escolha adequada dos parâmetros intrínsecos aos métodos é determinante para garantir estabilidade e precisão (Kamran et al., 2023).

Nesse sentido, esta dissertação tem como objetivo apresentar e discutir os aspectos computacionais de três métodos de inversão numérica da Transformada de Laplace: Quadratura Gaussiana, Série de Potências e Weeks. Inicialmente, são aplicados a um conjunto de oito funções elementares, com o propósito de avaliar seu desempenho e validar os algoritmos implementados. A fim de verificar como os métodos se adéquam a diferentes mudanças no comportamento das funções, são implementados parâmetros A e B , responsáveis pela alteração da amplitude e frequência das funções exponenciais e oscilatórias. Em seguida, os métodos são utilizados para obter a solução de uma Equação Diferencial Parcial Parabólica (EDPP). Obtidos e avaliados os resultados dessa etapa preliminar, os métodos de inversão numérica são então empregados na resolução de um problema de secagem de madeira.

Para alcançar os objetivos propostos, este trabalho está organizado em sete capítulos. O Capítulo 2 é dedicado à revisão bibliográfica, que apresenta trabalhos fundamentais sobre a Transformada de Laplace e os principais métodos de inversão numérica. No Capítulo 3, são descritos os métodos de inversão utilizados. O Capítulo 4 apresenta os resultados preliminares, obtidos por meio da aplicação dos métodos na inversão de oito funções elementares, a incorporação e implementação dos parâmetros A e B e a obtenção da solução da EDPP, permitindo uma análise comparativa de desempenho. No Capítulo 5 têm-se a introdução do problema físico relacionado ao processo de secagem de madeira, bem como a formulação matemática e solução pelos três métodos de inversão numérica. O Capítulo 6 traz as considerações finais e propostas para futuros trabalhos.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A Transformada de Laplace, inicialmente desenvolvida pelo matemático Pierre-Simon Laplace no século XIX, surgiu com o objetivo de resolver problemas envolvendo Probabilidades e Astronomia (Silva, 2022). Atualmente, consolidou-se como uma ferramenta matemática amplamente utilizada na resolução de equações diferenciais, desempenhando papel fundamental em diversas áreas da Engenharia e Ciências Aplicada. Na Engenharia Mecânica, por exemplo, é aplicada na solução de sistemas vibratórios (Smith et al., 2022); na Engenharia Elétrica, na análise de circuitos dinâmicos (Deshpande, 2014; Gheorghe e Marin, 2023); na Engenharia Civil, em estudos de análise de fissuras em estruturas e vigas (Zhang et al., 2017); na engenharia florestal no estudo da secagem de madeira (da Silva et al., 2010; de Carvalho et al., 2013) na Física Quântica (Pimentel e de Castro, 2014); e na Matemática Aplicada (Lamb, 2020). Desde sua formulação, a TL tem se consolidado como um método eficiente para simplificar problemas os conduzindo a um novo domínio, facilitando a análise e a solução matemática (Tani, 1977; Pilatti, 2019; Paz et al., 2023).

Os métodos de inversão da TL podem ser divididos em dois grupos: analíticos e numéricos. Entre os analíticos, tem-se, por exemplo, a inversão por meio de tabelas (Bendler e Weiss, 1990); o método baseado na continuação analítica de séries de Taylor (Abbasbandy e Bervillier, 2011); a inversão da TL por meio do emprego de frações parciais (Badried e Fuad, 2018); e o emprego do teorema dos resíduos (Wei et al., 2019). A fundamentação matemática completa da Transformada de Laplace adotada neste trabalho, incluindo definição, condições de existência, propriedades operacionais, convolução, transformada inversa e métodos analíticos de inversão, encontra-se organizada no ANEXO I, para fins de referências e fixação de notação.

Na literatura há trabalhos que apontam a dificuldade quanto ao retorno da função transformada para o seu domínio inicial. Hassanzadeh e Pooladi-Darvish (2007) demonstram que a inversão analítica frequentemente falha quando a função transformada envolve termos exponenciais crescentes ou funções oscilatórias. Indratno et al. (2009) relatam que a inversão da TL é um problema mal posto, onde a solução é extremamente sensível. Já Maréchal et al. (2023) comentam o fato da TL apresentar uma estabilidade logarítmica, onde pequenos erros na transformada $F(s)$ podem gerar grandes erros na função $f(t)$.

Como alternativa aos métodos analíticos de inversão da TL, surgem os métodos numéricos. Existem, na literatura, diferentes técnicas de inversão numérica, as quais podem se basear, por exemplo, na expansão da função original em uma série de funções ortogonais (Cohen, 2007); na fórmula de Post-Widder (Wang e Zhan, 2015); na deformação do contorno de integração de Bromwich (Pilatti, 2019); ou, ainda, no emprego das aproximações por séries de Fourier (Lemos et al., 2021).

Em seu trabalho, Cohen (2007) realiza testes de precisão com diferentes métodos de inversão numérica da Transformada de Laplace. Já Pilatti (2019) traz uma análise de métodos numéricos quando aplicados a um problema de transporte de uma substância dissolvida em um fluido

(transporte de soluto) que escoar através de um meio poroso. Por fim, Paz et al. (2023) analisa a eficiência de cinco métodos baseados na deformação do contorno de Bromwich, aplicados a funções elementares pertencentes a diferentes famílias.

Dentre os métodos de inversão numérica da TL, destacam-se os métodos da Quadratura Gaussiana (QG), Série de Potências (SP) e o Método de Weeks (MW). Piessens (1971) realiza a integração numérica da integral de Bromwich e a inversão da Transformada de Laplace por meio da QG. Galdino (1995) utiliza os métodos da Quadratura Gaussiana e Método de Weeks para inverter diferentes funções elementares. Já Giunta et al. (1989) e Weideman (1999) estudam a influência dos parâmetros livres na expansão de Laguerre aplicada ao Método de Weeks.

Iseger (2006) emprega o método da Quadratura Gaussiana para inverter funções com descontinuidades e singularidades. Navarrete e Viswanath (2014) realizam estudos sobre a precisão e a estabilidade do método de inversão numérica de Série de Potências. Já do Amaral (2016) testa três métodos de inversão numérica da TL (incluindo a Quadratura Gaussiana e Série de Potências). Estes são, primeiramente, aplicados em um conjunto de funções elementares e, após comprovadas suas eficiências, também são utilizados para obter a solução para um problema de transporte de partículas.

Kano et al. (2005) estende a utilização do Método de Weeks para a inversão de funções matriciais. Wang e Zhan (2015) aplicam o Método de Weeks para obter a solução de problemas envolvendo transporte de soluto. Já Kamran et al. (2023) também empregam esse método para a inversão numérica da TL em EDs de ordem fracionárias.

Nesta etapa do estudo, propõe-se a aplicação dos métodos de Quadratura Gaussiana, Série de Potências e Método de Weeks para a inversão numérica de funções elementares, cujas amplitude e frequência serão moduladas pelos parâmetros A e B . Subsequentemente, essa abordagem será estendida à resolução de uma Equação Diferencial Parcial Parabólica (EDPP) por meio da Transformada de Laplace, técnica que possibilita a conversão do modelo diferencial em um problema algébrico no domínio da frequência. Por fim, os algoritmos serão empregados na obtenção da solução temporal para o processo de secagem de madeira. A eficiência dos métodos será validada mediante comparação entre os perfis numéricos e as respectivas soluções invertidas analiticamente.

3 MÉTODOS NUMÉRICOS DE INVERSÃO

Neste capítulo, serão apresentados os métodos de inversão numérica da TL: Quadratura Gaussiana, Série de Potências e Método de Weeks.

3.1 Método da Quadratura Gaussiana

A Quadratura Gaussiana é um método numérico comumente utilizado para calcular aproximações de integrais definidas, especialmente quando estas não possuem solução analítica ou são de difícil manipulação. A ideia central é aproximar a integral como uma soma ponderada de valores da função em determinados pontos (os chamados nós ou pontos de amostragem), escolhidos de forma ótima para maximizar a precisão. Com o objetivo de comparar os resultados encontrados optou-se pela escolha dos nós conforme o trabalho de Heydarian et al. (1981).

Em sua forma geral, a quadratura Gaussiana para uma integral no intervalo $[-1, 1]$ é dada por:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i),$$

onde x_i são os nós da quadratura (raízes de um polinômio ortogonal, como os de Legendre), e w_i são os pesos associados.

A adaptação proposta por Heydarian et al. (1981) refere-se diretamente à forma de definição da Transformada Inversa de Laplace. Conforme apresentado no ANEXO I, Equação (7.16), a inversão é originalmente definida por meio de uma integral no plano complexo. A formulação utilizada pelos autores consiste em uma modificação dessa definição, substituindo a forma integral contínua por uma aproximação discreta adequada ao tratamento numérico, onde os cálculos dos pesos são de fácil implementação sem perder a precisão dos resultados. Assim, obtém-se a expressão apresentada na Equação (3.1).

$$f(t) \approx \sum_{i=1}^N a_i \frac{p_i}{t} F\left(\frac{p_i}{t}\right), \quad (3.1)$$

onde F é a função transformada e p_i são as raízes do polinômio dado por,

$$(-1)^N \sum_{r=0}^N a(N, r) p^{N-r} = 0, \quad (3.2)$$

com coeficientes $a(N, r)$ definidos como:

$$a(N, r) = \frac{(-1)^{N-r} N(N+r-1)!}{r!(N-r)!}. \quad (3.3)$$

Os pesos indicados por a_i , na equação (3.1), são obtidos através da solução do sistema:

$$\sum_{i=1}^N a_i p_i^{-r} = \frac{1}{r!}, \quad 0 \leq r \leq N-1, \quad (3.4)$$

cuja forma matricial é dada por:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} p_1^0 & p_2^0 & \cdots & p_N^0 \\ p_1^{-1} & p_2^{-1} & \cdots & p_N^{-1} \\ p_1^{-2} & p_2^{-2} & \cdots & p_N^{-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1^{-(N-1)} & p_2^{-(N-1)} & \cdots & p_N^{-(N-1)} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{0!} \\ \frac{1}{1!} \\ \frac{1}{2!} \\ \vdots \\ \frac{1}{(N-1)!} \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}, \quad (3.5)$$

onde a matriz A contém os valores de p_i^{-r} e o vetor $\mathbf{a}$ é formado pelos pesos descritos no método como a_i .

Para a obtenção da solução do sistema linear descrito na equação (3.5), é utilizada a fatoração em valores singulares (Bisgard, 2021) que pode ser escrita de forma matricial como:

$$A = U \Sigma V^T, \quad (3.6)$$

ou ainda,

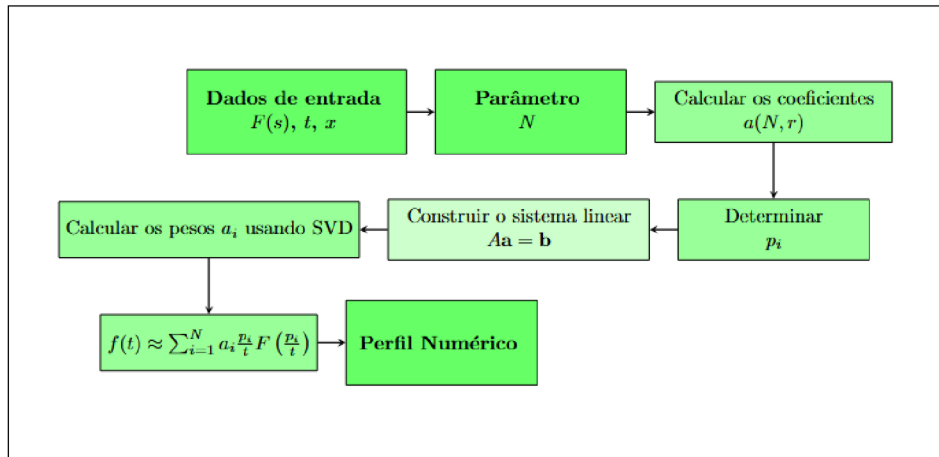
$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1N} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{N1} & u_{N2} & \cdots & u_{NN} \end{pmatrix}}_U \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_N \end{pmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1N} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{N1} & v_{N2} & \cdots & v_{NN} \end{pmatrix}^T}_{V^T} \quad (3.7)$$

onde A é a matriz do sistema, $U = [U_{m,i}]$ e $V^T = [V_{n,i}^T]$ são matrizes ortogonais e Σ é uma matriz diagonal contendo os valores singulares σ_i . Assim, cada elemento da matriz A pode ser escrito como

$$A_{m,n} = \sum_{i=1}^r \sigma_i U_{m,i} V_{n,i}^T. \quad (3.8)$$

Por meio da decomposição da matriz A , Equação (3.7), obtém-se uma forma numericamente estável de resolver o sistema linear e, assim, determinar o vetor de pesos $\mathbf{a}$, empregado na aproximação da função $f(t)$. A Figura 3.1 ilustra os passos para a implementação da Quadratura Gaussiana, enfatizando a sucessão de etapas desde a formulação até a extração do perfil numérico final.

Figura 3.1: Fluxograma: Método da Quadratura Gaussiana



Fonte: O autor

3.2 Série de Potências

O método de inversão numérica por Série de Potências, baseia-se em aproximar a função f por uma combinação de exponenciais do tipo e^{-lkt} . Assim, o problema de inversão da TL necessita da determinação dos coeficientes dessas exponenciais. Os autores Chung and Sun (1986) e Cohen (2007) descrevem matematicamente este processo da seguinte maneira:

$$f(t) = \sum_{l=0}^N \alpha_l g_l(t), \quad (3.9)$$

onde $g_l(t) = e^{-lkt}$, k é um parâmetro experimental e os coeficientes α_l , com $l = 0, 1, \dots, N$, são as constantes que serão determinadas no decorrer do processo. Isso é equivalente a escrever

$$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots + \alpha_n z^N, \quad (3.10)$$

onde $z = g_l(t)$. Como a Transformada de Laplace é dada por

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt, \quad (3.11)$$

obtém-se

$$F((j+1)k) = \int_0^\infty f(t) e^{-tk} g_j(t) dt. \quad (3.12)$$

Finalmente, multiplicando-se a equação (3.9) por $g_j(t)e^{-kt}$, integrando-se em relação a t de 0 a ∞ e substituindo-se na equação (3.12), a relação obtida é dada por

$$\sum_{l=0}^N \alpha_l \frac{1}{l+j+1} = F((j+1)k). \quad (3.13)$$

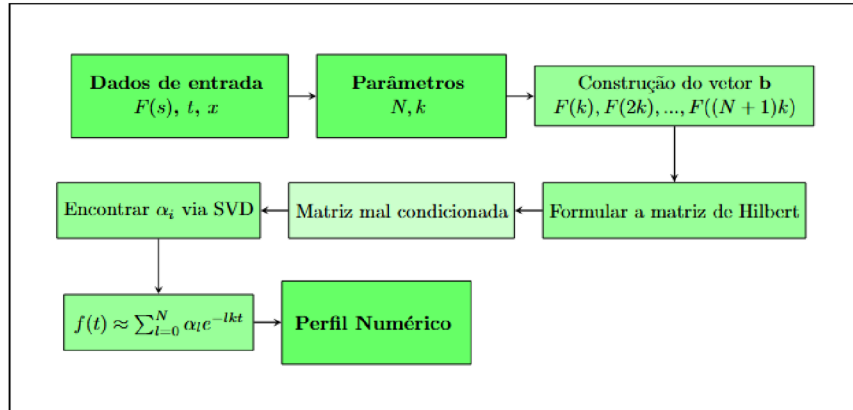
Note que a equação (3.13) representa um sistema de equações para $j = 0, 1, \dots, N$, o qual pode ser expresso em forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{N+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{N+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{N+1} & \frac{1}{N+2} & \frac{1}{N+3} & \dots & \frac{1}{2N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(k) \\ F(2k) \\ \vdots \\ F((N+1)k) \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Um dos principais desafios desse método está relacionado à matriz apresentada na equação (3.14), que corresponde à matriz de Hilbert. Essa matriz é conhecida por seu mal condicionamento, o qual se agrava conforme o aumento do parâmetro N . Para contornar esse problema, emprega-se o método de fatoração em valores singulares, utilizado como forma estável de resolução do sistema.

A Figura 3.2 detalha o fluxo de operação do Método de Séries de Potências e as etapas fundamentais para a determinação da aproximação numérica.

Figura 3.2: Fluxograma: Método da Série de Potências



Fonte: O autor

3.3 Método de Weeks

O Método de Weeks consiste na aproximação da função $f(t)$, em seu domínio inicial, em termos da função transformada $F(s)$, utilizando os polinômios de Laguerre como base da expansão. Essa formulação foi desenvolvida em 1965, incorporando as ideias de Papoulis (1956) e Lanczos (1956), que tentaram obter uma expansão em série para $f(t)$ em termos das funções ortonormais de Laguerre (Cohen, 2007).

Segundo Wang e Zhan (2015), essa aproximação é dada por:

$$f(t) \approx e^{\sigma t} \sum_{j=0}^N a_j L_j \left(\frac{t}{g} \right), \quad (3.15)$$

onde $L_j()$ representa o j -ésimo polinômio de Laguerre (Cohen, 2007), a_j é o coeficiente de

Taylor. Ainda

$$\sigma = \Psi - \frac{1}{2g}, \quad g = \frac{T_{max}}{N}, \quad \Psi = \left(\alpha + \frac{1}{T_{max}} \right) H \left(\alpha + \frac{1}{T_{max}} \right),$$

sendo g um fator de escala, $H()$ a função de Heaviside, N a quantidade de termos adotados no somatório dos polinômios de Laguerre e T_{max} o maior valor de t para o intervalo onde a função é avaliada. Neste estudo, utiliza-se $\alpha = 1$, assim como indicado por Wang e Zhan (2015). Além disso, os coeficientes de Taylor são definidos por

$$a_0 = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N h(\theta_k), \quad (3.16)$$

$$a_j = \frac{2}{N+1} \sum_{k=0}^N h(\theta_k) \cos(j\theta_k), \quad (3.17)$$

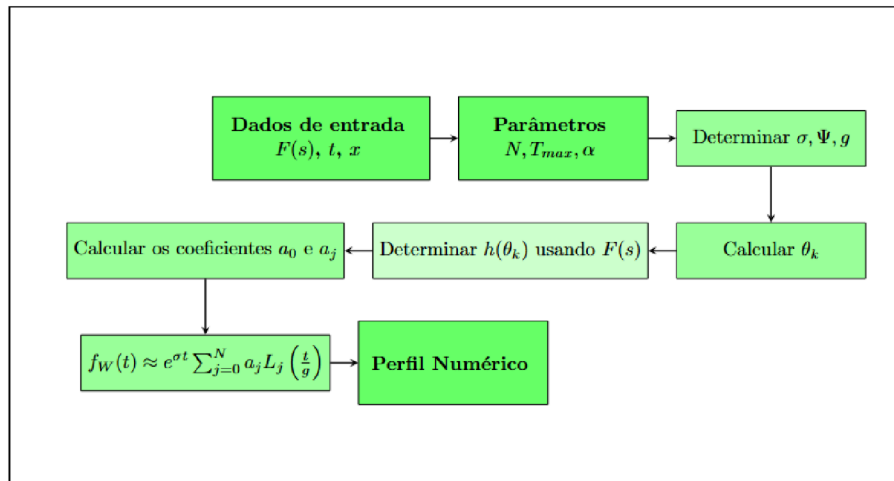
onde

$$\theta_k = \frac{\pi}{2} \frac{2k+1}{N+1}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (3.18)$$

$$h(\theta_k) = \frac{1}{T_n} \left\{ \operatorname{Re} \left[F \left(\Psi + \frac{i}{2g} \cot \left(\frac{\theta_k}{2} \right) \right) \right] - \cot \left(\frac{\theta_k}{2} \right) \operatorname{Im} \left[F \left(\Psi + \frac{i}{2g} \cot \left(\frac{\theta_k}{2} \right) \right) \right] \right\}. \quad (3.19)$$

A equação (3.19) avalia F em pontos complexos específicos, permitindo calcular os coeficientes a_j para reconstruir $f(t)$ pela soma de Laguerre, onde $\operatorname{Re}()$ e $\operatorname{Im}()$ representam, respectivamente, a parte real e imaginária da função e $T_n = 2g$. A Figura 3.3 apresenta o fluxograma do algoritmo referente ao Método de Weeks, descrevendo as etapas do processo computacional, desde a inserção dos parâmetros iniciais até a geração dos perfis definitivos.

Figura 3.3: Fluxograma: Método de Weeks



Fonte: O autor

4 RESULTADOS

Neste capítulo, são apresentados os resultados obtidos para a inversão da Transformada de Laplace por meio dos algoritmos da Quadratura Gaussiana, Série de Potências e Método de Weeks. Inicialmente, implementaram-se os métodos para a inversão numérica de um conjunto de funções elementares, exibidas na Tabela 4.1, em seguida são atribuídos parâmetros A e B os quais são responsáveis por modificar a amplitude e frequências das funções elementares (Tabela 4.3). Por último, foi realizada a inversão numérica da solução de uma EDPP descrita na seção 4.3.

Os testes têm o propósito de avaliar o desempenho dos métodos para a inversão numérica de diferentes classes de funções e da solução de uma EDPP. Além disso, busca-se a validação dos algoritmos implementados. Para atingir os objetivos, utilizou-se o software livre OCTAVE, versão 9.1.0, em um notebook Intel(R) Core(TM) I3-10110U, com 2,10GHz de frequência, Sistema Operacional Windows de 64 bits e memória RAM de 4GB.

Uma vez que os algoritmos de inversão da TL empregados neste artigo aproximam a solução desejada em termos de uma série, determinar o número adequado de termos a serem somados é fundamental para que o método numérico apresente a melhor precisão possível, sendo esse um aspecto essencial na avaliação de sua eficiência. Entretanto, apesar dessa escolha poder ser feita de muitas formas, a literatura fornece pouca informação a esse respeito (Galdino, 1995). Este trabalho propõe que a métrica para escolha do melhor N , denominado N ótimo ou N_o , seja feita em termos do Erro Absoluto Médio ($\overline{E}_{abs}$). Essa estratégia é feita por meio de um algoritmo onde são computados valores de erros médios gerados a partir da substituição de diferentes valores de N na equação (4.1) em forma de varredura. O algoritmo, então, avalia qual o menor erro médio gerado (Erro Absoluto Médio) e o valor do N que resultou neste erro (N_o). Essa técnica foi descrita primeiramente por Calixto et al. (2022), também adotada por Paz et al. (2023), e é aqui adaptada e escrita como,

$$\overline{E}_{abs} = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} |f_a(t_i) - f_n(t_i)|, \quad t_i \in \mathbb{R}^+, \quad (4.1)$$

onde f_a representa a função transformada inversa obtida de forma analítica, f_n , a correspondente inversão obtida de forma numérica, e N_t é a quantidade de valores de t utilizados para obter o perfil de solução. Em especial, para a geração dos resultados, optou-se por um intervalo $10^{-5} \leq t \leq 10$, com 11 subdivisões.

4.1 Testes para um conjunto de funções elementares

Nesta seção são apresentados os resultados para a inversão numérica de um conjunto de funções elementares com comportamento polinomial, exponencial e oscilatório. Na Tabela 4.1 são apresentadas as funções $f(t)$ e suas respectivas Transformadas de Laplace $F(s)$.

Tabela 4.1: Funções $f(t)$ e suas transformadas $F(s)$.

Funções $f(t)$	Transformadas $F(s)$
$f_1(t) = 1$	$F_1(s) = \frac{1}{s}$
$f_2(t) = t$	$F_2(s) = \frac{1}{s^2}$
$f_3(t) = e^{-t}$	$F_3(s) = \frac{1}{s+1}$
$f_4(t) = \text{sen}(t)$	$F_4(s) = \frac{1}{s^2+1}$
$f_5(t) = t \cos(t)$	$F_5(s) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$
$f_6(t) = te^{-t}$	$F_6(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$
$f_7(t) = e^{-2t}(e^t - 1)$	$F_7(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)}$
$f_8(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-0,5t}\text{sen}\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$F_8(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$

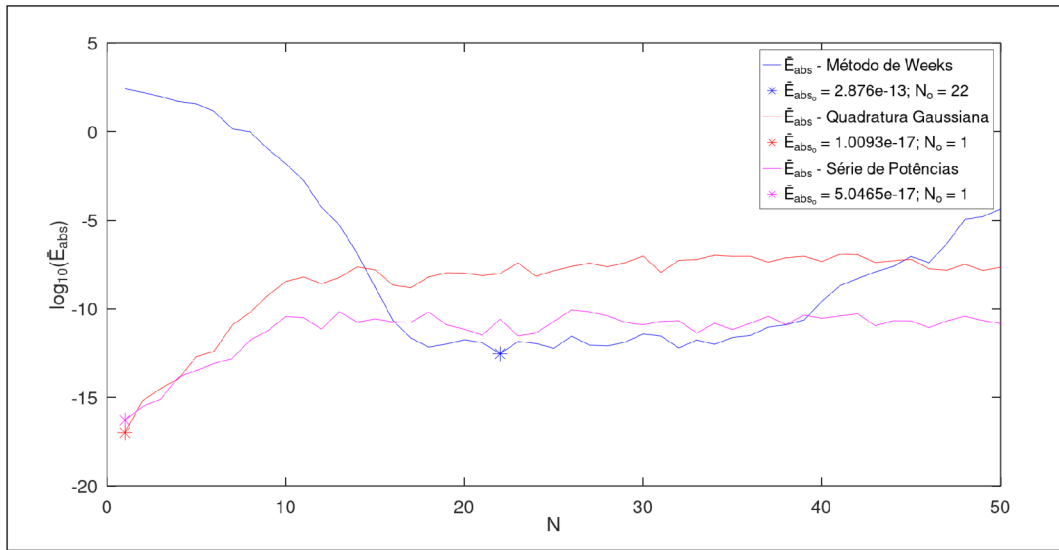
Fonte: O autor, adaptado de Freitas 2022

As soluções obtidas neste trabalho são apresentadas graficamente por meio de dois gráficos para cada função: o primeiro exibe o N ótimo e também o perfil do Erro Absoluto Médio computado a partir da equação (4.1), enquanto que o segundo apresenta a comparação entre as soluções analítica e numéricas para cada um dos métodos segundo o correspondente N_o . Em especial, para a geração dos resultados, optou-se por um intervalo $10^{-5} \leq t \leq 10$, com 11 subdivisões.

4.1.1 Inversão da função $F_1(s)$

As Figuras 4.1 e 4.3 mostram os testes para a inversão numérica da Transformada de Laplace para a função $F_1(s) = \frac{1}{s}$. O perfil do Erro Absoluto Médio está representado na Figura 4.1. A Figura 4.3 apresenta uma comparação gráfica entre os perfis analítico e numéricos para a inversão de $F_1(s)$.

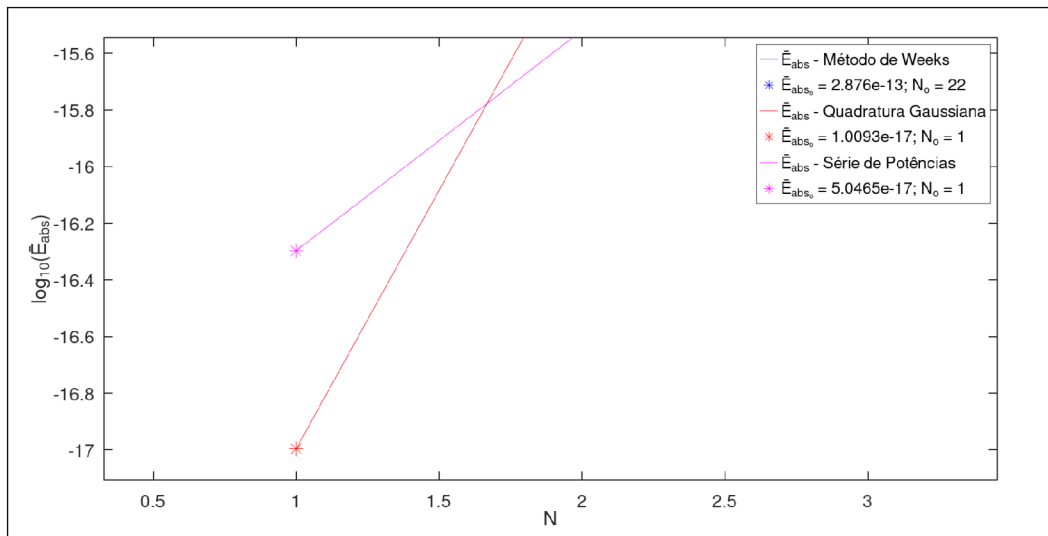
Figura 4.1: Erro Absoluto Médio para $F_1(s)$



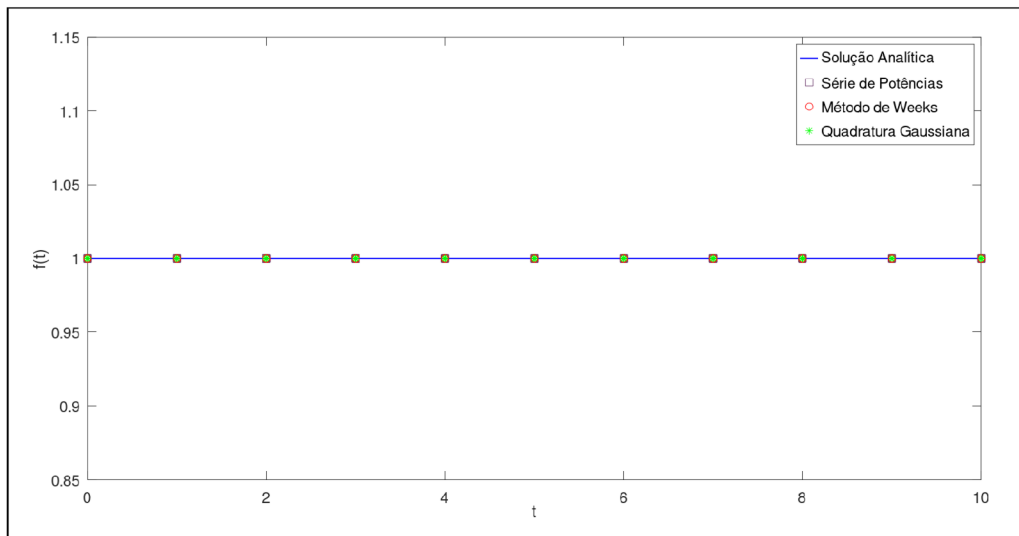
Fonte: O autor

A Figura 4.2 corresponde a um zoom da Figura 4.1, evidenciando, com maior detalhe, os valores obtidos de N_0 para os métodos de Quadratura Gaussiana e Série de Potências.

Figura 4.2: Erro Absoluto Médio para $F_1(s)$ (ampliado)



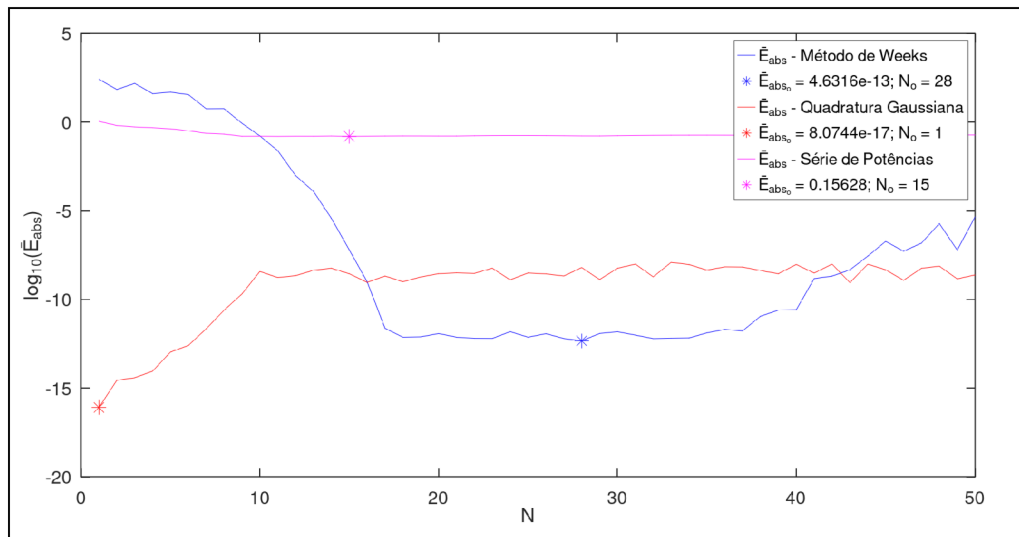
Fonte: O autor

Figura 4.3: Perfil da solução numérica x analítica para F_1 .

Fonte: O autor

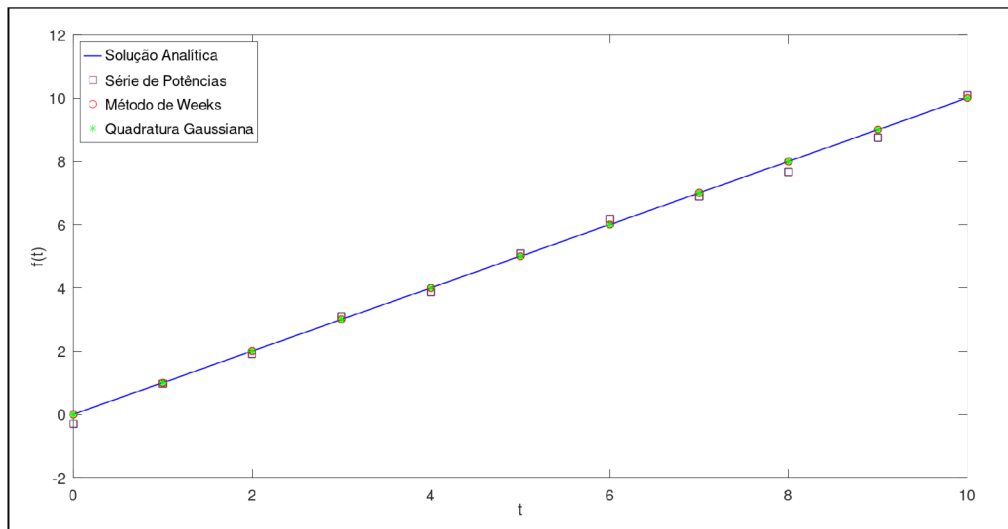
4.1.2 Inversão da função $F_2(s)$

A Figura 4.4 mostra o gráfico do Erro Absoluto Médio para a inversão numérica da Transformada de Laplace para a função $F_2(s) = \frac{1}{s^2}$. Já a Figura 4.5 apresenta uma comparação entre os perfis analítico e numéricos gerados para a inversão de $F_2(s)$.

Figura 4.4: Erro Absoluto Médio para $F_2(s)$.

Fonte: O autor

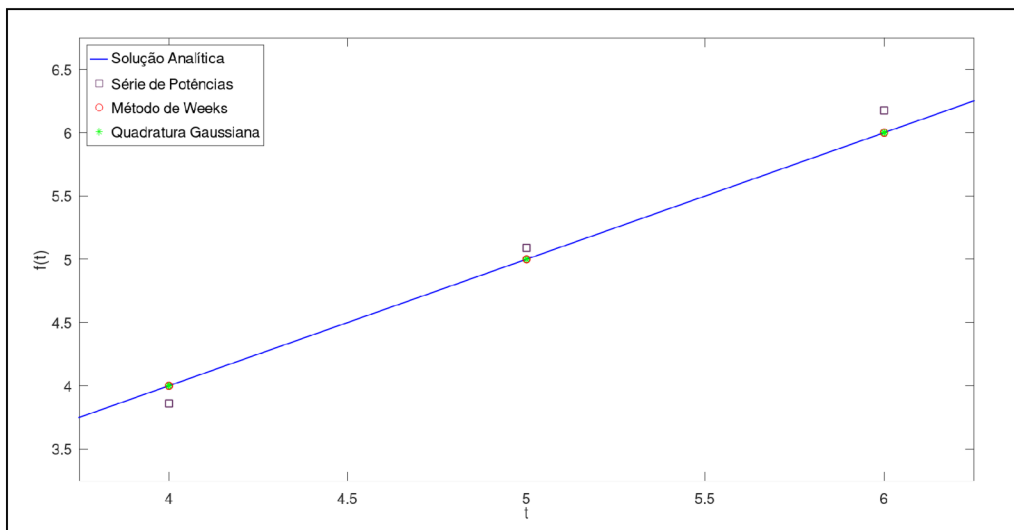
Figura 4.5: Perfil da solução numérica x analítica para F_2 .



Fonte: O autor

Para uma melhor visualização dos perfis, a Figura 4.6 apresenta um zoom da Figura 4.5, evidenciando com maior detalhe a região para $4 \leq t \leq 6$.

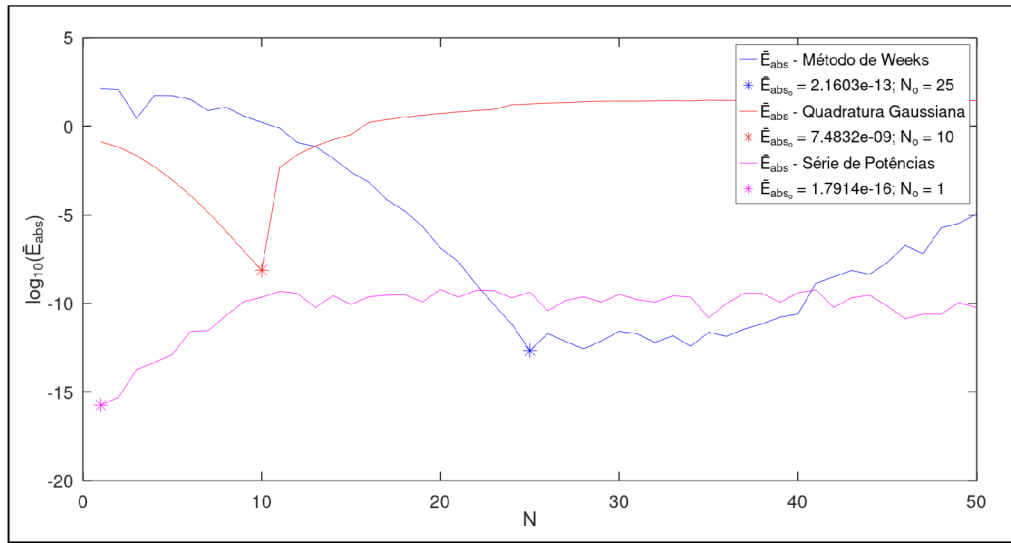
Figura 4.6: Perfil da solução numérica x analítica para F_2 (ampliado).



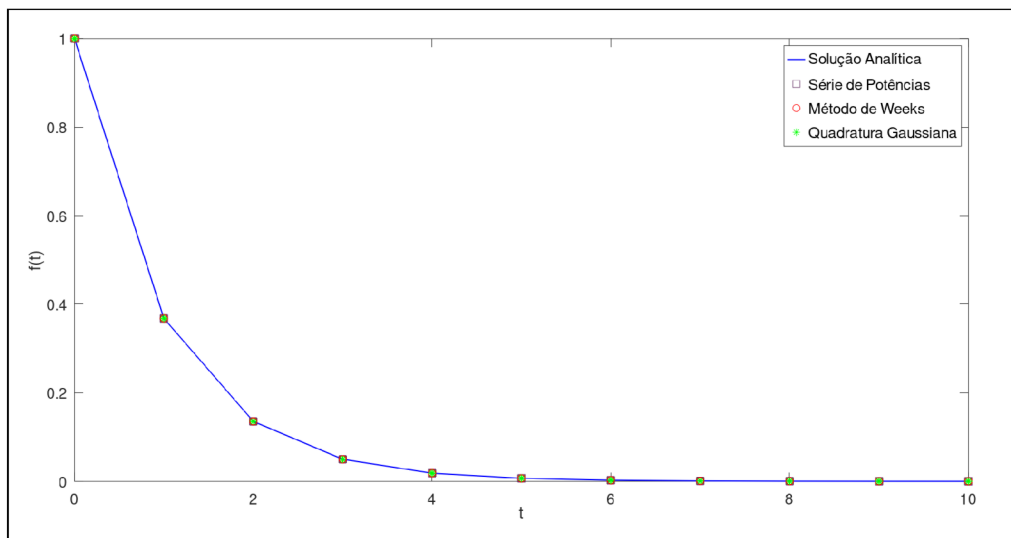
Fonte: O autor

4.1.3 Inversão da função $F_3(s)$

A partir das Figuras 4.7 e 4.8, pode-se observar os testes realizados para a obtenção da inversão numérica da Transformada de Laplace para a função $F_3(s) = \frac{1}{s+1}$. A Figura 4.7 apresenta o gráfico do Erro Absoluto Médio, juntamente com o N_o obtido para cada método. Já a Figura 4.8 mostra uma comparação entre os perfis analítico e numéricos para a inversão de $F_3(s)$.

Figura 4.7: Erro Absoluto Médio para $F_3(s)$.

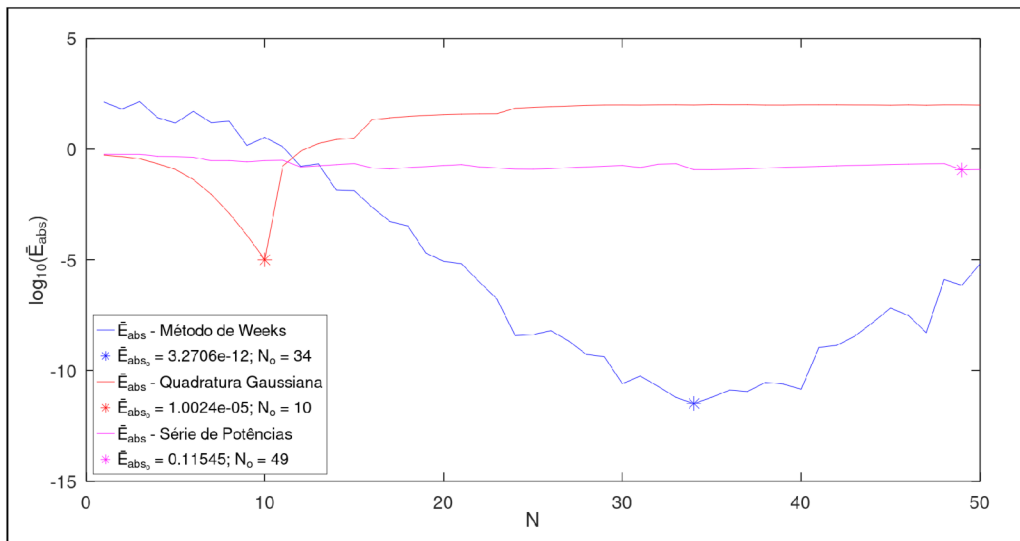
Fonte: O autor

Figura 4.8: Perfil da solução numérica x analítica para F_3 .

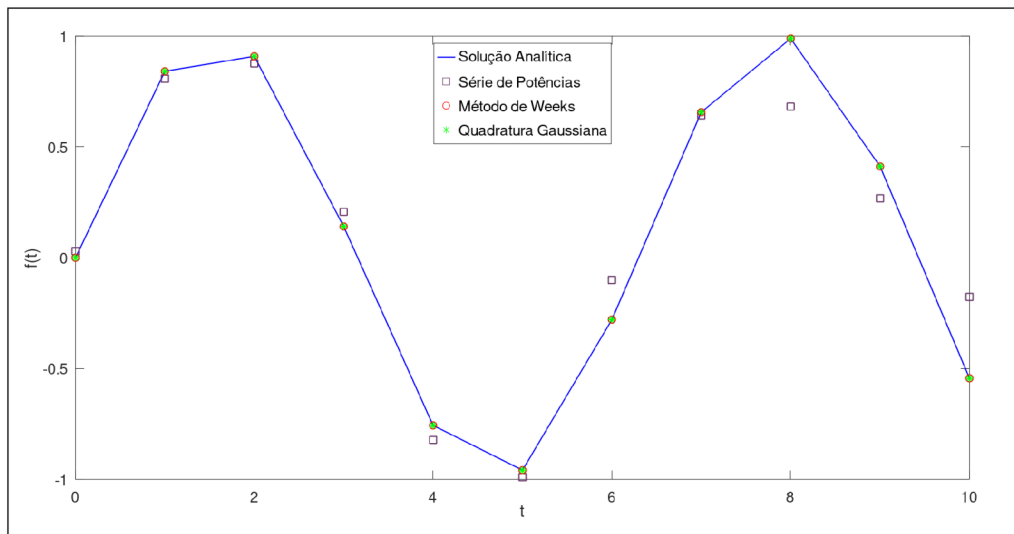
Fonte: O autor

4.1.4 Inversão da função $F_4(s)$

Por meio das Figuras 4.9 e 4.10, pode-se visualizar os testes para a inversão numérica da Transformada de Laplace para a função $F_4(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$. O gráfico do Erro Absoluto Médio, Figura 4.9, também revela o N ótimo obtido para cada um dos métodos. Já a Figura 4.10 apresenta uma comparação entre os perfis analítico e numéricos para a inversão de $F_4(s)$.

Figura 4.9: Erro Absoluto Médio para $F_4(s)$.

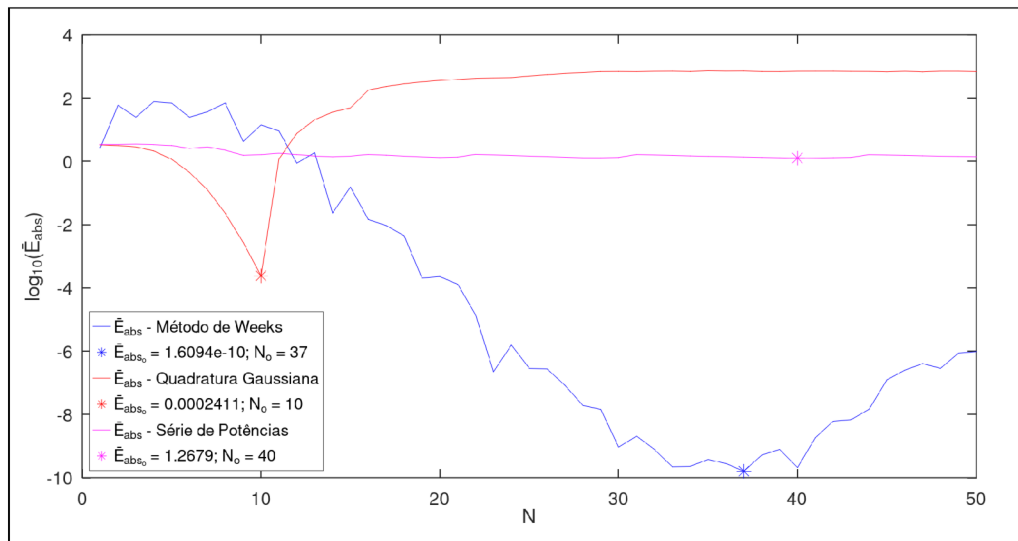
Fonte: O autor

Figura 4.10: Perfil da solução numérica x analítica para F_4 .

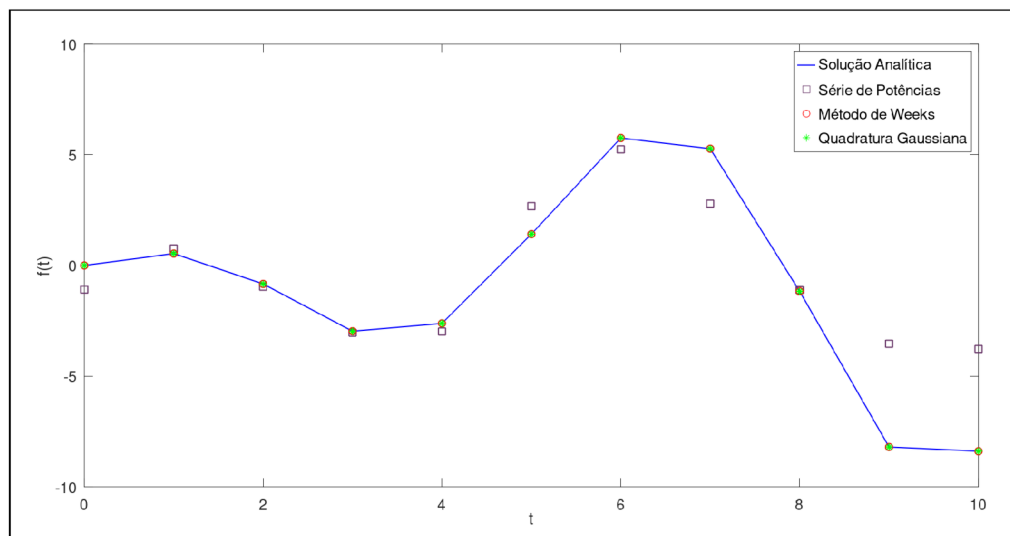
Fonte: O autor

4.1.5 Inversão da função $F_5(s)$

Nas Figuras 4.11 e 4.12 são mostrados os testes para a inversão numérica da Transformada de Laplace para a função $F_5(s) = \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}$. Pelo gráfico do Erro Absoluto Médio, Figura 4.11, percebe-se os diferentes valores de N ótimo, utilizados para a geração da Figura 4.12, que apresenta uma comparação entre os perfis analítico e numéricos para a inversão de $F_5(s)$.

Figura 4.11: Erro Absoluto Médio para $F_5(s)$.

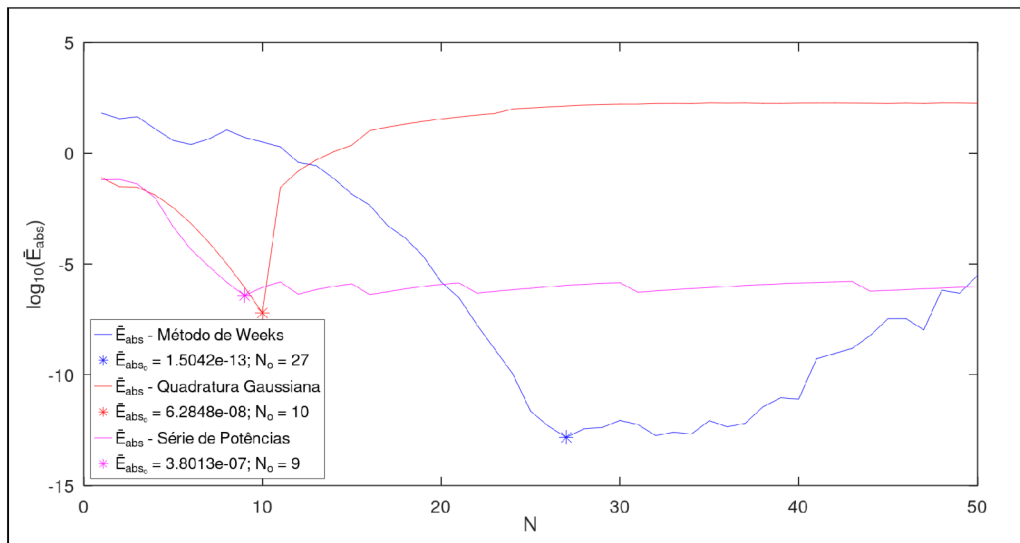
Fonte: O autor

Figura 4.12: Perfil da solução numérica x analítica para F_5 .

Fonte: O autor

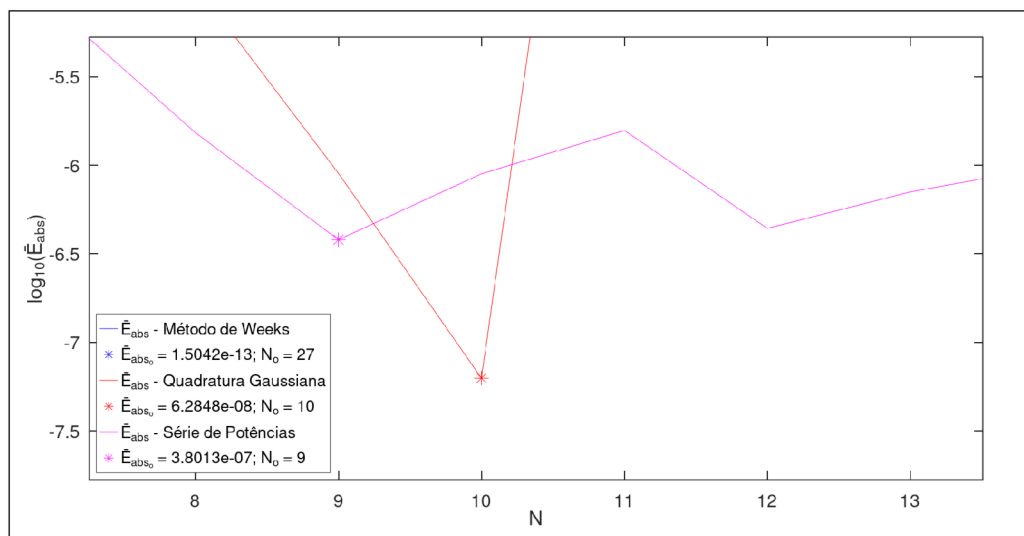
4.1.6 Inversão da função $F_6(s)$

A Figura 4.13 apresenta o gráfico do Erro Absoluto Médio para a inversão numérica da Transformada de Laplace para a função $F_6(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$. Já a Figura 4.15 mostra uma comparação entre os perfis analítico e numéricos para a inversão de $F_6(s)$.

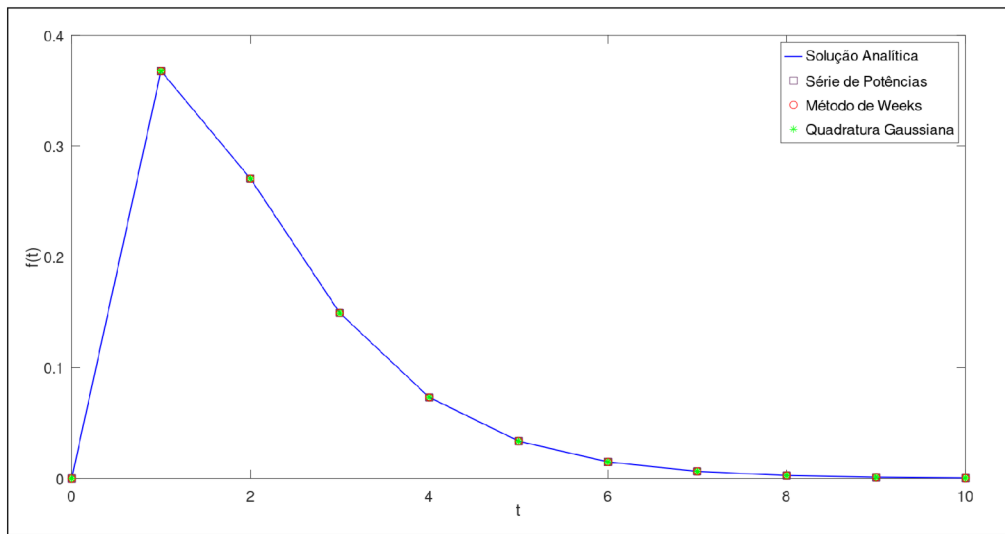
Figura 4.13: Erro Absoluto Médio para $F_6(s)$.

Fonte: O autor

A Figura 4.14 trata-se de um zoom da Figura 4.13 onde mostra com maior detalhes os Erros Absolutos médios para os métodos de Quadratura Gaussiana e Série de Potências.

Figura 4.14: Erro Absoluto Médio para $F_6(s)$ (ampliado).

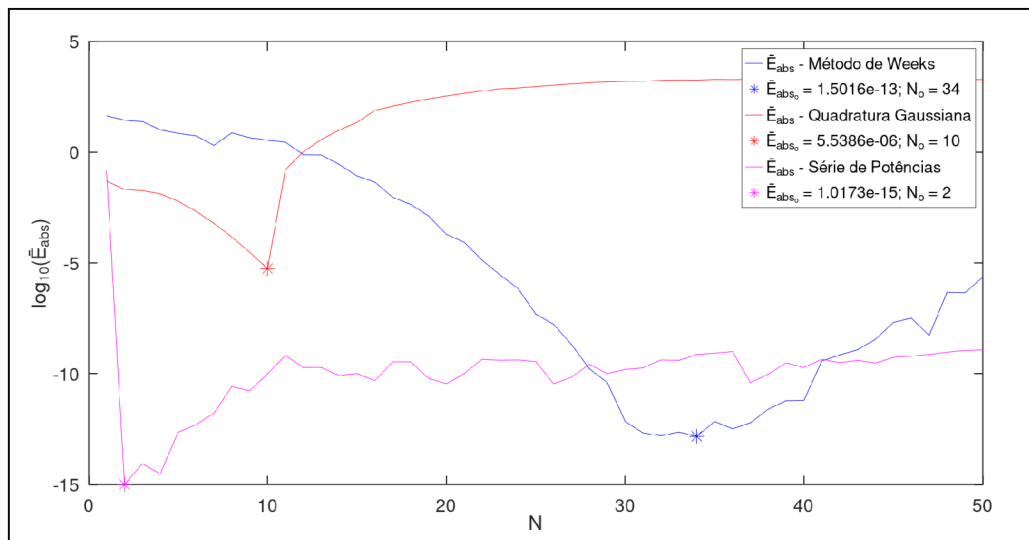
Fonte: O autor

Figura 4.15: Perfil da solução numérica x analítica para F_6 .

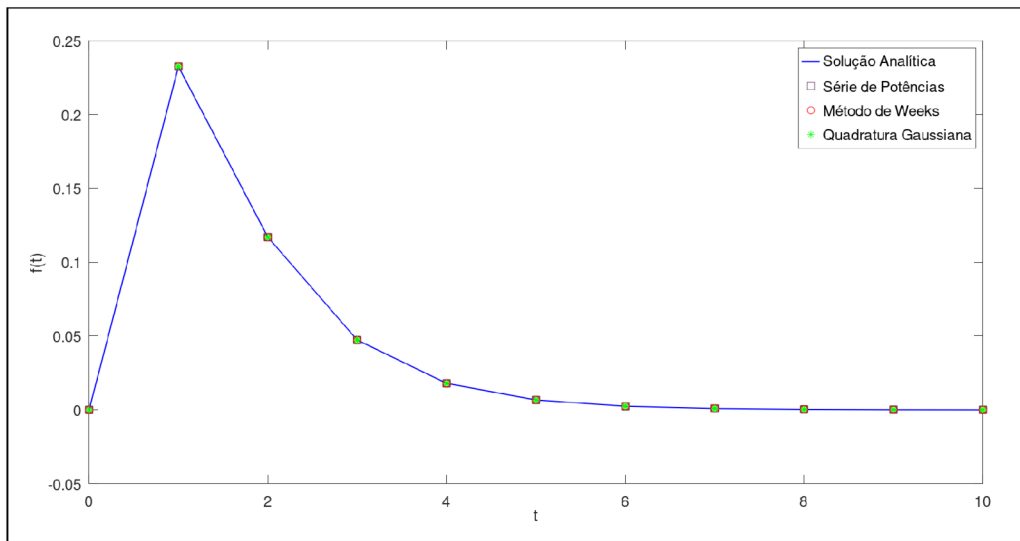
Fonte: O autor

4.1.7 Inversão da função $F_7(s)$

As Figuras 4.16 e 4.17 apresentam os testes para a inversão numérica da Transformada de Laplace para a função $F_7(s) = \frac{1}{(s+2)(s-1)}$. O gráfico do Erro Absoluto Médio, Figura 4.16, mostra os valores de N ótimo para cada método. Na Figura 4.17 há uma comparação entre os perfis analítico e numéricos para a inversão de $F_7(s)$.

Figura 4.16: Erro Absoluto Médio para $F_7(s)$.

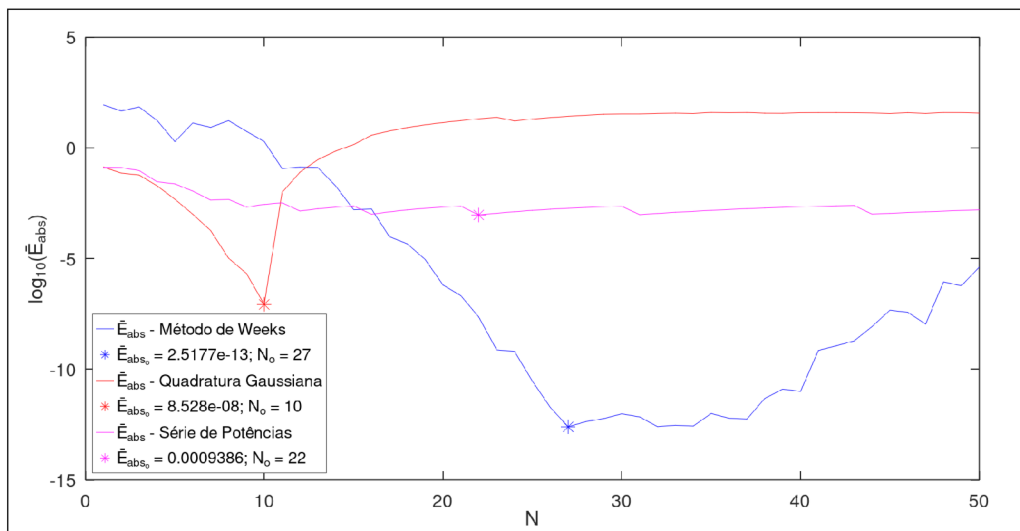
Fonte: O autor

Figura 4.17: Perfil da solução numérica x analítica para F_7 .

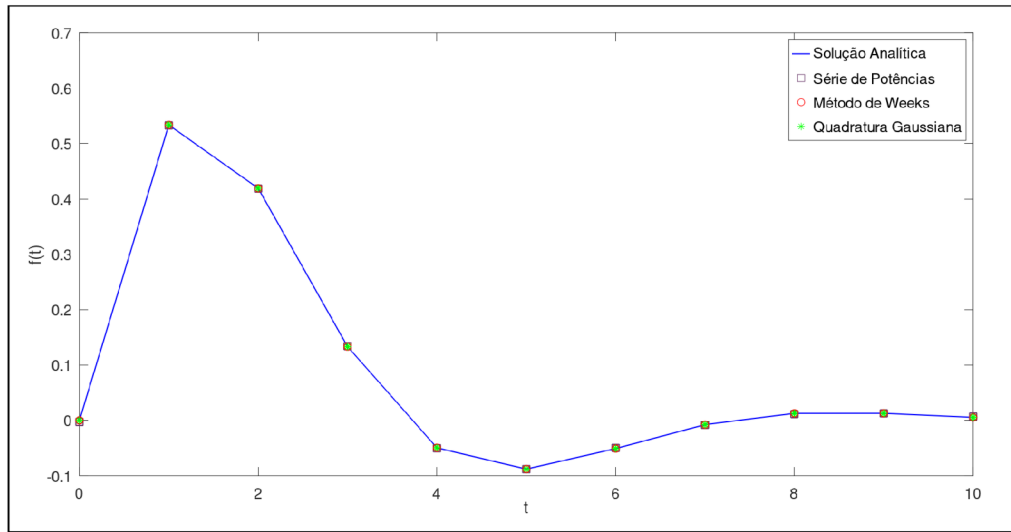
Fonte: O autor

4.1.8 Inversão da função $F_8(s)$

Nas Figuras 4.18 e 4.19 tem-se os testes para a inversão numérica da Transformada de Laplace para a função $F_8(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$. O gráfico do Erro Absoluto Médio, Figura 4.18, informa os valores de N_o para cada método. A Figura 4.19 traz uma comparação entre os perfis analítico e numéricos para a inversão de $F_8(s)$.

Figura 4.18: Erro Absoluto Médio para $F_8(s)$.

Fonte: O autor

Figura 4.19: Perfil da solução numérica x analítica para F_8 .

Fonte: O autor

4.1.9 Análise geral dos resultados

Na Tabela 4.2 são apresentadas as funções $f(t)$, os valores encontrados para o parâmetro N_o utilizados para a inversão numérica de cada transformada $F(s)$, bem como os respectivos Erros Absolutos Médios obtidos no processo. As siglas QG, SP e MW foram utilizadas como forma de abreviação para os métodos de inversão numérica Quadratura Gaussiana, Série de Potências e Método de Weeks, respectivamente.

Tabela 4.2: Funções $f(t)$, N ótimos e respectivos Erros Absolutos Médios.

$f(t)$	N_o (QG)	N_o (MW)	N_o (SP)	$\bar{E}_{abs}$ (QG)	$\bar{E}_{abs}$ (MW)	$\bar{E}_{abs}$ (SP)
$f_1(t) = 1$	1	22	1	$1,009 \times 10^{-17}$	$2,876 \times 10^{-13}$	$5,046 \times 10^{-17}$
$f_2(t) = t$	1	28	15	$8,074 \times 10^{-17}$	$4,632 \times 10^{-13}$	$1,563 \times 10^{-01}$
$f_3(t) = e^{-t}$	10	25	1	$7,483 \times 10^{-9}$	$2,160 \times 10^{-13}$	$1,791 \times 10^{-16}$
$f_4(t) = \text{sen}(t)$	10	34	49	$1,002 \times 10^{-5}$	$3,271 \times 10^{-12}$	$1,540 \times 10^{-01}$
$f_5(t) = t \cos(t)$	10	37	40	$2,411 \times 10^{-4}$	$1,609 \times 10^{-10}$	$1,268 \times 10^{00}$
$f_6(t) = te^{-t}$	10	27	9	$6,285 \times 10^{-8}$	$1,504 \times 10^{-13}$	$3,801 \times 10^{-07}$
$f_7(t) = e^{-2t}(e^t - 1)$	10	34	2	$5,539 \times 10^{-6}$	$1,502 \times 10^{-13}$	$1,017 \times 10^{-15}$
$f_8(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-0,5t}\text{sen}\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	10	27	28	$8,528 \times 10^{-8}$	$2,518 \times 10^{-13}$	$9,386 \times 10^{-04}$

Fonte: O autor

Os resultados indicaram que o Método de Weeks e Quadratura Gaussiana inverteram todas as funções elementares com Erros Absolutos Médios na ordem de 10^{-4} ou inferiores. Por outro lado, a técnica Série de Potências mostrou limitações na inversão de funções polinomiais e oscilatórias (f_2 , f_4 e f_5), para as quais foram obtidos erros na ordem de 10^{-1} ou superiores, mesmo após ajustes no parâmetro k . Em particular nesta simulação foram utilizados respectivamente os seguintes valores para o parâmetro k $\{20, 3, 1, 8, 5, 5, 1, 5\}$.

Particularmente, para Série de Potências, houve maior variação com relação à ordem do Erro Absoluto Médio, entre 10^{-17} até 10^0 . O Método de Weeks apresentou um Erro Absoluto Médio menor do que os demais para a maioria das funções analisadas. Já a Quadratura Gaussiana obteve seus melhores resultados com o número ótimo de termos (N_o) não ultrapassando 10. Com relação ao Método de Weeks a inversão da função f_5 foi a que demandou a maior quantidade de termos para obter-se uma boa aproximação, necessitando que a série utilizada no somatório do método fosse truncada em 37 termos. Já para o método de Série de Potências a função f_4 teve um $N_o = 49$.

Os resultados encontrados para os valores de N_o para o Método de Weeks estão de acordo com o proposto na literatura: segundo Galdino (1995), o valor de N_o para este conjunto de funções elementares deve estar entre $20 \leq N_o \leq 50$. Porém, destaca-se que no trabalho de Galdino (1995) não é apresentada uma fórmula para estimar o N_o , sendo este estimado por tentativa e erro.

Com relação à implementação, os métodos de inversão numérica Quadratura Gaussiana e Série de Potências levam à formação de sistemas lineares, frequentemente, mal condicionados, para os quais não é viável obter a solução de forma direta por meio do método padrão disponível no software OCTAVE (Eliminação Gaussiana com pivotamento). Diante dessa limitação, foi necessário adaptar o algoritmo, de modo que a resolução fosse realizada por meio da fatoração em valores singulares, técnica mais estável e adequada para lidar com esse tipo de problema numérico. Essa adaptação foi feita diretamente no software OCTAVE.

Um outro ponto a observar é que o N_o para todas as funções elementares foi obtido por varredura. O valor de N_o , determinado pela métrica escolhida, fornece perfis numéricos com bom ajuste em comparação aos obtidos analiticamente. Conclui-se assim que as técnicas, de uma forma geral, foram eficazes no processo de inversão das funções estudadas e as soluções foram obtidas rapidamente com um tempo inferior a 5 minutos em todas as funções estudadas.

4.2 Inserção do parâmetros A e B

Para avaliar a robustez dos métodos, entre as oito funções elementares descritas na subseção 4.1, foram selecionadas seis para a inserção de parâmetros, que alteram a amplitude (A) e a frequência (B). Foram consideradas satisfatórias as aproximações para as quais o Erro Absoluto Médio obtido ficou na ordem de 10^{-3} ou inferior. Para todos os algoritmos e funções avaliadas, foram realizadas varreduras usando o Erro Absoluto Médio como critério para determinar o valor de N_o . Para atingir tal objetivo, para cada método, computou-se repetidas vezes a inversão numérica da TL para os diferentes valores de N considerados ($N = 1, 2, \dots, 50$) e calculou-se o Erro Absoluto Médio. O valor de N que retornou o menor $\overline{E}_{abs}$ foi chamado de N ótimo (N_o). Estes foram calculados para o mesmo intervalo de t utilizado para as funções elementares sem a implementação dos parâmetros. A Tabela 4.3 mostra as funções f_3, f_4, f_5, f_6, f_7 e f_8 e suas transformadas após a inserção dos parâmetros A e B . A inserção dos parâmetros tem como base o manual de fórmulas e tabelas de Spiegel et al. (2012).

Tabela 4.3: Funções $f(t)$ e suas respectivas transformadas $F(s)$ após a inserção de parâmetros.

Funções $f(t)$	Transformadas $F(s)$
$f_3(t) = e^{-At}$	$F_3(s) = \frac{1}{s + A}$
$f_4(t) = \text{sen}(Bt)$	$F_4(s) = \frac{B}{s^2 + B^2}$
$f_5(t) = t \cos(Bt)$	$F_5(s) = \frac{s^2 - B^2}{(s^2 + B^2)^2}$
$f_6(t) = te^{At}$	$F_6(s) = \frac{1}{(s - A)^2}$
$f_7(t) = \frac{e^{A_1 t} - e^{A_2 t}}{A_1 - A_2}$	$F_7(s) = \frac{1}{(s - A_1)(s - A_2)}$
$f_8(t) = \frac{e^{At} \text{sen}(Bt)}{B}$	$F_8(s) = \frac{1}{(s - A)^2 + B^2}$

Fonte: O autor, adaptado de Spiegel et al. 2012

A função $f_7(t)$ é a diferença entre duas exponenciais, então foram atribuídos os parâmetros A_1 e A_2 para destacar a influência na amplitude de cada uma das exponenciais presentes na função.

4.2.1 Inserção do parâmetro A e inversão da função $F_3(s)$

Os métodos da Quadratura Gaussiana e Série de Potências foram eficazes para inverter a função $F_3(s)$, desde que o parâmetro A seja positivo. No entanto para o método de Série de Potências é necessário que o parâmetro k , intrínseco ao método e descrito na equação (3.13), tenha valores menores que 1 para que a aproximação seja satisfatória. Já para o Método de Weeks, constatou-se que este somente mostra-se eficaz na inversão da função quando encontra-se no intervalo $-1 \leq A \leq 12$.

4.2.2 Inserção do parâmetro B e inversão da função $F_4(s)$

Para a função f_4 , o Método de Weeks apresentou maior robustez frente à variação do parâmetro B , permitindo inversões satisfatórias no intervalo $-2,9 \leq B \leq 2,9$. Para a Quadratura Gaussiana, este intervalo é reduzido, restringindo-se à $-1,5 \leq B \leq 1,5$. Já o método da Série de Potências revelou grande sensibilidade à variação de B , obtendo uma aproximação satisfatória somente para uma pequena variação no intervalo, ou seja, $-0,009 \leq B \leq 0,009$, onde $f(t) \approx 0$. Essa limitação ocorre independentemente do ajuste do parâmetro k , intrínseco ao método, não havendo impacto significativo na extensão do intervalo, bem como na ordem do Erro Absoluto Médio.

4.2.3 Inserção do parâmetro B e inversão da função $F_5(s)$

Para a inversão de $F_5(s)$, observou-se que a presença do fator t (multiplicando a função cosseno) reduz as faixas de variação dos intervalos do parâmetro B . O Método de Weeks manteve desempenho adequado para $-2,5 \leq B \leq 2,5$. Para a Quadratura Gaussiana, o intervalo foi $-1,2 \leq B \leq 1,2$. A técnica da Série de Potências, por sua vez, não forneceu bons resultados, mesmo com o ajuste do parâmetro k , indicando sensibilidade a oscilações e limitação do método na inversão de funções com comportamento polinomial associado à componente oscilatória.

4.2.4 Inserção do parâmetro A e inversão da função $F_6(s)$

Os métodos Série de Potências e Quadratura Gaussiana apresentaram bom desempenho para aproximar $F_6(s)$ quando a função exponencial resultante é, após a inserção do parâmetro A , decrescente, ou seja, $A < 0$. Para o algoritmo do Método de Weeks, por outro lado, tem-se boas aproximações no intervalo de $-14 \leq A \leq 1$. Essa diferença evidencia a sensibilidade dos métodos à taxa de crescimento da função original, sendo o de Weeks o único capaz de lidar com exponenciais que crescem moderadamente ($0 < A < 1$).

4.2.5 Inserção dos parâmetros A_1 e A_2 e inversão da função $F_7(s)$

Para avaliar a influência dos parâmetros A_1 e A_2 , presentes na inversão de $F_7(s)$, foram estudados três casos: no primeiro caso, ambos são negativos; para o segundo caso, A_1 ou A_2 tem sinais opostos; e para o último caso, têm-se que A_1 e A_2 são positivos.

Foi constatado que, quando A_1 e A_2 são menores que zero, os métodos de Quadratura Gaussiana e Série de Potências conseguem inverter a função, independentemente dos valores de A_1 e A_2 . Já para o Método de Weeks, a inversão de $F_7(s)$ somente é possível quando A_1 e A_2 pertencem ao intervalo $] -15, 0[$.

Para o caso onde um dos parâmetros é negativo, os métodos invertem de forma satisfatória a função desde que o parâmetro negativo seja suficientemente menor. Para exemplificar, considera-se o caso onde $A_1 = 1$: para que a inversão seja satisfatória para os métodos de Weeks e Quadratura Gaussiana é necessário que A_2 seja negativo e na ordem de 10^3 . Já para o método de Série de Potências a diferença é ainda maior, necessitando que A_2 seja negativo e seja da ordem de 10^6 . Para os métodos foram verificados os casos onde $A_1 = 1$, $A_1 = 2$ e $A_1 = 3$ em todos os casos foi possível inverter $F_7(s)$ de forma satisfatória, porém o valor de A_2 cresce exponencialmente à medida que A_1 aumenta.

No ultimo caso estudado, onde A_1 e A_2 são positivos, o Método de Weeks aproxima de forma satisfatória a função desde que A_1 e A_2 sejam menores que 1. Já para a Quadratura Gaussiana, A_1 e A_2 devem ser menores que 0,8. O método de Série de Potências mostrou-se ineficaz, obtendo resultados inferiores aos considerados satisfatórios.

4.2.6 Inserção dos parâmetros A e B e inversão da função $F_8(s)$

Para a inversão de F_8 , foram analisadas quatro combinações dos parâmetros: $A > 0$ e $B < 0$; $A < 0$ e $B > 0$; $A < 0$ e $B < 0$; e $A > 0$ e $B > 0$. Os resultados indicaram que todas as técnicas funcionam adequadamente quando $A < 0$ e $B > 0$, mas apresentam restrições nos demais cenários. Os métodos da Quadratura Gaussiana e Série de Potências falharam quando $A > 0$ e $B < 0$. Para o Método de Weeks foi possível obter boas aproximações para $A = 1$ e $A = 2$, porém é necessário que o parâmetro B seja ajustado: para $A = 1$, foi necessário B ser da ordem de 10^3 e para $A = 2$, o novo valor foi $B = 10^{10}$.

Para os casos onde os parâmetros são negativos, os métodos de Weeks e Quadratura Gaussiana aproximaram F_8 para qualquer valor real de A e B . Já para a Série de Potências, foi necessário que ambos os parâmetros sejam menores ou iguais a -1 . Por fim, quando ambos os parâmetros são positivos, nenhum método avaliado foi capaz de inverter a função F_8 de forma satisfatória. As Tabelas 4.4 e 4.5 sintetizam os intervalos de A , A_1 , A_2 e B para os quais se obtêm aproximações satisfatórias por cada um dos métodos de inversão numérica testados.

Tabela 4.4: Resultado da inserção dos parâmetros A e B .

$F(s)$	A (MW)	A (QG)	A (SP)	B (MW)	B (QG)	B (SP)
$F_3(s)$	$-1 < A < 12$	$0 < A$	$0,6 < A$	-	-	-
$F_4(s)$	-	-	-	$ B < 2,9$	$ B < 1,5$	$ B < 0,009$
$F_5(s)$	-	-	-	$ B < 2,5$	$ B < 1,2$	-
$F_6(s)$	$-14 < A < 1$	$A < 0$	$A < 0$	-	-	-
$F_8(s)$	$-\infty < A < 2$	$A < 0$	$A \leq -1$	$B \in \mathbb{R}$	$B \in \mathbb{R}$	$ B > 1$

Fonte: O autor

Tabela 4.5: Resultado da influência dos parâmetros A_1 e A_2 na inversão de $F_7(s)$.

Configuração	Método de Weeks (MW)	Quadratura Gaussiana (QG)	Série de Potências (SP)
$A_1 < 0$ e $A_2 < 0$	$A_1, A_2 \in (-15, 0)$	$A_1, A_2 < 0$	$A_1, A_2 < 0$
Sinais Opostos*	$A \approx -10^3$ para $A = 1$	$A \approx -10^3$ para $A = 1$	$A \approx -10^6$ para $A = 1$
$A_1 > 0$ e $A_2 > 0$	$A_1, A_2 < 1$	$A_1, A_2 < 0,8$	Ineficaz

*Observação: O parâmetro negativo deve crescer exponencialmente, em módulo, à medida que o positivo aumenta.

Fonte: O autor

4.3 Testes para a obtenção da solução de uma EDPP por meio da TL

Nesta seção são apresentados os resultados numéricos obtidos na inversão da Transformada de Laplace utilizando os métodos da Quadratura Gaussiana, Série de Potências e Método de Weeks, aplicados a solução de uma EDPP. Assim como nas inversões realizadas anteriormente, adotou-se como critério de avaliação a métrica do Erro Absoluto Médio, como forma de determinar o número ótimo de termos na série (N_o).

Os resultados são exibidos para diferentes valores do parâmetro t ($t = 0,005$, $t = 0,05$ e $t = 0,5$). A comparação entre as soluções é feita por meio de: i) tabelas com os valores numéricos obtidos em diferentes pontos da superfície; ii) gráficos, que exibem o Erro Absoluto Médio, os perfis analítico e numéricos; e iii) representação das superfícies geradas para os distintos valores de t .

4.3.1 Formulação matemática para a obtenção da solução de uma EDPP

Com a finalidade de verificar a eficiência dos métodos de inversão numérica da TL, Quadra-tura Gaussiana, Série de Potências e Método de Weeks, foi selecionado, como teste preliminar, um caso particular da equação do calor, descrita no trabalho de Heydarian et al. (1981), definida matematicamente da seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.2)$$

onde $0 < x < 1$ e $t > 0$, com as seguintes condições,

$$u(x, 0) = 1, \quad u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0 \quad t > 0.$$

A EDPP apresentada corresponde à equação do calor unidimensional, também conhecida como equação da difusão (Ozisik, 1993). Essa equação descreve a evolução temporal de uma grandeza difusiva $u(x, t)$, que pode representar, por exemplo, temperatura, concentração de partículas ou intensidade de determinada grandeza física, ao longo de uma barra ou domínio unidimensional. O termo $\frac{\partial u}{\partial t}$ expressa a taxa de variação temporal da grandeza, enquanto o termo $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ está associado à curvatura espacial da distribuição, de modo que a equação traduz matematicamente a tendência natural de equilíbrio: regiões onde a grandeza é maior tendem a transferir parte do excesso para as regiões vizinhas, e regiões com valores menores recebem fluxo proveniente das vizinhanças. A condição inicial $u(x, 0) = 1$ estabelece que, no instante inicial, todo o domínio se encontra em um estado uniforme de valor unitário.

As condições de contorno $u(0, t) = 0$ e $u(1, t) = 0$ indicam que as extremidades do domínio são mantidas em zero para todos os instantes posteriores, o que equivale a considerar fronteiras absorventes ou mantidas a temperatura nula. Esse modelo é aplicado em diversas áreas da ciência e da engenharia, como na condução de calor em barras metálicas, na difusão de partículas em meios confinados e em processos de transporte simplificados, nos quais interessa analisar a forma como a distribuição inicial decai ao longo do tempo até atingir o estado estacionário trivial imposto pelas condições de contorno.

Aplicando a Transformada de Laplace nos dois membros da equação (4.2) tem-se:

$$\frac{d^2 \bar{U}(x, s)}{dx^2} = s\bar{U}(x, s) - u(x, 0). \quad (4.3)$$

Substituindo a condição inicial, $u(x, 0) = 1$, na equação (4.3), obtém-se:

$$\frac{d^2 \bar{U}(x, s)}{dx^2} - s \bar{U}(x, s) = -1. \quad (4.4)$$

A expressão descrita pela Equação (4.4) trata-se de uma equação diferencial ordinária não homogênea. Para este tipo de equação, a solução geral, $\bar{U}(x, s)$, pode ser obtida através da soma das soluções homogênea, $\bar{U}_h(x, s)$, e particular, $\bar{U}_p(x, s)$ (Boyce e DiPrima, 2001).

A solução homogênea pode ser escrita como:

$$\bar{U}_h(x, s) = A \cosh(\sqrt{s}x) + B \sinh(\sqrt{s}x). \quad (4.5)$$

Já para a obtenção da solução particular, emprega-se o método dos Coeficientes a Determinar (Boyce e DiPrima, 2001). A solução geral é dada por,

$$\bar{U}(x, s) = A \cosh(\sqrt{s}x) + B \sinh(\sqrt{s}x) + \frac{1}{s}. \quad (4.6)$$

A partir da equação (4.6), são aplicadas as versões transformadas das condições de contorno com o intuito de determinar o valor das constantes A e B . Uma vez aplicadas essas condições, chega-se a:

$$\bar{U}(x, s) = \frac{1}{s} \left[1 + \frac{\sinh(\sqrt{s}(x-1))}{\sinh(\sqrt{s})} - \frac{\sinh(\sqrt{s}x)}{\sinh(\sqrt{s})} \right]. \quad (4.7)$$

A equação (4.7) pode ser rapidamente invertida analiticamente por meio de tabelas de inversão da Transformada de Laplace (Spiegel et al., 2012), obtendo-se:

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{M=0}^{+\infty} \frac{e^{-(2n+1)^2 \pi^2 t}}{2n+1} \sin[(2n+1)\pi x]. \quad (4.8)$$

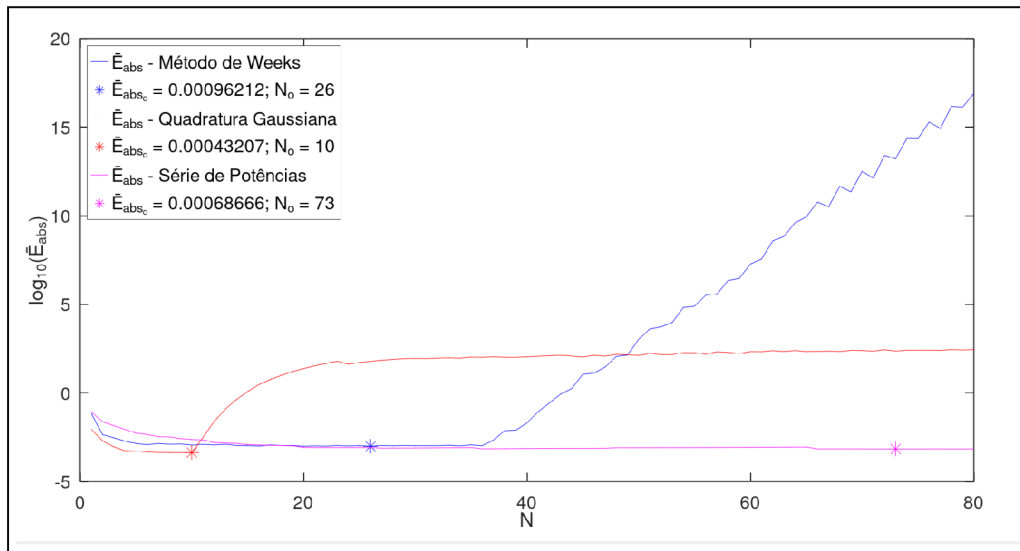
Para efeitos de simulação e geração das tabelas e gráficos, a série analítica (Equação (4.8)) foi truncada em $M = 30$ termos para garantir a melhor precisão possível em todos os valores de t testados. Essa escolha assegura que o Erro Médio Absoluto permaneça abaixo da ordem de 10^{-4} para todos os instantes de tempo considerados neste estudo. Portanto, $M = 30$ foi adotado como um valor conservador para garantir a precisão em todo o intervalo de t analisado neste trabalho.

4.3.2 Inversão numérica da EDPP

Para avaliar a sensibilidade da aproximação da solução da EDPP pelos métodos numéricos propostos, em termos da variável t , a métrica do Erro Absoluto Médio foi aplicada da seguinte forma: para cada instante de t desejado (0,005, 0,05 e 0,5) e para cada um dos métodos de inversão numérica da TL, perfis u_n foram calculados para diferentes valores de N ($1, \dots, 80$) em uma espécie de varredura e, a partir da equação (4.1), estimou-se o $\bar{E}_{abs}$. Nessa sequência de simulações, o valor de N que resultou no menor $\bar{E}_{abs}$, foi chamado de N ótimo (ou N_o) e este foi o escolhido para gerar os perfis aqui apresentados.

Para o primeiro caso, onde $t = 0,005$, ao utilizar o método da Quadratura Gaussiana, obteve-se um Erro Absoluto Médio de $4,3207 \times 10^{-4}$. Já para os métodos de Série de Potências (com $k = 0,05$) e Método de Weeks, os erros foram, respectivamente, de $6,8666 \times 10^{-4}$ e $9,6212 \times 10^{-4}$ (Figura 4.20). Independente do esforço computacional (associado a um maior ou menor N_o) os resultados obtidos apresentam um erro da ordem de 10^{-4} .

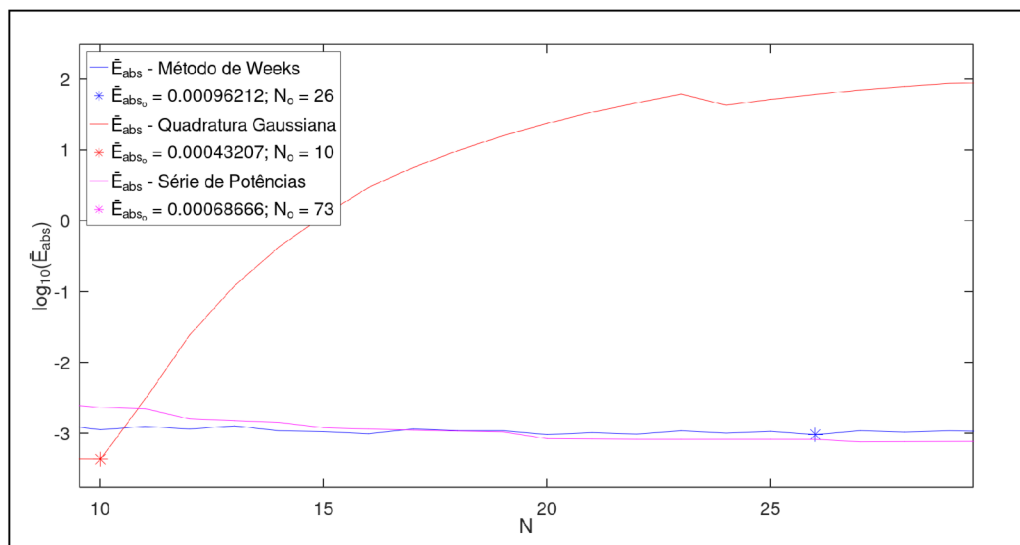
Figura 4.20: Erro Absoluto Médio e N_o para $t = 0,005$.



Fonte: O autor

A Figura 4.21 apresenta uma ampliação da Figura 4.20, detalhando o comportamento dos Erros Absolutos Médios obtidos pelos métodos de Quadratura Gaussiana, Série de Potências e Método de Weeks.

Figura 4.21: Erro Absoluto Médio e N_o para $t = 0,005$ (ampliado).

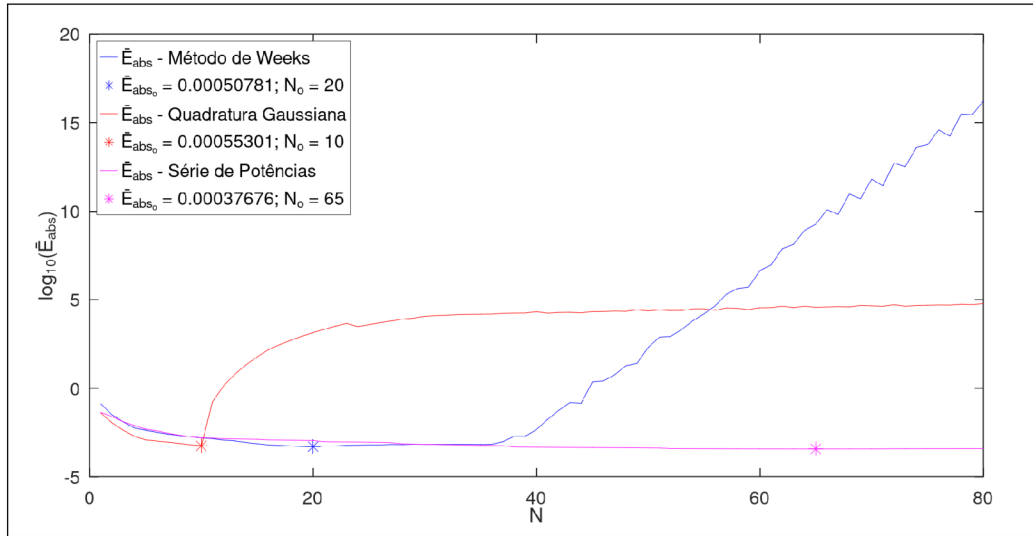


Fonte: O autor

A Figura 4.22 traz os Erros Absolutos Médios para os métodos de inversão numérica propostos, aplicados a EDPP com $t = 0,05$. O método da Série de Potências (com $k = 0,1$)

apresenta um Erro Absoluto Médio de $3,7676 \times 10^{-4}$ e o Método de Weeks $5,0781 \times 10^{-4}$. Já o método da Quadratura Gaussiana mostra um Erro Absoluto Médio de $5,5301 \times 10^{-4}$.

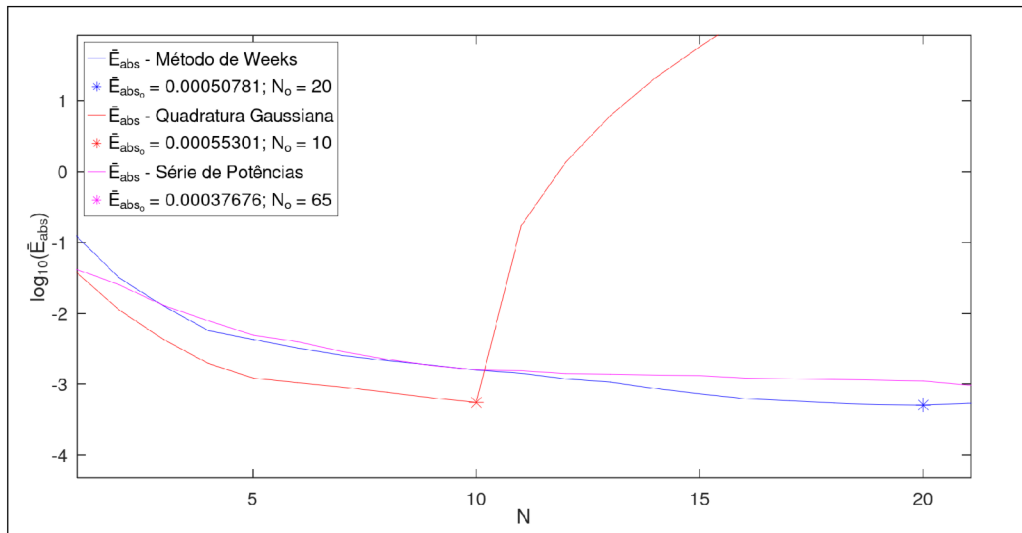
Figura 4.22: Erro Absoluto Médio e N_0 para $t = 0,05$.



Fonte: O autor

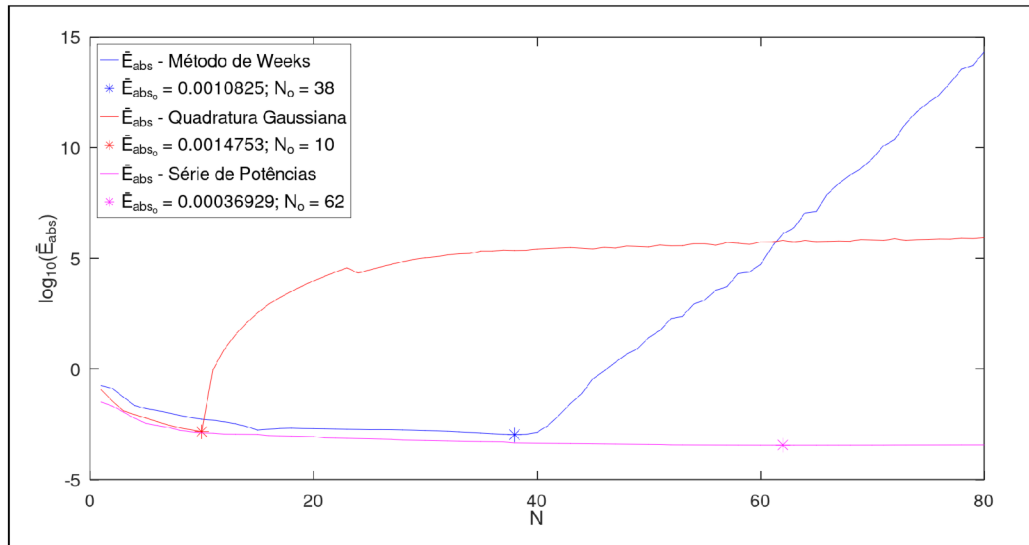
Para uma melhor visualização, a Figura 4.23 destaca a região de interesse da Figura 4.22, permitindo a visualização detalhada dos Erros Absolutos Médios para os algoritmos de Quadratura Gaussiana e Método de Weeks.

Figura 4.23: Erro Absoluto Médio e N_0 para $t = 0,05$ (ampliado).



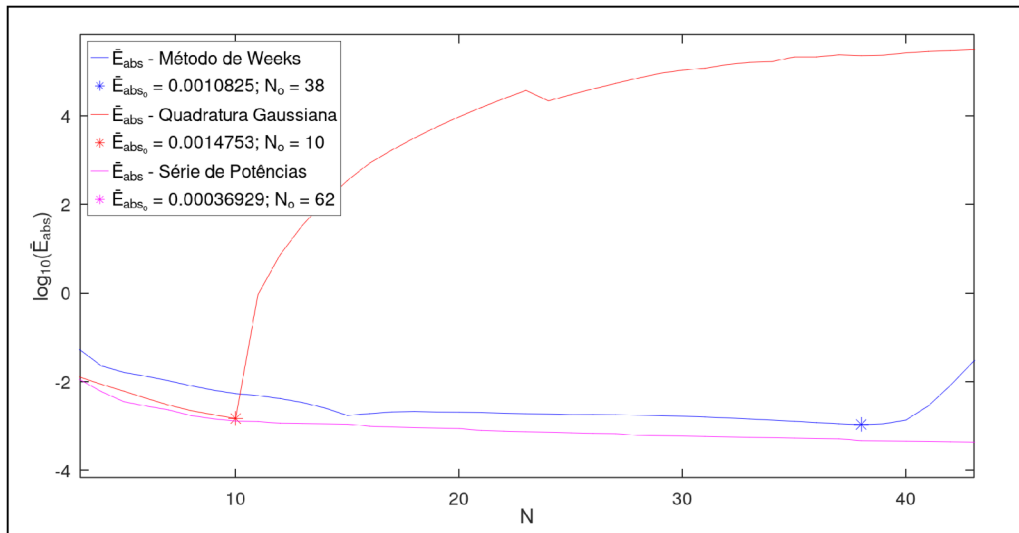
Fonte: O autor

Na Figura 4.24 é apresentado o último caso estudado, $t = 0,5$. Para essa situação, o Erro Absoluto Médio no Método da Série de Potências (com $k = 0,1$) é de ordem menor do que para os demais casos estando este na casa de 10^{-4} sendo este igual a $3,6929 \times 10^{-4}$. Já para os métodos de Weeks e Quadratura Gaussiana, os Erros Absolutos Médios encontram-se na ordem de 10^{-3} , sendo seus valores, respectivamente, $1,0825 \times 10^{-3}$ e $1,4753 \times 10^{-3}$.

Figura 4.24: Erro Absoluto Médio e N_0 para $t = 0, 5$.

Fonte: O autor

A Figura 4.25 exibe o detalhe ampliado da Figura 4.24, evidenciando a precisão comparativa entre a Quadratura Gaussiana, Série de Potências e Método de Weeks em termos de Erro Absoluto Médio.

Figura 4.25: Erro Absoluto Médio e N_0 para $t = 0, 5$ (ampliado).

Fonte: O autor

Pode-se destacar que, em ambos os casos, independentemente dos valores de t , os métodos de Quadratura Gaussiana e o Método de Weeks têm valores de N_0 menores do que o método de Série de Potências, entretanto, divergem mais rapidamente.

Na Tabela 4.6, os valores obtidos para o Erro Absoluto Médio e os respectivos N ótimos são apresentados para cada um dos valores de t estabelecidos. As siglas referem-se aos nomes dos métodos: Quadratura Gaussiana (QG), Séries de Potências (SP) e Método de Weeks (MW),

os resultados obtidos mostram-se satisfatórios e estão de acordo com resultados descritos na literatura (Heydarian et al., 1981).

Tabela 4.6: Avaliação do Erro Absoluto Médio em Função do Número de Termos N_o e do Tempo t

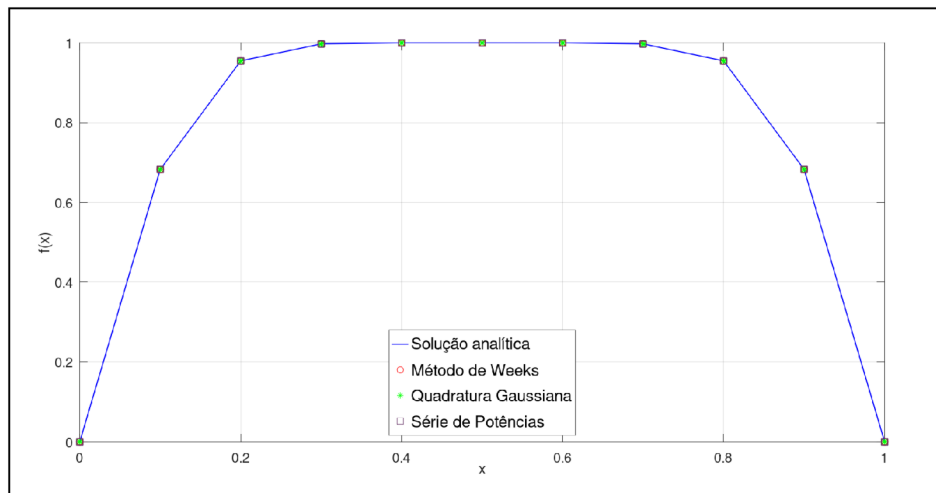
t	$N_o(MW)$	$N_o(QG)$	$N_o(SP)$	$\overline{E}_{abs}(MW)$	$\overline{E}_{abs}(QG)$	$\overline{E}_{abs}(SP)$
0,005	26	10	73	$9,6212 \times 10^{-4}$	$4,3207 \times 10^{-4}$	$6,8666 \times 10^{-4}$
0,05	20	10	65	$5,0781 \times 10^{-4}$	$5,5301 \times 10^{-4}$	$3,7676 \times 10^{-4}$
0,5	38	10	62	$1,0825 \times 10^{-3}$	$1,4753 \times 10^{-3}$	$3,6929 \times 10^{-4}$

Fonte: O autor

Ao utilizar os valores de N_o obtidos por meio da varredura (Figuras 4.20, 4.22 e 4.24) foi possível traçar o perfil numérico que melhor se ajusta ao analítico para a solução da EDPP. Tais perfis foram obtidos fixando-se os valores para a variável t (0,005, 0,05 e 0,5) e variando o intervalo de x , $0 \leq x \leq 1$.

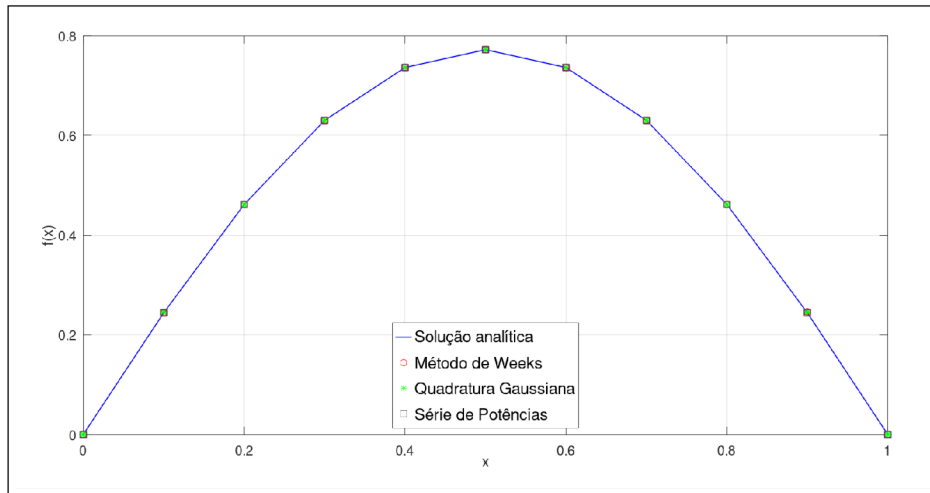
As Figuras 4.26, 4.27 e 4.28 trazem uma comparação entre a curva analítica e os métodos de inversão numérica: Quadratura Gaussiana, Série de Potências e Método de Weeks com $t = 0,005$, $t = 0,05$ e $t = 0,5$, respectivamente. Em especial, chama-se a atenção para a Figura 4.28, que ilustra a dificuldade dos métodos Quadratura Gaussiana (principalmente) e Weeks em se ajustar à solução analítica para $t = 0,5$, indicando a sensibilidade desses métodos a variações do valor de t . Além disso, na Figura 4.28, adotou-se $N = 9$ (e não $N = N_o$) para a geração do gráfico por meio do método da Quadratura Gaussiana. Essa alteração foi necessária porque o perfil resultante utilizando $N = N_o$ apresentou alguns valores negativos, o que é fisicamente incompatível com o comportamento da *EDP* (Equação Diferencial Parcial) parabólica aplicada ao transporte de massa. Portanto, selecionou-se $N = 9$ como o menor número inteiro positivo que preserva a coerência do método, evita oscilações numéricas espúrias e garante a consistência física dos resultados obtidos.

Figura 4.26: Perfis de soluções numéricas e analítica com $t = 0,005$.



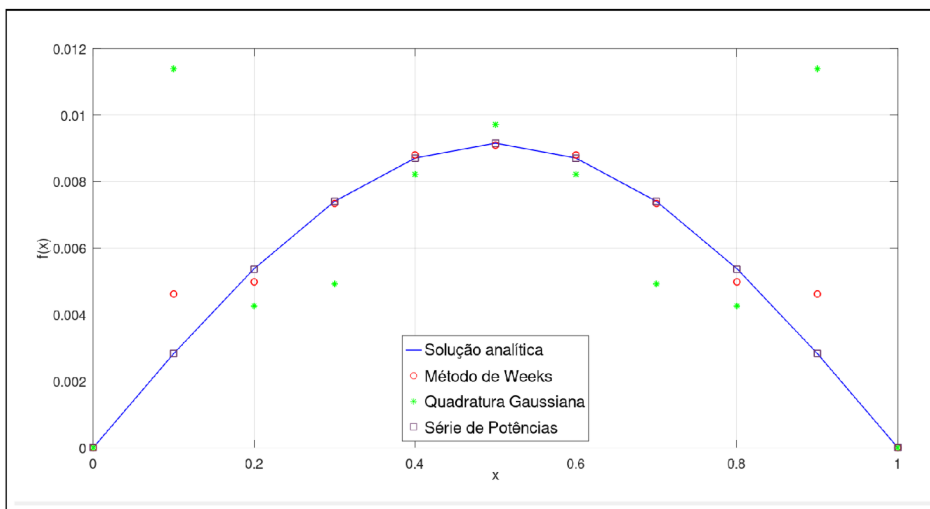
Fonte: O autor

Figura 4.27: Perfis de soluções numéricas e analítica com $t = 0,05$.



Fonte: O autor

Figura 4.28: Perfis de soluções numéricas e analítica com $t = 0,5$.



Fonte: O autor

Além dos gráficos do Erro Absoluto Médio e dos perfis analíticos e numéricos, fornece-se neste trabalho também as Tabelas 4.7, 4.8 e 4.9, que apresentam comparações entre as soluções analítica e numéricas para diferentes valores de x e t , a fim de permitir uma avaliação mais pontual dos resultados. Os valores numéricos aqui fornecidos foram gerados utilizando o N_o encontrado para cada método em cada instante de t , exceto para a Tabela 4.9 onde para o método de Quadratura Gaussiana foi adotado $N = 9$.

Tabela 4.7: Soluções numéricas e analítica para $t = 0,005$.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Solução analítica	0,682689492	0,954499736	0,997300204	0,999936655	0,999998853
Método de Weeks	0,682572242	0,954237738	0,996879738	0,999390656	0,999405261
Quadratura Gaussiana	0,682743752	0,954500040	0,997300220	0,999936656	0,999998853
Série de Potências	0,682507171	0,954231633	0,996938827	0,999512586	0,999552859

Fonte: O autor

Tabela 4.8: Soluções numéricas e analítica para $t = 0,05$.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Solução analítica	0,244248060	0,461646521	0,630401071	0,736327185	0,772311606
Método de Weeks	0,242644662	0,461664786	0,630422937	0,736353628	0,772339244
Quadratura Gaussiana	0,246046946	0,461337447	0,630479212	0,736311965	0,772312546
Série de Potências	0,244231355	0,461667902	0,630395067	0,736327048	0,772309660

Fonte: O autor

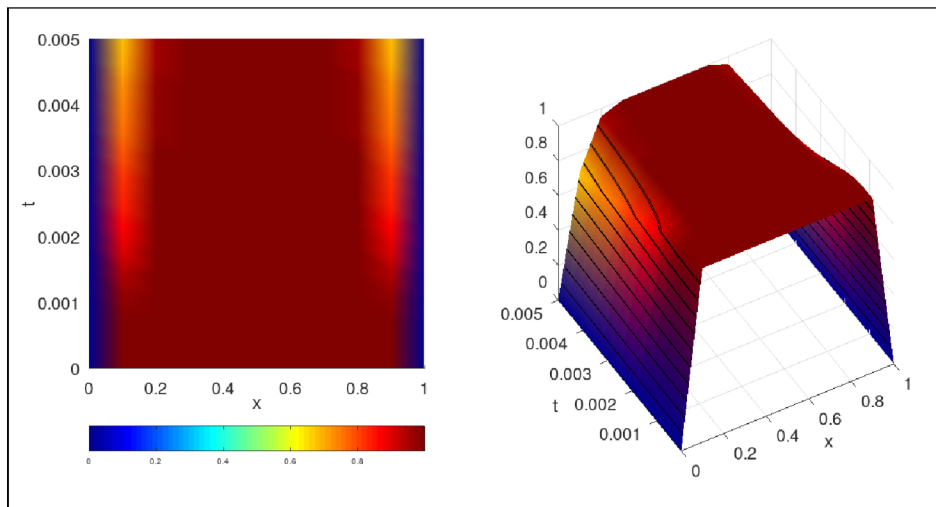
Tabela 4.9: Soluções numéricas e analítica para $t = 0,5$.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Solução analítica	0,002829665	0,005382343	0,007408160	0,008708815	0,009156990
Método de Weeks	0,004620638	0,004985196	0,007342433	0,008802172	0,009097815
Quadratura Gaussiana	0,011392618	0,004260839	0,004922602	0,008220172	0,009717331
Série de Potências	0,002831595	0,005363401	0,007409449	0,008704981	0,009154214

Fonte: O autor

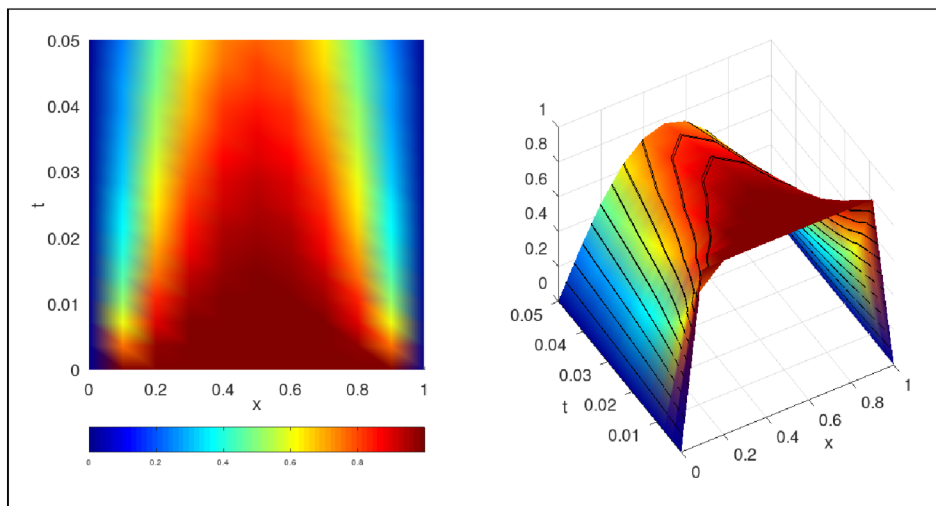
Para fins ilustrativos do comportamento do fenômeno modelado, superfícies foram geradas para representar a solução da EDPP. Na Tabela 4.9, adotou-se $N = 9$ para o método da Quadratura Gaussiana, de acordo com a mesma justificativa apresentada para a Figura 4.28. As Figuras 4.29, 4.30 e 4.31 apresentam as soluções obtidas pelo método da Quadratura Gaussiana para os intervalos $10^{-5} \leq t \leq 0,005$, $10^{-5} \leq t \leq 0,05$ e $10^{-5} \leq t \leq 0,5$, respectivamente. Os gráficos das soluções foram gerados a partir da Quadratura Gaussiana, uma vez que este é o método que fornece resultados comparáveis aos obtidos analiticamente com o menor N_o , entre as três técnicas aqui estudadas. No entanto, independente do método escolhido, as superfícies das soluções são visualmente iguais. As superfícies foram geradas dentro destes três intervalos de t como uma tentativa de contornar os problemas de escala encontradas pelo decaimento rápido da solução da EDPP.

Figura 4.29: Quadratura Gaussiana com $10^{-5} \leq t \leq 0,005$.



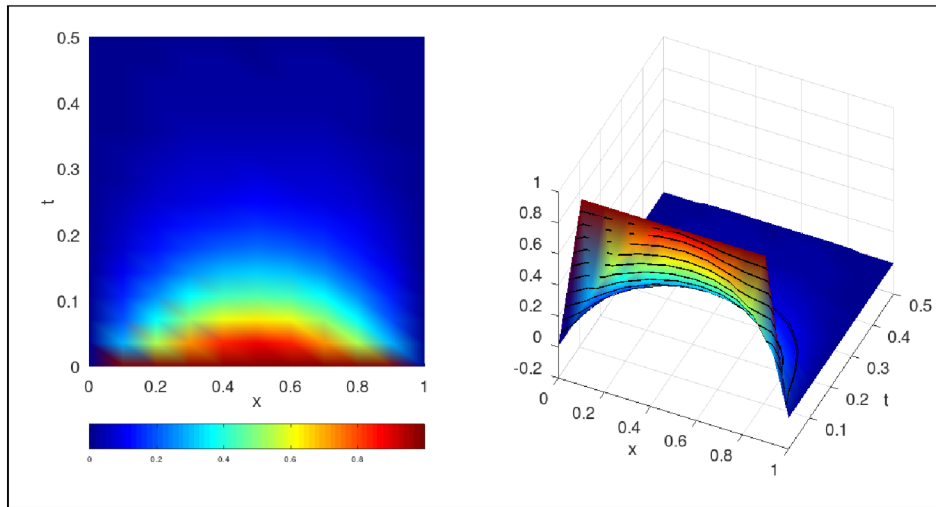
Fonte: O autor

Figura 4.30: Quadratura Gaussiana com $10^{-5} \leq t \leq 0,05$.



Fonte: O autor

Figura 4.31: Quadratura Gaussiana com $10^{-5} \leq t \leq 0,5$.



Fonte: O autor

4.3.3 Análise geral dos resultados

Nessa etapa preliminar, observou-se que os métodos estudados são capazes de fazer uma boa aproximação para a inversão da solução da Equação Diferencial Parabólica aqui abordada, tendo em vista a ordem dos erros calculados no processo e consequente ajuste obtido entre os perfis analítico e numéricos. Além disso, ambos geraram resultados comparáveis aos fornecidos no trabalho de Heydarian (1981) os quais foram considerados satisfatórios pelo autor, validando os algoritmos implementados.

De acordo com as tabelas aqui apresentadas, percebe-se que os melhores resultados são obtidos pelo método da Quadratura Gaussiana (segundo a métrica escolhida). E, em termos do esforço computacional, por utilizar um N_o menor, a Quadratura Gaussiana também mostra uma certa vantagem.

Em termos de valores brutos, ambos os métodos numéricos fornecem perfis comparáveis com os gerados analiticamente, e com a mesma ordem de grandeza do Erro Absoluto Médio. Porém, à medida que o valor de t aumenta, os métodos começam a passar por instabilidade numérica, sobrando apenas a SP como mais indicado. Vale lembrar, que os resultados aqui tabelados são os melhores que os métodos propostos geram, segundo a métrica de comparação estabelecida.

5 PROBLEMA DE SECAGEM DE MADEIRA

A indústria madeireira desempenha um papel fundamental na economia global. Estima-se que mais da metade do Produto Interno Bruto (PIB) mundial dependa significativamente de serviços ecossistêmicos. O setor florestal contribui com mais de 1,52 trilhão para o PIB mundial e emprega 33 milhões de pessoas (FAO, 2022). No Brasil, o setor contribui significativamente para o PIB representando cerca de 1,3% (IBA, 2023). A qualidade da madeira está diretamente relacionada às etapas de colheita, desdobro e processamento; contudo, há dificuldades inerentes à obtenção de madeira serrada, sendo uma das mais relevantes aquelas decorrentes do processo de secagem.

A madeira, como muitos materiais naturais, é higroscópica; ela absorve umidade do ambiente circundante. A troca de umidade entre a madeira e o ar depende da umidade relativa e da temperatura do ar e da quantidade atual de água na madeira. Essa relação de umidade tem uma influência importante nas propriedades e no desempenho da madeira. Muitos dos desafios do uso da madeira como material de engenharia surgem de mudanças no teor de umidade ou da abundância de umidade dentro da madeira. A secagem da madeira é uma etapa crítica no processamento desse material, influenciando diretamente sua qualidade, durabilidade e aplicabilidade (Glass e Zelinka 2021).

O processo de secagem da madeira pode ser descrito pela equação de difusão (Luikov, 1968; Crank, 1975; da Silva et al., 2010) dada por,

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \nabla(D\nabla M), \quad (5.1)$$

onde M é teor de umidade em base seca, t é o tempo e D é a difusividade efetiva da água. Com base no trabalho de da Silva et al. (2010), supõe-se que:

- O mecanismo de transporte de água no interior do sólido é somente a difusão líquida;
- A distribuição de umidade inicial deve ser uniforme;
- As dimensões do sólido não variam durante a difusão da água;
- O coeficiente de transferência convectiva de massa é constante durante a difusão de água;
- A difusividade efetiva da água não varia durante a difusão;
- O sólido é considerado homogêneo e isotrópico.

Com base nas hipóteses anteriores, como D é constante, a equação (5.1) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = D(\nabla\nabla M). \quad (5.2)$$

Logo, tem-se que

$$\frac{\partial M}{\partial t} = D(\nabla^2 M). \quad (5.3)$$

Utilizando a hipótese de que o problema é descrito unidimensionalmente, chega-se à:

$$\frac{\partial M(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2}. \quad (5.4)$$

Considerando uma tábua de espessura L , o domínio espacial é definido como $x \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$. A condição inicial assume uma distribuição uniforme de umidade em todo o domínio, isto é,

$$M(x, 0) = M_o. \quad (5.5)$$

Considerando que as condições de contorno são do primeiro tipo, com o teor de umidade constante em ambas as superfícies do sólido, têm-se:

$$M\left(-\frac{L}{2}, t\right) = M_s, \quad (5.6)$$

$$M\left(\frac{L}{2}, t\right) = M_s. \quad (5.7)$$

Aplicando a Transformada de Laplace na equação (5.4), tem-se

$$\frac{d^2 \overline{M}(x, s)}{dx^2} = \frac{1}{D} [s \overline{M}(x, s) - M(x, 0)]. \quad (5.8)$$

Ao utilizar a condição de distribuição uniforme tem-se:

$$\frac{d^2 \overline{M}(x, s)}{dx^2} - \frac{s}{D} \overline{M}(x, s) = -\frac{M_o}{D}, \quad (5.9)$$

onde $M(x, 0) = M_o$. Note também que a EDO gerada não é homogênea, com isso pode-se dividir a solução geral em duas partes: solução homogênea $\overline{M}_h(x, s)$ e solução particular $\overline{M}_p(x, s)$ (Boyce e DiPrima, 2001), conforme descrito na subseção 4.3.1.

A solução geral $\overline{M}(x, s)$ do problema é, então, escrita como

$$\overline{M}(x, s) = A \cosh(\lambda x) + B \sinh(\lambda x) + \frac{M_o}{s}, \quad (5.10)$$

$$\overline{M}\left(-\frac{L}{2}, s\right) = \frac{M_s}{s}, \quad (5.11)$$

$$\overline{M}\left(\frac{L}{2}, s\right) = \frac{M_s}{s}, \quad (5.12)$$

onde o parâmetro λ é definido a partir da equação característica associada à parte homogênea da EDO obtida após a aplicação da Transformada de Laplace. Neste trabalho $\lambda = \sqrt{\frac{s}{D}}$, sendo s o parâmetro da Transformada de Laplace e D o coeficiente de difusão da umidade.

Após a obtenção da solução geral, são aplicadas as condições de contorno transformadas

para a obtenção das constantes A e B . Os valores de A e B são dados por,

$$A = \frac{M_s - M_o}{s \cosh\left(\lambda \frac{L}{2}\right)} \quad \text{e} \quad B = 0.$$

Onde $\lambda = \sqrt{\frac{s}{D}}$, substituindo-se A e B na Equação (5.10), obtém-se a solução no domínio de Laplace:

$$\bar{M}(x, s) = \frac{M_o}{s} + (M_s - M_o) \frac{\cosh\left(\sqrt{\frac{s}{D}}x\right)}{s \cosh\left(\sqrt{\frac{s}{D}}\frac{L}{2}\right)}. \quad (5.13)$$

A solução descrita pela equação (5.13) foi invertida analiticamente por meio de tabelas de inversão da Transformada de Laplace (Spiegel et al., 2012). Após a inversão analítica, chega-se à:

$$M(x, t) = M_s + (M_o - M_s) \frac{4}{\pi} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^N}{2N-1} \exp\left\{-(2N-1)^2 \pi^2 \frac{tD}{L^2}\right\} \cos\left(\frac{(2N-1)\pi x}{L}\right), \quad (5.14)$$

onde $M(x, t)$ representa o teor de umidade no instante t numa posição x do centro da tábua, M_s e M_o são, respectivamente, o teor de umidade de equilíbrio e o teor de umidade inicial (Luikov, 1968).

A solução analítica do problema de difusão foi obtida por meio da aplicação da Transformada de Laplace no tempo, conforme apresentado em Crank (1975) e Ozisik (1993). A transformada converte a equação diferencial parcial em uma equação diferencial ordinária no espaço, a qual pode ser resolvida de forma analítica sob as condições de contorno impostas. Em seguida, a inversão da Transformada de Laplace conduz a uma solução expressa na forma de uma série infinita.

O termo $(M_o - M_s)$ representa o potencial de secagem, isto é, a diferença total de umidade entre o estado inicial do material e o estado de equilíbrio com o ambiente. Esse termo atua como fator de escala da solução, enquanto o somatório infinito resultante da inversão da Transformada de Laplace descreve a evolução temporal do processo de difusão.

Os termos exponenciais presentes na solução resultam diretamente dos polos da função transformada no domínio de Laplace, garantindo o decaimento da umidade ao longo do tempo. A taxa de decaimento é governada pelo grupo adimensional $\frac{t}{DL^2}$, no qual D é o coeficiente de difusão e L representa a dimensão característica do material, evidenciando a influência conjunta das propriedades físicas e da geometria do sistema.

A dependência espacial da solução é descrita por funções cossenoidais, as quais refletem o perfil de umidade ao longo da espessura do material. Esse comportamento indica maiores teores de umidade na região central e menores valores nas superfícies, em concordância com o gradiente observado fisicamente durante o processo de secagem.

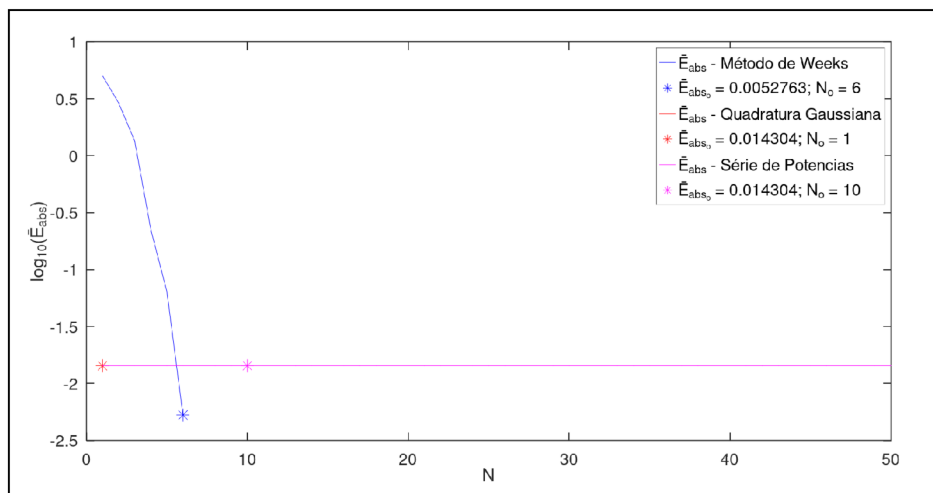
5.1 Inversão numérica e resultados obtidos

Para garantir que as soluções numéricas da EDPP de secagem fossem representativas, utilizou-se o Erro Absoluto Médio ($\bar{E}_{abs}$) como critério de seleção do parâmetro N . O procedimento consistiu em testar cada algoritmo de inversão da TL em uma faixa de N variando de 1 a 80, assim como na EDPP a solução analítica foi truncada em 30 termos e para os tempos $t \in \{5, 50, 500, 5000\}$ minutos. Com isso extraiu-se o valor de N que proporcionou a melhor aproximação (denotado por N_0), o qual serviu de base para a construção dos perfis de distribuição temporal e espacial analisados nesta seção. Conforme a literatura da Silva et al. (2010), foram adotados para fins de simulações os seguintes parâmetros: Coeficiente de difusividade da água ($D = 1$), teor de umidade inicial ($M_o = 1,213$) e o teor de equilíbrio ($M_s = 0,070$) da madeira a uma temperatura de 40°C e de espessura ($L = 745$ mm). Para o método de inversão numérica de Série de Potências foi utilizado $k = 15$ para todos os intervalos de t estudados.

Os resultados são exibidos para os valores de t utilizados na varredura. A comparação entre as soluções é feita por meio de tabelas com os resultados obtidos em diferentes pontos da superfície; gráficos, que exibem o Erro Absoluto Médio, os perfis analítico e numéricos; e representação das superfícies geradas para os distintos valores de t .

Para o primeiro caso, onde $t = 5$ minutos, o Método de Weeks apresenta um Erro Absoluto Médio na ordem de 10^{-3} , enquanto que os demais métodos tem seus erros na ordem de 10^{-2} . Porém só foi possível realizar a varredura completa para o método de Série de Potências. Para o método da Quadratura Gaussiana, devido à instabilidades numéricas para os demais valores de N , a varredura não ultrapassou $N = 1$. O mesmo ocorre no Método de Weeks onde a varredura é estável apenas para os 6 primeiros termos (Figura 5.1).

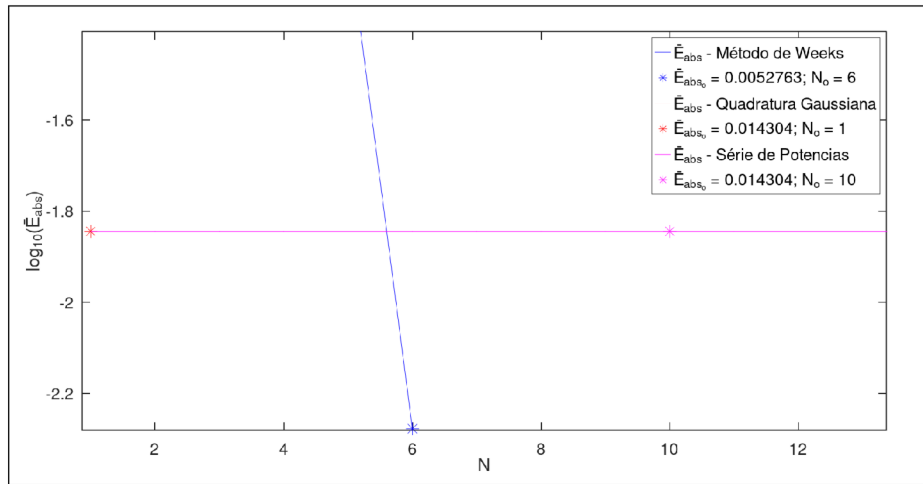
Figura 5.1: Erro Absoluto Médio e N_0 para $t = 5$.



Fonte: O autor

A Figura 5.2 fornece uma visão em escala ampliada da Figura 5.1, permitindo observar a convergência dos métodos de Quadratura Gaussiana, Série de Potências e Weeks com maior resolução.

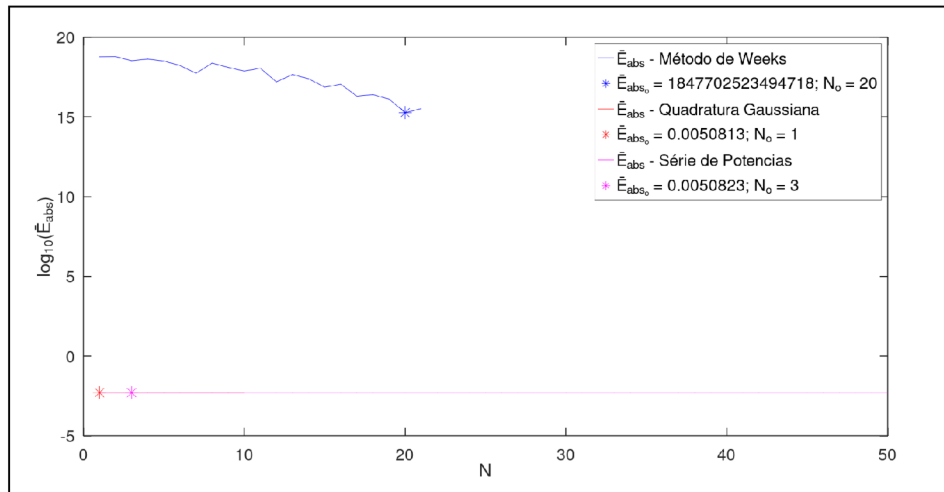
Figura 5.2: Erro Absoluto Médio e N_0 para $t = 5$ (ampliado).



Fonte: O autor

A Figura 5.3 traz os Erros Absolutos Médios para os métodos de inversão numérica propostos, aplicados a solução da EDPP que modela o problema de secagem da madeira com $t = 50$. O método da Série de Potências e o método da Quadratura Gaussiana apresentam valores semelhantes de Erro Absoluto Médio, ambos na ordem de 10^{-3} . Já no Método de Weeks, ao aumentar o valor de t , o Erro Absoluto Médio ($\bar{E}_{abs}$) sofreu um aumento severo, atingindo ordens de magnitude de 10^{18} ou seja: divergiu.

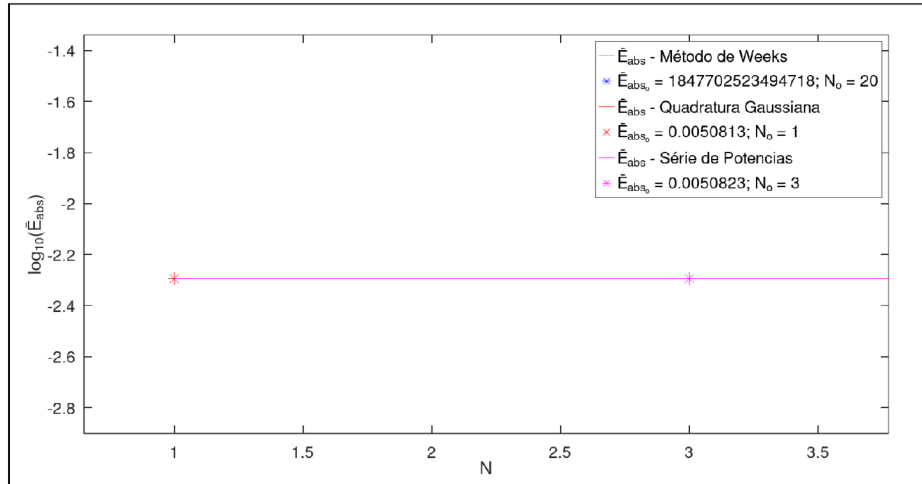
Figura 5.3: Erro Absoluto Médio e N_0 para $t = 50$.



Fonte: O autor

A Figura 5.4 corresponde a um zoom da Figura 5.3, fornecendo uma comparação mais precisa entre os métodos de Quadratura Gaussiana e Série de Potências.

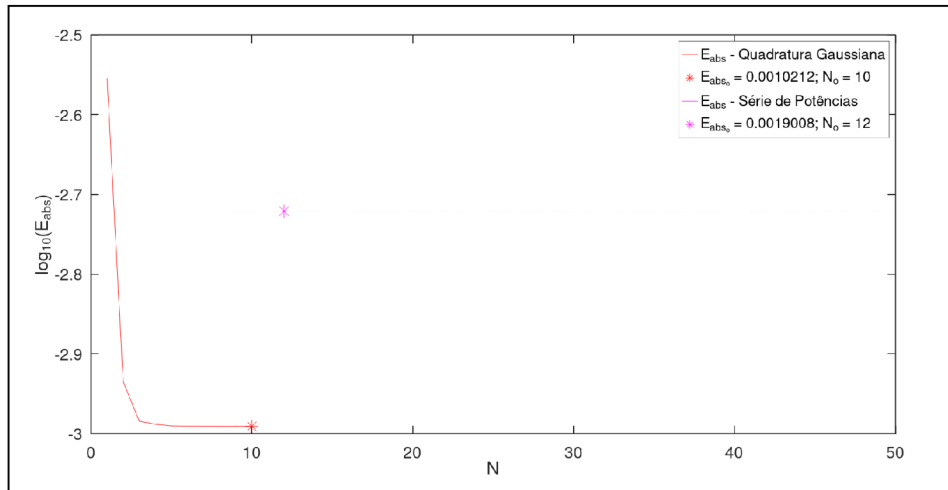
Figura 5.4: Erro Absoluto Médio e N_0 para $t = 50$ (ampliado).



Fonte: O autor

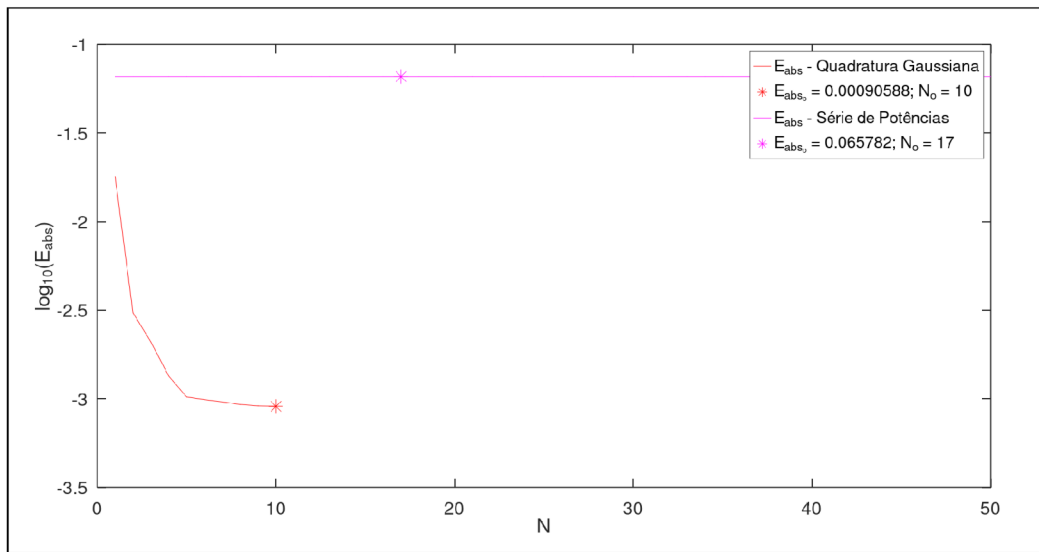
Na Figura 5.5 é apresentado o caso onde $t = 500$. Novamente, o Erro Absoluto Médio, no Método da Série de Potências e Quadratura Gaussiana, apresenta a mesma ordem 10^{-3} . A Quadratura Gaussiana apresenta instabilidade para $N > 10$, quando submetido a varredura. Já o Método de Weeks apresenta um *Overflow* numérico para todos os valores de N e com isso não pode ser representado graficamente.

Figura 5.5: Erro Absoluto Médio e N_0 para $t = 500$.



Fonte: O autor

Por último, tem-se o caso em que $t = 5000$, descrito na Figura 5.6. Neste caso, os Erros Absolutos Médios, para os métodos da Quadratura Gaussiana e Série de Potências, apresentam ordens diferentes: enquanto que a Quadratura mostra um erro na ordem de 10^{-4} , o método de Série de Potências tem seu erro na ordem de 10^{-2} . A Quadratura Gaussiana apresenta instabilidade para $N > 10$, quando submetido a varredura do Erro Absoluto Médio. Já o método de Weeks apresenta um *Overflow* numérico para todos os valores de N , não havendo possibilidade de representá-lo graficamente.

Figura 5.6: Erro Absoluto Médio e N_0 para $t = 5000$.

Fonte: O autor

Assim como destacado no estudo da EDPP, o método de inversão numérica da Série de Potências, diverge mais lentamente se comparado aos demais. Porém, mesmo apresentando instabilidade ao longo do processo de varredura, a Quadratura Gaussiana apresenta, de maneira geral, resultados melhores. A Tabela 5.1 apresenta uma compilação dos dados obtidos.

Tabela 5.1: Erro Absoluto Médio X N_0 em função do Tempo t

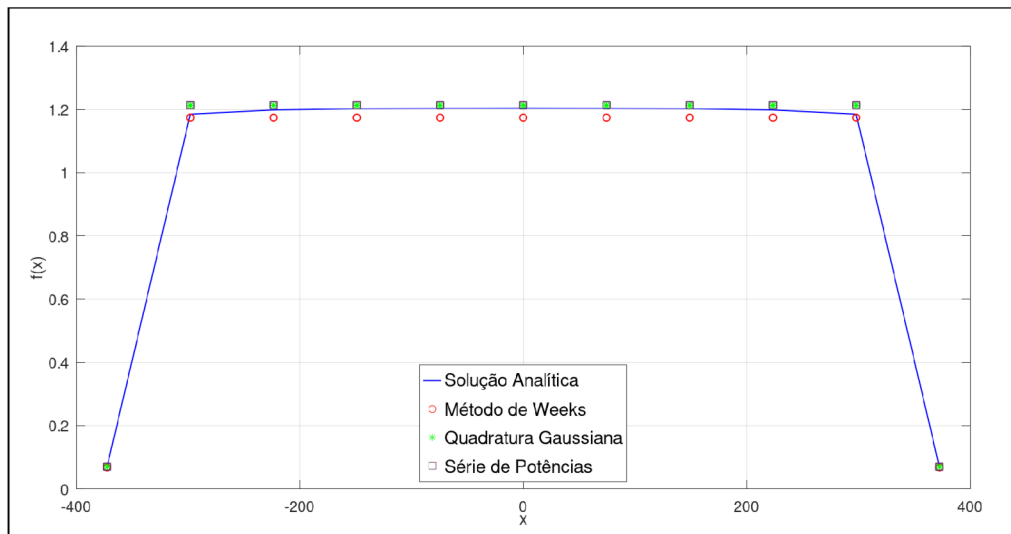
t	$N_0(MW)$	$N_0(GQ)$	$N_0(SP)$	$\overline{E}_{abs}(MW)$	$\overline{E}_{abs}(GQ)$	$\overline{E}_{abs}(SP)$
5	6	1	10	$5,2763 \times 10^{-3}$	$1,4304 \times 10^{-2}$	$1,4304 \times 10^{-2}$
50	20	1	3	$1,8477 \times 10^{18}$	$5,0813 \times 10^{-3}$	$5,0823 \times 10^{-3}$
500	—	10	12	<i>inf</i>	$1,0212 \times 10^{-3}$	$1,9008 \times 10^{-3}$
5000	—	10	17	<i>inf</i>	$9,0588 \times 10^{-4}$	$6,5782 \times 10^{-2}$

Fonte: O autor

Ao utilizar os valores de N_0 , obtidos por meio da varredura (Figuras 5.1, 5.3, 5.5 e 5.6) foi possível traçar o perfil numérico que melhor se ajusta ao analítico para a solução do problema de secagem da madeira. Tais perfis foram obtidos fixando-se os valores para a variável t (5, 50, 500 e 5000) e variando o intervalo de x , $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$.

A Figura 5.7 apresenta uma comparação entre a solução analítica e os métodos de inversão numérica da Quadratura Gaussiana, Série de Potências e Método de Weeks. Para garantir a melhor aproximação possível entre os perfis analítico e numéricos, os gráficos foram gerados utilizando os valores de N_0 encontrados por meio da varredura.

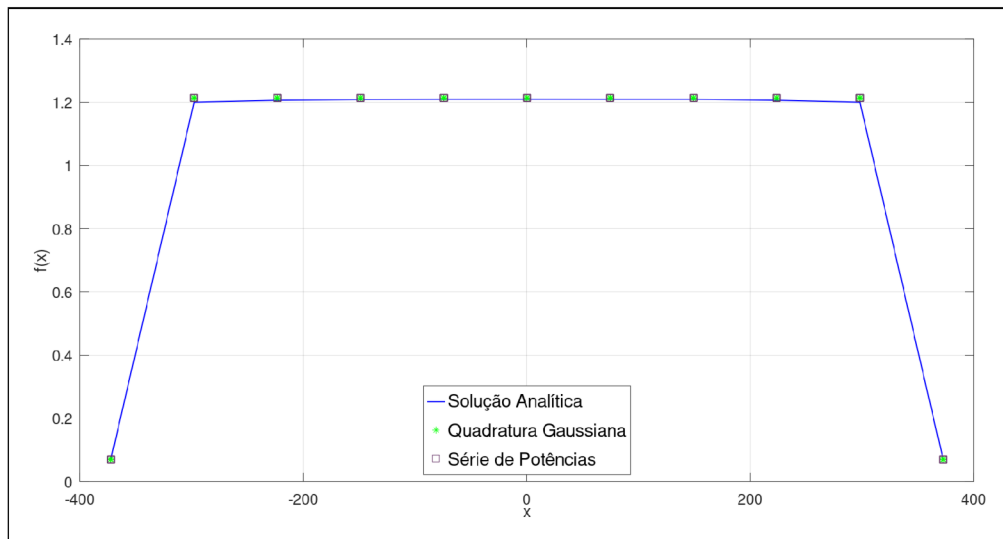
Figura 5.7: Perfis de soluções numéricas e analítica com $t = 5$.



Fonte: O autor

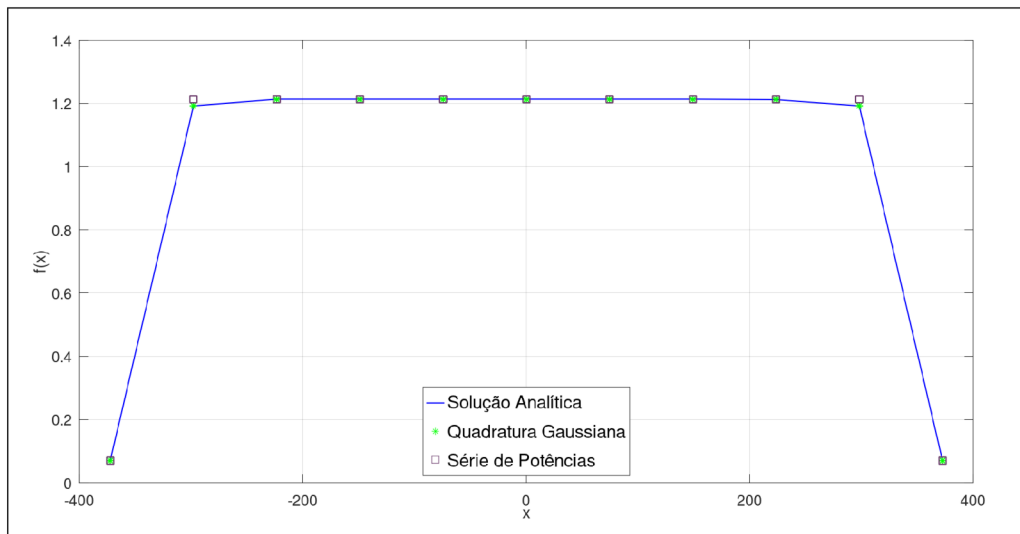
As Figuras 5.8, 5.9 e 5.10 trazem uma comparação entre a curva analítica e os métodos de inversão numérica da Quadratura Gaussiana e Série de Potências com $t = 50$, $t = 500$ e $t = 5000$, respectivamente. Em especial, chama-se a atenção para a sensibilidade do Método de Weeks às variações do parâmetro t , visto que este somente apresenta bons resultados quando $t = 5$, não podendo ser utilizado para os demais valores ($t = 50, t = 500, t = 5000$) por conta da elevada magnitude dos Erros Absolutos Médios gerados.

Figura 5.8: Perfis de soluções numéricas e analítica com $t = 50$.



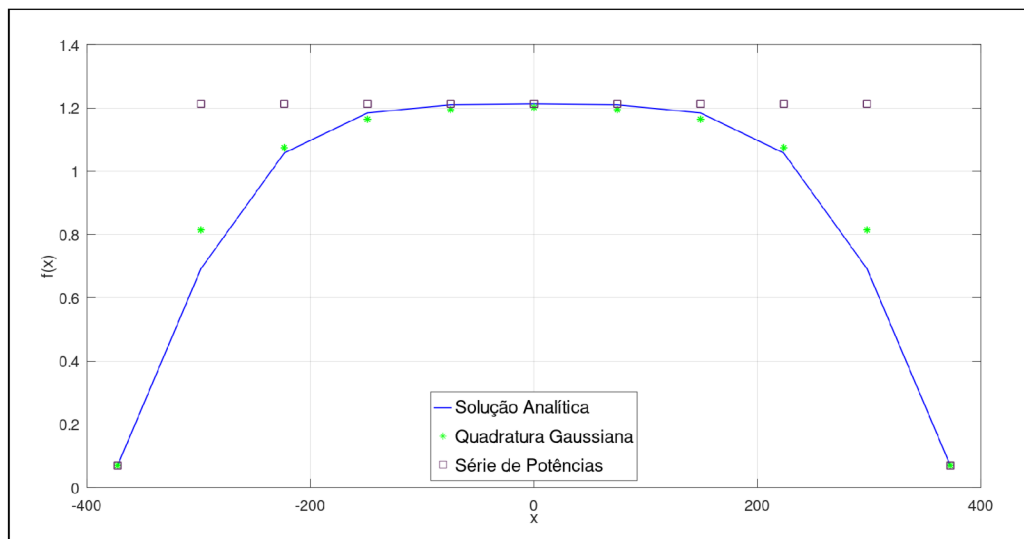
Fonte: O autor

Figura 5.9: Perfis de soluções numéricas e analítica com $t = 500$.



Fonte: O autor

Figura 5.10: Perfis de soluções numéricas e analítica com $t = 5000$.



Fonte: O autor

Além dos gráficos do Erro Absoluto Médio e dos perfis analíticos e numéricos, fornece-se neste trabalho também as Tabelas 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5, que apresentam comparações entre as soluções analítica e numéricas para diferentes valores de x e t , a fim de permitir uma avaliação mais pontual dos resultados. Os valores numéricos aqui fornecidos foram gerados utilizando o N_o encontrado para cada método em cada instante de t .

Tabela 5.2: Soluções numéricas e analítica para $t = 5$.

x	74, 5	149	223, 5	298	372, 5
Solução analítica	1,203745841	1,202124957	1,198048953	1,184738095	0,070000000
Método de Weeks	1,173736287	1,173736287	1,173736287	1,173736287	0,067734163
Quadratura Gaussiana	1,213000000	1,213000000	1,213000000	1,213000000	0,070000000
Série de Potências	1,212999999	1,212999999	1,212999999	1,212999995	0,069999999

Fonte: O autor

Tabela 5.3: Soluções numéricas e analítica para $t = 50$.

x	74, 5	149	223, 5	298	372, 5
Solução analítica	1,212484927	1,212397983	1,212186711	1,211603280	0,070000000
Quadratura Gaussiana	1,213000000	1,212999999	1,212999999	1,212969635	0,070000000
Série de Potências	1,213000000	1,213000000	1,213000000	1,212999939	0,070000000

Fonte: O autor

Tabela 5.4: Soluções numéricas e analítica para $t = 500$.

x	74, 5	149	223, 5	298	372, 5
Solução analítica	1,213000000	1,212999999	1,212997193	1,191879591	0,070000000
Quadratura Gaussiana	1,213000000	1,212999999	1,212998135	1,192047305	0,070000000
Série de Potências	1,212999999	1,212999999	1,212999999	1,212999592	0,069999999

Fonte: O autor

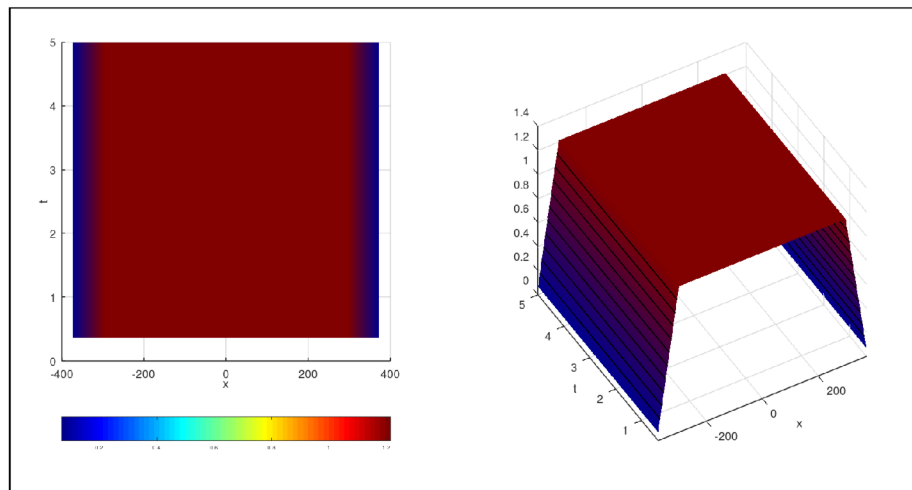
Tabela 5.5: Soluções numéricas e analítica para $t = 5000$.

x	74, 5	149	223, 5	298	372, 5
Solução analítica	1,209696380	1,183947760	1,057295695	0,691481424	0,070000000
Quadratura Gaussiana	1,194050688	1,163829618	1,073787372	0,814377651	0,070000000
Série de Potências	1,213000000	1,213000000	1,213000000	1,212999469	0,070000000

Fonte: O autor

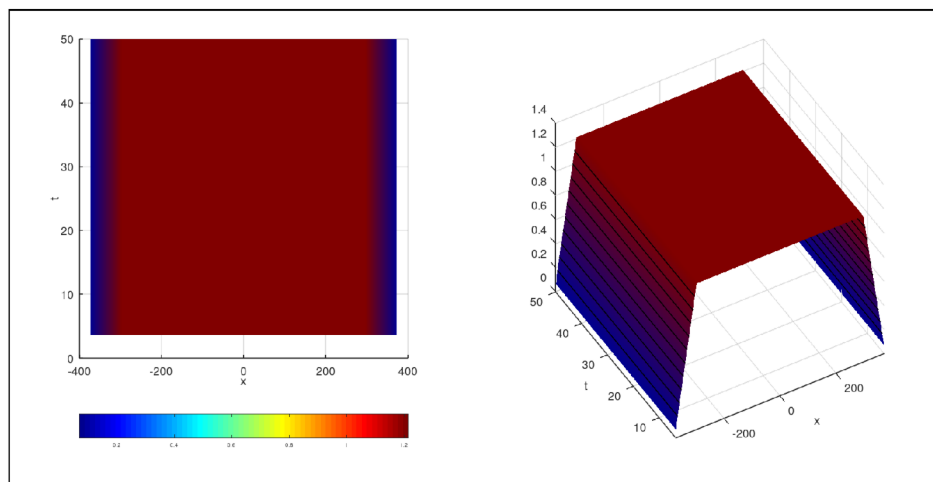
Para fins ilustrativos do comportamento do fenômeno modelado, superfícies foram geradas para representar a solução do problema de secagem da madeira. As Figuras 5.11, 5.12, 5.13 e 5.14 apresentam as soluções obtidas pelo método da Quadratura Gaussiana para os intervalos $10^{-5} \leq t \leq 5$, $10^{-5} \leq t \leq 50$, $10^{-5} \leq t \leq 500$ e $10^{-5} \leq t \leq 5000$, respectivamente. Os gráficos das soluções foram gerados a partir da Quadratura Gaussiana, uma vez que este é o método que fornece resultados comparáveis aos obtidos analiticamente com o menor N_o , entre as três técnicas aqui estudadas. No entanto, independente do método escolhido (Quadratura Gaussiana ou Série de Potências), as superfícies das soluções são visualmente iguais.

Figura 5.11: Quadratura Gaussiana com $10^{-5} \leq t \leq 5$.



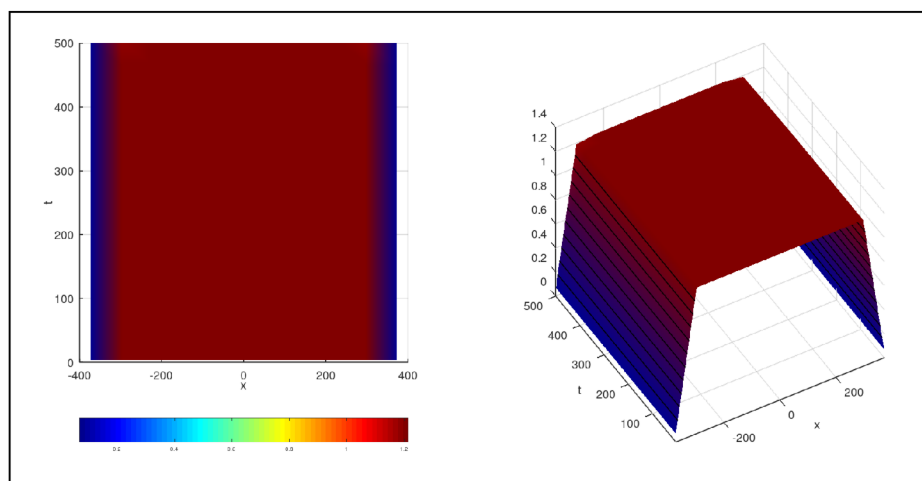
Fonte: O autor

Figura 5.12: Quadratura Gaussiana com $10^{-5} \leq t \leq 50$.



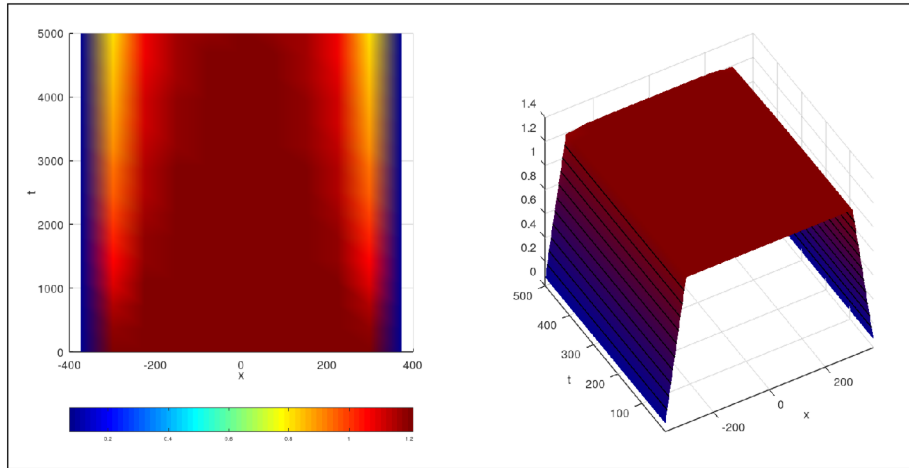
Fonte: O autor

Figura 5.13: Quadratura Gaussiana com $10^{-5} \leq t \leq 500$.



Fonte: O autor

Figura 5.14: Quadratura Gaussiana com $10^{-5} \leq t \leq 5000$.



Fonte: O autor

5.2 Análise dos resultados

Conforme a literatura Heydarian et al. (1981), o método de Weeks apresentou desempenho satisfatório na inversão do problema proposto apenas para o instante $t = 5$, conforme evidenciado pelos erros absolutos obtidos na resolução da EDPP, para o qual os erros são da ordem de 10^{-3} . Entretanto, para os demais intervalos temporais analisados, o algoritmo mostrou-se numericamente instável, acarretando Erros Absolutos Médios elevados. Em contraste, os métodos da Quadratura Gaussiana e da Série de Potências demonstraram maior estabilidade, mantendo erros de aproximação da ordem de 10^{-2} , ou inferiores, ao longo de todo o intervalo temporal considerado. O método da Quadratura Gaussiana aproxima o problema estudado utilizando um menor valor de N_o em comparação aos demais.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, foi realizada, primeiramente, uma análise comparativa do desempenho dos métodos de Quadratura Gaussiana, Série de Potências e Método de Weeks na inversão numérica da TL para oito funções elementares, abrangendo comportamentos polinomiais, oscilatórios e exponenciais. A avaliação, baseada no Erro Absoluto Médio, mostrou que o parâmetro N exerce influência significativa na precisão das aproximações, sendo determinante para a eficiência dos algoritmos. Ainda, verificou-se que valores muito elevados (ou muito baixos) de N não levam aos melhores resultados, existindo assim um valor ótimo para N , que depende do método, da função e dos parâmetros associados. De um modo geral, os métodos numéricos mostraram-se eficientes para a inversão do conjunto considerado. Os resultados indicaram que o Método de Weeks e Quadratura Gaussiana inverteram todas as funções elementares, com Erros Absolutos Médios na ordem de 10^{-4} ou inferiores. Por outro lado, a técnica Série de Potências mostrou limitações na inversão de funções polinomiais e oscilatórias (f_2 , f_4 e f_5), com erros na ordem de 10^{-1} ou superiores, mesmo após ajustes no parâmetro k . Em um segundo momento, investigou-se a influência da inserção de parâmetros A , modificando a amplitude e B , a frequência. Tal análise indicou que a Quadratura Gaussiana e Série de Potências são capazes de inverter funções exponenciais decrescentes, independentemente da magnitude de A . O Método de Weeks, embora sensível a decaimentos rápidos, foi o único capaz de lidar com exponenciais crescentes até a ordem de 10^1 e mostrou maior robustez frente à variação de B em funções oscilatórias. A Quadratura Gaussiana também apresentou bom desempenho para esse tipo de função, porém para uma variação menor de B . Já o método Série de Potências não foi eficaz na inversão deste tipo de função, mesmo com ajustes dos parâmetros B e k .

Os métodos de Quadratura Gaussiana, Série de Potências e Método de Weeks foram utilizados também como alternativas para a inversão numérica da Transformada de Laplace quando aplicada na obtenção da solução de uma Equação Diferencial Parcial Parabólica. No processo, entendeu-se que foi assertivo o cálculo do Erro Absoluto Médio como forma de determinar o valor do N_o (o valor de N responsável pelo truncamento do número de termos das séries utilizadas por cada método de inversão, e que proporciona o melhor ajuste dos perfis numéricos em relação aos analíticos). Destaca-se que o valor de N_o foi obtido por varredura para cada um dos valores de t escolhidos.

Observando os resultados, constatou-se que à medida que t aumenta, N_o também sofre alterações (à exceção do método Quadratura Gaussiana). Percebeu-se que, dependendo do valor de t utilizado, as ordens dos Erros Absolutos Médios para os métodos de Weeks e Quadratura Gaussiana têm uma sensível variação, ficando na faixa de 10^{-3} a 10^{-4} (à exceção do método Série de Potências). Isso indica a sensibilidade dos métodos à magnitude do valor de t , e a sua influência na solução de EDPP da classe estudada aqui.

Para valores grandes de t , a solução analítica da EDPP decai rapidamente a zero, tornando a aproximação numérica altamente sensível a erros de arredondamento. No Método de Weeks,

o termo $e^{\sigma t}$ pode crescer significativamente se σ não for ajustado corretamente, amplificando pequenos erros nos coeficientes e causando oscilações. De forma semelhante, a Quadratura Gaussiana sofre instabilidade numérica porque o integrando envolve e^{st} , que se torna muito grande para valores altos de t , levando a um mal condicionamento no cálculo dos pesos. Esses efeitos explicam a divergência observada nos gráficos para $t = 0.5$. Para resolver esta questão, é recomendada a recalibração dos parâmetros. No entanto, deve-se notar que a calibração adequada desses parâmetros não é o objetivo deste trabalho.

Após a análise da EDPP os métodos de inversão numérica foram aplicados a um problema de secagem de madeira. Nesta aplicação os resultados obtidos para os métodos da Quadratura Gaussiana e Série de Potências apresentam Erros Absolutos Médios na ordem de 10^{-4} a 10^{-2} para os diferentes valores de t ($t = 5, t = 50, t = 500$ e $t = 5000$). Já com relação ao Método de Weeks, este somente consegue inverter o problema proposto quando $t = 5$, para os demais casos apresenta uma instabilidade à medida que t aumenta gerando erros elevados e até mesmo *Overflow* numérico. O desempenho dos métodos de inversão numérica da Transformada de Laplace é influenciado por seus parâmetros intrínsecos. No Método de Weeks, os parâmetros σ , g e α controlam a escala e a convergência da série.

Neste trabalho, $\alpha = 1$ foi adotado de acordo com recomendações da literatura, enquanto σ e g foram calculados com base em T_{max} para garantir a estabilidade dentro dos intervalos de tempo testados. No método de Séries de Potências, o parâmetro k define o espaçamento dos termos exponenciais e foi ajustado empiricamente para minimizar o Erro Absoluto Médio ficando entre $1 \leq k \leq 20$ para as funções elementares, $0,05 \leq k \leq 0,1$ para a EDPP e $k = 15$ para o problema de secagem. Na Quadratura Gaussiana, as raízes e os pesos dependem de N e são obtidos a partir de polinômios de Legendre; sua distribuição afeta diretamente o condicionamento do sistema. A seleção inadequada desses parâmetros pode levar a oscilações ou divergência, especialmente para valores grandes de t , como discutido anteriormente. Embora a recalibração dos parâmetros possa melhorar a robustez, deve-se notar que a otimização detalhada desses parâmetros não é o objetivo deste trabalho.

Vale destacar que todos os algoritmos utilizados neste trabalho foram implementados no software Octave, que é um software de livre distribuição com linguagem de programação acessível à todos os níveis acadêmicos. De modo geral estes programas foram capazes de fornecer bons resultados, a um custo computacional extremamente baixo. Já o tempo de processamento necessário para a execução da varredura do Erro Absoluto Médio ($\overline{E}_{abs}$) é diretamente proporcional à dimensionalidade dos parâmetros de entrada. Especificamente, o custo computacional do algoritmo apresenta uma dependência funcional em relação ao número de termos da inversão (N) e pela quantidade de pontos temporais (N_t) e espaciais (N_x). Consequentemente, o aumento dessas grandezas resulta em uma expansão do tempo de CPU exigido para a convergência dos resultados, neste estudo este tempo foi inferior a 10 minutos.

Como proposta de continuidade, recomenda-se o estudo dos parâmetros intrínsecos aos métodos, tais como σ e T_n no método de Weeks, a distribuição dos pesos a_i na Quadratura Gaussiana e também o parâmetro k , presente na aproximação por Série de Potências.

REFERÊNCIAS

- Abbasbandy, S. and Bervillier, C. (2011). Analytic continuation of Taylor series and the boundary value problems of some nonlinear ordinary differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 218:2178–2199.
- Badrieh, F. (2018). *Finding Inverse Laplace Transform via Partial Fractions*, pages 353–386. Springer International Publishing, Cham.
- Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. Contexto, São Paulo, 4 edition.
- Bendler, J. T. and Weiss, G. H. (1990). Tables of the inverse Laplace transform of the function e^{-s^β} . *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology*, 95(4):433–467.
- Bisgard, J. (2021). *Analysis and linear algebra: the singular value decomposition and applications*. American Mathematical Society, Rhode Island, 1 edition.
- Boyce, W. E. and DiPrima, R. C. (2001). *Elementary differential equations and boundary value problems*. John Wiley & Sons, New York, 7 edition.
- Brociek, R., Hetmaniok, E., and Słota, D. (2024). Numerical solution for the heat conduction model with a fractional derivative and temperature-dependent parameters. *Symmetry*, 16(6):1–11.
- Bronson, R. and Costa, G. B. (2006). *Schaum's Outline of Differential Equations*. McGraw-Hill Companies, New York, 4 edition.
- Cahyono, E., Soeharyadi, Y., and Mukhsar (2008). A smooth diffusion rate model of wood drying: A simulation toward more efficient process in industry. *J. Tek. Ind. J. Keilmuan dan Apl. Tek. Ind.*, 10:01–10.
- Calixto, G. R. L., Freitas, E. K., Ferreira, J. A., do Amaral Rodriguez, B. D., and Prolo Filho, J. F. (2022). Parameter n influence on the fixed-Talbot algorithm for the Laplace transform numerical inversion. *VETOR-Revista de Ciências Exatas e Engenharias*, 32(1):42–51.
- Chung, H.-Y. and Sun, Y.-Y. (1986). Taylor series approach to functional approximation for inversion of Laplace transforms. *Electronics Letters*, 22(23):1219–1221.
- Cohen, A. M. (2007). *Numerical Methods For Laplace Transform Inversion*. Springer Science+Business Media, LLC, New York, 1 edition.
- Crank, J. (1975). *The Mathematics of Diffusion*. Clarendon Press, Oxford, 2 edition.

- da Silva, L. D., do Nascimento, P. L., Silva, C. M., and da Silva, W. P. (2010). Modelo de difusão unidimensional analítico para a descrição da cinética de secagem de madeira: Otimização e simulação. *Anais do VI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica*, Único:1–10.
- de Carvalho, J. A. D., Silva, D., Furtado, F., and Galvão, V. (2013). Modelagem do sistema térmico em um aquecedor para secagem de madeira. *Anais dos Seminários Multidisciplinares das Faculdades ENIAC*, 1:97–104.
- Deshpande, A. S. (2014). Application of mathematical methods of engineering to transient analysis of r-l-c series circuit with sinusoidal voltage. *International Journal of Applied Mathematical Research*, 3(3):327–335.
- do Amaral, G. C. M. (2016). Análise comparativa do desempenho numérico de técnicas de inversão da transformada de Laplace. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande.
- FAO (2022). *The State of the World's Forests 2022. Forest pathways for green recovery and building inclusive, resilient and sustainable economies*. FAO, Roma.
- Forest Products Laboratory (2021). Wood handbook: Wood as an engineering material. Technical Report FPL-GTR-282, U.S. Department of Agriculture, Forest Service, Forest Products Laboratory.
- Freitas, E. K. (2022). Algoritmos de inversão numérica da Transformada de Laplace aplicados à solução de um problema de difusão de mercúrio na Água. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande. Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional.
- Galdino, K. E. (1995). Transformada inversa de Laplace: Inversão algébrica via tabela e inversão numérica. Dissertação de mestrado, Universidade Federal da Paraíba - Campus I.
- Galvão, A. P. M. and Jankowsky, I. P. (1985). *Secagem racional da madeira*. Nobel, São Paulo.
- Gershenfeld, N. (1998). *The Nature of Mathematical Modeling*. Cambridge University Press, Cambridge, 1 edition.
- Gheorghe, A. G. and Marin, M. E. (2023). *Electrical Circuits as Dynamical Systems*. IntechOpen, London.
- Giunta, G., Laccetti, G., and Rizzardi, M. (1989). More on the Weeks method for the numerical inversion of the Laplace transform. *Numerische Mathematik*, 54:193–200.
- Hassanzadeh, H. and Pooladi-Darvish, M. (2007). Comparison of different numerical Laplace inversion methods for engineering applications. *Applied Mathematics and Computation*, 189(2):1966–1981.

- Heydarian, M., Mullineux, N., and Reed, J. R. (1981). Solution of parabolic partial differential equations. *Appl. Math. Modelling*, 5(1):448–449.
- IBA (2023). *Relatório Anual 2023*. Indústria brasileira de árvores, São Paulo.
- Indratno, W., S., Ramm, and G., A. (2009). Inversion of the Laplace transform from the real axis using an adaptive iterative method. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2009(01):01–38.
- Iseger, P. D. (2006). Numerical transform inversion using Gaussian Quadrature. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 20:01–44.
- Kamran, Khan, S. U., Haque, S., and Mlaiki, N. (2023). On the approximation of fractional-order differential equations using Laplace transform and weeks method. *Symmetry*, 15(6):01–16.
- Kano, P. O., Brio, M., and Moloney, J. V. (2005). Application of Weeks method for the numerical inversion of the Laplace transform to the matrix exponential. *Comm. Math. Sci.*, 3(3):335–372.
- Lamb, G. B. (2020). Application of Laplace transform in differential equations. *International Journal for Technical Research in Engineering*, 7:90–95.
- Lanczos, C. (1956). *Applied Analysis*. Prentice Hall, New Jersey.
- Lemos, C. F., da Costa, C. P., Pérez-Fernández, L. D., Ferreira, A. M., and da Silva, E. C. (2021). Análise de desempenho de métodos numéricos de inversão da Transformada de Laplace. *INTERMATHS*, 2(2):75–90.
- Lima, G. S. and de Paula Araújo, J. (2019). Um estudo das variações da temperatura do solo via equação do calor. *Revista Brasileira de ensino de física*, 41(3):1–7.
- Luikov, A. (1968). *Analytical Heat Diffusion Theory*. Academic Press, Chicago.
- Maréchal, P., Triki, F., and Lee, W. C. S. T. (2023). Regularization of the inverse Laplace transform by mollification. *arxiv*, Único:01–22.
- Navarrete, R. and Viswanath, D. (2014). Accuracy and stability of inversion of power series. *Arxiv*, 1:1–16.
- Ozisik, M. N. (1993). *Heat Conduction*. John Wiley & Sons, New York, 2 edition.
- Pacheco, A. L. S. (2011). Transformada de Laplace: algumas aplicações. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina.
- Papoulis, A. (1956). A new method of inversion of the Laplace Transform. *Quarterly of applied mathematics*, 14:405–414.

- Paz, M. C., de Almeida Schmidt, R., Freitas, E. K., do Amaral Rodriguez, B. D., and Prolo Filho, J. F. (2023). Aspectos computacionais da inversão numérica da transformada de Laplace aplicada a um problema de engenharia elétrica. *Anais do Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional do Rio Grande do Sul*, Único:1–8.
- Piessens, R. (1971). Gaussian quadrature formulas for the numerical integration of Bromwich's integral and the inversion of the Laplace transform. *Journal of Engineering Mathematics*, 5(1):1–9.
- Pilatti, C. (2019). Análise comparativa do desempenho numérico de técnicas de inversão da transformada de Laplace, aplicados a um problema de transporte de soluto em meio poroso. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande.
- Pimentel, D. R. M. and de Castro, A. S. (2014). A Laplace transform approach to the quantum harmonic oscillator. *European Journal of Physics*, 1:1–8.
- Schiff, J. L. (1999). *The Laplace Transform: theory and applications*. Springer Science & Business Media, 1 edition.
- Silva, M. A. d. (2022). Transformada de Laplace: conceitos e aplicações. Trabalho de especialização, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba.
- Smith, S., Kothawade, M. K., Shinde, M. D., and Maheshwari, A. (2022). Multi-precision Laplace Transform inversion. *International Research Journal of Modernization in Engineering Technology and Science*, 4:1257–1264.
- Spiegel, M. R. (1965). *Schaum's Outline of Laplace Transforms*. McGraw-Hill, New York, 1 edition.
- Spiegel, M. R., Lipschutz, S., and Liu, J. (2012). *Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas*. Bookman, Porto Alegre, 3 edition.
- Tani, I. (1977). History of boundary layer theory. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 9:87–111.
- Wang, Q. and Zhan, H. (2015). On different numerical inverse Laplace methods for solute transport problems. *Advances in Water Resources*, 75:80–92.
- Wei, Y., Chen, Y., Chen, Y., and Wang, Y. (2019). Analytical calculation of the inverse Laplace transform. *Arxiv*, 1:01–06.
- Weideman, J. A. C. (1999). Algorithms for parameter selection in the Weeks method for inverting the Laplace transform. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 21(1):111–128.
- Zanuncio, A. J. V., Carvalho, A. G., da Silva, M. G., and Lima, J. T. (2017). Importance of wood drying to the forest transport and pulp mill supply. *CERNE*, 23(2):147–152.

- Zhang, S., Li, D., Shen, W., Zhang, X., and Liu, Y. (2017). Crack detection in beam structures with a novel Laplace based bswi fe method. *Arxiv*, 1:01–14.
- Zill, D. G. (2011). *Equações Diferenciais com aplicações em modelagem*. Cengage Learning, São Paulo, 9 edition.
- Zill, D. G. and Cullen, M. R. (2001). *Schaum's Outline of Differential Equations*, volume 1. Pearson Markron Books, São Paulo, 3 edition.

7 ANEXO I

7.1 Fundamentação Matemática

Neste capítulo, faz-se uma breve abordagem acerca dos conceitos, definições e propriedades da Transformada de Laplace, segundo Boyce e DiPrima (2001); Zill e Cullen (2001); Bronson e Costa (2006); Zill (2011). As Equações Diferenciais Ordinárias são utilizadas para modelar uma variedade de problemas, tais como sistemas físicos, processos químicos e dinâmica das populações. A Transformada de Laplace representa um método operacional de grande importância, amplamente reconhecido e estudado principalmente no campo das ciências exatas e engenharias. É comumente empregada na resolução de Equações Diferenciais Ordinárias.

7.2 Transformada de Laplace

A Transformada de Laplace é um tipo especial de transformação integral definida como:

Definição 7.1. Seja f uma função definida para $t \geq 0$. A integral

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (7.1)$$

é chamada de Transformada de Laplace de f , desde que a integral convirja.

Caso a integral (7.1) convergir, o resultado da Transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}$ de uma função $f(t)$ é uma função $F(s)$. As letras minúsculas denotam a função que está sendo transformada e as letras maiúsculas representam sua Transformada de Laplace, logo, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$.

7.3 Conceitos Básicos e Condição de Existência

Definição 7.2. Ordem Exponencial. Uma função f é de ordem exponencial c se existem constantes c , $M > 0$ e $T > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq Me^{ct}, \forall t > T. \quad (7.2)$$

Caso f seja uma função crescente, a condição $|f(t)| \leq Me^{ct}, t > T$, diz que, o gráfico da f em um intervalo (T, ∞) não cresce mais rápido que o gráfico da função exponencial Me^{ct} , onde c é uma constante positiva.

Definição 7.3. Contínua por partes. Uma função f é dita contínua por partes em $[0, \infty)$ se em qualquer intervalo $0 \leq a \leq t \leq b$ existe um número finito de pontos $t_k, k = 1, 2, \dots, n(t_{k-1} < t_k)$ onde f é contínua e descontínua em cada intervalo aberto $t_{k-1} < t < t_k$.

Teorema 7.1. Condições Suficientes de Existência. Se $f(t)$ é contínua por partes no intervalo $[0, \infty)$ e de ordem exponencial c , então $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > c$.

7.4 Propriedades Operacionais da Transformada de Laplace

Nessa seção, serão exibidas algumas propriedades operacionais importantes que auxiliam nos cálculos da Transformada de Laplace.

Observação: Para que todas $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existam, considera-se que todas as funções satisfaçam os requisitos do Teorema 5.1.

Teorema 7.2. Translação sobre o eixo s . Se p é uma constante e $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, onde $s > k$ para algum k , então

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - p). \quad (7.3)$$

Definição 7.4. Função Degrau Unitário ou Função de Heaviside.

Essa função, tem como principal aplicação a resolução de Equações Diferenciais que envolvem funções descontínuas, as quais aparecem constantemente em problemas na área de Engenharia.

A função $\mathcal{U}(t - p)$ é definida por

$$\mathcal{U}(t - p) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < p \\ 1, & t \geq p \end{cases}. \quad (7.4)$$

Note que $\mathcal{U}(t - p)$ está definido somente para $t \geq 0$, o que é suficiente para estudo da Transformada de Laplace. Porém, em um estudo mais amplo, tem-se $\mathcal{U}(t - p) = 0$ para $t < p$.

Teorema 7.3. Translação sobre o eixo t . Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e $p > 0$, então

$$\mathcal{L}\{f(t - p) \mathcal{U}(t - p)\} = e^{-ps}F(s). \quad (7.5)$$

Teorema 7.4. Linearidade. Sejam α e β constantes quaisquer, $f(t)$ e $g(t)$ funções com Transformada de Laplace, então

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s). \quad (7.6)$$

$\mathcal{L}$ é uma transformada linear, ou operador linear.

Teorema 7.5. Mudança de Escala. Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{p}F\left(\frac{s}{p}\right), \text{ para } p \neq 0. \quad (7.7)$$

Teorema 7.6. Transformada de uma Derivadas. Se $f, f', \dots, f^{n-1}$ forem contínuas no intervalo $[0, \infty)$, de ordem exponencial, e se $f^{(n)}$ é contínua por partes em $[0, \infty)$, então

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0),$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^{(n)}F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{n-2}(0)f^{n-1}(0). \quad (7.8)$$

Teorema 7.7. Multiplicação por t^n . Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s). \quad (7.9)$$

Teorema 7.8. Transformadas de Integrais. Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s}F(s). \quad (7.10)$$

Teorema 7.9. Divisão por t . Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)du, \quad (7.11)$$

desde que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} \text{ exista.}$$

7.5 Convolução de Funções

Se f e g forem contínuas por partes em $[0, \infty)$, então a convolução é denotada por $f * g$, é dada pela integral

$$f * g = \int_0^t f(u)g(t-u)du. \quad (7.12)$$

A integral (7.12) é chamada de Convolução de f e g .

Teorema 7.10. Teorema da Convolução. Sejam $f(t)$ e $g(t)$ funções contínuas por partes em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial, então

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s). \quad (7.13)$$

7.6 Propriedades da Convolução:

- (i) Lei Comutativa: $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$;
- (ii) Lei Distributiva: $f(t) * (g(t) + h(t)) = f(t) * g(t) + f(t) * h(t)$;
- (iii) Lei Associativa: $f(t) * (g(t) * h(t)) = (f(t) * g(t)) * h(t)$;
- (iv) $\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s)$;
- (v) $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t)$.

Teorema 7.11. Teorema do Valor Inicial. Se os limites indicados existem, então

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} F(s). \quad (7.14)$$

Teorema 7.12. Teorema do Valor Final. Se os limites indicados existem, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} F(s). \quad (7.15)$$

7.7 Transformada Inversa de Laplace

Se $f(t)$ é chamada de Transformada Inversa de Laplace, então $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, onde $\mathcal{L}^{-1}$ é denominado operador da Transformada Inversa de Laplace.

A Transformada Inversa de Laplace pode ser definida pela integral de Bromwich,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} F(s) ds, \quad (7.16)$$

onde $\sigma > 0$ é uma constante real, maior que as partes reais de todas as singularidades de $F(s)$.

7.8 Propriedades Operacionais

As propriedades operacionais auxiliam na solução de cálculos, quando uma função s não satisfaz totalmente a forma tabelada.

Teorema 7.13. Translação sobre o eixo s . Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, para qualquer a , então

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t). \quad (7.17)$$

Teorema 7.14. Translação sobre o eixo t . Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{pt} F(s)\} = \mathcal{U}(t-p) f(t-p). \quad (7.18)$$

Teorema 7.15. Linearidade. Seja α e β constantes quaisquer, enquanto $F(s)$ e $G(s)$ são funções com Transformadas Inversas de Laplace $f(t)$ e $g(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \alpha f(t) + \beta g(t), \quad (7.19)$$

onde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$.

Teorema 7.16. Mudança de Escala. Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(ps)\} = \frac{1}{p} f\left(\frac{t}{p}\right), \text{ para } p \neq 0. \quad (7.20)$$

Teorema 7.17. Transformadas Inversa de uma Derivada. Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{F^n(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d^n}{ds^n} F(s)\right\} = (-1)^n t^n f(t). \quad (7.21)$$

Teorema 7.18. Transformada Inversa de Integrais. Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty F(u)du\right\} = \frac{f(t)}{t}. \quad (7.22)$$

Teorema 7.19. Multiplicação por s^n . Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ e $f(0) = 0$, então

$$\mathcal{L}\{sF(s)\} = f'(t). \quad (7.23)$$

O efeito de multiplicação por s é derivar $f(t)$. Se $f(0) \neq 0$, então $\mathcal{L}^{-1}\{F(s) - f(0)\} = f'(t)$.

Teorema 7.20. Divisão por s . Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)du. \quad (7.24)$$

Teorema 7.21. Teorema da Convolução. Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ e $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(u)g(t-u)du = f * g. \quad (7.25)$$

7.9 Métodos Analíticos para determinar a Transformada Inversa de Laplace

Na matemática, existem diversos métodos para inversão analítica da Transformada de Laplace, entre eles: o método de frações parciais, a fórmula complexa de inversão apresentada na Eq.(7.16) e a fórmula de desenvolvimento de Heaviside.

Em seguida, apresentam-se os métodos de frações parciais e a fórmula de desenvolvimento de Heaviside, segundo Spiegel (1965); Schiff (1999).

7.10 Método de Frações Parciais

Qualquer função racional do tipo $F(s) = \frac{G(s)}{H(s)}$ onde $G(s)$ e $H(s) \neq 0$ são polinômios, com o grau de $G(s)$ menor do que o de $H(s)$ pode ser decomposta em soma de funções racionais, também conhecidas como frações parciais.

Na sequência, apresentam-se algumas formas de decompor frações parciais:

(i) Para cada fator linear da forma $H(s) = (ps + t)$ corresponde a uma fração parcial da forma $\frac{A}{(ps + t)}$, A constante.

(ii) Para cada fator linear repetido da forma $H(s) = (ps + t)^n$ corresponde a uma fração parcial da forma $\frac{A_1}{(ps + t)} + \frac{A_2}{(ps + t)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ps + t)^n}$, onde $A_1, A_2, \dots, A_n$ são constantes.

(iii) Para cada fator quadrático da forma $H(s) = (ps^2 + ts + c)$, corresponde a uma fração parcial da forma $\frac{As + B}{(ps^2 + ts + c)}$, onde A e B são constantes.

(iv) Para cada fator quadrático repetido da forma $H(s) = (ps^2 + ts + c)^n$, corresponde a uma fração parcial da forma $\frac{A_1s + B_1}{ps^2 + ts + c} + \frac{A_2s + B_2}{(as^2 + bs + c)^2} + \dots + \frac{A_ns + B_n}{(ps^2 + ts + c)^n}$, onde $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ são constantes.

A Transformada Inversa de Laplace de cada uma das frações parciais $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ é obtida da seguinte maneira: iguala-se a fração $F(s) = \frac{G(s)}{H(s)}$ à soma de frações encontradas, eliminando os denominadores e identificando os coeficientes de potências iguais de s , com isso, chega-se a um conjunto de equações lineares e através dele obtêm-se os valores para constantes A, B , etc.

7.11 Fórmula de Desenvolvimento de Heaviside

. Seja $F(s) = \frac{G(s)}{H(s)}$ uma função racional que satisfaz às condições:

(i) $G(s)$ e $H(s)$ são polinômios, e $H(s) \neq 0$;

(ii) grau (G) < grau(H),

suponha que $H(s)$ possua n zeros distintos $\alpha_k = 1, 2, 3, \dots, n$. Então

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{H(s)} \right\} = \sum_{k=1}^n \frac{G(\alpha_k)}{H'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t} \quad (7.26)$$

onde $H'(\alpha_k)$ é a derivada de $H(\alpha_k)$ avaliada na sua k -ésima raiz.