

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

**MODELO HÍBRIDO PARA PREVISÃO DE SÉRIES TEMPORAIS FINANCEIRAS:
ARIMA-ESN COM ALGORITMO GENÉTICO**

por

Fabian Corrêa Cardoso

Tese de Doutorado apresentada para a obtenção do título de Doutor em Modelagem Computacional

Orientadora: Dra. Viviane Leite Dias de Mattos

Coorientador: Dr. Rafael Alceste Berri

Rio Grande - RS

2025

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

MODELO HÍBRIDO PARA PREVISÃO DE SÉRIES TEMPORAIS FINANCEIRAS: ARIMA-ESN COM ALGORITMO GENÉTICO

Fabian Corrêa Cardoso

Texto submetido para defesa de tese no Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande como requisito parcial para obtenção do título de doutor em Modelagem Computacional.

Orientadora: Dra. Viviane Leite Dias de Mattos

Coorientador: Dr. Rafael Alceste Berri

Rio Grande, março de 2025.

Fabian Corrêa Cardoso

“Modelo Híbrido para Previsão de Séries Temporais Financeiras: Arima-ESN com Algoritmo Genético”

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande - FURG, como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor. Área de concentração: Modelagem Computacional.

Aprovado em: 21/03/2025

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 **VIVIANE LEITE DIAS DE MATTOS**
Data: 04/05/2025 20:51:46 -0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Viviane Leite Dias de Mattos (Orientadora - FURG)

Documento assinado digitalmente
 **RAFAEL ALCESTE BERRI**
Data: 05/05/2025 10:38:19 -0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Rafael Alceste Berri (Co-orientador - FURG)

Documento assinado digitalmente
 **Luiz Ricardo Nakamura**
Data: 04/05/2025 21:40:23 -0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Luiz Ricardo Nakamura (UFLA)

Documento assinado digitalmente
 **PAULO HENRIQUE SALES GUIMARAES**
Data: 04/05/2025 21:15:35 -0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Paulo Henrique Sales Guimarães (UFLA)

Documento assinado digitalmente
 **VIVIANA COCCO MARIANI**
Data: 09/05/2025 16:24:28 -0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Viviana Cocco Mariani (UFPR)

 Assinado de forma digital por Paulo Lilles Jorge Drews Junior:00124140009
Dados: 2025.05.05 23:34:24 -03'00'

Prof. Dr. Paulo Lilles Jorge Drews Jr. (FURG)

Rio Grande - RS
2025

ATA DE DEFESA DE TESE**ATA Nº 01/2025**

Aos vinte um dias do mês de março de dois mil e vinte e cinco, por meio de videoconferência, realizou-se a 40ª sessão de defesa de tese do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional. O doutorando **Fabian Corrêa Cardoso** apresentou e defendeu a tese “**Modelo Híbrido para Previsão de Séries Temporais Financeiras: Arima-ESN com Algoritmo Genético**” como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Modelagem Computacional. A sessão foi aberta às quatorze horas pela Profa. Dra. Viviane Leite Dias de Mattos, orientadora da tese e presidente da Comissão de Avaliação. A referida Comissão esteve integrada, além da presidente e orientadora, pelo Prof. Dr. Rafael Alceste Berri (Co-orientador - FURG), pelo Prof. Dr. Luiz Ricardo Nakamura (UFLA), pelo Prof. Dr. Paulo Henrique Sales Guimarães (UFLA), pelo Prof. Dr. Paulo Lilles Jorge Drews Jr. (FURG) e pela Profa. Dra. Viviana Cocco Mariani (UFPR). Após a apresentação do trabalho, a banca arguiu o candidato e, a seguir, deliberou pela

() aprovação da Tese.

(x) aprovação da Tese, sugerindo modificações no texto.

() reprovação da Tese.

Documento assinado digitalmente
 **VIVIANE LEITE DIAS DE MATTOS**
Data: 21/03/2025 18:39:40-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Viviane Leite Dias de Mattos
Orientadora

Documento assinado digitalmente
 **RAFAEL ALCESTE BERRI**
Data: 23/03/2025 11:41:46-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Rafael Alceste Berri
Co-orientador

Documento assinado digitalmente
 **Luiz Ricardo Nakamura**
Data: 24/03/2025 09:39:01-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Luiz Ricardo Nakamura
Membro Externo

Documento assinado digitalmente
 **PAULO HENRIQUE SALES GUIMARAES**
Data: 24/03/2025 13:53:32-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Paulo Henrique Sales Guimarães
Membro Externo

Documento assinado digitalmente
 **VIVIANA COCCO MARIANI**
Data: 24/03/2025 12:42:03-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Viviana Cocco Mariani
Membro Externo

Assinado de forma digital por
Paulo Lilles Jorge Drews
Junior:00124140009
Dados: 2025.03.24 09:55:09
-03'00'

Prof. Dr. Paulo Lilles Jorge Drews Jr.
Membro Interno

Ficha Catalográfica

C268m Cardoso, Fabian Corrêa.

Modelo híbrido para previsão de séries temporais financeiras:
ARIMA-ESN com algoritmo genético / Fabian Corrêa Cardoso. –
2025.

173 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande –
FURG, Programa de Pós-Graduação em Modelagem
Computacional, Rio Grande/RS, 2025.

Orientadora: Dra. Viviane Leite Dias de Mattos.

Coorientador: Dr. Rafael Alceste Berri.

1. ARIMA-EGARCH 2. RNEE 3. Redes Neurais de Estados de
Eco 4. Ações de bolsa de valores 5. Volatilidade I. Mattos, Viviane
Leite Dias de II. Berri, Rafael Alceste III. Título.

CDU 004:33

Catálogo na Fonte: Bibliotecário José Paulo dos Santos CRB 10/2344

AGRADECIMENTOS

A todos que contribuíram, de uma forma ou de outra, para a concretização deste sonho, fruto de realização coletiva, portanto.

À Professora Doutora Viviane Leite Dias de Mattos, minha orientadora, por sua disponibilidade na realização deste projeto, pelo seu comprometimento com este trabalho, por sua exigência para obtenção de excelência, pela sua contribuição com ideias e pela sua capacidade didática de me ensinar algo que era novo para mim. Continuará gravada em minha história de vida, como já estava desde a graduação e sem a qual esta tese não existiria.

Ao Professor Doutor Rafael Alceste Berri, meu coorientador, pelas sugestões, pelos ensinamentos e pelos bolsistas e voluntários que disponibilizou durante o andamento deste trabalho, os quais me auxiliaram bastante.

Aos meus pais, Idelfonso Rodrigues Cardoso (*in memoriam*) e Marlecy de Assunção Corrêa Cardoso (*in memoriam*), e às minhas irmãs. Sem seu amor, apoio, paciência e cobrança por responsabilidade, desde o início, não teria conseguido alcançar esta realização.

A Fabian Recart Cardoso Cardoso, meu filho, que me motivou, me divertiu, me apoiou e me ajuda a ser uma pessoa melhor.

À Noélia Rocha Piraine, minha companheira, que me permitiu dividir os momentos fáceis e os difíceis, que me apoiou, facilitando muito todo este processo e que também me incentivou. Minha eterna gratidão.

À Capes, pela bolsa de doutorado, nos 24 meses iniciais, a qual muito me auxiliou, financeiramente, durante minha licença da Universidade de Rio Verde.

À Universidade de Rio Verde, pela licença remunerada, nos últimos 24 meses do doutorado.

À Universidade Federal do Rio Grande, a qual apoiou a publicação de artigos, inscrições e participações em eventos.

Aos professores Dra. Andrea Cristina Konrath, Dr. Eduardo Nunes Borges, Dr. Giancarlo Lucca e Dr. Bruno Lopes Dalmazo pelas contribuições e revisões nos artigos escritos e publicados.

Aos graduandos, bolsistas ou voluntários, Juan Andrey Valverde Malska, Paulo Junior dos Santos Ramiro, Lucas Hamon Jardim, Henrique Vaz de Araújo, Andrey Vinicius Santos Souza e Matheus Guimarães Simoni que me auxiliaram durante o trabalho, em especial para Henrique e Matheus, os quais me possibilitaram executar muitos modelos a mais do que eu poderia.

Aos meus colegas Celso Nobre da Fonseca, Richard de Freitas Pinto e Rodrigo Costa Batista, pela ajuda com os *scripts* do R e pela troca de ideias.

Aos membros da banca examinadora pelas contribuições na qualificação e pela justa avaliação deste trabalho.

RESUMO

A aplicação das Redes Neurais Artificiais (RNA) para previsões de séries temporais são de uso mais recente do que técnicas estatísticas, mas também buscam otimizar resultados e minimizar erros. Dentre estas, destacam-se as Redes Neurais Recorrentes (RNR) que se utilizam de memória dos dados anteriores. Entre elas, as Redes Neurais de Estados de Eco podem alcançar excelente desempenho na previsão de valores futuros, pois não necessitam de treinamento, um grande problema nas RNR. Entre os métodos estatísticos, um modelo híbrido estatístico-estatístico, resultante da combinação ARIMA-GARCH (*Autoregressive Integrated Moving Average-Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic*) e suas variações, oriundos da metodologia de Box-Jenkins e de Bollerslev, respectivamente, têm sido usado com bastante sucesso na modelagem da volatilidade de ativos financeiros. Um setor da economia que se beneficia destes métodos e técnicas supracitados é o investimento no mercado de ações. Uma das séries temporais mais utilizadas é a do preço de fechamento diário da ação, por ser considerada uma boa representação dos valores negociados no dia. O objetivo deste trabalho é caracterizar o comportamento de séries temporais do preço de ações, otimizando a capacidade preditiva de modelos gerados por Redes Neurais de Estados de Eco, agregando técnica estatística à sua implementação. Foram utilizadas as séries temporais das ações ITSA4 (ação preferencial nominativa do conglomerado ITAÚ) e PETR4 (ação preferencial nominativa da Petróleo Brasileiro S.A. - Petrobrás), da B3 (Brasil, Bolsa, Balcão), modeladas pelo ARMA-EGARCH (*Autoregressive Moving Average-Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic*), ESN (*Echo State Network*) e o modelo proposto: ARIMA-ESN, no qual ARIMA modela a parte linear e ESN a não linear. Além disso, no modelo proposto, utilizaram-se as distribuições t de Student e GED (*Generalized Error Distribution*) na geração de pesos aleatórios para o reservatório e os pesos de entrada da ESN, além das usuais distribuições Normal e Uniforme. Sendo as distribuições de probabilidade Normal e t de Student consideradas melhores na implementação do ARIMA-ESN das ações ITSA4 e PETR4, respectivamente. Entretanto, nestes estudos de caso, o modelo ARMA-EGARCH obteve desempenho melhor. Em sequência, foram geradas vinte séries simuladas derivadas da ITSA4, para serem modeladas pela nova metodologia: ARIMA-ESN. Foram utilizados dois modelos, cada um com dez séries temporais e efeito aleatório definido pela distribuição Normal ou pela GED. Realizaram-se previsões da variância diária dos retornos e fizeram-se comparações com previsões da ESN, utilizando-se ARMA-EGARCH como *benchmark*. O modelo ARIMA-ESN obteve, nas séries com efeito aleatório GED, erros de previsão menores do que a própria ESN, além de se aproximar do desempenho do ARMA-EGARCH. Logo, supõe-se que o desempenho da técnica dependa da propriedade dos dados, assim como da distribuição de probabilidade utilizada para geração dos pesos aleatórios da ESN.

Palavras-chave: ARIMA-EGARCH; RNEE; Redes Neurais de Estados de Eco; Ações de bolsa de valores; Volatilidade.

ABSTRACT

Artificial Neural Networks (ANN) applications for time series forecasts are more recent than statistical techniques, but they also seek to optimize results and minimize errors. Among these, Recurrent Neural Networks (RNN) stand out, which use memory of previous data. Among them, Echo State Networks (ESN) can excellently predict future values as they do not require training, a significant problem in RNNs. Among the statistical methods, a hybrid statistical-statistical model, resulting from the combination of ARIMA-GARCH (Autoregressive Integrated Moving Average-Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic) and its variations, originating from the Box-Jenkins and Bollerslev methodology, respectively, has been used quite successfully in modeling the volatility of financial assets. One sector of the economy that benefits from these methods and techniques mentioned is investment in the stock market. One of the most used time series is the daily closing price of the share, which is considered a good representation of the values traded on the day. This work aims to characterize the behavior of stock price time series, optimize the predictive capacity of models generated by Echo State Networks, and add statistical techniques to its implementation. The time series of stocks ITSA4 (preferred nominative stock of the ITAÚ conglomerate) and PETR4 (preferred nominative stock of *Petróleo Brasileiro S.A. - Petrobrás*), from B3 (*Brasil, Bolsa, Balcão*), modeled by ARMA-EGARCH (Autoregressive Moving Average-Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic), ESN and the proposed model: ARIMA-ESN, in which ARIMA models the linear part and ESN the non-linear part, were used. Furthermore, in the proposed model, Student's t and GED (Generalized Error Distribution) distributions were used to generate random weights for the reservoir and the ESN input weights, in addition to the usual Normal and Uniform distributions. The Normal and Student's t probability distributions are considered best in the ARIMA-ESN implementation of the ITSA4 and PETR4 shares, respectively. However, in these case studies, the ARMA-EGARCH model performed better. Subsequently, twenty simulated series derived from ITSA4 were generated to be modeled by the new methodology: ARIMA-ESN. Two models were used, each with ten time series and random effects defined by the Normal distribution or the GED. Forecasts of the daily variance of returns and comparisons were made with ESN forecasts, using ARMA-EGARCH as a benchmark. In the series with random GED effect, the ARIMA-ESN model obtained more minor prediction errors than the ESN, in addition to approaching the performance of ARMA-EGARCH. Therefore, it is assumed that the performance of the technique depends on the data's property and the probability distribution used to generate the random weights of the ESN.

Keywords: ARIMA-EGARCH; ESN; Echo State Network; Stocks exchange market; Volatility.

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Nuvem de palavras-chaves escolhidas pelos autores nos artigos selecionados	51
Figura 2: Frequência de expressões de 2 palavras nos resumos dos artigos selecionados	51
Figura 3 - Rede de autores colaboradores nos artigos selecionados	51
Figura 4: Metodologias utilizadas e proposta	60
Figura 5: Metodologia ESN utilizada	61
Figura 6: Metodologia $ARMA(p,q)$ - $GARCH(m,n)$ utilizada.....	63
Figura 7: ST dos preços de fechamento diário da ITSA4 (a)treino, (b)validação e (c)teste, entre 02-01-2001 e 30-06-2023.....	68
Figura 8 - (a)Histograma, (b)Boxplot e (c)qqPlot dos preços do fechamento diário da ITSA4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023.....	69
Figura 9: ST de retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023.....	69
Figura 10: (a)Histograma, (b)Boxplot e (c)QQPlot dos retornos da ITSA4,entre 02-01-2001 e 30-06-2023	70
Figura 11: ST de log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023.....	70
Figura 12: (a)Histograma, (b)Boxplot e (c)QQPlot dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023	71
Figura 13: Evolução do fitness do AG com os retornos da ITSA4 com distribuição Uniforme (4179 épocas), entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (períodos de treino e validação).....	73
Figura 14: Predição dos retornos com ESN da ITSA4 pela distribuição Uniforme (4179 épocas), entre 24-06-2014 e 28-12-2018 (período de validação).....	73
Figura 15: Previsão da variância dos retornos com ESN da ITSA4 pela distribuição Uniforme (4179 épocas), entre 29-12-2018 e 30-06-2023 (período de teste)	74
Figura 16: (a)FAC e (b)FACP dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018.....	75
Figura 17: Histograma dos resíduos padronizados selecionados com a GED dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018.....	78
Figura 18: Previsão pelos (a) $ARMA(6,3)$ - $EGARCH(3,3)$ e (b) $ARMA(1,2)$ - $EGARCH(1,1)$ das variâncias diárias da ITSA4, entre 02-01-2019 e 30-06-2023 (período de validação)	79
Figura 19: Evolução do fitness MAE do AG com os retornos da ITSA4 (7966 épocas), do $ARMA(7,0)$ pela GED, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (períodos de treino e validação)	83
Figura 20: Evolução do <i>fitness</i> MAE do AG com os retornos da ITSA4 (7774 épocas), do $ARMA(2,1)$ pela distribuição Normal, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (períodos de treino e validação)	83
Figura 21 - Predição resíduos quadráticos (a) $ARMA(7,0)$ -ESN pela GED e (b) $ARMA(2,1)$ -ESN pela Normal da ITSA4, entre 24-06-2014 e 28-12-2018 (período de validação)	83
Figura 22 - Previsão das variâncias diárias dos retornos, a cada 30min, pelo (a) $ARMA(7,0)$ -ESN com a GED e pelo (b) $ARMA(2,1)$ -ESN com a Normal da ITSA4, entre 02-01-2019 e 30-06-2023 (período de teste).....	84
Figura 23: ST dos preços de fechamento diário da PETR4 (a)treino, (b)validação e (c)teste, entre 02-01-2001 e 30-06-2023.....	85
Figura 24: (a)Histograma, (b)Boxplot e (c)qqPlot dos preços do fechamento diário da PETR4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023.....	86
Figura 25: ST de retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023	86
Figura 26: (a)Histograma, (b)Boxplot e (c)qqPlot dos retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023	87
Figura 27: ST de log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023.....	87
Figura 28: (a)Histograma, (b)Boxplot e (c)QQPlot dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023	88
Figura 29: Evolução do fitness MAE do AG com os retornos da PETR4, do $ARMA(7,0)$ pela Uniforme (4403 épocas), entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (períodos de treino e validação).....	90

Figura 30: Predição dos retornos com ESN da PETR4 com distribuição Uniforme (4403 épocas), entre 24-06-2014 e 28-12-2018 (período de validação).....	90
Figura 31: Previsão da variância dos retornos com ESN da PETR4 pela distribuição Uniforme (4403 épocas), entre 29-12-2018 e 30-06-2023 (período de teste)	91
Figura 32: (a)FAC e (b)FACP dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018.....	92
Figura 33: Histograma dos resíduos padronizados selecionados com a GED dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018.....	94
Figura 34: Previsão pelos (a)ARMA(5,5)-EGARCH(1,1) e (b)ARMA(1,0)-EGARCH(2,3) das variâncias dos retornos diárias da PETR4, entre 02-01-2019 e 30-06-2023 (período de validação)	95
Figura 35: Evolução do fitness MAE do AG com os retornos da PETR4 (4216 épocas), ARMA(4,2) pela t de Student, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (períodos de treino e validação)	99
Figura 36: Evolução do fitness MAE do AG com os retornos da PETR4 (4728 épocas), ARMA(0,1) pela GED, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (períodos de treino e validação)	99
Figura 37: Predição resíduos quadráticos (a)ARMA(0,1)-ESN pela GED e (b)ARMA(4,2)-ESN pela t de Student da PETR4, entre 24-06-2014 e 28-12-2018 (período de validação)	100
Figura 38: Previsão pelos (a)ARMA(0,1)-ESN e (b)ARMA(4,2) com a GED e a t de Student das variâncias dos retornos diárias da PETR4, entre 02-01-2019 e 30-06-2023 (período de teste)	100
Figura 39: Variâncias dos retornos <i>intraday</i> , a cada 30min, calculados diariamente da ITSA4 e da PETR4, entre 02-01-2019 e 30-06-2023 (período de teste).....	103
Figura 40: Boxplots dos erros (a)MAE, (b)RMSE, (c)MdAE ST simuladas pelas técnicas utilizadas (modelo 2).....	108
Figura 41: Boxplots dos erros (a)MAE, (b)RMSE, (c)MdAE ST simuladas pelas técnicas utilizadas (modelo 1).....	108
Figura 42: Boxplots dos erros (a)MAE, (b)RMSE, (c)MdAE ST simuladas pelas técnicas utilizadas (modelo 2 em mesma escala que modelo 1)	109
Figura 43 - (a)FAC e (b)FACP dos resíduos quadráticos ARMA(1,2) dos log retornos da ITSA4, entre 2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)	127
Figura 44 - (a)FAC e (b)FACP dos resíduos ao quadrado ARMA(2,1) dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste).....	127
Figura 45 - (a)FAC e (b)FACP dos resíduos quadráticos ARMA(6,3) dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste).....	127
Figura 46 - (a)FAC e (b)FACP dos resíduos quadráticos ARMA(7,0) dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste).....	128
Figura 47: Previsão das variâncias diárias pelo ARMA(2,1)-GARCH(2,3) da ITSA4,entre 02-01-2019 e 30-06-2023 (período de validação)	129
Figura 48: Boxplots dos Resíduos ARMA(p,q)-GARCH(m,n) selecionados dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste).....	132
Figura 49: Histogramas dos resíduos padronizados selecionados dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste).....	132
Figura 50 - (a)Histograma e (b)Boxplot dos resíduos ARMA(1,2) dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018.....	134
Figura 51 - (a)Histograma e (b)Boxplot dos resíduos ARMA(2,1) dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018.....	134
Figura 52 - (a)Histograma e (b)Boxplot dos resíduos ARMA(6,3) dos log retornos da ITSA4, entre 2001 e 28-12-2018	134
Figura 53 - (a)Histograma e (b)Boxplot dos resíduos ARMA(7,0) dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018.....	134
Figura 54 - (a)FAC e (b)FACP dos resíduos ARMA(1,2) dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)	135
Figura 55 - (a)FAC e (b)FACP dos resíduos ARMA(2,1) dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)	135

Figura 56 - (a)FAC e (b)FACP dos resíduos ARMA(6,3) dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)	135
Figura 57 - (a)FAC e (b)FACP dos resíduos ARMA(7,0) dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)	135
Figura 58: Boxplot dos resíduos ARMA(p,q)-EGARCH(m,n) selecionados dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023.....	138
Figura 59 - (a)FAC e (b)FACP dos Retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018	139
Figura 60: (a)Histograma e (b)Boxplot dos resíduos ARMA(1,0) dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018.....	142
Figura 61: (a)Histograma e (b)Boxplot dos resíduos ARMA(0,1) dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018.....	142
Figura 62: (a)Histograma e (b)Boxplot dos resíduos ARMA(5,4) dos log retornos da PETR4, entre 2001 e 28-12-2018	142
Figura 63: (a)Histograma e (b)Boxplot dos resíduos ARMA(5,5) dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018.....	143
Figura 64: (a)FAC e (b)FACP dos resíduos ARMA(0,1) dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)	143
Figura 65: (a)FAC e (b)FACP dos resíduos ARMA(1,0) dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)	143
Figura 66: (a)FAC e (b)FACP dos resíduos ARMA(5,4) dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)	143
Figura 67: (a)FAC e (b)FACP dos resíduos ARMA(5,5) dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)	143
Figura 68: (a)FAC e (b)FACP dos resíduos ao quadrado ARMA(1,0) dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste).....	144
Figura 69: (a)FAC e (b)FACP dos resíduos quadráticos ARMA(0,1) dos log retornos da PETR4, entre 2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)	144
Figura 70: (a)FAC e (b)FACP dos resíduos quadráticos ARMA(5,4) dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste).....	144
Figura 71: (a)FAC e (b)FACP dos resíduos quadráticos ARMA(5,5) dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste).....	144
Figura 72: Previsão pelo ARMA(5,5)-GARCH(1,1) das variâncias dos retornos diárias da PETR4, entre 02-01-2019 e 30-06-2023 (período de validação).....	146
Figura 73: Boxplots dos Resíduos ARMA(p,q)-GARCH(m,n) selecionados dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste).....	148
Figura 74: Histogramas dos resíduos padronizados selecionados dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste).....	149
Figura 75: Boxplot dos resíduos padronizados ARMA(p,q)-EGARCH(m,n) selecionados dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023.....	152
Figura 76: (a)FAC e (b)FACP dos Retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018	153
Figura 77: Retornos ST simulada sem log modelo 1, versão 2 (períodos de treino e validação)	155
Figura 78: Retornos ST simulada sem log modelo 1, versão 1 (períodos de treino e validação)	155
Figura 79: Retornos ST simulada sem log modelo 1, versão 3 (períodos de treino e validação)	155
Figura 80: Retornos ST simulada sem log modelo 1, versão 4 (períodos de treino e validação)	155
Figura 81: Retornos ST simulada sem log modelo 1, versão 5 (períodos de treino e validação)	156
Figura 82: Retornos ST simulada sem log modelo 1, versão 6 (períodos de treino e validação)	156
Figura 83: Retornos ST simulada sem log modelo 1, versão 7 (períodos de treino e validação)	156
Figura 84: Retornos ST simulada sem log modelo 1, versão 8 (períodos de treino e validação)	156
Figura 85: Retornos ST simulada sem log modelo 1, versão 9 (períodos de treino e validação)	156
Figura 86: Retornos ST simulada sem log modelo 1, versão 10 (períodos de treino e validação) ..	157
Figura 87: Retornos ST simulada sem log modelo 2, versão 1 (períodos de treino e validação)	157
Figura 88: Retornos ST simulada sem log modelo 2, versão 2 (períodos de treino e validação)	157

Figura 89: Retornos ST simulada sem log modelo 2, versão 3 (períodos de treino e validação)	157
Figura 90: Retornos ST simulada sem log modelo 2, versão 4 (períodos de treino e validação)	157
Figura 91: Retornos ST simulada sem log modelo 2, versão 5 (períodos de treino e validação)	158
Figura 92: Retornos ST simulada sem log modelo 2, versão 6 (períodos de treino e validação)	158
Figura 93: Retornos ST simulada sem log modelo 2, versão 7 (períodos de treino e validação)	158
Figura 94: Retornos ST simulada sem log modelo 2, versão 8 (períodos de treino e validação)	158
Figura 95: Retornos ST simulada sem log modelo 2, versão 9 (períodos de treino e validação)	158
Figura 96: Retornos ST simulada sem log modelo 2, versão 10 (períodos de treino e validação) ..	158
Figura 97: Boxplot dos erros quadráticos das dez ST simuladas (modelo 1)	162
Figura 98: Boxplot dos retornos sem log das dez ST simuladas (modelo 1)	163
Figura 99: Boxplot dos retornos com log das dez ST simuladas (modelo 1)	163
Figura 100: Boxplot dos erros quadráticos das dez ST simuladas (modelo 2)	163
Figura 101: Boxplot dos retornos sem log das dez ST simuladas (modelo 2)	163
Figura 102: Boxplot dos retornos com log das dez ST simuladas (modelo 2)	164

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Artigos selecionados com análise de técnicas utilizadas e objetivos.....	43
Quadro 2 - Artigos selecionados com informações sobre os dados analisados, o pré-processamento e as métricas de erro.....	46
Quadro 3 - Resposta, nos artigos selecionados, às questões de pesquisa	50

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Medidas resumo da ITSA4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023.....	68
Tabela 2: Medidas resumo dos retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023.....	69
Tabela 3: Medidas resumo dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023.....	70
Tabela 4 - Hiperparâmetros da ITSA4 otimizados por AG da ESN, distribuições Uniforme e Normal	71
Tabela 5 - Capacidade preditiva da ESN da ITSA4, pelas distribuições Uniforme e Normal.....	72
Tabela 6 - Testes de verificação de tendência no ajuste dos log retornos da ITSA4	75
Tabela 7 - Critérios de Informação AIC, AICc e BIC dos ARMA selecionados de log retornos da ITSA4.....	75
Tabela 8 - Propriedades dos resíduos dos modelos ARMA selecionados dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste).....	76
Tabela 9 - Critérios de Informação AIC e BIC pela GED dos ARMA-EGARCH selecionados dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste).....	77
Tabela 10 - Propriedades dos resíduos padronizados ARMA(p,q)-EGARCH(m,n) selecionados dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste).....	77
Tabela 11 - Capacidade preditiva dos ARMA(p,q)-EGARCH(m,n) mais parcimoniosos do AIC e do BIC das variâncias diárias da ITSA4, entre 02-01-2019 e 30-06-2023 (período de validação)	78
Tabela 12 - Hiperparâmetros da ITSA4 otimizados por AG do ARMA(7,0)-ESN das épocas com menores MAE na validação, distribuições Uniforme, Normal, t de Student e GED.....	80
Tabela 13 - Hiperparâmetros da ITSA4 otimizados por AG do ARMA(2,1)-ESN das épocas com menores MAE na validação, distribuições Uniforme, Normal, t de Student e GED.....	80
Tabela 14 - Capacidade preditiva do ARMA(7,0)-ESN da ITSA4 das épocas com menores erros de teste MAE, distribuições Uniforme, Normal, t de Student e GED	82
Tabela 15 - Capacidade preditiva do ARMA(2,1)-ESN da ITSA4 das épocas com menores erros de teste MAE, distribuições Uniforme, Normal, t de Student e GED	82
Tabela 16: Capacidade preditiva dos melhores modelos de acordo com a técnica utilizada para ITSA4.....	84
Tabela 17: Medidas resumo da PETR4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023.....	85
Tabela 18: Medidas resumo dos retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023.....	87
Tabela 19: Medidas resumo dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023.....	88
Tabela 20 - Hiperparâmetros da PETR4 otimizados por AG da ESN, distribuições Uniforme e Normal	88
Tabela 21: Capacidade preditiva da ESN da PETR4, pelas distribuições Uniforme e Normal	89
Tabela 22 - Testes de verificação de tendência no ajuste dos log retornos da PETR4	91
Tabela 23 - Critérios de Informação AIC, AICc e BIC dos ARMA selecionados dos log retornos da PETR4.....	92
Tabela 24 - Propriedades dos resíduos dos modelos ARMA selecionados dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste).....	93
Tabela 25 - Critérios de Informação AIC e BIC pela GED dos ARMA-EGARCH e ARMA-CSGARCH selecionados dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)	93
Tabela 26 - Propriedades dos resíduos padronizados ARMA(p,q)-EGARCH(m,n) selecionados dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste).....	94
Tabela 27 - Capacidade preditiva dos ARMA(p,q)-EGARCH(m,n) mais parcimoniosos do AIC e do BIC das variâncias diárias da PETR4, entre 02-01-2019 e 30-06-2023 (período de validação)	95
Tabela 28 - Hiperparâmetros da PETR4 otimizados do ARMA(0,1)-ESN das épocas com menores MAE no teste, distribuições Uniforme, Normal, t de Student e GED	97
Tabela 29 - Hiperparâmetros da PETR4 otimizados por AG do ARMA(4,2)-ESN das épocas com menores MAE no teste, distribuições Uniforme, Normal, t de Student e GED.....	98

Tabela 30 - Capacidade preditiva do ARMA(0,1)-ESN da PETR4 das épocas com menores erros de teste MAE, distribuições Uniforme, Normal, t de Student e GED	98
Tabela 31 - Capacidade preditiva do ARMA(4,2)-ESN da PETR4 das épocas com menores erros de teste MAE, distribuições Uniforme, Normal, t de Student e GED	98
Tabela 32: Capacidade preditiva dos melhores modelos de acordo com a técnica utilizada da PETR4	101
Tabela 33: Medidas resumo dos dados brutos da ITSA4 e da PETR4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023.....	101
Tabela 34 - Medidas resumo dos retornos da ITSA4 e da PETR4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023	101
Tabela 35 - Medidas resumo de log retornos da ITSA4 e da PETR4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023	102
Tabela 36: Medidas resumo das métricas de erros das ST simuladas (modelo 1)	106
Tabela 37: Medidas resumo das métricas de erros das ST simuladas (modelo 2)	107
Tabela 38: Testes de Wilcoxon por modelo, com técnicas par a par e por modelo, para as ST simuladas.....	109
Tabela 39 - Propriedades dos resíduos padronizados dos modelos ARMA(p,q)-GARCH(m,n) selecionados dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste).....	128
Tabela 40 - Capacidade preditiva do modelo ARMA(2,1)-GARCH(2,3), mais parcimonioso pelo BIC, da variância dos retornos diária da ITSA4, entre 02-01-2019 e 30-06-2023 (período de validação)	128
Tabela 41 - Critérios de Informação do ARMA(7,0)-GARCH(m,n) dos log retornos da ITSA4, distribuições de probabilidade GED e t de Student	129
Tabela 42 - Critérios de Informação do ARMA(6,3)-GARCH(m,n) dos log retornos da ITSA4, distribuições de probabilidade GED e t de Student	130
Tabela 43 - Critérios de Informação do ARMA(2,1)-GARCH(m,n) dos log retornos da ITSA4, distribuições de probabilidade GED e t de Student	130
Tabela 44 - Critérios de Informação do ARMA(1,2)-GARCH(m,n) dos log retornos da ITSA4, distribuições de probabilidade GED e t de Student	131
Tabela 45 - Medidas resumo dos resíduos padronizados ARMA(p,q)-GARCH(m,n) selecionados dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018	131
Tabela 46 - Propriedades dos resíduos dos modelos ARMA(p,q)-GARCH(m,n) selecionados dos log retornos da ITSA4, pelas distribuições GED e t de Student, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)	132
Tabela 47 - Critérios de Informação dos log retornos da ITSA4	133
Tabela 48 - Medidas resumo dos resíduos ARMA(7,0), ARMA(6,3), ARMA(2,1) e ARMA(1,2) dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste).....	134
Tabela 49 - Critérios de Informação do ARMA(7,0)-EGARCH(m,n) dos log retornos da ITSA4, distribuições de probabilidade GED e t de Student	136
Tabela 50 - Critérios de Informação do ARMA(6,3)-EGARCH(m,n) dos log retornos da ITSA4, distribuições de probabilidade GED e t de Student	136
Tabela 51 - Critérios de Informação do ARMA(2,1)-EGARCH(m,n) dos log retornos da ITSA4, distribuições de probabilidade GED e t de Student	137
Tabela 52 - Critérios de Informação do ARMA(1,2)-EGARCH(m,n) dos log retornos da ITSA4, distribuições de probabilidade GED e t de Student	137
Tabela 53 - Medidas resumo dos resíduos padronizados ARMA(p,q)-EGARCH(m,n) selecionados dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)	138
Tabela 54 - Critérios de Informação dos retornos da ITSA4	139
Tabela 55 - Propriedades dos resíduos dos modelos ARMA selecionados dos retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste).....	140
Tabela 56 - Critérios de Informação dos log retornos da ITSA4	141

Tabela 57 - Medidas resumo dos resíduos ARMA(5,5), ARMA(5,4), ARMA(1,0) e ARMA(0,1) dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste).....	143
Tabela 58 - Propriedades dos resíduos padronizados dos modelos ARMA(p,q)-GARCH(m,n) selecionados dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste).....	145
Tabela 59 - Capacidade preditiva do modelo ARMA(5,5)-GARCH(1,1), mais parcimonioso pelo BIC, da variância diária da PETR4, entre 02-01-2019 e 30-06-2023 (período de validação).....	145
Tabela 60 - Critérios de Informação do ARMA(5,4)-GARCH(m,n) dos log retornos da PETR4, distribuições de probabilidade GED e t de Student	146
Tabela 61 - Critérios de Informação do ARMA(5,5)-GARCH(m,n) dos log retornos da PETR4, distribuições de probabilidade GED e t de Student	146
Tabela 62 - Critérios de Informação do ARMA(0,1)-GARCH(m,n) dos log retornos da ITSA4, distribuições de probabilidade GED e t de Student	147
Tabela 63 - Critérios de Informação do ARMA(1,0)-GARCH(m,n) dos log retornos da PETR4, distribuições de probabilidade GED e t de Student	147
Tabela 64 - Medidas resumo dos resíduos padronizados ARMA(p,q)-GARCH(m,n) selecionados dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018	148
Tabela 65 - Propriedades dos resíduos padronizados dos modelos ARMA(p,q)-GARCH(m,n) selecionados dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste).....	149
Tabela 66 - Critérios de Informação do ARMA(5,5)-EGARCH(m,n) dos log retornos da PETR4, distribuições de probabilidade GED e t de Student	150
Tabela 67 - Critérios de Informação do ARMA(5,4)-EGARCH(m,n) dos log retornos da PETR4, distribuições de probabilidade GED e t de Student	150
Tabela 68 - Critérios de Informação do ARMA(0,1)-EGARCH(m,n) dos log retornos da PETR4, distribuições de probabilidade GED e t de Student	151
Tabela 69 - Critérios de Informação do ARMA(1,0)-EGARCH(m,n) dos log retornos da PETR4, distribuições de probabilidade GED e t de Student	151
Tabela 70 - Medidas resumo dos resíduos padronizados ARMA(p,q)-EGARCH(m,n) selecionados dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)	152
Tabela 71 - Critérios de Informação dos retornos da PETR4	153
Tabela 72 - Propriedades dos resíduos dos modelos ARMA selecionados dos retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste).....	154
Tabela 73: Resultados das métricas de erros por técnica (modelo 2), das ST simuladas	160
Tabela 74: Medidas resumo das dez ST simuladas com log (modelo 1), das ST simuladas	160
Tabela 75: Medidas resumo das dez ST simuladas sem log (modelo 2), das ST simuladas.....	161
Tabela 76: Medidas resumo dos erros quadráticos das dez ST simuladas sem log (modelo 1), das ST simuladas.....	161
Tabela 77: Medidas resumo das dez ST simuladas com log (modelo 2), das ST simuladas	161
Tabela 78: Medidas resumo das dez ST simuladas sem log (modelo 2), das ST simuladas.....	162
Tabela 79: Medidas resumo dos erros quadráticos das dez ST simuladas sem log (modelo 2), das ST simuladas.....	162

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ADF	<i>Augmented Dickey-Fuller</i>
AG	Algoritmo Genético
AI	Artificial Intelligence
AIC	<i>Akaike Information Criteria</i>
AICc	<i>Akaike Information Criteria Corrected</i>
AM	Aprendizado de Máquina
ANN	<i>Artificial Neural Network</i>
ARCH	<i>Autoregressive Conditional Heteroscedastic</i>
ARIMA	<i>Autoregressive Integrated Moving Average</i>
ARMA	<i>Autoregressive Moving Average</i>
B3	Brasil, Bolsa, Balcão
BIC	<i>Bayesian Information Criteria</i>
CR	Computação de Reservatório
CSGARCH	<i>Component Standard GARCH</i>
CVM	Comissão de Valores Mobiliários
DL	<i>Deep Learning</i>
DMD	<i>Dynamic Mode Decomposition</i>
DNN	<i>Deep Neural Network</i>
EGARCH	<i>Exponential GARCH</i>
ESN	<i>Echo State Network</i>
ESP	<i>Echo State Properties</i>
FAC	Função de Autocorrelação
FACP	Função de Autocorrelação Parcial
GARCH	<i>Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic</i>
GED	<i>Generalized Error Distribution</i>
GGD	<i>Generalized Gaussian Distribution</i>
GJRGARCH	Glosten-Jagannathan-Runkle GARCH
GRU	<i>Gated Recurrent Unit</i>
HAR	<i>Heterogeneous Autoregressive</i>
ITSA4	Thicker do conglomerado Itaú S.A. na B3
JSCP	Juros sobre Capital Próprio
KPSS	Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin
LSESN	<i>Long-Short (Term) Echo State Networks</i>
LSM	<i>Liquid State Machine</i>
LSTM	<i>Long-Short Term Memory</i>
MA	<i>Moving Average</i>
MAE	<i>Mean Absolute Error</i>
MdAE	<i>Median Absolute Error</i>
MLP	<i>Multilayer Perceptron</i>
NAN	<i>Not a Number</i>
NYSE	<i>New York Stock Exchange</i>
ON	Ordinárias Nominativas
PETR4	Thicker da Petrobrás na B3
PN	Preferenciais Nominativas
PSO	<i>Particle Swarm Algorithm</i>
RMSE	<i>Root Mean Squared Error</i>
RNA	Redes Neurais Artificiais
RNEE	Redes Neurais de Estados de Eco
RNR	Rede Neural Recorrente
RVESN	<i>Robust Variational Echo State Network</i>

S&P	<i>Standard and Poor's</i>
SSA	<i>Sparrow Search Algorithm</i>
ST	<i>Série Temporal</i>
TGARCH	<i>Threshold GARCH</i>
VAR	<i>Vector Auto-Regressive</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

R_t	Retornos
r_t	Log retornos
p_t	Preço (da ação) no tempo atual
p_{t-1}	Preço (da ação) no tempo imediatamente anterior
$\vec{u}(t)$	Vetor de entrada no tempo t
$\vec{x}(t)$	Vetor de estado no tempo t
$\vec{y}(t)$	Vetor de saída no tempo t
W^{in}	Matriz dos pesos da camada de entrada para o reservatório
D	Dimensão de entrada
W	Matriz dos pesos do reservatório
N	Número de neurônios
W^{out}	Matriz dos pesos da camada de saída do reservatório
L	Dimensão de saída
$s(t)$	Estados de ativação internos
S^+	Pseudo-inversa de $s(t)$
δ	Pequena constante de regularização
EE	Escala de Entrada
sr	Raio espectral de W
s	Esparsidade de W
$\lambda_{max}(W)$	Maior autovalor de W
Y_t	t -ésimo valor observado de uma série temporal
μ	Média
i	Defasagem do processo auto-regressivo
j	Defasagem do processo de médias móveis
ϕ_i	Coefficiente da parcela auto-regressiva na i -ésima defasagem
θ_j	Coefficiente da parcela de médias móveis na j -ésima defasagem
p	Ordem do processo auto-regressivo
q	Ordem do processo de médias móveis
ε_t	Erro no t -ésimo tempo
B	Operador de retardo
a_t	Inovação
h_t	Variância condicional dos retornos
α	Coefficiente GARCH que captura o efeito de choques passados (curto prazo)

β	Coeficiente GARCH que captura o efeito da variância passada (memória longa)
a	Limite inferior da distribuição Uniforme
b	Limite superior da distribuição Uniforme
ω	Constante ou intercepto do modelo EGARCH
α_t	Coeficiente da sensibilidade da volatilidade aos choques passados no EGARCH
β_t	Coeficiente da dependência temporal da volatilidade no EGARCH
γ_t	Coeficiente da assimetria da volatilidade no EGARCH
DP	Função que calcula o desvio padrão de X
E(X)	Função que calcula a esperança de X
Var(X)	Função que calcula a variância de X
Γ	Função matemática gama que estende o conceito de fatorial para números reais

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO	21
1.1 Apresentação do tema	21
1.2 Problematização	23
1.3 Hipótese	25
1.4 Objetivos	25
1.4.1 Objetivo geral.....	25
1.4.2 Objetivos específicos	25
1.5 Justificativa	25
1.6 Estrutura do trabalho	27
2 - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	28
2.1 Echo State Network-ESN	29
2.2 ARIMA-GARCH	33
2.3 Técnicas de modelagem híbrida	36
2.4 Distribuições de probabilidade	36
2.4.1 Distribuições de probabilidade contínuas	36
2.4.2 Distribuições de probabilidade utilizadas para gerar pesos aleatórios na ESN	38
a) <i>Distribuição Uniforme</i>	38
b) <i>Distribuição Normal</i>	38
c) <i>Distribuição t de Student</i>	38
d) <i>Distribuição Generalizada dos Erros</i>	38
2.5 Medição de erros como forma de avaliação da precisão	39
2.6 Revisão da literatura	40
2.6.1 Organização da revisão sistemática e critérios de seleção dos artigos.....	40
2.6.2 Artigos selecionados e informações relevantes	41
2.6.3 Bibliometria.....	50
2.6.4 Meta-Síntese.....	52
2.6.5 Atualização da literatura.....	58
3 - ESTUDOS DE CASO: METODOLOGIA E RESULTADOS	60
3.1 Obtenção e análise dos dados	60
3.2 Tratamento e separação dos dados	61
3.3 Métodos de modelagem	61
3.3.1 ESN	61
3.3.2 ARIMA(p,d,q)-EGARCH(m,n) para previsão da volatilidade.....	63
3.3.3 Híbrido proposto	66
3.4 Resultados obtidos nos estudos de caso	67
3.4.1 Análise exploratória dos dados da ITSA4	67
a) <i>Dados brutos</i>	67
b) <i>Retornos</i>	69
c) <i>Log retornos</i>	70
3.4.2 Modelagem ESN com retornos para previsão da volatilidade da ITSA4	71
3.4.3 Modelagem ARMA(p,q)-EGARCH(m,n) com log retornos para previsão da volatilidade da ITSA4	74
a) <i>Ajuste de modelos ARMA(p,q)</i>	74
b) <i>Ajuste de modelos EGARCH(m,n)</i>	76
3.4.4 Modelagem ARMA(p,q)-ESN com retornos para previsão da volatilidade da ITSA4	79
a) <i>Modelagem ARMA(p,q)</i>	79
b) <i>Modelagem ESN</i>	79
3.4.5 Discussão da ITSA4	84
3.4.6 Análise exploratória dos dados da PETR4	85

a) Dados brutos	85
b) Retornos.....	86
c) Log retornos.....	87
3.4.7 Modelagem ESN com retornos para previsão da volatilidade da PETR4	88
3.4.8 Modelagem ARMA(p,q)-EGARCH(m,n) com log retornos para previsão da volatilidade da PETR4	91
a) Ajuste de modelos ARMA(p,q).....	91
b) Ajuste de modelos EGARCH(m,n).....	93
3.4.9 Modelagem ARMA(p,q)-ESN com retornos para previsão da volatilidade da PETR4	95
a) Modelagem ARMA(p,q)	95
b) Modelagem ESN.....	96
3.4.10 Discussão da PETR4	100
3.4.11 Discussão comparativa entre ITSA4 e PETR4	101
a) Análise exploratória comparativa dos dados da ITSA4 e da PETR4	101
b) Análise comparativa da capacidade preditiva das técnicas aplicadas nas ações da ITSA4 e da PETR4	102
c) Análise comparativa das distribuições aplicadas na ITSA4 e na PETR4	103
4 - SÉRIES TEMPORAIS SIMULADAS	104
4.1 Geração das séries temporais simuladas	104
4.2 Análise exploratória dos dados simulados.....	105
4.3 Ajuste de modelos ARMA(p,q)-EGARCH(m,n).....	105
4.4 Resultados obtidos nas séries temporais simuladas.....	105
4.5 Sobre tempo de processamento	110
5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS	111
REFERÊNCIAS.....	114
APÊNDICES.....	126
APÊNDICE A	127
a) Análise das FAC e das FACP dos resíduos quadráticos do modelo ARMA(p,q) da ITSA4	127
b) Ajuste de Modelos GARCH(m,n) da ITSA4	128
c) Critérios de informação dos modelos ARMA(p,q)-GARCH(m,n) da ITSA4 e análise dos resíduos	129
APÊNDICE B	133
a) Critérios de informação dos modelos ARMA(p,q) da ITSA4 com log retornos gerados	133
APÊNDICE C	135
a) Análise dos resíduos do modelo ARMA(p,q) da ITSA4 com log retornos	135
APÊNDICE D	138
a) Critérios de informação dos modelos ARMA(p,q)-EGARCH(m,n) e análise dos resíduos da ITSA4	138
APÊNDICE E	141
a) Critérios de informação dos modelos ARMA(p,q) com retornos gerados da ITSA4	141
APÊNDICE F	143
a) Critérios de informação dos modelos ARMA(p,q) da PETR4 com log retornos	143
APÊNDICE G	144
a) Análise dos resíduos do modelo ARMA(p,q) da PETR4 com log retornos.....	144
APÊNDICE H	147

a) <i>Análise das FAC e das FACP dos resíduos quadráticos do modelo ARMA(p,q) da PETR4</i>	147
b) <i>Ajuste de Modelos GARCH(m,n) da PETR4</i>	148
c) <i>Critérios de informação dos modelos ARMA(p,q)-GARCH(m,n) da PETR4 e análise dos resíduos</i>	149
APÊNDICE I	153
a) <i>Critérios de informação dos modelos ARMA(p,q)-EGARCH(m,n) e análise dos resíduos da PETR4</i>	153
APÊNDICE J	156
a) <i>Critérios de informação dos modelos ARMA(p,q) com retornos gerados da PETR4</i>	156
APÊNDICE K	158
a) <i>ST simuladas dos retornos (modelo 1)</i>	158
b) <i>ST simuladas dos retornos (modelo 2)</i>	160
c) <i>Resultados das ST simuladas (modelo 1) para análise descritiva</i>	160
d) <i>Resultados das ST simuladas (modelo 2) para análise descritiva</i>	163
.....e) <i>Tabela resumo das medidas estatísticas das ST simuladas com log (modelo 1)</i>	163
f) <i>Tabela resumo das medidas estatísticas das ST simuladas sem log (modelo 1)</i>	164
g) <i>Tabela resumo das medidas estatísticas dos erros quadráticos das ST simuladas (modelo 1)</i>	164
h) <i>Tabela resumo das medidas estatísticas das ST simuladas com log (modelo 2)</i>	164
i) <i>Tabela resumo das medidas estatísticas das ST simuladas sem log (modelo 2)</i>	165
j) <i>Tabela resumo das medidas estatísticas dos erros quadráticos das ST simuladas (modelo 2)</i>	165
k) <i>Assimetria dos erros quadráticos das ST simuladas (modelo 1)</i>	165
l) <i>Assimetria dos retornos sem log das ST simuladas (modelo 1)</i>	166
m) <i>Assimetria dos retornos com log das ST simuladas (modelo 1)</i>	166
n) <i>Assimetria dos erros quadráticos das ST simuladas (modelo 2)</i>	166
o) <i>Assimetria dos retornos sem log das ST simuladas (modelo 2)</i>	166
p) <i>Assimetria dos retornos com log das ST simuladas (modelo 2)</i>	167
APÊNDICE L	168
a) <i>Análise exploratória dos dados</i>	168
b) <i>Modelagem da ESN</i>	168
c) <i>Modelagem do ARMA(p,q)-EGARCH(m,n) para previsão da volatilidade</i>	169
d) <i>Modelagem híbrida proposta</i>	171
e) <i>Séries temporais simuladas</i>	171
f) <i>Resultados obtidos nas séries temporais simuladas</i>	172

1 - INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação do tema

A modelagem de um fenômeno permite conhecê-lo e pode ajudar a fazer planejamento de curto, médio e/ou longo prazo, principalmente se ele estiver representado por uma série temporal (ST), que nada mais é, segundo Morettin; Toloí (2018), do que um conjunto de observações ordenadas ao longo de um intervalo de tempo. Ao modelar uma ST busca-se encontrar algum padrão de comportamento na sequência de dados passados, entre os quais: tendência, sazonalidade, ciclos ou ruído (aleatoriedade) (Hyndman; Athanasopoulos, 2021).

Existem diversas técnicas para modelar e fazer previsões, sejam matemáticas, estatísticas, computacionais ou híbridas (Slater *et al.*, 2022), amplamente utilizadas na literatura. Em relação a previsões, como na modelagem, também existem diversas técnicas matemáticas, estatísticas, computacionais e híbridas (Slater *et al.*, 2022).

Entre os modelos matemáticos, pode-se citar o trabalho sobre previsão numérica do tempo de Bauer *et al.* (2015). Entre os modelos estatísticos, pode-se citar a regressão linear aumentada apresentada por Ristanoski; Liu; Bailey (2013), a qual pode ser utilizada para modelar e fazer previsões. Entre os modelos híbridos pode-se citar o trabalho de Babu; Reddy (2014), que fez uso de um modelo ARIMA-ANN (*Autoregressive Integrated Moving Average-Artificial Neural Network*) para previsão de ST. Entre os modelos computacionais, podem ser citadas Redes Neurais Artificiais (RNA), as quais tentam emular os neurônios do cérebro humano e, ao utilizarem algoritmos, tentam reconhecer padrões escondidos e correlações entre dados e são utilizadas para realizar os mais diversos tipos de previsões, como por exemplo, as financeiras (Kumar, Jain; Singh, 2021).

A viabilidade computacional para aplicação das RNAs para previsões de ST financeiras é mais recente do que das técnicas estatísticas, utilizadas há décadas, mas ambas buscam otimizar resultados e minimizar erros. Dentre as RNAs, destacam-se as Redes Neurais Recorrentes (RNR) que se utilizam de memória dos dados anteriores. Na previsão do preço de ações, por exemplo, isto se faz necessário, porque o preço de uma ação, no decorrer do tempo, é influenciado pelo seu preço anterior. Entre as RNR, as Redes de Estados de Eco (ou, como são mais conhecidas, *Echo State Networks* - ESN, em inglês) podem alcançar um bom desempenho para predizer/prever valores por não necessitarem de treinamento, um grande problema nas RNR (Bissaro; Jin; Carneiro, 2021). Este desempenho pode ser visto em: previsões financeiras com ESNs em Barin (2024) e Dan *et al.* (2014).

A ESN apresenta bom desempenho quando comparada com outras redes neurais e assim como no Aprendizado de Máquina (AM, *Machine Learning*-ML, em inglês), existe uma forma de aprendizado profundo (*Deep Learning*-DL, em inglês) para ESN, nomeada *DeepESN*. Portanto, uma comparação com métodos que utilizem RNAs de aprendizado profundo não seria justa com a ESN

pura/simples. Mas quando se compara ESN com ANN ou LSTM (*Long-Short Term Memory*), por exemplo, como em Chattopadhyay; Hassanzadeh; Subramanian (2020), o desempenho da ESN é melhor. Em Wang *et al.* (2021) o desempenho da ESN também é melhor se comparado com a LSTM.

Ações são valores mobiliários que representam propriedade de uma empresa pelos acionistas (Wang, 2021), podendo ser comercializadas em uma Bolsa de Valores ou em um mercado de balcão (Ortiz, 2022). Sua negociação permite às empresas captar recursos financeiros por meio da venda de ações e títulos. Assim, o Mercado de Ações ou de Balcão é onde ocorrem as transações de compra e de venda. Existem diferentes Bolsas de Valores ao redor do mundo, como a NYSE (*New York Stock Exchange*), a Bolsa de Valores de Xangai, a Bolsa de Valores de ShenZhen e a B3 (Brasil, Bolsa, Balcão), entre outras. A negociação de ações de empresas brasileiras é feita na B3.

Mais especificamente as Bolsas de Valores são responsáveis pela movimentação de enormes quantidades de recursos financeiros ao redor o mundo (Harris, 1997), movimentações estas que são devidamente registradas, de maneira pública. Estes registros geram uma grande quantidade de dados (*big data*) sobre as ações disponíveis para negociação, que precisam ser analisados, modelados, comparados, previstos etc. Em todos os dias úteis há negociações de ações nas Bolsas de Valores, e os preços, tomados em sequências, geram ST. Estas podem ser do volume negociado, dos preços de abertura ou de fechamento, do preço mais alto ou mais baixo no dia, do preço médio diário negociado, do preço a cada minuto etc. Uma das ST mais utilizadas para análises a médio e longo prazo é a do preço de fechamento diário, por ser considerada uma boa representação dos valores negociados no dia (Hu; Zhao; Khushi, 2021; Kapoor; Rastogi; Kashyap, 2020).

De acordo com Machado (2020), o tipo de análise de preço de ações que se utiliza da estatística chama-se análise técnica, sendo diferente da análise fundamentalista (Vachhani *et al.* 2020), a qual se baseia em dados financeiros da empresa. Ambas análises podem utilizar-se da Inteligência Artificial (IA, *Artificial Intelligence-AI*, em inglês).

A análise técnica baseia-se nos dados gerados pela Bolsa de Valores. Estes nunca são revisados por empresas porque dependem apenas das negociações na bolsa e não de balanços, balancetes, relatórios ou outras formas de divulgação de dados que representem a saúde financeira de uma empresa. Esta análise geralmente é recomendada para aplicações de curto prazo (algumas semanas), ou de curtíssimo prazo (semanal, diária ou mesmo minutos, *day trade*). A análise técnica pode fazer previsão dos preços de uma ação a partir dos preços passados da própria ação, ou até de outros ativos financeiros. Fazer qualquer previsão é uma tarefa difícil, e a previsão de ações também não é fácil, especialmente devido à volatilidade, ou seja, a frequente variação dos preços que podem provocar ganhos e perdas no valor da ação (Morettin, 2017).

O conhecimento sobre a volatilidade de uma determinada ação pode influenciar o investidor a comprá-la ou não. Se uma ação é mais volátil, implica a possibilidade de maiores perdas ou maiores ganhos, e o inverso também se aplica a uma ação menos volátil.

De acordo com Polo; Caballero; Gómez (2015), as RNAs “são consideradas mais robustas, especialmente na representação de relações complexas que exibem comportamentos não lineares”, o que, supostamente, pode oferecer um melhor desempenho na previsão.

Com a melhora da capacidade de processamento computacional ocorrido entre as décadas de 2000 e 2020, as RNAs começaram a ter um uso maior, o que também permitiu o surgimento de modelos híbridos, ou seja, RNAs associadas com técnicas já existentes. Tem-se percebido, no decorrer do tempo, que melhores resultados podem ser obtidos mesclando modelos linear e não linear (Liu *et al.*, 2018; Huang; Wang; Huang, 2021; Fazla; Aydin; Kozat, 2022).

1.2 Problematização

Sistemas que evoluem no tempo ou no espaço de acordo com leis probabilísticas são chamados de processos estocásticos (Hänggi; Thomas, 1982), incluindo ST, cuja compreensão é útil para tomadas de decisões que dependem de estimativas de valores futuros. Portanto, para o mercado de ações é interessante utilizar modelos com melhor capacidade preditiva, que auxiliem na tomada de decisões sobre os ativos.

O comportamento de uma ação é considerado, geralmente, um sistema dinâmico-estocástico (Nti; Adekoya; Weyori, 2020). Um sistema dinâmico pode ser modelado como determinístico (previsão precisa, baseados em equações) ou como estocástico (previsão nem sempre pode ser realizada, pois possui uma aleatoriedade inerente, refletindo as incertezas inerentes a cenários do mundo real), linear (função que o descreve satisfaz duas propriedades: aditividade e homogeneidade) ou não-linear (função que o descreve não satisfaz as duas propriedades anteriores, tampouco uma combinação de soluções lineares conseguirá gerar uma solução não-linear) e discreto (estados finitos que podem mudar abruptamente de um para outro) ou contínuo (estados infinitos que não mudam abruptamente de um para outro). Ele também pode ser modelado como autônomo (um sistema de equações diferenciais ordinárias, que não depende da variável independente e não possui entrada externa, evoluindo sempre de acordo com a mesma lei imutável) (Manjunath; Tiño; Jaeger, 2012) ou não autônomo (sistemas que são forçados externamente por entradas dependentes do tempo ou exibem uma mudança temporal em suas equações de atualização, isto é, incluindo entradas externas que são temporalmente quase periódicas, estocásticas, ou são eles próprios caóticos) (Hunt; Ott, 2015) (Santa Fé Institute, s.d.).

Em um sistema dinâmico determinístico caótico as previsões podem ser feitas com precisão no curtíssimo/curto prazo. Para períodos mais longos apresenta aleatoriedade e é não-autônomo, como a previsão atmosférica, por exemplo. A ESN presta-se para modelar sistemas dinâmicos determinísticos caóticos (Vlachas *et al.*, 2020).

As previsões orientadas por dados, tanto por RNA quanto por técnicas estatísticas, não são precisas, justamente por tentarem modelar sistemas não lineares, que podem ser dinâmicos estocásticos ou dinâmicos determinísticos caóticos.

Uma RNR que tem se destacado na modelagem de sistemas dinâmicos determinísticos caóticos não lineares é a ESN. Originalmente, foi proposta por Jaeger (2001) e utilizada para diversos fins, como modelar sistemas caóticos não lineares (Schrauwen; Verstraeten; Van Campenhout, 2007; Ferreira *et al.*, 2008).

Além da diferença entre os sistemas dinâmicos e das técnicas de modelagem, há diferenças no uso das técnicas estatísticas e das computacionais quando se modelam ST financeiras para previsão. As técnicas estatísticas para modelagem de ações trabalham com os retornos porque estes são livres de escala e possuem propriedades como estacionariedade e ergodicidade (Morettin; Toloí, 2018), necessárias aos modelos de Box-Jenkins. Já as técnicas computacionais (RNA) trabalham diretamente com os preços das ações (dados brutos ou padronizados) para facilitar o cálculo dos pesos neuronais (Gandhmal; Kumar, 2019).

Entre os métodos disponíveis atualmente, uma das melhores ferramentas estatísticas de modelagem para previsão de ST financeiras é o modelo híbrido estatístico-estatístico, resultante da combinação ARIMA-GARCH (*Autoregressive Integrated Moving Average-Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic*). Eles são oriundos dos estudos de Box; Jenkins (1976) e de Bollerslev (1986), e têm sido usado com bastante sucesso na modelagem da volatilidade de ativos financeiros, como por exemplo, em Mohandas (2023) e em Feng (2023). Nestes casos, ARIMA modela a parte linear e GARCH, a não linear (volatilidade) (Morettin; Toloí, 2020). No entanto, no uso de técnicas de IA, mais precisamente de RNA ou de AM, é mais comum que se modele ambas partes concomitantemente (Yolcu; Egrioglu; Aladag, 2013).

Deste tipo de problema podem emergir as seguintes questões:

- Seria viável utilizar modelo híbrido separando a parte linear da não linear para realizar previsões da volatilidade do preço de ações?
- O modelo híbrido conduziria sempre a melhores resultados ou, ao menos, alcançaria o que as técnicas atuais já alcançam?

- Neste caso, seria possível melhorar a capacidade preditiva de modelos gerados por ESNs associando-se ARIMA para prever/prever o comportamento de ST relacionadas ao preço de fechamento de ações?

1.3 Hipótese

Diante do exposto, a hipótese científica proposta neste estudo é a seguinte: é possível melhorar a capacidade preditiva de modelos de séries temporais gerados por ESN associando-a ao ARIMA.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo geral

Analisar o comportamento de séries temporais do preço de ações, aprimorando a capacidade preditiva de modelos baseados em Redes Neurais de Estados de Eco (RNEE) por meio de sua integração ao modelo ARIMA.

1.4.2 Objetivos específicos

Para alcançar o objetivo geral, os objetivos específicos a seguir devem ser atingidos:

- Modelar séries temporais dos retornos do preço das ações ITSA4 e PETR4 por meio da ESN e do ARIMA-GARCH, separadamente, para previsão da volatilidade;
- Propor um modelo híbrido aplicável à previsão da volatilidade de ações;
- Aplicar o modelo híbrido proposto em séries temporais simuladas e reais do preço de ações analisando sua capacidade preditiva e precisão;
- Comparar os resultados da previsão de volatilidade do modelo híbrido proposto com resultados do modelo ARIMA-GARCH e da própria ESN aplicados a séries temporais simuladas e reais, a fim de analisar o que for encontrado baseando-se nas métricas.

1.5 Justificativa

Previsões auxiliam a preparar-nos para o que está por vir. Mesmo que não sejam perfeitas, ao menos norteiam possibilidades mais aproximadas do que poderá acontecer. Previsões atmosféricas, por exemplo, podem ter os mais diversos usos, como prevenir tragédias ou melhorar resultados da produção de alimentos.

O Mercado de Ações se baseia na obtenção de lucro e minimização de prejuízos, razão pela qual os investidores têm interesse em prever as flutuações eventuais do preço das ações. A capacidade de prever estas flutuações pode fornecer uma vantagem estratégica para os investidores, permitindo a tomada de decisões mais consistentes relativas à compra, venda ou retenção desses ativos, reduzindo riscos e aumentando a lucratividade. Portanto, compreender e prever o comportamento de ativos

financeiros é de extrema importância para uma gestão eficiente de investimentos no mercado financeiro.

O uso de RNA começa a apontar um crescimento exponencial nos dias atuais e, em algum tempo, pequenos avanços em IA provocarão grandes mudanças econômicas, ambientais, governamentais, sociais, individuais e tantas outras. No entanto, o uso na previsão de ST financeiras não é bem explorado, diante de toda a potencialidade existente. Além disso, o atual uso, crescente, de robôs de investimentos, que analisam o momento atual da ação e investem por conta própria utilizando Inteligência Artificial, poderá vir a utilizar como base de apoio a técnica híbrida proposta aqui.

Existem diversas técnicas computacionais de AM que foram propostas para previsão de ST, mas existe um consenso de que as melhores utilizam memória longa, como as RNR, e dentre essas uma tem se destacado, a LSTM (*Long-Short Term Memory*, Memória de Longo-Curto Prazo em português). O uso da memória se justifica devido à autocorrelação entre os valores da ST, pois o valor de uma ação em determinado momento é influenciado pelo(s) valor(es) anterior(es). No entanto, as RNR têm o problema de precisar de um tempo de treinamento maior do que outras RNA, entre as RNRs, citam-se a LSTM, a GRU (*Gated Recurrent Unit*), a DeepRNR. Entre essas, as diferenças básicas ficam entre a quantidade de portas, a capacidade de memória longa, a complexidade computacional, o tempo de execução e o desempenho (GERS; SCHMIDHUBER; CUMMINS, 1999, CHUNG *et al.*, 2014, GHODSI, 2023, SHIRI *et al.*, 2024). Mas, existe uma RNR que não possui o problema do tempo de treinamento, não possui uma codificação complexa, com baixíssimo tempo de execução, com bom desempenho e sem perder a vantagem de possuir memória, a ESN. Além disso, as ações apresentam uma parte aleatória embutida em seus dados e a ESN se presta para modelar sistemas dinâmicos determinísticos caóticos, o que poderia ajudar em lidar com essa aleatoriedade.

Por outro lado, os modelos ARIMA-GARCH financeiras, sendo utilizadas em conjunto. Nesta metodologia, ARIMA modela melhor a linearidade, sendo recomendado utilizar GARCH em seus resíduos para captar o movimento não linear. Entretanto, existem exigências a serem cumpridas que limitam sua utilização. A ST analisada deve ser estacionária e ergódica (Morettin; Toloi, 2020), além dos resíduos da modelagem ARIMA serem independentes e estes resíduos quadráticos serem autocorrelacionados (Morettin; Toloi, 2020).

Por outro lado, a ESN, acredita-se, modela melhor a não linearidade e não depende das restrições obrigatórias do ARIMA-GARCH. Segundo Hossain *et al.* (2009), a camada oculta de uma RNA pode capturar todos relacionamentos não-diretos entre as variáveis de entrada e saída, embora, aparentemente, ESN possa ter mais dificuldade em lidar com retornos do que com dados brutos.

Ambos os métodos apresentam limitações e a utilização de um modelo híbrido pode amenizá-las, propiciando a geração de modelos com melhor capacidade preditiva. Além disso, a metodologia híbrida a ser proposta poderá ser utilizada para modelar qualquer ST que tenha seu movimento composto por movimento linear e não linear, fornecendo subsídios para uma tomada de decisões mais precisa e com menos risco.

1.6 Estrutura do trabalho

O trabalho foi estruturado em cinco capítulos e doze apêndices, a saber:

- Capítulo 1: apresenta o trabalho desenvolvido, justificando o tema escolhido, além de mostrar sua importância e a definição do problema, da hipótese, dos objetivos alcançados e sua estruturação;
- Capítulo 2: trata da revisão de literatura. São feitas considerações gerais sobre tratamento de dados financeiros, modelos computacionais, modelos estatísticos e modelos híbridos. Também é apresentada uma revisão sistemática sobre o tema para caracterizar o estado da arte;
- Capítulo 3: descreve a metodologia utilizada na implementação dos modelos estatístico (ARIMA-EGARCH) e computacional (ESN), apresentando o modelo híbrido e sua metodologia de implementação, bem como, apresenta e discute resultados de dois estudos de caso com a aplicação das três técnicas descritas;
- Capítulo 4: apresenta dois estudos de simulação, comparando as três técnicas de modelagem;
- Capítulo 5: finaliza o trabalho e mostra as conclusões oriundas do desenvolvimento desta tese, apresentando recomendações para futuros trabalhos relacionados ao tema;
- Apêndices: completando a estruturação são apresentados apêndices com informações complementares e resultados da aplicação das técnicas.

2 - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Dentre as formas de fazer previsões de curto prazo podem ser citadas diversas, seja por métodos matemáticos (previsão da velocidade do vento (Soman *et al.*, 2010), sistema Lorenz de previsão atmosférica (Gauthier *et al.*, 2021) etc.), por técnicas de Aprendizado de Máquina (AM) (Rede Neural Recorrente-RNR (Dunis; Huang, 2002) ou *Echo State Network*-ESN (Shen *et al.*, 2018) etc.), ou por técnicas estatísticas (*Autoregressive Integrated Moving Average*-ARIMA (Mondal, 2014) e/ou *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic*-GARCH (Hossain, 2009) etc.).

A modelagem de Séries Temporais (ST) financeiras pode ser de grande valia para os gestores, pois permite identificar o mecanismo gerador dos dados que o compõe, o que possibilita descrever seu comportamento e fazer previsões. Chama-se atenção para o fato de que leis probabilísticas controlam os modelos estatísticos utilizados na modelagem da ST.

As técnicas estatísticas e as técnicas computacionais utilizadas neste tipo de modelagem são antigas e vêm sendo aprimoradas, apresentando um bom desempenho. E, embora estas últimas tenham surgido embrionariamente antes das técnicas estatísticas, somente se tornaram viáveis computacionalmente há poucas décadas. Dentre as técnicas computacionais destaca-se o AM, mais especificamente aquele que replica a regressão mantendo uma memória, como as RNRs (Dunis; Huang, 2002), sendo a ESN uma particularidade destas.

Nas previsões orientadas por dados, outra forma de modelar e fazer previsões é combinar AM com uma técnica estatística, gerando o também chamado modelo híbrido. Esta é uma forma de potencializar uma das técnicas e de obter melhor desempenho. A técnica de previsão utilizando modelo híbrido consiste em utilizar uma técnica para modelar o padrão linear e outra para modelar o padrão não linear, a fim de produzir uma melhor previsão (Zhang, 2003).

Dentre as diversas ST, especialmente as financeiras, destacam-se as ações. Investir em ações requer conhecimento sobre as empresas. Então, desde 2000 foi criado o “Novo Mercado”, que estabeleceu um novo padrão de governança colaborativa que vai além do que é exigido por lei (Anderson Jr., 2003). As empresas devem exibir voluntariamente mais transparência neste mercado de ações e só podem emitir ações ON (ordinárias nominativas), com direito a voto, e não mais ações PN (preferenciais nominativas), sem direito a voto (CVM, 2019). A diferença é que na primeira o investidor torna-se sócio da empresa e neste último é credor da empresa, uma espécie de financiador que concede empréstimo e é remunerado com os dividendos e Juros sobre Capital Próprio (JSCP).

Dentre as análises que são utilizadas e podem utilizar previsões dos preços de ações citam-se a análise fundamentalista e a análise técnica. A análise fundamentalista é mais recomendada para investimentos *buy and hold*, ou seja, investimentos de médio/longo prazo ou investimentos que focam em ganho de dividendos, por exemplo e, portanto, possíveis previsões são apenas um algo a mais e

não um meio. A análise técnica é mais recomendada para investimentos *day trade*, ou seja, de curtíssimo (ou curto) prazo e baseia-se em previsões.

Para realização dos cálculos e das previsões, o mais comum é que as técnicas computacionais utilizem os dados brutos ou tratados da ação, e as técnicas de econometria utilizem os retornos (Patel *et al.*, 2021; Paullada *et al.*, 2021; Morettin, 2017).

No Brasil os dados brutos são fornecidos pela B3¹. Os dados normalmente já vêm tratados (ou ajustados) quando fornecidos por empresas especializadas². Basicamente, esse ajuste consiste na aplicação de um fator de correção aos preços, de forma que seja possível relacionar o peso do preço atual com todos preços anteriores a partir deste.

Uma forma de tratar os dados de ações consiste no cálculo de retornos, que, basicamente, são a diferença entre o preço atual e o preço imediatamente anterior e sua divisão pelo preço anterior, como pode ser visto na Eq. 1:

$$R_t = \frac{p_t}{p_{t-1}} - \frac{p_{t-1}}{p_{t-1}}, \quad (1)$$

onde p_t indica o preço no tempo t e p_{t-1} é o preço no tempo imediatamente anterior R_t indica o ganho ou a perda percentual entre o preço atual e o imediatamente anterior. Visando estabilizar a variância, é usual utilizar a transformação logarítmica, conforme Eq. 2:

$$\ln(R_t) = r_t = \ln(p_t) - \ln(p_{t-1}), \quad (2)$$

onde: $\ln$ é logaritmo neperiano do retorno R_t , representado por r_t .

A seguir detalham-se as técnicas utilizadas, as quais servem como base para a metodologia híbrida proposta.

2.1 Echo State Network-ESN

A ESN utiliza Computação de Reservatório (CR, *Reservoir Computing*-RC, em inglês) e pode produzir previsões (Chen *et al.*, 2019). Ela utiliza pesos aleatórios tanto na entrada quanto no reservatório, que não são alterados ou treinados, e se comportam como um filtro dinâmico não linear complexo que transforma os sinais de entrada (Schrauwen; Verstraeten; Van Campenhout, 2007). Geralmente, as distribuições de probabilidade para gerar esses pesos aleatórios são a Uniforme, com

1 Dados obtidos nos arquivos disponibilizados pela B3 em: <https://syr.us/79e>

2 Por exemplo, pela Yahoo Finance, disponíveis em: <http://finance.yahoo.com>

limites variando entre -0,5 e 0,5 ou entre -1 e 1 ou a distribuição Normal, com média = zero e desvio padrão = um (Rodan; Tiño, 2010; Zhang *et al.*, 2021).

Em Jaeger (2001), a ESN é formalmente apresentada, propondo-se a implementação de uma nova RNR utilizando CR. Assim como as RNR, a ESN possui uma memória que pode ser de curto/longo prazo. Em Maass; Natschläger; Markram (2002), também foi proposta uma rede neural, equivalente à ESN, chamada *Liquid State Machine* (LSM). Ambas são tipos de RNR e usam CR, de acordo com Ojha; Abraham; Snášel (2017).

Segundo Lim *et al.* (2020), foi demonstrado que as ESNs funcionam surpreendentemente bem e alcançam excelente desempenho em muitas tarefas de referência, incluindo vencer o desafio de previsão de ST financeiras.

Conforme Mallya (2021), a ESN extrai o melhor da regressão linear e da RNR, apresentando a baixa necessidade de poder de computação da regressão linear e a natureza de previsão baseada em memória das RNRs.

De acordo com Chen *et al.* (2020), as ESNs têm alta precisão, são de fácil treinamento, possuem propriedades de convergência à solução global e tem sido aplicadas em diversas áreas do conhecimento, como na Engenharia e na previsão de ST.

Segundo Jaeger (2010), para o vetor de entrada $\vec{u}(t + 1)$ no tempo $(t+1)$ o estado de ativação interno é dado por:

$$\vec{x}(t + 1) = f \left(\mathbf{W}^{in} \vec{u}(t + 1) + \mathbf{W} \vec{x}(t) + \mathbf{W}^{out} \vec{y}(t) \right) = s(t), \quad (3)$$

onde: $\vec{x}(t + 1)$ é o vetor de estado no tempo $t+1$, $\vec{x}(t)$ é o vetor de estado no tempo t , $\mathbf{W}^{in}$ são os pesos da camada de entrada para o reservatório, $\mathbf{W}$ é a matriz dos pesos internos do reservatório, $\mathbf{W}^{out}$ são os pesos treinados do reservatório para a camada de saída e $\vec{y}(t)$ é o vetor de saída no tempo t .

De acordo com Zheng *et al.* (2020), $\vec{u}(t) \in R^{D \times 1}$ denota o valor de entrada no tempo t da ST, $\mathbf{W}^{in} \in R^{N \times D}$ (D é a dimensão da entrada) representa os pesos de conexão entre a camada de entrada e a camada oculta, $\mathbf{W} \in R^{N \times N}$ (N é o número de neurônios) denota os pesos de conexões de entrada para camada oculta, e $\mathbf{W}^{out} \in R^{L \times N}$ (L é a dimensão da saída) são os pesos de saída da camada oculta para a camada de saída. O padrão é que os pesos $\mathbf{W}$ sejam valores aleatórios, mas eles ainda podem seguir a topologia *small-world* (Kawai, Park; Asada, 2019).

Normalmente, a função de ativação não linear é a *tanh*. Conforme Haluszczynski *et al.* (2020), a não linearidade da função de ativação é uma propriedade crucial para a CR e de acordo com

Krishnagopal *et al.* (2019), a notação $\tanh$ é definida como o vetor cujos componentes são tangentes hiperbólicas dos componentes correspondentes do vetor argumento.

Conforme Thakkar; Chaudhari (2021), a saída $\vec{y}(t)$ é obtida pela seguinte função:

$$\vec{y}(t + 1) = f^{out}(\mathbf{W}^{out}\vec{u}(t + 1), \vec{x}(t + 1), \vec{y}(t)), \quad (4)$$

sendo a f^{out} , geralmente, uma função de regressão linear. Existem vários métodos de regressão linear para calcular os pesos $\mathbf{W}^{out}$. De acordo com Chen *et al.* (2020), uma das formas de calculá-los é pela pseudo-inversa da seguinte forma:

$$\mathbf{W}^{out} = (S^+ \vec{y}(t))^T, \quad (5)$$

onde: S^+ é a pseudo-inversa de $s(t)$. No entanto, conforme Shen *et al.* (2018), a pseudo-inversa pode produzir problemas mal colocados e para evitá-los, métodos de regularização, como regularização do tipo Tikhonov (ou Regressão Ridge) foram desenvolvidos para treinamento da ESN.

A regressão Ridge adiciona ao erro mínimo quadrado um pequeno custo, sendo usada para tornar o sistema robusto contra *overfitting* e ruído (Krishnagopal *et al.*, 2019). A regressão Ridge é descrita da seguinte forma, também conforme Krishnagopal *et al.* (2019):

$$J(\mathbf{W}^{out}) = \delta \|\mathbf{W}^{out}\|^2 + \|\mathbf{W}^{out}R - s\|^2, \quad (6)$$

onde δ é uma pequena constante de regularização. Uma vez que o aprendizado esteja feito, o reservatório pode prever as variáveis de estado para o tempo $t = t+1$ em diante, usando os pesos treinados $\mathbf{W}^{out}$. E, segundo Krishnagopal *et al.* (2019), a trajetória dos estados do reservatório é dada por:

$$R = \vec{r}(0) \oplus \vec{r}(t = 1) \oplus \dots \oplus \vec{r}(t = T), \quad (7)$$

Onde $\oplus$ é a união dos conjuntos de $\vec{r}$, R é a matriz aumentada de tamanho $N \times T$, onde T é o número de vezes pelos quais os dados trocam de estado. s são os estados de $\mathbf{W}^{out}$ do início até T . Durante o treinamento, os pesos de saída são obtidos do mapeamento das trajetórias dos estados do reservatório para a representação da camada de saída esperada S , onde

$$S = \vec{u}[1, \dots, T + 1] \quad (8)$$

Outra forma de expressar a Eq. 4 é adicionando o efeito de memória longa (característico das RNR e importante para previsão de ST) à equação de transição de estado de uma ESN, o que é feito da seguinte forma, conforme Alizamir *et al.* (2020):

$$\vec{x}(t+1) = (1-a) * \vec{x}(t) + a * f\left(\mathbf{W}^{in}\vec{u}(t+1) + \mathbf{W}\vec{x}(t) + \mathbf{W}^{out}\vec{y}(t)\right), \quad (9)$$

onde: α é a taxa de vazão (*leaking rate*, em inglês), a qual quanto mais próxima de zero mais diminui a influência do novo valor calculado e aumenta a memória dos valores das iterações anteriores no reservatório, e quanto mais próxima de um mais aumenta a influência do novo valor.

Segundo Zheng *et al.* (2020), os principais parâmetros da ESN são a escala de entrada (EE), o raio espectral (sr) e a esparsidade (s):

EE é usado para a inicialização dos pesos aleatórios da matriz $\mathbf{W}^{in}$, e os pesos ficam no intervalo $[-EE; EE]$, isto mais especificamente na distribuição Uniforme. Neste caso, sr é o raio espectral de $\mathbf{W}$, dado por:

$$\mathbf{W} = sr \cdot \frac{\mathbf{W}}{\lambda_{\max}(\mathbf{W})}, \quad (10)$$

onde: $\lambda_{\max}(\mathbf{W})$ é o maior autovalor da matriz $\mathbf{W}$ e elementos de $\mathbf{W}$ são gerados aleatoriamente entre -0,5 e 0,5, por exemplo. Geralmente a propriedade de estado de eco é violada se o raio espectral for maior que 1 (Yildiz; Jaeger; Kiebel, 2012; Rodan, Tiño, 2010);

s denota a porção de pesos não-zeros em $\mathbf{W}$.

Segundo Krishnagopal *et al.* (2019), o reservatório pode atingir sua melhor performance mesmo a matriz $\mathbf{W}$ sendo esparsa. Então, a esparsidade s significa que $100 \times s\%$ das entradas foram aleatoriamente ajustadas para zero.

Conforme Ribeiro *et al.* (2021), entre os hiperparâmetros da ESN destacam-se o tamanho do reservatório e o raio espectral. O tamanho do reservatório influencia na capacidade de memória e de aproximação às funções e quanto maior melhor. No entanto, há limitações de poder computacional e problemas de *overfitting*. O raio espectral está relacionado com a propriedade dos estados de eco (*Echo State Properties*-ESP, em inglês), que impacta diretamente no desempenho, usando-se um raio espectral menor para sistemas não lineares e maior para sistemas lineares. Para a maioria das aplicações fica abaixo de 1. O valor do raio espectral pode ser obtido a partir da Eq. 10.

Neste trabalho os hiperparâmetros da ESN são otimizados por Algoritmo Genético (AG), o qual é um método de otimização bastante conhecido e consolidado, além disso, para o problema

proposto ele se adapta bem. Mais conteúdo acerca de AG pode ser encontrado em Kumar *et al.* (2010), Lambora; Gupta; Chopra (2019) e Katoch; Chauhan; Kumar (2021).

Maiores detalhes sobre ESN podem ser encontrados em Buehner; Young (2006), Luo; Li; Sun (2012) e Soltani; Benmohamed; Ltifi (2023).

2.2 ARIMA-GARCH

Um processo autoregressivo de médias móveis de ordens p e q , denotado por $ARMA(p,q)$, é definido por (Hamilton, 1994; Mills; Markellos, 2008; Morettin, 2017; Morettin; Toloi, 2018) como sendo:

$$Y_t - \mu = \sum_{i=1}^p \phi_i (Y_{t-i} - \mu) + \sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t, \quad (11)$$

em que: Y_t é o t -ésimo valor observado ($t = 1, 2, \dots, T$), T é a quantidade de observações do processo, μ é a média do processo, i é a defasagem do processo auto-regressivo ($i = 1, 2, \dots, p$), j é a defasagem do processo de médias móveis ($j = 1, 2, \dots, q$), ϕ_i é o coeficiente da parcela auto-regressiva na i -ésima defasagem, θ_j é o coeficiente de médias móveis na j -ésima defasagem, p é a ordem do processo auto-regressivo, q é a ordem do processo de médias móveis e $\varepsilon_t \sim RB(0; \sigma^2)$ é o erro no t -ésimo tempo e possíveis alteração que possam acontecer no comportamento dos dados (Ruído Branco). Onde AR representa o processo autorregressivo e MA representa o processo de médias móveis.

Chama-se a atenção para o fato de que a modelagem de ST financeiras normalmente é realizada no logaritmo da taxa de retorno do preço do ativo financeiro considerado (Y_t na Eq. 11).

A metodologia em questão deve, então, ser utilizada em processos lineares estacionários e ergódicos. Um processo estocástico é chamado de fracamente estacionário ou estacionário de segunda ordem se sua média e sua variância não variam ao longo do tempo ($E(Y_t) = \mu, \forall t \in \mathbb{Z}$ e $E|Y_t|^2 < \infty$), e o valor da covariância entre dois períodos depende somente do grau de defasagens entre as observações e não do período efetivo de tempo em que a covariância é calculada ($cov(Y_t, Y_{t-j}) = \gamma_j \forall j$) (Mills; Markellos, 2008).

Um processo estocástico é dito ergódico se: (a) $\bar{Y}_n \xrightarrow{p} E(Y_t)$ e (b) $\hat{\gamma}_n \xrightarrow{p} \gamma_j$. Isto significa que os momentos amostrais devem convergir em probabilidade para os momentos populacionais. De acordo com Mills; Markellos (2008), esta propriedade permite que uma única realização do processo possa ser usada para estimar os parâmetros populacionais desconhecidos. De acordo com Hamilton (1994), esta propriedade se verifica em um processo estocástico para o primeiro momento se a soma das covariâncias for finita.

Bueno (2011) chama atenção para o fato de que, na prática, a estacionariedade e a ergodicidade têm os mesmos requisitos. A propriedade da ergodicidade indica que uma ST é uma das muitas probabilidades que poderiam ocorrer e aponta que, no entanto, é possível que os parâmetros como a média, por exemplo, possam ser estimados a partir da amostra existente.

Embora este tipo de modelagem deva ser utilizado em processos lineares estacionários, também é possível utilizá-la em processos lineares que possam ser transformados em estacionários, como é o caso dos processos lineares não estacionários homogêneos. Estes podem facilmente ser transformados em estacionários com a determinação de diferenças sucessivas. Neste caso, considerando o operador de retardo B ($B^k Y_t = Y_{t-k}$), para representar um modelo $ARIMA(p,d,q)$, onde p é o número de termos autorregressivos, d é o número de diferenças usadas na ST para torná-la estacionária e q é o número de termos de média móvel, a Eq. 11 poderia ser reescrita como:

$$\phi_p(B)\Delta^d Y_t = \theta_q(B)\varepsilon_t, \quad (12)$$

em que: $\phi_p(\cdot)$ e $\theta_q(\cdot)$ são polinômios de graus p e q , respectivamente, Δ representa a diferença entre valores consecutivos da série analisada e d , a quantidade de diferenças entre valores consecutivos realizadas.

Conforme Morettin (2017), as ST financeiras não são, geralmente, correlacionadas serialmente e sim dependentes. Esta propriedade faz com que modelos mais simples, como os $ARIMA(p,d,q)$, não apresentem bom desempenho na previsão deste tipo de ST, tornando os modelos não lineares capazes de descrever melhor seu comportamento do que os lineares. Modelos mais robustos, como os $GARCH(m,n)$ e variações, devem, então, ser utilizados para complementação da análise. Além disso, os modelos híbridos podem ser mais indicados quando existe algum tipo de autocorrelação. Neste caso, um modelo linear remove a autocorrelação, como $ARIMA(p,d,q)$, e, após, pode ser feita uma aplicação de modelo não linear para previsão.

Na modelagem estatística de séries financeiras, o modelo GARCH, proposto por Bollerslev (1986, 1987, 1988), tem sido utilizado com sucesso para modelar esta parte não linear, mais especificamente a volatilidade. Este modelo nada mais é do que uma generalização do modelo autoregressivo com heterocedasticidade condicional (ARCH), proposto por Engle (1982), para estimar a variância da inflação. De acordo com Morettin (2017), o modelo $GARCH(m,n)$, é definido como:

$$a_t = \sqrt{h_t} \cdot \varepsilon_t \quad (13)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot h_{t-j} \quad (14)$$

em que: a_t é a inovação (ε_t da Eq. 13), h_t é a variância condicional dos retornos e $\varepsilon_t \sim RB(0; \sigma^2)$ é o erro no t -ésimo tempo que segue com bastante frequência a distribuição t de Student.

Os modelos ARIMA-GARCH modelam valores quadráticos, o que faz com que resíduos grandes tenham um grande impacto no modelo. Além disso, também tratam retornos positivos e negativos da mesma forma, embora haja um consenso de que retornos negativos impactam mais a volatilidade. Visando eliminar algumas de suas limitações, já foram propostas algumas extensões, tais como: *Exponencial GARCH* (EGARCH), *Threshold GARCH* (TGARCH) e *Power GARCH* (PGARCH), *Asymmetric Power ARCH* (APARCH) (Ding; Granger; Engle, 1993), entre outros.

Logo, a modelagem das ST financeiras, diferentemente do que acontece com outros tipos de ST, é realizada em termos de volatilidade ou da variância condicional, que mede a variabilidade dos preços dos ativos. Nestes casos, após calcular os retornos desses ativos, utiliza-se inicialmente um modelo linear, como por exemplo, o ARIMA(p, d, q), para remover uma possível correlação serial nos dados, o que pressupõe que as inovações se comportam como ruído branco com média = 0 e variância constante. Assim, utilizando um modelo não linear, assume-se que os retornos não são autocorrelacionados, mas sua variância condicional depende dos retornos passados através de uma função quadrática para modelar adequadamente a volatilidade, como GARCH ou suas variações (Morettin, 2017).

ARIMA é um dos modelos lineares mais utilizados para previsão de ST. Esta técnica usa a metodologia Box-Jenkins para modelar as ST e fazer previsões, assumindo que a ST esteja livre de flutuações periódicas (Elsaraiti; Merabet, 2021).

Este modelo é denotado como ARIMA(p, d, q). As quantidades de termos autoregressivos e de médias móveis as serem incluídos no modelo podem ser determinados analisando-se a Função de Autocorrelação (FAC) e a Função de Autocorrelação Parcial (FACP) e também calculando-se o Critério de Informação de Akaike (*Akaike Information Criterion*-AIC, em inglês) ou o Critério de Informação Bayesiano (*Bayesian Information Criterion*-BIC, em inglês) (Zhang *et al.*, 2018). Estes últimos avaliam a parcimonialidade de um modelo. Mais conteúdo sobre interpretações de FAC e FACP pode ser encontrado em Wei (2006).

GARCH(m, n) é um modelo não linear de volatilidade estocástica que utiliza observações presentes e passadas e variância condicional para fazer previsões e geralmente é usado para verificar a presença de agrupamento de volatilidade em ST (Murali *et al.*, 2020). De acordo com Jiang (2021),

GARCH “descreve a variância do erro como uma função dos tamanhos reais dos termos de erro dos períodos anteriores”.

2.3 Técnicas de modelagem híbrida

Criar uma abordagem conjunta com uma técnica estatística e uma de AM pode ser chamada “hibridização”, ou melhor, técnica híbrida. Neste caso, as técnicas são misturadas/mescladas com diferentes abordagens para melhorar o desempenho da modelagem. Teoricamente, é possível, em um modelo híbrido, decompor a ST em componentes de baixa e de alta volatilidade para que cada método possa lidar com partes separadas (Santos Jr.; de Oliveira; de Mattos Neto, 2019) a fim de aproveitar a força de cada técnica. Como Zhang (2003) explicou: “Combinar diferentes modelos pode aumentar a chance de capturar diferentes padrões nos dados e melhorar o desempenho da previsão”. Mas por outro lado, Babu; Reddy (2014) dizem que “modelos híbridos devem conter um número de modelos individuais que mantenham a simplicidade do modelo para manter a precisão”.

Muitos estudos já desenvolvidos mostram a superioridade da precisão das previsões obtidas com modelos híbridos, independente das técnicas ou métodos utilizados, como em Henao; Mejia; Cardona (2013); Yang *et al.* (2016); Sigauke (2017) e outros.

De acordo com Khashei; Bijari (2011), RNA usadas para modelar problemas lineares têm produzido resultados mistos e também não é inteligente aplicá-las cegamente a qualquer tipo de dados. Assim, sugerem utilizar ARIMA para modelar a parte linear e uma RNA para a parte não linear.

Percebe-se, então, que estudos para gerar modelos híbridos com ARIMA (ou variações deste) com alguma RNA, para modelar ST com os mais diversos fins, têm sido desenvolvidos, especialmente, da década de 2010 para cá. Como em Henao; Mejia; Cardona (2013), que realizaram previsões de demanda de energia usando modelo híbrido SARIMA com um simples neurônio multiplicativo ou em Liu; Ding; Bai (2021), os quais aplicaram um modelo híbrido baseado em decomposição em modo empírico, RNR e ARIMA para previsão da velocidade do vento.

2.4 Distribuições de probabilidade

2.4.1 Distribuições de probabilidade contínuas

A ESN usa Computação de Reservatório que utiliza pesos aleatórios tanto na entrada quanto no reservatório, gerados de acordo com uma distribuição de probabilidade contínua.

As distribuições de probabilidade contínuas são caracterizadas por funções contínuas e descrevem o comportamento aleatório de variáveis contínuas, ou seja, aquelas que podem assumir um número infinito de valores em um intervalo específico (Kinas; Andrade, 2010), sendo descritas por uma função densidade de probabilidade.

Em uma distribuição de probabilidade Uniforme, por exemplo, a probabilidade de que a variável aleatória X esteja entre os valores a e b é dada pela integral da função densidade $f(x)$ no intervalo $[a,b]$ (Magalhães, 2006):

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \quad (15)$$

Em uma distribuição contínua, a probabilidade de que a variável assuma um valor específico é, em geral, zero, pois existem infinitos valores possíveis. Em vez disso, a função densidade de probabilidade fornece informações sobre a probabilidade relativa de que a variável esteja em um intervalo específico (Kinas; Andrade, 2010).

Algumas medidas podem ser utilizadas para descrever uma distribuição de probabilidade contínua. De acordo com Magalhães (2006), essas medidas são as seguintes:

- Valor esperado (ou média): é uma medida de tendência central que representa o centro da distribuição. Para uma variável aleatória contínua X com FDP igual a $f(x)$, o valor esperado $E(X)$ ou μ é dado por:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx; \quad (16)$$

- Variância: mede a dispersão dos valores da variável aleatória em torno do valor esperado. A variância de uma variável aleatória contínua X com FDP igual a $f(x)$ e valor esperado (μ) é dada por:

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x)dx; \quad (17)$$

- Desvio padrão: é a raiz quadrada da variância e fornece uma medida da dispersão dos valores da variável aleatória em relação ao valor esperado, dada por:

$$DP(X) = \sqrt{Var(X)}. \quad (18)$$

Existem várias distribuições contínuas com diferentes formas e características, como a distribuição Normal, a distribuição Exponencial, a distribuição Uniforme, entre outras. Para representar uma função densidade de probabilidade, geralmente usa-se uma notação específica para cada distribuição.

Mais esclarecimentos podem ser encontrados em Giller(2005), Spiegel; Stephens (2009), Casella; Berger (2010), Pishro-Nik (2014) e Coin (2017), entre outros.

2.4.2 Distribuições de probabilidade utilizadas para gerar pesos aleatórios na ESN

a) *Distribuição Uniforme*

A distribuição Uniforme é uma das distribuições mais simples e amplamente utilizadas em estatística. Uma variável aleatória que segue uma distribuição Uniforme tem a mesma probabilidade de assumir qualquer valor dentro do intervalo definido (Devore, 2006). No caso contínuo, a distribuição Uniforme é aplicada em problemas como a escolha aleatória de um número dentro de um intervalo específico ou em processos estocásticos onde todos os resultados têm igual probabilidade de ocorrer dentro de um intervalo. Ela é caracterizada por uma função densidade de probabilidade constante em um intervalo específico e nula fora desse intervalo.

b) *Distribuição Normal*

A distribuição Normal é amplamente utilizada em estatística e modelagem, devido à sua simplicidade e sua frequente ocorrência em muitos fenômenos naturais.

c) *Distribuição t de Student*

A distribuição t de Student, também conhecida simplesmente como distribuição t, é amplamente utilizada na inferência estatística quando o desvio padrão populacional é desconhecido. Ela possui um parâmetro chamado graus de liberdade (ν), que afeta a forma da distribuição, que é semelhante à da distribuição Normal. Entretanto, a distribuição t de Student tem caudas mais pesadas do que a distribuição Normal, o que é mais pronunciado quando o número de graus de liberdade é baixo (Costa Neto, 2006).

Para cálculo da função densidade de probabilidade utiliza-se, nesta distribuição a função Gama (Γ), que é uma função matemática especial que estende o conceito de fatorial para números reais e é usada para garantir que a função densidade de probabilidade seja devidamente normalizada, conforme Davis (1959):

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (19)$$

d) *Distribuição Generalizada dos Erros*

A *Generalized Error Distribution* (GED), também chamada de *Generalized Gaussian Distribution* (GGD), é uma distribuição contínua utilizada em análise de ST financeiras, modelagem de risco e outras aplicações em finanças. Ela é uma generalização da distribuição Normal, permitindo caudas mais pesadas (da Silva, 2017).

A GED é flexível e pode acomodar diferentes formas de dados. Ela é frequentemente usada em modelos de volatilidade condicional, como o modelo GARCH, para modelar a volatilidade em ST financeiras (Gao, Zhang; Zhang, 2012).

2.5 Medição de erros como forma de avaliação da precisão

Uma forma de determinar a precisão (*accuracy*, em inglês) ou capacidade preditiva de um modelo consiste em utilizar a diferença entre o observado na ST e o predito/previsto pela técnica, denominado erro. Entretanto, esses erros podem ser negativos (predição/previsão a mais) e positivos (predição/previsão a menos) e, se somados, acabam se anulando e apresentando média igual a zero. Portanto, é necessário utilizar-se alguma estratégia para representar estes erros amostrais, como as citadas a seguir:

- uma possibilidade é calcular a média dos erros em módulo, o que evita que os valores positivos e negativos se anulem, sendo denominado Erro Médio Absoluto (*Mean Absolute Error-MAE*, em inglês), e definido conforme Eq. 20 (Cheng; Zhao, 2019):

$$MAE = \frac{1}{n} \sum \left| \vec{y}_{i_{previsto}}(t) - \vec{y}_{i+1_{observado}}(t) \right|; \quad (20)$$

- outra métrica possível considera uma variação do MSE (*Mean Squared Error*, em inglês), a Raiz do Erro Quadrado Médio (*Root Mean Squared Error-RMSE*, em inglês) apresentado na Eq. 21 (Cheng; Zhao, 2019):

$$RMSE = \sqrt{1/n \sum \left(\vec{y}_{i_{previsto}}(t) - \vec{y}_{i+1_{observado}}(t) \right)^2}, \quad (21)$$

no qual os valores dos erros são elevados ao quadrado, a média calculada e a raiz quadrada extraída; e

- outra possibilidade considera calcular a Mediana dos Erros Absolutos (*Median Absolute Error-MdAE*, em inglês) (Shcherbakov *et al.*, 2013), conforme mostrado na Eq. 22:

$$MdAE = median \left| \vec{y}_{i_{previsto}}(t) - \vec{y}_{i+1_{observado}}(t) \right|. \quad (22)$$

No desenvolvimento deste estudo, chegou-se também a adotar o Erro Percentual Médio em Módulo (*Mean Absolute Percentual Error-MAPE*, em inglês). Mas como o MAPE censura zeros, penalizando sub e sobreprevisões diferentemente, apontando para estimativas assimétricas, além de exibir uma escala complexa que dificulta a interpretação, conforme Tichy (2023), optou-se por não utilizá-lo.

2.6 Revisão da literatura

Para realização deste trabalho, foi feita uma revisão sistemática a fim de dar suporte teórico à sua realização, para encontrar trabalhos relacionados a esta área de pesquisa e encontrar uma lacuna de pesquisa possível de ser explorada.

2.6.1 Organização da revisão sistemática e critérios de seleção dos artigos

Para a revisão sistemática, inicialmente, definem-se as questões de pesquisa, de acordo com os objetivos do trabalho a ser desenvolvido (Nakagawa *et al.*, 2017). Assim, foram definidas as seguintes questões de pesquisa: Quais são os modelos de CR existentes? Quais são as terminologias comuns para descrever esses modelos? Quais são seus componentes? Como esses componentes estão relacionados? Algum dos modelos define adequadamente todos os outros para qualquer aplicação? Se não definir adequadamente, podemos combinar o conhecimento destes modelos e sistemas para criar um modelo unificado que possa definir tudo? A CR pode realizar previsões? Em caso afirmativo, pode ser aplicado a ST financeiras? Como melhorar essas previsões? Quão precisas são essas previsões/como minimizar os erros?

As buscas foram realizadas nas bases de dados Scopus, ACM *Digital Library*, *Web of Science* e *IEEE Explorer*, com o objetivo inicial de buscar termos relacionados como: *Echo State and Reservoir Computing*, abrangendo o objeto de estudo desta rede neural específica, e, como linha adicional de pesquisa, foram buscados termos relacionados ao escopo do trabalho, como ML, cuja ESN é um tipo. E, das buscas nas bases, após o refinamento das *queries*, foram identificados 1.311 artigos.

A partir daqui, realizou-se uma seleção por títulos, com base nos seguintes critérios: primeiramente, buscaram-se títulos que tratassem de técnicas híbridas e, quando impossível, que contivessem pelo menos palavras/termos relacionados às palavras utilizadas na consulta, os demais foram excluídos. Ao analisarem-se os títulos, o número de artigos foi reduzido para 170.

Em seguida foram lidos os Resumos e adotados critérios para inclusão. Os critérios de inclusão dos artigos durante a leitura de seus resumos foram: “explica os fundamentos teóricos da Computação de Reservatório ou *Echo State Network*”; “descreve a operação de Computação de Reservatório ou *Echo State Network*”; “foca em arquitetura/estruturas de software de Computação de Reservatório ou *Echo State Network*”; “descreve aplicações de Computação de Reservatório ou *Echo State Network* em séries temporais financeiras”. Além disso, deveria estar relacionado a pelo menos um aspecto das questões de pesquisa, confirmando pelo menos uma delas. Através da leitura dos resumos, com base nos critérios de inclusão, o número de artigos incluídos foi 86.

Como critérios de seleção dos artigos durante a leitura das introduções e conclusões foram considerados: “os objetivos estão claramente definidos”; “a arquitetura do

sistema/estrutura/projeto/experimento está claramente definida”; “o artigo apresenta a fonte do conjunto de dados utilizado”; “o estudo propõe uma nova tecnologia relacionada à Computação de Reservatório ou *Echo State Network*”; “o estudo apresenta o estado da arte ou ideias para trabalhos futuros em Computação de Reservatório ou *Echo State Network*”; “o estudo relaciona Computação de Reservatório ou *Echo State Network* a métodos estatísticos”; “o estudo apresenta resultados de Computação de Reservatório ou *Echo State Network* analisados estatisticamente”; “o estudo apresenta resultados de Computação de Reservatório ou *Echo State Network* comparados com resultados de métodos estatísticos”; “o estudo utiliza séries temporais financeiras”.

Infelizmente, 11 artigos não puderam ser obtidos por não serem públicos ou exigirem pagamento para acesso. Assim, foram lidas 75 introduções e conclusões e, adotados os critérios de seleção, resultaram em 23 artigos para serem analisados.

2.6.2 Artigos selecionados e informações relevantes

O Qd. 1 apresenta os artigos selecionados analisados do ponto de vista das técnicas e de seus objetivos com a pesquisa.

Quadro 1 - Artigos selecionados com análise de técnicas utilizadas e objetivos

Artigos	Objetivo(s)	Técnicas utilizadas
Aceituno; Yan; Liu (2020)	Otimizar aprendizado da ESN; Otimizar hiperparâmetros da ESN	ESN; Tentando uma variedade de escalas
Barbosa <i>et al.</i> (2021)	Aumentar o poder de processamento de dados; Otimização de hiperparâmetros	Combinando as propriedades de simetria de uma Computação de Reservatório; Otimizador Bayesiano
Bissaro; Jin; Carneiro (2021)	Avaliar modelos ESN regulares, <i>small-world</i> e aleatórios e analisar oito técnicas de classificação	ESN regular e <i>small-world</i> , kNN, SVM Linear, MLP, Regressão Linear, Regressão Logística, SVM Generalizada, Árvore de Decisão, Floresta Aleatória, Naïve Bayes
Bollt (2021)	Mostrar que a Máquina Linear CR é equivalente a VAR; Mostrar que a Máquina Linear CR tem uma conexão com DMD	<i>Vector Auto-Regressive</i> (VAR); <i>Dynamic Mode Decomposition</i> (DMD)
Budhiraja <i>et al.</i> (2021)	Predizer/Prever o comportamento a longo prazo e as tendências variáveis de um sistema financeiro não linear; Otimização de hiperparâmetros; Função de ativação	Computação de Reservatório; Executar múltiplas iterações do experimento enquanto testa valores diferentes; tanh
Gauthier <i>et al.</i> (2021)	Demonstrar que a regressão automática vetorial não linear é excelente em Computação de Reservatórios e requer conjuntos de dados de treinamento e tempo de treinamento ainda mais curtos	Computação de Reservatório e Auto-regressão vetorial não linear
Haluszczyński <i>et al.</i> (2020)	Reduzir o tamanho da rede e melhorar a estabilidade da previsão; Otimizar os hiperparâmetros	Remoção de nós; Procedimento de pesquisa aleatória com amostragem uniforme do espaço de parâmetros
Kim; King (2020)	Previsão de séries temporais; Compreender inúmeras caracterizações dos dados, incluindo a avaliação do potencial comportamento cíclico e periodicidade	AD-DeepESN; FAC and FACP

Continuação...		
Artigos	Objetivo(s)	Técnicas utilizadas
Maat; Gianniotis; Protopapas (2018)	Otimizar hiperparâmetros da ESN eficientemente	ESN; Otimização Bayesiana e <i>Grid Search</i>
Mallya (2021)	Comparar abordagens de previsão de ações pela ESN	ESN, Regressão, RNN e LSTM
Makridakis; Spiliotis; Assimakopoulos (2018)	Comparar técnicas; Função de ativação	Redes Neurais (MLP, BNN, RBF, GRNN, SVR, RNR, e LSTM) e Técnicas estatísticas (kNN, Árvores de Regressão CART, e Processos Gaussianos); Sigmoid
Pérez-Pons <i>et al.</i> (2022)	Identificar as aplicações mais recentes e fazer um estudo comparativo de modelos econométricos e de ML	Estudo de Mapeamento Sistemático
Ribeiro <i>et al.</i> (2021)	Prever a volatilidade do retorno dos preços das ações; Selecionar o modelo ARIMA; Otimizar os hiperparâmetros	Modelo híbrido: HAR-ESN; Pesquisa dos hiperparâmetros ARIMA no conjunto $\{0,1,2\}$; Metaheurística PSO
Sakemi <i>et al.</i> (2020)	Propor uma redução do tamanho do reservatório inserindo os estados passados ou de deriva do reservatório na camada de saída	Computação de Reservatório
Santos Jr. <i>et al.</i> (2019)	Propor uma nova estratégia para combinação de previsões de modelos lineares e não lineares; Seleção de modelo ARIMA; Otimização de hiperparâmetros em MLP e SVR	ARIMA, MLP, e SVR; Abordagem automática passo a passo; <i>Grid Search</i>
Shen <i>et al.</i> (2018)	Ser mais robusto a <i>outliers</i> e representar as características dinâmicas da série temporal multivariada de forma mais abrangente; Otimizar os hiperparâmetros	RVESN; <i>Cross-validation</i>
Pérez-Pons <i>et al.</i> (2022)	Identificar as aplicações mais recentes e fazer um estudo comparativo de modelos econométricos e de ML	Estudo de Mapeamento Sistemático
Shivani; Sandhu; Nair (2019)	Prever a velocidade do vento a curto prazo; Selecionar o modelo ARIMA; Otimizar hiperparâmetros RNR	ARIMA e RNR; FAC e FACP, e AIC e BIC; Método de busca em grade (<i>Grid Search</i>)
Singh; Singh; Kumar (2021)	Estimar o futuro do mercado de ações; Seleção de modelo ARIMA	Hibridização entre métodos ARIMA e Wavelet; FAC e FACP
Thakkar; Chaudhari (2021)	Revisar a importância e a necessidade das Redes Neurais Profundas (DNNs) no campo do preço das ações e previsão de tendências	Pesquisa abrangente
Pérez-Pons <i>et al.</i> (2022)	Identificar as aplicações mais recentes e fazer um estudo comparativo de modelos econométricos e de ML	Estudo de Mapeamento Sistemático
Zhang; Zhang; Zhang (2019)	Previsão de ST; Convergência rápida na otimização de hiperparâmetros	ESN; Pesquisa gravitacional com otimização por enxame de partículas; Função de ativação baseada em polinômio Hermite
Zheng <i>et al.</i> (2020)	Predizer ST; Otimizar hiperparâmetros da ESN	LSESN; Algoritmo Genético

Sobre as técnicas relacionadas à ESN significam:

- RVESN (*Robust Variational Echo State Network*) usa uma distribuição de mistura gaussiana de cauda pesada mais robusta como a função de verossimilhança da saída do modelo (Shen *et al.*, 2018);

- LSESN (*Long-Short Term Echo State Networks*) é um modelo de estrutura multi-reservatório usado para capturar as características temporais multi-escala de ST (Zheng *et al.*, 2020);
- *DeepESN* é basicamente uma pilha de reservatórios (chamados de camadas), onde a saída de uma camada é a entrada de outra (Gallicchio; Micheli, 2017).

Os objetivos são, basicamente, otimizar hiperparâmetros da ESN, testar funções de ativação, melhorar a predição/previsão, propor reduções no tamanho do reservatório e fazer revisões.

Sobre as técnicas utilizadas, vê-se que estão divididas, principalmente, entre Análise Matemática do Reservatório, Análise Experimental do Reservatório, ESN e suas variações, como *DeepESN* e *RVESN*, comparações de técnicas, formas de otimização ESN de hiperparâmetros. Assim, as técnicas utilizadas estão na sua maior parte relacionadas com CR e ESN. Dos artigos selecionados, seis fazem análise experimental, sendo que destes, cinco fazem uma análise experimental do reservatório; três fazem análise matemática do reservatório; sete usam ESN, e destes, três são variações de ESN; três fazem “hibridização”; um faz revisão de literatura; um faz pesquisa; um faz mapeamento sistemático; um compara ARIMA e RNR.

O Qd. 2 apresenta os artigos selecionados com informações sobre os dados analisados, o pré-processamento e as métricas de erro utilizadas.

Quadro 2 - Artigos selecionados com informações sobre os dados analisados, o pré-processamento e as métricas de erro utilizadas

Artigos	Dados utilizados	Pré-processamento dos dados	Erros
Aceituno; Yan; Liu (2020)	Mackey-Glass, Intensidade de Lasers, Dígitos árabes falados	ST de intensidade do laser: recurso de escala de normalização com média zero e desvio padrão um filtrado com Gaussiana de comprimento três e desvio padrão de um; Reconhecimento de dígitos em árabe falado: escalonamento de recurso de normalização com média zero e desvio padrão de um, cálculo dos valores ausentes por interpolação	NRMSE
Barbosa <i>et al.</i> (2021)	Sequência digital de bits, Lorenz63	N.A.*	NRMSE

Continuação...			
Artigos	Dados utilizados	Pré-processamento dos dados	Erros
Bissaro; Jin; Carneiro (2021)	Posições de um paciente e uma cama lidos por um acelerômetro, Tipos de movimentos em Libras (Linguagem Brasileira de Sinais), Conjunto de dados RSSI de sensores espalhados no primeiro andar da Biblioteca Waldo na Western Michigan University, conjunto de dados de robô de 24 sensores de ultrassom e conjunto de dados de ozônio da atmosfera	N.A.	Teste de Friedman
Bollt (2021)	Mackey-Glass equações diferenciais de atraso, Lorenz63	N.A.	N.A.
Budhiraja <i>et al.</i> (2021)	”Modelo financeiro caótico não linear que envolve taxa de juros, demanda de investimento e índice de preços como parâmetros móveis subjacentes. (...) descrito por um sistema adimensional de equações diferenciais lineares acopladas de	75% training and 25% validation	MSE
Gauthier <i>et al.</i> (2021)	Dados gerados pela integração de um modelo simplificado de um sistema meteorológico desenvolvido por Lorenz em 1963 e um circuito eletrônico de rolagem dupla	N.A.	NRMSE
Haluszczyński <i>et al.</i> (2020)	Lorenz63	N.A.	Dimensão de correlação calculada a partir de trajetórias

Continuação...			
Artigos	Dados utilizados	Pré-processamento dos dados	Erros
Kim; King (2020)	S&P 500, dados de estacionamento em Birmingham, conjunto de dados caóticos do experimento Annulus, temperatura na Filadélfia e compartilhamento de bicicletas	Decomposição aditiva de séries temporais em tendência, sazonalidade e residual; S&P500 diário: 80% de treinamento e 20% de validação; Estacionamento em Birmingham: 80% de formação e 20% de validação; Conjunto de dados caótico simulado: 80% de treinamento e 20% de validação; Temperatura na Filadélfia: 80% de treinamento e 20% de validação; Dados periódicos: 80% de treinamento e 20% de validação; Compartilhamento de bicicletas: 80% de treinamento e 20% de validação	MSE
Kumbure <i>et al.</i> (2022)	Índices de ações, volume negociado de ações, ações individuais em mercados de ações específicos	Tratamento de dados, extração, geração de recursos, normalização e seleção de características, dimensionamento de recursos, número de classes, métodos de validação e divisão dos dados	N.A.
Lim <i>et al.</i> (2020)	Lorenz63, Lorenz96, e Processo semelhante a Ornstein-Uhlenbeck	Extração de características	RMSE
Maat; Gianniotis; Protopapas (2018)	Conjuntos de dados sintéticos: Mackey-Glass e NARMA; Conjuntos de dados do mundo real: eletromiograma de um sujeito saudável e MACHO: uma curva de luz astronômica	Eletromiograma: 80% para treinamento e validação e 20% para teste; MACHO: determinar o período de RRL usando o método MHAoV, posteriormente agrupá-los em intervalos regulares, os valores faltantes são interpolados quadraticamente, os valores discrepantes são filtrados aplicando Savitzky-Golar, 80% para treinamento e validação e 20% para teste	NMSE
Makridakis; Spiliotis; Assimakopoulos (2018)	Competição M3	Transformação dos dados para estacionariedade na variância; Dessazonalização de dados; Dados de redução de tendência	sMAPE

Continuação...			
Artigos	Dados utilizados	Pré-processamento dos dados	Erros
Mallya (2021)	Dados de ações da Microsoft do Yahoo Finance	Dimensionamento de recursos: normalização entre 0 e 1 do preço de fechamento, Verificação de valores nulos, 80% para treinamento e 20% para validação	MSE, RMSE
Pérez-Pons <i>et al.</i> (2022)	Investimentos (capital privado e seguros), mercado de ações e teóricas	N.A.	N.A.
Ribeiro <i>et al.</i> (2021)	Dados intradiários de ações da Caterpillar, eBay e Microsoft	Conversão de séries temporais para AM supervisionada e equações para dimensionar dados	R ² , MSE, RMSE, MAPE
Sakemi <i>et al.</i> (2020)	Mapa Hénon generalizado e NARMA	NARMA: N.A.; removendo 200 primeiros passos de cada, Mapa de Hénon: 40% de treinamento e 60% de validação	NMSE
Santos Jr. <i>et al.</i> (2019)	Lince canadense, mancha solar de Wolf, taxa de câmbio libra esterlina/dólar americano, fluxo do rio Colorado, passageiros de companhias aéreas e brilho das estrelas	Lince Canadense: 88% de treinamento e 12% de validação; Mancha Solar: 77% de treinamento e 23% de validação; Taxa de câmbio: 93% treinamento e 7% validação; Rio Colorado: 80% de treinamento e 20% de validação; Estrela: 80% de treinamento e 20% de validação; Companhia Aérea: 80% de treinamento e 20% de validação	MAE, MSE, MAPE, Comparação percentual
Shen <i>et al.</i> (2018)	ST de Rossler, sistema dinâmico bivariado de escoamento anual, manchas solares e séries mensais de temperatura média e precipitação em Dalian e Lorenz63	N.A.	MAD, MSE, RMSE, MAPE
Shivani, Sandhu; Nair (2019)	Conjunto de dados de vento	Tratamento de dados, dimensionamento de recursos: normalização e padronização, preenchimento de vaga, detecção e remoção de <i>outliers</i> , 80% para treinamento e 20% para validação	MAE, MSE, RMSE

Continuação...			
Artigos	Dados utilizados	Pré-processamento dos dados	Erros
Santos Jr. <i>et al.</i> (2019)	Lince canadense, mancha solar de Wolf, taxa de câmbio libra esterlina/dólar americano, fluxo do rio Colorado, passageiros de companhias aéreas e brilho das estrelas	Lince Canadense: 88% de treinamento e 12% de validação; Mancha Solar: 77% de treinamento e 23% de validação; Taxa de câmbio: 93% treinamento e 7% validação; Rio Colorado: 80% de treinamento e 20% de validação; Estrela: 80% de treinamento e 20% de validação; Companhia Aérea: 80% de treinamento e 20% de validação	MAE, MSE, MAPE, Comparação percentual
Singh; Singh; Kumar (2021)	Índice BSE100 S&P Sensex	BSE 100 S&P Sensex semanal: 79% de treinamento e 21% de validação; BSE 100 S&P Sensex diária: 79% de treinamento e 21% de validação; Eliminação de ruído por <i>wavelets</i>	RMSE, MAPE, NRMSE, MAD
Thakkar; Chaudhari (2021)	NASDAQ 100, TWSE, NetEase, S&P500, NIFTY 50, Yahoo Finance, NSE, Sinopec, Shanghai A-Shares, Eastmoney, Shanghai índice, Índices de ações do leste asiático, preço futuro da soja, preços de carbono, taxas de câmbio de Libra Esterlina, Real e Rúpia Indiana para Dólar	Divisão de dados	MAE, MAPE, RMSE, AMAPE, EMA, MSE, RMSE, MAPE, taxa de acertos, retornos totais
Zhang; Zhang; Zhang (2019)	Lorenz63 e índice de saúde real	N.A.	RMSE, NRMSE, MAPE
Zheng <i>et al.</i> (2020)	Manchas solares mensais de Bray & Loughhead (1964), Carga de energia coletada de grandes clientes em uma área específica da China, e Lorenz63	Dimensionamento de recursos: normalização, 70% para treinamento, 10% para validação e 20 para teste	MSE, NRMSE, sMAPE

Obs.: N.A.*: Não se aplicou ou não foi apresentado.

Tipos de erros: MAD (*Mean Absolute Deviation*), MAE (*Mean Absolute Error*), MSE (*Mean Squared Error*), NMSE (*Normalized MSE*), NRMSE (*Normalized RMSE*), sMAPE (*symmetric Mean Absolute Percentual Error*)

É importante ressaltar que os conjuntos de dados nem sempre são ST e são dos mais variados tipos, predominando as equações diferenciais de atraso de Mackey-Glass, dados gerados pela

integração de um modelo simplificado de sistema meteorológico desenvolvido por Lorenz em 1963, e ST de dados financeiros, geralmente obtidos da *Standard and Poor's* (S&P).

Sobre o pré-processamento de dados utilizado, vê-se que eles são, geralmente, dimensionar os dados, limpar os dados, decompor a ST, tornar os dados estacionários, selecionar recursos e em torno de 80% dos dados são para treinamento e 20% para validação. Em relação aos erros de medição da acurácia, a maioria deles utilizou RMSE, MSE, NRMSE e MAPE. Embora o RMSE tenda a aumentar os valores e a ampliar os valores discrepantes (*outliers*), ele tem a vantagem de dar mais peso a erros maiores. MAPE e NRMSE são equivalentes se a normalização do segundo estiver entre 0 e 1, são erros relativos e mostram percentuais.

O Qd. 3 apresenta as respostas às questões de pesquisa.

Quadro 3 - Resposta, nos artigos selecionados, às questões de pesquisa

Artigos	Dados de ST financeiras?	Propõe novas Tecnologias relacionadas com CR/ESN?	Compara CR/ESN com técnicas estatísticas?	Compara outras RNA com técnicas estatísticas?	Apresenta resultados da CR/ESN analisados estatisticamente?
Aceituno; Yan; Liu (2020)	Não	Sim	Não	Não	Sim
Barbosa <i>et al.</i> (2021)	Não	Sim	Não	Não	Não
Bissaro; Jin; Carneiro (2021)	Não	Não	Não	Não	Não
Bollt (2021)	Não	Não	Sim	Não	Não
Budhiraja <i>et al.</i> (2021)	Não	Não	Não	Não	Não
Gauthier <i>et al.</i> (2021)	Não	Sim	Não	Não	Não
Haluszczyński <i>et al.</i> (2020)	Não	Sim	Não	Não	Não
Kim; King (2020)	Sim	Sim	Não	Não	Não
Kumbure <i>et al.</i> (2022)	Não	Não	Não	Não	Não
Lim <i>et al.</i> (2020)	Não	Sim	Não	Não	Não

Continuação...					
Artigos	Dados de ST financeiras?	Propõe novas Tecnologias relacionadas com CR/ESN?	Compara CR/ESN com técnicas estatísticas?	Compara outras RNA com técnicas estatísticas?	Apresenta resultados da CR/ESN analisados estatisticamente?
Maat; Gianniotis; Protopapas (2018)	Não	Não	Não	Não	Não
Makridakis; Spiliotis; Assimakopoulos (2018)	Sim	Não	Não	Não	Não
Mallya (2021)	Sim	Não	Não	Não	Não
Pérez-Pons <i>et al.</i> (2022)	Não	Não	Sim	Não	Não
Ribeiro <i>et al.</i> (2021)	Sim	Sim	Não	Não	Não
Sakemi <i>et al.</i> (2020)	Não	Não	Não	Não	Não
Santos Jr. <i>et al.</i> (2019)	Sim	Sim	Não	Sim	Não
Shen <i>et al.</i> (2018)	Não	Sim	Não	Não	Não
Shivani; Sandhu; Nair (2019)	Não	Não	Não	Não	Não
Singh; Singh; Kumar (2021)	Sim	Não	Sim	Não	Não
Thakkar; Chaudhari (2021)	Não	Não	Não	Não	Não
Zhang; Zhang; Zhang (2019)	Não	Sim	Não	Não	Sim
Zheng <i>et al.</i> (2020)	Não	Não	Não	Não	Não

O Qd. 3 consiste de uma análise das principais características dos artigos selecionados para responder às questões de pesquisa, que são: todos apresentam o conjunto de dados utilizado, sendo que 26,1% utilizaram conjuntos de dados de ST financeiras; 91,3% propuseram/apresentaram a arquitetura do sistema ou *framework* ou projeto ou experiência claramente definida; dos artigos que propõem uma nova tecnologia relacionada à CR/ESN, pode-se observar que se aproximou da metade:

43,5%; 82,6% apresentaram o estado da arte³ ou lacunas de pesquisa para trabalhos futuros; a comparação da CR/ESN com as técnicas estatísticas é de 13,0%; a comparação de outras redes neurais com técnicas estatísticas é de 4,3%, e ao apresentar os resultados analisados estatisticamente, considera-se que 8,7% fizeram isso, porque é diferente apenas utilizar técnicas estatísticas e utilizá-las para analisar.

Para cada estudo selecionado, apresenta-se uma análise mais aprofundada. Para tanto, partiu-se de uma análise bibliométrica, seguida de uma metassíntese.

2.6.3 Bibliometria

As palavras-chave escolhidas pelos autores mais relevantes estão na Fig. 1: *Echo State Network* é a que mais apareceu, seguida por previsão, predição, rede neural recorrente e regressão. Entre os mais relevantes os que menos apareceram são: gestão financeira, aprendizado de máquina, computação de reservatórios, previsão do mercado de ações e análise de séries temporais. Todos estão relacionados entre si quando se busca previsão ou predição por meio de regressão com AM ou CR usando séries temporais financeiras. Demais palavras-chave apareceram apenas uma vez.



Figura 1: Nuvem de palavras-chaves escolhidas pelos autores nos artigos selecionados

Na Fig. 1 observa-se que as palavras-chaves mais escolhidas pelos autores são: *forecasting*, *echo state networks* e *time series*, todas relacionadas aos tópicos da pesquisa.

Uma análise das palavras mais relevantes, duas a duas (formando uma expressão), identificadas nos resumos está na Fig. 2. Pode-se perceber que série temporal (*time series*, em inglês) foi a expressão que mais apareceu, seguida por mercado de ações (*stock market*, em inglês), neural recorrente (*recurrent neural*, em inglês), computação de reservatório (*reservoir computing*, em inglês),

³ Estado da arte foi definido como um artigo com 50\% ou mais de referências, desconsideradas as referências clássicas da ESN, de cinco anos (exclusivamente) antes da publicação

aprendizado de máquina (*machine learning*, em inglês) e rede neural (*neural network*, em inglês). O assunto que une todas essas expressões é a aplicação de redes neurais e computação de reservatório a séries temporais do mercado de ações.

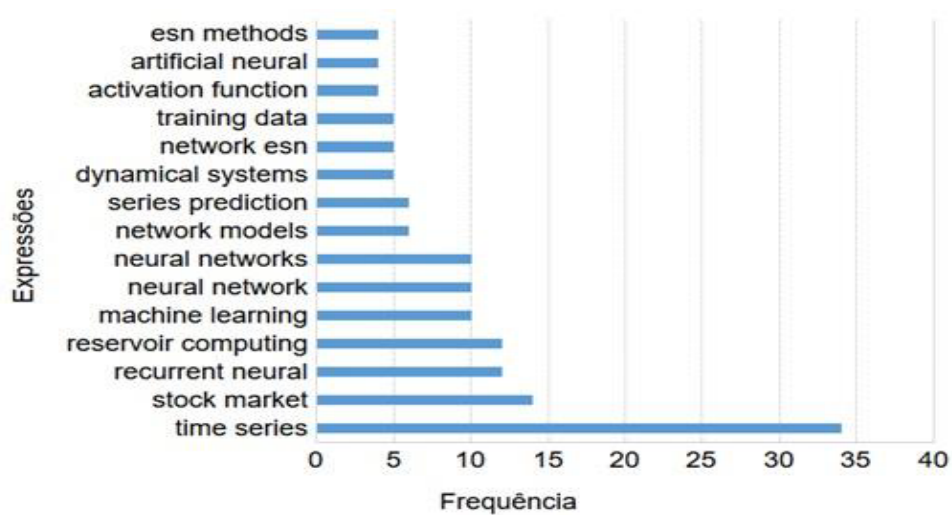


Figura 2: Frequência de expressões de 2 palavras nos resumos dos artigos selecionados

A relação entre autores e grupos de pesquisa é apresentada na Fig. 3. Quanto mais forte a conexão, mais artigos serão publicados em conjunto. Vemos que neste gráfico está destacado um grupo de pesquisa, formado pelos autores Gauthier, Griffith, Barbosa e Bollt, que fazem parte do mesmo grupo de pesquisa da Ohio State University e da Clarkson University. Bollt apareceu sozinho e como segundo autor em dois artigos, Barbosa como primeiro e quarto em dois artigos, Gauthier como primeiro e oitavo em dois artigos, e Griffith como segundo e terceiro em dois artigos. Todos os outros apareceram apenas uma vez nos demais artigos.

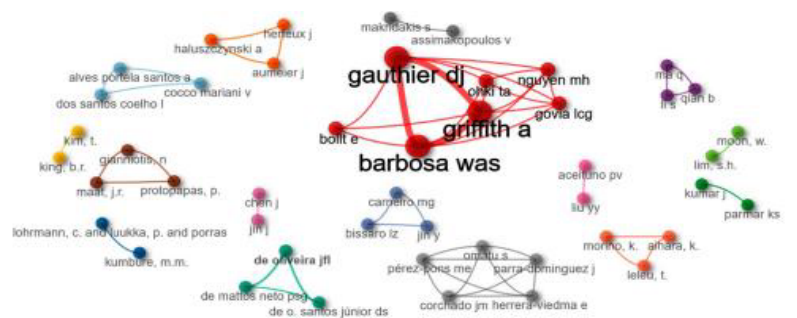


Figura 3 - Rede de autores colaboradores nos artigos selecionados

Analisando-se a quantidade de autores por artigos obteve-se: 2 artigos com apenas 1 autor, 2 artigos com 2 autores, 9 artigos com 3 autores, 5 artigos com 4 autores, 3 artigos com 5 autores, 1 artigo com 6 autores e 1 artigo com 8 autores, então o número médio de autores foi de 3,6.

Considerando a produção dos documentos pelos autores e os países onde realizaram o trabalho, tem-se: Índia (5 artigos), EUA (4), China (3), Brasil (2), Finlândia (1), Alemanha (1), Grécia (1), Japão (1), Brasil e Reino Unido (1), Suécia e EUA (1), Espanha, Japão e Malásia (1), e EUA, Alemanha e China (1).

Destacam-se os artigos com mais citações⁴: Makridakis; Spiliotis; Assimakopoulos (2018) com 1308 citações, que compara técnicas de AM e resultados de técnicas estatísticas, e Gauthier *et al.* (2021) com 248 citações, que propõe uma nova técnica para implementação de CR.

Além disso, é importante notar que a maioria dos artigos selecionados trata de técnicas de AM (CR e ESN, mais especificamente), 3 tratam de técnicas híbridas, 3 fazem revisões e 4 fazem comparações entre técnicas estatísticas com ESN ou outras técnicas de AM.

Constata-se, na análise bibliométrica, que os periódicos que mais apareceram como editores foram *Expert Systems with Applications* e *Chaos*, ambos com 3 artigos, em seguida vieram *Neural Computing and Applications* e *Plos One*, ambos com 2. Os outros 13 artigos eram de diferentes periódicos.

2.6.4 Meta-Síntese

Analisados, bibliometricamente, os artigos, fez-se uma meta-síntese de cada. Estão agrupados por assuntos, como pode ser visto a seguir.

Sobre CR:

- Barbosa *et al.* (2021): demonstram que combinar as propriedades de simetria da CR com os dados aumenta seu poder de processamento, e afirmam que é possível elevar o desempenho da CR, combinando as simetrias do reservatório e do sistema de aprendizagem, fazendo alterações diretas na entrada e na saída do reservatório, mas não no reservatório;
- Bollt (2021): analisa por que e como a CR funciona, mesmo usando pesos selecionados aleatoriamente. Para isso, conecta CR a ST em VAR (Auto-Regressão Vetorial), incluindo teoremas sobre representabilidade empregando o Teorema de WOLD e associa à teoria da decomposição do modo dinâmico (DMD). Conclui que o conceito por trás da CR funciona;
- Gauthier *et al.* (2021): “demonstram que a regressão automática vetorial não linear (NVAR) supera tarefas de *benchmark* de Computação de Reservatório e requer conjuntos de dados de treinamento e tempo de treinamento ainda mais curtos, menos metaparâmetros e nenhuma matriz aleatória, apresentando a próxima geração da Computação de Reservatório”. Aplica NVAR a três problemas desafiadores como referência: “(1) previsão da dinâmica de curto prazo; (2) reproduzir o

⁴ Foi utilizado o *Google Scholar* para verificar o número de citações em 26 de fevereiro de 2024.

clima de longo prazo de um sistema caótico (...); e (3) inferir o comportamento de dados não vistos de um sistema dinâmico”;

- Haluszczynski *et al.* (2020): “investigam a conexão entre as propriedades do reservatório e a qualidade da previsão”. Usando um fator de escala não linear na tangente hiperbólica da função de ativação, concluem que “uma remoção controlada dos nós ‘certos’ não apenas leva a menos variabilidade e, portanto, a melhores previsões, mas também permite reduzir visivelmente o tamanho da rede;

- Lim *et al.* (2020): “estudam o problema de previsão de eventos de transição críticos raros para uma classe de sistemas dinâmicos não lineares lento-rápidos”. Apresentam “um método baseado em dados para prever a evolução futura do estado”. Eles tentam responder a estas questões: (1) Eles podem prever se e quando um evento raro ocorrerá em uma determinada janela de tempo futuro? Eles podem inferir as características do evento? (2) Com que antecedência eles podem prever o evento raro? (3) Com que precisão e certeza eles podem atingir esses objetivos? (4) É possível responder a todas essas questões com um método computacionalmente barato e/ou usando dados de séries temporais relativamente curtas para x ? Concluem que “seu método é capaz de prever um evento de transição crítico com, pelo menos, vários intervalos de tempo numéricos com antecedência”;

- Sakemi *et al.* (2020): propõe “reduzir o tamanho do reservatório inserindo os estados passados ou flutuantes do reservatório na camada de saída no intervalo de tempo atual”, e analisaram com base na Capacidade de Processamento de Informação (IPC), reduzindo o tamanho do reservatório nas tarefas generalizadas do mapa Hénon e NARMA. Concluem que “foram capazes de reduzir o tamanho do reservatório para um décimo sem um aumento substancial no erro de regressão”;

- Zhang; Zhang; Zhang (2019): propõem “um projeto de função de ativação baseada no polinômio Hermite com convergência rápida (...) e a relação entre dependência de tempo de longo prazo e criticidade à beira do caos é dada”. Os parâmetros a serem alcançados no limite do caos foram melhorados por um novo algoritmo de busca gravitacional de otimização de enxame de partículas. Concluindo que esta “evolução torna o reservatório um grande potencial para correr à beira do caos com rica expressão”.

Sobre a ESN e variações:

- Aceituno; Yan; Liu (2020): “mostram que o conjunto de autovalores da rede contribui para a capacidade de memória ESN”, validando com previsão aplicada a TS de *benchmark* sintético e real. Afirmam que as características do reservatório, em particular, não podem ser aplicadas a tarefas gerais. E concluem que “fornece uma maneira simples de projetar ESN específico para tarefas e oferece *insights* profundos para outras redes neurais recorrentes”;

- Bissaro; Jin; Carneiro (2021): apresenta o ESN como um modelo para aplicações do mundo real. Eles investigam seus conceitos e componentes inerentes relacionados à estrutura do reservatório e à camada de leitura. Avaliam modelos de redes regulares e de *small-world* e analisam oito técnicas de classificação. Analisam uma ampla gama de parâmetros em reservatórios e camadas de leitura por meio de vários experimentos com cinco conjuntos de dados do mundo real. Concluem que as técnicas ESN são mais eficientes em sistemas embarcados e problemas de grande escala;
- Budhiraja *et al.* (2021): empregam ESN para modelar um sistema financeiro complexo, regenerando “as incógnitas do sistema financeiro com um alto grau de precisão quando apenas dados futuros limitados estão disponíveis, tornando-se assim um alimentador confiável para qualquer tomada de decisão ou formulação de políticas de longo prazo”. Concluem que o modelo prevê efetivamente o comportamento do sistema a longo prazo;
- Kim; King (2020): propõem uma nova abordagem baseada em uma decomposição aditiva para uma ST como um pré-processador para uma *DeepESN*, avaliando-a com 6 conjuntos de dados: S&P 500, estacionamento em Birmingham, dados simulados caóticos, temperatura na Filadélfia, dados periódicos de compartilhamento de bicicletas. Concluem que possui desempenho superior, mesmo quando aplicado a ST não estacionários e caóticos;
- Maat; Gianniotis; Protopapas (2018): estudam o ajuste de hiperparâmetros da ESN para modelar um grupo de ST de comportamento temporal semelhante, não apenas ST individuais. Demonstram sua abordagem em conjuntos de dados sintéticos e conjunto de dados de curvas de luz astronômicas. Concluem que sua “abordagem resulta em uma redução significativa no número de modelos ESNs necessários para modelar um conjunto inteiro de dados, mantendo o desempenho preditivo para as séries em cada cluster”;
- Mallya (2021): compara a eficiência de abordagens padrão de previsão de ações para modelar sistemas não lineares caóticos, como preços de fechamento diário de ações no mercado de ações de NY. Afirma que o “modelo de rede neural usual pode falhar em prever os valores com precisão, pois os pesos inicializados do problema de seleção aleatória tendem a cair para o ótimo local antes de descer para o ótimo máximo, resultando em previsões incorretas”. Conclui dizendo que a “rede neural de estados de eco supera a regressão convencional e (outras) abordagens de rede neural (LSTM)”;
- Shen *et al.* (2018): propõem “um modelo de previsão de série temporal não linear multivariado robusto e adaptativo (...) baseado em rede neural de estados de eco e inferência variacional, (...) utilizado para lidar com o marginal função de verossimilhança da saída do modelo que é analiticamente intratável para a distribuição da mistura,” chamada “rede robusta variacional de estados de eco (RVESN)”. Concluem que “RVESN tem melhor desempenho de previsão”;

- Zheng *et al.* (2020): “propõem um modelo que consiste em uma estrutura de múltiplos reservatórios denominada redes de estados de eco de longo-curto prazo (LS-ESNs) para capturar as características temporais multiescala das séries temporais”. A LS-ESN possui três reservatórios independentes, cada reservatório com conexões recorrentes de uma escala de tempo específica, que são coletados e concatenados juntos. Eles concluem que foram capazes de “demonstrar a eficácia dos LS-ESNs propostos”.

Sobre revisões de literatura:

- Kumbure *et al.* (2022): apresentam uma revisão da literatura sobre técnicas de aprendizado de máquina aplicadas à previsão do mercado de ações examinando 138 artigos de periódicos publicados entre 2000 e 2019. O objetivo foi “ampliar o conhecimento atual em previsões do mercado de ações através de um estudo sistemático da literatura”. (...) Eles “estabeleceram as seguintes questões de pesquisa: (1) Que tipo de dados (variáveis e tipos de variáveis, bem como horizontes temporais) são usados? e (2) quais técnicas de aprendizado de máquina e IA foram aplicadas em estudos de previsão do mercado de ações?” Além dessas questões, eles incluíram “várias outras contribuições: uma discussão sobre modelos de previsão baseados em aprendizado de máquina de última geração nas últimas duas décadas, uma análise bibliométrica dos estudos selecionados com os contextos de investigação mais significativos (...), e métodos de validação, relativos à literatura selecionada”. Concluem que nos artigos havia 2.173 variáveis únicas usadas para previsões do mercado de ações e apresentam as técnicas de aprendizado de máquina e suas variantes implantadas para as previsões por meio de uma análise bibliométrica;

- Pérez-Pons *et al.* (2022): “objetivam identificar as aplicações mais recentes e fazer um estudo comparativo do desempenho de modelos econométricos e de AM”, visando “encontrar evidências empíricas para o desempenho de algoritmos de AM sendo superior aos modelos econométricos tradicionais”. Concluem que “não há certeza de que o desempenho do AM seja sempre superior ao dos modelos econométricos”;

- Thakkar; Chaudhari (2021): “revisam a importância e a necessidade das DNN (*Deep Neural Network*, em inglês) no campo do preço das ações e previsão de tendências (...), discutem a aplicabilidade das variações das DNN aos dados temporais do mercado de ações e também estendem (...) a pesquisa para incluir abordagens híbridas, bem como meta-heurísticas, com DNN”. “Observam as limitações potenciais para a previsão do mercado de ações usando várias DNNs”. (...) eles “também conduzem uma série de experimentos para previsão do mercado de ações usando nove modelos baseados em aprendizagem profunda;” eles “analisam o impacto desses modelos na previsão do mercado de ações”. Eles também “avaliam o desempenho de modelos individuais com diferentes

números de recursos”. Concluem seu trabalho mostrando as “perspectivas da previsão do mercado de ações baseada em DNN, cobrindo principalmente pesquisas que vão de 2017 a 2020”.

Sobre técnicas de “hibridização”:

- Ribeiro *et al.* (2021): propõem um modelo híbrido que combina HAR (auto-regressivo heterogêneo) com ESN e a meta-heurística PSO (otimização por enxame de partículas) para previsão diária de volatilidades realizadas de três ações da Nasdaq, “considerando horizontes de previsão de 1 dia, 5 dias e 21 dias à frente”. Eles compararam “com especificações existentes, como média móvel integrada autoregressiva (ARIMA), HAR, perceptron multicamadas (MLP) e ESN”. Eles “avaliaram em termos de métricas de desempenho de MSE e R^2 , e a comparação estatística foi feita através de um teste de Friedman seguido por um teste post-hoc de Nemenyi”. Concluem que o modelo proposto produz previsões mais precisas na maioria dos casos;

- Santos Jr. *et al.* (2019): propõem um sistema híbrido combinando um modelo ARIMA com Multi-Layer Perceptron e Support Vector Regression aplicado para prever seis ST complexas do mundo real, “que busca uma função adequada para combinar as previsões de modelos lineares e não lineares”. (...) o “sistema proposto realiza: (i) modelagem linear das séries temporais; (ii) modelagem não linear da série de erros; e (iii) uma combinação baseada em dados que busca: (iii.a) a função mais adequada, entre formalismos lineares e não lineares, e (iii.b) o número de previsões dos modelos (i) e (ii) que maximiza o desempenho da combinação”. Concluem que o “sistema híbrido proposto atinge desempenho superior em comparação com modelos simples e híbridos”;

- Singh; Parmar; Kumar (2021): combinam modelos de computação suave de transformação discreta de wavelet e eliminação de ruído de wavelet com modelos autorregressivos para prever preços de fechamento do índice BSE100 S&P Sensex. Afirmam que “métodos *wavelet*, são capazes de lidar com dados não lineares, combinados com modelos autorregressivos geram previsões mais precisas”. Concluem que este complemento gera previsões consideravelmente precisas.

Comparação entre AM e técnicas estatísticas:

- Makridakis; Spiliotis; Assimakopoulos (2018): utilizam conjuntos de dados da Competição M3 para comparar métodos de AM com oito técnicas estatísticas tradicionais e concluem que as estatísticas possuem alta precisão e requisitos computacionais consideravelmente menores que os dos métodos de ML;

- Shivani; Sandhu; Nair (2019): apresentam “um estudo comparativo de um modelo estatístico de série temporal (ARIMA, ...) e um modelo de aprendizagem profunda (RNN, ...)” para previsão de vento energia e ajudar a minimizar e também otimizar o uso de usinas convencionais, usando dois conjuntos de dados de vento: A- “consiste na velocidade média do vento contendo 192 pontos de

dados de base horária de 20 de janeiro de 2019 (das 00h00) a 27 de janeiro de 2019 (até às 23h00). Este conjunto de dados é de Coimbatore (Índia), retirado do site meteorológico meteoblue e a velocidade do vento é medida a 10m acima do solo”; e B- “contendo 865 pontos de dados com intervalo de 10 minutos entre cada ponto de 1º de janeiro de 2008 (das 00h00) a 7 de janeiro de 2008 (até às 00h00) que são retirados do Blandford MTA e os dados são coletados pelo RERL da Univ. de Massachussets”. Concluem “que para previsão da velocidade do vento de curto prazo, o modelo RNR funciona bem em comparação com o modelo ARIMA para nossos conjuntos de dados”.

Ao final, pode-se questionar quais são as possíveis conexões entre os métodos. Pode-se dizer que as conexões entre técnicas estatísticas e técnicas de AM ainda são incipientes. Cada área do conhecimento atua praticamente sozinha. O artigo que “hibridiza” ESN com técnica estatística é apenas um, de Ribeiro *et al.* (2021) e os artigos que apresentam modelos híbridos de ARIMA com outras técnicas são dois: Singh; Parmar; Kumar (2021) e Santos Jr. *et al.* (2019), em 1.331 artigos encontrados na consulta.

Outra questão que se pode levantar é se os métodos podem ser adequados para diferentes conjuntos de dados. Pensando-se em não utilizar apenas ST a resposta é sim (Qd. 3). Pensando-se em ST que não são de finanças, a resposta também é sim (Qd. 3).

Finalmente, podem ser respondidas as questões de pesquisa. Os modelos de CR existentes conhecidos são *Echo State Network* e *Liquid State Machine*, e estas são terminologias comuns para descrevê-los. Os componentes da ESN são Pesos de Entrada, Reservatório e Pesos de Saída. O conjunto de dados é recebido pelos Pesos de Entrada, depois passado ao reservatório, que trata a não linearidade e passa para os Pesos de Saída, os quais fazem a previsão. LSM e ESN são equivalentes. CR realiza previsões e pode ser aplicada a ST financeiras. A forma de melhorar essas previsões ainda está sendo estudada, mas a “hibridização” é, com certeza, uma possibilidade. A CR possui boa precisão para fazer previsões e os erros podem ser minimizados pela *DeepESN* ou pela “hibridização” com outras técnicas.

Mais detalhes sobre a revisão de literatura podem ser encontrados em CARDOSO *et al.* (2022b) e CARDOSO *et al.* (2024).

Além dos artigos selecionados e que, de alguma forma, estão relacionados com este trabalho, durante a realização da pesquisa, outros trabalhos relacionados foram encontrados. Destes, destacam-se Li; Han (2012), os quais falam sobre usar outra distribuição no lugar na distribuição Normal para gerar os pesos aleatórios na ESN e Lin; Yang; Song (2009), os quais usaram uma ESN para prever o próximo preço de fechamento nos mercados de ações.

2.6.5 Atualização da literatura

No decorrer do projeto novas pesquisas foram realizadas para escrita da tese. A meta-síntese dos artigos consultados está a seguir, organizados por data e em ordem alfabética do sobrenome do primeiro autor:

- Berradi *et al.* (2022): propõem um modelo híbrido de “LSTM com mecanismo de atenção e análise de sentimentos para prever o preço de fechamento de duas séries”, comparando à LSTM com mecanismo de atenção e à LSTM com análise de sentimentos. Utiliza MSE, RMSE e MAE para avaliar os resultados e afirma que o método proposto desempenha melhor que a LSTM pura;
- Fazla; Aydin; Kozat (2023): usam SARIMAX, como método linear, e árvore de decisão aumentada, como método não linear, buscando minimizar sobreajuste e subajuste na modelagem com regressão linear de dados sequenciais. Demonstram melhoras significantes no uso do método híbrido em relação aos métodos individuais;
- Feng (2023): analisa ARIMA-GARCH como previsor de volatilidade de ação e afirma que tem um bom efeito na previsão do preço de ação no curto prazo;
- Huang *et al.* (2023): comparam os resultados de previsão dos modelos ARIMA-GARCH e LSTM na “perspectiva de previsão dinâmica e estática com base em dados do índice SSE”. “Os resultados demonstram que os métodos de previsão dos modelos afetam seus efeitos de previsão, e o modelo ARIMA-GARCH tem a maior precisão média de previsão em previsão estática, enquanto o modelo LSTM tem o efeito de previsão mais preciso em previsão dinâmica, com um valor RMSE de apenas 6,32%”;
- Mohandas (2023): “foca em prever a volatilidade com modelos de ST do índice S&P500 baseado em dados históricos”. A previsão da volatilidade é realizada a partir da modelagem por ARIMA-GARCH, utilizando diversas variáveis exógenas. Afirma obter melhor acurácia na predição no uso do método híbrido estatístico em relação a cada método individualmente;
- Wang (2023): explora um modelo híbrido ARIMA-GARCH-S, onde S significa *Stacking* para previsão de ações no curto prazo com o intuito de melhorar a acurácia das predições. Afirma que “ARIMA-GARCH-S tem vantagem preditiva significativa sobre ARIMA” e que a técnica proposta é “uma ferramenta mais precisa e estável”;
- Li (2024): avalia a eficácia do ARIMA-GARCH na predição do preço de ações e afirma que aumenta substancialmente a acurácia da previsão do preço de ação no curto prazo;
- Mehtarizadeh *et al.* (2024): objetiva “prever o preço de fechamento das ações usando a rede Long Short-Term Memory (LSTM) modificada pelo Algoritmo Seno-Coseno (...) ARIMA e (...) GARCH, que é chamado de modelo LSTM-SCA-ARIMA-GARCH”. Realiza previsões de curtíssimo

prazo: diárias e semanais de 8 ações, sendo que as previsões diárias foram mais precisas e o modelo proposto é acima de 80% melhor que LSTM e combinação de LSTM com *Particle Swarm Algorithm* (PSO) e mais de 55% melhor que LSTM-ARIMA;

- Srirari *et al.* (2024): objetiva “prever o preço das ações e analisar a volatilidade do retorno das três principais empresas socialmente responsáveis da Índia” usando modelos ARIMA-GARCH “para prever o preço de ações e analisar a volatilidade dos retornos”. Conclui que Reliance Industries Ltd. é menos volátil e HDFC Ltd. é mais volátil.

- Tian; Pei (2024): otimiza os hiperparâmetros da ESN pelo *Sparrow Search Algorithm* (SSA) e compara o desempenho com modelos *Backpropagation Neural Network*, *Elman Neural Network*, LSTM e a própria ESN. Afirma que a precisão da predição da ESN otimizada por SSA é significativamente melhor que dos outros quatro modelos.

Entre a revisão sistemática e a atualização, os artigos continuam apontando o uso da metodologia ARIMA-GARCH e também da ESN, nos anos mais recentes. No entanto, não demonstram que a técnica proposta exista, e também não é comum encontrar artigos que utilizem ARIMA-EGARCH ou variações do GARCH. Percebe-se, então, que este ainda é o estado da arte para este tipo de problema se observarmos do ponto de vista Estatístico. Já do ponto de vista computacional, percebe-se que a ESN não é tão utilizada com séries temporais financeiras, embora possua potencial para tal. Isto só permite confirmar a lacuna de pesquisa e a revisão de literatura realizada permite embasar a metodologia proposta.

3 - ESTUDOS DE CASO: METODOLOGIA E RESULTADOS

Este capítulo apresenta o trabalho realizado, mostrando como dever feito para ser replicado, detalhando as metodologias utilizadas e a metodologia proposta, conforme Fig. 4, e também apresenta os resultados obtidos nas Séries Temporais (ST) reais.

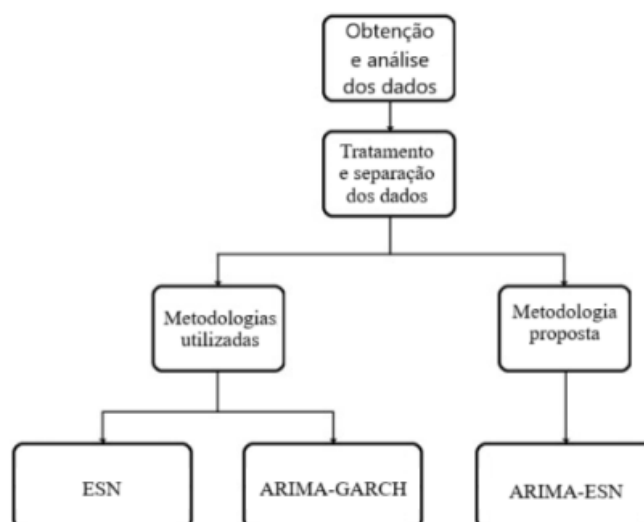


Figura 4: Metodologias utilizadas e proposta

As metodologias utilizadas já são conhecidas da literatura, quais sejam: ARIMA-EGARCH e ESN. A metodologia proposta consiste em associar as metodologias ARIMA e ESN.

3.1 Obtenção e análise dos dados

Para utilizar qualquer uma das metodologias supracitadas, é necessário obter os dados. As ST utilizadas são dos preços de fechamento dessas ações, em cada uma é considerado o período entre 02-01-2001 e 30-06-2023, cujos dados são baixados do BovDB⁵ (CARDOSO et al., 2022c). O BovDB é um banco de dados de todas as ações existentes na Bovespa e na B3 entre 1995 e 2020, mas a este se acrescentam dados específicos para a ação estudada entre 02-01-2021 e 30-06-2023. Também obtém-se, por meio do software Metatrader, versão 5.00⁶, *logado* em uma conta da XP Investimentos, os preços de fechamento *intraday* de 30 em 30 min para realização do cálculo das variâncias diárias. O software e os conjuntos de dados são obtidos gratuitamente.

A linguagem de programação utilizada foi a R, sendo os *scripts* executados no ambiente R Studio (R CORE TEAM, 2022), pois as bibliotecas são confiáveis e úteis para se realizar a análise descritiva, ajustar os hiperparâmetros, modelar as ST e calcular os resíduos, previsões e erros.

⁵ Disponível em: <https://github.com/Ginfofinance/BovDBRepository>

⁶ Disponível em: <https://www.metatrader5.com/pt/download>

Após obtidos os dados e definidas as ferramentas a serem utilizadas, passa-se a análise dos dados. Para análise dos dados são gerados gráficos, tabelas com as medidas resumo incluindo média, mediana, desvio padrão, coeficiente de assimetria e coeficiente de curtose, além de histogramas, boxplots e qqPlots de toda ST. Tendo sido realizada a análise estatística descritiva, para análise dos dados, passa-se ao tratamento e separação dos dados.

3.2 Tratamento e separação dos dados

O tratamento dos dados consiste no cálculo dos retornos e log retornos, conforme Eqs. 1 e 2. Como as ST possuem valores iniciando em 02 de janeiro de 2001, utilizando as Eqs. 1 e 2 em cada ST de retornos, ter-se-ia um valor a menos do que na ST dos dados, no entanto, o BovDB possui dados desde 1995 e, portanto, utilizou-se o preço em 28 de dezembro de 2000 para cálculo do primeiro retorno e do primeiro log retorno. Os retornos são utilizados com a ESN e na metodologia proposta e os log retornos com o ARIMA-GARCH.

Inicialmente, os dados são separados em ajuste e validação. Neste trabalho, adota-se 80% dos dados para ajuste e 20% para validação para a metodologia ARIMA-GARCH e, para a ESN, dos dados de ajuste, 3/4 para treino (60% de toda ST) e 1/4 para validação (20% de toda ST), e, neste caso, os dados de validação são ditos de teste (20% de toda ST).

3.3 Métodos de modelagem

A seguir estão apresentadas as metodologias utilizadas: ESN e ARIMA-EGARCH, conforme apresentadas nas seções 2.1 e 2.2.

3.3.1 ESN

A Fig. 5 apresenta um fluxograma com uma síntese da metodologia ESN, aplicada nos retornos das ST analisadas.



Figura 5: Metodologia ESN utilizada

Os resultados obtidos nesta modelagem servem para comparação com os obtidos na metodologia híbrida proposta e na metodologia híbrida estatística, esta última como um *benchmark*.

A ESN para ser utilizada necessita, inicialmente, do ajuste de diversos hiperparâmetros. Estes podem ser ajustados a partir do conhecimento do pesquisador sobre diversos fatores, como a ST

estudada, a caoticidade esperada, o quanto de memória se quer manter na influência de um dado sobre outro, entre outros. No entanto, não existe uma técnica específica que permita otimizar estes hiperparâmetros, desta forma, diversos algoritmos de otimização são apresentados na literatura para tal. Embora seja possível encontrar alguns artigos em que o conhecimento do pesquisador seja utilizado, neste trabalho, opta-se por otimizar estes hiperparâmetros por meio de um Algoritmo Genético (AG) (Ferreira; Ludermir, 2009; Basterrech; Rubino, 2023).

As faixas de valores dos hiperparâmetros, do total de 55 bits utilizados, são as seguintes:

- Os primeiros 17 bits compõem a taxa de vazamento (*leaking rate- α* , em inglês), limitada a 131.071 números reais no intervalo (0,1] (zero significaria desconsiderar a função de ativação e não usar memória);
- Os bits 18 a 34 compõe o raio espectral (*spectral ray-sr*, em inglês), limitado a 131.071 números reais no intervalo (0,1];
- Os bits 35 a 41 compõe os Valores Iniciais Desconsiderados (VID), limitados a inteiros no intervalo [2,130];
- Os bits 42 a 46 compõe o tamanho do reservatório, limitado a inteiros no intervalo [2,34];
- Os bits 47 a 55 compõe o coeficiente de regularização, limitado a 512 números reais no intervalo $(0,10^{-6}]$, mas padronizado da seguinte forma $reg = (reg + 10^{-4}) * (10^{-4} - 10^{-6})$. Observa-se que quando o AG escolhe 0 o valor resultante é $9,9 \times 10^{-9}$.

Como se utiliza o limite de 10.000 épocas e um máximo de 3.500 épocas não melhoradas, fazem-se três otimizações da mesma ST com o AG, a fim de se testar diferentes cenários possíveis de otimização. Mesmo porquê o AG não garante que se atinja o ótimo global.

Para o cálculo do *fitness* do AG, utiliza-se o MAE como critério de avaliação do modelo, considerando como função de otimização do algoritmo genético 40% do MAE de treino e 60% do MAE de validação.

Como a ESN apenas será usada como forma de comparação com a metodologia híbrida proposta, apresentam-se apenas os resultados obtidos com a geração de pesos aleatórios utilizando as distribuições de probabilidade Uniforme e Normal para W^{in} e W , como recomendado na literatura sobre ESN. Para tal, na distribuição Uniforme utilizou-se limite inferior -1 e superior 1 e na distribuição Normal utilizou-se média zero e desvio padrão um. Para as ST da ITSA4, da PETR4 e das ST simuladas não houve combinação entre as distribuições para geração dos Pesos de Entrada e do Reservatório, tendo sido utilizada a mesma distribuição com os mesmos argumentos para a geração dos pesos.

Obtendo-se os hiperparâmetros, a partir dos dados de treino e validação, o próximo passo é aplicar o modelo gerado aos dados de teste (variância diária dos retornos). No entanto, especificamente para a ESN que recebe retornos, treina e valida com retornos e, portanto, prevê retornos, transformam-se esses retornos previstos em variâncias dos retornos.

Como o mês geralmente possui em torno de vinte e um dias úteis, escolhe-se utilizar os valores preditos pela ESN, para o período de teste, concatenados ao início da ST com vinte e um valores preditos do final da ST de treino, porque o primeiro valor predito é para o segundo dia da ST de validação, então, os últimos 1117 valores são utilizados para comparação com a variância diária dos retornos e cálculo dos erros. Também é importante salientar que, neste trabalho, a previsão é feita um dia à frente.

Os comandos utilizados na R para executar a modelagem ESN podem ser vistos no Apêndice L.

3.3.2 ARIMA(p,d,q)-EGARCH(m,n) para previsão da volatilidade

A Fig. 6 apresenta um fluxograma com uma síntese da metodologia ARIMA(p,d,q)-EGARCH(m,n), aplicada nos log retornos das séries analisadas.

Primeiramente, é realizada a verificação da estacionariedade da ST dos log retornos do ajuste. Não se verificando esta propriedade na ST, é necessário diferenciá-la a fim de torná-la estacionária.

Ainda deve ser verificado na ST se há tendência ou não, constante ou não. Para avaliar a presença, ou não, de tendência, podem ser aplicados os testes Cox-Stuart (Cox; Stuart, 1955), Mann-Kendall (Libiseller; Grimvall, 2002) e Wald-Wolfowitz (Wald; Wolfowitz, 1943). A presença, ou não, de constante avalia-se pelo teste ADF.

Além disso, para aplicação do teste ADF, é preciso determinar a quantidade máxima de defasagens a ser utilizada, o que pode ser feito pelos critérios de Schwert (Schwert, 1989) e de Hyndman (Hyndman; Athanasopoulos, 2023), da seguinte forma na R:

$$\begin{array}{ll} \text{Critério de} & \\ \text{Schwert} & \text{lag.max} = \text{trunc} \left[12. \left(\frac{T}{100} \right)^{\frac{1}{4}} \right] \end{array} \quad (23)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Critério de} & \\ \text{Hyndman} & \text{lag.max} = \text{trunc} \left[4. \left(\frac{T}{100} \right)^{\frac{2}{9}} \right] \end{array} \quad (24)$$

O passo seguinte consiste em identificar os modelos, o que é feito visualmente e depende dos gráficos das Funções de Autocorrelação (FAC) e Autocorrelação Parcial (FACP). Com isto, busca-se identificar em quais defasagens são significativas e se se está diante de um modelo apenas Auto-Regressivo (*Autoregressive-AR*, em inglês) ou de Médias Móveis (*Moving Average-MA*, em inglês) ou ambos, bem como as suas ordens p e q . Os critérios para fazer esta identificação por meio dos gráficos da FAC e FACP estão melhor descritos em Morettin (2017). Considerando a subjetividade da representação gráfica, nesta etapa costuma-se identificar um conjunto de modelos candidatos, considerando todas as combinações possíveis entre $(p \pm 1)$ e $(q \pm 1)$.

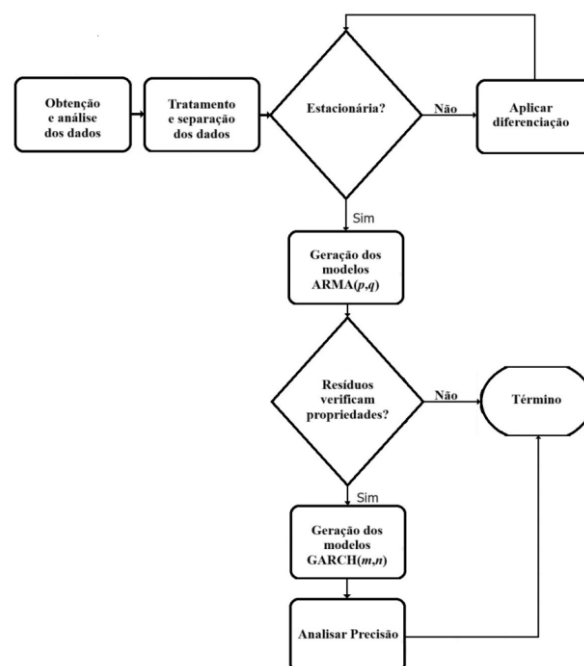


Figura 6: Metodologia ARMA(p,q)-GARCH(m,n) utilizada

Imediatamente, se aplica o Arima, a fim de obter os critérios de informação de Akaike – AIC (Akaike, 1974), de Akaike corrigido – AICc (HURVICH; TSAI, 1993) e Bayesiano – BIC (Schwarz, 1978), os quais ajudam a identificar os modelos mais parcimoniosos.

Verificando-se modelos com e sem constante. Neste caso, considera-se que um critério de informação com menor valor possui uma relevância maior, isto é, seja mais parcimonioso e, conseqüentemente, o erro que ocorrerá na previsão é mais preciso.

Algumas vezes a interpretação dos gráficos da FAC e FACP é inconclusiva, fazendo-se necessário determinar valores máximos para p e q e modelar todas as combinações possíveis para

estas ordens máximas. Neste caso o conjunto de modelos candidato é formado pelos modelos mais parcimoniosos. No presente estudo é adotada esta estratégia, sendo considerado 7 como valor máximo.

A partir dos critérios de informação AIC, AICc e BIC, são escolhidos os dois identificados como mais parcimoniosos pelo AIC, que coincidiu com o AICc, e os dois mais parcimoniosos identificados pelo BIC. Com os quatro modelos gerados, calculam-se os resíduos: diferença entre os log retornos da ST e os previstos pelo $\text{ARMA}(p,q)$.

A seguir, analisam-se as propriedades dos resíduos, para verificar se há evidências de independência nos mesmos e se nos resíduos quadráticos há evidência de dependência. Caso se evidenciem estas condições, podem ser utilizados estes resíduos para gerar modelos $\text{EGARCH}(m,n)$ ou outra variação do GARCH. Também é desejado que os resíduos possuam uma distribuição de probabilidade Normal e que haja evidência de heteroscedasticidade. Para isto foram utilizados os testes de Jarque-Bera e ARCH.

A determinação das ordens m e n do modelo GARCH segue o mesmo critério das ordens p e q do modelo ARIMA. No presente estudo, porém, adota-se o valor 3 como máximo. Após, aplicam-se os resíduos quadráticos $\text{ARMA}(p,q)$ ao GARCH e, então, obtém-se os critérios de informação AIC e BIC, com a finalidade de identificar os modelos $\text{ARMA}(p,q)\text{-GARCH}(m,n)$ mais parcimoniosos.

Encontrados os dois modelos mais parcimoniosos de acordo com AIC e BIC, o passo seguinte é calcular os resíduos padronizados de cada modelo: diferença entre os log retornos e as previstas pelo $\text{ARMA}(p,q)\text{-EGARCH}(m,n)$. A partir daqui, verifica-se se há evidências de que os resíduos possam ser independentes, obrigatoriamente, e homocedásticos e normais, desejadamente.

Como nas análises iniciais observa-se um comportamento assimétrico dos resíduos, algumas variações do $\text{GARCH}(m,n)$ são utilizadas para capturar melhor essa assimetria. Desta forma, na modelagem pode utilizar-se outras variações, como EGARCH (*Exponencial GARCH*), CSGARCH (*Component Standard GARCH*), GJR GARCH (*Glosten-Jagannathan-Runkle GARCH*) e TGARCH (*Threshold GARCH*).

Das variações do GARCH citadas, a que tem melhor desempenho, neste trabalho, é a EGARCH e, por motivos de simplificação do texto, apenas esta será detalhada. Após aplicar-se o EGARCH aos resíduos quadráticos do $\text{ARMA}(p,q)$, podem ser obtidos os critérios de informação AIC e BIC, com a finalidade de encontrarem-se os modelos $\text{ARMA}(p,q)\text{-EGARCH}(m,n)$ mais parcimoniosos.

A previsão das variâncias é útil quando os dados são heteroscedásticos, ou seja, as variâncias diárias são diferentes, indicando oscilações no preço dentro do dia, ou melhor, a volatilidade. As variâncias calculadas, neste trabalho, são dos preços a cada trinta minutos, após o pregão de abertura e antes do pregão de fechamento por dia.

Para verificação da capacidade preditiva dos modelos $ARMA(p,q)$ -EGARCH(m,n) são calculados os erros: MAE (*Mean Absolute Error*), RMSE (*Root Mean Squared Error*) e MdAE (*Median Absolute Error*). No entanto, para realizar-se uma comparação mais justa com as outras técnicas foram retirados os logaritmos, tendo se calculado o antilog da previsão.

Por fim, é gerado um gráfico em linhas que demonstra visualmente a diferença entre o previsto e o observado.

Os comandos utilizados na R para executar a modelagem ARMA-EGARCH podem ser vistos no Apêndice L.

3.3.3 Híbrido proposto

A seguir está apresentada a metodologia proposta: ARIMA-ESN que foi executada com os retornos calculados. Nesta metodologia foram utilizados os retornos, calculados como demonstrado na Eq. 1, isto se justifica porque se supõe que a ESN, por ser uma Rede Neural Artificial (RNA) projetada para lidar com a caoticidade de dados, necessite que haja uma variância maior entre eles, ou seja, quando os valores são próximos ela não se comporta tão bem e a aplicação do logaritmo aos retornos faz com que essa variância tenda a diminuir. Esta suposição está baseada na comparação dos resultados de (CARDOSO; BERRI e DE MATTOS, 2022) com os resultados deste trabalho.

A metodologia híbrida consiste na associação da técnica estatística ARIMA com a técnica de AM ESN, de forma que os erros gerados sejam modelados pela RNA a fim de gerar previsões. Estas previsões são da variância, como usual na literatura estatística, mas também poderiam ser dos próprios retornos, do ponto de vista da Computação.

Primeiramente, aplica-se $ARIMA(p,d,q)$ aos retornos para captar o movimento linear dos dados, o que é feito da maneira descrita anteriormente. Da mesma forma que no GARCH, busca-se um modelo que tenha resíduos independentes e resíduos quadráticos autocorrelacionados. Mas, nos resíduos quadráticos, aplica-se ESN para captar o movimento não linear, o que é feito da mesma maneira descrita anteriormente. Embora, para a ESN, a obrigatoriedade destas propriedades não impeçam de realizar previsões, elas podem alterar os resultados finais para fins de comparação.

Os resíduos ao quadrado servem para realizar o treino e a validação do modelo pela ESN. Terminada a etapa de treino-validação, o próximo passo é testar o modelo. Neste trabalho, utilizam-se os 20% finais da ST para teste.

Como um acréscimo à metodologia proposta, trocaram-se as distribuições de probabilidade utilizadas originalmente pela ESN para gerar os pesos de entrada (W^{in}) e do reservatório (W), quais sejam, Uniforme ou Normal, por distribuições comumente utilizadas no GARCH(m,n), quais sejam, t de Student e GED. Assim, quatro distribuições foram utilizadas para gerar esses pesos aleatórios.

Para definição dos parâmetros a utilizar na geração dos pesos aleatórios de W_{in} e W opta-se, na distribuição Normal, por utilizar-se média zero e desvio padrão um e na Uniforme limite inferior menos um e superior um. Nas distribuições t de Student e GED, opta-se por utilizarem-se parâmetros que melhor se encaixem aos dados reais ou simulados. O intuito da mudança nas distribuições de probabilidade é de verificar se isto produz, ou não, melhora no resultado final do ARIMA-ESN.

Os comandos utilizados na R para executar a modelagem ARIMA-ESN podem ser vistos no Apêndice L.

3.4 Resultados obtidos nos estudos de caso

Neste projeto foram utilizadas duas ST dos preços de ações: ITSA4 e PETR4, ambas da B3, as quais foram analisadas separadamente.

A ITSA4 foi escolhida porque o conglomerado Itaú S.A. não engloba apenas o banco Itaú, mas também outras empresas, como Alpargatas, Dexco, CCR, Aegea Saneamento, Copa Energia e NTS⁷, ou seja, representa diversos tipos de empresas e, portanto, diversas áreas da economia brasileira, a PETR4 foi escolhida porque é uma empresa estatal multinacional brasileira, que representa uma parte importante do índice Bovespa, cerca de 6,628%⁸, além disso sua ST de dados brutos apresenta uma queda estrutural desafiadora para modelagem.

No decorrer da pesquisa, testes foram realizados com ARIMA-GARCH e suas variações, bem como com a ESN, com diversas ST e diversos períodos de tempo, não somente utilizando retornos ou log retornos, como também dados brutos de preços de ações padronizados, normalizados e com fator de correção aplicado, além de outras distribuições de probabilidade, para geração dos pesos aleatórios da ESN, e combinações entre elas, ou seja, uma para gerar os Pesos de Entrada outra para os Pesos do Reservatório. No entanto, por ser inviável colocar tudo o que foi realizado durante o projeto dentro do texto, serão apresentados apenas os resultados mais destacados e relativos à tese, resultados complementares estão apresentados nos Apêndices, para uma melhor compreensão. Artigos publicados durante o projeto podem ser lidos em Cardoso; Berri; de Mattos (2022); Cardoso *et al.* (2022a); Cardoso *et al.* (2023) e de Araújo *et al.* (2024).

3.4.1 Análise exploratória dos dados da ITSA4

a) Dados brutos

Os dados da ITSA4 foram divididos em treino, validação e teste, conforme usual em aplicações de AM, da seguinte forma: 60% para treino, 20% para validação e 20% para teste. No entanto, para uso no ARIMA-GARCH e variações os 60% foram unidos aos 20%, resultando em 80%

7 Fonte: <https://www.itausa.com.br/Estrutura-Societaria>, acesso em: 15 de janeiro de 2025

8 Fonte: https://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/indices-amplos/indice-ibovespa-ibovespa-composicao-da-carreira.htm, acesso em: 16 de abril de 2025

para ajuste e 20% para validação, como é comum em aplicações estatísticas. As datas de treino variaram entre 02 de janeiro de 2001 e 23 de junho de 2014, as de validação entre 24 de junho de 2014 e 28 de dezembro de 2018 e as de teste entre 02 de janeiro de 2019 e 30 de junho de 2023.

Na análise da ST dos dados da ITSA4, Fig. 7, houve uma tendência de alta entre 2001 e 2007, e ocorreu uma queda acentuada entre 2008 e 2009. Além disso, antes de 2005, os preços foram inferiores a R\$5, e, depois de 2006, foram superiores a R\$7, em sua maioria, caracterizando-se uma quebra estrutural por mudança de nível. No período de validação houve inicialmente uma tendência de baixa, depois de alta. No período de teste a ação oscilava no início, então houve uma queda abrupta em março de 2020, devido à pandemia de Covid-19, e até meados de 2023 não havia retornado ao patamar de antes da pandemia.

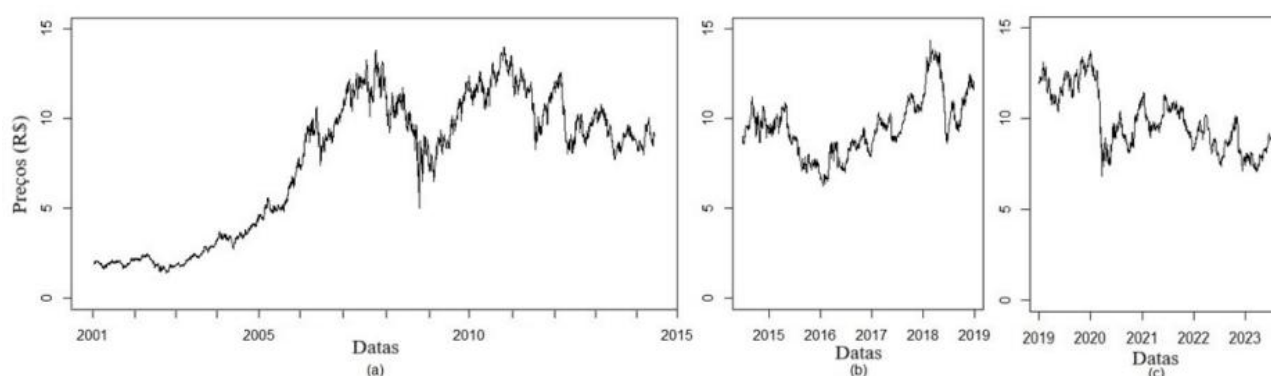


Figura 7: ST dos preços de fechamento diário da ITSA4 (a)treino, (b)validação e (c)teste, entre 02-01-2001 e 30-06-2023

O resumo das medidas dos dados brutos da ITSA4 está apresentado na Tab. 1.

Tabela 1: Medidas resumo da ITSA4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023

Ação	Mínimo (R\$)	Média (R\$)	Mediana (R\$)	Máximo (R\$)	Desvio Padrão	Coefficiente de Assimetria	Coefficiente de Curtose
ITSA4	1,43	8,58	9,30	14,38	3,33	-0,80	-0,37

Analisando as medidas apresentadas na Tab. 1 percebeu-se que a ST da ITSA4 é assimétrica e platicúrtica, como também pode ser comprovado no histograma (Fig. 8 (a)), no qual se percebeu que a cauda à direita é menos longa do que à esquerda, indicando que os valores maiores estão mais concentrados que os menores. Este gráfico evidencia a mudança de nível, identificada na Fig. 7(a), ficando o histograma com a aparência de uma distribuição bimodal. Do gráfico da assimetria, (Fig. 8 (b)) percebeu-se que os dados são assimétricos e foram identificados possíveis *outliers* inferiores. No

qqPlot (Fig. 8 (c)) demonstrou-se que a distribuição dos dados não se aproxima da distribuição Normal.

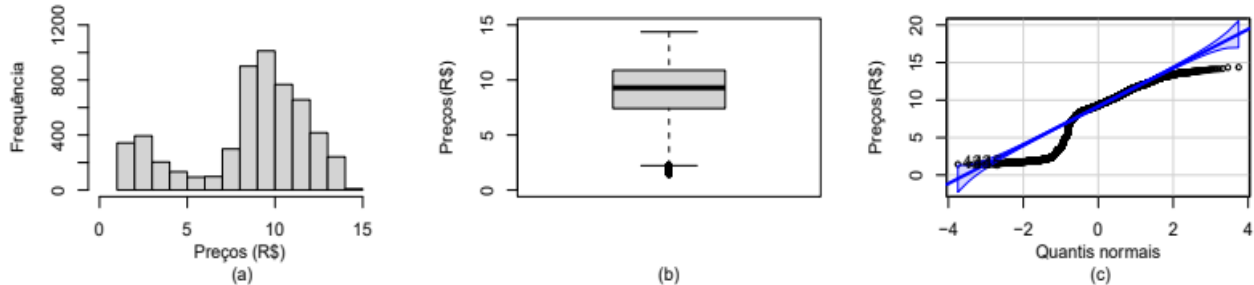


Figura 8 - (a)Histograma, (b)Boxplot e (c)qqPlot dos preços do fechamento diário da ITSA4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023

b) Retornos

Na análise da ST dos retornos dos valores de fechamento diário da ITSA4 (Fig. 9) perceberam-se diversas oscilações, mas uma superior destacou-se, no mês de outubro de 2008, pois houve uma alta de mais de 0,2% em um único dia. Notaram-se variações de preço que se destacaram tanto para baixo quanto para cima.

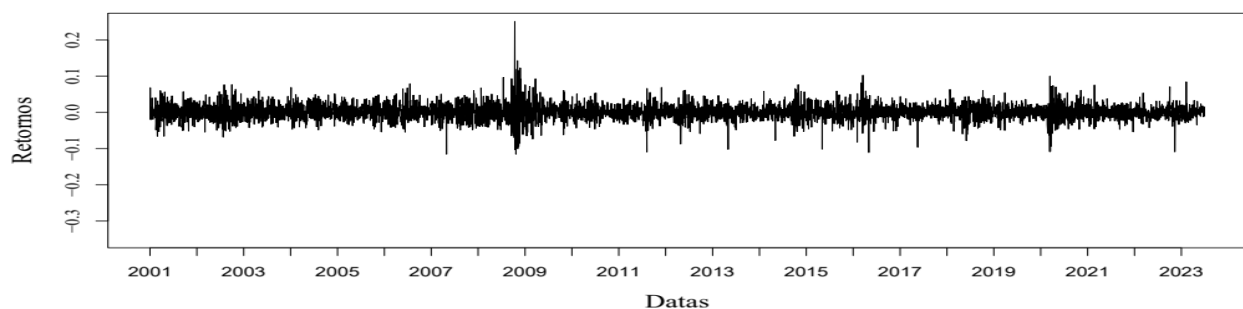


Figura 9: ST de retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023

O resumo das medidas dos retornos da ITSA4 está apresentado na Tab. 2.

Tabela 2: Medidas resumo dos retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023

Ação	Mínimo (%)	Média (%)	Mediana (%)	Máximo (%)	Desvio Padrão	Coefficiente de Assimetria	Coefficiente de Curtose
ITSA4	-0,115	$5,247 \times 10^{-4}$	0,000	0,251	$2,176 \times 10^{-2}$	0,329	6,243

Analisando-se a Tab. 2, observou-se que a ST dos retornos da ITSA4 é simétrica e acentuadamente leptocúrtica, conforme histograma (Fig. 10 (a)). Comparando-se com log retornos, percebe-se que a variação entre máximo e mínimo é maior, bem como a média. No *boxplot* (Fig. 10

(b)) percebeu-se que a ST possui mediana no zero e uma boa quantidade de *outliers* tanto superiores quanto inferiores. No *qqPlot* (Fig. 10 (c)) notou-se que a distribuição de probabilidade dos dados não se aproxima da distribuição Normal.

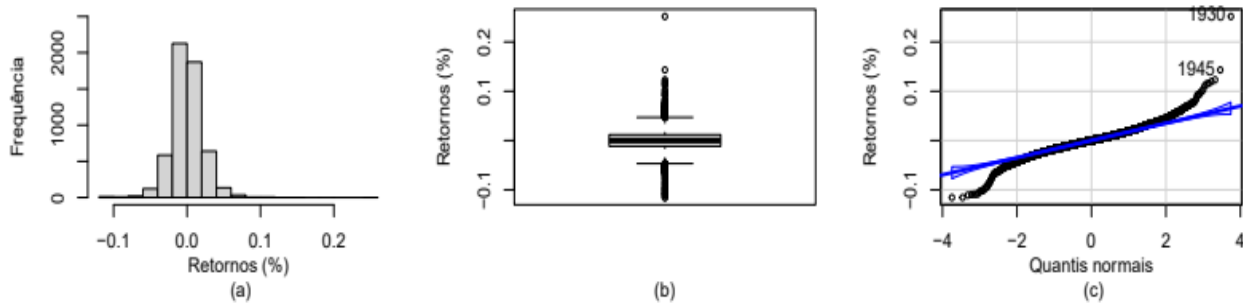


Figura 10: (a)Histograma, (b)Boxplot e (c)QQPlot dos retornos da ITSA4,entre 02-01-2001 e 30-06-2023

c) Log retornos

Na análise da ST de log retornos dos preços de fechamento da ITSA4 (Fig. 11) perceberam-se oscilações similares a ST dos retornos, e uma superior destacou-se no mês de outubro de 2008, superando 0,2 em um dia.

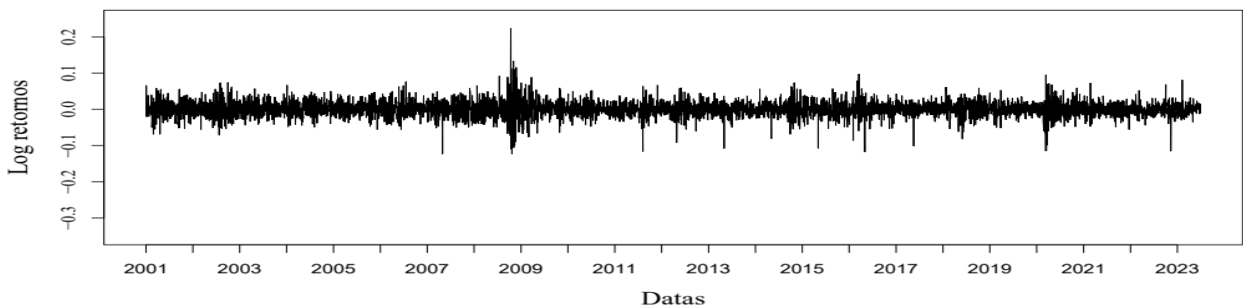


Figura 11: ST de log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023

O resumo das medidas da ST de log retornos da ITSA4 está apresentado na Tab. 3:

Tabela 3: Medidas resumo dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023

Ação	Mínimo	Média	Mediana	Máximo	Desvio Padrão	Coefficiente de Assimetria	Coefficiente de Curtose
ITSA4	-0,122	$2,887 \times 10^{-4}$	0,000	0,224	$2,171 \times 10^{-2}$	0,830	5,225

Analisando-se a Tab. 3, observou-se que a ST de log retornos da ITSA4 é assimétrica e acentuadamente leptocúrtica, conforme evidenciada no histograma (Fig. 12 (a)). No *boxplot* (Fig. 12 (b)) percebe-se que a ST possui mediana no zero e uma boa quantidade de *outliers*, tanto superiores

quanto inferiores. No *qqPlot* (Fig. 12 (c)) nota-se que a distribuição de probabilidade dos dados não se aproxima da distribuição Normal.

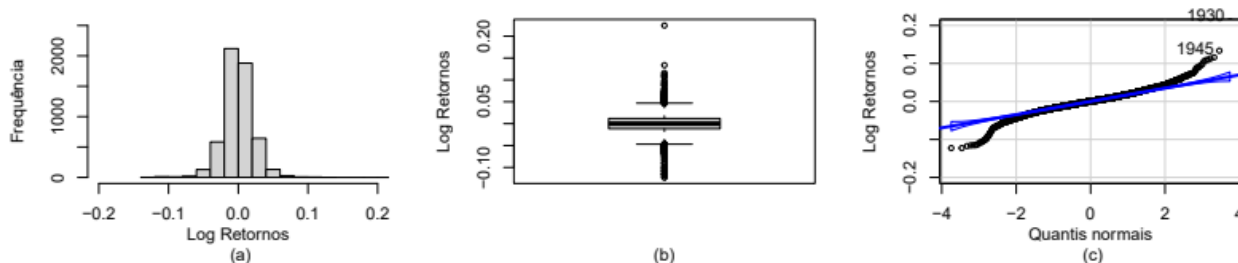


Figura 12: (a)Histograma, (b)Boxplot e (c)QQPlot dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023

3.4.2 Modelagem ESN com retornos para previsão da volatilidade da ITSA4

Após a análise exploratória dos dados, realizou-se a modelagem pela ESN. Conforme explicado na subseção 3.3.1, utilizando-se o Algoritmo Genético (AG) para otimização dos hiperparâmetros da ESN.

Tabela 4 - Hiperparâmetros da ITSA4 otimizados por AG da ESN, distribuições Uniforme e Normal

Distribuição	Épocas	Taxa de Vazão (α)	Raio Espectral (sr)	VID*	Tamanho do Reservatório	Coefficiente de Regularização
Uniforme	7582	0,538265520214	0,917426433002	85	31	0,000000591113
	4179	0,692082916892	0,973045143472	29	27	0,000000009900
	4048	0,797582989372	0,899863432796	126	28	0,000001366044
Normal	6493	0,531208276430	0,739652554722	30	2	0,000000009900
	3741	0,547588711462	0,929381785444	83	29	0,000000009900
	4630	0,542858450763	0,923194299273	24	27	0,000017446299

Obs.: VID*: Valores Iniciais Desconsiderados

Na Tab. 4 estão apresentados os hiperparâmetros da ESN, treinados e validados com os retornos da ITSA4. Percebeu-se o seguinte:

- O número de épocas variou nas duas distribuições, mas mais na Uniforme;
- A taxa de vazão não oscilou significativamente na Normal, o que ocorreu na Uniforme;
- O raio espectral oscilou menos na distribuição Uniforme;
- As variações dos VID oscilaram aproximadamente entre seis meses (126 dias úteis), no máximo, na distribuição Uniforme e aproximadamente quatro meses (83 dias úteis), no máximo, na

distribuição Normal, tendo o menor valor ficado em pouco mais de um mês (24 dias úteis) na distribuição Normal e um mês e uma semana (29 dias úteis) na Uniforme;

- O tamanho do reservatório alcançou o mínimo de 2 na distribuição Normal, o que pode ter reduzido o raio espectral significativamente em relação as outras 2 épocas da distribuição Normal. Salienta-se que após realizado o ajuste dos hiperparâmetros o tempo de execução da ESN dependerá bastante do tamanho do reservatório, ou seja, tamanho menor aponta para uma matriz menor, o que implica uma execução mais rápida. No entanto, essa diferença depende das configurações do computador e pode variar até poucos segundos, normalmente;
- O coeficiente de regularização oscilou mais na distribuição Uniforme.

Na Tab. 5 apresentam-se as métricas dos erros obtidos com a ESN nas etapas de treinamento, validação e teste. Percebeu-se que, quando se treina e valida a ESN com as diferentes distribuições, os erros de treinamento e validação não mudaram tanto de uma distribuição para outra. No período de teste os melhores MAE, RMSE e MdAE foram obtidos com a distribuição Normal. Além disso, percebeu-se que na distribuição Normal houve uma variação maior dos resultados entre as épocas. Assim, considera-se que o melhor desempenho ocorreu com a distribuição de probabilidade Uniforme.

Tabela 5 - Capacidade preditiva da ESN da ITSA4, pelas distribuições Uniforme e Normal

Distribuição	Épocas	MAE			RMSE			MdAE		
		Treina (%)	Valida (%)	Testa (%)	Treina (%)	Valida (%)	Testa (%)	Treina (%)	Valida (%)	Testa (%)
Uniforme	7582	0,01626	0,01512	0,00002	0,02199	0,02064	0,00004	0,01239	0,01154	0,00001
	4179	0,01626	0,01510	0,00002	0,02207	0,02055	0,00004	0,01237	0,01171	0,00001
	4048	0,01629	0,01509	0,00002	0,02208	0,02058	0,00004	0,01239	0,01164	0,00001
Normal	6493	0,01626	0,01505	0,00002	0,02205	0,02053	0,00004	0,01233	0,01174	0,00001
	3741	0,01626	0,01506	0,00002	0,02205	0,02054	0,00004	0,01235	0,01145	0,00001
	4630	0,01628	0,01513	0,00002	0,02209	0,02059	0,00004	0,01246	0,01149	0,00001

Obs.: em negrito estão indicados os menores valores em cada coluna a partir da nona casa decimal

Obs.: em negrito estão os menores valores de cada distribuição

Na Fig. 13, vê-se a evolução do *fitness* usando MAE (40% de treinamento e 60% de validação) para o melhor resultado da ITSA4, com 4179 épocas.

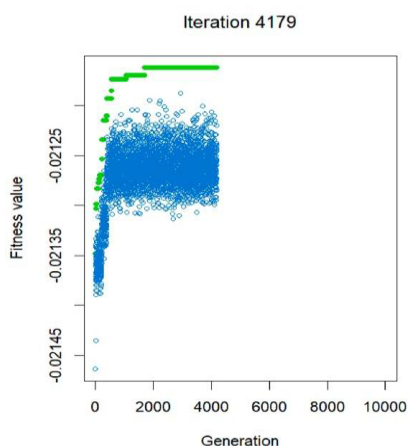


Figura 13: Evolução do fitness do AG com os retornos da ITSA4 com distribuição Uniforme (4179 épocas), entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (períodos de treino e validação)

Na Fig. 14 observou-se a predição realizada no período de validação da ITSA4 e percebeu-se que a ESN não capturou bem a amplitude da ST dos retornos.

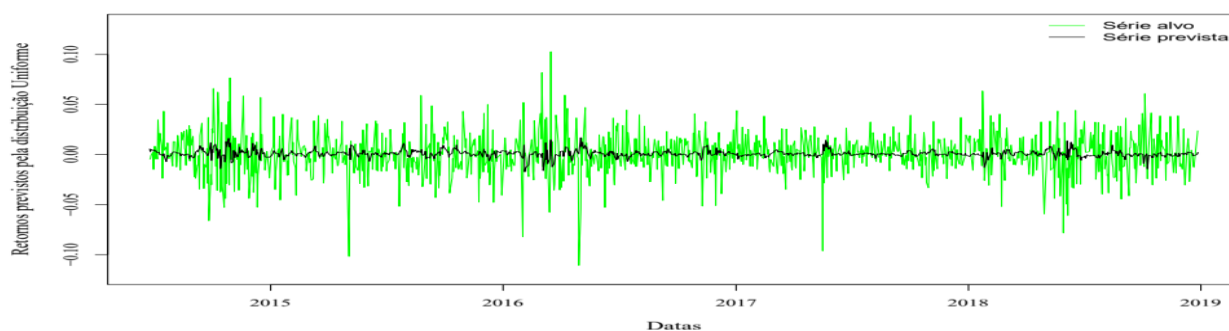


Figura 14: Predição dos retornos com ESN da ITSA4 pela distribuição Uniforme (4179 épocas), entre 24-06-2014 e 28-12-2018 (período de validação)

A Fig. 15 apresenta o gráfico das previsões da variância no período de teste da ITSA4, considerados os menores erros, que foram da distribuição Uniforme com 4179 épocas, percebeu-se que a ESN também não capturou bem a amplitude dos retornos e acabou extrapolando os valores.

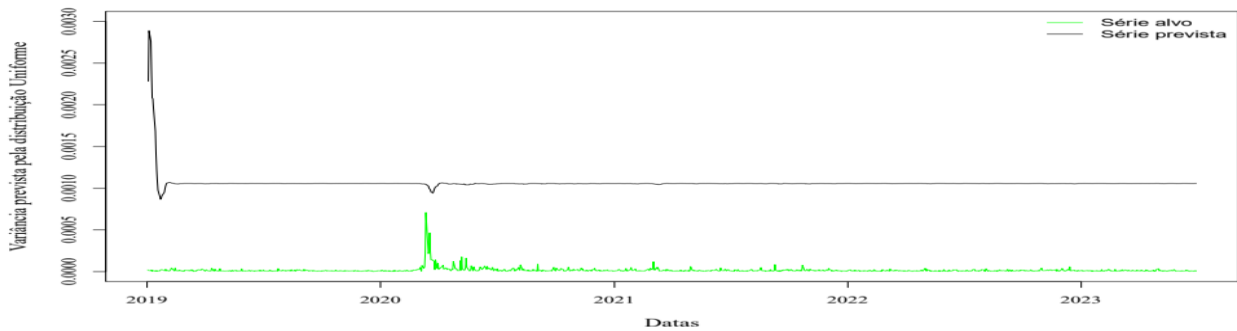


Figura 15: Previsão da variância dos retornos com ESN da ITSA4 pela distribuição Uniforme (4179 épocas), entre 29-12-2018 e 30-06-2023 (período de teste)

3.4.3 Modelagem $ARMA(p,q)$ -EGARCH(m,n) com log retornos para previsão da volatilidade da ITSA4

Em seguida realizou-se a modelagem ARMA-GARCH por meio da metodologia Box-Jenkins das ST dos retornos da ITSA4. No entanto, não foi possível concretizar as previsões por esta metodologia, como pode ser visto no Apêndice A, o procedimento foi repetido, então, utilizando-se outras extensões do GARCH: GJRGARCH, TGARCH, CSGARCH e EGARCH, tendo o EGARCH obtido melhor desempenho. Considera-se que os resultados obtidos nesta modelagem servem de parâmetro para comparação com os resultados obtidos nas duas técnicas, como um *benchmark*.

a) Ajuste de modelos $ARMA(p,q)$

Da verificação da estacionariedade da ST, todos resultaram estacionária em nível, sendo, portanto, um modelo $ARMA(p,q)$ e não $ARIMA(p,d,q)$, ou seja, o valor de d da ordem de integração (I do ARIMA) é zero.

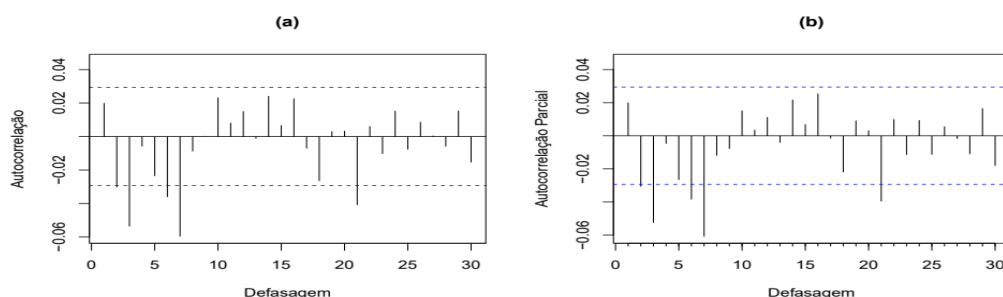
Por se tratar de uma ST de log retornos, o comum seria que essa ST não apresentasse tendência. No entanto, foi feita a verificação pelo teste ADF, aplicado aos dados do ajuste, com os Critérios de Informação Akaike (AIC) e Bayesiano (BIC) e o teste indicou que havia tendência. Para tal, antes se calculou a defasagem (*lag*, em inglês) máxima pelos critérios de Schwert e de Hyndman, as quais resultaram em trinta e nove defasagens, respectivamente.

Nos dois critérios de informação e em ambas defasagens resultou que a ST era estacionária, com tendência e com constante pelo teste ADF. Assim, foram realizados outros testes, específicos para verificação da tendência, não tendo sido encontradas evidências de sua presença, como pode ser visto na Tab. 6. Então, foi utilizado o Arima, sem tendência e com constante, para cálculo dos critérios de informação AIC e BIC. Portanto, não foram considerados modelos ARMA com tendência para cálculo do EGARCH.

Tabela 6 - Testes de verificação de tendência no ajuste dos log retornos da ITSA4

Teste	Estatística do Teste	n	p-valor
Cox-Stuart	1,0296	4453	0,3032
Mann-Kendall	39,8780	4453	0,8062
Wald-Wolfowitz	1,3325	4453	0,1827

Após, foram verificadas, por gráfico, as Funções de Autocorrelação (FAC) e Autocorrelação Parcial (FACP) (Fig. 16) para identificar os valores de p e q . E, como pode ser visto, resultaram inconclusivas, por não se enquadrarem nos critérios de interpretação definidos por Morettin (2017). Como as defasagens significativas foram 2, 3, 6, 7 e 21 em ambos gráficos, resolveu-se por utilizar os valores de p e q variando de 0 a 7, gerando-se 64 modelos.

**Figura 16: (a)FAC e (b)FACP dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018**

Dos 64 modelos calculados, a Tab. 7 apresenta os resultados do AIC e BIC dos modelos escolhidos, os dois mais parcimoniosos, de acordo com o AIC, e os dois mais parcimoniosos, de acordo com o BIC, estão destacados. Os demais resultados podem ser verificados no Apêndice B.

Tabela 7 - Critérios de Informação AIC, AICc e BIC dos ARMA selecionados de log retornos da ITSA4

ARMA(p,q)	AIC	AICc	BIC
1,2	-21280,01	-21280,00	-21248,00
2,1	-21280,72	-21280,70	-21248,71
6,3	-21290,01	-21289,96	-21219,60
7,0	-21290,93	-21290,89	-21233,32

Na sequência, foram obtidos os resíduos dos referidos modelos. E, a partir destes, verificou-se se atendiam as seguintes propriedades: independência dos resíduos e dependência dos resíduos quadráticos. Também foi verificado se possuíam propriedades desejadas como: normalidade e heteroscedasticidade. A Tab. 8 apresenta os resultados dos testes, obtidos nesta etapa da análise.

Tabela 8 - Propriedades dos resíduos dos modelos ARMA selecionados dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

ARMA (p,q)	Ljung-Box (independência)*	Testes (p-valor)		
		Jarque-Bera (normalidade)	ARCH (homoscedasticidade)	McLeod-Li (heteroscedasticidade)*
(7,0)	0,996	$<2.200 \times 10^{-16}$	$<2.200 \times 10^{-16}$	$<2.200 \times 10^{-16}$
(6,3)	0,974	$<2.200 \times 10^{-16}$	$<2.200 \times 10^{-16}$	$<2.200 \times 10^{-16}$
(2,1)	$6,421 \times 10^{-2}$	$<2.200 \times 10^{-16}$	$<2.200 \times 10^{-16}$	$<2.200 \times 10^{-16}$
(1,2)	$5,090 \times 10^{-2}$	$<2.200 \times 10^{-16}$	$<2.200 \times 10^{-16}$	$<2.200 \times 10^{-16}$

Obs.: *Para lag=15

Da Tab. 8 percebeu-se que os resíduos satisfizeram a propriedade de serem independentes conforme os resultados dos testes de Ljung-Box, por não terem sido encontradas evidências de autocorrelação. O teste de Jarque-Bera encontrou evidências de que a distribuição dos resíduos não é a distribuição Normal. O teste ARCH e o teste de McLeod Li encontraram evidências de que os resíduos possuíam heteroscedasticidade.

Uma complementação destes resultados pode ser encontrada no Apêndice C.

b) Ajuste de modelos EGARCH(m,n)

Para tal, foram utilizadas as distribuições de probabilidade GED e t de Student e as ordens dos modelos, m e n , variaram entre 0 e 3. Também foi utilizada a distribuição t de Student assimétrica durante a pesquisa, mas a mesma não apresentou critérios de informações melhores.

Os modelos EGARCH(m,n) mais parcimoniosos pelo AIC foram, nesta ordem: ARMA(6,3)-EGARCH(3,3)_{GED}, ARMA(7,0)-EGARCH(2,3)_{GED}, ARMA(2,1)-EGARCH(2,3)_{GED} e ARMA(7,0)-EGARCH(1,2)_{GED}, todos utilizaram a GED. Os modelos EGARCH(m,n) mais parcimoniosos pelo BIC foram, nesta ordem: ARMA(1,2)-EGARCH(1,1)_{GED}, ARMA(2,1)-EGARCH(2,3)_{GED}, ARMA(7,0)-EGARCH(1,2)_{GED} e ARMA(7,0)-EGARCH(2,3)_{GED}. O mais parcimonioso de todos foi o ARMA(6,3)-EGARCH(3,3)_{GED}, conforme Tab. 9.

Após, calcularam-se os resíduos padronizados do EGARCH(m,n). A partir destes, verificou-se se atendiam a propriedade de independência dos resíduos. Também foi verificado se possuíam propriedades desejadas como: normalidade e heteroscedasticidade. A Tab. 9 mostra os critérios de informação calculados utilizando a GED na modelagem ARMA(p,q)-EGARCH(m,n).

Tabela 9 - Critérios de Informação AIC e BIC pela GED dos ARMA-EGARCH selecionados dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

ARMA(p,q)-EGARCH(m,n)	AIC	BIC
(1,2)(1,1)	-12,842	-12,829
(2,1)(2,3)	-12,845	-12,826
(6,3)(3,3)	-12,850	-12,820
(7,0)(1,2)	-12,845	-12,825
(7,0)(2,3)	-12,847	-12,823

A Tab. 10 apresenta os resultados dos testes dos resíduos padronizados.

Tabela 10 - Propriedades dos resíduos padronizados ARMA(p,q)-EGARCH(m,n) selecionados dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

ARMA(p,q)-EGARCH(m,n)	Testes (p-valor)		
	Ljung-Box (independência)*	Jarque-Bera (normalidade)	ARCH (homoscedasticidade)**
ARMA(7,0)-EGARCH (2,3) _{GED}	0,530	<2,200x10 ⁻¹⁶	1,000
ARMA(7,0)-EGARCH (1,2) _{GED}	0,723	<2,200x10 ⁻¹⁶	1,000
ARMA(6,3)-EGARCH (3,3) _{GED}	0,721	<2,200x10 ⁻¹⁶	1,000
ARMA(2,1)-EGARCH (2,3) _{GED}	0,686	<2,200x10 ⁻¹⁶	1,000
ARMA(1,2)-EGARCH (1,1) _{GED}	0,904	<2,200x10 ⁻¹⁶	1,000

Obs.: *Para lag = 20 e **Para lag = 12

Na Tab. 10 percebeu-se que não foram encontradas evidências de autocorrelação nos resíduos de todos os modelos selecionados. Além disso, não foram encontradas evidências de heterocedasticidade e foram encontradas evidências de que os resíduos não seguem a distribuição Normal. Como pode ser visto nos histogramas da Fig. 17 (a), (b), (c), (d) e (e), a distribuição de probabilidade GED dos resíduos padronizados do ARMA(p,q)-EGARCH(m,n) é assimétrica, percebeu-se também que a curva é leptocúrtica.

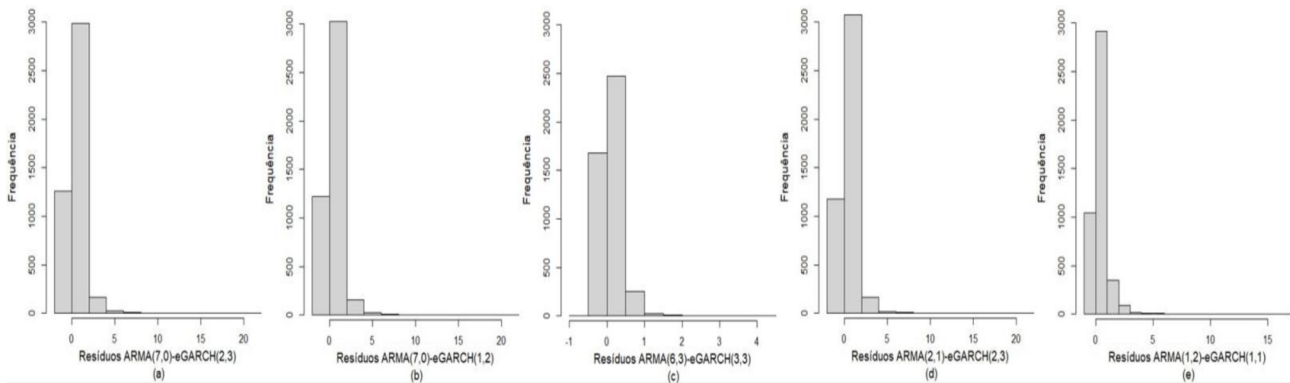


Figura 17: Histograma dos resíduos padronizados selecionados com a GED dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018

As métricas dos erros dos modelos selecionados estão apresentadas na Tab. 11.

Tabela 11 - Capacidade preditiva dos $ARMA(p,q)$ -EGARCH(m,n) mais parcimoniosos do AIC e do BIC das variâncias diárias da ITSA4, entre 02-01-2019 e 30-06-2023 (período de validação)

$ARMA(p,q)$ -EGARCH(m,n)	MAE	RMSE	MdAE
$ARMA(1,2)$ -EGARCH($1,1$) _{GED}	0,000020089	0,000041704	0,000013945
$ARMA(6,3)$ -EGARCH($3,3$) _{GED}	0,000013794	0,000036582	0,000010417

Obs.: em negrito estão indicados os menores valores em cada coluna

Na Tab. 11 percebeu-se que, considerando o critério de informação mais parcimonioso pelo AIC o $ARMA(6,3)$ -EGARCH($3,3$)_{GED} e o critério de informação mais parcimonioso pelo BIC o $ARMA(1,2)$ -EGARCH($1,1$)_{GED}, os erros são próximos, variando apenas na quinta casa após a vírgula para o MAE, na quinta casa após a vírgula para o RMSE e também na quinta casa após a vírgula para o MdAE. Assim, considera-se que a melhor previsão, neste caso, foi obtida com o modelo $ARMA(6,3)$ -EGARCH($3,3$)_{GED}, pelo critério de informação AIC.

Como pode ser visto na Fig. 18, nenhum dos modelos $ARMA(p,q)$ -EGARCH(m,n) conseguiu prever bem as variâncias diárias sem log da ITSA4 no período de validação. Embora o erro esteja com poucas casas após a vírgula o mesmo se justifica porque os valores das variâncias são baixos.

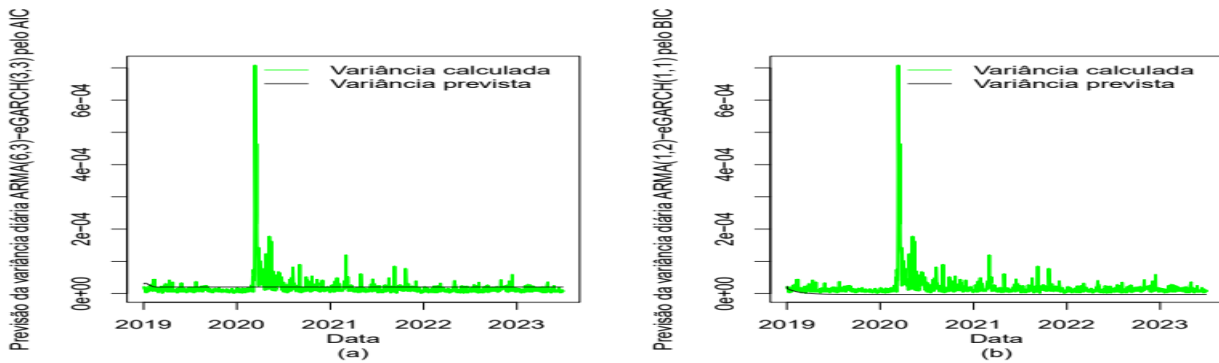


Figura 18: Previsão pelos (a)ARMA(6,3)-EGARCH(3,3) e (b)ARMA(1,2)-EGARCH(1,1) das variâncias diárias da ITSA4, entre 02-01-2019 e 30-06-2023 (período de validação)

Mais detalhes dos resultados do $ARMA(p,q)$ -EGARCH(m,n) encontram-se no Apêndice D.

3.4.4 Modelagem $ARMA(p,q)$ -ESN com retornos para previsão da volatilidade da ITSA4

a) Modelagem $ARMA(p,q)$

A modelagem $ARMA(p,q)$ foi feita da mesma forma que apresentado na subseção 3.4.3, no entanto, foi realizada com os retornos e não com os log retornos da ITSA4. A modelagem ARMA feita com os retornos provocou mudanças nos modelos mais parcimoniosos na ITSA4. Os critérios de informação mais parcimoniosos pelo AIC e BIC foram obtidos, respectivamente, pelo ARMA(7,0) e ARMA(2,1). Maiores detalhes podem ser encontrados nos Apêndice E.

b) Modelagem ESN

Após obterem-se os resíduos dos $ARMA(p,q)$, estes foram aplicados à ESN separadamente com as quatro distribuições individualmente. Conforme explicado anteriormente, utilizou-se AG para otimização dos hiperparâmetros da ESN.

Apresentam-se os resultados obtidos com a geração de pesos aleatórios utilizando as distribuições de probabilidade Uniforme, Normal, t de Student e GED para W^{in} e W . Para tal, na distribuição Uniforme utilizaram-se como argumentos limite inferior -1 e superior 1 e na distribuição Normal utilizaram-se média zero e desvio padrão um. Para a distribuição t de Student utilizaram-se quatro graus de liberdade para ARMA(7,0) e para ARMA(2,1), a partir dos resíduos quadráticos, e para a GED utilizaram-se média = 0,000492, desvio padrão = 0,001369 e densidade = 2 para ARMA(7,0) e média = 0,000494, desvio padrão = 0,001397, densidade = 2 para ARMA(2,1), a partir dos resíduos quadráticos.

Na Tab. 12 estão apresentados apenas os hiperparâmetros das ESNs, treinadas e validadas com os resíduos quadráticos da ITSA4 de cada distribuição que apresentaram o melhor resultado pelo MAE para o ARMA(7,0).

Tabela 12 - Hiperparâmetros da ITSA4 otimizados por AG do ARMA(7,0)-ESN das épocas com menores MAE na validação, distribuições Uniforme, Normal, t de Student e GED

Distribuição	Épocas	Taxa de Vazão (α)	Raio Espectral (sr)	VID*	Tamanho do Reservatório	Coefficiente de Regularização
Uniforme	7050	0,062454700124	0,975623898498	109	33	0,000000397375
Normal	3805	0,082390460132	0,181603863555	83	2	0,000061424773
t de Student	10000	0,089752882026	0,362002273577	74	2	0,000014540227
GED	7966	0,056557133157	0,999122612935	119	32	0,000000203638

Obs.: VID*: Valores Iniciais Desconsiderados

Da Tab. 12, percebeu-se o seguinte:

- O número de épocas variou entre as distribuições;
- A taxa de vazão não oscilou significativamente entre as distribuições e ficou bem baixa, tendo a memória entre um valor e outro, praticamente, sido desconsiderada;
- O raio espectral manteve certa relação com o coeficiente de regularização, ou seja, quanto menor o coeficiente de regularização o raio espectral ficou mais próximo de um e quanto maior o coeficiente de regularização o raio espectral ficou com valores menores e também com o tamanho do reservatório, quando o tamanho ficou maior que 30 o raio espectral ficou mais próximo de um e quando ficou em dois o raio espectral ficou com os menores valores;
- Os Valores Iniciais Desconsiderados seguiram o tamanho do reservatório, ou seja, para tamanho menor que trinta os VIDs ficaram na faixa de uma centena e para tamanho igual a dois ficaram na faixa de menos de nove dezenas. O menor VID ficou em torno de três meses e meio (74 dias úteis) e o maior próximo a seis meses (119 dias úteis);
- O coeficiente de regularização foi menor nas distribuições Uniforme e GED e o inverso nas distribuições Normal e t de Student.

Na Tab. 13 estão apresentados apenas os hiperparâmetros das ESNs, treinadas e validadas com os resíduos quadráticos da ITSA4 de cada distribuição que apresentaram o melhor resultado pelo MAE para o ARMA(2,1).

Tabela 13 - Hiperparâmetros da ITSA4 otimizados por AG do ARMA(2,1)-ESN das épocas com menores MAE na validação, distribuições Uniforme, Normal, t de Student e GED

Distribuição	Épocas	Taxa de Vazão (α)	Raio Espectral (sr)	VID*	Tamanho do Reservatório	Coefficiente de Regularização
Uniforme	6466	0,393542431201	0,904280885932	85	8	0,000003884655
Normal	7774	0,004470859305	0,899512477970	80	11	0,000021902268
t de Student	6808	0,562130448383	0,917350138475	82	17	0,000016477610
GED	10000	0,924956702856	0,942084824256	100	19	0,000000009900

Obs.: VID*: Valores Iniciais Desconsiderados

Da Tab. 13, percebeu-se o seguinte:

- O número de épocas variou entre as distribuições, tendo ficado acima de 6000;
- A taxa de vazão oscilou significativamente, tendo alcançado o menor valor na distribuição Normal e o maior na distribuição GED, nestes casos a Normal deu mais peso para os valores atuais do que os passados e a GED fez o contrário;
- O raio espectral não oscilou muito;
- Os menores VID ficaram em aproximadamente quatro meses (80 e 82 dias úteis) e os maiores um pouco menos de cinco meses (100 dias úteis);
- O menor tamanho de reservatório foi oito, na distribuição Uniforme, mas os maiores tamanhos não alcançaram duas dezenas;
- O coeficiente de regularização foi menor na GED e maior na Normal;
- A GED obteve os maiores valores em todos hiperparâmetros, com exceção do coeficiente de regularização que foi o menor.

Das Tabs. 12 e 13, percebeu-se o seguinte:

- O número de épocas foi menor com a distribuição Normal para ARMA(7,0)-ESN e menor com a distribuição Uniforme para ARMA(2,1)-ESN, maior com a t de Student para ARMA(7,0)-ESN e GED para ARMA(2,1)-ESN;
- A taxa de vazão oscilou significativamente no ARMA(2,1)-ESN, tendo alcançado o menor valor na distribuição Normal e o maior na GED, o mesmo se comparado com o ARMA(7,0)-ESN;
- O raio espectral não oscilou muito para ARMA(2,1)-ESN, mas oscilou bastante para ARMA(7,0)-ESN e o maior raio espectral foi com a distribuição GED para ARMA(7,0)-ESN;
- O menor tamanho de reservatório foi dois nas distribuições Uniforme e t de Student para ARMA(7,0)-ESN e para ARMA(2,1)-ESN os tamanhos dos reservatórios ficaram entre os menores e maiores tamanhos do ARMA(7,0)-ESN;
- Os menores VID foram na t de Student e os maiores na GED, ambos do ARMA(7,0)-ESN;
- O coeficiente de regularização foi menor na GED para ARMA(2,1)-ESN e maior na distribuição Normal para ARMA(7,0)-ESN.

A Tab. 14 apresenta as métricas dos erros de previsão das variâncias dos retornos do ARMA(7,0)-ESN. Percebeu-se que a GED conseguiu o melhor desempenho. Na validação o melhor resultado do RMSE foi da distribuição de probabilidade Normal, mas somente na sétima casa após a vírgula, tendo, portanto, a t de Student ficado bem próxima. Neste caso, considera-se que a distribuição de probabilidade GED foi a melhor, por ter apresentado os menores erros de teste.

Tabela 14 - Capacidade preditiva do ARMA(7,0)-ESN da ITSA4 das épocas com menores erros de teste MAE, distribuições Uniforme, Normal, t de Student e GED

Distribuição	Épocas	MAE			RMSE			MdAE		
		Treina (R\$)	Valida (R\$)	Testa (R\$)	Treina (R\$)	Valida (R\$)	Testa (R\$)	Treina (R\$)	Valida (R\$)	Testa (R\$)
Uniforme	7050	0,00052	0,00046	0,00011	0,00137	0,00093	0,00011	0,00030	0,00028	0,00011
Normal	3805	0,00052	0,00046	0,00011	0,00138	0,00092	0,00011	0,00030	0,00029	0,00011
t de Student	10000	0,00052	0,00046	0,00010	0,00138	0,00092	0,00011	0,00031	0,00029	0,00010
GED	7966	0,00046	0,00039	0,00007	0,00148	0,00096	0,00007	0,00014	0,00014	0,00006

Obs.: em negrito estão indicados os menores valores de cada coluna na sexta casa decimal

Na Tab. 15 apresentam-se as métricas dos erros de previsão das variâncias dos retornos do ARMA(2,1)-ESN. No período de testes percebeu-se que o melhor resultado pelo MAE, RMSE e MdAE foi com a distribuição Normal. Neste caso, considera-se que a distribuição de probabilidade Normal obteve o melhor resultado por ter apresentado os menores erros no período de teste.

Tabela 15 - Capacidade preditiva do ARMA(2,1)-ESN da ITSA4 das épocas com menores erros de teste MAE, distribuições Uniforme, Normal, t de Student e GED

Distribuição	Épocas	MAE			RMSE			MdAE		
		Treina (R\$)	Valida (R\$)	Testa (R\$)	Treina (R\$)	Valida (R\$)	Testa (R\$)	Treina (R\$)	Valida (R\$)	Testa (R\$)
Uniforme	6466	0,00052	0,00046	0,00004	0,00140	0,00093	0,00005	0,00029	0,00028	0,00003
Normal	7774	0,00047	0,00039	0,00002	0,00152	0,00097	0,00004	0,00015	0,00014	0,00001
t de Student	6808	0,00052	0,00046	0,00003	0,00138	0,00093	0,00005	0,00029	0,00028	0,00003
GED	10000	0,00052	0,00046	0,00010	0,00139	0,00093	0,00010	0,00031	0,00029	0,00010

Obs.: em negrito estão indicados os menores valores de cada coluna na sexta casa decimal

Nas Tabs. 14 e 15 percebeu-se o melhor MAE de teste foi com a distribuição t de Student pelo ARMA(2,1)-ESN, os menores RMSE e MdAE de teste foram com a distribuição Normal para ARMA(2,1)-ESN. Logo, considera-se o melhor desempenho de capacidade preditiva do ARMA-ESN para o ARMA(2,1)-ESN, com o critério BIC, pela distribuição de probabilidade Normal. Percebeu-se, também, que tanto no ARMA(2,1) quanto no ARMA(7,0) os melhores resultados foram obtidos acima de 7000 épocas, embora com distribuições diferentes. Durante as gerações os indivíduos tiveram uma variabilidade menor no ARMA(2,1) com um *fitness* menor, tendo os melhores sido encontrados um pouco acima de 4000 épocas.

Nas Figs. 19 e 20 vê-se as evoluções dos *fitness* utilizando MAE (40% de treinamento e 60% de validação) dos resíduos quadráticos ARMA(7,0) pela GED para o melhor resultado com 7966

épocas e do *fitness* usando MAE (40% de treinamento e 60% de validação) dos resíduos quadráticos ARMA(2,1) pela distribuição Normal para o melhor resultado com 7774 épocas.

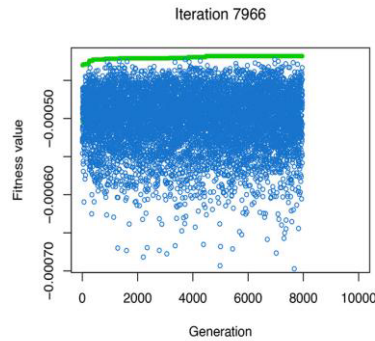


Figura 19: Evolução do *fitness* MAE do AG com os retornos da ITSA4 (7966 épocas), do ARMA(7,0) pela GED, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (períodos de treino e validação)

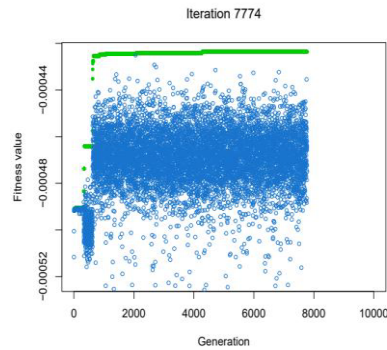


Figura 20: Evolução do *fitness* MAE do AG com os retornos da ITSA4 (7774 épocas), do ARMA(2,1) pela distribuição Normal, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (períodos de treino e validação)

Na Fig. 21 observou-se a predição realizada no período de validação da ITSA4 e percebeu-se que o ARMA(7,0)-ESN e o ARMA(2,1)-ESN não conseguem capturar bem a amplitude dos resíduos quadráticos. No entanto, geralmente, apontam bem as altas mais pronunciadas, tendo a GED do ARMA(2,1), visualmente, conseguido descolar-se mais do eixo x.

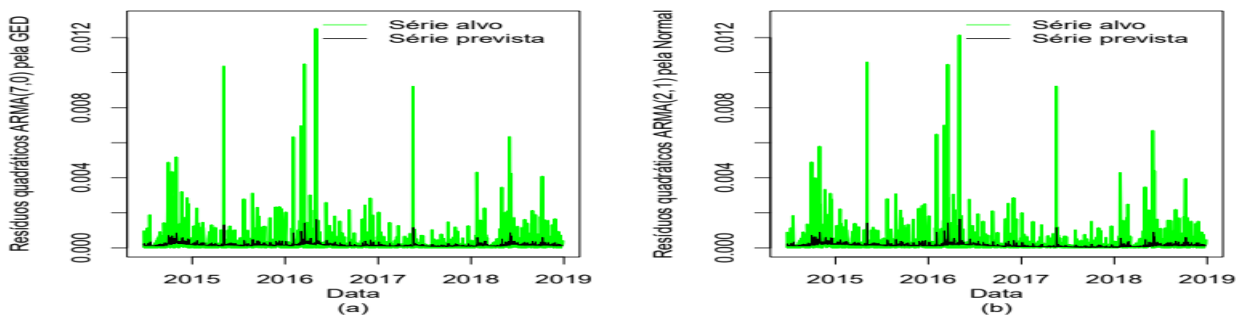


Figura 21 - Predição resíduos quadráticos (a)ARMA(7,0)-ESN pela GED e (b)ARMA(2,1)-ESN pela Normal da ITSA4, entre 24-06-2014 e 28-12-2018 (período de validação)

A Fig. 22 apresenta os gráficos das previsões das variâncias dos retornos no período de teste, considerados os menores erros, que foram do ARMA(7,0)-ESN pela GED e ARMA(2,1) pela Normal. Percebeu-se, visualmente, que a amplitude das previsões consegue ser melhor pelo modelo que usa distribuição Normal, selecionado pelo critério BIC.

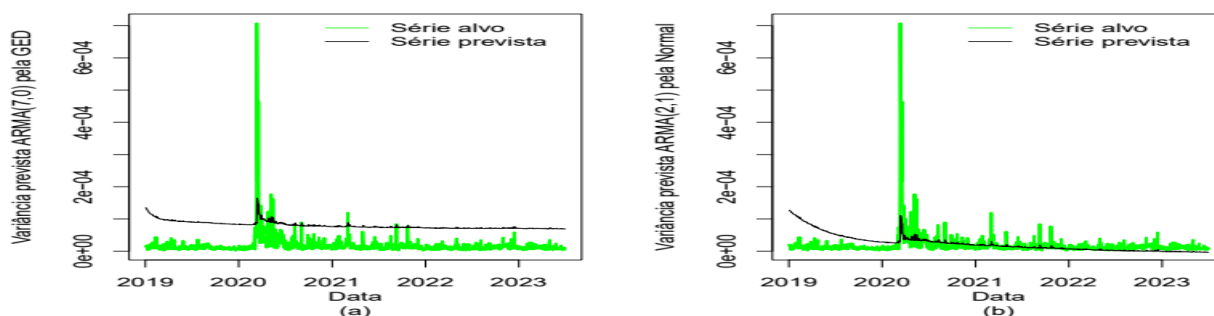


Figura 22 - Previsão das variâncias diárias dos retornos, a cada 30min, pelo (a)ARMA(7,0)-ESN com a GED e pelo (b)ARMA(2,1)-ESN com a Normal da ITSA4, entre 02-01-2019 e 30-06-2023 (período de teste)

3.4.5 Discussão da ITSA4

Comparando as capacidades preditivas dos modelos pelas métricas dos erros (Tab. 16), percebeu-se que o melhor desempenho foi do ARMA-EGARCH, seguido pela ESN e pelo ARMA-ESN. Porém, todos ficaram próximos, na quinta casa após a vírgula.

Tabela 16: Capacidade preditiva dos melhores modelos de acordo com a técnica utilizada para ITSA4

Técnica _{distribuição}	MAE	RMSE	MdAE
ARMA-EGARCH _{GED}	0,000013794	0,000036582	0,000010417
ESN _{Uniforme}	0,000017793	0,000040582	0,000011439
ARMA-ESN _{Normal}	0,000021834	0,000041884	0,000012120

Comparando os gráficos das previsões da ESN (Fig. 15) e dos ARMA(6,3)-EGARCH(3,3) e (b)ARMA(1,2)-EGARCH(1,1) (Fig. 18 (a) e (b)) pode-se notar que os desempenhos do ARMA(7,0)-ESN e ARMA(2,1)-ESN (Fig. 22 (a) e (b)) foram diferentes dos demais, ESN e ARMA-EGARCH não conseguem capturar bem as variâncias, mas os modelos ARMA-ESN são um pouco melhores em capturar as subidas e as descidas. Embora tenham uma amplitude maior e, às vezes, extrapolem, mas conseguem indicar melhor a subida acentuada. Neste caso, o ARMA(2,1)-ESN, selecionado pelo BIC, obteve um desempenho melhor.

Sobre as distribuições, três destacaram-se: a Uniforme, a Normal e a GED. Na ESN a distribuição Uniforme obteve um desempenho melhor do que a Normal, no ARMA-EGARCH a GED foi a melhor pelo critério AIC, e no ARMA-ESN a GED foi a melhor pelo critério BIC e a Normal pelo critério AIC. Sendo a Normal a melhor entre estas duas últimas.

3.4.6 Análise exploratória dos dados da PETR4

a) Dados brutos

Na análise da ST dos dados da PETR4, Fig. 23, houve uma tendência de alta entre 2001 e 2007, no entanto, houve uma divisão (*split*) de 4 ações em uma, o que reduziu o preço em aproximadamente 4 vezes em 1º de setembro de 2005, também ocorreu uma queda acentuada entre 2008 e 2009 (crise de 2008), com novo *split* em 28 de abril de 2008, mas desta vez uma divisão por dois. No período de validação houve inicialmente certa tendência de alta, depois de baixa (crise de 2015) e novamente de alta após 2016. No período de teste a ação mantinha certa estabilidade até a queda no início de março de 2020 (quinto mês da pandemia de Covid-19), porém até janeiro de 2021 já havia retomado o patamar de antes da pandemia, possuindo uma tendência de alta até meados de outubro de 2021 e, posteriormente, tendência de baixa até o fim da série.

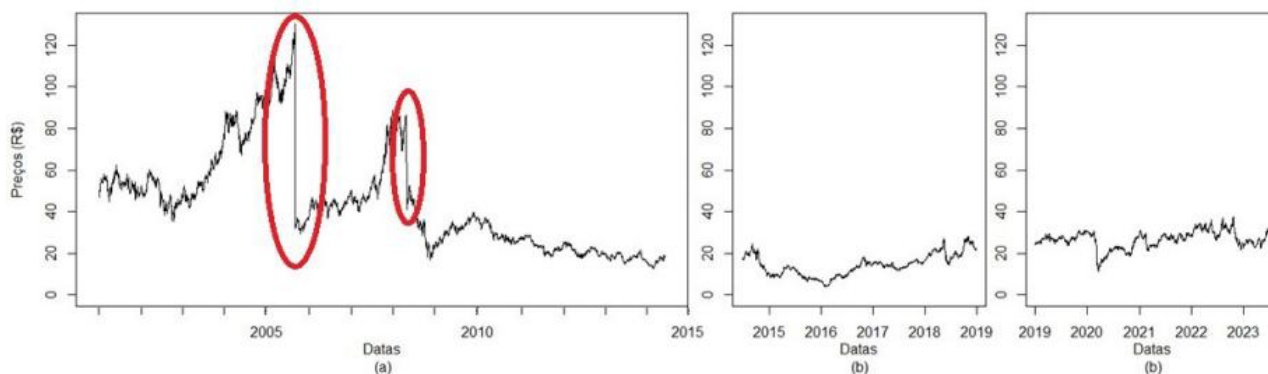


Figura 23: ST dos preços de fechamento diário da PETR4 (a)treino, (b)validação e (c)teste, entre 02-01-2001 e 30-06-2023

Devido ao problema das quebras ocorridas na ST da ação PETR4 em 1º. de setembro de 2005 e em 25 de abril de 2008 (destacadas na Fig. 23(a)), onde na primeira houve um *split* de 4 ações e na segunda um *split* de 2 ações, ocorreu a necessidade de tratarem-se os dados. No primeiro caso, os preços da ST antes da alteração foram divididos por 4 e, no segundo, os preços antes da segunda alteração divididos por 2 (como haviam sido divididos por 4, na prática, foram divididos por 8).

O resumo das medidas dos dados brutos da PETR4 está apresentado na Tab. 17.

Tabela 17: Medidas resumo da PETR4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023

Ação	Mínimo (R\$)	Média (R\$)	Mediana (R\$)	Máximo (R\$)	Desvio Padrão	Coefficiente de Assimetria	Coefficiente de Curtose
PETR4	4,20	34,95	27,53	130,00	22,49	1,44	1,81

Analisando-se as medidas apresentadas na Tab. 17 percebeu-se que a ST da PETR4 é assimétrica e leptocúrtica, como também pode ser comprovado no histograma (Fig. 24 (a)). No histograma percebeu-se que a cauda à direita é mais longa do que à esquerda, indicando que os valores

menores estão mais concentrados que os maiores. Do *boxplot* (Fig. 24 (b)) percebeu-se a assimetria dos dados e foram identificados possíveis *outliers* inferiores. O *qqPlot* (Fig. 24 (c)) demonstrou que a distribuição dos dados não se aproxima da distribuição Normal.

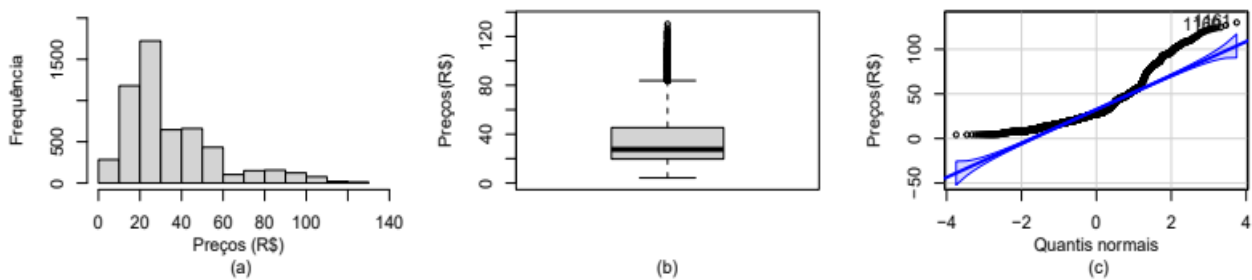


Figura 24: (a)Histograma, (b)Boxplot e (c)qqPlot dos preços do fechamento diário da PETR4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023

b) Retornos

Na análise da ST dos retornos dos valores de fechamento diário da PETR4, já com as correções aplicadas (Fig. 25), perceberam-se oscilações distintas da ST dos retornos da ITSA4, duas destacam-se: em 09 de março de 2020, superando 0.3% de queda e em 22 de fevereiro de 2021, também uma queda, só que maior de 0.2%.

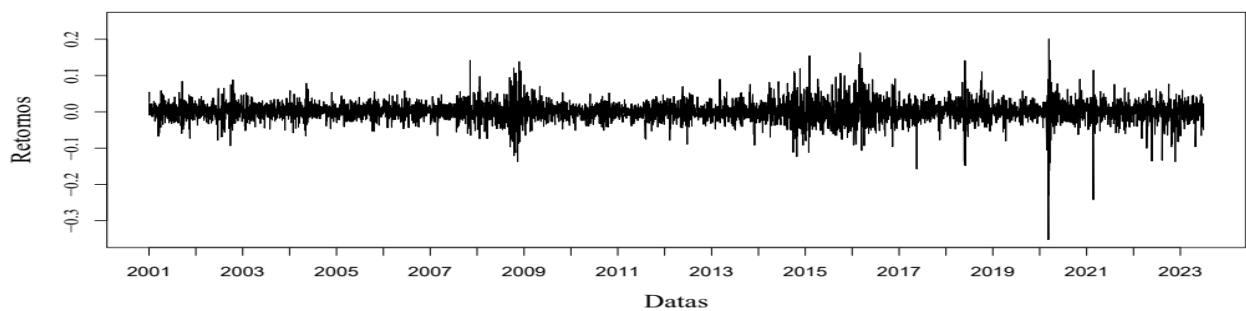


Figura 25: ST de retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023

O resumo das medidas dos retornos da PETR4 está apresentado na Tab. 18.

Tabela 18: Medidas resumo dos retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023

Ação	Mínimo (%)	Média (%)	Mediana (%)	Máximo (%)	Desvio Padrão	Coefficiente de Assimetria	Coefficiente de Curtose
PETR4	-0,352	$5,745 \times 10^{-4}$	$9,982 \times 10^{-4}$	0,201	$2,749 \times 10^{-2}$	-0,597	10,556

Observou-se na Tab. 18 que a ST dos retornos da PETR4 é assimétrica e acentuadamente leptocúrtica, conforme histograma (Fig. 26 (a)). No *boxplot* (Fig. 26 (b)) percebeu-se que a ST possui mediana no zero e uma boa quantidade de valores considerados *outliers* tanto superiores quanto inferiores. No *qqPlot* (Fig. 26 (c)) notou-se que a distribuição de probabilidade dos dados não se aproxima da distribuição Normal.

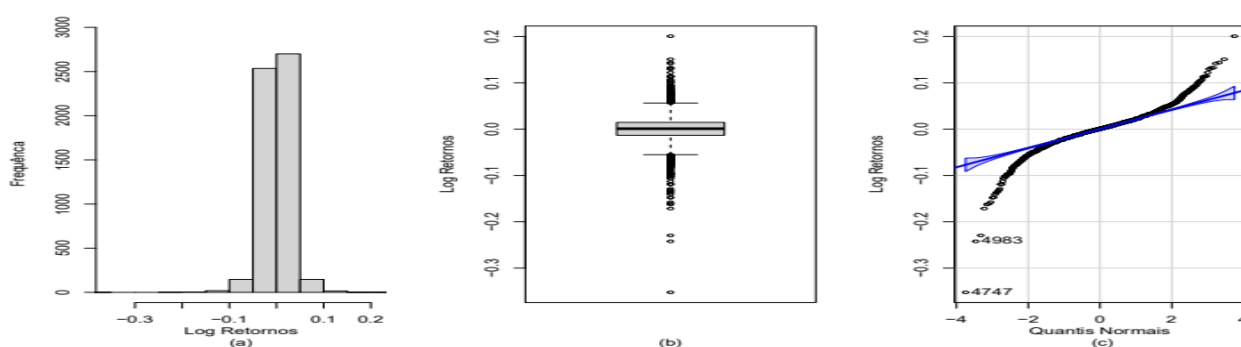


Figura 26: (a)Histograma, (b)Boxplot e (c)qqPlot dos retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023

c) Log retornos

Na análise da ST de log retornos dos valores de fechamento diário da PETR4 já com as correções aplicadas (Fig. 27), perceberam-se diversas oscilações, mas uma inferior destacou-se no mês de março de 2020, pois caiu mais de 0,3 em um único dia.

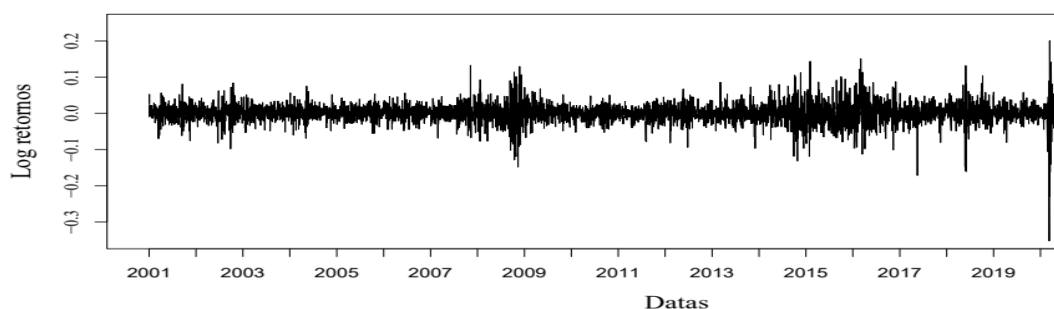


Figura 27: ST de log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023

O resumo das medidas da ST de log retornos da PETR4 está apresentado na Tab. 19.

Tabela 19: Medidas resumo dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023

Ação	Mínimo	Média	Mediana	Máximo	Desvio Padrão	Coefficiente de Assimetria	Coefficiente de Curtose
PETR4	-0,171	$3,093 \times 10^{-4}$	$9,975 \times 10^{-4}$	0,151	$2,647 \times 10^{-2}$	-0,144	3,943

Observou-se na Tab. 19 que a ST de log retornos da PETR4 é assimétrica e acentuadamente leptocúrtica, conforme evidenciada no histograma (Fig. 28 (a)). No *boxplot* (Fig. 28 (b)) percebe-se que a ST possui mediana próxima do zero e uma boa quantidade de possíveis *outliers*, tanto superiores quanto inferiores. No *qqPlot* (Fig. 28 (c)) nota-se que a distribuição de probabilidade dos dados não se aproxima da distribuição Normal.

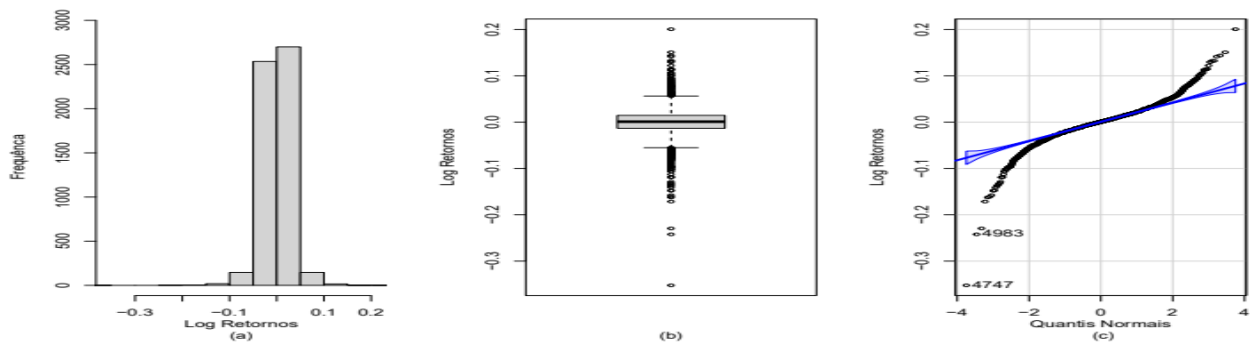


Figura 28: (a)Histograma, (b)Boxplot e (c)QQPlot dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023

3.4.7 Modelagem ESN com retornos para previsão da volatilidade da PETR4

Após a análise exploratória dos dados, realizou-se a modelagem da PETR4 pela ESN. Na Tab. 20 estão apresentados os hiperparâmetros da ESN, treinados e validados com os retornos.

Tabela 20 - Hiperparâmetros da PETR4 otimizados por AG da ESN, distribuições Uniforme e Normal

Distribuição	Épocas	Taxa de Vazão (α)	Raio Espectral (sr)	VID*	Tamanho do Reservatório	Coefficiente de Regularização
Uniforme	6553	0,844824560734	0,896147889312	103	17	0,000007371935
	7374	0,734655263178	0,807577572461	108	31	0,000032170370
	4403	0,812063690671	0,753362681295	106	27	0,000042632209
Normal	5005	0,831083916351	0,705922744162	82	11	0,000022483481
	4110	0,699987029930	0,877203958160	127	31	0,000016283873
	8272	0,487743284174	0,803984100220	113	16	0,000004853344

Obs.: VID*: Valores Iniciais Desconsiderados

Da Tab. 20 percebeu-se o seguinte:

- O número de épocas variou nas duas distribuições, mas mais na Normal;
- A taxa de vazão oscilou nas duas distribuições, mas mais na Normal;
- O raio espectral variou menos na distribuição Uniforme;

- As variações dos Valores Iniciais Desconsiderados oscilaram entre aproximadamente cinco meses (103 dias úteis) e cinco meses e uma semana (108 dias úteis) na distribuição Uniforme e aproximadamente quatro meses (82 dias úteis) e seis meses (127 dias úteis) na distribuição Normal;
- O tamanho do reservatório alcançou o mínimo de onze na distribuição Normal e o máximo de trinta e um nas duas distribuições;
- O coeficiente de regularização variou mais na distribuição Uniforme.

Tabela 21: Capacidade preditiva da ESN da PETR4, pelas distribuições Uniforme e Normal

Distribuição	Épocas	MAE			RMSE			MdAE		
		Treina (%)	Valida (%)	Testa (%)	Treina (%)	Valida (%)	Testa (%)	Treina (%)	Valida (%)	Testa (%)
Uniforme	6553	0,01666	0,02569	0,00010	0,02269	0,03503	0,00011	0,01275	0,01900	0,00010
	7374	0,01665	0,02572	0,00016	0,02267	0,03522	0,00018	0,01279	0,01932	0,00016
	4403	0,01667	0,02572	0,00002	0,02270	0,03503	0,00011	0,01266	0,01937	0,00001
Normal	5005	0,01665	0,02569	0,00017	0,02273	0,03499	0,00019	0,01270	0,01914	0,00017
	4110	0,01666	0,02565	0,00018	0,02268	0,03511	0,00020	0,01274	0,01902	0,00017
	8272	0,01664	0,02566	0,00008	0,02268	0,03514	0,00009	0,01272	0,01878	0,00008

Obs.: em negrito estão indicados os menores valores de cada coluna a partir da quarta casa decimal

Na Tab. 21 apresentam-se os erros obtidos com a ESN nas etapas de treinamento, validação e teste. Percebeu-se que, quando se treina e valida a ESN com as diferentes distribuições, os erros de treinamento e validação não mudaram tanto de uma distribuição para outra, especialmente nos testes em que foram diferentes apenas a partir da quinta casa decimal. No período de teste os melhores MAE, RMSE e MdAE foram obtidos com a distribuição Uniforme com 4403 épocas. Além disso, percebeu-se que na distribuição Normal houve uma variação maior dos resultados entre as épocas no MAE e no RMSE.

Na Fig. 29, vê-se a evolução do *fitness* usando MAE (40% de treinamento e 60% de validação) para o melhor resultado com 4403 épocas da PETR4.

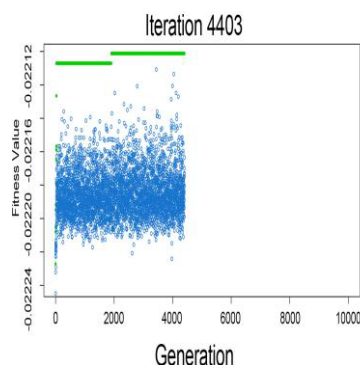


Figura 29: Evolução do fitness MAE do AG com os retornos da PETR4, do ARMA(7,0) pela Uniforme (4403 épocas), entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (períodos de treino e validação)

Na Fig. 30 observou-se a predição realizada no período de validação da PETR4 e percebeu-se que a ESN também não capturou bem a amplitude das variações dos retornos.

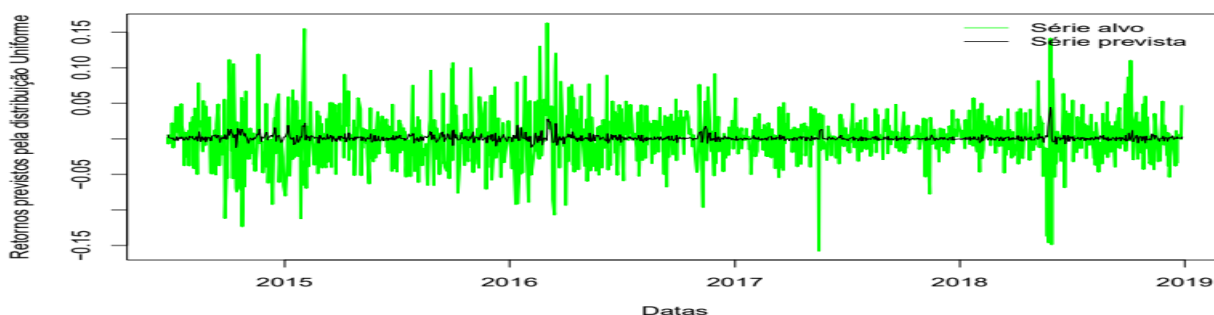


Figura 30: Predição dos retornos com ESN da PETR4 com distribuição Uniforme (4403 épocas), entre 24-06-2014 e 28-12-2018 (período de validação)

A Fig. 31 apresenta o gráfico das previsões da variância dos retornos no período de teste da PETR4, considerados os menores erros, que foram da distribuição Uniforme com 4403 épocas. Percebeu-se que a ESN não conseguiu capturar a variabilidade das variâncias dos retornos e extrapolou negativamente no início da previsão.

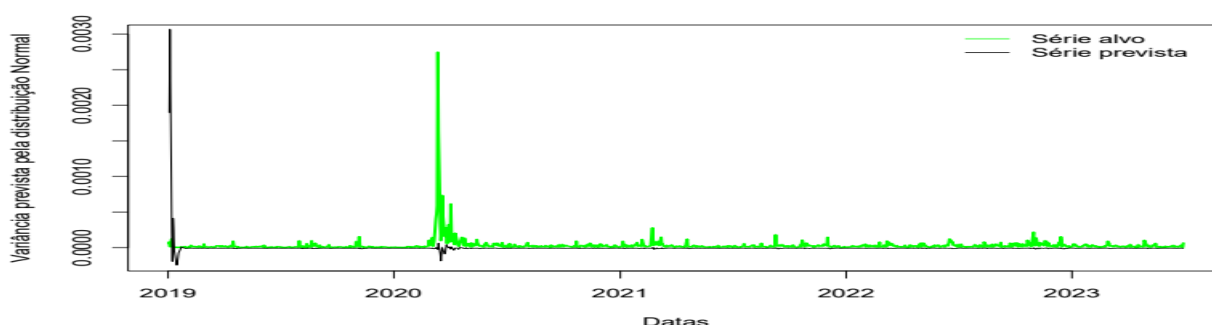


Figura 31: Previsão da variância dos retornos com ESN da PETR4 pela distribuição Uniforme (4403 épocas), entre 29-12-2018 e 30-06-2023 (período de teste)

3.4.8 Modelagem $ARMA(p,q)$ -EGARCH(m,n) com log retornos para previsão da volatilidade da PETR4

Em seguida realizaram-se as modelagens $ARMA(p,q)$ -GARCH(m,n) por meio da metodologia Box-Jenkins das ST dos retornos da PETR4, mas não foi possível realizar as previsões, então, na PETR4, a modelagem foi feita com o $ARMA(p,q)$ -EGARCH(m,n) pelos mesmos motivos que na ITSA4.

a) Ajuste de modelos $ARMA(p,q)$

Da verificação da estacionariedade da ST, todos resultaram estacionária em nível, sendo, portanto, um modelo $ARMA(p,q)$.

Da mesma forma que na ITSA4, foi feita a verificação pelo teste ADF aplicado aos dados do ajuste, com os critérios de informação Akaike (AIC) e Bayesiano (BIC) e o teste indicou que havia tendência. Nos dois critérios de informação e em ambas defasagens resultou que a ST era estacionária, com tendência e com constante pelo teste ADF. Assim como na ITSA4, foram realizados outros testes, específicos para verificação da tendência, não tendo sido encontradas evidências de sua presença, como pode ser visto na Tab. 22. Então, foi utilizado o Arima, sem tendência e com constante, para cálculo dos critérios de informação AIC e BIC. Desta forma, não foram considerados modelos ARMA com tendência para cálculo do EGARCH.

Tabela 22 - Testes de verificação de tendência no ajuste dos log retornos da PETR4

Teste	Estatística do Teste	n	p-valor
Cox-Stuart	1,5487	4453	0,1215
Mann-Kendall	-0,9647	4453	0,3347
Wald-Wolfowitz	1,0915	4453	0,2751

Após, foram verificadas, por gráfico, as Funções de Autocorrelação (FAC) e Autocorrelação Parcial (FACP), conforme Fig. 32, para identificar os valores de p e q . E, como pode ser visto, resultaram inconclusivas sobre Média Móvel e Autoregressão, por não se enquadrarem nos critérios de interpretação definidos por Morettin (2017). Como as defasagens significativas foram 5 e 27 em ambos gráficos, resolveu-se por utilizar os valores de p e q variando de 0 a 5 e 36 modelos.

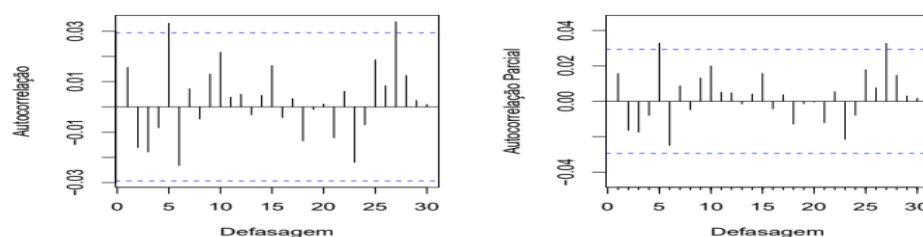


Figura 32: (a)FAC e (b)FACP dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018

Dos 36 modelos calculados, a Tab. 23 apresenta os resultados do AIC e BIC dos modelos escolhidos, o mais parcimonioso, de acordo com o AIC, e o mais parcimonioso, de acordo com o BIC, estão destacados. Embora o ARMA(0,0) tenha obtido o melhor BIC, o mesmo foi desconsiderado, porque não faz sentido não se utilizar Autoregressão nem Médias Móveis, ou seja, utilizar um modelo totalmente aleatório. Demais resultados podem ser verificados no Apêndice F.

Tabela 23 - Critérios de Informação AIC, AICc e BIC dos ARMA selecionados dos log retornos da PETR4

ARMA(p,q)	AIC	AICc	BIC
(0,0)	-19703,39	-19703,39	-19690,59
(0,1)	-19702,53	-19702,52	-19683,33
(1,0)	-19702,49	-19702,49	-19683,29
(5,4)	-19704,75	-19704,73	-19634,34
(5,5)	-19704,80	-19704,73	-19627,99

Na sequência, foram obtidos os resíduos dos referidos modelos. E, a partir destes, verificou-se se atendiam as seguintes propriedades: independência dos resíduos e dependência dos resíduos quadráticos. Também foi verificado se possuíam propriedades desejadas como: normalidade e heteroscedasticidade. A Tab. 24 apresenta os resultados dos testes, obtidos nesta etapa da análise.

Tabela 24 - Propriedades dos resíduos dos modelos ARMA selecionados dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

ARMA (p,q)	Ljung-Box (independência)*	Testes (p-valor)		
		Jarque-Bera (normalidade)	ARCH (homoscedasticidade)	McLeod-Li (heteroscedasticidade)*
(0,1)	0,442	$<2.2 \times 10^{-16}$	$<2.2 \times 10^{-16}$	$<2.2 \times 10^{-16}$
(1,0)	0,440	$<2.2 \times 10^{-16}$	$<2.2 \times 10^{-16}$	$<2.2 \times 10^{-16}$
(5,4)	0,992	$<2.2 \times 10^{-16}$	$<2.2 \times 10^{-16}$	$<2.2 \times 10^{-16}$
(5,5)	0,993	$<2.2 \times 10^{-16}$	$<2.2 \times 10^{-16}$	$<2.2 \times 10^{-16}$

Obs.: *Para lag=15

Na Tab. 24 percebeu-se que os resíduos satisfazem a propriedade de serem independentes conforme os resultados dos testes de Ljung-Box, por não terem sido encontradas evidências de autocorrelação, com nível de significância de 1%. O teste de Jarque-Bera encontrou evidências de que a distribuição dos resíduos não é a distribuição Normal. O teste ARCH e o teste de McLeod Li encontraram evidências de que os resíduos quadráticos possuem heteroscedasticidade.

Uma complementação dos resultados obtidos pode ser encontrada no Apêndice G.

b) Ajuste de modelos EGARCH(m,n)

Pode ser visto no Apêndice H que o modelo ARMA(p,q)-GARCH(m,n) deixou a desejar, o procedimento foi repetido, então, utilizando-se outras extensões do GARCH: GJRGARCH, TGARCH, CSGARCH e EGARCH, tendo o EGARCH e o CSGARCH obtido os melhores critérios de informação. Para tal, foram utilizadas as distribuições de probabilidade GED e t de Student e as ordens dos modelos, m e n , variaram entre 0 e 3.

Tabela 25 - Critérios de Informação AIC e BIC pela GED dos ARMA-EGARCH e ARMA-CSGARCH selecionados dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

Modelos	AIC	BIC
ARMA(1,0)-EGARCH(1,1) _{GED}	-12,259	-12,249
ARMA(1,0)-EGARCH(2,3) _{GED}	-12,263	-12,248
ARMA(5,5)-EGARCH(1,1) _{GED}	-12,277	-12,254
ARMA(5,4)-CSGARCH(2,1) _{GED}	-12,269	-12,245

Obs.: em negrito estão indicados os menores valores em cada coluna

Os modelos EGARCH(m,n) mais parcimoniosos pelo AIC foram, nesta ordem: ARMA(5,5)-EGARCH(1,1)_{GED} e ARMA(5,4)-CSGARCH(2,1)_{GED}, e pelo BIC foram: ARMA(1,0)-EGARCH(1,1)_{GED} e ARMA(1,0)-EGARCH(2,3)_{GED} (Tab. 25). O modelo mais parcimonioso de todos foi o ARMA(5,5)-EGARCH(1,1)_{GED}.

Após, aplicaram-se o EGARCH(m,n) e o CSGARCH(2,1) aos resíduos padronizados. A partir destes, verificou-se se atendiam as seguintes propriedades: independência dos resíduos e dependência dos resíduos ao quadrado. Também foi verificado se possuíam propriedades desejadas como: normalidade e heteroscedasticidade (Tab. 26).

Tabela 26 - Propriedades dos resíduos padronizados ARMA(p,q)-EGARCH(m,n) selecionados dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

Modelos	Testes (p-valor)		
	Ljung-Box (independência)*	Jarque-Bera (normalidade)	ARCH (homoscedasticidade)**
ARMA(5,5)-EGARCH(1,1) _{GED}	0,777	$<2,200 \times 10^{-16}$	1,000
ARMA(1,0)-EGARCH(1,1) _{GED}	0,818	$<2,200 \times 10^{-16}$	1,000
ARMA(1,0)-EGARCH(2,3) _{GED}	0,557	$<2,200 \times 10^{-16}$	1,000
ARMA(5,4)-CSGARCH(2,1) _{GED}	0,088	$<2,200 \times 10^{-16}$	1,000

Obs.: *Para lag = 20 e **Para lag = 12

Na Tab. 26 percebeu-se que não foram encontradas evidências de autocorrelação nos resíduos de todos os modelos selecionados. Além disso, não foram encontradas evidências de heteroscedasticidade e foram encontradas evidências de que os resíduos não seguem a distribuição Normal. Como pode ser visto nos histogramas da Fig. 33 ((a), (b), (c), e (d)), a GED dos resíduos padronizados dos ARMA(p,q)-EGARCH(m,n) são assimétricas e leptocúrticas.

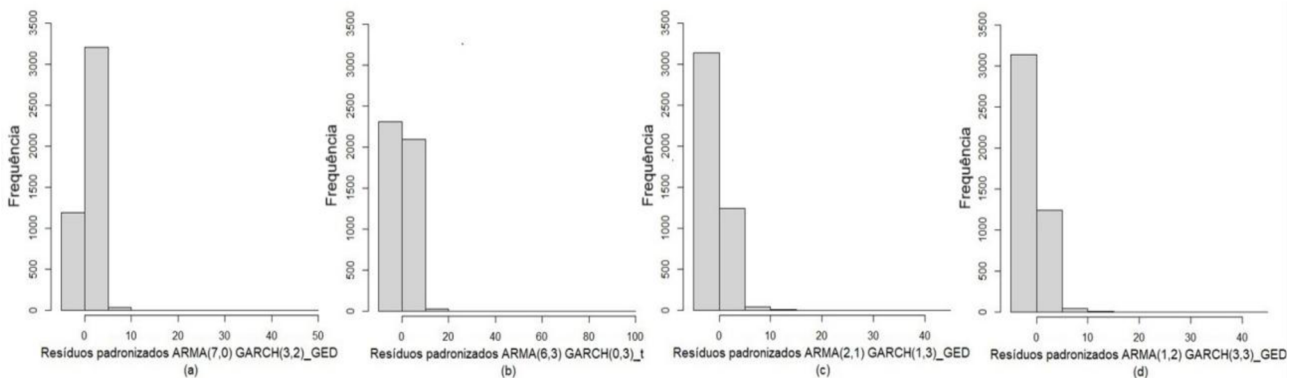


Figura 33: Histograma dos resíduos padronizados selecionados com a GED dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018

Na previsão do modelo ARMA(5,4)-CSGARCH(2,1)_{GED} o mesmo gerou NAN (*Not a Number*; em inglês), desta forma, não foi possível obter as previsões e este modelo, então, foi desconsiderado.

As métricas dos erros dos modelos selecionados estão apresentadas na Tab. 27.

Tabela 27 - Capacidade preditiva dos ARMA(p,q)-EGARCH(m,n) mais parcimoniosos do AIC e do BIC das variâncias diárias da PETR4, entre 02-01-2019 e 30-06-2023 (período de validação)

ARMA(p,q)-EGARCH(m,n)	MAE	RMSE	MdAE
ARMA(5,5)-EGARCH(1,1) _{GED}	0,000031849	0,000111505	0,000016172
ARMA(1,0)-EGARCH(2,3) _{GED}	0,000022638	0,000107948	0,000008809

Obs.: em negrito estão indicados os menores valores em cada coluna

Na Tab. 27 percebeu-se que, considerando o critério de informação mais parcimonioso pelo AIC, o ARMA(5,5)-EGARCH(1,1)_{GED}, e o critério de informação mais parcimonioso pelo BIC, o ARMA(1,0)-EGARCH(2,3)_{GED}, os erros foram próximos, variando apenas na quinta casa após a vírgula para o MAE, na quinta casa após a vírgula para o RMSE e na quinta casa após a vírgula para o MdAE. Assim, considera-se que a melhor previsão, neste caso, foi obtida com o modelo ARMA(1,0)-EGARCH(2,3)_{GED} pelo critério de informação BIC.

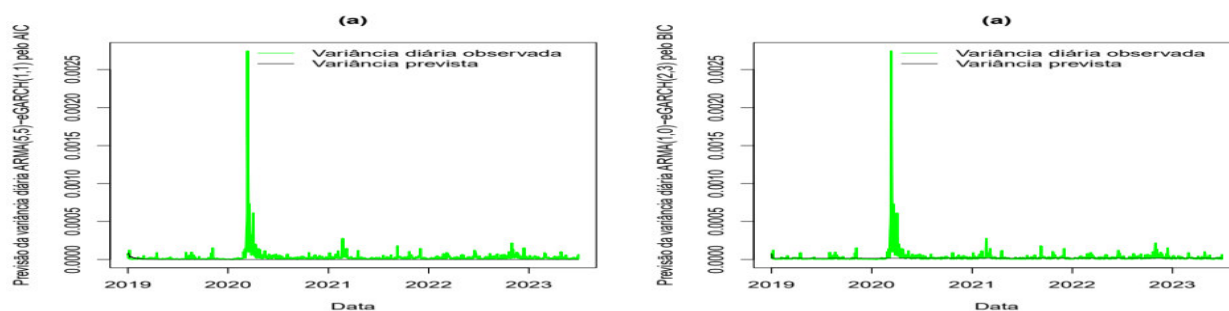


Figura 34: Previsão pelos (a)ARMA(5,5)-EGARCH(1,1) e (b)ARMA(1,0)-EGARCH(2,3) das variâncias dos retornos diários da PETR4, entre 02-01-2019 e 30-06-2023 (período de validação)

Como pode ser visto na Fig. 34, nenhum dos modelos ARMA(p,q)-EGARCH(m,n) selecionados conseguiu capturar bem as variâncias diárias da PETR4 no período de validação. Embora o erro apresente valores baixos, isso se justifica porque as variâncias são baixas.

Detalhes dos resultados dos ARMA(p,q)-EGARCH(m,n) podem ser obtidos no Apêndice I.

3.4.9 Modelagem ARMA(p,q)-ESN com retornos para previsão da volatilidade da PETR4

a) Modelagem ARMA(p,q)

A modelagem ARMA(p,q) foi feita da mesma forma que apresentado na subseção 3.4.8, no entanto, foi realizada com os retornos e não com os log retornos da PETR4. A modelagem ARMA feita com os retornos provocou a mudança dos modelos mais parcimoniosos na PETR4. Os critérios de informação mais parcimoniosos pelo BIC e AIC foram obtidos, respectivamente, pelos ARMA(0,0) e ARMA(0,1), e pelo ARMA(4,2) na PETR4. Maiores detalhes encontram-se no Apêndice J.

b) Modelagem ESN

Após obterem-se os resíduos dos $\text{ARMA}(p,q)$, estes foram aplicados à ESN separadamente com as quatro distribuições individualmente. Da mesma forma que no ARMA-EGARCH da PETR4, não se considerou o modelo $\text{ARMA}(0,0)$.

Conforme explicado anteriormente, utilizou-se o AG para otimização dos hiperparâmetros da ESN. As faixas de valores dos hiperparâmetros, do total de 55 bits utilizados, são as mesmas utilizadas na ESN para a ITSA4.

Para a ST da PETR4 não houve combinação entre as distribuições para geração dos Pesos de Entrada e do Reservatório, tendo sido utilizada a mesma distribuição com os mesmos argumentos para a geração dos pesos, conforme já explicado.

Apresentam-se os resultados obtidos com a geração de pesos aleatórios utilizando as distribuições de probabilidade Uniforme, Normal, t de Student e GED para W_{in}^n e W na PETR4 para $\text{ARMA}(4,2)$. Para tal, na distribuição Uniforme utilizaram-se como argumentos limite inferior -1 e superior 1 e na distribuição Normal utilizaram-se média zero e desvio padrão um, para a t de Student utilizou-se graus de liberdade = 4, obtidos a partir dos resíduos quadráticos, e para a GED utilizaram-se média = 0.0006978942, desvio padrão = 0.0016816946 e densidade = 1.9999999197 para $\text{ARMA}(4,2)$, obtidos a partir dos resíduos quadráticos.

Apresentam-se os resultados obtidos com a geração de pesos aleatórios utilizando as distribuições de probabilidade Uniforme, Normal, t de Student e GED para W_{in} e W na PETR4 para $\text{ARMA}(0,1)$. Na distribuição Uniforme utilizaram-se como argumentos limite inferior -1 e superior 1 e na distribuição Normal utilizaram-se média zero e desvio padrão um, para a t de Student utilizou-se graus de liberdade = 4, obtidos a partir dos resíduos quadráticos, e para a GED utilizaram-se média = 0.0006997121, desvio padrão = 0.0016931807 e densidade = 1.9999999194, obtidos a partir dos resíduos quadráticos.

Na Tab. 28 estão apresentados apenas os hiperparâmetros das ESNs, treinadas e validadas com os resíduos quadráticos da PETR4 de cada distribuição que apresentaram o melhor resultado pelo MAE para o $\text{ARMA}(0,1)$.

Da Tab. 28, percebeu-se o seguinte:

- O número de épocas variou entre as distribuições, tendo a menor ficado acima de 4000 épocas;
- A taxa de vazão variou significativamente entre as distribuições e ficou mais baixa na distribuição Normal;
- O raio espectral ficou mais alto na distribuição Uniforme;
- Os Valores Iniciais Desconsiderados ficaram entre quatro dias úteis e cinco meses (103 dias úteis);

- O menor tamanho de reservatório foi nas distribuições Uniforme e Normal;
- O coeficiente de regularização foi menor na GED e o maior foi na distribuição t de Student.

Na Tab. 29 estão apresentados apenas os hiperparâmetros das ESNs, treinadas e validadas com os resíduos quadráticos da PETR4 de cada distribuição que apresentaram o melhor resultado pelo MAE para o ARMA(4,2).

Tabela 28 - Hiperparâmetros da PETR4 otimizados do ARMA(0,1)-ESN das épocas com menores MAE no teste, distribuições Uniforme, Normal, t de Student e GED

Distribuição	Épocas	Taxa de Vazão (α)	Raio Espectral (sr)	VID*	Tamanho do Reservatório	Coeficiente de Regularização
Uniforme	6137	0,418162675191	0,756208467167	7	2	0,000057550017
Normal	9085	0,046577808974	0,473483837004	16	2	0,000030620467
t de Student	9287	0,164254488026	0,215959289240	103	5	0,000075373892
GED	4728	0,424219757231	0,638417346324	4	7	0,000000009900

Obs.: VID*: Valores Iniciais Desconsiderados

Na Tab. 29, percebeu-se o seguinte:

- O número de épocas variou entre as distribuições, ficando acima de 4000 épocas e alcançado o máximo de épocas utilizado;
- A taxa de vazão variou significativamente entre as distribuições e ficou mais baixa na t de Student;
- O raio espectral ficou acima de 0,2 em todas distribuições, notou-se que os menores tamanhos de reservatório tiveram os menores raios espectrais;
- Os Valores Iniciais Desconsiderados obtiveram o menor e o maior valores para o ARMA(0,1)-ESN;
- O ARMA(0,1)-ESN quanto para o ARMA(4,2)-ESN as distribuições Uniforme e Normal obtiveram os menores tamanhos de reservatórios possíveis;
- O coeficiente de regularização foi menor na GED e o inverso na Normal.

Analisando-se as Tabs. 28 e 29 percebeu-se que:

- O número de épocas variou entre as distribuições, ficando acima de 4000 épocas nos dois modelos ARMA(p,q)-ESN;
- A taxa de vazão variou significativamente entre as distribuições e ficou mais baixa na t de Student para o ARMA(4,2)-ESN;

- O raio espectral ficou mais próximo de um na distribuição GED e os mais baixos foram nas distribuições Uniforme e Normal, notou-se também que tamanhos de reservatório menores de cinco tiveram os menores raios espectrais nos dois casos;
- Os Valores Iniciais Desconsiderados ficaram entre 11 dias úteis e 1 mês e 1 semana (26 dias úteis);
- O maior tamanho de reservatório foi na t de Student;
- O coeficiente de regularização foi menor na GED nos dois casos.

Tabela 29 - Hiperparâmetros da PETR4 otimizados por AG do ARMA(4,2)-ESN das épocas com menores MAE no teste, distribuições Uniforme, Normal, t de Student e GED

Distribuição	Épocas	Taxa de Vazão (α)	Raio Espectral (sr)	VID*	Tamanho do Reservatório	Coeficiente de Regularização
Uniforme	10000	0,151650632100	0,307718717336	26	2	0,000046506965
Normal	7462	0,082565937545	0,249834059403	20	2	0,000096685047
t de Student	4216	0,003173853340	0,824514957542	12	25	0,000062005986
GED	7207	0,359354853476	0,934630848929	11	13	0,000000203638

Obs.: VID*: Valores Iniciais Desconsiderados

A Tab. 30 apresenta erros de previsão das variâncias diárias do ARMA(0,1)-ESN. Percebeu-se que a GED conseguiu melhor desempenho. Embora as distribuições tenham ficado próximas.

Tabela 30 - Capacidade preditiva do ARMA(0,1)-ESN da PETR4 das épocas com menores erros de teste MAE, distribuições Uniforme, Normal, t de Student e GED

Distribuição	Épocas	MAE			RMSE			MdAE		
		Treina (R\$)	Valida (R\$)	Testa (R\$)	Treina (R\$)	Valida (R\$)	Testa (R\$)	Treina (R\$)	Valida (R\$)	Testa (R\$)
Uniforme	6137	0,00055	0,00114	0,00032	0,00116	0,00253	0,00032	0,00037	0,00051	0,00032
Normal	9085	0,00055	0,00114	0,00031	0,00116	0,00254	0,00032	0,00037	0,00051	0,00031
t de Student	9287	0,00056	0,00114	0,00033	0,00116	0,00253	0,00034	0,00038	0,00051	0,00034
GED	4728	0,00055	0,00114	0,00031	0,00115	0,00252	0,00031	0,00036	0,00052	0,00031

Obs.: em negrito estão indicados os menores valores de cada coluna a partir da sexta casa decimal

A Tab. 31 apresenta erros de previsão das variâncias diárias do ARMA(4,2)-ESN. Percebeu-se que a distribuição t de Student conseguiu o melhor desempenho.

Tabela 31 - Capacidade preditiva do ARMA(4,2)-ESN da PETR4 das épocas com menores erros de teste MAE, distribuições Uniforme, Normal, t de Student e GED

Distribuição	Épocas	MAE			RMSE			MdAE		
		Treina (R\$)	Valida (R\$)	Testa (R\$)	Treina (R\$)	Valida (R\$)	Testa (R\$)	Treina (R\$)	Valida (R\$)	Testa (R\$)
Uniforme	10000	0,00055	0,00114	0,00030	0,00115	0,00251	0,00031	0,00036	0,00051	0,00030
Normal	7462	0,00055	0,00113	0,00030	0,00117	0,00254	0,00031	0,00036	0,00051	0,00031
t de Student	4216	0,00048	0,00110	0,00010	0,00121	0,00259	0,00014	0,00016	0,00042	0,00008
GED	7207	0,00055	0,00113	0,00031	0,00115	0,00251	0,00031	0,00036	0,00051	0,00031

Obs.: em negrito estão indicados os menores valores de cada coluna a partir da sexta casa decimal

Analisando-se as Tabs. 30 e 31 percebeu-se, claramente, que o melhor desempenho foi com a distribuição t de Student no ARMA(4,2)-ESN, modelo selecionado pelo critério AIC.

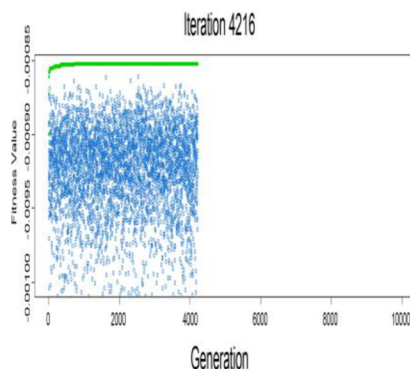


Figura 35: Evolução do fitness MAE do AG com os retornos da PETR4 (4216 épocas), ARMA(4,2) pela t de Student, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (períodos de treino e validação)

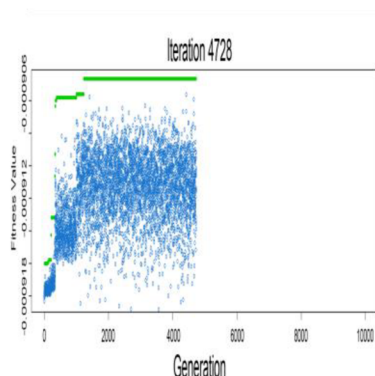


Figura 36: Evolução do fitness MAE do AG com os retornos da PETR4 (4728 épocas), ARMA(0,1) pela GED, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (períodos de treino e validação)

Nas Figs. 35 e 36 vê-se as evoluções dos *fitness* usando MAE (40% de treinamento e 60% de validação) dos resíduos quadráticos ARMA(4,2) para a distribuição t de Student, com 4216 épocas e a evolução do *fitness* usando MAE (40% de treinamento e 60% de validação) dos resíduos quadráticos ARMA(0,1) para a GED, com 4728 épocas.

A Fig. 37 apresenta os gráficos das previsões dos resíduos quadráticos no período de teste, considerados os menores erros, que foram do ARMA(0,1)-ESN pela distribuição GED e do ARMA(4,2)-ESN pela distribuição t de Student.

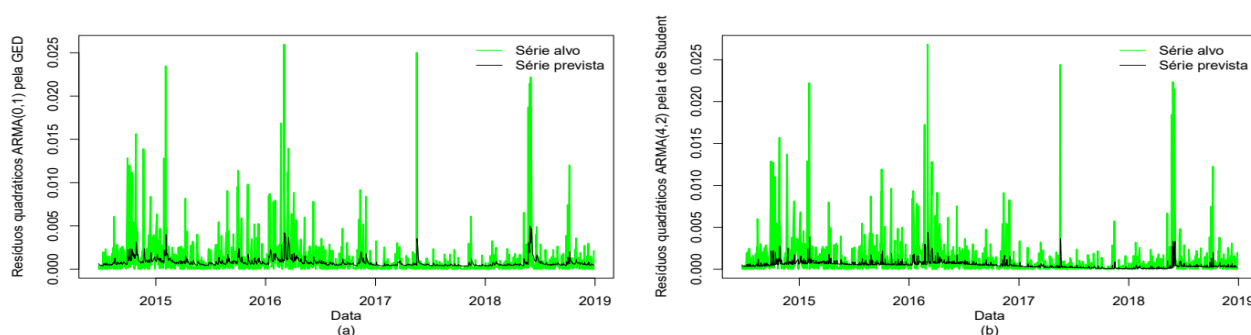


Figura 37: Predição resíduos quadráticos (a)ARMA(0,1)-ESN pela GED e (b)ARMA(4,2)-ESN pela t de Student da PETR4, entre 24-06-2014 e 28-12-2018 (período de validação)

A Fig. 38 apresenta os gráficos das previsões da variância dos retornos no período de teste, considerados os menores erros, que foram do ARMA(0,1)-ESN com a distribuição GED, selecionado pelo BIC e do ARMA(4,2)-ESN com a distribuição t de Student, selecionado pelo AIC. Pode se ver, claramente, que a ARMA(4,2)-ESN se aproxima melhor dos menores valores.

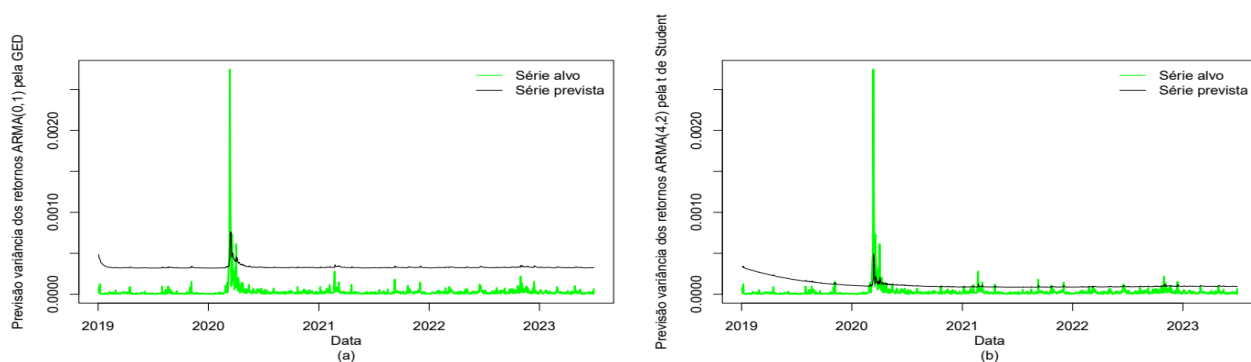


Figura 38: Previsão pelos (a)ARMA(0,1)-ESN e (b)ARMA(4,2) com a GED e a t de Student das variâncias dos retornos diários da PETR4, entre 02-01-2019 e 30-06-2023 (período de teste)

3.4.10 Discussão da PETR4

Comparando os gráficos da ESN (Fig. 31) e dos ARMA(5,5)-EGARCH(1,1) e ARMA(1,0)-EGARCH(2,3) (Fig. 34 (a) e (b)), pode-se notar que os desempenhos do ARMA(4,2)-ESN e ARMA(0,1)-ESN (Fig. 38 (a) e (b)) foram diferentes dos demais, ESN e ARMA-EGARCH não

conseguem capturar bem as variâncias, mas os modelos ARMA-ESN são um pouco melhores em capturar as subidas e descidas e, de certa forma, conseguem corrigir as distorções da ESN.

Comparando-se as capacidades preditivas do modelos pelas métricas dos erros, percebeu-se que o melhor desempenho foi do ARMA-EGARCH, seguido pela ESN e ARMA-ESN (Tab. 32).

Tabela 32: Capacidade preditiva dos melhores modelos de acordo com a técnica utilizada da PETR4

Técnica distribuição	MAE	RMSE	MdAE
ARMA-EGARCH _{GED}	0,000022638	0,000107948	0,000008809
ESN _{Uniforme}	0,000016448	0,000110424	0,000009456
ARMA-ESN _{t de Student}	0,000100028	0,000141806	0,000080415

Sobre as distribuições, três destacaram-se: a Uniforme, a t de Student e a GED, na ESN a distribuição Uniforme obteve um desempenho melhor do que a Normal, no ARMA-EGARCH a GED, selecionada pelo BIC, foi a melhor, e no ARMA-ESN a GED, selecionada pelo BIC, foi a melhor com a t de Student, selecionada pelo AIC, sendo a t de Student a melhor entre as duas.

3.4.11 Discussão comparativa entre ITSA4 e PETR4

a) Análise exploratória comparativa dos dados da ITSA4 e da PETR4

A Tab. 33 reapresenta as medidas resumo das ST de dados brutos da ITSA4 e da PETR4.

Tabela 33: Medidas resumo dos dados brutos da ITSA4 e da PETR4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023

Ação	Mínimo (R\$)	Média (R\$)	Mediana (R\$)	Máximo (R\$)	Desvio Padrão	Coefficiente de Assimetria	Coefficiente de Curtose
ITSA4	1,43	8,58	9,30	14,38	3,33	-0,80	-0,37
PETR4	4,20	34,95	27,53	130,00	22,49	1,44	1,81

Comparando-se as duas ST (Tab. 33) percebeu-se que a faixa de valores da ITSA4 variou entre as unidades e dezenas de Reais e a PETR4 variou de unidades a centena de Reais. Além desta última apresentar tendência central mais elevada e maior variabilidade, a forma das distribuições também é bastante diferente. A primeira tem assimetria negativa e caudas leves, enquanto que a segunda tem assimetria positiva e caudas pesadas.

A Tab. 34 reapresenta as medidas resumo das ST dos retornos calculados da ITSA4 e da PETR4.

Tabela 34 - Medidas resumo dos retornos da ITSA4 e da PETR4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023

Ação	Mínimo (%)	Média (%)	Mediana (%)	Máximo (%)	Desvio Padrão	Coefficiente de Assimetria	Coefficiente de Curtose
ITSA4	-0,116	$5,247 \times 10^{-4}$	0,000	0,251	$2,176 \times 10^{-2}$	0,329	6,243
PETR4	-0,352	$5,745 \times 10^{-4}$	$9,982 \times 10^{-4}$	0,201	$2,749 \times 10^{-2}$	-0,597	10,556

Comparando-se a distribuição dos retornos da PETR4 com a ITSA4 (Tab. 34), percebeu-se que a variação entre máximo e mínimo na segunda é um pouco maior, mas a média e o desvio padrão dos retornos da PETR4 não estão muito distantes dos valores dos retornos da ITSA4. A distribuição desta última pode ser considerada simétrica e com caudas pesadas, enquanto a distribuição dos retornos da PETR4 apresenta assimetria negativa e caudas pesadas. Além disso, notou-se que, a ITSA4 foi mais afetada, positivamente, na crise de 2008 do que na pandemia de Covid-19, em março de 2020, já a PETR4, oscilou bastante na crise de 2008, com retornos positivos e negativos, mas sua pior perda de retornos foi no início da pandemia de Covid-19.

A Tab. 35 reapresenta as medidas resumo das ST dos log retornos calculados da ITSA4 e da PETR4.

Tabela 35 - Medidas resumo de log retornos da ITSA4 e da PETR4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023

Ações	Mínimo (R\$)	Média (R\$)	Mediana (R\$)	Máximo (R\$)	Desvio Padrão	Coefficiente de Assimetria	Coefficiente de Curtose
ITSA4	-0,122	$2,887 \times 10^{-4}$	0,000	0,224	$2,171 \times 10^{-2}$	0,830	5,225
PETR4	-0,171	$3,093 \times 10^{-4}$	$9,975 \times 10^{-4}$	0,151	$2,647 \times 10^{-2}$	-0,144	3,943

Comparando-se a distribuição dos log retornos da PETR4 com a ITSA4 (Tab. 35), percebeu-se que a variação entre máximo e mínimo, a média e o desvio padrão da PETR4 não são muito distantes da ITSA4. Além disso, as características das distribuições dos log retornos são similares às dos retornos em termos de assimetria e curtose, apenas na ITSA4 apareceu assimetria positiva.

b) Análise comparativa da capacidade preditiva das técnicas aplicadas nas ações da ITSA4 e da PETR4

Entre as Figs. 14 e 30 percebeu-se, visualmente, que a predição para PETR4 (Fig. 30) e a predição para ITSA4 (Fig. 14) (período de validação) da ESN obtiveram desempenho semelhante, mas sem conseguir capturar a amplitude dos retornos.

Entre as Figs. 15 e 31 percebeu-se que a previsão da ESN para PETR4 (Fig. 31) grande parte dos valores extrapolaram negativamente e que a previsão da ESN para ITSA4 (Fig. 15) os valores extrapolaram em toda ST, mas positivamente.

Entre as Figs. 22 e 38 percebeu-se, visualmente, que as previsões para ITSA4 (Fig. 22) e as previsões para PETR4 (Fig. 38) (períodos de teste) pela ARMA(p,q)-ESN não conseguiram capturar bem a variância dos retornos. Além disso, a amplitude das variâncias é maior para a PETR4, o que indica uma maior volatilidade desta ação em relação à ITSA4.

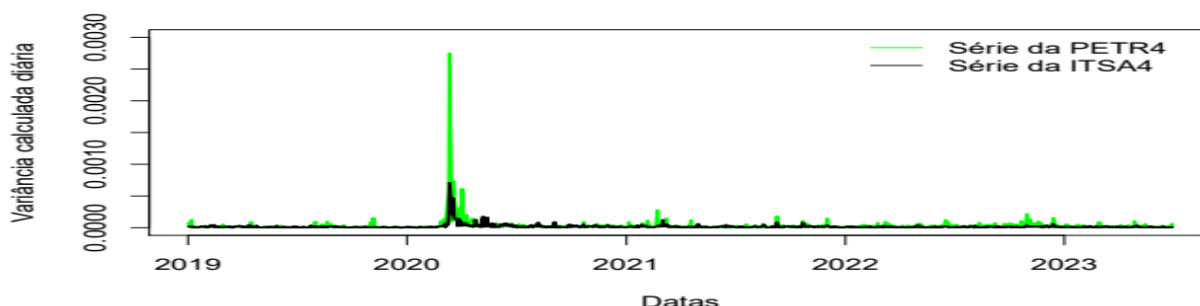


Figura 39: Variâncias dos retornos *intraday*, a cada 30min, calculados diariamente da ITSA4 e da PETR4, entre 02-01-2019 e 30-06-2023 (período de teste)

As variâncias diárias calculadas da ITSA4 e da PETR4 estão apresentadas na Fig. 39, porém na mesma escala, percebeu-se que o pico das variâncias dos retornos da ITSA4 é menor.

Comparados os valores dos ARMA(p,q)-ESN da ITSA4 (Tabs. 14 e 15) com os da PETR4 (Tabs. 30 e 31), notou-se que os erros do período de testes na ITSA4 foram menores, bem como a distância entre os erros das três técnicas.

Convém salientar que o ARIMA-GARCH e variações são normalmente utilizados para previsões de curto prazo, numa faixa de até dezenas de valores, mas a ESN e o ARMA-ESN demonstraram ser capazes de prever um conjunto de dados maior de um dia para o próximo, tendo chegado à faixa de centenas de valores com capacidade preditiva próxima, permitindo previsões de até médio e longo prazo.

c) Análise comparativa das distribuições aplicadas na ITSA4 e na PETR4

Sobre as distribuições, percebeu-se que a ESN da ITSA4 que obteve melhor desempenho foi a distribuição Uniforme e da PETR4 também foi a Uniforme, havendo portanto prevalência de uma sobre outra, nestes casos. Já no ARMA-EGARCH a GED saiu-se melhor nas ST estudadas, variando apenas o critério, pelo AIC na ITSA4 e pelo BIC na PETR4. No ARMA-ESN a GED esteve entre os melhores resultados nas duas ações estudadas, mas a distribuição Normal foi melhor pelo BIC na ITSA4 e a *t* de Student foi a melhor pelo AIC na PETR4. Isto indica que, dependendo dos dados, deve-se adequar a distribuição de probabilidade a ser utilizada.

d) Análise comparativa dos critérios de informação na ITSA4 e na PETR4

Na ITSA4 o melhor modelo do ARMA-EGARCH foi obtido pelo AIC e na PETR4 o melhor modelo foi obtido pelo BIC, indicando que, nestes casos, nenhum critério se destacou. Na ITSA4 o melhor modelo do ARMA-ESN foi obtido pelo BIC e na PETR4 o melhor modelo foi obtido pelo AIC. Portanto, nestes casos, não se pode apresentar uma preferência, o que indica que os dois devem sempre ser considerados. Isto corrobora o que foi apontado por Fonseca (2024), que diz que o desempenho de um critério de informação está relacionado ao mecanismo gerador de dados da série analisada.

4 - SÉRIES TEMPORAIS SIMULADAS

Na realização do projeto utilizaram-se dados simulados de vinte ST a partir de modelos ARMA-EGARCH da ITSA4, tanto para as metodologias estudadas quanto para a proposta.

4.1 Geração das séries temporais simuladas

As gerações das ST simuladas são executadas de duas formas diferentes. No primeiro modelo, opta-se por utilizar o ARMA(7,0) pelo AIC, oriundo da ITSA4, por ter apresentado o melhor resultado no ARMA-ESN da própria ITSA4. Inicialmente, geram-se as sementes aleatórias, então, gera-se o modelo ARMA(7,0), com 4453 valores.

No entanto, antes de poder utilizar esta ST, é necessário conferir se atende aos requisitos do modelo ARMA-EGARCH. Desta forma, são verificadas as seguintes propriedades dos dados: estacionariedade do ajuste, autocorrelação dos resíduos (Ljung-Box), heteroscedasticidade dos resíduos quadráticos (Mc-Leod Li), nesta ordem. Caso essas propriedades sejam confirmadas, gera-se o modelo ARMA(7,0)-EGARCH a partir os resíduos quadráticos.

Então, é verificada a propriedade de heteroscedasticidade (testes Arch e Mc-Leod Li) nos resíduos padronizados. Caso possa ser admitida, a série é considerada viável. Para que as propriedades do ARMA-EGARCH sejam atendidas, observa-se que é necessário gerar entre quarenta e cem séries até obter uma viável.

Porém, no modelo 1, não se consegue especificar o modelo EGarch(2,3) (ver Apêndice L), então, opta-se por criar outro modelo.

No modelo 2, opta-se por utilizar o modelo ARMA(1,2)-EGARCH(1,1) da ITSA4, por ter sido o melhor BIC na ARMA-ESN. Inicialmente, geram-se os dados do modelo da seguinte forma, de acordo com Moretin (2017):

$$\text{Log retornos} \quad r_t = ar_t r_{t-1} + ma_t r_{t-1} + ma_{t+1} r_{t-2} + a_t, \text{ para } t \geq 1, \quad (25)$$

$$a_t \quad a_t = \sqrt{(h_t)} \varepsilon_t, \text{ para } t \geq 1, \quad (26)$$

onde ε_t são valores aleatórios com média zero e variância um,

$$h_t \quad \ln h_t = \omega + \beta_t \ln h_{t-1} + \alpha_1 |\varepsilon_{t-1}| + \gamma_t \varepsilon_{t-1}, \text{ para } t \geq 1. \quad (27)$$

O h_0 é obtido da segunda variância prevista do ajuste pelo ARMA(1,2)-EGarch(1,1), pelo BIC. O $r_{t=0}$ é obtido do primeiro retorno do ajuste da ST original da ITSA4. Os coeficientes ar_1 , ma_1 e ma_2 do ARMA(1,2) são obtidos a partir do Arima, usado anteriormente. Os coeficientes ω , α_t , β_t e γ_t são obtidos a partir do EGARCH(1,1), usado anteriormente. Geram-se, também, valores de erros aleatórios (ε_t).

Neste caso, geram-se 5000 valores iniciais mas utilizam-se apenas os últimos 4453 valores da ST gerada, a fim de desconsiderar os valores iniciais não estabilizados. Para que as propriedades do ARMA-EGARCH sejam atendidas, como explicado anteriormente, é necessário algo entre cem e duzentas tentativas a fim de obter-se uma ST que atenda todas.

Como as ST simuladas são geradas a partir do ARMA-EGARCH da ST da ITSA4, opta-se por utilizar a variância dos retornos diários de 30 em 30 min da própria ITSA4 para realizarem-se as validações do ARMA-EGARCH e os testes do ARMA-ESN e da ESN, invés de gerarem-se novas ST simuladas de variâncias de retornos.

O segundo modelo, por seguir as Eqs. 23, 24 e 25, possui, basicamente, variações dos valores aleatórios (ε_t) da GED, pois os coeficientes, variância condicional inicial (h_0) e retornos partem sempre dos mesmos valores, para todas as ST simuladas.

No primeiro modelo os valores podem variar mais, porque não se consegue especificar exatamente o modelo EGARCH(2,3). Além disso, convém salientar que as vinte ST simuladas seguem imposições de propriedades do ARIMA-GARCH, portanto, a geração destas ST fica condicionada por este modelo.

No Apêndice L podem ver-se os comandos utilizados na R para geração dos modelos 1 e 2.

4.2 Análise exploratória dos dados simulados

No Apêndice K podem ver-se os gráficos dos retornos das vinte ST simuladas, bem como os *boxplots* e as medidas resumo das ST simuladas.

4.3 Ajuste de modelos ARMA(p,q)-EGARCH(m,n)

Para verificar os comandos da R utilizados para realizar os ajustes dos vinte modelos simulados veja Apêndice L.

4.4 Resultados obtidos nas séries temporais simuladas⁹

O estudo de simulação utilizou dois mecanismos gerador de dados, embora ambos baseados no modelo ARMA-EGARCH, que foram analisados separadamente.

⁹ Mais resultados do trabalho desenvolvido durante o doutorado podem ser encontrados em: <https://github.com/fabian-correa-cardoso>

A avaliação do desempenho da técnica de modelagem foi feita por meio da mensuração da capacidade preditiva de cada modelo, avaliada por meio de MAE, MdAE e RMSE. Relativamente aos erros, como foram realizados três experimentos para cada série, com duas distribuições diferentes para gerar os pesos aleatórios da ESN, escolheram-se os menores erros MAE, MdAE e RMSE dos seis apresentados para cada erro, independentemente da distribuição.

Algumas ST simuladas exigiram correções nos cálculos dos erros, como explicado, foram elas: do primeiro modelo, a primeira, a segunda, a terceira, a quinta e a sexta e do segundo modelo, a primeira, a sétima e a nona.

A modelagem de cada ST simulada foi feita de três diferentes maneiras, identificadas como: ARMA-EGARCH, ESN e ARMA-ESN. Os resultados foram tabulados pelas seguintes variáveis: Técnica, Modelo, MAE, MdAE, RMSE e Versão (Tabs. 73 e 74 no Apêndice K).

Tabela 36: Medidas resumo das métricas de erros das ST simuladas (modelo 1)

Modelo	Medida	Métricas de erro		
		MAE	RMSE	MdAE
ARMA-ESN	Mínimo	$1,017 \times 10^{-4}$	$1,173 \times 10^{-4}$	$0,117 \times 10^{-4}$
	Média	$32,021 \times 10^{-4}$	$34,119 \times 10^{-4}$	$31,250 \times 10^{-4}$
	Mediana	$18,914 \times 10^{-4}$	$26,722 \times 10^{-4}$	$18,770 \times 10^{-4}$
	Máximo	$96,676 \times 10^{-4}$	$96,694 \times 10^{-4}$	$96,420 \times 10^{-4}$
	Desvio-padrão	$30,402 \times 10^{-4}$	$29,970 \times 10^{-4}$	$30,880 \times 10^{-4}$
	Coef. de assimetria	0,915	0,786	0,913
	Coef. de curtose	-0,570	-0,678	-0,621
ARMA-EGARCH	Mínimo	$0,066 \times 10^{-4}$	$0,0873 \times 10^{-4}$	$0,066 \times 10^{-4}$
	Média	$1,031 \times 10^{-4}$	$1,041 \times 10^{-4}$	$1,036 \times 10^{-4}$
	Mediana	$0,834 \times 10^{-4}$	$0,843 \times 10^{-4}$	$0,843 \times 10^{-4}$
	Máximo	$2,449 \times 10^{-4}$	$2,481 \times 10^{-4}$	$2,435 \times 10^{-4}$
	Desvio-padrão	$0,858 \times 10^{-4}$	$0,857 \times 10^{-4}$	$0,857 \times 10^{-4}$
	Coef. de assimetria	0,272	0,296	0,255
	Coef. de curtose	-1,661	-1,631	-1,683
ESN	Mínimo	$0,334 \times 10^{-4}$	$1,417 \times 10^{-4}$	$0,153 \times 10^{-4}$
	Média	$4,500 \times 10^{-4}$	$5,783 \times 10^{-4}$	$4,251 \times 10^{-4}$
	Mediana	$3,424 \times 10^{-4}$	$5,078 \times 10^{-4}$	$3,184 \times 10^{-4}$
	Máximo	$10,980 \times 10^{-4}$	$13,765 \times 10^{-4}$	$10,350 \times 10^{-4}$
	Desvio-padrão	$3,438 \times 10^{-4}$	$3,579 \times 10^{-4}$	$3,416 \times 10^{-4}$
	Coef. de assimetria	0,454	0,809	0,394
	Coef. de curtose	-1,202	-0,134	-1,407

Inicialmente, foi feita uma análise exploratória de dados para identificar tendência central, dispersão, assimetria e curtose da distribuição dos dados (Tabs. 36 e 37). Após, com o objetivo de

comparar as métricas de erro obtidas pelos modelos, foi realizada uma Análise de Variância não paramétrica para dados pareados por meio do teste de Friedman, seguida de comparações múltiplas realizadas por meio do teste de Wilcoxon. A utilização de testes não paramétricos se deu pelas propriedades dos dados analisados.

Na Tab. 36 percebeu-se que no ARMA-ESN as médias dos erros estavam próximas e a única mediana que se destacou foi do RMSE, com relação ao desvio padrão todas métricas de erros foram similares, além disso, todas apresentaram assimetria positiva e curtose negativa, portanto platicúrtica. No ARMA-EGARCH também a média e a mediana estavam próximas e a variabilidade também, os desvios padrão próximos, os dados podem ser considerados simétricos e a distribuição platicúrtica para todos. Na ESN a tendência central foi maior no RMSE, já a variabilidade foi similar, para o MAE e o MdAE pode-se considerá-los simétricos e o RMSE assimétrico, mas todos platicúrticos, porém o RMSE com intensidade menor.

Tabela 37: Medidas resumo das métricas de erros das ST simuladas (modelo 2)

Modelo	Medida	Métricas de erro		
		MAE	RMSE	MdAE
ARMA-ESN	Mínimo	$0,139 \times 10^{-4}$	$0,364 \times 10^{-4}$	$0,082 \times 10^{-4}$
	Média	$0,155 \times 10^{-4}$	$0,391 \times 10^{-4}$	$0,093 \times 10^{-4}$
	Mediana	$0,159 \times 10^{-4}$	$0,398 \times 10^{-4}$	$0,095 \times 10^{-4}$
	Máximo	$0,166 \times 10^{-4}$	$0,401 \times 10^{-4}$	$0,102 \times 10^{-4}$
	Desvio-padrão	$0,010 \times 10^{-4}$	$0,014 \times 10^{-4}$	$0,007 \times 10^{-4}$
	Coef. de assimetria	-0,688	-1,334	-0,568
	Coef. de curtose	-1,192	-0,018	-1,258
ARMA-EGARCH	Mínimo	$0,027 \times 10^{-4}$	$0,074 \times 10^{-4}$	$0,015 \times 10^{-4}$
	Média	$0,033 \times 10^{-4}$	$0,075 \times 10^{-4}$	$0,022 \times 10^{-4}$
	Mediana	$0,033 \times 10^{-4}$	$0,076 \times 10^{-4}$	$0,021 \times 10^{-4}$
	Máximo	$0,045 \times 10^{-4}$	$0,076 \times 10^{-4}$	$0,043 \times 10^{-4}$
	Desvio-padrão	$0,005 \times 10^{-4}$	$0,000 \times 10^{-4}$	$0,008 \times 10^{-4}$
	Coef. de assimetria	1,580	-0,535	2,230
	Coef. de curtose	2,283	-1,050	3,874
ESN	Mínimo	$0,108 \times 10^{-4}$	$0,374 \times 10^{-4}$	$0,046 \times 10^{-4}$
	Média	$0,194 \times 10^{-4}$	$0,411 \times 10^{-4}$	$0,109 \times 10^{-4}$
	Mediana	$0,173 \times 10^{-4}$	$0,400 \times 10^{-4}$	$0,140 \times 10^{-4}$
	Máximo	$0,360 \times 10^{-4}$	$0,577 \times 10^{-4}$	$0,295 \times 10^{-4}$
	Desvio-padrão	$0,075 \times 10^{-4}$	$0,043 \times 10^{-4}$	$0,082 \times 10^{-4}$
	Coef. de assimetria	1,038	1,634	0,691
	Coef. de curtose	0,265	1,702	-0,759

Na Tab. 37 percebeu-se que no ARMA-ESN a média e mediana foram maiores no RMSE, a variabilidade foi um pouco maior no RMSE, a assimetria de todas distribuições foi negativa, ou seja, há maior concentração dos valores maiores, em relação à curtose, o MAE e o MdAE foram platicúrticos e o RMSE pode ser considerado mesocúrtico. Já o ARMA-EGARCH, também possuía média e mediana maiores no RMSE, mas a variabilidade foi menor no RMSE, o desvio padrão menor foi do RMSE, o MAE e o MdAE tiveram assimetria positiva e o RMSE negativa, as distribuições do MAE e do MdAE foram leptocúrticas e o RMSE foi platicúrtico. Na ESN a tendência central mais elevada foi no RMSE, o qual apresentou menor variabilidade, todas distribuições tiveram assimetria positiva, e o MAE e o RMSE tiveram caudas pesadas e o MdAE caudas leves.

Os *boxplots* de cada tipo de erro pelas técnicas de cada modelo, podem ser vistos nas Figs. 40 e 41.

Na Fig. 40 a técnica que demonstrou maior variabilidade foi a ESN, assim como a média dos erros, independentemente do tipo de erro utilizado e na técnica ARMA-EGARCH houve uma maior consistência no padrão dos resultados com uma menor variabilidade, mas com dois valores considerados discrepantes superiores, um no MAE outro no MdAE. Houve uma maior aproximação nas medianas dos resultados da ESN e da ARMA-ESN. No MAE e no MdAE, especificamente, a variabilidade da ESN foi maior que da ARMA-ESN. No ARMA-ESN houve um valor considerado discrepante inferior no RMSE. Mais detalhes sobre as medidas descritivas podem ser encontrados no Apêndice K.

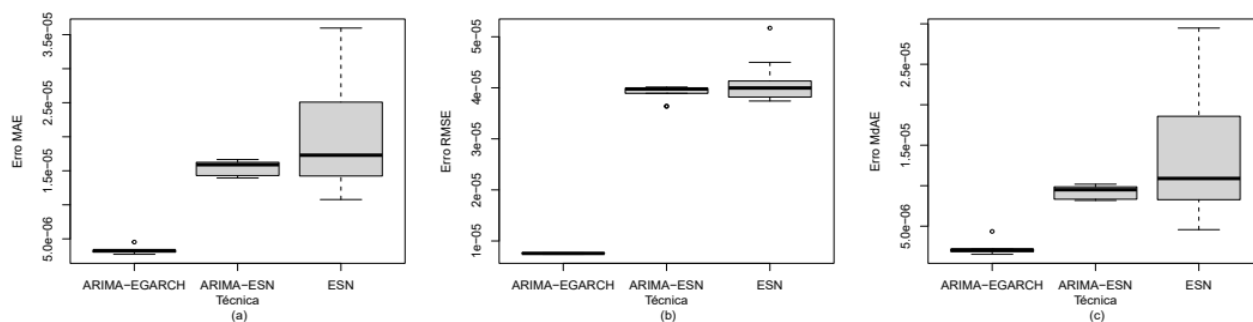


Figura 41: Boxplots dos erros (a)MAE, (b)RMSE, (c)MdAE ST simuladas pelas técnicas utilizadas (modelo 2)

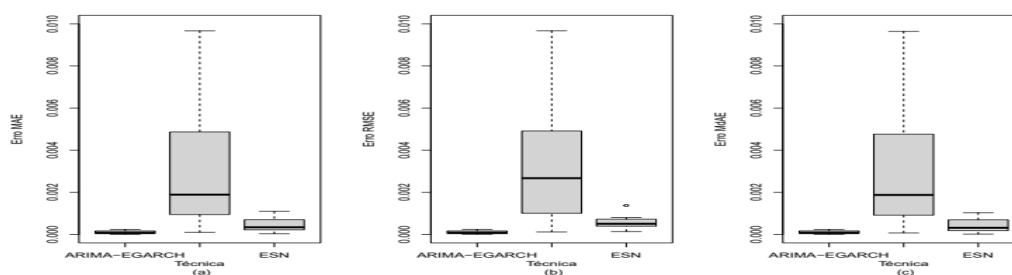


Figura 41: Boxplots dos erros (a)MAE, (b)RMSE, (c)MdAE ST simuladas pelas técnicas utilizadas (modelo 1)

Na Fig. 41 percebeu-se que a técnica que demonstrou maior variabilidade foi a ARMA-ESN, bem como a média dos erros, independentemente do tipo de erro utilizado e na técnica ARMA-EGARCH houve uma maior consistência no padrão dos resultados com uma menor variabilidade. O RMSE tem um valor considerado fora do padrão na ESN.

A maior variabilidade e mediana aconteceram na ESN. No modelo 1 não houve uma mudança significativa entre as assimetrias das métricas de erro, no entanto, no modelo 2 o RMSE foi diferente das outras duas métricas. Na Fig. 42 notou-se que a variabilidade das assimetrias é diferente do modelo 1 para o modelo 2.

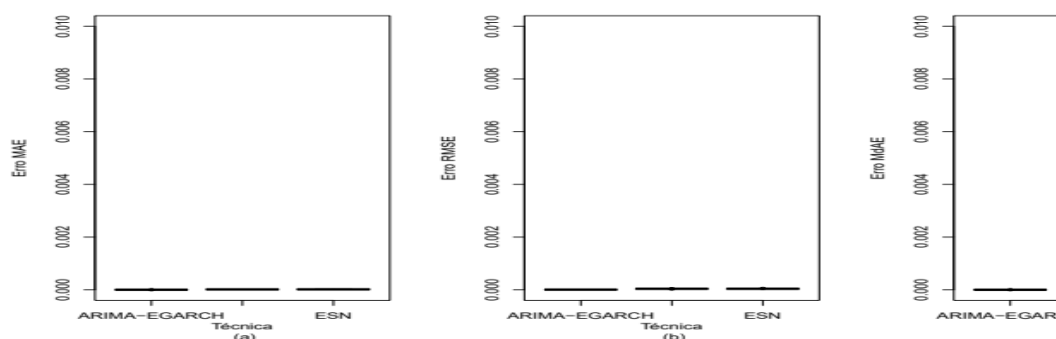


Figura 42: Boxplots dos erros (a)MAE, (b)RMSE, (c)MdAE ST simuladas pelas técnicas utilizadas (modelo 2 em mesma escala que modelo 1)

Os resultados das métricas de erro obtidos pelo modelo 1 foram comparados pelo teste de Friedman, utilizou-se a Tab. 73 (Apêndice K), resultando em $\chi^2 = 54,2$ com 2 graus de liberdade e p-valor $1,701 \times 10^{-12}$, o que indica que foram encontradas evidências de diferenças entre as três distribuições.

Para utilizar-se o teste de Friedman para o modelo 2 utilizou-se a Tab. 74 (Apêndice K), resultando em $\chi^2 = 45,067$ com 2 graus de liberdade e p-valor $1,636 \times 10^{-10}$, o que também indica evidências de diferenças entre as três distribuições.

Tanto pro modelo 1, quanto pro modelo 2, as três distribuições são diferentes.

A seguir utilizou-se o teste de Wilcoxon e também utilizaram-se as Tabs. 73 e 74 (Apêndice K) para análise par a par das capacidades preditivas obtidas pelas três técnicas de modelagem. Os resultados podem ser observados na Tab. 38 para os modelos 1 e 2.

Tabela 38: Testes de Wilcoxon por modelo, com técnicas par a par e por modelo, para as ST simuladas

Modelo	Técnica	p-valor	
		ESN	ARMA-ESN
1	ARMA-ESN	$0,11 \times 10^{-9}$	-
	ARMA-EGARCH	$0,11 \times 10^{-9}$	$5,6 \times 10^{-9}$
2	ARMA-ESN	64×10^{-4}	-
	ARMA-EGARCH	$5,6 \times 10^{-9}$	$5,6 \times 10^{-9}$

Percebeu-se na Tab. 38 que existem evidências de diferença entre ARMA-ESN e ARMA-EGARCH, entre ARMA-ESN e ESN e entre ARMA-EGARCH e ESN nos dois modelos, com exceção entre ARMA-ESN e ESN no modelo 2, no qual não há evidência de diferença entre as métricas de erro, com nível de confiança acima de 5%. Todas as técnicas considerando as métricas de erro, ARMA-EGARCH, melhor, depois ESN, depois ARMA-ESN. O melhor seria o ARMA-EGARCH, e não existe diferença entre ARMA-ESN e ESN, no modelo 2.

4.5 Sobre tempo de processamento

No decorrer deste projeto diversos computadores foram utilizados desde i3 até i9, *notebooks* e *desktop*. O maior tempo computacional foi dedicado à otimização dos hiperparâmetros da ESN. Este tempo variou entre mais de 24h em um i3 até o mínimo de 3h em um i7. No entanto, no último ano desta pesquisa, foi adquirido, com recursos próprios, um Intel i9, 64b, 3.00 GHz, 13ª. geração, 32GiB de memória principal, sistema operacional Windows 11. Neste computador foram realizadas algumas medições de tempo na ESN pura, menor tempo obtido foi de 22 min, o maior tempo de 71 min e o tempo médio ficou em torno de 45 min.

5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho buscou-se obter um melhor desempenho da capacidade preditiva de modelos de séries temporais gerados por ESN associando-a ao ARIMA.

Inicialmente, foram realizadas muitas modelagens do preço de ações brutas com a ESN até obter-se uma boa compreensão sobre seu funcionamento, no total, durante todo projeto, foram otimizadas mais de trezentas ESNs com algoritmo genético. Também foi estudada a técnica híbrida estatística-estatística ARIMA-GARCH e depois estendida para outras variações, como o ARMA-EGARCH, entre outras. A partir daí foi possível criar um modelo híbrido entre ARIMA e ESN, denominado ARIMA-ESN. Então, aplicou-se este modelo híbrido para previsão em ações. No entanto, por estar-se utilizando um *benchmark* ARMA-EGARCH, da ST do preço de ações foram calculados retornos, log retornos a fim de serem obtidos erros quadráticos que permitiriam a previsão da variância dos retornos diária. Para realizar a comparação mais efetiva entre as técnicas não foram utilizadas somente ST reais, mas também foram geradas vinte ST simuladas, o que permitiu verificar melhor o desempenho do método.

Estudos de casos foram realizados com duas ações da B3, ITSA4 e PETR4, entre 2001 e meados de 2023. Em cada uma delas foram aplicadas as três técnicas estudadas ARMA-EGARCH, ESN e ARMA-ESN. O que se pode perceber é que a metodologia proposta se comportou razoavelmente bem em relação às outras metodologias utilizadas com a ação ITSA4, mas nem tanto com a PETR4. Tendo obtido erros menores na ação na ITSA4.

Percebeu-se, visualmente, que as previsões para ITSA4 e as previsões para PETR4 nos períodos de teste pelo ARMA-ESN ficaram bem melhores que nas demais técnicas. Mesmo que ainda não tenha conseguido capturar bem a variância dos retornos, ela aponta melhor as subidas, como no caso da alta da variância diária em meados de março de 2020 e também não prevê apenas um valor após dezenas dos valores. Além disso, as técnicas estatísticas geralmente se saem melhor para previsões de curto prazo e a técnica proposta consegue realizar previsões no final da série.

O uso da volatilidade no estudo de ações faz sentido para saber-se se determinada ação tem potencial de maior ou menor retorno, com maior e menor risco, respectivamente. Neste caso, foi possível perceber que a ação da ITSA4 apresenta uma volatilidade menor que da PETR4, assim, comparando-as: a primeira é mais propensa para investimentos com base na análise fundamentalista e a segunda mais propensa para investimentos com base em análise técnica.

Além dos estudos de casos, foram geradas ST simuladas, num total de vinte, sendo dez um modelo e dez de outro. Considerando-se as vinte ST simuladas o melhor desempenho relativo aos erros, sem dúvida, foi do ARMA-EGARCH, seguido pela ESN no modelo 1 e pelo ARMA-ESN no

modelo 2. No primeiro modelo os retornos apresentaram uma distribuição de probabilidade mais próxima da distribuição Normal, mas no segundo nem tanto.

Convém salientar que as ST simuladas foram geradas atendendo aos requisitos do ARMA-EGARCH, mas que para o uso de redes neurais artificiais esses requisitos não se fazem necessários. Além disso, como citado, para as ST simuladas geradas é necessário que sejam geradas dezenas e até centenas para que uma possa satisfazer os requisitos. Isto restringe bastante o número de ST nas quais pode ser aplicada a técnica do ARIMA-GARCH e variações. Assim, quando não se puderem satisfazer esses requisitos a ESN pode ser uma boa opção e o ARIMA-ESN também, embora seja necessário atender aos requisitos do ARIMA. Também deve-se considerar que a ESN não é aplicada somente a análises financeiras. Como os dois modelos seguem as restrições de propriedades do ARMA-EGARCH, isto pode justificar o melhor desempenho do ARMA-EGARCH em relação à técnica proposta e à própria ESN.

No decorrer do trabalho observou-se, aparentemente, que a ESN lida melhor com entradas de dados com uma variabilidade maior, logo possuindo, provavelmente, um potencial melhor para previsões de curto prazo do preço bruto de ações, a qual teria mais utilidade em investimentos de curtíssimo prazo. Além disso, também percebeu-se que a ESN consegue extrapolar valores fora da amplitude dos dados dos períodos de treino e validação no período de teste.

Sobre a alteração do uso das distribuições pela GED e pela *t* de Student no ARMA-ESN, isto se mostrou viável e útil porque, embora a distribuição Normal tenha obtido melhor desempenho na ITSA4, a GED, talvez por se tratar de uma distribuição de erros, esteve entre as melhores nas duas ações. E a *t* de Student destacou-se na PETR4.

No decorrer do trabalho, também observou-se que na ESN a distribuição Uniforme teve melhor desempenho quando se utilizou o *fitness* MAE e as distribuições Normal e GED quando o *fitness* utilizado foi o RMSE, mais especificamente na ST da ITSA4.

Nas ST dos estudos de caso percebeu-se que tanto a ESN quanto a ARMA-ESN conseguem capturar um pouco melhor as subidas e descidas, ao menos visualmente. Isto, a nosso ver, indica o potencial do ARIMA-ESN, e da própria ESN, para obter erros menores que o próprio ARMA-EGARCH. No entanto, nos estudos de caso e nas ST simuladas, não foi possível encontrar evidências de que ARIMA combinado com ESN obtenha resultados melhores, considerando-se as métricas de erro utilizadas. Logo, supõe-se que o desempenho da técnica dependa muito da propriedade dos dados. O que demanda mais estudos para um aprofundamento no conhecimento sobre a mesma. Então, como trabalhos futuros, propõe-se:

- Estudar o porquê do desempenho da ESN e do ARIMA-ESN terem ficado mais próximos no modelo 2, e mais distantes no modelo 1;

- Fazer previsões com prazos menores, a fim de verificar se no curto, ou mesmo curtíssimo prazo, o desempenho das técnicas é alterado;
- Fazer previsões não apenas de um dia para o seguinte, mas para mais dias a frente;
- Estudar o ARIMA-ESN na previsão de valores brutos de ações e compará-lo com a ESN;
- Aplicar ARIMA-ESN a outros tipos de dados;
- Testar para os pesos de entrada (W^{in}) o uso de distribuição que melhor se encaixe aos dados, para analisar um possível melhor desempenho da ESN;
- Estudar a identificação de tendência pelo teste ADF e porque não funcionou para as ST de ações estudadas;
- Utilizar outro algoritmo de otimização dos hiperparâmetros diferente do algoritmo genético.

REFERÊNCIAS

- ACEITUNO, P. V.; YAN, G.; LIU, Y-Y. *Tailoring echo state networks for optimal learning. science*, v. 23, nº. 9, pp. 1-39, 2020.
- AKAIKE, H. *A new look at the statistical model identification. IEEE Transactions on Automatic Control*. 19, nº. 6, pp. 716–723, 1974.
- ALIZAMIR, M.; KISI, O.; KIM, S.; HEDDAM, S. *A novel method for lake level prediction: deep echo state network. Arabian Journal of Geosciences*, v. 13, pp. 1-18, 2020.
- ANDERSON Jr., J. W. *Corporate governance in brazil: Recent improvements and new challenges. Law; Bus. Rev. Am.*, v. 9, pp. 201-224, 2003.
- AUGUIE, B.; ANTONOV, A. (2020). Package gridExtra. Disponível em: <https://cran.r-project.org/web/packages/gridExtra/gridExtra.pdf>. Acesso em: 23 jan. 2024.
- BABU, C. N.; REDDY, B. E. *A moving-average filter based hybrid arima–ann model for forecasting time series data. Applied Soft Computing*. 23 pp. 27-38, 2014.
- BARIN, B. *Investigating Performance of ESN's in Forecasting Financial Metrics When Compared To Traditional RNN Types. International Journal of Social Science and Economic Research*. v. 9, pp. 1950-1982, 2024.
- BAUER, P.; THORPE, A.; BRUNET, G. *The quiet revolution of numerical weather prediction. Nature*, v. 525, nº. 7567, pp. 47-55, 2015.
- BARBOSA, W. A. S.; GRIFFITH, A.; ROWLANDS, G. E.; GOVIA, L. C. G.; RIBEILL, G. J.; NGUYEN, M.-H.; OHKI, T. A.; GAUTHIER, D. J. *Symmetry-aware reservoir computing. Physical Review E*, v. 104, nº. 4, pp. 045307-1-045307-9, 2021.
- BASTERRECH, S.; RUBINO, G. *Evolutionary Echo State Network: A neuroevolutionary framework for time series prediction. Applied Soft Computing*, v. 144, 2023.
- BASU, S.; KUNDU, D. *On three-parameter generalized exponential distribution. Communications in Statistics-Simulation and Computation*, pp. 1-15, 2023.
- BERRADI, Z.; LAZAAR, M.; MAHBOUB, O.; BERRADI, H.; OMARA, H. *Combination of Deep-Learning Models to Forecast Stock Price of Aapl and Tsla. Jordanian Journal of Computers and Information Technology*, v. 8, nº. 4, pp. 345-356, 2022.
- BISSARO, L. Z.; JIN, Y.; CARNEIRO, M. G. *Regular Echo State Networks: simple and accurate reservoir models to real-world applications. In: Proceedings of the 36th Annual ACM Symposium on Applied Computing*, pp. 1063-1069, 2021.
- BOLLERSLEV, T. *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. Journal of Econometrics* 31, pp. 307-327, 1986.
- BOLLERSLEV, T. *A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return. The review of Economics and Statistics*, 69 pp. 542-547, 1987.
- BOLLERSLEV, Tim. *On the correlation structure for the generalized autoregressive conditional heteroskedastic process. Journal of time series analysis*, v. 9, nº. 2, pp. 121-131, 1988.
- BOLLT, E. *On explaining the surprising success of reservoir computing forecaster of chaos? The universal machine learning dynamical system with contrast to VAR and DMD. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 31, nº. 1, pp. 1-26, 2021.

- BOX, G. P.; JENKINS, G. M. **Time Series Analysis: Forecasting and Control**. San Francisco: Holden-Day, 575 pp., 1976.
- BUDHIRAJA, R.; KUMAR, M.; DAS, M. K.; BAFILA, A. S.; SINGH, S. *A reservoir computing approach for forecasting and regenerating both dynamical and time-delay controlled financial system behavior*. **Plos one**, v. 16, nº. 2, pp. 1-13, 2021.
- BUEHNER, M.; YOUNG, P. *A tighter bound for the echo state property*. **IEEE transactions on neural networks**, v. 17, n. 3, pp. 820-824, 2006.
- BUENO, R. L. S. **Econometria de séries temporais**. São Paulo: Cengage Learning, 360pp., 2011.
- CARDOSO, F. C.; DE MATTOS, V. L. D.; KONRATH, A. C.; L. R.; BORNIA, A. C. Modelagem de série temporal de óbitos de residentes em Porto Alegre-RS para previsão de óbitos em 2020 utilizando a metodologia Box-Jenkins. **Almanaque Multidisciplinar de Pesquisa**, v. 9, n. 1, 2022a.
- CARDOSO, F. C.; BERRI, R. A.; BORGES, E. N.; LUCCA, G.; DE MATTOS, V. L. D. Associação de redes de estado de eco com métodos estatísticos clássicos de previsão: uma revisão bibliométrica. **Anais do Encontro Nacional de Modelagem Computacional, Encontro de Ciência e Tecnologia de Materiais, Conferência Sul em Modelagem Computacional e Seminário e Workshop em Engenharia Oceânica**, 2022b.
- CARDOSO, F. C.; BERRI, R. A.; DE MATTOS, V. L. D. *Echo state network e sua aplicação na ação PETR4 da B3 para predição do preço de fechamento*. **Anais da 66ª Reunião Anual da Região Brasileira da Sociedade Internacional de Biometria (RBras)**, Florianópolis-SC: 16-18 nov. 2022, RBras, pp. 197-206, 2022.
- CARDOSO, F. C.; MALSKA, J. A. V.; RAMIRO, P. J.; LUCCA, G.; BORGES, E. N.; DE MATTOS, V. L. D.; BERRI, R. A. *BovDB: a data set of stock prices of all companies in B3 from 1995 to 2020*. **Journal of Information and Data Management**, v. 13, nº. 1, 2022c.
- CARDOSO, F. C.; BERRI, R. A.; LUCCA, G.; BORGES, E. N.; DE MATTOS, V. L. D. *Normality tests: a study of residuals obtained on time series tendency modeling*. **Exacta**, 2023.
- CARDOSO, F. C.; BERRI, R. A.; BORGES, E. N.; DALMAZO, B. L.; LUCCA, G.; DE MATTOS, V. L. D. *Echo state network and classical statistical techniques for time series forecasting: A review*. **Knowledge-Based Systems**, 2024.
- CASELLA, G.; BERGER, R. L. **Inferência Estatística**. Tradução Solange Aparecida Visconte. São Paulo: Cengage Learning, 2010.
- CHATTOPADHYAY, A.; HASSANZADEH, P.; SUBRAMANIAN, D. *Data-driven predictions of a multiscale Lorenz 96 chaotic system using machine-learning methods: reservoir computing, artificial neural network, and long short-term memory network*. **Nonlinear Processes in Geophysics**, v. 27, n. 3, pp. 373-389, 2020.
- CHEN, P.; LIU, R.; AIHARA, K.; CHEN, L. *Autoreservoir computing for multistep ahead prediction based on the spatiotemporal information transformation*. **Nature communications**, v. 11, nº. 1, pp. 1-15, 2020.
- CHEN, Y.; HE, Z.; SHANG, Z.; LI, C.; LI, L.; XU, M. *A novel combined model based on echo state network for multi-step ahead wind speed forecasting: A case study of nrel*. **Energy conversion and management**. 179 pp. 13-29, 2019.

- CHENG, X.; ZHAO, C. *Prediction of Tourist Flow Based on Deep Belief Network and Echo State Network*. **Revue d'Intelligence Artificielle**, v. 33, n° 4, pp. 275-281, 2019.
- CHUNG, J.; GULCEHRE, C.; CHO, K.; BENGIO, Y. *Empirical evaluation of gated recurrent neural networks on sequence modeling*. **arXiv preprint arXiv:1412.3555**, 2014.
- COIN, D. *A goodness-of-fit test for Generalized Error Distribution*. **Communications in Statistics-Theory and Methods**, v. 46, n° 23, pp. 11485-11499, 2017.
- COMISSÃO DE VALORES MOBILIÁRIOS (CVM). Mercado de valores mobiliários brasileiro. 4ª. ed. Rio de Janeiro: **Comissão de Valores Mobiliários**, 2019. 380pp.
- COSTA NETO, P. L. de O. **Estatística**. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/reader/books/9788521215226/pageid/63>, 2ª. ed., Editora Blucher, 2006. 281pp. Acesso em: 13 fev. 2024.
- COX, D. R.; STUART, A. *Some quick sign tests for trend in location and dispersion*. **Biometrika**, v. 42, n° 1/2, pp. 80-95, 1955.
- DA SILVA, C. A. G. *A dinâmica da volatilidade e assimetria de preços da commodity milho: Uma abordagem dos modelos heteroscedásticos*. v. 38, n° 23, pp. 4-11, 2017.
- DAN, J.; GUO, W.; SHI, W.; FANG, B.; ZHANG, T. *Deterministic echo state networks based stock price forecasting*. In: **Abstract and Applied Analysis**. Hindawi Publishing Corporation, 2014. p. 137148.
- DAVIS, P. J. *Leonhard euler's integral: A historical profile of the gamma function: In memoriam: Milton Abramowitz*. **The American Mathematical Monthly**, v. 66, n. 10, pp. 849-869, 1959.
- DE ARAÚJO, H. V.; CARDOSO, F. C.; DE MATTOS, V. L. D.; BORGES, E. N.; LUCCA, G.; DALMAZO, B. L.; BERRI, R. A. *Comparing MAE and RMSE as Fitness of Genetic Algorithm for Optimizing Echo State Network Hyperparameters with Different Probabilistic Distributions*. In: **International Conference on Intelligent Data Engineering and Automated Learning**. Chapter in Springer Nature Switzerland. pp. 315-327, 2024.
- DEVORE, J. L. **Probabilidade e Estatística**. Tradução Joaquim Pinheiro Nunes da Silva. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.
- DICKEY, D. A.; FULLER, W. A. *Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root*, **Journal of the American Statistical Association** 74, pp. 427-431, 1979.
- DUNIS, C. L.; HUANG, X. *Forecasting and trading currency volatility: An application of recurrent neural regression and model combination*. **Journal of forecasting**. 21 (5) pp. 317-354, 2002.
- ELSARAITI, M.; MERABET, A. *A comparative analysis of the arima and lstm predictive models and their effectiveness for predicting wind speed*. **Energies**. 14 (20) pp. 67-82, 2021.
- ENGLE, R. F. *Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflations*, **Econometrica**, n° 50: pp. 987-1007, 1982.
- FAZLA, A.; AYDIN, M. E.; KOZAT, S. S. *Joint optimization of linear and nonlinear models for sequential regression*. **Digital Signal Processing**, v. 132, pp. 1-11, 2023.

- FENG, P. *Empirical analysis of stock prices based on ARIMA-GARCH*. **Highlights in Business, Economics and Management**, v. 22, pp. 416-423, 2023.
- FERREIRA, A. A.; LUDERMIR, T. B. *Genetic algorithm for reservoir computing optimization*. In: **2009 International Joint Conference on Neural Networks**. IEEE, 2009. pp. 811-815.
- FERREIRA, A. A.; LUDERMIR, T. B.; DE AQUINO, R. R. B.; LIRA, M. M. S.; NÓBREGA NETO, O. *Investigating the use of reservoir computing for forecasting the hourly wind speed in short-term*. In: **2008 IEEE International Joint Conference on Neural Networks (IEEE World Congress on Computational Intelligence)**. IEEE, pp. 1649-1656, 2008.
- FONSECA, C. N. da. **Uma abordagem metodológica para a construção de critérios de informação a partir de superfícies quádricas**. 2024. 205f. Tese (Doutorado em Modelagem Computacional) - Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2024.
- GHALANOS, A. *rugarch: Univariate GARCH models*. R package version 1.5-1, 2023.
- GALLICCHIO, C.; MICHELI, A. *Deep echo state network (deepesn): A brief survey*. **arXiv preprint arXiv:1712.04323**, pp. 1-11, 2017.
- GANDHMAL, D. P.; KUMAR, K. *Systematic analysis and review of stock market prediction techniques*. **Computer Science Review**, v. 34, pp. 1-13, 2019.
- GAO, Y.; ZHANG, C.; ZHANG, L. *Comparison of GARCH Models based on Different Distributions*. **Journal of Computer**, v. 7, n°. 8, pp. 1967-1973, 2012.
- GAUTHIER, D. J.; BOLLT, E.; GRIFFITH, A.; BARBOSA, W. A. *Next generation reservoir computing*. **Nature communications**. 12 (1) pp. 55-64, 2021.
- GER, F. A.; SCHMIDHUBER, J.; CUMMINS, F. *Learning to forget: Continual prediction with LSTM*. **Neural computation**, v. 12, n. 10, pp. 2451-2471, 2000.
- GILLER, Graham L. *A Generalized Error Distribution*. **SSRN Electronic Journal**, 2005.
- GHOJOGH, B.; GHODSI, A. *Recurrent neural networks and long short-term memory networks: Tutorial and survey*. **arXiv preprint arXiv:2304.11461**, 2023.
- GRAVES, S., BOSHNAKOV, G. N. (2023). Package FinTS. Disponível em: <https://cran.r-project.org/web/packages/FinTS/FinTS.pdf>. Acesso em: 23 jan. 2024.
- HALUSZCZYNSKI, A.; AUMEIER, J.; HERTEUX, J.; RÄTH, C. *Reducing network size and improving prediction stability of reservoir computing*. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, v. 30, n°. 6, pp. 1-11, 2020.
- HAMAD, F., YOUNUS, N., MUFTAH, M. M., JABER, M.: *Specify under-lining distribution for clustering linearly separable data: normal and uniform distribution case*. **Journal of Data Acquisition Process**. 38, 2023.
- HAMILTON, J. D. **Time series analysis**. Princeton: Princeton university press, 1994.
- HÄNGGI, P.; THOMAS, H. *Stochastic processes: Time evolution, symmetries and linear response*. **Physics Reports**, v. 88, n°. 4, pp. 207-319, 1982.
- HARRIS, R. D. F. *Stock markets and development: A re-assessment*. **European Economic Review**, v. 41, n°. 1, pp. 139-146, 1997.

- HENAO, J. D. V.; MEJIA, V. R.; CARDONA, C. J. F. *Electricity demand forecasting using a sarima-multiplicative single neuron hybrid model*. **Dyna** **80**. pp. 4-8, 2013.
- HOSSAIN, A.; ZAMAN, F.; NASSER, M.; ISLAM, M. M. *Comparison of garch, neural network and support vector machine in financial time series prediction*. **Proceedings of the Pattern Recognition and Machine Intelligence: Third International Conference, PReMI 2009**. New Delhi, India, 16-20 dez. 2009, Springer, pp. 597-602, 2009.
- HU, Z.; ZHAO, Y.; KHUSHI, M. *A survey of forex and stock price prediction using deep learning*. **Applied System Innovation**, v. 4, n°. 1, pp. 1-30, 2021.
- HUANG, X.; WANG, J.; HUANG, B. *Two novel hybrid linear and nonlinear models for wind speed forecasting*. **Energy Conversion and Management**, v. 238, pp. 1-19, 2021.
- HUANG, X.; YOU, P.; GAO, X.; CHENG, D. *Stock price prediction based on arima-garch and lstm*, in: **Proceedings of the 2nd International Academic Conference on Blockchain, Information Technology and Smart Finance (ICBIS 2023)**, v. 14, Springer Nature, p. 438, 2023.
- HUNT, B. R.; OTT, E. *Defining chaos*. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, v. 25, n°. 9, 2015.
- HURVICH, C. M.; TSAI, C-L. *A Corrected Akaike Information Criterion for Vector Autoregressive Model Selection*. 14(3), pp. 271–279, 1993.
- HYNDMAN, R.; ATHANASOPOULOS, G.; BERGMEIR, C.; CACERES, G.; CHHAY, L.; O'HARA-WILD, M.; PETROPOULOS, F.; RAZBASH, S.; WANG, E.; YASMEEN, F.; *forecast: Forecasting functions for time series and linear models*. R package version 8.21.1, 2023, Disponível em: <https://pkg.robjhyndman.com/forecast/> Acesso em 23 jan. 2024.
- HYNDMAN, R. J.; ATHANASOPOULOS, G. (2021) *Forecasting: principles and practice*, 3ª. ed., OTexts: Melbourne, Australia. Disponível em: <https://otexts.com/fpp3>. Acesso em 09 jan. 2023.
- JAEGER, H. *The “echo state” approach to analysing and training recurrent neural networks*. **Bonn, Germany: German National Research Center for Information Technology, GMD Technical Report** 148 n°. 34, 2001.
- JAEGER, Herbert. *The “echo state” approach to analysing and training recurrent neural networks-with an erratum note*. **Bonn, Germany: German National Research Center for Information Technology GMD Technical Report**, v. 148, n°. 34, pp. 1-47, 2010.
- JIANG, W. *Applications of deep learning in stock market prediction: recent progress*. **Expert Systems with Applications**. v. 184, pp. 1-97, 2021.
- KAPOOR, A.; RASTOGI, V.; KASHYAP, N. *Forecasting daily close prices of stock indices using lstm*. In: **2020 2nd International Conference on Advances in Computing, Communication Control and Networking (ICACCCN)**. IEEE. pp. 10-14, 2020.
- KATOCH, S.; CHAUHAN, S. S.; KUMAR, V. *A review on genetic algorithm: past, present, and future*. **Multimedia tools and applications**, v. 80, pp. 8091-8126, 2021.
- KAWAI, Y.; PARK, J.; ASADA, M. *A small-world topology enhances the echo state property and signal propagation in reservoir computing*. **Neural Networks**, v. 112, pp. 15-23, 2019.

- KHASHEI, M.; BIJARI, M. *A novel hybridization of artificial neural networks and ARIMA models for time series forecasting*. **Applied soft computing**, v. 11, n°. 2, p. 2664-2675, 2011.
- KIM, T.; KING, B. R. *Time series prediction using deep echo state networks*. **Neural Computing and Applications**, v. 32, pp. 17769-17787, 2020.
- KINAS, P. G.; ANDRADE, H. A. **Introdução à Análise Bayesiana (com R)**. Porto Alegre: maisQnada, 2010.
- KRISHNAGOPAL, S.; KATZ, G.; GIRVAN, M.; REGGIA, J. *Encoding of a chaotic attractor in a reservoir computer: A directional fiber investigation*. In: **2019 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN)**. IEEE, pp. 1-8, 2019.
- KUMAR, G.; JAIN, S.; SINGH, U. P. *Stock market forecasting using computational intelligence: A survey*. **Archives of computational methods in engineering**, v. 28, pp. 1069-1101, 2021.
- KUMAR, M.; HUSIAN, M.; UPRETI, N.; GUPTA, D. *Genetic algorithm: Review and application*. **International Journal of Information Technology and Knowledge Management**, v. 2, n. 2, pp. 451-454, 2010.
- KUMBURE, M. M.; LOHRMANN, C. LUUKKA, P.; PORRAS, J. *Machine learning techniques and data for stock market forecasting: A literature review*. **Expert Systems with Applications**, v. 197, pp. 1-41, 2022.
- KWIATKOWSKI, D.; PHILLIPS, P. C. B.; SCHMIDT, P.; SHIN, Y. *Testing the Null Hypothesis of Stationarity against the Alternative of a Unit Root*, **Journal of Econometrics** 54, pp. 159-178, 1992.
- LAMBORA, A.; GUPTA, K.; CHOPRA, K. *Genetic algorithm-A literature review*. In: **2019 international conference on machine learning, big data, cloud and parallel computing (COMITCon)**. IEEE. pp. 380-384, 2019.
- LI, D.; HAN, M. *Chaotic time series prediction based on a novel robust echo state network*. **IEEE TRANSACTIONS ON NEURAL NETWORKS AND LEARNING SYSTEMS** 23(5): pp. 787-797, 2012.
- LI, S. *Stock closing price prediction based on the arima-garch model*, **Frontiers in Business, Economics and Management**, 13 (3) pp. 20-23, 2024.
- LIBISELLER, C.; GRIMVALL, A. *Performance of partial Mann-Kendall tests for trend detection in the presence of covariates*. **Environmetrics: The official journal of the International Environmetrics Society**, v. 13, n°. 1, pp. 71-84, 2002.
- LIM, S. H.; GIORGINI, G. T.; MOON, W. *et al.* *Predicting critical transitions in multiscale dynamical systems using reservoir computing*. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, v. 30, n°. 12, pp. 1-22, 2020.
- LIN, X.; YANG, Z.; SONG, Y. *Short-term stock price prediction based on echo state networks*. **Expert Systems with Applications**, pp. 7313-7317, 2009.
- LIU, M.; DING, L.; BAI, Y. *Application of hybrid model based on empirical mode decomposition, novel recurrent neural networks and the ARIMA to wind speed prediction*. **Energy Conversion and Management**, v. 233, pp. 1-19, 2021.
- LIU, Y.; Zhang, S.; Chen, X.; Wang, J. *Artificial combined model based on hybrid nonlinear neural network models and statistics linear models-research and application for wind speed forecasting*. **Sustainability**, v. 10, n. 12, pp. 1-30, 2018.

- LU, Y.; PENG, Z. *Distributional expansions of powered order statistics from general error distribution*. **arXiv preprint arXiv:1905.01397**, pp. 1-18, 2019.
- LUO, X.; LI, J.; SUN, Z.-Q. *Review on echo state networks*. **Chinese Journal of Engineering**, v. 34, n. 2, pp. 217-222, 2012.
- MAAT, J. R.; GIANNIOTIS, N.; PROTOPAPAS, P. *Efficient optimization of echo state networks for time series datasets*. In: **Proceedings of the 2018 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN)**. IEEE. pp. 1-7, 2018
- MAASS, W.; NATSCHLÄGER, T.; MARKRAM, H. *Real-time computing without stable states: A new framework for neural computation based on perturbations*. **Neural Computation**. 14 (11) pp. 2531-2560, 2002.
- MACHADO, D. J. **Valuation, análise técnica e fundamentalista**. São Paulo: Senac, 2020.
- MAGALHÃES, M. N. **Probabilidade e Variáveis Aleatórias**. 2ª. São Paulo: EdUSP, 2006.
- MAKRIDAKIS, S.; SPILIOTIS, E.; ASSIMAKOPOULOS, V. *Statistical and Machine Learning forecasting methods: Concerns and ways forward*. **PloS one**, v. 13, nº. 3, pp. 1-19, 2018.
- MALLYA, A. *Echo state networks and existing paradigms for stock market prediction*. In: **2021 International Conference on Emerging Smart Computing and Informatics (ESCI)**. IEEE, 2021. pp. 13-18, 2021.
- MANJUNATH, G.; TIÑO, P.; JAEGER, H. *Theory of input driven dynamical systems*. **Proceedings of the European Symposium on Artificial Neural Networks - ESANN 2012**, 2012.
- MEHTARIZADEH, H.; MANSOURI, N.; HASANI ZADE, B. M.; HOSSEINI, M. M.; *Stock price prediction with sca-lstm network and statistical model arima-garch*, Research Square. (preprint).
- MILLS, T. C. MARKELLOS, R. N. **The econometric modelling of financial time series**. 3ª. ed., New York: Cambridge University Press, 2008.
- MOHANDAS, G. *Volatility modelling and forecasting in financial markets*. **International Research Journal of Modernization in Engineering Technology and Science**. v. 05, pp. 3222-3229, 2023.
- MONDAL, P.; SHIT, L.; GOSWAMI, S. *Study of effectiveness of time series modeling (arima) in forecasting stock prices*. **International Journal of Computer Science**. Engineering and Applications 4 (2) 13, 2014.
- MORETTIN, P. A. **Econometria financeira**. 2ª. ed., Blucher, 2017.
- MORETTIN, P. A., TOLOI, C. M. C. **Análise de séries temporais: modelos lineares univariados**. 3ª. ed., v. 1, São Paulo: Blucher, 455p., 2018.
- MORETTIN, P. A., TOLOI, C. M. C. **Análise de séries temporais: modelos multivariados e não lineares**. 3ª. ed., v. 2, São Paulo: Blucher, 455p., 2020.
- MURALI, P.; REVATHY, R.; BALAMURALI, S.; TAYADE, A. *Integration of RNN with Garch refined by whale optimization algorithm for yield forecasting: a hybrid Machine Learning approach*. **Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing**. pp. 1-13, 2020.

NAKAGAWA, E. Y.; SCANNAVINO, K. R. F.; FABBRI, S. C. P. F.; FERRARI, F. C. Revisão sistemática da literatura em engenharia de software: teoria e prática. 1ª. ed., **Livros Técnicos e Científicos-LTC**, 2017.

NATHAN, N.; MAMZA, S. A. *A Better Approach to Generating Random Numbers*. **Mathematical Journal of Interdisciplinary Sciences**, v. 8, nº. 1, pp. 29-35, 2019.

NTI, I. K.; ADEKOYA, A. F.; WEYORI, B. A. *A systematic review of fundamental and technical analysis of stock market predictions*. **Artificial Intelligence Review**, v. 53, nº. 4, pp. 3007-3057, 2020.

OJHA, V. K.; ABRAHAM, A.; SNÁŠEL, V. *Metaheuristic design of feedforward neural networks: A review of two decades of research*. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**. 60 pp. 97-116, 2017.

ORTIZ, E. (2022). Mercado de balcão: o que é e como funciona. Disponível em: <https://www.serasa.com.br/blog/mercado-de-balcao-o-que-e-e-como-funciona/>. Acesso em: 30 jan. 2024.

PAI, P.-F.; LIN, C.-S. *A hybrid ARIMA and support vector machines model in stock price forecasting*. **Omega**, v. 33, nº. 6, pp. 497-505, 2004.

PATEL, R.; CHOUDHARY, V.; SAXENA, D.; SINGH, A. K. *Review of stock prediction using machine learning techniques*. In: **Proceedings of the 5th International Conference on Trends in Electronics and Informatics (ICOEI)**. IEEE, pp. 840-846, 2021.

PAULLADA, A.; RAJI, I. D.; BENDER, E. M.; DENTON, E.; HANN, A. *Data and its (dis) contents: A survey of dataset development and use in machine learning research*. **Patterns**, v. 2, n. 11, pp. 1-14, 2021.

PÉREZ-PONS, M. E.; PARRA-DOMINGUEZ, P.; OMATU, S.; HERRERA-VIEDMA, E.; CORCHADO, J. M. *Machine learning and traditional econometric models: a systematic mapping study*. **Journal of Artificial Intelligence and Soft Computing Research**, v. 12, nº. 2, pp. 79-100, 2022.

PETERSON, B. G.; CARL, P.; BOUDT, K.; BENNETT, R.; ULRICH, J.; ZIVOT, E.; CORNILLY, D. (2020). Package PerformanceAnalytics. Disponível em: <https://cran.rproject.org/web/packages/PerformanceAnalytics>. Acesso em: 23 jan. 2024.

PFÄFF, B. *Analysis of Integrated and Cointegrated Time Series with R*, Second edition. Springer: New York, 2008. ISBN 0-387-27960-1, Disponível em: <https://www.pfaffikus.de>. Acesso em: 23 jan. 2024.

PHILLIPS, P. C. B.; PERRON, P. *Testing for a unit root in time series regression*, **Biometrika**, 72(2), pp. 335-346, 1988.

PISHRO-NIK, H. **Introduction to Probability, Statistics, and Random Process**. Kappa Research LLC, 2014.

POHLERT, T. (2023). Package trend. Disponível em: <https://cran.r-project.org/web/packages/trend/trend.pdf>. Acesso em: 23 jan. 2024.

POLO, D. M.; CABALLERO, L. P.; GÓMEZ, E. M. *Comparison of Neural Network applied to prediction of Time Series*. **Prospectiva**, v. 13, nº. 2, pp. 88-95, 2015.

- R CORE TEAM (2022). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. Disponível em: <https://www.R-project.org/>. Acesso em: 23 jan. 2024.
- RIBEIRO, G. T.; SANTOS, A. A. P.; MARIANI, V. C.; COELHO, L. dos S. *Novel hybrid model based on echo state neural network applied to the prediction of stock price return volatility*. **Expert Systems with Applications**, v. 184, pp. 1-13, 2021.
- RISTANOSKI, G.; LIU, W.; BAILEY, J. *Time series forecasting using distribution enhanced linear regression*. In: **Proceedings of the Advances in Knowledge Discovery and Data Mining: 17th Pacific-Asia Conference, PAKDD 2013**, Gold Coast, Australia, 14-17 abr. 2013, Part I 17. Springer Berlin Heidelberg, pp. 484-495, 2013.
- RODAN, A.; TIÑO, P. *Minimum complexity echo state network*. **IEEE transactions on neural networks**, v. 22, n.º. 1, pp. 131-144, 2010.
- SAKEMI, Y.; MORINO, K.; LELEU, T.; AIHARA, K. *Model-size reduction for reservoir computing by concatenating internal states through time*. **Scientific reports**, v. 10, n.º. 1, pp. 1-13, 2020.
- SANTA FÉ INSTITUTE (Canal Complexity Explorer). 5.1 What is a dynamical system? Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=6bGVtoqtWWw> Acesso em: 08 jan. 2024.
- SANTOS Jr., D. S. de O.; de OLIVEIRA, J. F.; de MATTOS Neto, P. S. *An intelligent hybridization of arima with machine learning models for time series forecasting*. **Knowledge-Based Systems**. 175 pp. 72-86, 2019.
- SAKEMI, Y.; MORINO, K.; LELEU, T.; AIHARA, K. *Model-size reduction for reservoir computing by concatenating internal states through time*. **Scientific reports**, vol. 10, n. 1, pp. 1-13, 2020.
- SCHWARZ, G. *Estimating the dimension of a model*. **The Annals of Statistics**, v. 6, n.º. 2, pp. 461-464, 1978.
- SCHWERT, G. W. *Tests for Unit-Roots: A Monte Carlo investigation*. **Journal of Business and Economic Statistics**. 7, pp. 147-159, 1989.
- SCHRAUWEN, B.; VERSTRAETEN, D.; VAN CAMPENHOUT, J. *An overview of reservoir computing: theory, applications and implementations*. **Proceedings of the 15th European Symposium on Artificial Neural Networks - ESANN**. pp. 471-482, 2007.
- SCRUCCA, L. *On some extensions to GA package: hybrid optimisation, parallelisation and islands evolution*. **The R Journal**, 9/1, pp. 187-206, 2017.
- SHCHERBAKOV, M. V.; BREBELS, A.; SHCHERBAKOVA, N. L.; TYUKOV, A. P.; JANOVSKY, T. A.; KAMAEV, V. A. *A survey of forecast error measures*. **World applied sciences journal**, v. 24, n. 24, pp. 171-176, 2013.
- SHEN, L.; CHEN, J.; ZENG, Z.; YANG, J.; JIN, J. *A novel echo state network for multivariate and nonlinear time series prediction*. **Applied Soft Computing**, v. 62, pp. 524-535, 2018.
- SHIRI, F. M.; PERUMAL, T.; MUSTAPHA, N.; MOHAMED, R. *A comprehensive overview and comparative analysis on deep learning models: CNN, RNN, LSTM, GRU*. **arXiv preprint arXiv:2305.17473**, 2023.

- SHIVANI; SANDHU, K. S.; NAIR, A. R. *A comparative study of ARIMA and RNN for short term wind speed forecasting*. In: **Proceedings of the 10th International Conference on Computing, Communication and Networking Technologies (ICCCNT)**. IEEE. p. 1-7, 2019.
- SIGAUKE, C. *Forecasting medium-term electricity demand in a south african electric power supply system*. **Journal of Energy in Southern Africa**. 28, pp. 54-67, 2017.
- SINGH, S.; PARMAR, K. S.; KUMAR, J. *Soft computing model coupled with statistical models to estimate future of stock market*. **Neural Computing and Applications**, v. 33, p. 7629-7647, 2021.
- SLATER, L.; ARNAL, L.; BOUCHER, M.-A.; CHANG, A. Y.-Y.; MOULDS, S.; MURPHY, C.; NEARING, G.; SHALEV, G.; SHEN, C.; SPEIGHT, L.; VILLARINI, G.; WILBY, R. L.; WOOD, A.; ZAPPA, M. *Hybrid forecasting: using statistics and machine learning to integrate predictions from dynamical models*. **Hydrology and Earth Systems Science**, pp. 1-35, 2022.
- SNEEK, K. *The Generation of Student's t Random Variables*. **Research Memorandum of Vrije Universiteit**, pp. 1-14, 1989.
- SOLTANI, R.; BENMOHAMED, E.; LTIFI, H. *Echo state network optimization: A systematic literature review*. **Neural Processing Letters**, v. 55, n. 8, p. 10251-10285, 2023.
- SOMAN, S. S.; ZAREIPOUR, H.; MALIK, O.; MANDAL, P. *A review of wind power and wind speed forecasting methods with different time horizons*. **North American power symposium 2010**, IEEE, pp. 1-8, 2010.
- SPIEGEL, M. R.; STEPHENS, L. J. **Estatística**. 4ª. Grupo A, 2009. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788577805204>. Acesso em: 18 jul. 2023.
- SRIHARI, G.; KUSUMA, T.; CHETANRAJ, D.; KUMAR, S.; ALUVALA, R. *Predictive modeling of return volatility in sustainable investments: An in-depth analysis of arima, garch, and arch techniques*, **Investment Management and Financial Innovations** 21 (1) pp. 213–228, 2024.
- TABOGA, M. (2021). *Student's t distribution*, **Lectures on probability theory and mathematical statistics**. Disponível em: <https://www.statlect.com/probability-distributions/student-t-distribution>. Acesso em: 26 fev. 2024.
- THAKKAR, A.; CHAUDHARI, K. *A comprehensive survey on deep neural networks for stock market: The need, challenges, and future directions*. **Expert Systems with Applications**, v. 177, pp. 1-17, 2021.
- TIAN, Z.; PEI, L. *Stocks price prediction based on optimized echo state network by sparrow search algorithm*, **International Journal of Dynamics and Control** pp. 1–14, 2024.
- TICHY, M. Time to Retire the MAPE. **Foresight: The International Journal of Applied Forecasting**, n°. 69, pp. 5-12, 2023.
- TRAPLETTI, A.; HORNIK, K.; LEBARON, (2023). Package tseries. Disponível em: <https://cran.r-project.org/web/packages/tseries/tseries.pdf>. Acesso em: 23 jan. 2024.
- VACHHANI, H.; OBIADAT, M. S.; THAKKAR, A.; SHAH, V.; SOJITRA, R.; BHATIA, J.; TANWA, S. *Machine learning based stock market analysis: A short survey*. In: **Innovative Data Communication Technologies and Application: ICIDCA 2019**. Springer International Publishing, pp. 12-26, 2020.
- VLACHAS, P. R.; PATHAK, J.; HUNT, B. R.; SAPSIS, T. P.; GIRVAN, M.; OTT, E.; KOUMOUTSAKOS, P. *Backpropagation algorithms and reservoir computing in recurrent neural*

networks for the forecasting of complex spatiotemporal dynamics. **Neural Networks**, v. 126, pp. 191-217, 2020.

WACKERLY, D. D.; MENDENHALL III, W.; SCHEAFFER, R. L. **Mathematical Statistics with Applications**. 7^a. Cengage Learning, 2008.

WALD, A.; WOLFOWITZ, J. *An exact test for randomness in the non-parametric case based on serial correlation*. **The Annals of Mathematical Statistics**, v. 14, n^o. 4, pp. 378-388, 1943.

WANG, J. *The analysis of the financial market in china*. **Academic Journal of Business; Management**, v. 3, n^o. 2, pp. 58-60, 2021.

WANG, W.; TANG, Y.; XIONG, J.; ZHANG, Y. *Stock market index prediction based on reservoir computing models*. **Expert Systems with Applications**, v. 178, pp. 1-14, 2021.

WANG, Y. *Application of arima-garch-s model to short-term stock forecasting*, **Finance & Economics**, v. 1 (4), 2023.

WEI, W. W. S. **Time series analysis: univariate and multivariate methods**. 2nd. ed., Pearson Addison-Wesley, 634p., 2006.

WICKHAM, H. *ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis*. **Springer-Verlag** New York, 2016. ISBN 978-3-319-24277-4, Disponível em: <https://ggplot2.tidyverse.org>. Acesso em: 23 jan. 2024.

WUERTZ, D., CHALABI, Y., SETZ, T., MAECHLER, M., BOUDT, C., CHAUSSE, P., MIKLOVAC, M.; BOSHNAKOV, G. N. (2023). Package fGarch. Disponível em: <https://cran.r-project.org/web/packages/fGarch/fGarch.pdf>. Acesso em: 23 jan. 2024.

YANG, Y.; CHEN, Y.; WANG, Y.; LI, C.; LI, L.. *Modelling a combined method based on anfis and neural network improved by de algorithm: A case study for short-term electricity demand forecasting*. *Applied Soft Computing* 49, pp. 663-675, 2016.

YILDIZ, I. B.; JAEGER, H.; KIEBEL, S. J. *Re-visiting the echo state property*. **Neural networks**, v. 35, pp. 1-9, 2012.

YOLCU, U.; EGRIOGLU, E.; ALADAG, C. H. *A new linear; nonlinear artificial neural network model for time series forecasting*. **Decision support systems**, v. 54, n^o. 3, pp. 1340-1347, 2013.

ZHANG, G. P. *Time series forecasting using a hybrid arima and neural network model*, **Neurocomputing**. 50 pp. 159-175, 2003.

ZHANG, G.; ZHANG, C.; ZHANG, W. *Evolutionary echo state network for long-term time series prediction: on the edge of chaos*. **Applied Intelligence**, v. 50, pp. 893-904, 2019.

ZHANG, H.; ZHENG, M.; ZHANG, Y.; YU, X.; LI, W.; GAO, H. *Application of ESN prediction model based on compressed sensing in stock market*. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 101, pp. 1-15, 2021.

ZHANG, Z.; LU, J.; ZHOU, G.; LIAO, X. *Research on tool wear prediction based on lstm and arima*. in: **Proceedings of the 2018 International Conference on Big Data Engineering and Technology - BDET**. pp. 73-77, 2018.

ZHENG, K.; QIAN, B.; LI, S.; XIAO, Y.; ZHUANG, W.; MA, Q. *Long-short term echo state network for time series prediction*. *IEEE Access*, v. 8, pp. 91961-91974, 2020.

ZUOXIANG, P.; BIN, T.; NADARAJAH, S. *Tail behavior of the general error distribution.* **Communications in Statistics-Theory and Methods**, v. 38, nº. 11, pp. 1884-1892, 2009.

APÊNDICES

APÊNDICE A

a) Análise das FAC e das FACP dos resíduos quadráticos do modelo ARMA(p,q) da ITSA4

Nas Figs. 43, 44, 45 e 46 observam-se as funções de Autocorrelação e Autocorrelação Parcial dos resíduos quadráticos dos ARMA(1,2), ARMA(2,1), ARMA(6,3) e ARMA(7,0), respectivamente. Os resíduos quadráticos são dependentes, como já demonstrado.

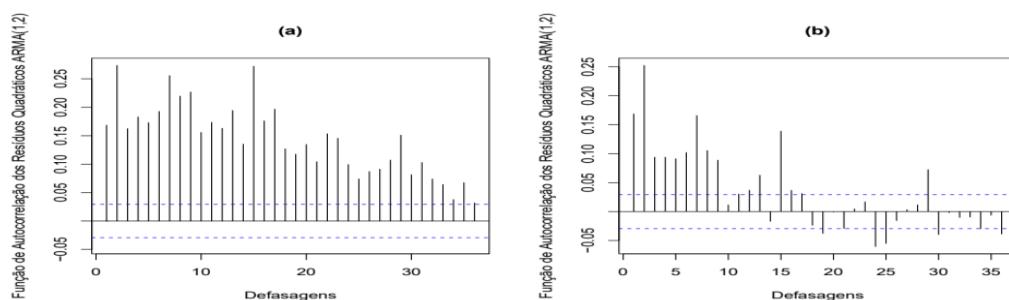


Figura 43 - (a)FAC e (b)FACP dos resíduos quadráticos ARMA(1,2) dos log retornos da ITSA4, entre 2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

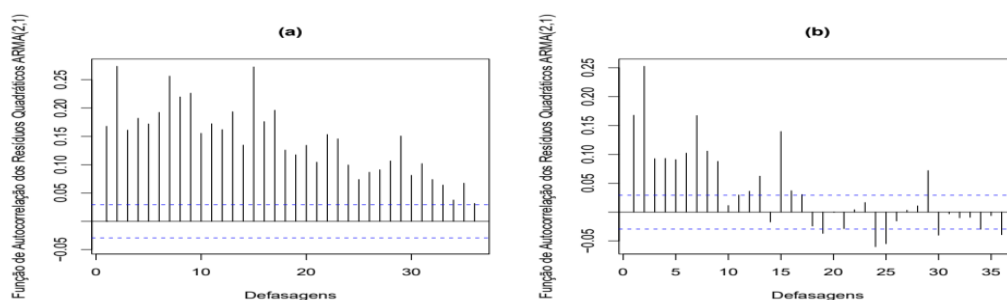


Figura 44 - (a)FAC e (b)FACP dos resíduos ao quadrado ARMA(2,1) dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

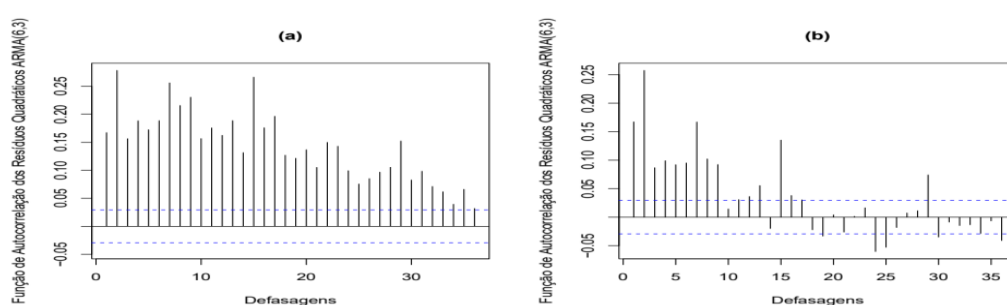


Figura 45 - (a)FAC e (b)FACP dos resíduos quadráticos ARMA(6,3) dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

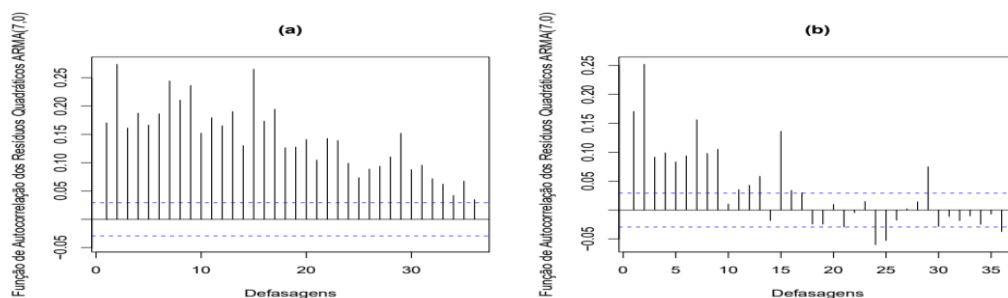


Figura 46 - (a)FAC e (b)FACP dos resíduos quadráticos ARMA(7,0) dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

b) Ajuste de Modelos GARCH(m,n) da ITSA4

Com as propriedades necessárias confirmadas, a próxima etapa foi aplicar o modelo GARCH(m,n) aos resíduos quadráticos dos modelos ARMA(p,q) identificados como mais parcimoniosos, para tal foram utilizadas as distribuições de probabilidade GED e t de Student e analisaram-se modelos GARCH variando m,n entre 0 e 3.

Os modelos GARCH mais parcimoniosos pelo AIC foram: ARMA(2,1)-GARCH(2,3)_{GED}, ARMA(7,0)-GARCH(3,2)_{GED}, ARMA(1,2)-GARCH(3,3)_{GED} e ARMA(6,3)-GARCH(0,3)_{GED}. Os modelos GARCH mais parcimoniosos pelo BIC foram também: ARMA(2,1)-GARCH(2,3)_{GED}, ARMA(7,0)-GARCH(3,2)_{GED}, ARMA(1,2)-GARCH(3,3)_{GED} e ARMA(6,3)-GARCH(0,3)_{STD}. O único mais parcimonioso que utilizou a distribuição t de Student foi o ARMA(6,3)-GARCH(0,3)_{STD}, os demais utilizaram a GED. O mais parcimonioso de todos foi o ARMA(2,1) GARCH(2,3)_{GED}.

Conforme Tab. 39, apenas um modelo não encontrou evidências de autocorrelação em seus resíduos, de acordo com o teste de Ljung-Box: ARMA(2,1)-GARCH(2,3)_{GED}, o qual apresentou evidências de heteroscedasticidade e não normalidade, de acordo com os testes ARCH e Jarque-Bera, respectivamente.

Tabela 39 - Propriedades dos resíduos padronizados dos modelos ARMA(p,q)-GARCH(m,n) selecionados dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

ARMA(p,q)- GARCH(m,n)	Testes (p-valor)		
	Ljung-Box (independência)*	Jarque-Bera (normalidade)	ARCH (homoscedasticidade)**
(7,0)-(3,2)	6,666x10 ⁻⁵	<2,200x10 ⁻¹⁶	1,000
(6,3)-(0,3)	<2,200x10 ⁻¹⁶	<2,200x10 ⁻¹⁶	1,251x10 ⁻¹³
(2,1)-(2,3)	0,314	<2,200x10 ⁻¹⁶	1,000
(1,2)-(3,3)	2,492x10 ⁻³	<2,200x10 ⁻¹⁶	1,000

Obs.: *Para lag = 20 e **Para lag = 12

As métricas dos erros dos modelos selecionados estão apresentados na Tab. 40.

Tabela 40 - Capacidade preditiva do modelo ARMA(2,1)-GARCH(2,3), mais parcimonioso pelo BIC, da variância dos retornos diária da ITSA4, entre 02-01-2019 e 30-06-2023 (período de validação)

ARMA(p,q)-GARCH(m,n)	MAE	RMSE	MdAE
ARMA(2,1)-GARCH(2,3)	0,00187	0,00416	0,00048

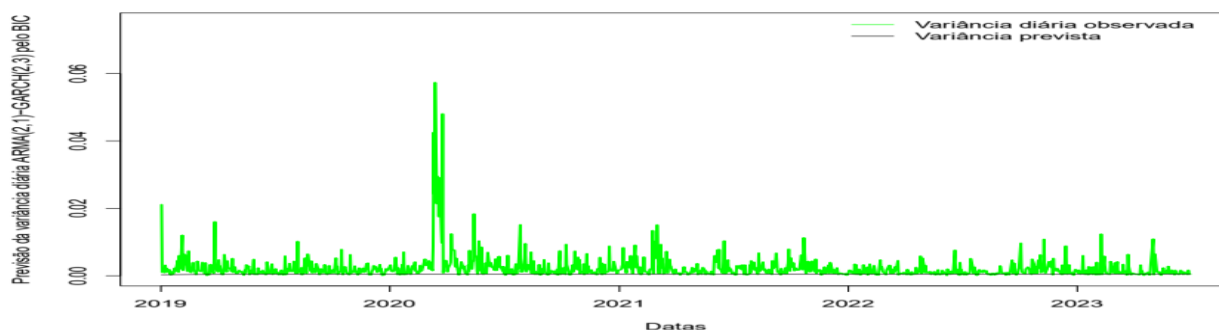


Figura 47: Previsão das variâncias diárias pelo ARMA(2,1)-GARCH(2,3) da ITSA4, entre 02-01-2019 e 30-06-2023 (período de validação)

Na Tab. 40 percebeu-se que, considerando-se o único modelo que passou no teste de heteroscedasticidade, o ARMA(2,1)-GARCH(2,3)_{GED}, não conseguiu capturar bem a variância diária da ITSA4 no período de validação, como visto na Fig. 47, tendo ficado bem abaixo da variância diária observada.

c) *Critérios de informação dos modelos ARMA(p,q)-GARCH(m,n) da ITSA4 e análise dos resíduos*

As Tabs. 41, 42, 43 e 44 apresentam os valores de critérios de informação AIC e BIC obtidos para ARMA(7,0)-GARCH(m,n), ARMA(6,3)-GARCH(m,n), ARMA(2,1)-GARCH(m,n) e ARMA(1,2)-GARCH(m,n), respectivamente.

Tabela 41 - Critérios de Informação do ARMA(7,0)-GARCH(m,n) dos log retornos da ITSA4, distribuições de probabilidade GED e t de Student

ARMA(7,0)- GARCH(m,n)	Distribuição GED		Distribuição t	
	AIC	BIC	AIC	BIC
GARCH (0,0)	-8,393	-8,378	-12,545	-12,531
GARCH (0,1)	-6,415	-6,399	-12,406	-12,390
GARCH (0,2)	-6,416	-6,399	-12,412	-12,395
GARCH (0,3)	-6,417	-6,398	-12,356	-12,337
GARCH (1,0)	-8,391	-8,375	-12,579	-12,563
GARCH (1,1)	-12,816	-12,799	-12,408	-12,391
GARCH (1,2)	-12,746	-12,727	-12,397	-12,378
GARCH (1,3)	-12,745	-12,724	-12,389	-12,369
GARCH (2,0)	-8,391	-8,373	-12,611	-12,594
GARCH (2,1)	-8,790	-8,772	-12,407	-12,388
GARCH (2,2)	-12,765	-12,745	-12,397	-12,377
GARCH (2,3)	-8,702	-8,680	-12,388	-12,367
GARCH (3,0)	-8,390	-8,371	-12,617	-12,598
GARCH (3,1)	-8,787	-8,767	-12,402	-12,382
GARCH (3,2)	-12,824	-12,803	-12,393	-12,371
GARCH (3,3)	-8,714	-8,691	-12,385	-12,362

Tabela 42 - Critérios de Informação do ARMA(6,3)-GARCH(m,n) dos log retornos da ITSA4, distribuições de probabilidade GED e t de Student

ARMA(6,3)- GARCH(m,n)	Distribuição GED		Distribuição t	
	AIC	BIC	AIC	BIC
GARCH (0,0)	-8,392	-8,375	ERRO	ERRO
GARCH (0,1)	-6,413	-6,395	-12,387	-12,368
GARCH (0,2)	-6,414	-6,394	-11,997	-11,977
GARCH (0,3)	-6,415	-6,393	-12,468	-12,446
GARCH (1,0)	-8,389	-8,371	122,54	122,56
GARCH (1,1)	-9,236	-9,216	-12,434	-12,414
GARCH (1,2)	-12,325	-12,303	-12,421	-12,399
GARCH (1,3)	-12,317	-12,290	-12,412	-12,389
GARCH (2,0)	-8,390	-8,370	ERRO	ERRO
GARCH (2,1)	-9,245	-9,223	-12,425	-12,404
GARCH (2,2)	-8,911	-8,888	-12,421	-12,398
GARCH (2,3)	-8,837	-8,812	-12,412	-12,388
GARCH (3,0)	-8,389	-8,367	58,334	58,355
GARCH (3,1)	-9,233	-9,210	-12,423	-12,400
GARCH (3,2)	-8,890	-8,865	-12,416	-12,391
GARCH (3,3)	-8,850	-8,824	-12,408	-12,382

Tabela 43 - Critérios de Informação do ARMA(2,1)-GARCH(m,n) dos log retornos da ITSA4, distribuições de probabilidade GED e t de Student

ARMA(2,1)- GARCH(m,n)	Distribuição GED		Distribuição t	
	AIC	BIC	AIC	BIC
GARCH (0,0)	-8,389	-8,381	-12,549	-12,540
GARCH (0,1)	-12,770	-12,761	-12,549	-12,538
GARCH (0,2)	-12,745	-12,733	-12,548	-12,536
GARCH (0,3)	-12,766	-12,753	-12,554	-12,541
GARCH (1,0)	-8,387	-8,377	-12,589	-12,578
GARCH (1,1)	-12,831	-12,818	-12,694	-12,681
GARCH (1,2)	-12,829	-12,815	-12,693	-12,679
GARCH (1,3)	-12,836	-12,820	-12,694	-12,678
GARCH (2,0)	-8,388	-8,376	-12,610	-12,598
GARCH (2,1)	-12,803	-12,790	-12,693	-12,677
GARCH (2,2)	-12,828	-12,813	-12,692	-12,675
GARCH (2,3)	-12,845	-12,826	-12,693	-12,674
GARCH (3,0)	-8,387	-8,374	-12,616	-12,603
GARCH (3,1)	-12,829	-12,810	-12,693	-12,674
GARCH (3,2)	-12,841	-12,821	-12,693	-12,673
GARCH (3,3)	-12,835	-12,813	-12,692	-12,671

Tabela 44 - Critérios de Informação do ARMA(1,2)-GARCH(m,n) dos log retornos da ITSA4, distribuições de probabilidade GED e t de Student

ARMA(1,2)- GARCH(m,n)	Distribuição GED		Distribuição t	
	AIC	BIC	AIC	BIC
GARCH (0,0)	-8,389	-8,381	-12,548	-12,540
GARCH (0,1)	-6,412	-6,402	-12,378	-12,367
GARCH (0,2)	-6,413	-6,401	-12,398	-12,387
GARCH (0,3)	-6,415	-6,402	-12,410	-12,397
GARCH (1,0)	-8,387	-8,377	-12,578	-12,567
GARCH (1,1)	-9,265	-9,254	-12,422	-12,410
GARCH (1,2)	-9,221	-9,208	-12,418	-12,405
GARCH (1,3)	-11,482	-11,468	-12,411	-12,397
GARCH (2,0)	-8,388	-8,376	-12,609	-12,598
GARCH (2,1)	-9,268	-9,255	-12,424	-12,411
GARCH (2,2)	-8,938	-8,923	-12,417	-12,403
GARCH (2,3)	-8,873	-8,857	-12,411	-12,396
GARCH (3,0)	-8,387	-8,374	-12,615	-12,602
GARCH (3,1)	-9,252	-9,238	-12,417	-12,403
GARCH (3,2)	-12,752	-12,736	-12,413	-12,397
GARCH (3,3)	-12,806	-12,788	-12,407	-12,390

Na Tab. 45 confirmaram-se as curvas leptocúrticas e a assimetria observadas nos histogramas. Além disso, verificou-se que há dispersão dos dados.

Tabela 45 - Medidas resumo dos resíduos padronizados ARMA(p,q)-GARCH(m,n) selecionados dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018

ARMA(p,q)- GARCH(m,n)	Mínimo (R\$)	Média (R\$)	Mediana (R\$)	Máximo (R\$)	Desvio Padrão	Coef. de Assimetria	Coef. de Curtose
(7,0)-(2,3)	-0,1664	0,4001	0,1143	17,5661	0,9120	8,8408	127,5688
(6,3)-(0,3)	-1,6623	0,6678	-0,0381	99,6560	2,6809	15,4408	452,0558
(2,1)-(2,3)	-0,0574	0,4111	0,1252	20,7898	0,9167	9,2154	141,7091
(1,2)-(3,3)	-0,0762	0,5002	0,1302	22,4933	1,1865	9,0559	132,5280

Nos *boxplots* (Fig. 48 (a), (b), (c) e (d)) percebeu-se que há bastante valores considerados *outliers* e a mediana está próxima de zero e no ARMA(6,3)-GARCH(0,3), o qual foi o único em que se utilizou a distribuição t de Student, os valores dos *outliers* extrapolaram os demais, que utilizaram a GED.

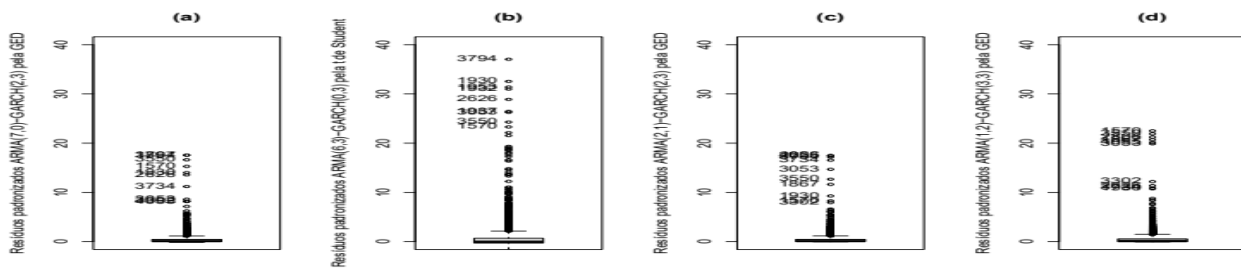


Figura 48: Boxplots dos Resíduos ARMA(p,q)-GARCH(m,n) selecionados dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

Na Tab. 46 confirmaram-se que os resíduos não possuem as propriedades de independência, normalidade ou heteroscedasticidade.

Tabela 46 - Propriedades dos resíduos dos modelos ARMA(p,q)-GARCH(m,n) selecionados dos log retornos da ITSA4, pelas distribuições GED e t de Student, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

ARMA(p,q) GARCH(m,n)	Ljung-Box (resíduos)	Normalidade	Heteroscedasticidade
(7,0)(3,2)_GED	$<2,200 \times 10^{-16}$	$<2,200 \times 10^{-16}$	$<2,200 \times 10^{-16}$
(6,3)(0,3)_t	$<2,200 \times 10^{-16}$	$<2,200 \times 10^{-16}$	$1,322 \times 10^{-13}$
(2,1)(1,3)_GED	$<2,200 \times 10^{-16}$	$<2,200 \times 10^{-16}$	$<2,200 \times 10^{-16}$
(1,2)(3,3)_GED	$<2,200 \times 10^{-16}$	$<2,200 \times 10^{-16}$	$<2,200 \times 10^{-16}$

Como se exige que os resíduos sejam independentes, esta é uma condição *sine qua non* para prosseguimento da aplicação da técnica, optou-se por verificar o histograma dos resíduos padronizados e a assimetria dos mesmos.

Como pode ser visto nos histogramas da Fig. 49 (a), (b), (c) e (d), a distribuição de probabilidade dos resíduos padronizados do GARCH(m,n) é assimétrica, indicando a necessidade de utilizar-se uma variação do GARCH que capte melhor esta assimetria.

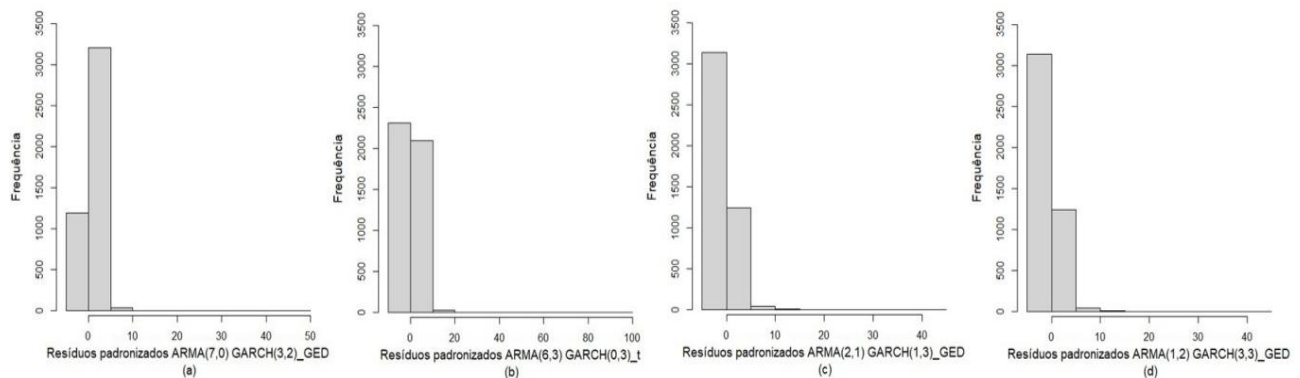


Figura 49: Histogramas dos resíduos padronizados selecionados dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

APÊNDICE B

a) Critérios de informação dos modelos ARMA(p,q) da ITSA4 com log retornos gerados

A Tab. 47, apresenta os valores de AIC e BIC obtidos sem tendência e com constante para os modelos ARMA(0,0) até ARMA(7,7). Nessa tabela foram identificados os dois com critério de informação AIC mais parcimoniosos: ARMA(7,0) e ARMA(6,3) e os dois com critério de informação BIC mais parcimoniosos: ARMA(1,2) e ARMA(2,1) e foram gerados os respectivos modelos ARMA. Convém salientar que o ARMA(6,3) com tendência não aparece entre os seis mais parcimoniosos, mas os demais aparecem.

Tabela 47 - Critérios de Informação dos log retornos da ITSA4

ARMA(p,q)	AIC	AICc	BIC	ARMA(p,q)	AIC	AICc	BIC
0,0	-21260,46	-21260,46	-21247,66	4,0	-21270,77	-21270,75	-21232,36
0,1	-21260,34	-21260,33	-21241,13	4,1	-21268,76	-21268,73	-21223,95
0,2	-21261,91	-21261,90	-21236,31	4,2	-21282,00	-21281,97	-21230,79
0,3	-21274,44	-21274,42	-21242,43	4,3	-21276,22	-21276,18	-21218,61
0,4	-21273,33	-21273,31	-21234,92	4,4	-21278,30	-21278,25	-21214,29
0,5	-21274,43	-21274,41	-21229,62	4,5	-21277,99	-21277,93	-21207,57
0,6	-21277,26	-21277,22	-21226,05	4,6	-21285,13	-21285,06	-21208,32
0,7	-21288,70	-21288,66	-21231,09	4,7	-21285,26	-21285,18	-21202,05
1,0	-21260,23	-21260,22	-21241,02	5,0	-21271,90	-21271,87	-21227,09
1,1	-21258,91	-21258,91	-21233,31	5,1	-21282,86	-21282,83	-21231,65
1,2	-21280,01	-21280,00	-21248,00	5,2	-21278,05	-21278,01	-21220,44
1,3	-21280,60	-21280,59	-21242,20	5,3	-21274,39	-21274,34	-21210,38
1,4	-21279,38	-21279,35	-21234,57	5,4	-21278,07	-21278,01	-21207,65
1,5	-21280,69	-21280,65	-21229,48	5,5	-21286,14	-21286,07	-21209,32
1,6	-21282,02	-21281,98	-21224,41	5,6	-21288,81	-21288,73	-21205,59
1,7	-21286,71	-21286,66	-21222,70	5,7	-21286,35	-21286,26	-21196,73
2,0	-21262,40	-21262,39	-21236,80	6,0	-21276,46	-21276,43	-21225,25
2,1	-21280,72	-21280,70	-21248,71	6,1	-21285,20	-21285,15	-21227,58
2,2	-21280,11	-21280,09	-21241,70	6,2	-21287,72	-21287,68	-21223,71
2,3	-21281,47	-21281,45	-21236,66	6,3	-21290,01	-21289,96	-21219,60
2,4	-21281,87	-21281,84	-21230,66	6,4	-21287,06	-21286,99	-21210,25
2,5	-21277,24	-21277,20	-21219,63	6,5	-21288,85	-21288,77	-21205,63
2,6	-21285,93	-21285,88	-21221,91	6,6	-21288,33	-21288,24	-21198,72
2,7	-21285,72	-21285,66	-21215,31	6,7	-21285,07	-21284,97	-21189,05
3,0	-21272,68	-21272,66	-21240,67	7,0	-21290,93	-21290,89	-21233,32
3,1	-21270,65	-21270,64	-21232,25	7,1	-21289,62	-21289,57	-21225,61
3,2	-21281,15	-21281,12	-21236,34	7,2	-21287,53	-21287,47	-21217,11
3,3	-21278,38	-21278,35	-21227,17	7,3	-21288,83	-21288,76	-21212,01
3,4	-21275,87	-21275,83	-21218,26	7,4	-21286,85	-21286,77	-21203,64

3,5	-21274,23	-21274,18	-21210,22	7,5	-21286,78	-21286,68	-21197,16
3,6	-21289,40	-21289,34	-21218,99	7,6	-21285,15	-21285,05	-21189,13
3,7	-21287,33	-21287,26	-21210,51	7,7	-21284,78	-21284,66	-21182,36

APÊNDICE C

a) Análise dos resíduos do modelo $ARMA(p,q)$ da ITSA4 com log retornos

Nas Figs. 50, 51, 52 e 53 observam-se os histogramas e *boxplots* dos resíduos $ARMA(1,2)$, $ARMA(2,1)$, $ARMA(6,3)$ e $ARMA(7,0)$.

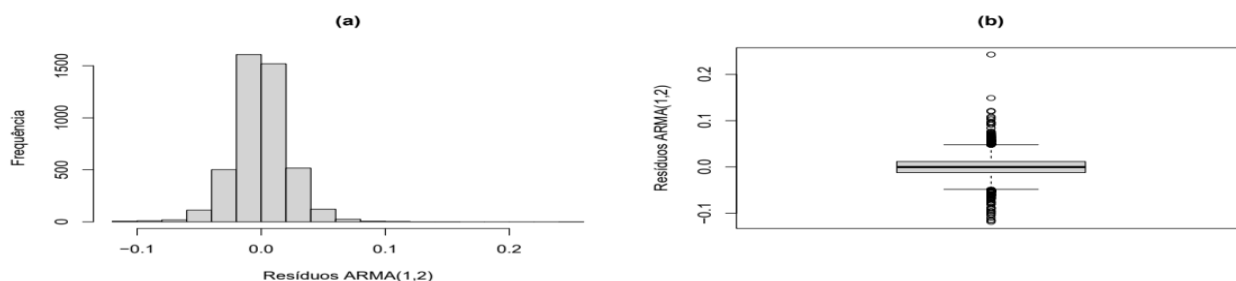


Figura 50 - (a)Histograma e (b)Boxplot dos resíduos $ARMA(1,2)$ dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018

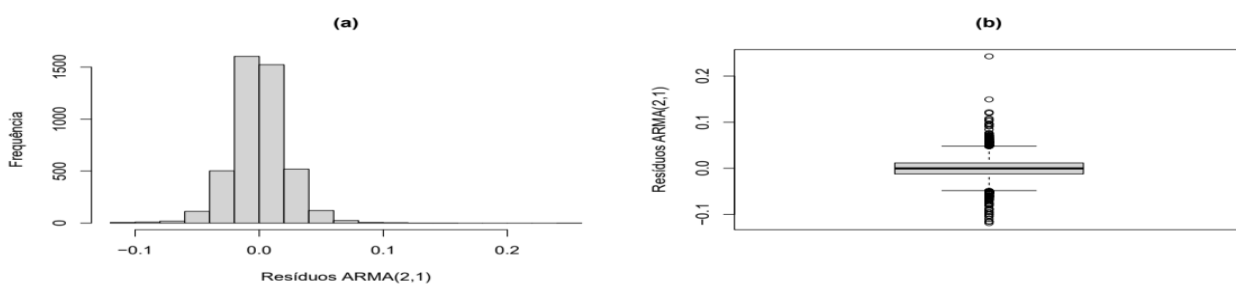


Figura 51 - (a)Histograma e (b)Boxplot dos resíduos $ARMA(2,1)$ dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018

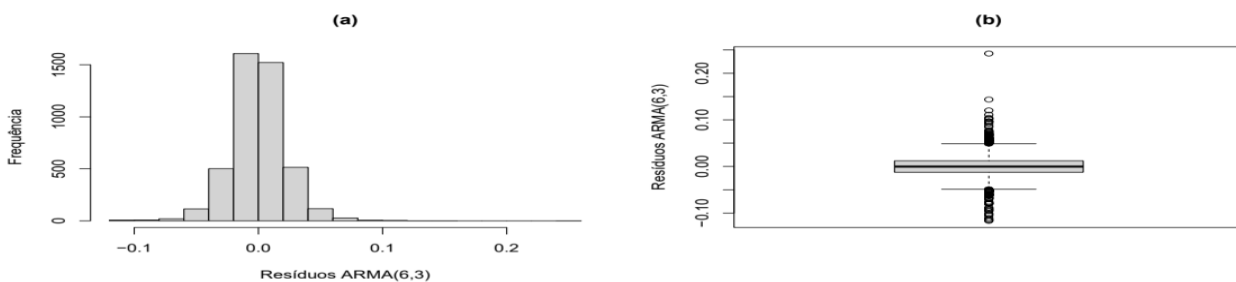


Figura 52 - (a)Histograma e (b)Boxplot dos resíduos $ARMA(6,3)$ dos log retornos da ITSA4, entre 2001 e 28-12-2018

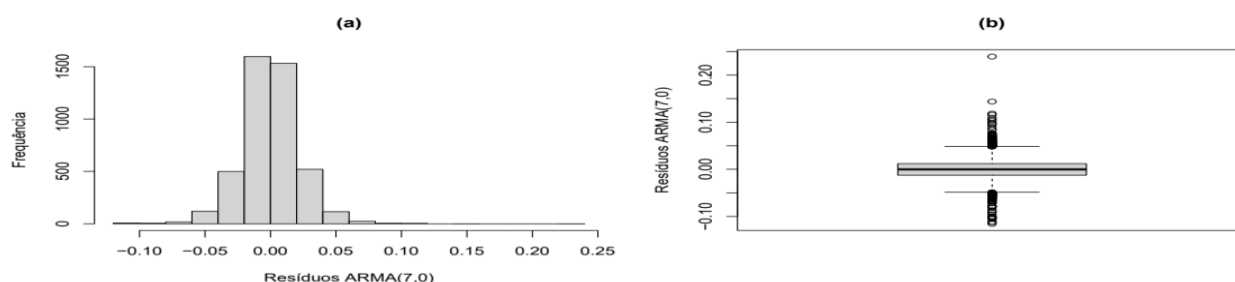


Figura 53 - (a)Histograma e (b)Boxplot dos resíduos ARMA(7,0) dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018

Nos histogramas anteriores percebeu-se que as curvas são leptocúrticas, mas não se nota assimetria. Nos *boxplots* percebeu-se que há bastante valores considerados *outliers* e a mediana está próxima de zero.

Na Tab. 48 confirmaram-se as curvas leptocúrticas e a simetria observadas nos histogramas. Além disso, verifica-se que a dispersão dos dados é baixa.

Tabela 48 - Medidas resumo dos resíduos ARMA(7,0), ARMA(6,3), ARMA(2,1) e ARMA(1,2) dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

ARMA (<i>p,q</i>)	Mínimo (R\$)	Média (R\$)	Mediana (R\$)	Máximo (R\$)	Desvio Padrão	Coefficiente de Assimetria	Coefficient e de Curtose
(7,0)	-0,125	$-9,300 \times 10^{-7}$	$2,576 \times 10^{-5}$	0,213	$2,211 \times 10^{-2}$	$9,825 \times 10^{-2}$	4,704
(6,3)	-0,123	$5,000 \times 10^{-7}$	$-1,707 \times 10^{-5}$	0,216	$2,211 \times 10^{-2}$	$9,943 \times 10^{-2}$	4,808
(2,1)	-0,126	$-1,755 \times 10^{-5}$	$-9,873 \times 10^{-5}$	0,216	$2,216 \times 10^{-2}$	$9,785 \times 10^{-2}$	$4,915^0$
(1,2)	-0,126	$6,000 \times 10^{-8}$	$-4,445 \times 10^{-5}$	0,216	$2,216 \times 10^{-2}$	$9,746 \times 10^{-2}$	4,915

Nas Figs. 54, 55, 56 e 57 observam-se as funções de Autocorrelação e Autocorrelação Parcial dos resíduos dos ARMA(1,2), ARMA(2,1), ARMA(7,0) e ARMA(6,3), respectivamente.

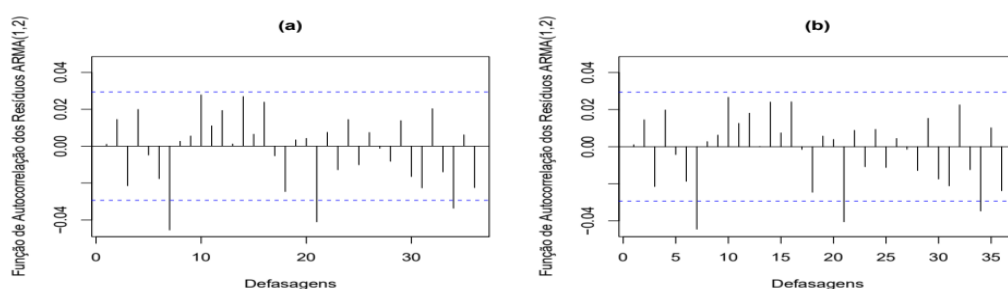


Figura 54 - (a)FAC e (b)FACP dos resíduos ARMA(1,2) dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

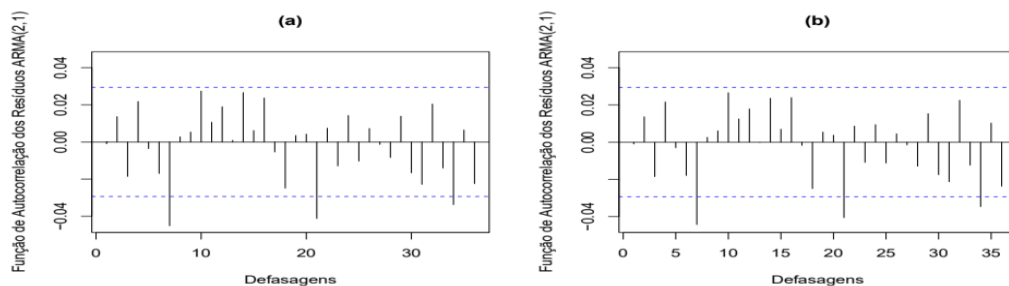


Figura 55 - (a)FAC e (b)FACP dos resíduos ARMA(2,1) dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

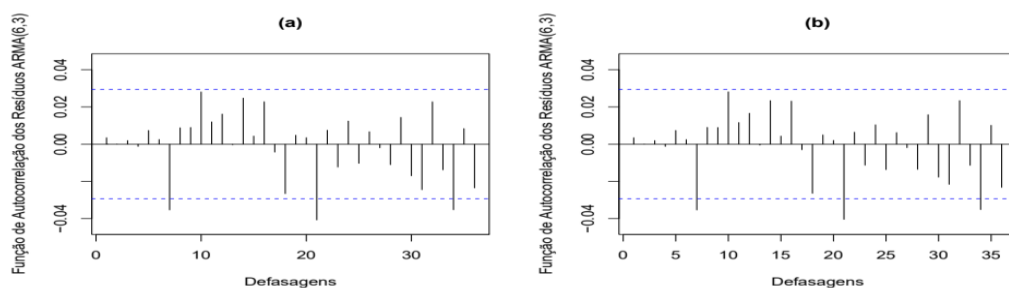


Figura 56 - (a)FAC e (b)FACP dos resíduos ARMA(6,3) dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

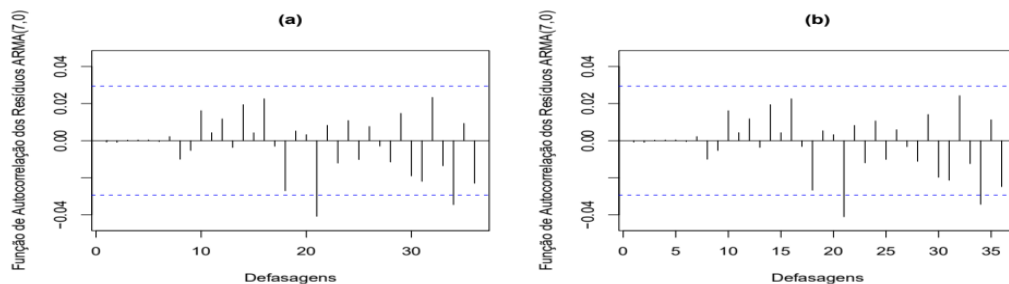


Figura 57 - (a)FAC e (b)FACP dos resíduos ARMA(7,0) dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

APÊNDICE D

a) Critérios de informação dos modelos $ARMA(p,q)$ -EGARCH(m,n) e análise dos resíduos da ITSA4

As Tabs. 49, 50, 51 e 52 apresentam os valores de critérios de informação AIC e BIC obtidos para o ARMA (7,0)-EGARCH(m,n), ARMA(6,3)-EGARCH(m,n), ARMA(2,1)-EGARCH(m,n) e ARMA(1,2)-EGARCH(m,n), respectivamente.

Tabela 49 - Critérios de Informação do ARMA(7,0)-EGARCH(m,n) dos log retornos da ITSA4, distribuições de probabilidade GED e t de Student

ARMA(7,0)- EGARCH(m,n)	Distribuição GED		Distribuição t	
	AIC	BIC	AIC	BIC
EGARCH (0,0)	ERRO	ERRO	ERRO	ERRO
EGARCH (0,1)	-12,755	-12,739	-12,544	-12,529
EGARCH (0,2)	-12,709	-12,692	-12,551	-12,534
EGARCH (0,3)	-11,553	-11,535	-12,551	-12,532
EGARCH (1,0)	ERRO	ERRO	ERRO	ERRO
EGARCH (1,1)	-12,786	-12,767	-12,662	-12,644
EGARCH (1,2)	-12,845	-12,825	-12,662	-12,642
EGARCH (1,3)	-12,826	-12,805	-12,662	-12,640
EGARCH (2,0)	ERRO	ERRO	ERRO	ERRO
EGARCH (2,1)	-12,811	-12,790	-12,662	-12,641
EGARCH (2,2)	-12,829	-12,806	-12,662	-12,639
EGARCH (2,3)	-12,847	-12,823	-12,661	-12,637
EGARCH (3,0)	ERRO	ERRO	ERRO	ERRO
EGARCH (3,1)	-12,832	-12,808	-12,662	-12,638
EGARCH (3,2)	-12,757	-12,731	-12,662	-12,636
EGARCH (3,3)	-12,789	-12,761	-12,664	-12,637

Tabela 50 - Critérios de Informação do ARMA(6,3)-EGARCH(m,n) dos log retornos da ITSA4, distribuições de probabilidade GED e t de Student

ARMA(6,3)- EGARCH(m,n)	Distribuição GED		Distribuição t	
	AIC	BIC	AIC	BIC
EGARCH (0,0)	ERRO	ERRO	ERRO	ERRO
EGARCH (0,1)	-12,764	-12,745	-12,548	-12,529
EGARCH (0,2)	-12,751	-12,731	-12,554	-12,534
EGARCH (0,3)	-12,676	-12,655	-12,554	-12,532
EGARCH (1,0)	ERRO	ERRO	ERRO	ERRO
EGARCH (1,1)	-12,759	-12,737	-12,680	-12,659
EGARCH (1,2)	-12,811	-12,788	-12,680	-12,657
EGARCH (1,3)	-12,772	-12,748	-12,680	-12,655
EGARCH (2,0)	ERRO	ERRO	ERRO	ERRO
EGARCH (2,1)	-12,818	-12,794	-12,680	-12,655
EGARCH (2,2)	-12,814	-12,789	-12,680	-12,655
EGARCH (2,3)	-12,801	-12,774	-12,681	-12,653
EGARCH (3,0)	ERRO	ERRO	ERRO	ERRO
EGARCH (3,1)	2,2465	2,2739	-12,682	-12,654
EGARCH (3,2)	-12,819	-12,791	-12,681	-12,652
EGARCH (3,3)	-12,850	-12,820	-12,680	-12,650

Tabela 51 - Critérios de Informação do ARMA(2,1)-EGARCH(m,n) dos log retornos da ITSA4, distribuições de probabilidade GED e t de Student

ARMA(2,1)- EGARCH(m,n)	Distribuição GED		Distribuição t	
	AIC	BIC	AIC	BIC
EGARCH (0,0)	ERRO	ERRO	ERRO	ERRO
EGARCH (0,1)	-12,771	-12,761	-12,548	-12,538
EGARCH (0,2)	-12,745	-12,733	-12,548	-12,536
EGARCH (0,3)	-12,766	-12,753	-12,554	-12,541
EGARCH (1,0)	ERRO	ERRO	ERRO	ERRO
EGARCH (1,1)	-12,831	-12,818	-12,679	-12,666
EGARCH (1,2)	-12,829	-12,815	-12,678	-12,664
EGARCH (1,3)	-12,836	-12,820	-12,679	-12,663
EGARCH (2,0)	ERRO	ERRO	ERRO	ERRO
EGARCH (2,1)	-12,803	-12,788	-12,680	-12,664
EGARCH (2,2)	-12,813	-12,796	-12,680	-12,662
EGARCH (2,3)	-12,845	-12,826	-12,682	-12,663
EGARCH (3,0)	ERRO	ERRO	-12,270	-12,253
EGARCH (3,1)	-12,829	-12,810	-12,683	-12,664
EGARCH (3,2)	-12,841	-12,821	-12,682	-12,662
EGARCH (3,3)	-12,835	-12,813	-12,682	-12,661

Tabela 52 - Critérios de Informação do ARMA(1,2)-EGARCH(m,n) dos log retornos da ITSA4, distribuições de probabilidade GED e t de Student

ARMA(1,2)- EGARCH(m,n)	Distribuição GED		Distribuição t	
	AIC	BIC	AIC	BIC
EGARCH (0,0)	ERRO	ERRO	-10,702	-10,694
EGARCH (0,1)	-12,752	-12,742	-12,548	-12,538
EGARCH (0,2)	-12,767	-12,756	-12,554	-12,543
EGARCH (0,3)	-12,768	-12,755	30,298	30,311
EGARCH (1,0)	ERRO	ERRO	ERRO	ERRO
EGARCH (1,1)	-12,842	-12,829	-12,678	-12,665
EGARCH (1,2)	-12,820	-12,805	-12,678	-12,663
EGARCH (1,3)	-12,829	-12,813	-12,679	-12,663
EGARCH (2,0)	ERRO	ERRO	ERRO	ERRO
EGARCH (2,1)	-12,835	-12,819	-12,679	-12,664
EGARCH (2,2)	-12,828	-12,811	-12,679	-12,662
EGARCH (2,3)	-12,804	-12,786	-12,681	-12,662
EGARCH (3,0)	ERRO	ERRO	-12,230	-12,213
EGARCH (3,1)	-12,825	-12,806	-12,682	-12,663
EGARCH (3,2)	-12,823	-12,803	-12,682	-12,661
EGARCH (3,3)	-12,821	-12,799	-12,686	-12,665

Na Tab. 53 notou-se que há assimetria e a curva é leptocúrtica, com dispersão baixa.

Tabela 53 - Medidas resumo dos resíduos padronizados ARMA(p,q)-EGARCH(m,n) selecionados dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

ARMA(p,q)- EGARCH(m,n)	Mínimo (R\$)	Média (R\$)	Mediana (R\$)	Máximo (R\$)	Desvio Padrão	Coef. de Assimetria	Coef. de Curtose
(7,0)-(2,3)	-0,166	0,400	0,114	17,566	0,912	8,841	127,569
(7,0)-(1,2)	-0,144	0,405	0,118	17,914	0,922	8,879	128,507
(6,3)-(3,3)	$-7,542 \times 10^{-2}$	0,377	0,112	16,074	0,835	8,449	117,901
(2,1)-(2,3)	$-5,543 \times 10^{-2}$	0,411	0,118	17,499	0,922	8,855	129,132
(1,2)-(1,1)	$-7,166 \times 10^{-2}$	0,382	0,120	16,084	0,836	8,748	125,275

Nos *boxplots* (Fig. 58) percebeu-se que há bastante valores considerados *outliers* nos valores de resíduos mais altos e a mediana está próxima de zero.

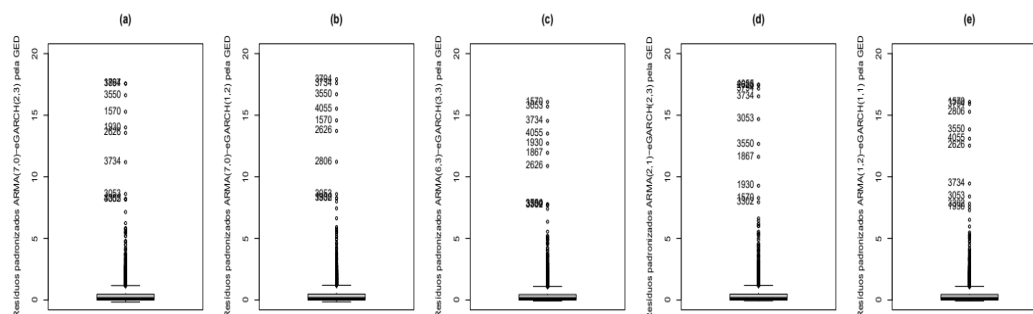


Figura 58: Boxplot dos resíduos ARMA(p,q)-EGARCH(m,n) selecionados dos log retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023

APÊNDICE E

a) Critérios de informação dos modelos $ARMA(p,q)$ com retornos gerados da ITSA4

Da verificação da estacionariedade da ST, todos resultaram estacionária em nível, sendo, portanto, um modelo $ARMA(p,q)$.

Após, foram verificadas, por gráfico, a FAC e a FACP, conforme Fig. 59, para identificar os valores de p e q . E, como pode ser visto, resultaram inconclusivas, por não se enquadrarem nos critérios de interpretação definidos por Morettin (2017). Como as defasagens significativas foram 2, 3, 6, 7 e 21 em ambos gráficos, resolveu-se por utilizar os valores de p e q variando de 0 a 7, gerando-se 64 modelos.

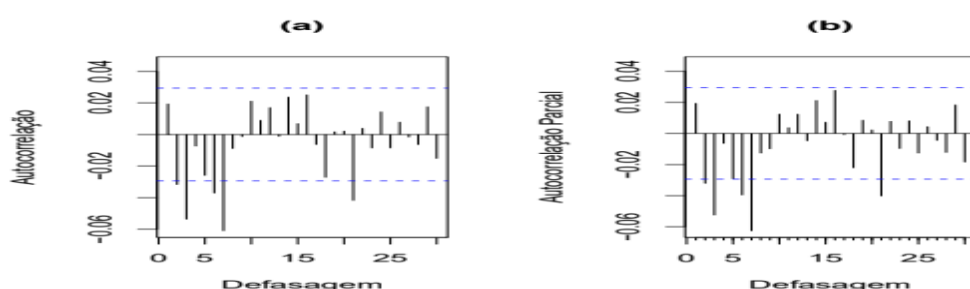


Figura 59 - (a)FAC e (b)FACP dos Retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018

Na Tab. 54 apresentam-se os resultados do AIC e BIC dos modelos escolhidos, de acordo com o AIC e de acordo com o BIC.

Tabela 54 - Critérios de Informação dos retornos da ITSA4

ARMA(p,q)	AIC	AICc	BIC	ARMA(p,q)	AIC	AICc	BIC
0,0	-21231,16	-21231,16	-21218,36	4,0	-21241,90	-21241,88	-21203,49
0,1	-21230,94	-21230,94	-21211,74	4,1	-21239,88	-21239,86	-21195,07
0,2	-21232,95	-21232,94	-21207,34	4,2	-21255,17	-21255,13	-21203,96
0,3	-21245,67	-21245,66	-21213,67	4,3	-21248,59	-21248,55	-21190,98
0,4	-21244,85	-21244,83	-21206,44	4,4	-21250,86	-21250,81	-21186,85
0,5	-21246,67	-21246,64	-21201,86	4,5	-21250,36	-21250,30	-21179,95
0,6	-21249,83	-21249,80	-21198,62	4,6	-21258,01	-21257,94	-21181,19
0,7	-21261,96	-21261,92	-21204,34	4,7	-21258,32	-21258,24	-21175,10
1,0	-21230,84	-21230,83	-21211,63	5,0	-21243,67	-21243,65	-21198,86
1,1	-21229,58	-21229,57	-21203,98	5,1	-21256,12	-21256,09	-21204,91
1,2	-21253,07	-21253,06	-21221,07	5,2	-21251,25	-21251,21	-21193,64
1,3	-21253,63	-21253,61	-21215,22	5,3	-21261,84	-21261,79	-21197,83
1,4	-21252,24	-21252,21	-21207,43	5,4	-21250,76	-21250,70	-21180,35
1,5	-21253,76	-21253,73	-21202,55	5,5	-21260,72	-21260,65	-21183,9
1,6	-21255,02	-21254,98	-21197,41	5,6	-21238,31	-21238,22	-21155,09
1,7	-21259,97	-21259,92	-21195,96	5,7	-21260,45	-21260,36	-21170,84
2,0	-21233,43	-21233,42	-21207,83	6,0	-21248,65	-21248,62	-21197,44

2,1	-21253,81	-21253,79	-21221,80	6,1	-21258,41	-21258,37	-21200,80
2,2	-21253,64	-21253,62	-21215,23	6,2	-21261,01	-21260,96	-21197,00
2,3	-21255,84	-21255,82	-21211,04	6,3	-21263,81	-21263,75	-21193,40
2,4	-21255,04	-21255,01	-21203,83	6,4	-21260,18	-21260,11	-21183,36
2,5	-21250,31	-21250,27	-21192,70	6,5	-21262,54	-21262,45	-21179,32
2,6	-21258,91	-21258,86	-21194,90	6,6	-21261,11	-21261,01	-21171,49
2,7	-21258,47	-21258,41	-21188,06	6,7	-21258,69	-21258,58	-21162,67
3,0	-21243,72	-21243,71	-21211,71	7,0	-21264,13	-21264,09	-21206,52
3,1	-21253,46	-21253,44	-21215,05	7,1	-21262,97	-21262,92	-21198,95
3,2	-21257,05	-21257,03	-21212,24	7,2	-21260,93	-21260,87	-21190,52
3,3	-21254,07	-21254,04	-21202,86	7,3	-21262,10	-21262,03	-21185,29
3,4	-21248,60	-21248,56	-21190,99	7,4	-21260,04	-21259,96	-21176,83
3,5	-21247,09	-21247,04	-21183,07	7,5	-21260,04	-21259,96	-21176,83
3,6	-21263,33	-21263,27	-21192,91	7,6	-21258,76	-21258,65	-21162,74
3,7	-21260,38	-21260,31	-21183,57	7,7	-21258,02	-21257,89	-21155,59

Na sequência, foram obtidos os resíduos dos referidos modelos. E, a partir destes, verificou-se se atendiam as seguintes propriedades: independência dos resíduos e dependência dos resíduos quadráticos. Também foi verificado se possuíam propriedades desejadas como: normalidade e heteroscedasticidade. A Tab. 55 apresenta os resultados dos testes, obtidos nesta etapa da análise.

Tabela 55 - Propriedades dos resíduos dos modelos ARMA selecionados dos retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

ARMA (<i>p,q</i>)	Testes (p-valor)			
	Ljung-Box (independência)*	Jarque-Bera (normalidade)	ARCH (homoscedasticidade)	McLeod-Li (heteroscedasticidade)*
(7,0)	0,996	<2.2x10 ⁻¹⁶	<2.2x10 ⁻¹⁶	<2.2x10 ⁻¹⁶
(6,3)	0,983	<2.2x10 ⁻¹⁶	<2.2x10 ⁻¹⁶	<2.2x10 ⁻¹⁶
(2,1)	6,293 x 10 ⁻²	<2.2x10 ⁻¹⁶	<2.2x10 ⁻¹⁶	<2.2x10 ⁻¹⁶
(1,2)	4,908 x 10 ⁻²	<2.2x10 ⁻¹⁶	<2.2x10 ⁻¹⁶	<2.2x10 ⁻¹⁶

Obs.: *Para lag=15

Da Tab. 55 percebeu-se que os resíduos satisfizeram a propriedade de serem independentes conforme os resultados dos testes de Ljung-Box, por não terem sido encontradas evidências de autocorrelação. O teste de Jarque-Bera encontrou evidências de que a distribuição dos resíduos não é a distribuição Normal. O teste ARCH e o teste de McLeod Li encontraram evidências de que os resíduos possuem heteroscedasticidade.

APÊNDICE F

a) Critérios de informação dos modelos ARMA(p,q) da PETR4 com log retornos

A Tab. 56, apresenta os valores de AIC e BIC obtidos sem tendência e com constante para os modelos ARMA(0,0) até ARMA(5,5). Nessa tabela foram identificados os dois com critério de informação AIC mais parcimoniosos: ARMA(5,5) e ARMA(5,4) e os três com critério de informação BIC mais parcimoniosos: ARMA(0,0), ARMA(0,1) e ARMA(1,0) e foram gerados os respectivos modelos ARMA. Convém salientar que o ARMA(0,0) não considera nem autoregressão e nem médias móveis e, na verdade, representa um modelo puramente aleatório, então não faz sentido utilizá-lo.

Tabela 56 - Critérios de Informação dos log retornos da ITSA4

ARMA(p,q)	AIC	AICc	BIC	ARMA(p,q)	AIC	AICc	BIC
0,0	-19703,39	-19703,39	-19690,59	3,0	-19701,05	-19701,03	-19669,04
0,1	-19702,53	-19702,52	-19683,33	3,1	-19699,04	-19699,02	-19660,63
0,2	-19701,64	-19701,63	-19676,03	3,2	-19699,2	-19699,18	-19654,39
0,3	-19700,93	-19700,91	-19668,92	3,3	-19697,44	-19697,41	-19646,23
0,4	-19699,36	-19699,34	-19660,95	3,4	-19701,05	-19701,01	-19643,44
0,5	-19702,42	-19702,39	-19657,61	3,5	-19698,92	-19698,87	-19634,91
1,0	-19702,49	-19702,49	-19683,29	4,0	-19699,34	-19699,32	-19660,93
1,1	-19700,51	-19700,50	-19674,91	4,1	-19697,36	-19697,33	-19652,55
1,2	-19699,66	-19699,64	-19667,65	4,2	-19703,60	-19703,57	-19652,39
1,3	-19698,94	-19698,92	-19660,53	4,3	-19701,25	-19701,21	-19643,64
1,4	-19702,43	-19702,41	-19657,62	4,4	-19695,67	-19695,62	-19631,66
1,5	-19703,06	-19703,03	-19651,85	4,5	-19699,72	-19699,66	-19629,31
2,0	-19701,69	-19701,68	-19676,09	5,0	-19702,16	-19702,14	-19657,35
2,1	-19699,67	-19699,66	-19667,67	5,1	-19703,22	-19703,18	-19652,01
2,2	-19700,76	-19700,74	-19662,35	5,2	-19700,61	-19700,57	-19643,00
2,3	-19699,14	-19699,11	-19654,33	5,3	-19699,82	-19699,77	-19635,81
2,4	-19702,74	-19702,71	-19651,53	5,4	-19704,75	-19704,69	-19634,34
2,5	-19700,52	-19700,48	-19642,91	5,5	-19704,80	-19704,73	-19627,99

APÊNDICE G

a) Análise dos resíduos do modelo $ARMA(p,q)$ da PETR4 com log retornos

Nas Figs. 60, 61, 62 e 63 observam-se, respectivamente, os histogramas e *boxplots* dos resíduos $ARMA(0,1)$, $ARMA(1,0)$, $ARMA(5,4)$ e $ARMA(5,5)$.

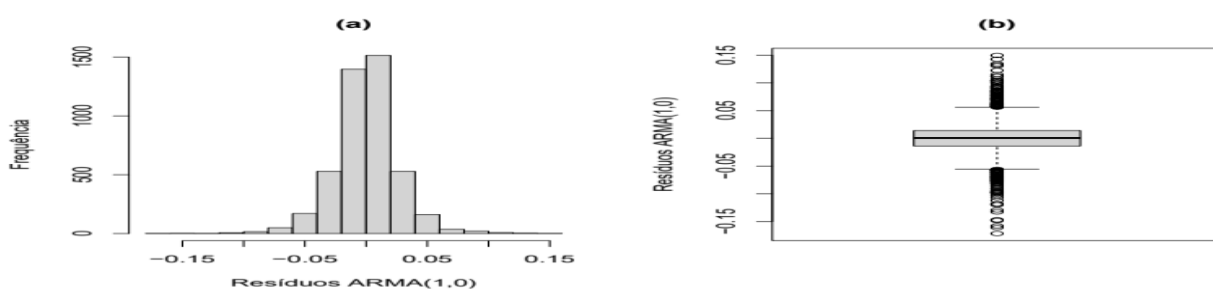


Figura 60: (a)Histograma e (b)Boxplot dos resíduos $ARMA(1,0)$ dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018

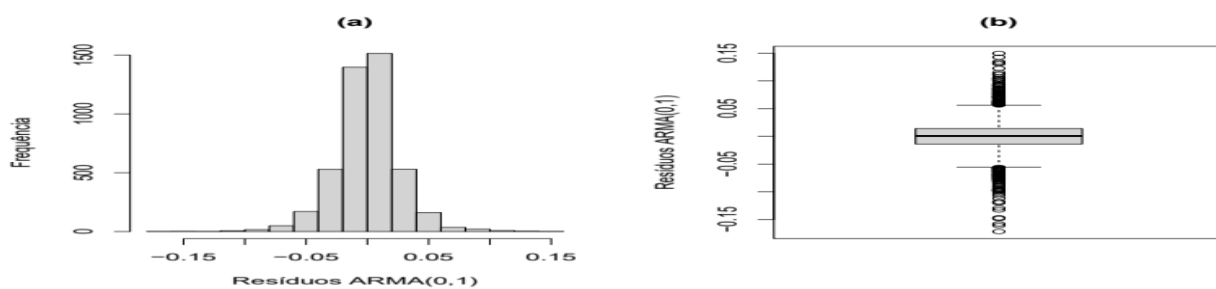


Figura 61: (a)Histograma e (b)Boxplot dos resíduos $ARMA(0,1)$ dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018

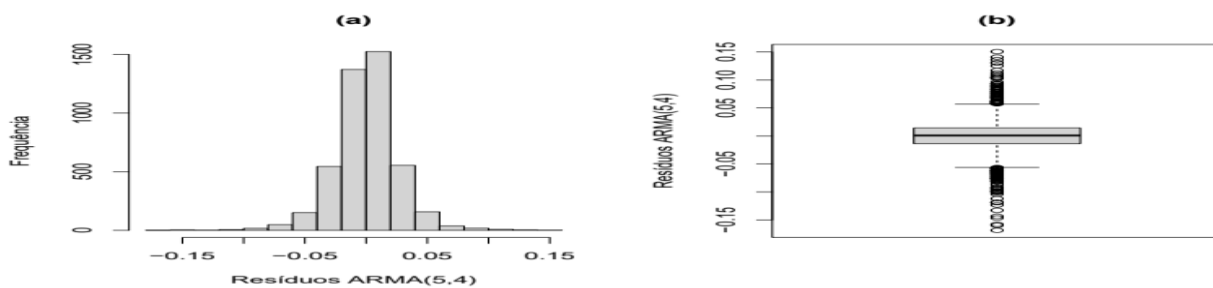


Figura 62: (a)Histograma e (b)Boxplot dos resíduos $ARMA(5,4)$ dos log retornos da PETR4, entre 2001 e 28-12-2018

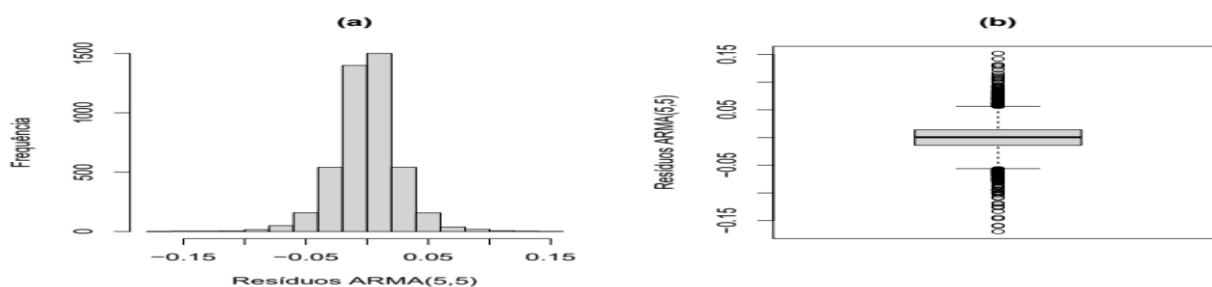


Figura 63: (a)Histograma e (b)Boxplot dos resíduos ARMA(5,5) dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018

Nos histogramas anteriores percebeu-se que as curvas são leptocúrticas e simétricas. Nos *boxplots* percebeu-se que há bastante valores considerados *outliers* e a mediana está próxima de zero.

Na Tab. 57 confirmaram-se as curvas leptocúrticas e a simetria observadas nos histogramas. Além disso, verifica-se que a dispersão dos dados é baixa.

Tabela 57 - Medidas resumo dos resíduos ARMA(5,5), ARMA(5,4), ARMA(1,0) e ARMA(0,1) dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

ARMA (p,q)	Mínimo (R\$)	Média (R\$)	Mediana (R\$)	Máximo (R\$)	Desvio Padrão	Coefficiente de Assimetria	Coefficiente de Curtose
(5,5)	-0,170	$5,115 \times 10^{-5}$	$4,922 \times 10^{-4}$	0,152	$2,641 \times 10^{-2}$	-0,147	3,902
(5,4)	-0,168	$32,58 \times 10^{-5}$	$8,230 \times 10^{-4}$	0,151	$2,641 \times 10^{-2}$	-0,132	3,885
(1,0)	-0,172	$0,015 \times 10^{-5}$	$6,329 \times 10^{-4}$	0,150	$2,647 \times 10^{-2}$	-0,137	3,940
(0,1)	-0,172	$0,014 \times 10^{-5}$	$6,394 \times 10^{-4}$	0,196	$2,647 \times 10^{-2}$	-0,137	3,940

Nas Figs. 64, 65, 66 e 67 observam-se as funções de Autocorrelação e Autocorrelação Parcial dos resíduos dos ARMA(0,1), ARMA(1,0), ARMA(5,4) e ARMA(5,5), respectivamente. Percebe-se que para o ARMA(0,1) e o ARMA(1,0) há correlação entre os resíduos.

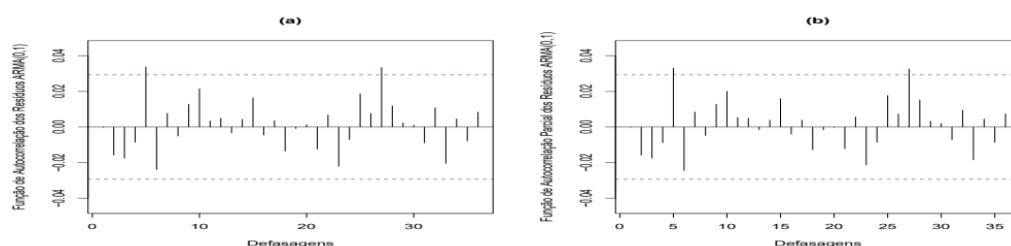


Figura 64: (a)FAC e (b)FACP dos resíduos ARMA(0,1) dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

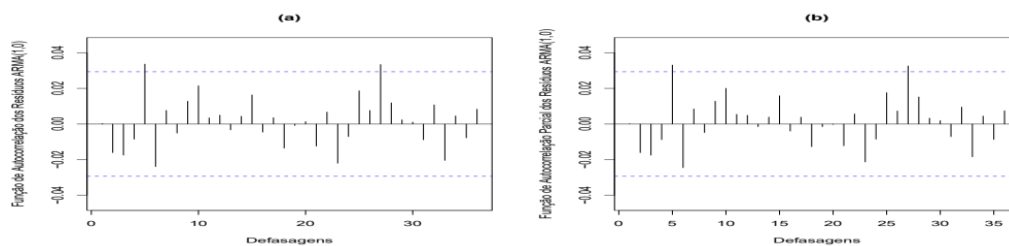


Figura 65: (a)FAC e (b)FACP dos resíduos ARMA(1,0) dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

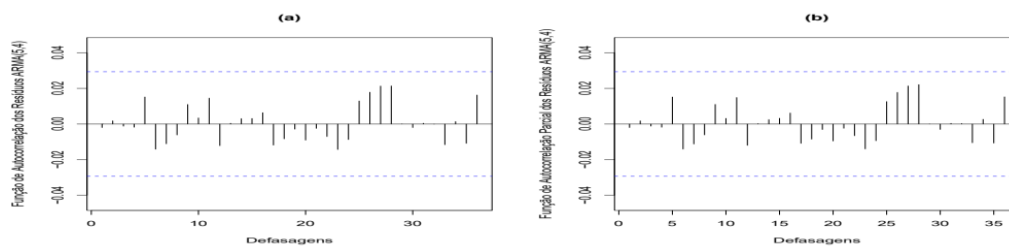


Figura 66: (a)FAC e (b)FACP dos resíduos ARMA(5,4) dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

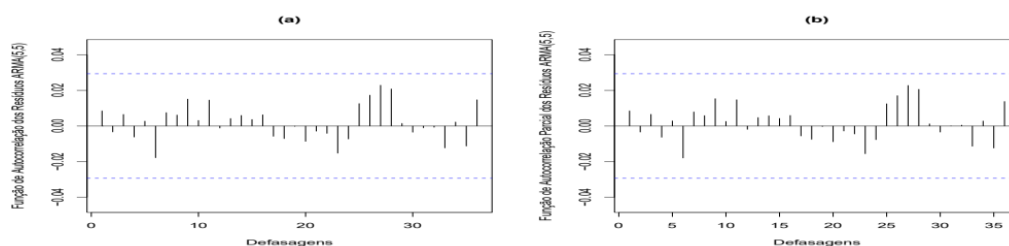


Figura 67: (a)FAC e (b)FACP dos resíduos ARMA(5,5) dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

APÊNDICE H

a) Análise das FAC e das FACP dos resíduos quadráticos do modelo $ARMA(p,q)$ da PETR4

Nas Figs. 68, 69, 70 e 71 observam-se as funções de Autocorrelação e Autocorrelação Parcial dos resíduos quadráticos dos $ARMA(1,0)$, $ARMA(0,1)$, $ARMA(5,4)$ e $ARMA(5,5)$, respectivamente. Os resíduos quadráticos são dependentes, como já demonstrado.

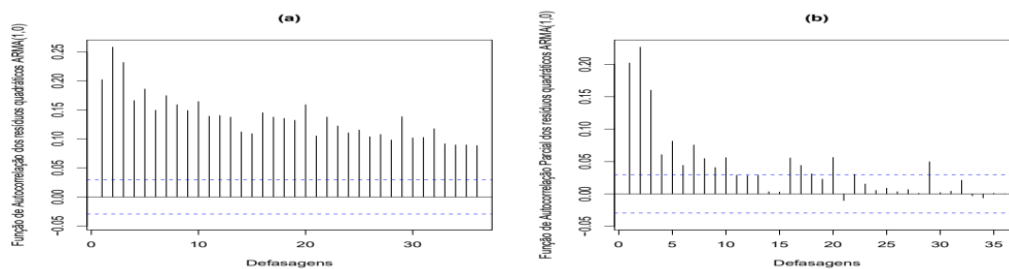


Figura 68: (a)FAC e (b)FACP dos resíduos ao quadrado $ARMA(1,0)$ dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

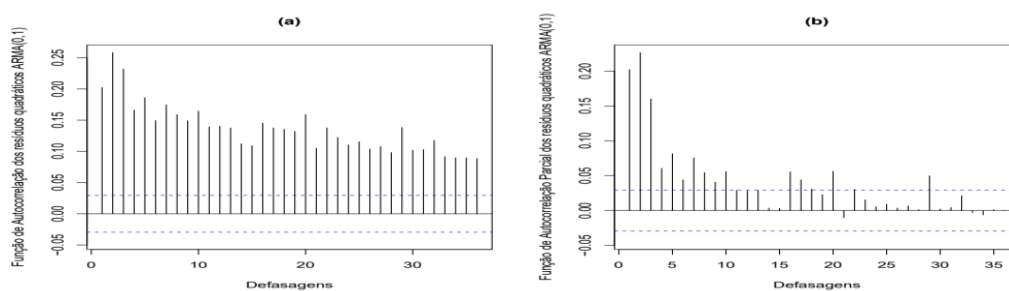


Figura 69: (a)FAC e (b)FACP dos resíduos quadráticos $ARMA(0,1)$ dos log retornos da PETR4, entre 2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

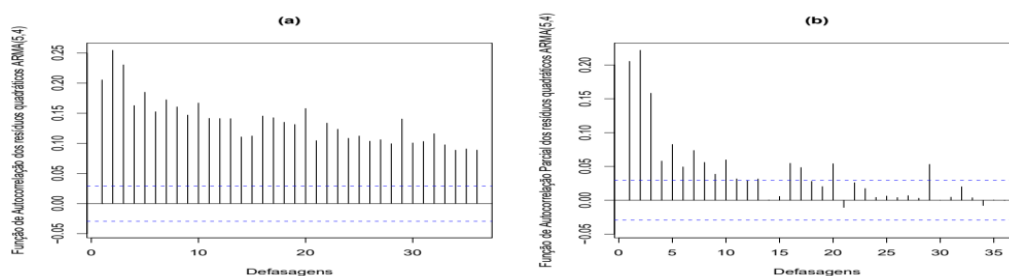


Figura 70: (a)FAC e (b)FACP dos resíduos quadráticos $ARMA(5,4)$ dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

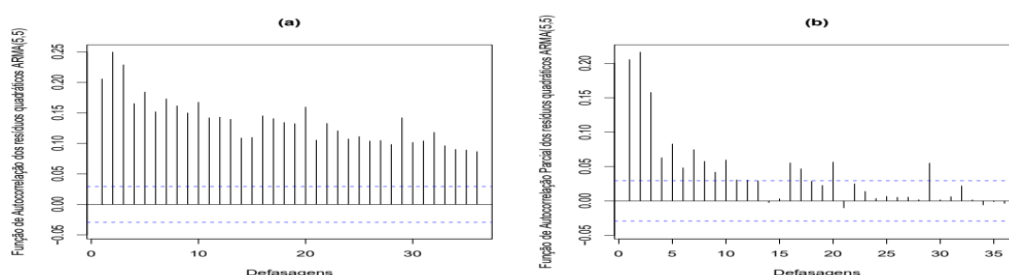


Figura 71: (a)FAC e (b)FACP dos resíduos quadráticos $ARMA(5,5)$ dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

b) Ajuste de Modelos GARCH(m,n) da PETR4

Com as propriedades necessárias confirmadas, a próxima etapa foi aplicar o modelo GARCH(m,n) aos resíduos quadráticos dos modelos ARMA(p,q) identificados como mais parcimoniosos, para tal foram utilizadas as distribuições de probabilidade GED e t de Student e analisaram-se modelos GARCH variando m, n entre 0 e 3.

Os modelos GARCH mais parcimoniosos pelo AIC foram: ARMA(0,1)-GARCH(2,1)_{STD}, ARMA(5,5)-GARCH(1,1)_{STD}, ARMA(1,0)-GARCH(1,2)_{STD} e ARMA(5,4)-GARCH(0,1)_{STD}. Os modelos GARCH mais parcimoniosos pelo BIC foram também: ARMA(0,1)-GARCH(2,1)_{STD}, ARMA(5,5)-GARCH(1,1)_{STD}, ARMA(1,0)-GARCH(1,2)_{STD} e ARMA(5,4)-GARCH(0,1)_{STD}. Todos pela distribuição t de Student. O mais parcimonioso de todos foi o ARMA(1,0) GARCH(1,2)_{STD}.

Conforme Tab. 60, apenas um modelo não encontrou evidências de autocorrelação em seus resíduos, de acordo com o teste de Ljung-Box: ARMA(5,5)-GARCH(1,1)_{STD}, o qual apresentou evidências de heteroscedasticidade e não normalidade, de acordo com os testes ARCH e Jarque-Bera, respectivamente.

Tabela 58 - Propriedades dos resíduos padronizados dos modelos ARMA(p,q)-GARCH(m,n) selecionados dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

ARMA(p,q) GARCH(m,n)	Ljung-Box (independência)*	Testes (p-valor)	
		Jarque-Bera (normalidade)	ARCH (homoscedasticidade)**
(5,5)(1,1)	0,625	$<2,200 \times 10^{-16}$	1,000
(5,4)(0,1)	$<2,200 \times 10^{-16}$	$<2,200 \times 10^{-16}$	$<2,200 \times 10^{-16}$
(0,1)(2,1)	$4,442 \times 10^{-5}$	$<2,200 \times 10^{-16}$	1,000
(1,0)(1,2)	$5,487 \times 10^{-3}$	$<2,200 \times 10^{-16}$	1,000

Obs.: *Para lag = 20 e **Para lag = 12

Os erros dos modelos selecionados estão apresentados na Tab. 59.

Tabela 59 - Capacidade preditiva do modelo ARMA(5,5)-GARCH(1,1), mais parcimonioso pelo BIC, da variância diária da PETR4, entre 02-01-2019 e 30-06-2023 (período de validação)

ARMA(p,q)-GARCH(m,n)	MAE	RMSE	MdAE
ARMA(5,5)-GARCH(1,1)	$3,252 \times 10^{-5}$	$1,111 \times 10^{-4}$	$1,914 \times 10^{-5}$

Na Tab. 59 percebeu-se que, considerando-se o único modelo que passou no teste de heteroscedasticidade, o ARMA(5,5)-GARCH(1,1)_{STD}, não conseguiu capturar bem a variância diária da PETR4 no período de validação, como visto na Fig. 72, tendo ficado bem abaixo da variância diária observada.

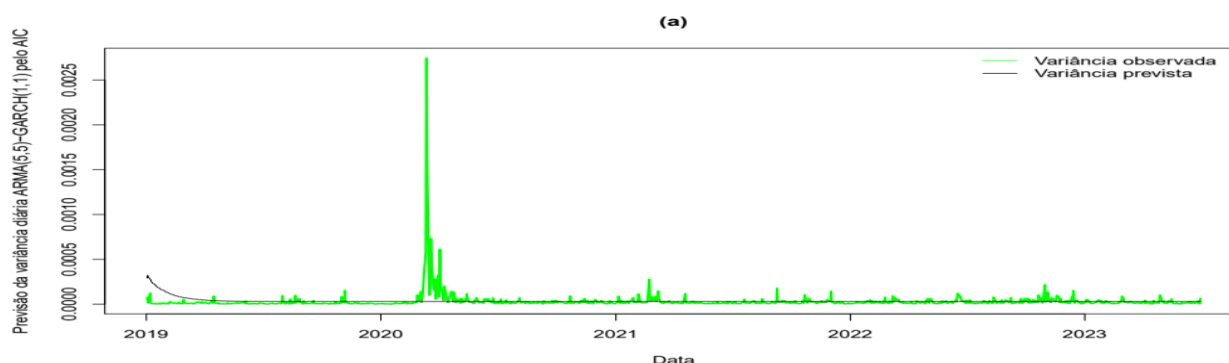


Figura 72: Previsão pelo ARMA(5,5)-GARCH(1,1) das variâncias dos retornos diários da PETR4, entre 02-01-2019 e 30-06-2023 (período de validação)

c) *CrITÉRIOS de informação dos modelos ARMA(p,q)-GARCH(m,n) da PETR4 e análise dos resíduos*

As Tabs. 60, 61, 62 e 63 apresentam os valores de critérios de informação AIC e BIC obtidos para ARMA(5,4)-GARCH(m,n), ARMA(5,5)-GARCH(m,n), ARMA(0,1)-GARCH(m,n) e ARMA(1,0)-GARCH(m,n), respectivamente.

Tabela 60 - CritÉrios de Informação do ARMA(5,4)-GARCH(m,n) dos log retornos da PETR4, distribuições de probabilidade GED e t de Student

ARMA(5,4)- GARCH(m,n)	Distribuição GED		Distribuição t	
	AIC	BIC	AIC	BIC
GARCH (0,0)	ERRO	ERRO	ERRO	ERRO
GARCH (0,1)	-6,406	-6,386	-11,874	-11,854
GARCH (0,2)	-6,407	-6,385	-11,876	-11,855
GARCH (0,3)	-6,4070	-6,384	-11,845	-11,822
GARCH (1,0)	-8,314	-8,294	-11,622	-11,602
GARCH (1,1)	-8,8520	-8,8310	-11,965	-11,943
GARCH (1,2)	-6,3980	-6,3750	-11,950	-11,927
GARCH (1,3)	-6,399	-6,3750	-11,937	-11,912
GARCH (2,0)	-8,3170	-8,2960	-11,728	-11,707
GARCH (2,1)	-8,85	-8,8270	-11,961	-11,938
GARCH (2,2)	-6,3980	-6,3740	-11,947	-11,923
GARCH (2,3)	-9,2850	-9,2590	-11,942	-11,916
GARCH (3,0)	-8,3170	-8,2940	-11,766	-11,743
GARCH (3,1)	-8,847	-8,822	-11,956	-11,932
GARCH (3,2)	-9,244	-9,218	-11,945	-11,919
GARCH (3,3)	-9,2800	-9,2530	-11,937	-11,910

Tabela 61 - CritÉrios de Informação do ARMA(5,5)-GARCH(m,n) dos log retornos da PETR4, distribuições de probabilidade GED e t de Student

ARMA(5,5)- GARCH(m,n)	Distribuição GED		Distribuição t	
	AIC	BIC	AIC	BIC
GARCH (0,0)	ERRO	ERRO	ERRO	ERRO
GARCH (0,1)	-6,406	-6,386	-11,874	-11,854
GARCH (0,2)	-6,407	-6,385	-11,876	-11,855
GARCH (0,3)	-6,4070	-6,385	-11,845	-11,822

GARCH (1,0)	-8,314	-8,294	-11,622	-11,602
GARCH (1,1)	-8,8520	-8,831	-11,965	-11,943
GARCH (1,2)	-6,3980	-6,3760	-11,950	-11,927
GARCH (1,3)	-6,399	-6,3750	-11,937	-11,912
GARCH (2,0)	-8,3170	-8,2960	-11,728	-11,707
GARCH (2,1)	-8,85	-8,8270	-11,961	-11,938
GARCH (2,2)	-6,3980	-6,3740	-11,947	-11,923
GARCH (2,3)	-9,2850	-9,2590	-11,942	-11,916
GARCH (3,0)	-8,3170	-8,2940	-11,766	-11,743
GARCH (3,1)	-8,847	-8,823	-11,956	-11,932
GARCH (3,2)	-9,244	-9,218	-11,945	-11,919
GARCH (3,3)	-9,2800	-9,2530	-11,937	-11,910

Tabela 62 - Critérios de Informação do ARMA(0,1)-GARCH(m,n) dos log retornos da ITSA4, distribuições de probabilidade GED e t de Student

ARMA(0,1)- GARCH(m,n)	Distribuição GED		Distribuição t	
	AIC	BIC	AIC	BIC
GARCH (0,0)	-8,290	-8,285	-11,897	-11,891
GARCH (0,1)	-6,404	-6,397	-11,869	-11,862
GARCH (0,2)	-6,406	-6,397	-11,775	-11,767
GARCH (0,3)	-6,407	-6,397	-11,78	-11,77
GARCH (1,0)	-8,291	-8,284	-11,943	-11,935
GARCH (1,1)	-8,722	-8,723	-12,046	-12,037
GARCH (1,2)	-6,397	-6,387	-12,063	-12,052
GARCH (1,3)	-6,398	-6,386	-11,881	-11,869
GARCH (2,0)	-8,297	-8,289	-12,01	-12,002
GARCH (2,1)	-8,720	-8,710	-12,074	-12,064
GARCH (2,2)	-6,396	-6,385	-12,069	-12,058
GARCH (2,3)	-6,398	-6,385	-11,866	-11,853
GARCH (3,0)	-8,298	-8,288	-12,024	-12,014
GARCH (3,1)	-8,717	-8,705	-12,031	-12,019
GARCH (3,2)	-6,396	-6,383	-12,069	-12,056
GARCH (3,3)	-6,397	-6,383	-11,869	-11,855

Tabela 63 - Critérios de Informação do ARMA(1,0)-GARCH(m,n) dos log retornos da PETR4, distribuições de probabilidade GED e t de Student

ARMA(1,0)- GARCH(m,n)	Distribuição GED		Distribuição t	
	AIC	BIC	AIC	BIC
GARCH (0,0)	-8,293	-8,287	-11,897	-11,891
GARCH (0,1)	-6,405	-6,398	-11,826	-11,819
GARCH (0,2)	-6,406	-6,397	-11,810	-11,801
GARCH (0,3)	-6,408	-6,398	-11,841	-11,831
GARCH (1,0)	-8,294	-8,287	-11,944	-11,937
GARCH (1,1)	-8,734	-8,726	-12,035	-12,027
GARCH (1,2)	-6,397	-6,387	-12,077	-12,067
GARCH (1,3)	-6,398	-6,387	-11,866	-11,854
GARCH (2,0)	-8,299	-8,291	-12,011	-12,002

GARCH (2,1)	-8,732	-8,722	-12,039	-12,029
GARCH (2,2)	-6,397	-6,385	-12,071	-12,059
GARCH (2,3)	-6,398	-6,385	-12,071	-12,058
GARCH (3,0)	-8,300	-8,290	-12,025	-12,015
GARCH (3,1)	-8,729	-8,717	-12,026	-12,014
GARCH (3,2)	-6,397	-6,384	-12,059	-12,046
GARCH (3,3)	-6,397	-6,383	-11,873	-11,858

Na Tab. 64 confirmaram-se as curvas leptocúrticas e a assimetria observadas nos histogramas. Além disso, verificou-se que há dispersão dos dados.

Tabela 64 - Medidas resumo dos resíduos padronizados ARMA(p,q)-GARCH(m,n) selecionados dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018

ARMA(p,q)- GARCH(m,n)	Mínimo (R\$)	Média (R\$)	Mediana (R\$)	Máximo (R\$)	Desvio Padrão	Coef. de Assimetria	Coef. de Curtose
(5,5)-(1,1) _{STD}	-0,82755	0,61532	-0,06693	53,57396	2,157781	7,683997	116,8891
(5,4)-(0,1) _{STD}	-0,91113	0,61715	-0,00905	36,88758	2,176729	7,380924	77,96874
(0,1)-(2,1) _{STD}	-0,31212	0,36339	0,03245	31,31207	1,058143	9,187357	189,3241
(1,0)-(1,2) _{STD}	-0,33482	0,37876	0,02848	32,55552	1,114606	8,888110	179,3477

Nos *boxplots* dos resíduos (Fig. 73) percebeu-se que há bastante valores considerados *outliers* e a mediana está próxima de zero e no ARMA(5,4)-GARCH(0,1) (Fig. 73(b)) os valores dos *outliers* extrapolaram os demais.

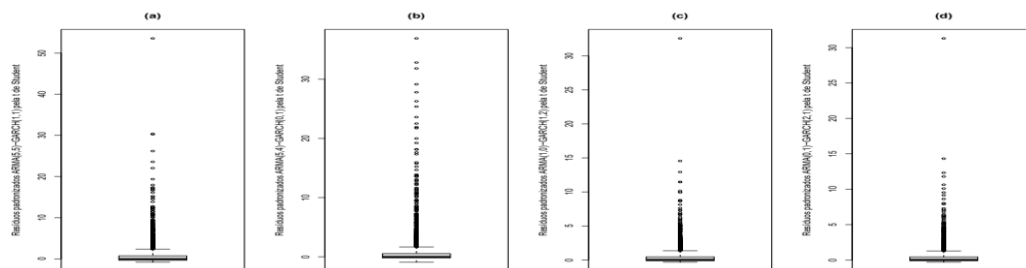


Figura 73: Boxplots dos Resíduos ARMA(p,q)-GARCH(m,n) selecionados dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

Na Tab. 65 confirmam-se que os resíduos padronizados dos modelos ARMA(p,q)-GARCH(m,n) não possuem as propriedades de independência, normalidade ou heteroscedasticidade necessárias. Como, ao menos, os resíduos devem ser independentes e esta é uma condição *sine qua non* para prosseguimento da aplicação da técnica, não foi possível prosseguir.

Tabela 65 - Propriedades dos resíduos padronizados dos modelos ARMA(p,q)-GARCH(m,n) selecionados dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

ARMA(p,q) GARCH(m,n)	Ljung-Box (resíduos)	Normalidade	Heteroscedasticidade
(5,5)(1,1)	$<2,200 \times 10^{-16}$	$<2,200 \times 10^{-16}$	$<2,200 \times 10^{-16}$
(5,4)(0,1)	$<2,200 \times 10^{-16}$	$<2,200 \times 10^{-16}$	$<2,200 \times 10^{-16}$
(0,1)(2,1)	$4,442 \times 10^{-5}$	$<2,200 \times 10^{-16}$	1,000
(1,0)(1,2)	$5,487 \times 10^{-3}$	$<2,200 \times 10^{-16}$	1,000

Optou-se por verificar o histograma dos resíduos padronizados e a assimetria dos mesmos. E, como pode ser visto nos histogramas da Fig. 74 (a), (b), (c) e (d), a distribuição de probabilidade dos resíduos padronizados do GARCH(m,n) é assimétrica, indicando a necessidade de utilizar-se uma variação do GARCH que capte melhor esta assimetria.

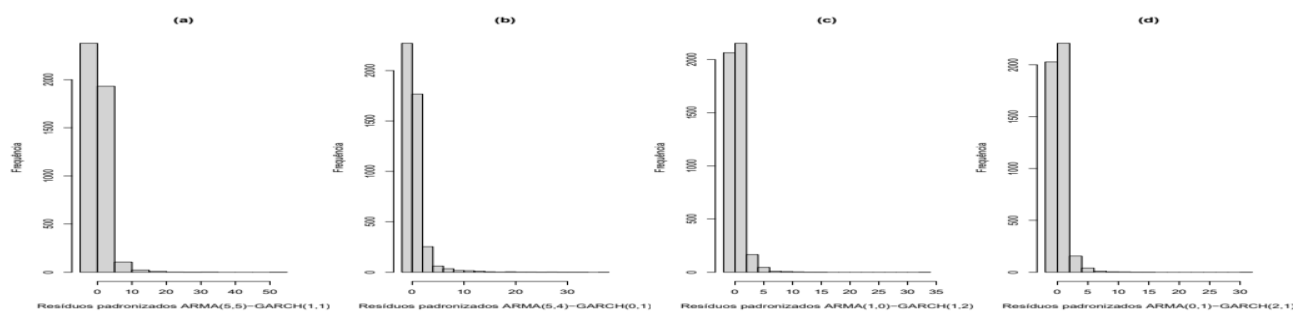


Figura 74: Histogramas dos resíduos padronizados selecionados dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

APÊNDICE I

a) Critérios de informação dos modelos $ARMA(p,q)$ -EGARCH(m,n) e análise dos resíduos da PETR4

As Tabs. 66, 67, 68 e 69 apresentam os valores de critérios de informação AIC e BIC obtidos para o ARMA (5,5)-EGARCH(m,n), ARMA(5,4)-EGARCH(m,n), ARMA(0,1)-EGARCH(m,n) e ARMA(1,0)-EGARCH(m,n), respectivamente.

Tabela 66 - Critérios de Informação do ARMA(5,5)-EGARCH(m,n) dos log retornos da PETR4, distribuições de probabilidade GED e t de Student

ARMA(5,5)- EGARCH(m,n)	Distribuição GED		Distribuição t	
	AIC	BIC	AIC	BIC
EGARCH(0,0)	ERRO	ERRO	ERRO	ERRO
EGARCH(0,1)	-12,141	-12,121	-11,927	-11,907
EGARCH(0,2)	-12,105	-12,083	-11,926	-11,904
EGARCH(0,3)	2,103	2,126	-11,928	-11,905
EGARCH(1,0)	ERRO	ERRO	ERRO	ERRO
EGARCH(1,1)	-12,277	-12,254	-12,158	-12,135
EGARCH(1,2)	-12,230	-12,206	-12,158	-12,133
EGARCH(1,3)	-12,274	-12,249	-12,149	-12,124
EGARCH(2,0)	ERRO	ERRO	ERRO	ERRO
EGARCH(2,1)	-12,261	-12,235	-12,160	-12,135
EGARCH(2,2)	-12,272	-12,245	-12,164	-12,136
EGARCH(2,3)	-12,235	-12,206	-12,163	-12,134
EGARCH(3,0)	ERRO	ERRO	ERRO	ERRO
EGARCH(3,1)	-12,252	-12,224	-12,168	-12,140
EGARCH(3,2)	-12,259	-12,228	-12,168	-12,138
EGARCH(3,3)	1,943	1,975	-12,167	-12,136

Tabela 67 - Critérios de Informação do ARMA(5,4)-EGARCH(m,n) dos log retornos da PETR4, distribuições de probabilidade GED e t de Student

ARMA(5,4)- EGARCH(m,n)	Distribuição GED		Distribuição t	
	AIC	BIC	AIC	BIC
EGARCH(0,0)	ERRO	ERRO	ERRO	ERRO
EGARCH(0,1)	-12,082	-12,063	-11,927	-11,909
EGARCH(0,2)	-12,082	-12,063	-11,927	-11,907
EGARCH(0,3)	-12,122	-12,100	-11,930	-11,908
EGARCH(1,0)	ERRO	ERRO	ERRO	ERRO
EGARCH(1,1)	-12,245	-12,223	-12,158	-12,136
EGARCH(1,2)	-12,251	-12,228	-12,157	-12,134
EGARCH(1,3)	-12,211	-12,186	-12,148	-12,124
EGARCH(2,0)	ERRO	ERRO	ERRO	ERRO
EGARCH(2,1)	-12,252	-12,228	-12,161	-12,136
EGARCH(2,2)	-12,246	-12,220	-12,160	-12,134
EGARCH(2,3)	-12,264	-12,237	-12,163	-12,136
EGARCH(3,0)	ERRO	ERRO	ERRO	ERRO
EGARCH(3,1)	-12,252	-12,225	-12,168	-12,141
EGARCH(3,2)	-12,239	-12,210	-12,168	-12,139
EGARCH(3,3)	2,7084	2,7386	-12,168	-12,138

Tabela 68 - Critérios de Informação do ARMA(0,1)-EGARCH(m,n) dos log retornos da PETR4, distribuições de probabilidade GED e t de Student

ARMA(2,1)- EGARCH(m,n)	Distribuição GED		Distribuição t	
	AIC	BIC	AIC	BIC
EGARCH(0,0)	-0,977	-0,971	ERRO	ERRO
EGARCH(0,1)	-12,137	-12,130	-12,137	-12,130
EGARCH(0,2)	-12,142	-12,134	-12,118	-12,109
EGARCH(0,3)	-12,142	-12,131	-12,142	-12,132
EGARCH(1,0)	ERRO	ERRO	ERRO	ERRO
EGARCH(1,1)	-12,088	-12,078	-12,259	-12,249
EGARCH(1,2)	-12,087	-12,076	-12,253	-12,241
EGARCH(1,3)	-12,088	-12,075	-12,256	-12,244
EGARCH(2,0)	ERRO	ERRO	ERRO	ERRO
EGARCH(2,1)	-12,087	-12,074	-12,245	-12,232
EGARCH(2,2)	-12,088	-12,074	-12,258	-12,244
EGARCH(2,3)	-12,089	-12,073	-12,259	-12,243
EGARCH(3,0)	ERRO	ERRO	ERRO	ERRO
EGARCH(3,1)	-12,092	-12,076	-12,261	-12,245
EGARCH(3,2)	-12,091	-12,074	-12,261	-12,243
EGARCH(3,3)	-12,090	-12,072	-12,258	-12,239

Tabela 69 - Critérios de Informação do ARMA(1,0)-EGARCH(m,n) dos log retornos da PETR4, distribuições de probabilidade GED e t de Student

ARMA(1,0)- EGARCH(m,n)	Distribuição GED		Distribuição t	
	AIC	BIC	AIC	BIC
EGARCH(0,0)	ERRO	ERRO	ERRO	ERRO
EGARCH(0,1)	-12,113	-12,105	-11,897	-11,890
EGARCH(0,2)	-12,134	-12,125	-11,896	-11,888
EGARCH(0,3)	-12,138	-12,128	-11,897	-11,887
EGARCH(1,0)	ERRO	ERRO	ERRO	ERRO
EGARCH(1,1)	-12,259	-12,249	-12,089	-12,079
EGARCH(1,2)	-12,251	-12,239	-12,088	-12,077
EGARCH(1,3)	-12,157	-12,144	-12,089	-12,076
EGARCH(2,0)	ERRO	ERRO	ERRO	ERRO
EGARCH(2,1)	-12,252	-12,239	-12,088	-12,075
EGARCH(2,2)	-12,262	-12,247	-12,089	-12,075
EGARCH(2,3)	-12,263	-12,248	-12,090	-12,074
EGARCH(3,0)	ERRO	ERRO	ERRO	ERRO
EGARCH(3,1)	-12,261	-12,245	-12,092	-12,077
EGARCH(3,2)	-12,256	-12,239	-12,092	-12,075
EGARCH(3,3)	-12,262	-12,243	-12,093	-12,074

Os modelos GARCH mais parcimoniosos pelo AIC foram: ARMA(0,1)-GARCH(3,1)_{STD} e ARMA(0,1)-GARCH(3,2)_{STD}, ARMA(5,5)-GARCH(1,1)_{GED}, ARMA(1,0)-GARCH(2,3)_{GED} e ARMA(5,4)-GARCH(2,3)_{GED}. Os modelos GARCH mais parcimoniosos pelo BIC foram: ARMA(0,1)-GARCH(1,1)_{STD}, ARMA(5,5)-GARCH(1,1)_{GED}, ARMA(1,0)-GARCH(1,1)_{GED} e

ARMA(5,4)-GARCH(2,3)_{GED}. As diferenças ocorreram nos modelos do BIC ARMA(0,1) e ARMA(1,0). O mais parcimonioso de todos foi o ARMA(5,5) GARCH(1,1)_{GED}.

Na Tab. 70 notou-se que há assimetria e a curva é leptocúrtica, com dispersão baixa.

Tabela 70 - Medidas resumo dos resíduos padronizados ARMA(p,q)-EGARCH(m,n) selecionados dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

ARMA(p,q) EGARCH(m,n)	Mínimo (R\$)	Média (R\$)	Mediana (R\$)	Máximo (R\$)	Desvio Padrão	Coef. de Assimetria	Coef. de Curtose
(5,5)(1,1) _{GED}	-1,170	0,020	0,553	51,338	1,878	8,300	151,967
(5,4)(2,3) _{GED}	-0,147	0,485	0,151	28,062	1,029	7,848	137,683
(0,1)(1,1) _{STD}	-0,297	0,294	0,024	22,766	0,922	7,792	135,597
(0,1)(3,1) _{STD}	-0,360	0,293	0,024	22,171	0,847	7,723	127,409
(0,1)(3,2) _{STD}	-0,360	0,293	0,024	22,197	0,847	7,730	127,767
(1,0)(2,3) _{GED}	-0,095	0,374	0,123	19,540	0,762	7,532	118,265
(1,0)(1,1) _{GED}	-0,074	0,362	0,120	20,093	0,732	7,882	139,844

Nos *boxplots* (Fig. 75) percebeu-se que há bastante valores considerados *outliers* nos valores de resíduos mais altos e a mediana está próxima de zero.

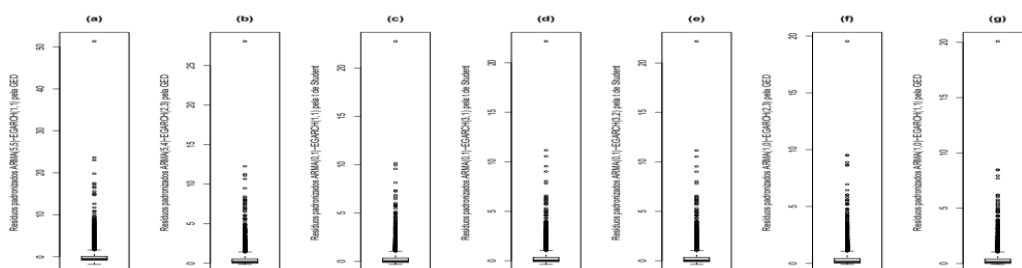


Figura 75: Boxplot dos resíduos padronizados ARMA(p,q)-EGARCH(m,n) selecionados dos log retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 30-06-2023

APÊNDICE J

a) Critérios de informação dos modelos $ARMA(p,q)$ com retornos gerados da PETR4

Da verificação da estacionariedade da ST, todos resultaram estacionária em nível, sendo, portanto, um modelo $ARMA(p,q)$.

Então, foi utilizado o comando *Arima*, sem tendência e com constante, para cálculo dos critérios de informação AIC e BIC.

Após, foram verificadas, por gráfico, a FAC e a FACP (Fig. 76), para identificar os valores de p e q . E, como pode ser visto, resultaram inconclusivas, por não se enquadrarem nos critérios de interpretação definidos por Morettin (2017). Como as defasagens significativas foram 5 e 27 em ambos gráficos, resolveu-se por utilizar os valores de p e q variando de 0 a 5, gerando-se 36 modelos.

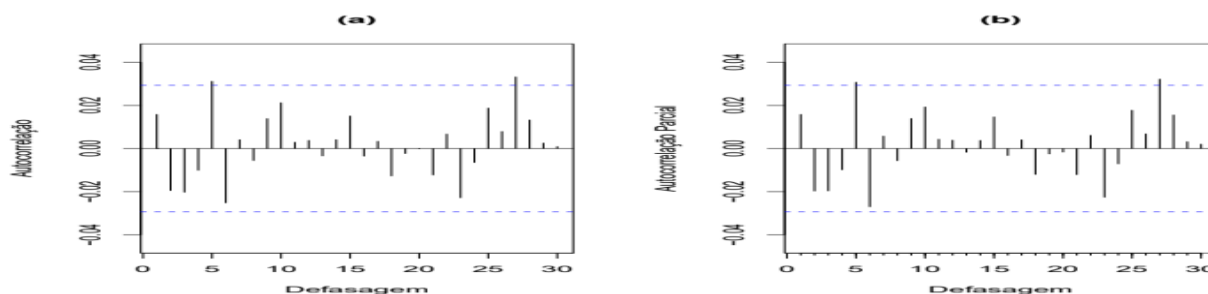


Figura 76: (a)FAC e (b)FACP dos Retornos da ITSA4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018

Na Tab. 71 apresentam-se os resultados do AIC e BIC dos modelos escolhidos, de acordo com o AIC e de acordo com o BIC. Convém salientar que o $ARMA(0,0)$ não considera nem autoregressão e nem médias móveis e, na verdade, representa um modelo puramente aleatório, então não faz sentido utilizá-lo.

Tabela 71 - Critérios de Informação dos retornos da PETR4

ARMA(p,q)	AIC	AICc	BIC	ARMA(p,q)	AIC	AICc	BIC
0,0	-19705,90	-19705,9	-19693,10	3,0	-19704,49	-19704,47	-19672,48
0,1	-19705,06	-19705,06	-19685,86	3,1	-19702,47	-19702,45	-19664,06
0,2	-19704,69	-19704,68	-19679,08	3,2	-19702,59	-19702,56	-19657,78
0,3	-19704,34	-19704,33	-19672,33	3,3	-19700,57	-19700,54	-19649,36
0,4	-19702,98	-19702,96	-19664,57	3,4	-19704,33	-19704,29	-19646,72
0,5	-19705,48	-19705,45	-19660,67	3,5	-19702,18	-19702,13	-19638,16
1,0	-19705,02	-19705,01	-19685,82	4,0	-19702,92	-19702,9	-19664,51
1,1	-19703,04	-19703,03	-19677,44	4,1	-19705,93	-19705,91	-19661,12
1,2	-19703,68	-19703,67	-19671,68	4,2	-19706,60	-19706,57	-19655,39
1,3	-19702,36	-19702,34	-19663,95	4,3	-19704,5	-19704,46	-19646,89
1,4	-19705,96	-19705,94	-19661,15	4,4	-19699,32	-19699,28	-19635,31
1,5	-19706,16	-19706,13	-19654,95	4,5	-19700,54	-19700,48	-19630,13
2,0	-19704,76	-19704,75	-19679,15	5,0	-19705,15	-19705,12	-19660,34
2,1	-19703,79	-19703,78	-19671,79	5,1	-19706,25	-19706,22	-19655,04

2,2	-19704,5	-19704,48	-19666,1	5,2	-19703,68	-19703,64	-19646,07
2,3	-19701,73	-19701,71	-19656,92	5,3	-19702,67	-19702,62	-19638,66
2,4	-19706,35	-19706,32	-19655,14	5,4	-19700,54	-19700,48	-19630,13
2,5	-19703,61	-19703,57	-19645,99	5,5	-19705,96	-19705,89	-19629,14

Na sequência, foram obtidos os resíduos dos referidos modelos. E, a partir destes, verificou-se se atendiam as seguintes propriedades: independência dos resíduos e dependência dos resíduos quadráticos. Também foi verificado se possuíam propriedades desejadas como: normalidade e heteroscedasticidade. A Tab. 72 apresenta os resultados dos testes, obtidos nesta etapa da análise.

Tabela 72 - Propriedades dos resíduos dos modelos ARMA selecionados dos retornos da PETR4, entre 02-01-2001 e 28-12-2018 (período de ajuste)

ARMA (p,q)	Testes (p-valor)			
	Ljung-Box (independência)*	Jarque-Bera (normalidade)	ARCH (homoscedasticidade)	McLeod-Li (heteroscedasticidade)*
(4,2)	0,998	$<2.2 \times 10^{-16}$	$<2.2 \times 10^{-16}$	$<2.2 \times 10^{-16}$
(2,4)	0,998	$<2.2 \times 10^{-16}$	$<2.2 \times 10^{-16}$	$<2.2 \times 10^{-16}$
(0,1)	0,406	$<2.2 \times 10^{-16}$	$<2.2 \times 10^{-16}$	$<2.2 \times 10^{-16}$
(1,0)	0,403	$<2.2 \times 10^{-16}$	$<2.2 \times 10^{-16}$	$<2.2 \times 10^{-16}$

Obs.: *Para lag=15

Na Tab. 72 percebeu-se que os resíduos satisfazem a propriedade de serem independentes conforme os resultados dos testes de Ljung-Box, por não terem sido encontradas evidências de autocorrelação. O teste de Jarque-Bera encontrou evidências de que a distribuição dos resíduos não é a distribuição Normal. O teste ARCH e o teste de McLeod Li encontraram evidências de que os resíduos possuem heteroscedasticidade.

APÊNDICE K

a) ST simuladas dos retornos (modelo 1)

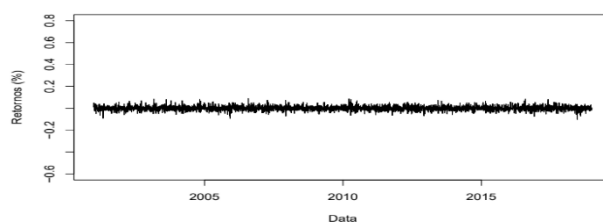


Figura 77: Retornos ST simulada sem log modelo 1, versão 1 (períodos de treino e validação)

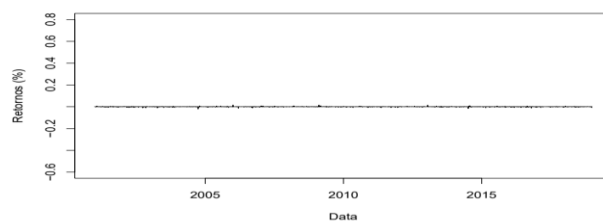


Figura 78: Retornos ST simulada sem log modelo 1, versão 2 (períodos de treino e validação)

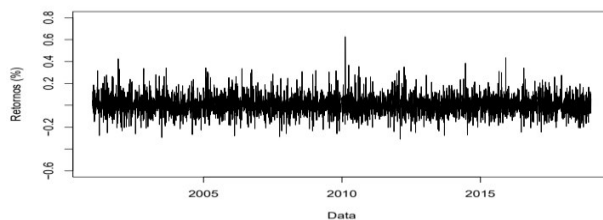


Figura 79: Retornos ST simulada sem log modelo 1, versão 3 (períodos de treino e validação)

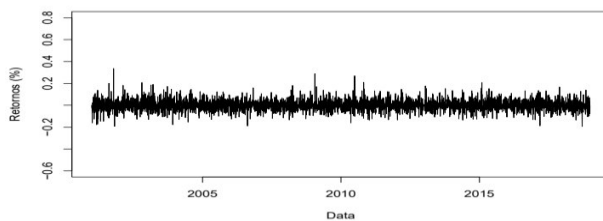


Figura 80: Retornos ST simulada sem log modelo 1, versão 4 (períodos de treino e validação)

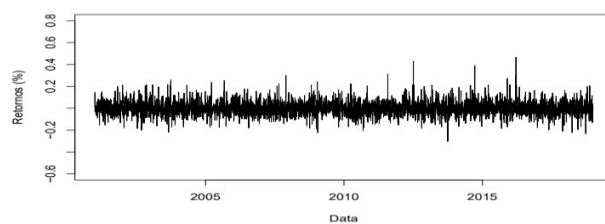


Figura 81: Retornos ST simulada sem log modelo 1, versão 5 (períodos de treino e validação)

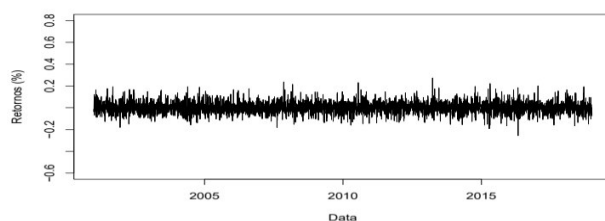


Figura 82: Retornos ST simulada sem log modelo 1, versão 6 (períodos de treino e validação)

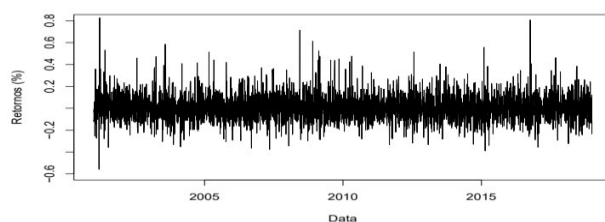


Figura 83: Retornos ST simulada sem log modelo 1, versão 7 (períodos de treino e validação)

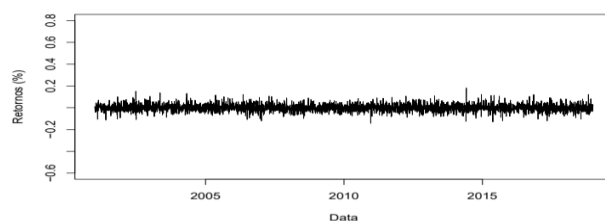


Figura 84: Retornos ST simulada sem log modelo 1, versão 8 (períodos de treino e validação)

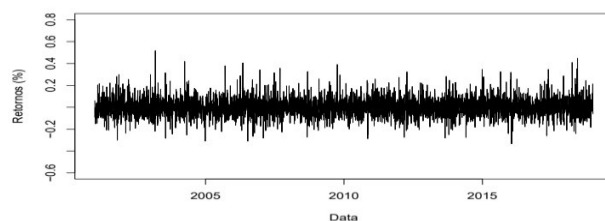


Figura 85: Retornos ST simulada sem log modelo 1, versão 9 (períodos de treino e validação)

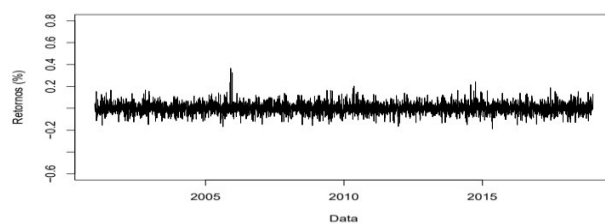


Figura 86: Retornos ST simulada sem log modelo 1, versão 10 (períodos de treino e validação)

b) ST simuladas dos retornos (modelo 2)

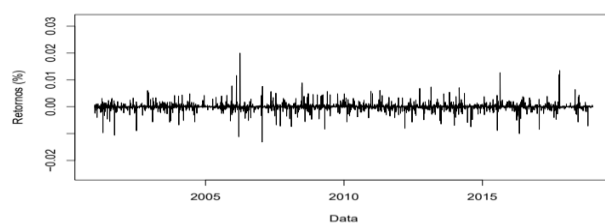


Figura 87: Retornos ST simulada sem log modelo 2, versão 1 (períodos de treino e validação)

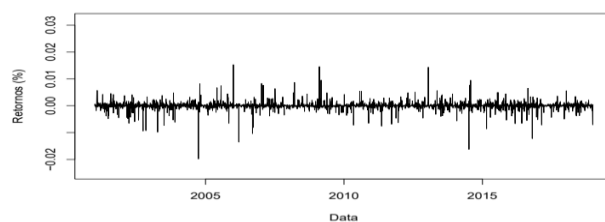


Figura 88: Retornos ST simulada sem log modelo 2, versão 2 (períodos de treino e validação)

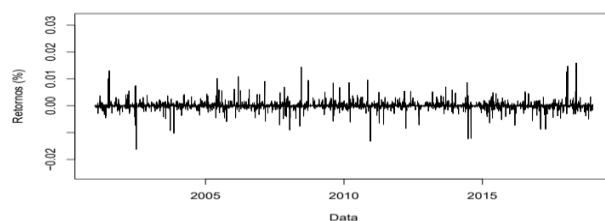


Figura 89: Retornos ST simulada sem log modelo 2, versão 3 (períodos de treino e validação)

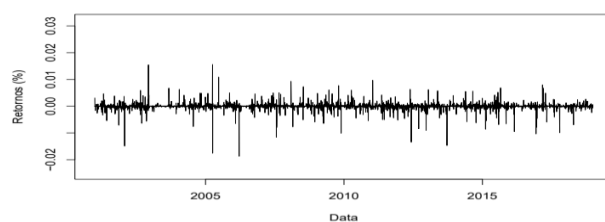


Figura 90: Retornos ST simulada sem log modelo 2, versão 4 (períodos de treino e validação)

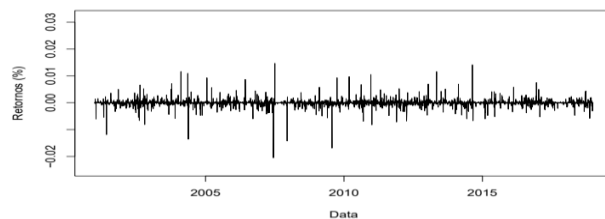


Figura 91: Retornos ST simulada sem log modelo 2, versão 5 (períodos de treino e validação)

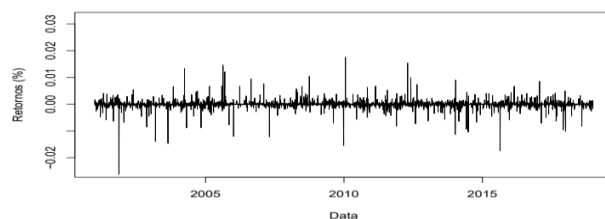


Figura 92: Retornos ST simulada sem log modelo 2, versão 6 (períodos de treino e validação)

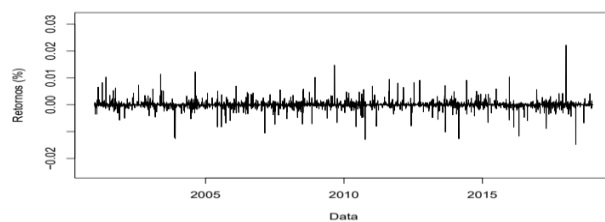


Figura 93: Retornos ST simulada sem log modelo 2, versão 7 (períodos de treino e validação)

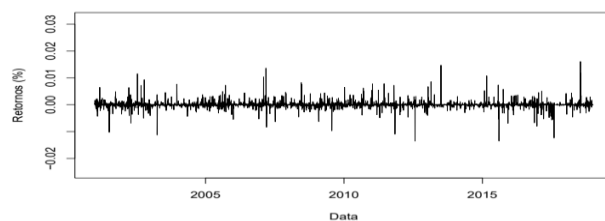


Figura 94: Retornos ST simulada sem log modelo 2, versão 8 (períodos de treino e validação)

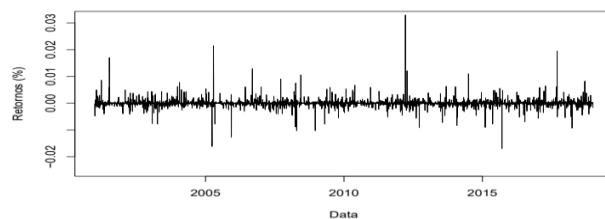


Figura 95: Retornos ST simulada sem log modelo 2, versão 9 (períodos de treino e validação)

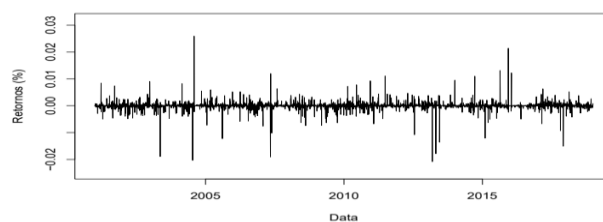


Figura 96: Retornos ST simulada sem log modelo 2, versão 10 (períodos de treino e validação)

c) Resultados das ST simuladas (modelo 1) para análise descritiva

Técnica	Modelo	MAEteste	RMSEteste	MdAEteste	Versão
ARIMA-ESN	1	0,001770597	0,001771524	0,001766733	1
ARIMA-ESN	1	0,000101652	0,000117334	0,000074709	2
ARIMA-ESN	1	0,006752404	0,006765859	0,006850311	3
ARIMA-ESN	1	0,000947740	0,001003884	0,000912884	4
ARIMA-ESN	1	0,003331753	0,003331940	0,003337476	5
ARIMA-ESN	1	0,001758496	0,003726542	0,001104353	6
ARIMA-ESN	1	0,009667556	0,009669364	0,009642162	7
ARIMA-ESN	1	0,000807658	0,000808438	0,000813786	8
ARIMA-ESN	1	0,004870672	0,004911562	0,004765055	9
ARIMA-ESN	1	0,002012147	0,002012478	0,001986728	10
ARIMA-EGARCH	1	0,000040341	0,000040566	0,000041142	1
ARIMA-EGARCH	1	0,000006644	0,000008730	0,000006630	2
ARIMA-EGARCH	1	0,000156989	0,000157141	0,000158188	3
ARIMA-EGARCH	1	0,000007190	0,000009541	0,000007007	4
ARIMA-EGARCH	1	0,000171132	0,000171270	0,000172338	5
ARIMA-EGARCH	1	0,000118208	0,000118402	0,000119444	6
ARIMA-EGARCH	1	0,000244863	0,000248140	0,000243542	7
ARIMA-EGARCH	1	0,000039503	0,000039726	0,000040343	8
ARIMA-EGARCH	1	0,000197534	0,000197666	0,000198607	9
ARIMA-EGARCH	1	0,000048717	0,000050266	0,000049259	10
ESN	1	0,000703959	0,000726061	0,000699405	1
ESN	1	0,000067027	0,000141659	0,000054180	2
ESN	1	0,001097885	0,001376472	0,001035045	3
ESN	1	0,000296496	0,000391213	0,000251518	4
ESN	1	0,000622824	0,000720924	0,000602118	5
ESN	1	0,000220646	0,000415049	0,000180426	6
ESN	1	0,000795013	0,000804363	0,000795757	7
ESN	1	0,000033392	0,000191483	0,000015286	8
ESN	1	0,000274439	0,000581545	0,000232425	9
ESN	1	0,000388375	0,000433956	0,000385257	10

d) Resultados das ST simuladas (modelo 2) para análise descritiva

Tabela 73: Resultados das métricas de erros por técnica (modelo 2), das ST simuladas

Técnica	Modelo	MAEteste	RMSEteste	MdAEteste	Versão
ARIMA-ESN	2	0,000015992	0,000039661	0,000009704	1
ARIMA-ESN	2	0,000016387	0,000040005	0,000009998	2
ARIMA-ESN	2	0,000013941	0,000036353	0,000008178	3
ARIMA-ESN	2	0,000014077	0,000036425	0,000008271	4
ARIMA-ESN	2	0,000014298	0,000038919	0,000008329	5
ARIMA-ESN	2	0,000015857	0,000039766	0,000009469	6
ARIMA-ESN	2	0,000016245	0,000039929	0,000009860	7
ARIMA-ESN	2	0,000016652	0,000040149	0,000010187	8
ARIMA-ESN	2	0,000015924	0,000039790	0,000009537	9
ARIMA-ESN	2	0,000015855	0,000039835	0,000009441	10
ARIMA-EGARCH	2	0,000003357	0,000007647	0,000002157	1
ARIMA-EGARCH	2	0,000003350	0,000007644	0,000002154	2
ARIMA-EGARCH	2	0,000003343	0,000007641	0,000002145	3
ARIMA-EGARCH	2	0,000003045	0,000007515	0,000001846	4
ARIMA-EGARCH	2	0,000003126	0,000007549	0,000001927	5
ARIMA-EGARCH	2	0,000002734	0,000007391	0,000001528	6
ARIMA-EGARCH	2	0,000003357	0,000007647	0,000002157	7
ARIMA-EGARCH	2	0,000002795	0,000007415	0,000001588	8
ARIMA-EGARCH	2	0,000004527	0,000007507	0,000004351	9
ARIMA-EGARCH	2	0,000003200	0,000007580	0,000002001	10
ESN	2	0,000014633	0,000039123	0,000008278	1
ESN	2	0,000010773	0,000037413	0,000004568	2
ESN	2	0,000019451	0,000038185	0,000017488	3
ESN	2	0,000025089	0,000044996	0,000018576	4
ESN	2	0,000014233	0,000037755	0,000008272	5
ESN	2	0,000019569	0,000041342	0,000013195	6
ESN	2	0,000014224	0,000039777	0,000007617	7
ESN	2	0,000025245	0,000040665	0,000024146	8
ESN	2	0,000015133	0,000040161	0,000008594	9
ESN	2	0,000035967	0,000051706	0,000029474	10

e) Tabela resumo das medidas estatísticas das ST simuladas com log (modelo 1)

Tabela 74: Medidas resumo das dez ST simuladas com log (modelo 1), das ST simuladas

Versão	Mínimo (R\$)	Média (R\$)	Mediana (R\$)	Máximo (R\$)	Desvio Padrão	Coef. de Assimetria	Coef. de Curtose
1	-0,2149575	-0,0002656	-0,0002185	0,2436670	0,04404393	0,006427145	1,409456
2	-0,1080525	-0,0001138	-0,0003955	0,0868132	0,01952394	0,023335880	1,621921
3	-0,3717640	-0,0010300	-0,0026580	0,4864810	0,08212442	0,064842940	1,914953
4	-0,2165278	-0,0007859	-0,0006865	0,2898416	0,04627508	0,059327780	2,126966
5	-0,3621853	-0,0010787	-0,0009119	0,3836250	0,06115102	0,123715900	2,386636
6	-0,2961128	-0,0006819	-0,0009839	0,2412913	0,04943527	-0,003789464	1,698729
7	-0,8170870	-0,0019640	-0,0015170	0,6027430	0,10951260	-0,027998710	2,563228
8	-0,1550075	0,0002396	0,0002237	0,1663453	0,02986304	-0,014685470	1,948668
9	-0,4072960	-0,0025030	-0,0013310	0,4169490	0,08180657	-0,048494120	1,920595
10	-0,2103760	-0,0007148	-0,0002715	0,3117019	0,04532077	0,102440900	2,253238

f) Tabela resumo das medidas estatísticas das ST simuladas sem log (modelo 1)

Tabela 75: Medidas resumo das dez ST simuladas sem log (modelo 2), das ST simuladas

Versão	Mínimo (R\$)	Média (R\$)	Mediana (R\$)	Máximo (R\$)	Desvio Padrão	Coef. de Assimetria	Coef. de Curtose
1	-0,1934243	0,00070470	-0,0002185	0,2759194	0,04413819	0,234449	1,600474
2	-0,1024000	0,00007684	-0,0003954	0,0906900	0,01953526	0,1289996	1,614097
3	-0,3104830	0,00235400	-0,0026550	0,6265820	0,08299302	0,5589544	2,620243
4	-0,1946899	0,00028600	-0,0006863	0,3362157	0,04643947	0,3523812	2,555721
5	-0,3038466	0,00079700	-0,0009115	0,4675950	0,06165277	0,5395624	3,207216
6	-0,2562965	0,00054020	-0,0009834	0,2728918	0,04954708	0,2695573	1,786906
7	-0,5582840	0,00404900	-0,0015160	0,8271240	0,1110846	0,7217018	3,599525
8	-0,1435913	0,00068570	0,00022370	0,1809808	0,02989876	0,1622913	2,001064
9	-0,3345528	0,00084210	-0,0013303	0,5173256	0,08215838	0,4380672	2,362578
10	-0,1897205	0,00031400	-0,0002715	0,3657475	0,04552735	0,4046150	2,990360

g) Tabela resumo das medidas estatísticas dos erros quadráticos das ST simuladas (modelo 1)

Tabela 76: Medidas resumo dos erros quadráticos das dez ST simuladas sem log (modelo 1), das ST simuladas

Versão	Mínimo (R\$)	Média (R\$)	Mediana (R\$)	Máximo (R\$)	Desvio Padrão	Coef. de Assimetria	Coef. de Curtose
1	0,0000000	0,0019237	0,0005866	0,0777126	0,003681169	5,894226	69,53718
2	0,0000000	0,0003766	0,0001167	0,01,0700	0,000710594	4,877767	37,81315
3	0,0000000	0,0068289	0,0018171	0,3890334	0,014727600	7,590434	123,9273
4	0,0000000	0,0021399	0,0006095	0,1117396	0,004586092	7,928161	122,3892
5	0,0000000	0,0037839	0,0010397	0,2266247	0,008767727	9,581865	169,3932
6	0,0000000	0,0024348	0,0007090	0,0699030	0,004748726	4,779627	35,49477
7	0,0000000	0,0122336	0,0034999	0,6768774	0,028931570	9,286809	145,5448
8	0,0000000	0,0008843	0,0002445	0,0311600	0,001766424	5,281447	46,52955
9	0,0000000	0,0066851	0,0018973	0,2740489	0,014064720	6,326591	67,36348
10	0,0000000	0,0020595	0,0005948	0,1400532	0,004659833	11,06820	245,5767

h) Tabela resumo das medidas estatísticas das ST simuladas com log (modelo 2)

Tabela 77: Medidas resumo das dez ST simuladas com log (modelo 2), das ST simuladas

Versão	Mínimo (R\$)	Média (R\$)	Mediana (R\$)	Máximo (R\$)	Desvio Padrão	Coef. de Assimetria	Coef. de Curtose
1	-0,01326	-0,000012580	0,000000276	0,01978	0,001198254	0,7040688	46,01789
2	-0,02001	0,000002560	0,000002460	0,01515	0,001220796	-1,3275170	56,16574
3	-0,01639	0,000000164	0,000013940	0,01582	0,001278268	0,6614881	43,32389
4	-0,01890	-0,000032000	-0,000000791	0,01545	0,001260623	-2,1742230	56,65466
5	-0,02073	-0,000017470	-0,000001098	0,01457	0,001199483	-1,1416500	63,82362
6	-0,02659	-0,000017190	-0,000003263	0,01744	0,001378735	-2,1722500	73,37009
7	-0,01488	0,000000284	0,000000185	0,02196	0,001305471	0,6552351	51,55511
8	-0,01366	0,000024530	-0,000001847	0,01594	0,001201602	0,9639400	45,63927
9	-0,02290	-0,000004460	-0,000000920	0,03243	0,001356011	0,9023581	89,37362
10	-0,02103	-0,000008500	0,000000010	0,02558	0,001420355	-1,1502540	93,15268

i) Tabela resumo das medidas estatísticas das ST simuladas sem log (modelo 2)

Tabela 78: Medidas resumo das dez ST simuladas sem log (modelo 2), das ST simuladas

Versão	Mínimo (R\$)	Média (R\$)	Mediana (R\$)	Máximo (R\$)	Desvio Padrão	Coef. de Assimetria	Coef. de Curtose
1	-0,01317	-0,00001186	0,000002760	0,01998	0,001198768	0,7898328	46,62895
2	-0,01981	0,000003204	0,000002560	0,01527	0,001219840	-1,2244060	55,69429
3	-0,01626	0,000014750	0,000000164	0,01594	0,001278854	0,7475234	43,42249
4	-0,01872	-0,00003120	-0,000000791	0,01557	0,001258889	-2,0723200	56,15118
5	-0,02051	-0,00001675	-0,000001098	0,01468	0,001198674	-1,0259670	63,05829
6	-0,02624	-0,00001624	-0,000003263	0,01759	0,001376703	-2,0267240	72,10669
7	-0,01477	0,000001136	0,000000185	0,02220	0,001306065	0,7596019	52,13424
8	-0,01356	0,000025260	-0,000001847	0,01607	0,001202351	1,0481130	45,80000
9	-0,02264	-0,000003540	-0,000000920	0,03297	0,001356901	1,0878400	91,29616
10	-0,02081	-0,000007492	0,000000010	0,02591	0,001419263	-0,9497081	93,49175

j) Tabela resumo das medidas estatísticas dos erros quadráticos das ST simuladas (modelo 2)

Tabela 79: Medidas resumo dos erros quadráticos das dez ST simuladas sem log (modelo 2), das ST simuladas

Versão	Mínimo (R\$)	Média (R\$)	Mediana (R\$)	Máximo (R\$)	Desvio Padrão	Coef. de Assimetria	Coef. de Curtose
1	0,000000	0,00001429	0,000000160	0,0003991	0,00001000037	20,89143	651,0341
2	0,000000	0,00001488	0,000000201	0,0003923	0,00001129992	19,64748	505,392
3	0,000000	0,00001630	0,000000182	0,0002624	0,00001098933	14,44706	257,9681
4	0,000000	0,00001574	0,000000200	0,0003481	0,00001193746	17,38096	375,3501
5	0,000000	0,00001427	0,000000160	0,0004200	0,00001155300	20,75785	564,8016
6	0,000000	0,00001887	0,000000185	0,0006893	0,00001631359	23,85513	806,5533
7	0,000000	0,00001701	0,000000160	0,0005135	0,00001273099	20,93224	662,119
8	0,000000	0,00001446	0,000000174	0,0002583	0,00001000313	14,82625	270,1795
9	0,000000	0,00001948	0,000000203	0,0001086	0,00002126991	35,34288	1609,735
10	0,000000	0,00001998	0,000000178	0,0006766	0,00001965209	21,20429	542,3303

k) Assimetria dos erros quadráticos das ST simuladas (modelo 1)

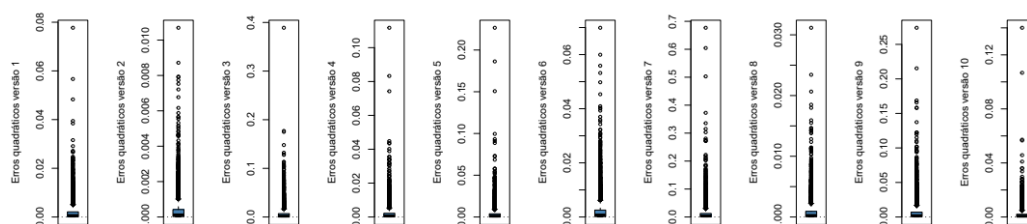


Figura 97: Boxplot dos erros quadráticos das dez ST simuladas (modelo 1)

l) Assimetria dos retornos sem log das ST simuladas (modelo 1)

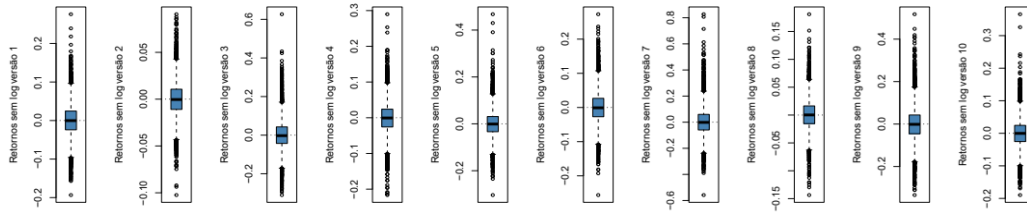


Figura 98: Boxplot dos retornos sem log das dez ST simuladas (modelo 1)

m) Assimetria dos retornos com log das ST simuladas (modelo 1)

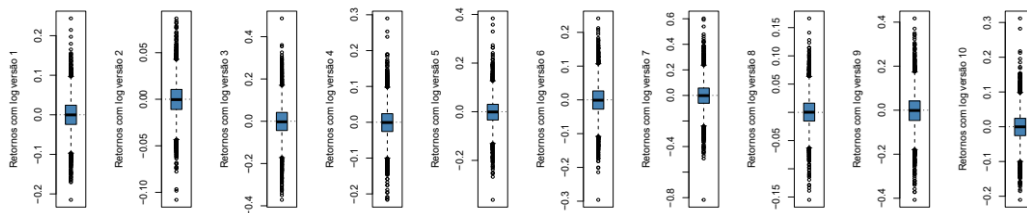


Figura 99: Boxplot dos retornos com log das dez ST simuladas (modelo 1)

n) Assimetria dos erros quadráticos das ST simuladas (modelo 2)

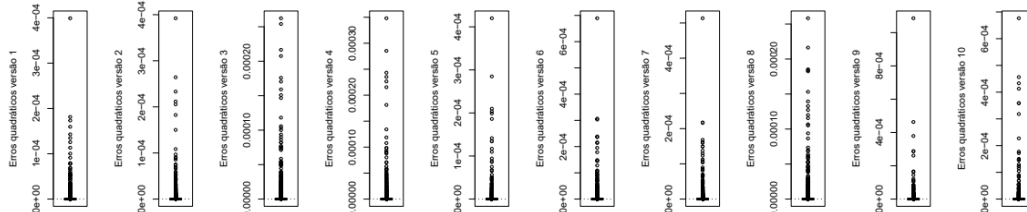


Figura 100: Boxplot dos erros quadráticos das dez ST simuladas (modelo 2)

o) Assimetria dos retornos sem log das ST simuladas (modelo 2)

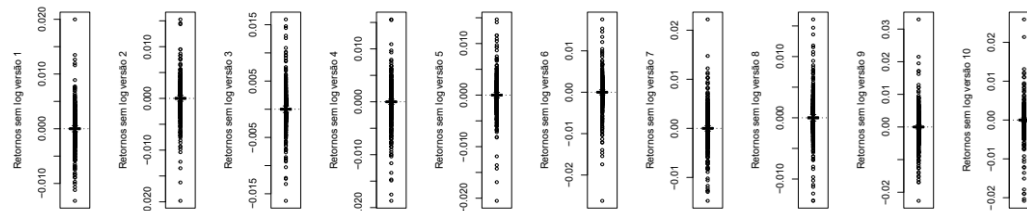


Figura 101: Boxplot dos retornos sem log das dez ST simuladas (modelo 2)

p) Assimetria dos retornos com log das ST simuladas (modelo 2)

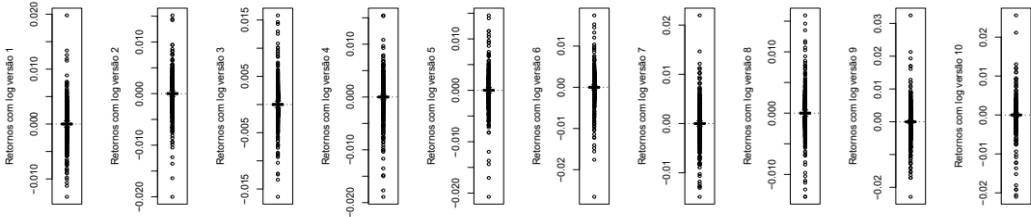


Figura 102: Boxplot dos retornos com log das dez ST simuladas (modelo 2)

APÊNDICE L

As bibliotecas utilizadas no R Studio são: *GA* (Scrucca, 2017), para executar o Algoritmo Genético; *PerformanceAnalytics* (Peterson *et al.*, 2020), para calcular assimetria, curtose e outras medidas estatísticas; *ggplot2* (Wickham, 2016) e *gridExtra* (Auguie; Antonov, 2022) para plotar gráficos; *tseries* (Trapletti, Hornik, Lebaron, 2023) para cálculo e modelagem de ST e para inferência da normalidade pelo teste de Jarque-Bera; *urca* (Pfaff, 2008) para calcular o teste ADF; *FinTS* (Graves; Boshnakov, 2023) para inferência do teste Arch; *forecast* (Hyndman *et al.*, 2023) para verificar a estacionariedade, para gerar os gráficos das Funções de Autocorrelação e Autocorrelação Parcial e para gerar os modelos ARIMA; *rugarch* (Ghalanos, 2023) para executar o GARCH e para realizar as previsões com o GARCH e o EGARCH; *fGarch* (Wuertz, 2023) para gerar números aleatórios com GED; *trend* (Pohlert, 2023) para realizar os testes de Cox-Stuart, Mann-Kendall e Wald-Wolfowitz.

Os cálculos dos retornos, log retornos e da variância dos retornos são executados no Calc do Libre Office, versão 7.3.2.2¹⁰.

A seguir apresentam-se os comandos, com as respectivas bibliotecas da linguagem R, utilizados neste trabalho e são feitos comentários a respeito.

a) Análise exploratória dos dados

Na análise estatística descritiva, para cálculo do coeficiente de assimetria, utiliza-se o comando *skewness*, da biblioteca *PerformanceAnalytics*, com o argumento “*moment*”, e para cálculo do coeficiente de curtose, o comando *kurtosis*, da mesma biblioteca, com o argumento “*excess*”.

O gráfico de assimetria é obtido com comando *boxplot*, da biblioteca *graphics*. O gráfico para verificar se distribuição dos dados se encaixa à Normal é obtido com comando *qqPlot*, da biblioteca *car*.

b) Modelagem da ESN

Para otimização dos hiperparâmetros da ESN utiliza-se o comando *ga*, da biblioteca *GA*, com os seguintes argumentos:

- *type* = “*binary*”, tipo binário;
- *nBits* = 55, tamanho cromossômico;
- *popSize* = 10, número de indivíduos da população;
- *population* = *gabin_Population*, população para cromossomos binários;
- *pcrossover* = 0.8, cruzamento populacional de 80%;
- *crossover* = *gabin_spCrossover*, cruzamento entre cromossomos binários;

10 Disponível em: <https://libreoffice.com.br/libreoffice-download-brasil/>

- *selection = gabin_tourSelection*, gera uma nova população de indivíduos a partir da população atual probabilisticamente, de acordo com as aptidões individuais;

- *elitism = 1*, o melhor indivíduo apenas;
- *keepBest = T*, mantém o melhor indivíduo;
- *mutation = gabin_raMutation*, mutação populacional;
- *pmutation=0.1*, mutação de 10%;
- *maxiter= 10000*, limite máximo de épocas;
- *run=3500*, máximo de épocas não melhoradas para o algoritmo parar.

Na distribuição Normal utiliza-se o comando *rnorm*, da própria linguagem R, com os argumentos *mean=0* e *sd=1*, para gerar os pesos aleatórios, tanto de W^{in} quanto de W . Na distribuição Uniforme utiliza-se o comando *runif*, da própria linguagem, com os argumentos *min=-1* e *max=1*, para gerar os pesos aleatórios, tanto de W^{in} quanto de W .

Usa-se o comando *rollapply*, da biblioteca *zoo*, com os parâmetros *width = 21*, *FUN = sd* e *align = "right"* para calcular-se a volatilidade diária a partir dos retornos.

c) Modelagem do ARMA(p,q)-EGARCH(m,n) para previsão da volatilidade

Para verificação da estacionariedade da ST dos log retornos do ajuste utiliza-se o comando *ndiffs*, da biblioteca *forecast*, com argumentos *adf* (teste de Dickey-Fuller Aumentado) (Dickey; Fuller, 1979), *pp* (teste de Phillips-Perron) (Phillips; Perron, 1988) e *kpss* (teste de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin) (Kwiatkowski et al., 1992).

A presença, ou não, de tendência e de constante avalia-se pelo teste ADF, utilizando-se o comando *ur.df*, da biblioteca *urca*.

Como o teste ADF não havia apresentado bons resultados na modelagem ARMA(p,q)-GARCH(m,n), usaram-se os argumentos *type = "level"* e *type = "trend"* para verificação de constante e tendência com o comando *ndiffs*, o que resultou em uma ST sem tendência e com constante.

Para os gráficos das Funções de Autocorrelação e Autocorrelação Parcial utilizam-se, respectivamente, os comandos *Acf* e *Pacf*, ambos da biblioteca *forecast*.

Aplica-se o comando *Arima*, da biblioteca *forecast*, para obter os critérios de informação de Akaike – AIC, de Akaike corrigido – AICc e Bayesiano – BIC. Os argumentos utilizados no comando *Arima* são:

- *include-mean = TRUE*, *include.drift = FALSE*, *include.constant = TRUE*, *method = "ML"*.

Com os modelos gerados pelo *Arima*, calculam-se os resíduos: diferença entre os log retornos da ST e os previstos pelo ARMA(p,q), com o comando *residuals* da R.

Como é desejado que os resíduos possuam uma distribuição de probabilidade Normal e que haja evidência de heteroscedasticidade, foram utilizados o comando *jarque.bera.test*, da biblioteca *tseries*, e *ArchTest*, da biblioteca *FinTS*, respectivamente.

Após a determinação das ordens m e n do modelo EGARCH, aplica-se o comando *ugarchfit* aos resíduos quadráticos ARMA(p,q), com as ordens especificadas anteriormente, sendo obtidos os critérios de informação AIC e BIC. Os parâmetros utilizados pelo comando *ugarchfit*, da biblioteca *rugarch*, para a distribuição t de Student são:

- *variance.model=list(model="eGARCH", garchOrder=c(p,q),*
mean.model=list(armaOrder=c(m,n), include.mean=TRUE, arfima=FALSE),
distribution.model="std".

O parâmetro *distribution.model* foi alterado para “ged” quando se utilizou a distribuição de probabilidade GED.

Encontrados os dois modelos mais parcimoniosos de acordo com AIC e BIC, o passo seguinte é calcular os resíduos padronizados de cada modelo com o comando *residuals* da R, parâmetros *standardize=TRUE*.

Caso, nas análises iniciais, se observe um comportamento assimétrico dos resíduos, algumas variações do GARCH(m,n) podem ser utilizadas para capturar melhor essa assimetria. Basta alterar os modelos no comando *ugarchfit* para: “eGARCH”, “csGARCH”, “gjrGARCH”, no entanto, para o TGARCH, é necessário utilizar *model = “fGARCH”, submodel = “TGARCH”*.

Após aplicar-se o comando *ugarchfit*, com o argumento “eGARCH” (por exemplo), aos resíduos quadráticos do ARMA(p,q), são obtidos os critérios de informação AIC e BIC. Então são escolhidos os mais parcimoniosos e são realizados os testes.

As variâncias dos preços *intraday*, a cada trinta minutos, são calculadas pelo comando *VARA* no Calc do Libre Office.

As previsões para o período de validação (entre 02-01-2019 e 30-06-2023) dos modelos ARMA(p,q)-EGARCH(m,n) mais parcimoniosos pelo AIC e pelo BIC que evidenciam as propriedades obrigatórias são realizadas com o comando *ugarchforecast*, da biblioteca *rugarch*, a partir dos modelos gerados pelo *ugarchfit*.

A seguir são calculados as medidas de erro. Para calcular-se o MAE, utilizam-se os comando *abs* (a fim de obter o módulo dos valores) e *mean* para calcular a média. Para calcular-se o RMSE, são utilizados os mesmos comandos do MAE, além de *^* (para elevar ao quadrado) e *sqrt* (para extrair a raiz quadrada). Para calcular-se o MdAE, utiliza-se também o *abs* além do comando *median*.

d) Modelagem híbrida proposta

Para encontrarem-se os parâmetros das distribuições t de Student e GED, utiliza-se o comando *fitdist*, da biblioteca *rugarch*, com argumento *distribution = "std"* ou *"ged"*. Na distribuição t de Student utiliza-se o comando *rt*, da própria linguagem R, com o argumento *df*, que indica os graus de liberdade para gerar os pesos aleatórios tanto de W^{in} quanto de W . Na GED utiliza-se o comando *rged*, da biblioteca *fGarch*, com os argumentos *mean* (média), *sd* (desvio padrão) e *nu* (densidade), obtidos do comando *fitdist*, para gerar os pesos aleatórios tanto de W^{in} quanto de W .

e) Séries temporais simuladas

Para o modelo 1, geram-se sementes aleatórias com o comando *rnorm*. Gera-se o modelo ARMA(7,0), com 4453 valores, pelo comando *arima.sim*, da própria linguagem, da seguinte forma:

- *arima.sim(list(order=c(7,0,0), ar=c(0.0152,-0.0328,-0.0556,-0.0086,-0.0277,-0.0373,-0.0608)), n = 4453, rand.gen = function(n, ...) sqrt(abs(semente_aleat[i])) * rged(n,mean= -0.0002314969, sd=0.0219155503, nu=1.1816507348)).*

Os parâmetros da GED randômica (*rged*) são obtidos com o comando *fitdist*, da biblioteca *fGarch*. Os coeficientes do ARMA(7,0) são obtidos a partir do comando *Arima*, usado anteriormente. Em seguida, especifica-se o modelo EGARCH pelo comando *CreateSpec* do *MSGarch*, da seguinte forma:

- *CreateSpec(variance.spec = list(model=c("eGARCH")), distribution.spec = list(distribution = c("ged"))).*

E, logo, usa-se o comando *garchSim*, da biblioteca *fGarch*, para gerar os valores simulados do EGARCH. Então os valores simulados do ARMA(7,0) e do EGARCH são somados.

A seguir verificam-se as propriedades e, se confirmadas, usa-se o comando *FitML*, da biblioteca *MSGARCH*, com a especificação citada acima, para gerar o modelo ARMA(7,0)-MSEGARCH a partir os resíduos quadráticos. Com este modelo os resíduos padronizados são calculados da seguinte forma:

- *residuos = abs(ITS44_ajuste) - Volatility(modelo ARMA(7,0)-MSEGARCH)* e os *residuos_padronizados = residuos/Volatility(modelo ARMA(7,0)-MSEGARCH).*

Para o modelo 2, h_0 é obtido da segunda variância prevista do ajuste pelo ARMA-EGARCH com o comando *fitted*, da própria linguagem R.

Os coeficientes ω , α_t , β_t e γ_t são obtidos a partir do comando *ugarchfit* do *EGarch*(1,1), usado anteriormente. Geram-se, então, valores de erros aleatórios com o comando:

- `rged(5000 x 200, mean=0, sd=1, nu=3.140045x10-1)`.

Os parâmetros média, desvio padrão e densidade são obtidos com o comando *fitdist*, da biblioteca *fGarch*.

Para previsão é utilizado o comando *predict*, da própria linguagem, com os parâmetros *nahead* = 1118 e *do.return.draw* = F. Então, usa-se `exp(Previsao_Armapq_MseGarchmnGED$vol)-1`, para calcular-se a volatilidade sem log e, a partir daí, os erros RMSE, MAE e MdAE. No entanto, como alguns erros acabaram extrapolando muito (algumas ST resultaram erros na faixa de 10³⁰, por exemplo, possivelmente devido ao uso do *FitML*) foi necessário, então, aplicar-se, após o *auto.arima*, o EGARCH como explicado na subseção 3.3.2.

f) Resultados obtidos nas séries temporais simuladas

Os resultados das métricas de erro obtidos tanto pelo modelo 1 quanto pelo modelo 2 foram comparados pelo teste de Friedman, comando *friedman.test*, da própria linguagem R. A seguir utiliza-se o teste de Wilcoxon, comando *pairwise.wilcox.test(dados\$Métricas, dados\$Técnicas, paired=T)*, para análise par a par das capacidades preditivas obtidas pelas três técnicas de modelagem.

