MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

Tatiane Roldão Bastos

FAG-MACBETH: Modelo baseado na Teoria Fuzzy e Algoritmo Genético para a resolução da inconsistência cardinal em processos de decisão

Rio Grande
Dezembro de 2023

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

FAG-MACBETH: Modelo baseado na Teoria Fuzzy e Algoritmo Genético para a resolução da inconsistência cardinal em processos de decisão

Tatiane Roldão Bastos

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutora.
Área de concentração: Modelagem Computacional.

Orientador: Prof. Dr. André Andrade Longaray.

Rio Grande
Dezembro de 2023

Tatiane Roldao Bastos

“FAG-MACBETH: MODELO BASEADO NA TEORIA FUZZY E ALGORITMO GENÉTICO PARA A RESOLUÇÃO DA INCONSISTÊNCIA CARDINAL EM PROCESSOS DE DECISÃO”

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande - FURG, como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutora. Área de concentração: Modelagem Computacional.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br
ANDRE ANDRADE LONGARAY
Data: 12/12/2023 20:12:08-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. André Andrade Longaray (Orientador – FURG)

Documento assinado digitalmente
gov.br
CATIA MARIA DOS SANTOS MACHADO
Data: 12/12/2023 21:12:15-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Catia Maria dos Santos Machado (FURG)

Documento assinado digitalmente
gov.br
ADEMAR DUTRA
Data: 12/12/2023 19:58:34-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Ademar Dutra (UNISUL)

Documento assinado digitalmente
ICP-Edu
Sandra Rolim Ensslin
Data: 12/12/2023 17:41:42-0300
CPF: ***.690.590-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Profa. Dra. Sandra Rolim Ensslin (UFSC)

Rio Grande - RS
2023

Ficha Catalográfica

B327f Bastos, Tatiane Roldão.
FAG-MACBETH: modelo baseado na Teoria Fuzzy e Algoritmo Genético para a resolução da inconsistência cardinal em processos de decisão / Tatiane Roldão Bastos. – 2023.
133 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Rio Grande/RS, 2023
Orientador: Dr. André Andrade Longaray.

1. FAG-MACBETH 2. Fuzzy-MACBETH 3. Escalas Cardinais 4. Sistema Fuzzy 5. Número Fuzzy 6. Algoritmos Genéticos I. Longaray, André Andrade II. Título.

CDU 004

Catalogação na Fonte: Bibliotecário José Paulo dos Santos CRB 10/2344

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE - FURG
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL
Av. Itália, km 8 s/nº - Campus Carreiros - CEP 96201-900 –Rio Grande/RS
E-mail: ppgmc@furg.br -Telefone: (53) 3293-5105

ATA DE DEFESA DE TESE

ATA Nº 10/2023

Ao décimo segundo dia do mês de dezembro de dois mil e vinte e três, por meio de videoconferência, realizou-se a 31ª sessão de defesa de tese do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional. A doutoranda **Tatiane Roldao Bastos** apresentou e defendeu a tese **"FAG-MACBETH: MODELO BASEADO NA TEORIA FUZZY E ALGORITMO GENÉTICO PARA A RESOLUÇÃO DA INCONSISTÊNCIA CARDINAL EM PROCESSOS DE DECISÃO"** como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutora em Modelagem Computacional. A sessão foi aberta às quatorze horas pelo Prof. Dr. André Andrade Longaray, orientador da tese e presidente da Comissão de Avaliação. A referida Comissão esteve integrada, além do presidente e orientador, pela Profa. Dra. Catia Maria dos Santos Machado (FURG), pelo Prof. Dr. Ademar Dutra (UNISUL) e pela Profa. Dra. Sandra Rolim Ensslin (UFSC). Após cada integrante da Banca ter arguido a doutoranda, e esta ter tido a oportunidade de responder a cada um, os examinadores atribuíram os seguintes conceitos ao trabalho:

Profa. Dra. Catia Maria dos Santos Machado: conceito A (excelente)

Prof. Dr. Ademar Dutra: conceito A (excelente)

Profa. Dra. Sandra Rolim Ensslin: conceito A (excelente)

Tendo sido a candidata Aprovada, sem alterações no texto, com conceito A (excelente), neste requisito parcial para a obtenção do grau de Doutora em Modelagem Computacional.

gov.br
Documento assinado digitalmente
CATIA MARIA DOS SANTOS MACHADO
Data: 12/12/2023 21:12:15-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Catia Maria dos Santos Machado
Membro Interno

gov.br
Documento assinado digitalmente
ADEMAR DUTRA
Data: 12/12/2023 19:58:34-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Ademar Dutra
Membro Externo

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Sandra Rolim Ensslin
Data: 12/12/2023 17:40:56-0300
CPF: ***.690.590-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Profa. Dra. Sandra Rolim Ensslin
Membro Externo

gov.br
Documento assinado digitalmente
ANDRE ANDRADE LONGARAY
Data: 12/12/2023 20:12:08-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. André Andrade Longaray
Orientador

Lista de Figuras

1 Desenho de pesquisa 10
2 Síntese dos métodos utilizados nos artigos do Portfólio Bibliográfico 13
3 Matriz de decisão do método MACBETH 20
4 Número Fuzzy triangular 23
5 Fluxograma da estrutura geral dos algoritmos genéticos 25
6 Consecução dos objetivos específicos da tese 100

Lista de Tabelas

1 Síntese dos trabalhos que apresentam a abordagem Fuzzy MACBETH . . . 14
2 Síntese dos métodos multicritério 18
3 Síntese dos artigos do Portfólio Bibliográfico 111
4 Síntese dos trabalhos que apresentam a abordagem Fuzzy MACBETH . . . 129

Resumo

O presente trabalho descreve os procedimentos de pesquisa para o desenvolvimento de uma escala de números Fuzzy triangulares baseada na escala semântica do método MACBETH, com o objetivo de permitir o tratamento matemático da incerteza e subjetividade presentes nos termos linguísticos utilizados pelo decisor para avaliar o problema decisório. Após o processo de elicitação com o decisor, no qual são feitas as comparações par a par dos elementos de avaliação, a matriz de decisão é fuzzificada com base na escala Fuzzy proposta. Obtendo-se a matriz de decisão fuzzificada, o processo de inferência é realizado utilizando-se o problema de programação linear F-LP-MACBETH proposto, resultando uma escala básica Fuzzy. Esta escala é posteriormente defuzzificada através do método do centróide, dando origem à escala básica *crisp*, que por fim é cardinalizada. A modelagem computacional foi realizada a fim de facilitar a aplicação do método proposto através do desenvolvimento de um sistema de apoio à decisão. Para isto, foi desenvolvido um algoritmo híbrido que combina a modelagem baseada em *soft computing* com um algoritmo evolucionário. Na presente pesquisa, foi utilizado um algoritmo genético no processo de otimização da função objetivo do problema de programação linear F-LP-MACBETH em matriz de decisão cardinalmente inconsistente. Desta forma, o algoritmo de busca gera soluções a partir dos operadores genéticos de cruzamento e mutação, a fim de chegar a uma solução cardinalmente consistente, alinhada às avaliações do decisor. Os resultados demonstram que o método FAG-MACBETH proposto é capaz de contornar o problema da inconsistência cardinal do método clássico, facilitando a tarefa do decisor e viabilizando sua aplicação em contextos de grande complexidade.

Palavras-chave: FAG-MACBETH; Fuzzy-MACBETH; Escalas Cardinais; Sistema Fuzzy; Número Fuzzy; Algoritmos Genéticos.

Abstract

The present work describes the research procedures for the development of a scale of triangular Fuzzy numbers based on the semantic scale of the MACBETH method, with the aim of allowing the mathematical treatment of the uncertainty and subjectivity present in the linguistic terms used by the decision maker to evaluate the decision-making problem. After the elicitation process with the decision maker, in which pairwise comparisons of the evaluation elements are made, the decision matrix is fuzzified based on the proposed Fuzzy scale. Obtaining the fuzzified decision matrix, the inference process is carried out using the proposed F-LP-MACBETH linear programming problem, resulting in a basic Fuzzy scale. This scale is subsequently defuzzified using the centroid method, giving rise to the basic *crisp* scale, which is finally cardinalized. Computational modeling was carried out in order to facilitate the application of the proposed method through the development of a decision support system. For this, a hybrid algorithm was developed that combines modeling based on *soft computing* with an evolutionary algorithm. In the present research, a genetic algorithm was used in the process of optimizing the objective function of the F-LP-MACBETH linear programming problem in a cardinally inconsistent decision matrix. In this way, the search algorithm generates solutions from the genetic operators of crossover and mutation, in order to arrive at a cardinally consistent solution, aligned with the decision maker's assessments. The results demonstrate that the proposed FGA-MACBETH method is capable of overcoming the cardinal inconsistency problem of the classical method, facilitating the decision-maker's task and enabling its application in highly complex contexts.

Key words: FGA-MACBETH; Fuzzy-MACBETH; Cardinal Scales; Fuzzy System; Fuzzy Number; Genetic Algorithms.

Sumário

1 Introdução **9**

2 Sustentação Teórica **10**
2.1 Desenho de pesquisa 10
2.2 Revisão sistemática da literatura 11
2.3 Hipótese de pesquisa 16

3 Objetivos **17**
3.1 Objetivo geral 17
3.2 Objetivos específicos 17

4 Materiais e métodos **17**
4.1 A metodologia MCDM/A 17
4.2 Método MACBETH 19
4.3 Teoria Fuzzy 22
4.4 Algoritmos Genéticos 24

5 Resultados **26**
5.1 Metaheurísticas para tomada de decisão multicritério: uma revisão sistemática da literatura e oportunidades de pesquisa 28
5.2 Fuzzy-MACBETH Hybrid Method: Mathematical Treatment of a Qualitative Scale Using the Fuzzy Theory 63
5.3 Applying a Genetic Algorithm to Implement the Fuzzy-MACBETH Method in Decision Processes 79

6 Conclusões **100**

Referências **102**

A Apêndice 1 **111**

B Apêndice 2 **129**

1 Introdução

As decisões fazem parte do cotidiano das pessoas, já que escolhas são feitas a todo momento. A maioria são rotineiras e intuitivas, realizadas sem a necessidade de qualquer análise. No entanto, em contextos complexos, com muitas variáveis envolvidas, permeados por subjetividade e com a presença de *trade-offs*, torna-se mais subjetiva a realização dos julgamentos. Conforme Bouyssou et al. (2000), quando a tarefa de decidir é complexa ou os impactos das decisões são relevantes, deve-se recorrer a alguma técnica de apoio à decisão, seja ela informal ou formal.

Dentre as técnicas formais para o apoio à tomada de decisão, destacam-se as metodologias multicritério. Embora seja, por vezes, mais conveniente se considerar apenas um objetivo, tomando-se a decisão com base em sua otimização sujeita a um conjunto de restrições, na maioria dos casos os múltiplos objetivos ou critérios que afetam o contexto devem ser considerados, já que a realidade por si só é multidimensional (BANA E COSTA, 1988).

Assim, os diversos fatores que compõem o problema de decisão devem ser modelados a partir de fatos, valores, conhecimento científico e julgamento humano, que considerados associadamente permitem uma visão mais ampla e um melhor entendimento sobre os impactos das ações no contexto de análise, sendo que muitas fórmulas podem ser utilizadas para combiná-los (BOUYSSOU et al., 2000). Dentre as diversas metodologias multicritério, a escolha do método se dá a partir de uma série de fatores, como os tipos de variáveis que compõem o problema, a natureza do problema de decisão e a compensação dos critérios.

Neste contexto, MCDM (*Multicriteria Decision Making*) e MCDA (*Multicriteria Decision Aid*) são dois paradigmas de decisão multicritério que, embora apresentem diferenças epistemológicas, compartilham o foco no apoio à decisão e compreendem importantes ferramentas para a estruturação e avaliação de decisões complexas (PéREZ-GLADISH; FERREIRA; ZOPOUNIDIS, 2020). Conforme Zak e Weglinski (2014), as técnicas da MCDM/A constituem procedimentos matemáticos e métodos computacionais avançados que apoiam os decisores na modelagem do problema decisório e na resolução de problemas de decisão.

Conforme Stabell (1987), os *Decision Support Systems* (DSS) permitem o desenvolvimento e a utilização de ferramentas computacionais para apoiar os gestores no seu papel de tomadores de decisão e sua utilização foi impulsionada pelo desenvolvimento das tecnologias de informação, como o computador pessoal e as redes de comunicação. Desta forma, considera-se que a informática viabiliza a codificação computacional de algoritmos complexos e a criação de aplicativos e *softwares*, capazes de operacionalizar os métodos multicritério de forma rápida e de fácil manuseio. Logo, métodos que antes não eram aplicados devido à grande complexidade, atualmente podem ser utilizados com o apoio dos DSS.

Neste contexto, surge a seguinte questão: Como tratar matematicamente a subjetividade inerente à escala semântica do método MACBETH, de forma que as incertezas do julgamento humano sejam contempladas na modelagem matemática da programação linear? Para isto, foi aplicada à escala qualitativa do método MACBETH, uma escala de número Fuzzy triangular, com o objetivo de gerar uma escala básica Fuzzy que abrange a subjetividade do pensamento humano através de um procedimento de inferência baseado no problema F-LP-MACBETH proposto, e, após a defuzzificação, foi feita a cardinalização da escala *crisp*.

Para a implementação computacional do modelo, foi construído um DSS baseado nos operadores genéticos de cruzamento e mutação. Desta maneira, o Algoritmo Genético (AG) gera possíveis soluções para matriz de decisão com inconsistência cardinal, até chegar à uma solução cardinalmente consistente e alinhada às preferências do tomador de decisão.

Este trabalho está dividido em seis seções. Após esta seção introdutória, na segunda seção é apresentada a sustentação teórica da tese, na terceira seção são apresentados os objetivos do trabalho, a quarta seção trata dos Materiais e Métodos, sendo abordada a Metodologia MCDM/A, o método MACBETH, a Teoria Fuzzy e os Algoritmos Genéticos, na quinta seção, os resultados são apresentados através de três artigos desenvolvidos e na sexta seção tem-se as conclusões. Por fim são apresentadas as referências.

2 Sustentação Teórica

2.1 Desenho de pesquisa

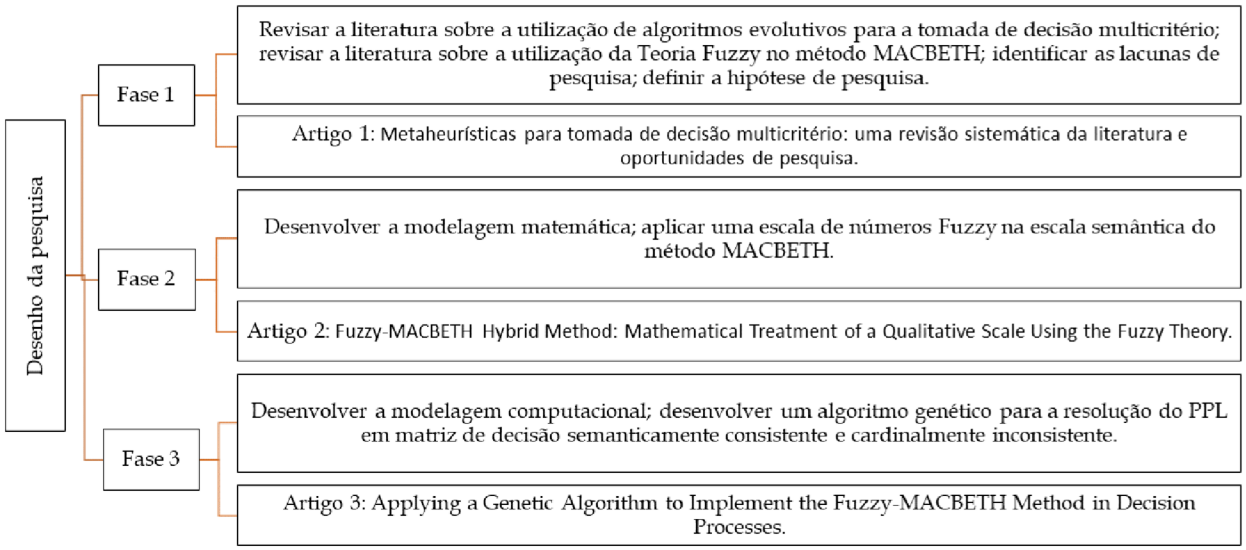


Figura 1: Desenho de pesquisa

A presente pesquisa foi desenvolvida em três fases, conforme demonstrado na Figura 1. Na primeira fase, foi desenvolvida a revisão sistemática da literatura sobre a utilização de algoritmos evolutivos para a tomada de decisão multicritério. Desta revisão, identificou-se que a Teoria Fuzzy tem sido utilizada para tratar matematicamente a incerteza de termos semânticos e os algoritmos genéticos para a otimização. A fim de identificar o que já foi estudado no campo da Teoria Fuzzy aplicada ao método MACBETH, uma nova revisão de literatura foi realizada, identificando como lacuna de pesquisa a aplicação de uma escala de números Fuzzy na escala semântica do método e de um algoritmo genético para a otimização do problema de programação linear. A partir da fase 1, foi desenvolvido o primeiro artigo da tese, intitulado *Metaheurísticas para tomada de decisão multicritério:*

uma revisão sistemática da literatura e oportunidades de pesquisa , e foi definida a hipótese de pesquisa.

Na segunda fase, foi desenvolvida a modelagem matemática, através da aplicação de uma escala de números Fuzzy triangulares na escala semântica do método MACBETH. Um problema de programação linear, denominado F-LP-MACBETH, foi proposto, o que permitiu a flexibilização da terceira restrição do problema de programação linear do método MACBETH, tendo como principal vantagem a resolução do problema da inconsistência cardinal em matriz de decisão semanticamente consistente. Desta fase, resultou o segundo artigo da tese, intitulado *Fuzzy-MACBETH Hybrid Method: Mathematical Treatment of a Qualitative Scale Using the Fuzzy Theory.*

Na terceira fase, foi realizada a modelagem computacional, através do desenvolvimento de um algoritmo genético para a otimização do problema de programação linear F-LP-MACBETH em matriz de decisão cardinalmente inconsistente. Desta forma, a principal vantagem da modelagem desenvolvida é a obtenção de uma escala cardinal alinhada às preferências do decisor de forma computacionalmente rápida. Desta fase, resultou o terceiro artigo da tese, intitulado *Applying a Genetic Algorithm to Implement the Fuzzy-MACBETH Method in Decision Processes.*

2.2 Revisão sistemática da literatura

Para melhor compreender como os DSS baseados em algoritmos genéticos têm sido utilizados para o apoio à tomada de decisão multicritério, foi realizada uma Revisão Sistemática da Literatura (RSL), através da aplicação do Protocolo PRISMA (*Preferred Reporting Items for Systematic Reviews and Meta-Analyses*) simplificado, que consiste em um processo estruturado constituído por um *check-list* com 27 itens, dos quais 15 foram considerados, e um fluxograma de quatro etapas para seleção do Portfólio Bibliográfico (PB). Destaca-se que foram desconsiderados os itens do *check-list* relacionados a registro do protocolo de pesquisa, análises de risco e fontes de financiamento.

O objetivo dessa RSL foi ampliar o conhecimento sobre os estudos realizados na temática dos algoritmos evolucionários para a tomada de decisão multicritério, conhecer o estado da arte e identificar as lacunas de pesquisa. Detalhes sobre as etapas iniciais da RSL, realizada para o período temporal até Junho de 2021, o protocolo de buscas, resultados das filtragens e seleção do PB e análise bibliométrica podem ser consultados em Bastos e Longaray (2021). Após, foi realizada a complementação da RSL utilizando o protocolo de pesquisa pré-definido, para período de Junho de 2021 a Novembro de 2022, resultando no Portfólio Bibliográfico composto por 54 artigos. A RSL pode ser consultada no primeiro artigo apresentado na Seção 5. A Figura 2 apresenta a síntese dos métodos estudados nos 54 artigos selecionados. A tabela da metassíntese detalhada dos artigos pode ser consultada no Apêndice A.

A partir da análise dos estudos que compuseram o Portfólio Bibliográfico, pode-se concluir que os Algoritmos Genéticos são uma metaheurística aplicada com eficácia para a tomada de decisão multicritério. Por possuírem a habilidade de gerar um conjunto de soluções a cada rodada do algoritmo, têm sido utilizados para resolver problemas de programação linear e não linear. Percebe-se também o movimento de pesquisadores no intuito de combinar métodos multicritério de agregação, como o AHP e o TOPSIS, com algoritmos genéticos, a fim de melhorar o tempo computacional de execução destes métodos (ZHANG et al., 2013; KHUMAIDI et al., 2020; WANG et al., 2015; KOUATLI, 2013; MA, 2016; KAYIKCI, 2010; KANNAN; BALAMURUGAN; SASIKALA, 2021; KAMALI;

GHOMI; JOLAI, 2011; CHE, 2012; SADEGHI; MOUSAVI; NIAKI, 2016).

Este fato se deve à busca por maior agilidade computacional para os *softwares* de tomada de decisão. Com o desenvolvimento dos DSS, a utilização de métodos multicritério para o apoio à gestão têm se tornado mais acessíveis, viabilizando sua utilização por decisores e especialistas, resultando em ferramentas com melhor desempenho computacional.

A subjetividade que permeia o contexto decisório também tem sido considerada na tomada de decisão. Alguns métodos da Família Electre, por exemplo, levam em consideração a subjetividade do julgador ao atribuir as avaliações. No Electre III, o índice de credibilidade $\sigma(a, b)$ se assemelha conceitualmente aos conjuntos Fuzzy, onde $\sigma(a, b)$ recebe valores entre 0 e 1 e os limites de concordância e discordância são graduais. Essa relação de sobreclassificação do Electre III também é utilizada no Electre TRI-nB, no qual as categorias são definidas por perfis limitantes (BOUYSSOU; MARCHANT; PIRLOT, 2022).

Diversos métodos para tratar a incerteza são descritos na literatura, dos quais pode-se ressaltar a teoria Fuzzy intuicionista (ATANASSOV; GARGOV, 1989), a teoria dos conjuntos neutrosóficos (SMARANDACHE, 1995) e a teoria dos números grey (DENG, 1982). Dentre esses métodos, fazendo-se uma análise dos artigos do portfolio bibliográfico desta pesquisa, verifica-se que prevaleceu o uso da teoria dos conjuntos Fuzzy para tratar a incerteza e a subjetividade que permeiam o processo decisório, permitindo que o decisor inclua suas dúvidas nas avaliações. Além disso, verifica-se que a teoria dos conjuntos Fuzzy é aplicada em associação com diversas metodologias de forma eficiente, incluindo os Algoritmos Genéticos.

Assim, a partir da metassíntese, foi possível identificar que a lógica Fuzzy e os Algoritmos Genéticos podem ser combinados de forma efetiva para tratar a subjetividade e apoiar a tomada de decisões em ambientes complexos. Desta forma, tendo-se em vista que o método MACBETH (*Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation Technique*) tem como diferencial permitir o apoio à decisão multicritério em ambientes complexos, facilitando a avaliação do decisor ao utilizar escalas qualitativas para as análises, considera-se que a utilização de números Fuzzy para incluir aspectos de incerteza na escala e dos Algoritmos Genéticos para a implementação computacional estão alinhados à metodologia e poderão contribuir com o aprimoramento do método.

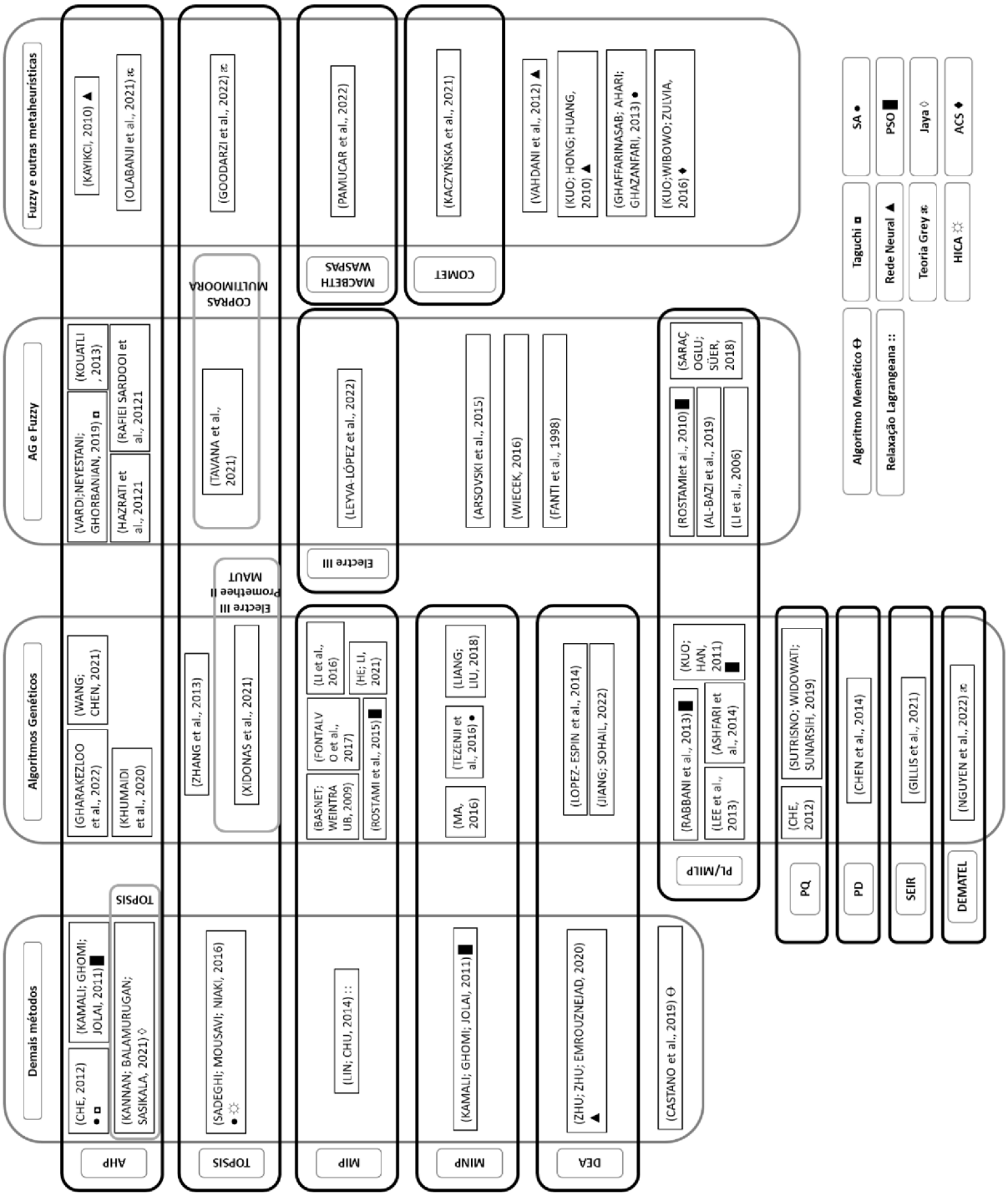


Figura 2: Síntese dos métodos utilizados nos artigos do Portfólio Bibliográfico

Existem na literatura trabalhos que implementam a abordagem Fuzzy-MACBETH. Assim, foi realizado o levantamento das pesquisas que trabalham com a Teoria Fuzzy e o método MACBETH e um sumário destas abordagens é demonstrado na Tabela 1. Esta lista não pretende ser exaustiva, mas inclui abordagens representativas. A lista completa pode ser observada no Apêndice B.

Da análise da Tabela 1, depreende-se que apenas no estudo de Yurtyapan e Aydemir (2021) houve a aplicação de uma nova abordagem na escala do método MACBETH, no qual os julgamentos semânticos foram transformados em números *grey*. No entanto, a Teoria dos Conjuntos Fuzzy foi utilizada apenas para a determinação dos pesos dos decisores para a avaliação em grupo, através da aplicação da Teoria Fuzzy Intuicionista. Embora Pacumar et al. (2022) desenvolvam uma modelagem utilizando números Fuzzy triangulares associados à escala semântica do método MACBETH, o objetivo do estudo é desenvolver um modelo para ranqueamento de alternativas. Desta forma, pode-se observar que a aplicação de números Fuzzy na escala semântica do MACBETH constitui uma lacuna de pesquisa.

Tabela 1: Síntese dos trabalhos que apresentam a abordagem Fuzzy MACBETH

Referência	**Métodos**	**Abordagem**
(DHOUIB, 2014)	MACBETH e Modelo linguístico Fuzzy *2-tuple*	Neste estudo, a análise foi realizada usando uma versão estendida da metodologia MACBETH para levar em conta as avaliações imprecisas e linguísticas fornecidas pelo decisor ao integrar o modelo *2-tuple* que lida com dados de informação não homogêneos. Nesse modelo, as alternativas são avaliadas de forma objetiva, dispensando a avaliação do decisor. Assim, as alternativas apresentam dados de entrada que podem ser valores numéricos, de intervalos ou linguísticos. Após, os dados de entrada são expressos em conjuntos Fuzzy sobre um domínio linguístico específico, chamado *Basic Linguistic Term Set* (BLTS). A informação resultante é convertida em um valor numérico β através de uma função χ. Após, β é traduzido em um modelo linguístico *2-tuple* (S_k,α). Com o resultado do modelo *2-tuple* obtém-se a matriz de decisão e a escala cardinal é obtida com o *software* M-MACBETH. Para determinar os pesos dos critérios, é utilizado o método MACBETH tradicional, no qual o decisor realiza as comparações par a par de acordo com sua preferência.

Continua

Referência	Métodos	Abordagem
(ERTAY; KAHRAMAN; KAYA, 2013)	MACBETH e AHP-Fuzzy	Os autores utilizam dois métodos multicritério baseados em avaliações linguísticas, o MACBETH e o AHP-Fuzzy, para avaliar as alternativas de energias renováveis Eólica, Solar, Biomassa, Geotérmica e Hidrelétrica. O objetivo do trabalho é comparar os resultados das duas abordagens. Os autores concluem que, como tanto o MACBETH, quanto o Fuzzy AHP resultaram na mesma ordem de classificação das alternativas energéticas, embora os dois métodos sejam baseados em abordagens diferentes, permite que os tomadores de decisão tomem decisões mais confiantes na seleção de uma alternativa. Se a ordem de classificação fosse diferente, os tomadores de decisão precisariam de uma análise mais profunda, examinando as fontes das diferenças.
(KAHRAMAN; ONAR; OZTAYSI, 2015)	Revisão de literatura	Os autores realizaram uma revisão de literatura a fim de compreender como a Teoria dos Conjuntos Fuzzy tem sido utilizada em conjunto com métodos muticritério de tomada de decisão. Os resultados da pesquisa demonstraram a forte tendência em se combinar Fuzzy com métodos multicritério, podendo-se citar o Fuzzy-AHP, Fuzzy-ANP, Fuzzy-TOPSIS, Fuzzy-ELECTRE, Fuzzy-PROMETHEE e Fuzzy-VIKOR. No entando, foram encontrados apenas dois artigos na temática do estudo utilizando o MACBETH (Dhouib (2014) e Ertay, Kahraman e Kaya (2013)). Os autores concluem que o método MACBETH ainda não foi expandido para suas versões Fuzzy.
(PISHDAR; GHASEMZADEH; ANTUCHEVICIENE, 2019)	MACBETH e Fuzzy *type-2*	Os autores prepararam uma lista de indicadores de desempenho para aeroportos centrais com base na literatura e realizam a priorização com base no método *Best-Worst* (BWM). O método Fuzzy *Type-2* é utilizado para obter os pesos dos critérios. Após, os cinco critérios que obtiveram maiores pesos são utilizados para avaliar os 19 aeroportos internacionais iranianos através do método MACBETH.
(CARNERO, 2021)	MACBETH, Fuzzy-TOPSIS e Fuzzy *Shannon Entropy*	A autora utilizou o MACBETH para obter os pesos dos critérios subjetivos com base nas preferências do decisor e Fuzzy *Shannon Entropy* para obter os pesos dos critérios objetivos. Posteriormente, Fuzzy-TOPSIS é usado para obter a classificação das alternativas. Por fim, para validar o método foram utilizados PROMETHEE II, ELECTRE III e Fuzzy-VIKOR.

Continua

Referência	Métodos	Abordagem
(YURTYAPAN; AYDEMIR, 2021)	MACBETH, Conjunto Fuzzy Intuicionista e Números *Grey*	Os autores introduzem uma nova abordagem para seleção de *software* ERP (*Enterprise Resource Planning*) baseado em MACBETH, considerando números *grey* e Conjuntos Fuzzy Intuicionista sob incerteza. No método MACBETH baseado em números *grey*, os julgamentos semânticos são transformados em escala de intervalo através de números *grey*, após é feita a *whitenization*, gerando um novo julgamento semântico que será aplicado no método MACBETH clássico. A segunda abordagem proposta é estabelecer um conjunto Fuzzy intuicionista para avaliar os efeitos dos tomadores de decisão no problema de pesquisa, ou seja, para determinar o peso de cada decisor.
(PACUMAR et al., 2022)	MACBETH e Números Fuzzy	Neste trabalho, os autores propõem um método para ranquear alternativas com base no método MACBETH estendido para uma versão Fuzzy. Inicialmente, a matriz de decisão $m \times n$ é montada, com os n critérios e m alternativas. Na primeira etapa, os valores ponderados de cada critério são obtidos para cada decisor. Os critérios são avaliados com base em uma escala de números Fuzzy triangulares, gerando um vetor de pesos fuzzy para cada decisor. Esses vetores são agregados, gerando, para cada critério, um único vetor de pesos fuzzy. Após, as alternativas são avaliadas com base em uma formulação matemática proposta, gerando um número *crisp* para cada alternativa. Posteriormente, o escore fuzzy MACBETH é calculado para cada alternativa, multiplicando o valor da alternativa pelo vetor de pesos fuzzy de cada critério. O valor global fuzzy de cada alternativa é obtido, esse valor é defuzzificado e é feito o ranqueamento. Nesse estudo, o objetivo não é a obtenção de escalas cardinais para cada elemento de avaliação, mas sim fornecer um método de agregação para o ranqueamento de alternativas, com base na modelagem Fuzzy-MACBETH.

Fonte: Elaborado pela autora.

2.3 Hipótese de pesquisa

Considerando a lacuna de pesquisa observada na Subseção 2.2, a presente pesquisa pretende aplicar uma escala de números Fuzzy triangulares na escala de termos semânticos do método MACBETH, permitindo incorporar os aspectos de incerteza e subjetividade do julgamento humano. Desta forma, a *hipótese de pesquisa* é que a modelagem matemática proposta contribuirá com o aprimoramento do método MACBETH ao flexibilizar a escala em avaliações consideradas cardinalmente inconsistentes, o que contribuirá para sua aplicação em contextos complexos.

3 Objetivos

3.1 Objetivo geral

O objetivo geral da tese é *desenvolver um método multicritério discreto para incorporar a subjetividade inerente aos termos linguísticos da escala do método multicritério de apoio à decisão MACBETH à modelagem matemática, através da aplicação de números Fuzzy na escala semântica e do desenvolvimento de um algoritmo genético associado à programação linear.*

3.2 Objetivos específicos

Para a consecução do objetivo geral, foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- Revisar a literatura sobre a utilização de AG para tomada de decisão multicritério.
- Revisar a literatura sobre a aplicação da Teoria Fuzzy no método MACBETH.
- Estruturar o modelo matemático, aplicando uma escala de números Fuzzy à escala semântica do MACBETH.
- Realizar a modelagem computacional, desenvolvendo um AG.
- Replicar um estudo de caso validado.
- Analisar e discutir os resultados.

4 Materiais e métodos

4.1 A metodologia MCDM/A

A MCDM/A é o campo de estudo da Pesquisa Operacional que visa construir sistemas de avaliação baseados nos conhecimentos de especialistas ou decisores, considerando os múltiplos critérios que afetam o problema decisório, constituindo importantes ferramentas para a estruturação e avaliação de decisões complexas (PéREZ-GLADISH; FERREIRA; ZOPOUNIDIS, 2020). Dentre as diversas metodologias da MCDM/A, a escolha do método se dá a partir de uma série de fatores, como os tipos de variáveis que compõem o problema, a natureza do problema de decisão e a compensação dos critérios.

No que tange a questão das variáveis discretas, o problema de decisão consiste na escolha de uma dentre um conjunto discreto de alternativas, em contrapartida aos métodos contínuos, nos quais as alternativas são implicitamente descritas por meio de um conjunto de restrições (BEINAT, 1997).

Em relação à natureza do problema de decisão, este pode ser classificado conforme quatro problemáticas de referência, definidas por Bernard Roy (1996) como $P.\alpha$, $P.\beta$, $P.\gamma$ e $P.\delta$. O problema de escolha ($P.\alpha$) consiste em auxiliar o decisor na escolha ou seleção de um subconjunto que contém as melhores soluções ou as soluções satisfatórias. Essa é, de acordo com Roy (1996), a mais tradicional problemática, formando a base para problemas de otimização. No problema de classificação ($P.\beta$) o objetivo é a categorização das ações, que são distribuidas de acordo com categorias predefinidas. No problema de ordenação ($P.\gamma$) as ações são ordenadas de acordo com a ordem de preferência do decisor.

Por fim, o problema de descrição ($P.\delta$) consiste em auxiliar o decisor na descrição das ações e de suas consequências de maneira formal e sistemática ou no desenvolvimento de um procedimento cognitivo.

Tabela 2: Síntese dos métodos multicritério

Abordagem	**Métodos**	**Tipos de problema**
Métodos de agregação Baseados no Critério Único de Síntese ou na Teoria da Utilidade Multiatributo. Assumem uma função de utilidade multiatributo ou função de valor para avaliar as preferências do decisor. Presumem que as relações de preferência e indiferença são transitivas. Todas as alternativas são comparáveis devido ao processo de normalização. Fazem a agregação em uma avaliação global. Métodos de agregação. Métodos compensatórios.	AHP	(α, γ, β (AHP-Sort))
	ANP	(α, γ)
	SMART	(α, γ)
	TODIM	(α, γ)
	TOPSIS	(α, γ)
	MACBETH	(α, γ)
	MAUT/UTA	(α, γ, β (UTA-DIS))
Métodos de sobreclassificação Baseados na abordagem de sobreposição (*outranking*). Não exigem que as relações de preferência e indiferença sejam transitivas. Permitem a incomparabilidade entre alternativas. Permitem a agregação em uma avaliação global. Abordagem construtivista. Métodos não compensatórios.	FAMÍLIA ELECTRE	(α, γ, β)
	FAMÍLIA PROMETHEE	(α, γ, β (Flow-Sort), γ (GAIA))
Métodos interativos Origem na Programação Matemática Multiobjetivo. Combinam etapas computacionais e de interação com o decisor. Não permitem a agregação em uma avaliação global. Buscam otimizar simultaneamente mais de uma função objetivo	STEM	(α, γ)
	ICW	(α)
	PARETO RACE	(α, γ)
	TRIMAP	(α, γ)

Fonte: Adaptado de Roy (1996) e Ishizaka e Nemery (2013)

Por último, em relação a característica compensatória, os critérios que apresentam desempenhos inferiores podem ser compensados pelo bom desempenho de outros critérios,

por exemplo, uma alternativa com maior custo pode ser considerada uma ótima alternativa caso apresente qualidade e durabilidade superiores às demais. Já nas estratégias não compensatórias, os desempenhos ruins não podem ser contrabalanceados pelos bons (BEINAT, 1997).

Quanto às relações de preferência, os métodos podem ser de Agregação, de sobreclassificação ou interativos. Os métodos de agregação são baseados no Critério Único de Síntese, ou na Teoria da Utilidade Multiatributo, e fundamentam-se no conceito da função utilidade, ou seja, o quanto uma dada ação fornece de utilidade para os decisores no critério avaliado. Na abordagem de sobreposição (*outranking*), os métodos são ditos de Sobreclassificação ou Subordinação, nos quais considera-se que uma ação a subordina uma ação b (aSb), caso para o decisor a ação a seja pelo menos tão boa quanto a ação b, procedendo a comparação par a par através da relação binária, por meio de limiares.

Existem ainda os métodos interativos, que adotam a abordagem do julgamento local interativo. Também conhecidos como MODM (*Multi-Objective Decision Making*), têm origem na programação matemática, destacando-se a programação linear multiobjetivo (MOLP – *Multi-Objective Linear Programming*). Ao invés de agregar as avaliações das ações em cada critério em uma avaliação global, o objetivo desses métodos é otimizar simultaneamente mais de uma função objetivo, procurando o conjunto de soluções viáveis. A Tabela 2 traz a síntese da classificação dos métodos multicritério nas três abordagens multicritério, conforme proposto por Roy (1996).

Tem-se, portanto, que a Pesquisa Operacional, desenvolvida a partir de várias áreas do conhecimento interconectadas, deu origem a métodos baseados em diferentes paradigmas de tomada de decisão e para resolução de problemas em diferentes contextos. Assim, para solucionar um problema ou para o apoio à tomada de decisões, a escolha do método dependerá das características do problema decisório, do contexto em análise e dos perfis dos decisores, tendo-se em vista que o foco do processo decisório pode ser a tomada de uma decisão ótima ou quase ótima, ou a construção de conhecimento para o decisor.

4.2 Método MACBETH

Dentre os métodos da MCDM/A, o MACBETH (*Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation Technique*), criado por Bana e Costa e Vansnick (1994), permite a transformação de escalas ordinais, obtidas a partir de juízos de valor expressos pelo julgador, em escalas cardinais, utilizando Programação Linear. Consiste em um método matemático multicritério composto por quatro fases, que se iniciam com a análise do contexto decisório e estruturação do problema, a elaboração dos elementos de avaliação, o desenvolvimento do modelo de avaliação e a análise de sensibilidade e recomendações (BANA E COSTA; ANGULO-MEZA; OLIVEIRA, 2013; BANA E COSTA; DE CORTE; VANSNICK, 2012; TAVARES et al., 2022). Assim, o método MACBETH pode ser entendido como um processo sócio-técnico, que combina elementos técnicos com os aspectos sociais da *decision conferencing* (BANA E COSTA; DE CORTE; VANSNICK, 2012). Conforme Vieira, Oliveira e Bana e Costa (2020), a *decision conferencing* consiste em uma técnica de grupo interativa, em forma de reuniões com os atores-chave do processo decisório, que, assistidos por um facilitador, chegam a julgamentos relevantes que os ajudam a melhor compreender e estruturar as questões importantes que afetam a organização.

A ideia central do desenvolvimento do MACBETH é oferecer ao decisor um método para auxiliá-lo na construção de uma escala numérica, sendo assim o instrumento para a conversão de julgamentos semânticos em escalas cardinais (BANA E COSTA; VANS-

NICK, 1994). Desta forma, o principal diferencial do método é a utilização de uma escala semântica para expressar a avaliação do decisor, que deve comparar as alternativas par a par, utilizando as categorias *indiferente*, *muito fraca*, *fraca*, *moderada*, *forte*, *muito forte* e *extrema*. O procedimento de questionamento requer que o decisor atribua um julgamento absoluto verbal sobre a diferença de atratividade entre duas alternativas ou ações x e y, para cada par ordenado (x, y) em $A \times A$ com $x\,P\,y$ (x preferível a y).

Sendo $A = x_1, x_2, \ldots, x_n$ um conjunto de elementos tal que $\forall i \neq j \in 1, 2, \ldots, N$: $x_i\,P\,x_j \Leftrightarrow i > j$. Logo, os elementos do conjunto A devem ser ordenados de forma decrescente, ou seja, $x_n\,P\,x_{n-1}\,P\,x_{n-2}\,P\,\ldots\,P\,x_2\,P\,x_1$ e em seguida preenche-se a parte superior à diagonal principal da matriz $n \times n$ com as respostas verbais, onde $x_{i,j}$ recebe o valor $k \in 1, 2, 3, 4, 5, 6$ se e somente se o decidor tenha atribuído a (x_i, x_j) uma categoria c_k, conforme a Figura 3 (BANA E COSTA; VANSKICK, 1995).

Onde:

- $c_1 = \{(x, y) \in A \times A \mid xPy\}$ e a diferença de atratividade entre x e y é **muito fraca**;
- $c_2 = \{(x, y) \in A \times A \mid xPy\}$ e a diferença de atratividade entre x e y é **fraca**;
- $c_3 = \{(x, y) \in A \times A \mid xPy\}$ e a diferença de atratividade entre x e y é **moderada**;
- $c_4 = \{(x, y) \in A \times A \mid xPy\}$ e a diferença de atratividade entre x e y é **forte**;
- $c_5 = \{(x, y) \in A \times A \mid xPy\}$ e a diferença de atratividade entre x e y é **muito forte**;
- $c_6 = \{(x, y) \in A \times A \mid xPy\}$ e a diferença de atratividade entre x e y é **extrema**;

$$
\begin{array}{c}
 \\ x_n \\ x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ \vdots \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_n & x_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_3 & x_2 & x_1 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
\cdot & x_{n,n-1} & x_{n,n-2} & \cdots & x_{n,3} & x_{n,2} & x_{n,1} \\
\cdot & \cdot & x_{n-1,n-2} & \cdots & x_{n-1,3} & x_{n-1,2} & x_{n-1,1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & x_{n-2,3} & x_{n-2,2} & x_{n-2,1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & x_{3,2} & x_{3,1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & x_{2,1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Figura 3: Matriz de decisão do método MACBETH
Fonte: Adaptado de Bana e Costa e Vansnick (1994).

Para que as respostas do decisor sejam consistentes, duas condições devem ser respeitadas:

- $\forall i = 3, 4, \ldots, n$ os valores x_{ij} na linha i não podem diminuir quando j diminui; e
- $\forall j = 1, 2, \ldots, n-2$ os valores x_{ij} na coluna j não podem aumentar a medida em que o i diminui.

Assim, a medida de atratividade ordinal consiste em se atribuir para cada alternativa x um valor numérico - um número real $v(x)$ - que satisfaça as condições:

- $\forall x, y \in A : xPy \Leftrightarrow v(x) > v(y)$

- $\forall x, y \in A : xIy \Leftrightarrow v(x) = v(y)$

Para determinar a medida de valor cardinal para cada alternativa x, além das duas condições anteriores, é necessário que:

- $\forall w$, x, y, $z \in A$ com x mais atrativo do que y e w mais atrativo do que z, a razão $[v(x) - v(y)]/[v(w) - v(z)]$ corresponde a medida da diferença de atratividade entre x e y tendo a diferença de atratividade entre w e z como unidade de medida.

Esses julgamentos devem permitir que os elementos possam ser posicionados em um eixo vertical, tal que:

- Se x e y forem igualmente atrativos, x e y serão coincidentes.
- Se x for mais atrativo do que y, x será posicionado acima de y.
- Se a diferença de atratividade entre x e y for maior do que a diferença de atratividade entre w e z, a distância entre x e y será maior do que a distância entre w e z.

Ou seja, as duas primeiras condições asseguram a consistência da escala ordinal, que diz respeito à ordem de preferência dos elementos para o decisor, já a última assegura a consistência cardinal da escala, que diz o quanto um elemento é preferível a outro. Desta forma, enquanto a medida de valor ordinal indica a ordem de preferência das alternativas, a medida de valor cardinal reflete a diferença de atratividade entre as alternativas (BANA E COSTA; DE CORTE; VANSNICK, 2012).

Para gerar a escala básica a partir dos julgamentos semânticos do decisor, a primeira versão do MACBETH foi desenvolvida em 1994, composta por quatro problemas de programação linear sequenciais, implementada em GAMS. No entanto, conforme Bana e Costa, De Corte e Vansnick (2005), o software apresentava algumas limitações:

- A quantidade de sugestões para as correções das inconsistências era determinada de forma heurística.
- Não permitia situações de hesitação.
- O decisor tinha que fazer todas as avaliações antes de executar qualquer outro procedimento e as inconsistências só eram apresentadas após a matriz de decisão estar completa.

Novas versões foram desenvolvidas a fim de corrigir essas limitações (BANA E COSTA; VANSKICK, 1995; BANA E COSTA; VANSNICK, 1999; BANA E COSTA; DE CORTE; VANSNICK, 2003, 2005, 2012). Para a presente pesquisa, será utilizada a última atualização do método MACBETH, na qual a escala pré-cardinal, chamada escala MACBETH básica, pode ser obtida a partir do problema de programação linear LP-MACBETH, apresentado em Bana e Costa, De Corte e Vansnick (2012), sendo x^+ e x^- os elementos de A mais atrativo e menos atrativo, respectivamente.

LP-MACBETH:

$$Min[v(x^+) - v(x^-)]$$

Sujeito às restrições:

1. $v(x^-) = 0$ (valor arbitrariamente escolhido).

2. $v(x) - v(y) = 0, \forall (x, y) \in c_0$.

3. $v(x) - v(y) \geq i, \forall (x, y) \in c_i \bigcup \cdots \bigcup c_s$, com $i, s \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $i \leq s$.

4. $v(x) - v(y) \geq v(w) - v(z) + i - s', \forall (x, y) \in c_i \bigcup \cdots \bigcup c_s$ e $\forall (w, z) \in c'_i \bigcup \cdots \bigcup c'_s$ com $i, s, i', s' \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, i \leq s, i' \leq s'$ e $i > s'$.

No problema de programação linear LP-MACBETH, a função objetivo minimiza a maior diferença de atratividade, o que significa, segundo Bana e Costa, Angulo-Meza e Oliveira (2013), minimizar a soma de todas as pontuações de diferenças de atratividade e com isso os julgamentos de cada categoria serão o mais próximo possível uns dos outros. A primeira restrição fixa a origem da escala. As restrições (2) a (4) são condições de preservação de ordem, onde (2) e (3) asseguram a preservação da ordem do ranqueamento dos elementos de avaliação e (4) assegura a preservação da ordem das diferenças de atratividade implícitas nos julgamentos qualitativos (BANA E COSTA; DE CORTE; VANSNICK, 2012).

Quando não há hesitação na avaliação do decisor, as restrições podem ser reescritas da seguinte maneira:

1. $v(x^-) = 0$ (valor arbitrariamente escolhido).

2. $v(x) - v(y) = 0, \forall (x, y) \in c_0$.

3. $v(x) - v(y) \geq v(w) - v(z) + i - i', \forall (x, y) \in c_i$ e $\forall (w, z) \in c'_i$ com $0 < i' < i \leq 6$.

A escala MACBETH básica é ancorada atribuindo-se os valores $v(x^+) = 100$ e $v(x^-) = 0$. Assim, a escala MACBETH cardinal (μ_x) é obtida a partir da equação $\mu_x = \alpha v_x + \beta$.

4.3 Teoria Fuzzy

A teoria dos conjuntos Fuzzy foi concebida por Lotfi A. Zadeh (1965) a fim de contemplar os aspectos incertos do pensamento humano. Diferentemente da aleatoriedade, a incerteza considerada pela teoria Fuzzy compreende a imprecisão das variáveis linguísticas utilizadas no cotidiano e que são desconsideradas no tratamento matemático clássico (PETROVIC-LAZAREVIC, 2001). Assim, na teoria Fuzzy consideram-se termos qualitativos imprecisos como "pequeno", "grande", "muito", "pouco", entre outros (RADOJEVIC; PETROVIC, 1997).

A inclusão da lógica Fuzzy na tomada de decisão permite considerar os aspectos ambíguos, de incerteza ou de indecisão presentes em problemas reais (CARNERO, 2021). Para formalizar matematicamente estas imprecisões, Zadeh (1965) permitiu uma expansão no conjunto imagem da função característica de um conjunto clássico (ou *crisp*), no qual o subconjunto Fuzzy é caracterizado por uma função de pertinência μ_F. Assim, sendo U um conjunto clássico, um subconjunto Fuzzy é caracterizado pela função de pertinência da forma

$$\mu_F : U \to [0, 1]$$

Esta função de pertinência indica com que grau o elemento x do conjunto U pertence ao subconjunto F, onde $\mu_F(x) = 0$ indica a não pertinência do elemento x ao subconjunto F e $\mu_F(x) = 1$ indica a pertinência completa. De acordo com Deliktas e Ustun (2017),

números Fuzzy são um subconjunto Fuzzy dos números reais, representando a expansão da ideia de intervalos de confiança. Assim, os números Fuzzy permitem a modelagem matemática da imprecisão presente em sistemas complexos, sendo os principais o número Fuzzy triangular, o número Fuzzy trapezoidal e o número Fuzzy gaussiano, dos quais o triangular é o mais utilizado na literatura (ZHANG; XU, 2019).

Desta forma, um número Fuzzy A é dito triangular se sua função de pertinência é da forma:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{u-a};\ se\ a < x \leq u \\ \dfrac{x-b}{u-b};\ se\ u < x \leq b \\ 0;\ nos\ demais\ casos. \end{cases}$$

Cuja função de pertinência apresenta gráfico em formato triangular, com base $[a, b]$ e vértice $(u, 1)$, conforme a Figura 4. Assim, o número Fuzzy triangular é representado pela terna ordenada $(a; u; b)$ ou $a/u/b$ e é o fecho do suporte de A (supp $\bar{A}$), correspondente ao α-nível $[A]^0$.

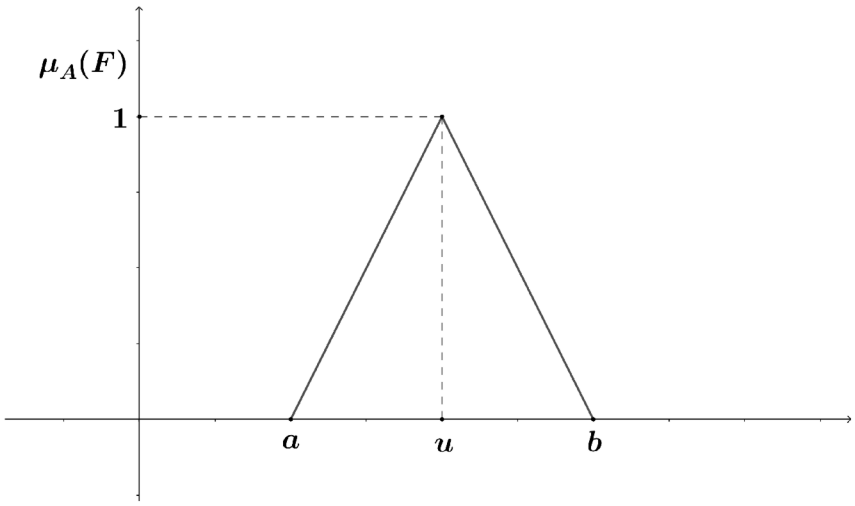


Figura 4: Número Fuzzy triangular

As operações aritméticas com números Fuzzy estão ligadas às operações aritméticas intervalares, podendo-se enunciar as seguintes definições, que podem ser consideradas casos particulares do Princípio da Extensão de Zadeh, sendo $A_1 = (l_1,\ u_1)$ e $A_2 = (l_2,\ u_2)$ dois números Fuzzy e λ um número real.

- Soma de números Fuzzy:

$$(l_1,\ u_1) \oplus (l_2,\ u_2) = (l_1 + l_2,\ u_1 + u_2)$$

- Multiplicação de um número real por um número Fuzzy:

$$(l_1,\ u_1) \odot (\lambda) = (\lambda l_1,\ \lambda u_1)$$

se

$$\lambda \geq 0$$

$$(l_1,\, u_1) \odot (\lambda) = (\lambda u_1,\, \lambda l_1)$$

se

$$\lambda < 0$$

- Diferença de números Fuzzy:

$$(l_1,\, u_1) \ominus (l_2,\, u_2) = (l_1 - u_2,\, u_1 - l_2)$$

- Multiplicação de números Fuzzy:

$$(l_1,\, u_1) \otimes (l_2,\, u_2) = (minP, maxP),\; P = (l_1 \times l_2,\, l_1 \times u_2,\, u_1 \times l_2,\, u_1 \times u_2)$$

- Divisão de números Fuzzy:

$$(l_1,\, u_1) \oslash (l_2,\, u_2) = (minP, maxP),\; P = (l_1/l_2,\, l_1/u_2,\, u_1/l_2,\, u_1/u_2)$$

Desta forma, a utilização de uma escala de números Fuzzy, alinhada à escala semântica do método MACBETH, poderá incluir na modelagem matemática do método a incerteza inerente aos termos linguísticos utilizados para mensurar as diferenças de atratividade entre elementos de avaliação, *muito fraca*, *fraca*, *moderada*, *forte*, *muito forte* e *extrema*. A incerteza na representação matemática de tais termos está relacionada ao significado que assumem para cada indivíduo, que não corresponde a um valor exato, mas sim a uma dimensão subjetiva.

A dimensionalidade das escalas cardinais provenientes da avaliação qualitativa, baseada nas preferências do decisor, pode ser obtida através da Teoria Fuzzy ao se flexibilizar a ideia de número, agregando os aspectos de incerteza. Desta forma, a presente pesquisa fornece ao método MACBETH uma nova abordagem, estendida para sua versão Fuzzy.

4.4 Algoritmos Genéticos

Os Algoritmos Genéticos (AG), introduzidos por John H. Holland (1975), são um grupo de metaheurísticas inspiradas na teoria da evolução das espécies de Darwin. Fazem parte da ciência computacional inspirada na natureza, que busca criar sistemas inteligentes que reproduzam aspectos do comportamento humano. Nos AGs, a ideia central se baseia no processo de seleção natural que controla a evolução dos seres vivos, no qual os organismos mais adaptados tendem a viver tempo suficiente para se reproduzir e originar novos organismos, perpetuando seu código genético. Desta forma, os AG têm a capacidade de explorar uma gama muito maior de possíveis soluções do que os programas convencionais (HOLLAND, 1992).

Segundo Kuo e Han (2011), muitos estudos demonstram que o algoritmo genético tem capacidade superior para encontrar a solução ótima aproximada em comparação com outros algoritmos heurísticos, como Algoritmo de Busca Tabu, Recozimento Simulado e Algoritmo de Colônia de Formigas, em algumas situações. Segundo Rabbani, Baghersad e Jafari (2013), é possível perceber que nas últimas décadas os pesquisadores têm demonstrado preferência pelo uso dos AGs, que têm sido amplamente utilizados em diversas áreas do conhecimento devido sua adaptabilidade e versatilidade.

Os AG empregam um método de otimização probabilística que pode ajustar automaticamente a direção da busca, sem uma regra pré-estabelecida, o que os confere capacidade

superior para a otimização global, segundo Wang et al. (2015). Isso ocorre pois, embora sejam algoritmos de busca aleatória, os AG utilizam informações históricas contidas em seu código para sugerir novas soluções.

No AG, uma população inicial é definida de forma aleatória ou através de um procedimento heurístico, de forma que se obtenha uma população inicial distribuída de forma abrangente no espaço de soluções. Esta população é formada por cromossomos, representados por uma cadeia de símbolos, que evolui a cada iteração (geração) e são avaliados por uma função *fitness*. Os cromossomos podem ser codificados conforme vários tipos de representações, como binárias, por números inteiros, por valores reais ou por letras (KUMAR et al., 2010). Para a obtenção de cada geração de cromossomos, operadores genéticos devem ser aplicados aos cromossomos "pais": seleção, cruzamento (ou *crossover*) e mutação (BASNET; WEINTRAUB, 2009). A Figura 5 descreve o fluxograma que esquematiza a estrutura básica de um AG.

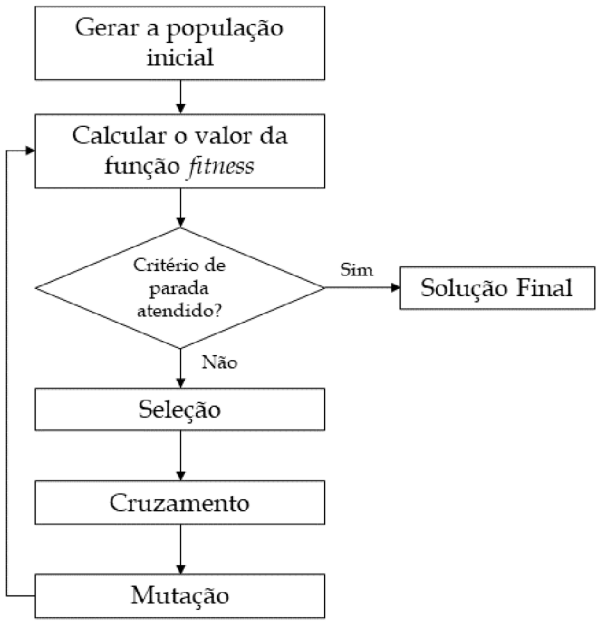


Figura 5: Fluxograma da estrutura geral dos algoritmos genéticos
Fonte: Adaptado de He e Li (2021).

O processo de seleção consiste em determinar os indivíduos que participarão da fase de reprodução, de forma que os indivíduos com o maior valor da função *fitness* (mais aptos) apresentam maior probabilidade de serem selecionados (LEE et al., 2013). O método de seleção proposto por Holland (1975), denominado método da roleta, determina que a probabilidade de um indivíduo ser selecionado pode ser obtida através da Equação 1, onde p_i é a probabilidade do i-ésimo indivíduo da população ser selecionado, f_i é o valor da função *fitness* e N é o tamanho da população. Assim, os indivíduos com maiores valores *fitness* receberão uma maior proporção na roleta, que é girada N vezes. Outros métodos de seleção podem ser encontrados na literatura, como os métodos do torneio (HARIK; LOBO; GOLDBERG, 1999) e o de seleção elitista (TEZENJI et al., 2016).

$$p_i = \frac{f_i}{\sum_N^{j=1} f_i} \tag{1}$$

O cruzamento consiste na recombinação de parte do código de pares de cromossomos selecionados a fim de gerar uma nova descendência (HE; LI, 2021). Com esta recombinação tem-se uma maior probabilidade de se gerar melhores soluções, pois espera-se que os genes dos melhores indivíduos apareçam mais na população, convergindo para uma boa solução. Existem diversos métodos de cruzamento, que diferem pela escolha do lócus dos cromossomos que serão trocados e pela forma de recombinação, como o de um ponto (HE; LI, 2021), multipontos (MA, 2016) e uniforme (WANG et al., 2015). O cruzamento em um ponto consiste na escolha aleatória de um ponto de corte, a partir do qual os genes dos pais serão trocados. No cruzamento multipontos, vários pontos de cruzamento podem ser utilizados. E no cruzamento uniforme, ao invés de determinar um ponto de corte, se determina a probabilidade de cada gene ser herdado de cada cromossomo-pai.

O operador de mutação é necessário para assegurar a diversidade genética da população, obtida alterando-se um ou mais genes de lócus escolhidos aleatoriamente (HE; LI, 2021). Para que a população não sofra mutações em demasia, deve-se definir uma taxa de mutação P_m que dá a probabilidade de um indivíduo sofrer mutação (LI; XU; GEN, 2006). A definição correta dos parâmetros do AG é um aspecto crítico para o bom desempenho do algoritmo, pois definirá o equilíbrio entre os mecanismos de busca e a diversidade de soluções, evitando-se a convergência prematura.

Com a combinação do AG e o método MACBETH, busca-se combinar a eficiência do algoritmo de busca evolucionária, que permite gerar a cada rodada um conjunto de soluções otimizadas, com a eficácia da modelagem matemática desenvolvida no método multicritério expandido para sua versão Fuzzy. A utilização do AG viabiliza a solução de problemas complexos, com variáveis discretas ou contínuas, podendo contribuir para o procedimento de resolução da programação linear com números Fuzzy. Segundo Parreiras (2006), a utilização de algoritmos evolucionários combinados a métodos multicritério para tomada de decisão, respeitando o papel do decisor na avaliação do contexto decisório, permite otimizar o processo de tomada de decisão.

5 Resultados

Na presente seção serão apresentados os três artigos originados do desenvolvimento da pesquisa. No primeiro artigo, intitulado *Metaheurísticas para tomada de decisão multicritério: uma revisão sistemática da literatura e oportunidades de pesquisa*, aceito para publicação pela *Revista INNOVAR*, é apresentada a revisão sistemática da literatura acerca da utilização de metaheurísticas para a tomada de decisão multicritério. Como resultado, obtiveram-se as lacunas de pesquisa da temática de estudo, dando suporte para a definição de hipótese de pesquisa.

No segundo artigo, intitulado *Fuzzy-MACBETH Hybrid Method: Mathematical Treatment of a Qualitative Scale Using the Fuzzy Theory*, publicado no *International Journal of Computational Intelligence Systems*, é descrita a modelagem matemática Fuzzy-MACBETH, na qual uma escala de números Fuzzy triangulares é aplicada à escala semântica do método MACBETH, a fim de incorporar a subjetividade dos termos linguísticos ao método. Na modelagem desenvolvida, a matriz de decisão é formada, assim como no método MACBETH, com base nas avaliações par a par das diferenças de atratividade entre elementos de avaliação feitas pelo decisor. Essa matriz de decisão inicial, semanticamente consistente, é fuzzificada com base na escala Fuzzy proposta na pesquisa. A partir do problema de programação linear F-LP-MACBETH é obtida a escala básica fuzzy, que é posteriormente defuzzificada, obtendo-se a escala básica *crisp*. Por fim, é obtida a escala

cardinal (BASTOS et al., 2023).

O terceiro artigo, intitulado *Applying a Genetic Algorithm to Implement the Fuzzy-MACBETH Method in Decision Processes*, submetido ao *International Journal of Computational Intelligence Systems*, refere-se à modelagem computacional FAG-MACBETH, na qual um algoritmo genético é desenvolvido para viabilizar a resolução do problema de programação linear F-LP-MACBETH em matrizes de decisão semanticamente consistente e cardinalmente inconsistente. Para ilustrar a aplicação da modelagem desenvolvida, foi replicado o estudo de caso *Decision Support Systems in action: Integrated application in a multicriteria decision aid process* de Bana e Costa et al. (1999). A escolha do estudo de caso se deu por ser um estudo robusto e validado, sendo o quinto artigo mais citado de Bana e Costa, C. e o terceiro de Ensslin, L., com mais de 450 citações segundo o *Google Scholar*.

5.1 Metaheurísticas para tomada de decisão multicritério: uma revisão sistemática da literatura e oportunidades de pesquisa

Metaheurísticas para tomada de decisão multicritério: uma revisão sistemática da literatura e oportunidades de pesquisa

Resumo:

Devido o aumento da complexidade das organizações, mais variáveis passam a integrar o contexto decisório, tornando mais difícil a visualização das alternativas, a estruturação do problema de decisão e a avaliação das ações. Assim, a Pesquisa Operacional objetiva facilitar o processo de tomada de decisão através da modelagem matemática e, com o auxílio das tecnologias de informação, tem-se observado a implementação de técnicas mais robustas. Desta forma, a presente pesquisa buscou identificar como as metaheurísticas computacionais têm sido utilizadas para a tomada de decisão gerencial no contexto multicritério. Para isso, foi realizada uma revisão sistemática da literatura, com auxílio do Protocolo PRISMA, resultando um portfólio bibliográfico composto por 54 artigos alinhados à temática. Foi realizada a análise bibliométrica, considerando-se nove aspectos, e a metassíntese, cujos resultados demonstraram o predomínio dos Algoritmos Genéticos, da Lógica Fuzzy e da utilização de métodos híbridos. O crescimento da *soft computing* na Pesquisa Operacional fica evidenciado, demonstrando que a Inteligência Artificial consiste em um importante ferramental para o auxílio à tomada de decisões gerenciais. Emergem, portanto, como oportunidades para futuras pesquisas, a utilização de metodologias para o tratamento das incertezas inerentes à tomada de decisões e dos algoritmos computacionais evolutivos para as tomadas de decisões multiobjetivos.

Palavras-chave: Algoritmo Genético, Lógica Fuzzy, Metaheurísticas, Revisão Sistemática da Literatura, Tomada de decisão.

JEL Classification: C44, C65, D70.

1. Introdução

Decidir é uma atividade constante, realizada na maioria das vezes de forma intuitiva. No entanto, a medida em que a complexidade aumenta, o processo de decisão passa a ser um procedimento difícil e multifacetado. Um exemplo disso ocorre no ambiente organizacional, no qual os gestores têm que tomar decisões dos mais variados tipos, a fim de assegurar a competitividade e o atingimento das metas organizacionais (Longaray et al., 2016). Assim, conforme Bouyssou et al. 2000, quando a tomada de decisão constitui uma tarefa complexa e seus impactos são relevantes, é preciso recorrer a alguma técnica de tomada de decisão.

Dentre as técnicas formais para a tomada de decisão, destacam-se as metodologias multicritério, que visam a modelagem dos diversos fatores que constituem o problema decisório com base em dados, no conhecimento científico e no julgamento humano. Desta forma, dois paradigmas foram originados, o MCDM (*Multicriteria Decision Making*) e o

MCDA (*Multicriteria Decision Analysis*), que compreendem importantes ferramentas para estruturação e avaliação de decisões complexas, com foco no apoio à tomada de decisão (Pérez-Gladish et al., 2020).

Neste sentido, a utilização das técnicas MCDM/A conduz a contrução de sistemas de avaliação baseados nos conhecimentos de especialistas, objetivando procedimentos matemáticos e técnicas computacionais avançadas para a modelagem do contexto decisório e a resolução de problemas de decisão (Zak & Weglinski, 2014). Neste domínio, o desenvolvimento de ferramentas computacionais, denominadas *Decision Support Systems* (DSS), desempenham papel fundamental no apoio aos gestores no processo de tomada de decisão e sua utilização foi impulsionada pelo desenvolvimento das tecnologias de informação.

A utilização das tecnologias de informação, da *soft computing* e da inteligência artificial tem permitido avanços nas mais diversas áreas do conhecimento. Em relação à Pesquisa Operacional, pesquisas recentes demonstram os avanços ao se incorporar a *soft computing* para o tratamento das incertezas aos métodos convencionais de tomada de decisão (Wang & Chen, 2021). No âmbito da computação evolucionária, os algoritmos bioinspirados são capazes de otimizar modelos de tomada de decisão, nos chamados sistemas evolucionários, que utilizam a Lógica Fuzzy para o tratamento das incertezas e um algoritmo evolutivo, como o algoritmo genético, para a otimização (Kouatli, 2013).

Pode-se, desse modo, entender que a informática viabiliza a modelagem computacional de algoritmos complexos capazes de operacionalizar os métodos multicritério através da criação de *softwares* e aplicativos. Assim, os DSS permitem potencializar o aspecto multicritério da tomada de decisão, levando em conta a natureza multidimensional dos problemas, viabilizando que o decisor incorpore seus sistemas de preferências no processo de tomada de decisão (Xidonas et al., 2021).

Nesse contexto, torna-se imperativo compreender os avanços na literatura científica a respeito da implementação de métodos multicritério associados a metaheurísticas a fim de otimizar o processo de tomada de decisões gerenciais, bem como delinear o fluxo de construção do conhecimento e identificar as oportunidades de pesquisas futuras. Desta forma, surgiu a seguinte questão: Como as metaheurísticas computacionais podem contribuir com o aprimoramento dos métodos multicritério para o apoio à gestão?

Para responder esta questão, foi realizada uma revisão sistemática da literatura através da aplicação do protocolo PRISMA (*Preferred Reporting Items for Systematic Reviews and Meta-Analyses*) simplificado, que consiste em um processo estruturado para a seleção do portfólio bibliográfico (PB). Obtido o PB, foi realizada a análise bibliométrica dos 54 artigos selecionados, através de técnicas avaliativas e relacionais, e a metassíntese a fim de ampliar o entendimento sobre a temática de estudo.

2. Metodologia

A fim de melhor compreender a construção do conhecimento científico sobre a utilização de metaheurísticas para a tomada de decisão multicritério, foi realizada uma revisão sistemática da literatura, aplicando-se o protocolo PRISMA para a seleção do PB e para a condução da análise bibliométrica e da metassíntese. O protocolo PRISMA consiste em um processo estruturado de revisão sistemática da literatura, composto por um *check-list* de 27 items (dos quais 15 foram considerados) e um fluxograma de quatro etapas para a seleção do PB.

A primeira etapa desse processo consiste em se realizar buscas manuais nas bases de dados. Para isto, foram escolhidas três bases de dados indexadas pela plataforma CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior do Ministério da Educação): *Scopus*, *IEEE* e *Science Direct*. As buscas foram realizadas com o apoio do Protocolo de Buscas apresentado na Tabela 1, formulado com base em artigos de controle selecionados a partir de uma busca exploratoria no *Google Scholar*.

Com o suporte dos artigos de controle, foram definidas as palavras-chave, divididas em três eixos temáticos: metaheurísticas, métodos multicritério e gestão. As palavras-chave foram utilizadas na língua inglesa para se obter uma gama maior de resultados. Posteriormente, foi contruída a *string* de busca, que consiste nas combinações de todos os descritores definidos para a pesquisa, apresentada na forma *booleana*.

Tabela 1.

Protocolo de buscas.

<table>
<tr><td>Pergunta de pesquisa</td><td colspan="3">Como as metaheurísticas podem contribuir com o aprimoramento dos métodos multicritério para o apoio à gestão?</td></tr>
<tr><td>Eixos temáticos</td><td>Metaheurísticas</td><td>Métodos Multicritério</td><td>Gestão</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Palavras-Chave</td><td>Metaheuristics</td><td>Multicriteria Decision Analysis</td><td>Management</td></tr>
<tr><td>Evolutionary Algorithms</td><td>Decision Making</td><td>Managerial</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Genetic Algorithm</td><td>Decision Aid</td><td>Organizations</td></tr>
<tr><td>Operational Research</td><td>Administration</td></tr>
<tr><td>String de busca</td><td colspan="3">(Metaheuristics OR ”Evolutionary algorithms”OR ”Genetic Algorithm”) AND (”Multicriteria Decision Analysis”OR ”Decision Making”OR ”Decision Aid”OR ”Operational Research”) AND (Management OR Managerial OR Organizations OR Administration)</td></tr>
</table>

Fonte: elaboração própria.

Com a *string* de busca definida, foi então realizada a seleção dos artigos nas bases de dados. A busca manual dos artigos abedeceu a alguns critérios de elegibilidade: foram selecionados apenas artigos científicos e trabalhos publicados em anais de conferencias e com acesso aberto. Não foram utilizados filtros temporais, já que o objetivo é identificar o estado a arte do tema de estudo, logo, a pesquisa abrangeu todas as publicações até novembro de 2022.

Tendo-se definido o Portfólio Bruto, foram realizadas as filtragens dos artigos. Primeiramente, foram excluídos os artigos repetidos. Na segunda filtragem, foi realizada a leitura dos títulos, palavras-chave e, quando necessário, dos resumos, com o objetivo de verificar o alinhamento com o tema de pesquisa. Por fim, os artigos tiveram seu texto completo analisado quanto a dois critérios de elegibilidade:

C1 - Utiliza um método multicritério combinado à metaheurística?
C2 - O modelo é aplicado para a tomada de decisão gerencial? Ou seja, o método desenvolvido na pesquisa tem como objetivo auxiliar a tomada de decisão de gestores no contexto multicritério?

Não foi realizada a filtragem quanto à qualidade das publicações, tendo em vista o interesse em verificar de forma mais ampla os tipos de metaheurísticas utilizadas, bem como as diversas combinações de métodos. Na bibliometria, foram realizadas as análises quanto ao ano de publicação, à revista científica, às áreas de aplicação, aos tipos de métodos utilizados, se utiliza a combinação de métodos (métodos híbridos), quanto aos tipos de algoritmos genéticos, à correlação entre autores, à média de citações dos autores e à correlação entre palavras-chave.

3. Resultados e discussão

As buscas manuais resultaram 354 artigos a partir da pesquisa na base *Scopus*, 90 a partir da *IEEE* e 2517 a partir da *Science Direct*, totalizando um portfólio bruto composto por 2961 relatos. Os artigos foram importados para o Mendeley versão 1.19.4, que é um *software* de gerenciamento bibliográfico gratuito. Foi feito o refinamento da pesquisa, com a aplicação dos filtros, resultando ao final deste processo um Portfólio Bibliográfico (PB) composto por 54 artigos. A Figura 1 apresenta os resultados de todas as etapas de seleção do PB.

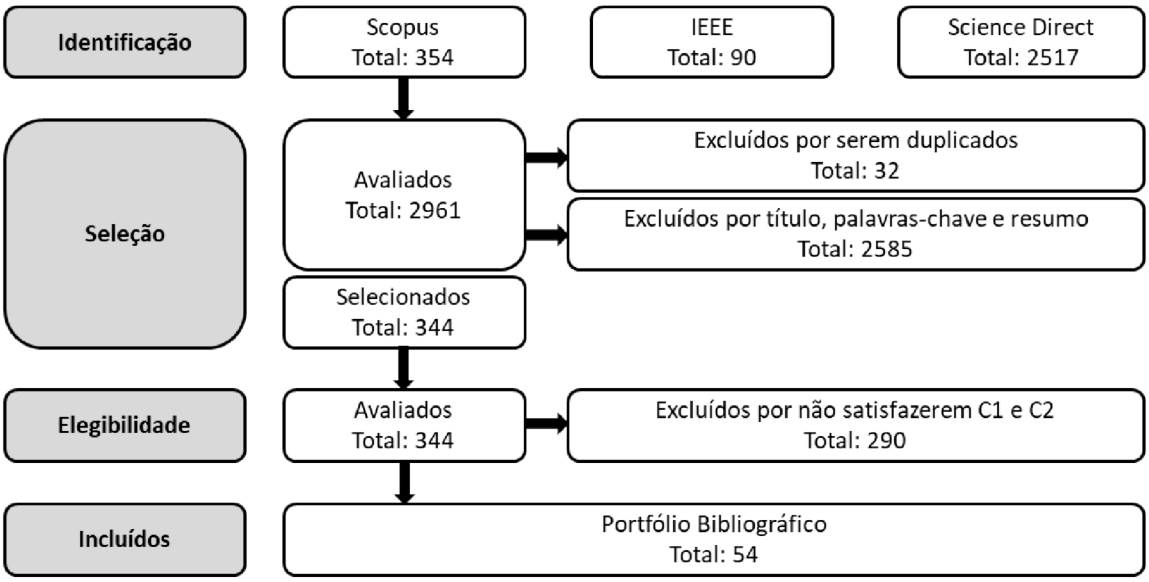
Obtido o PB, foi realizada a bibliometria, com o objetivo de ampliar o entendimento acerca do tema estudado. Nesta etapa, são extraídas informações relevantes, possibilitando reunir os resultados de diferentes estudos e compreender suas características. Para isso, foram utilizadas técnicas avaliativas e relacionais, que permitiram identificar o crescimento da literatura e a amplitude da utilização dos métodos, revelando o que foi produzido na área do conhecimento.

No primeiro critério, os 54 artigos foram analisados em relação ao ano de publicação. Assim, conforme demonstrado na Figura 2, pode-se observar o crescimento das publicações a

partir de 2011 e a linha de tendência a partir da média móvel de dois períodos confirma a tendência de aumento das publicações nessa temática.

Figura 1.

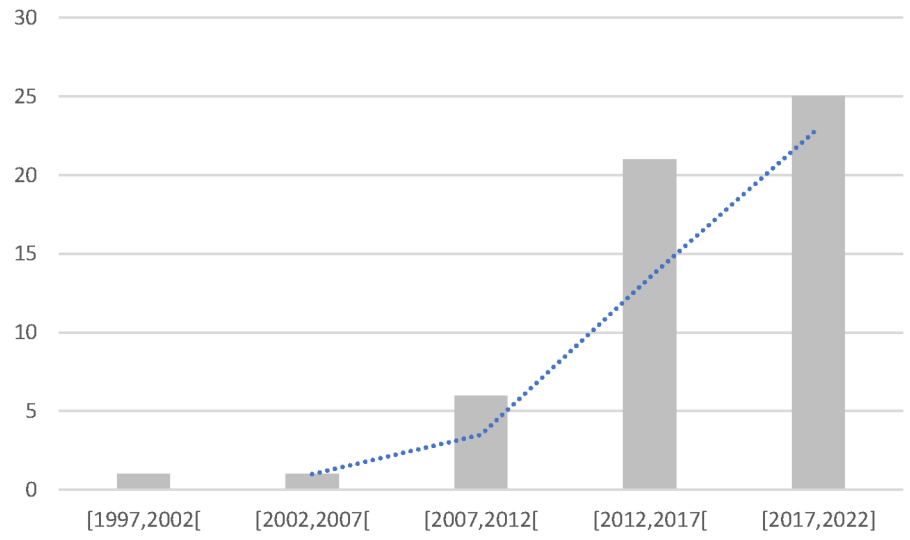
Resultados das buscas nas bases de dados e filtragens dos artigos.



Fonte: elaboração própria.

Figura 2.

Número de publicações por ano.



Fonte: elaboração própria.

Embora se verifiquem estudos desde a segunda metade da década de 1990, essa área foi visivelmente impulsionada pela evolução tecnológica. Estima-se que isto se deva ao fato de que a informática tem permitido a codificação computacional de algoritmos complexos e com a criação de aplicativos e *softwares* os métodos multicritério podem ser operacionalizados de forma rápida e de fácil manuseio. Logo, métodos que antes não eram aplicados, devido à grande complexidade, atualmente podem ser utilizados com o apoio dos DSS.

No segundo critério da bibliometria, as produções foram examinadas quanto às revistas científicas, conforme a Figura 3. Observa-se que a maioria das publicações estão concentradas em revistas das áreas de matemática aplicada, computação, transportes e na área multidisciplinar em ciências técnicas e engenharia.

Além destas, também foram verificadas revistas nas áreas de pesquisa operacional (PO), tecnologias da informação e comunicação, saúde pública, administração, desenvolvimento da área de petróleo e ciências sociais, o que demonstra a diversidade de áreas de concentração dos estudos, condizente com o caráter multidisciplinar da PO.

Diversas áreas do conhecimento são requeridas para integrar a PO, como matemática, administração, computação e psicologia. No entanto, essa multidisciplinaridade não compreende apenas a construção dos métodos, mas também o contexto de aplicação dos modelos. Assim, considerando-se que as técnicas de otimização, de tomada de decisão e de apoio à decisão desenvolvidas na PO podem ser aplicadas à diferentes campos, o terceiro critério analisado na bibliometria buscou verificar as aplicações dos modelos desenvolvidos.

A partir da Figura 4 pode ser observada uma grande diversidade nas áreas de aplicação, se destacando a seleção de fornecedores, gestão de projetos, logística de transporte intermodal, manufatura, marketing, problemas de roteamento de localização e tomada de decisão em grupo.

Com base nas análises realizadas, pode-se concluir que a utilização de algoritmos evolucionários no processo de tomada de decisão multicritério, intensificada pelas ferramentas computacionais, tem sido aplicada em diversos contextos. Isso demonstra o potencial da PO e a importância da utilização de técnicas científicas para o apoio a decisões dos mais variados tipos.

Figura 3.

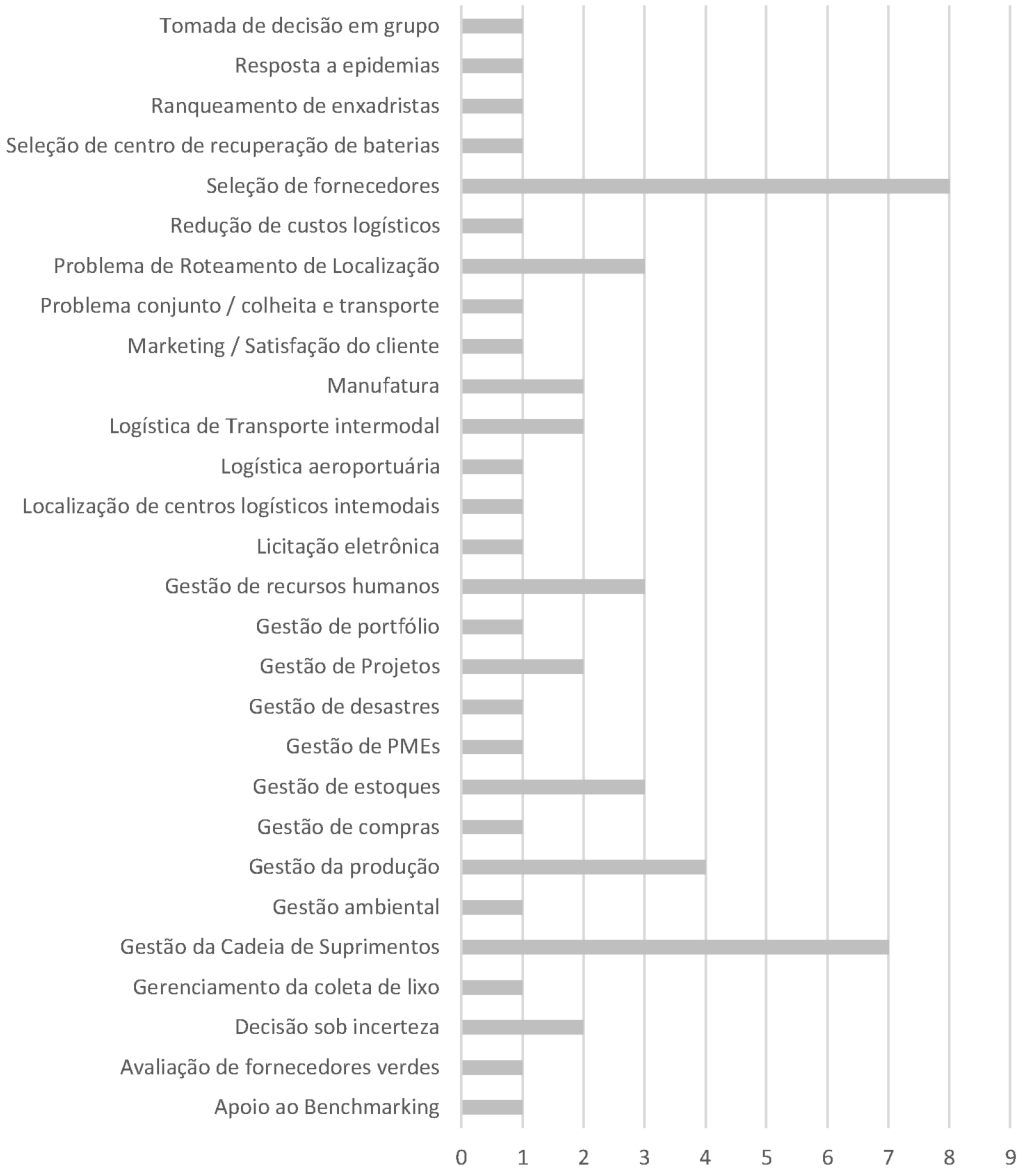
Número de publicações por revista.



Fonte: elaboração própria.

Figura 4.

Áreas de aplicação dos modelos.



Fonte: elaboração própria.

No quarto critério, foram observados os métodos multicritério e as metaheurísticas utilizadas nos modelos. A Figura 5 apresenta os resultados desta análise, a qual demonstra que dentre os algoritmos evolucionários, o Algoritmo Genético (AG) é o mais utilizado. Em seguida aparecem os Algoritmos Heurísticos, Recozimento Simulado, Otimização por Enxame de Partículas e Redes Neurais.

Figura 5.

Métodos multicritério e metaheurísticas.



Fonte: elaboração própria.

Em relação aos métodos multicritério, o AHP (Saaty, 1977) foi o mais recorrente, sendo utilizado em 12 pesquisas, se destacando a utilização da Lógica Fuzzy para o tratamento das incertezas. Esse resultado reforça o potencial do AHP, que é o método multicritério de agregação mais utilizado em estudos de tomada de decisão (Longaray et al., 2016). Da mesma forma, mostra a competência da Lógica Fuzzy para tratar as subjetividades das avaliações dos decisores.

Observam-se também a utilização de outros métodos consagrados, como DEA (Charnes, Cooper & Rhodes, 1978), TOPSIS (Hwang & Yoon, 1981), ELECTRE (Roy, 1968), PROMETHEE (Brans & Vincke, 1985), Programação Linear e Programação Não Linear. Ou seja, os artigos do PB utilizam tanto métodos derivados da Teoria da Utilidade Multiatributo ou do Critério Único de Síntese e métodos de sobreclassificação, quanto métodos interativos.

Assim, é inferido que o AG consiste em um algoritmo computacional alinhado às metodologias multicritério, podendo ser utilizado para a tomada de decisão de forma eficaz. Da análise dos artigos do PB, observou-se que o AG foi aplicado em diversas áreas, como gestão de fornecedores, logística de transporte intermodal, gestão da cadeia de suprimentos, gestão da produção, gestão de projetos, gestão de estoque, gestão de compras, gestão de Pequenas e Médias Empresas (PME), gestão de recursos humanos, logística aeroportuária, decisão em licitações eletrônicas, tomada de decisão em grupo e decisão sob incerteza. Demonstrando assim o potencial do AG para a tomada de decisões em contextos diversos.

É importante considerar que a PO está intimamente relacionada à construção de modelos e algoritmos que facilitam a análise de problemas complexos do mundo real e que essa complexidade é responsável pela dimensionalidade dada ao problema (Zopounidis & Pardalos, 2010). Assim, a escolha do método para a construção do modelo ou para selecionar a alternativa ótima dependerá das características do contexto de decisão.

Nesse sentido, a Figura 6 apresenta os resultados referentes às combinações de métodos utilizadas. O resultado mostra a competência da associação de métodos para a obtenção de resultados eficazes, tornando o modelo desenvolvido mais robusto. A partir da revisão da literatura, pode-se constatar que os modelos híbridos possuem a capacidade de gerar bons resultados e soluções para problemas reais e que lidem com aspectos computacionais para resolver problemas de grande porte.

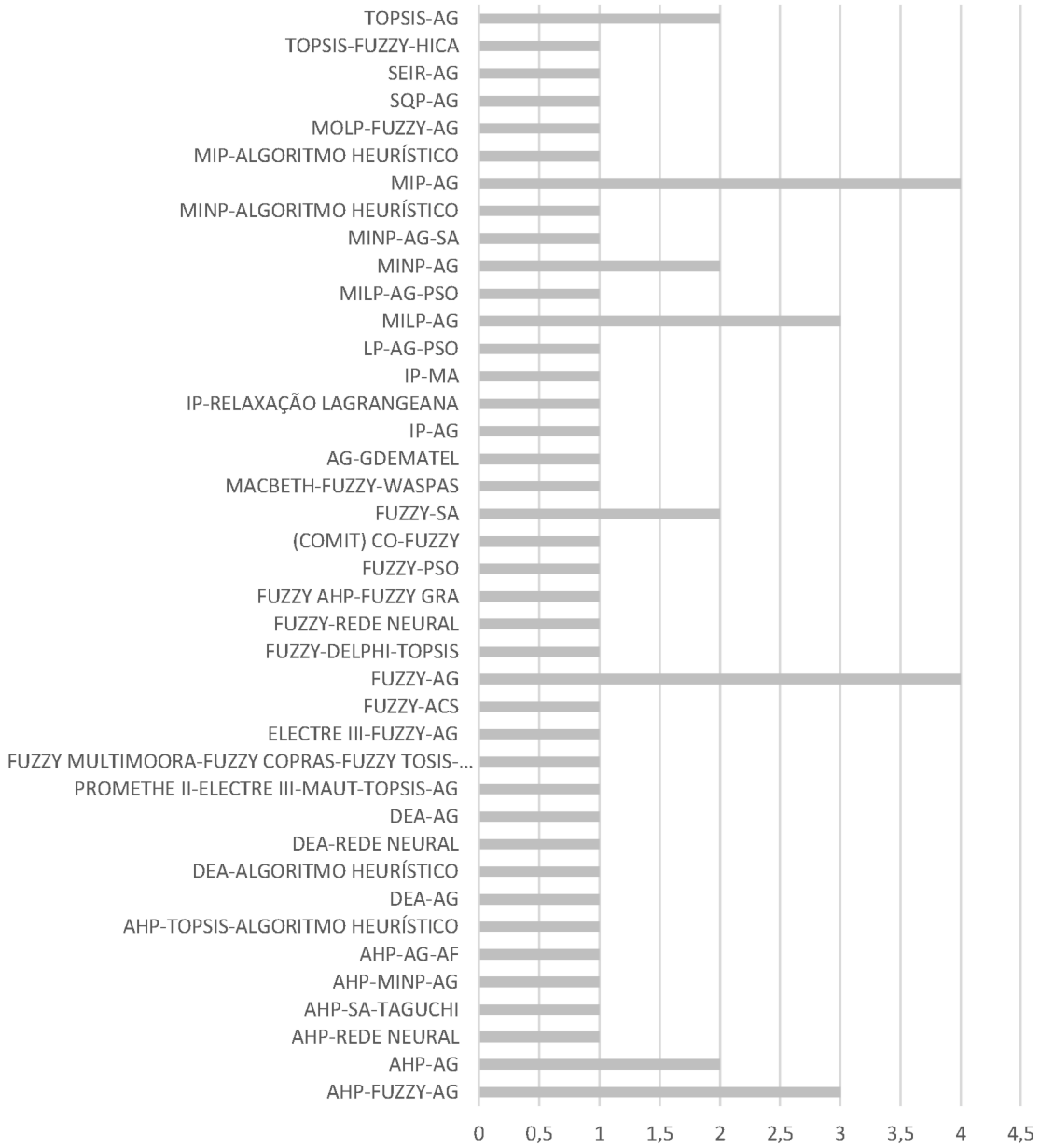
Dos 54 artigos do PB, 65 por cento apresentaram um AG associado a algum método, o que demonstra sua adaptabilidade e facilidade de implementação. O resultado observado vai ao encontro de Costa et al. (2005), que afirmam que o AG é uma técnica de otimização estocástica computacional poderosa e, provavelmente, a mais importante técnica de computação evolucionária.

Além da simplicidade, os AGs trabalham com um conjunto de soluções, assim, a cada rodada, um conjunto de saídas podem ser oferecidas ao decisor para apoiá-lo em sua

decisão, o que o torna uma ferramenta adequada à resolução de problemas multiobjetivos. Para melhor compreender a utilização dos AG nos estudos, a Figura 7 apresenta a compilação dos tipos de AGs utilizados.

Figura 6.

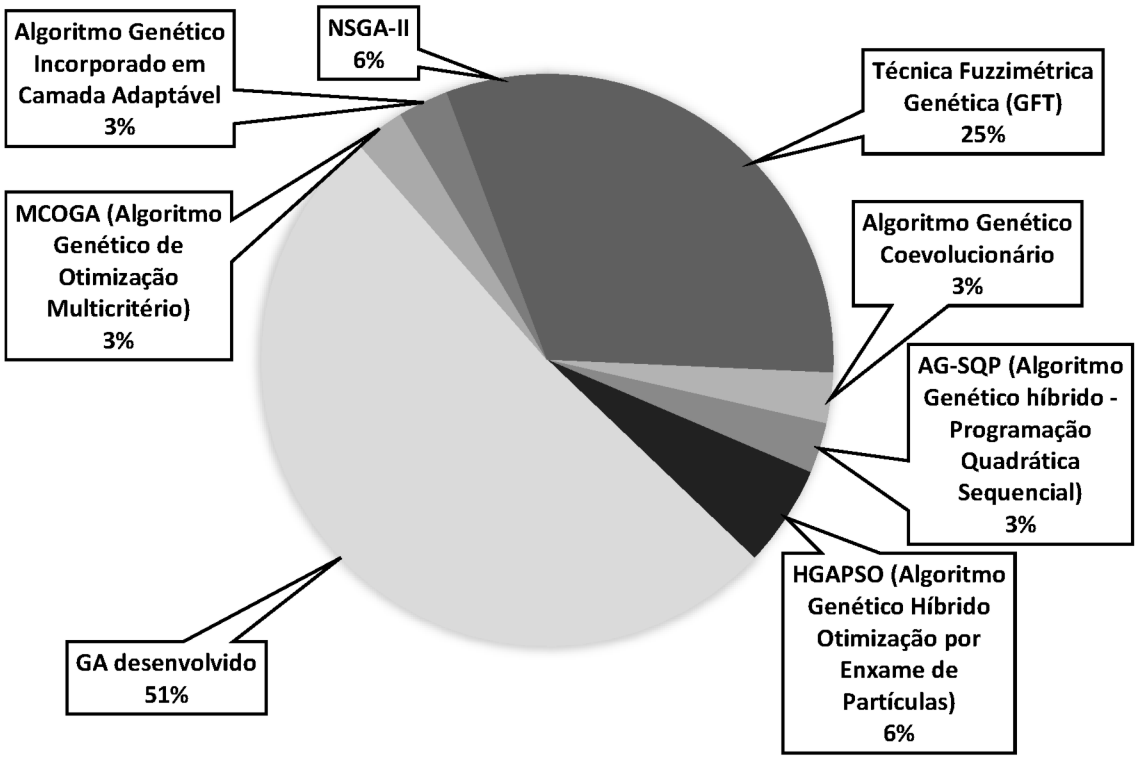
Combinações de métodos.



Fonte: elaboração própria.

Figura 7.

Tipos de Algoritmos Genéticos utilizados nos trabalhos do PB.



Fonte: elaboração própria.

Para ampliar ainda mais o conhecimento sobre o tópico, foram utilizadas técnicas de análise relacional com auxílio do *software* VOSviewer versão 1.6.18. A Figura 8 apresenta a análise de coautoria. O gráfico gerado demonstrou que o PB está dividido em 45 *clusters*. O maior deles, evidenciado em vermelho, corresponde a um conjunto de nove autores, do qual destaca-se Wang, Y., que trabalha em colaboração com os outros oito autores que compõem o *cluster* através de dois artigos.

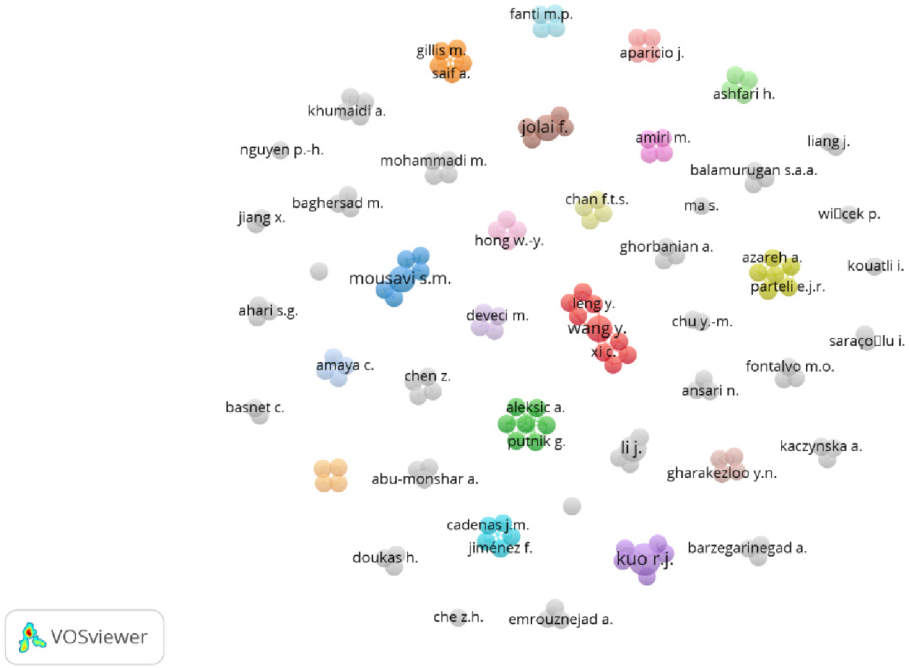
O segundo maior *cluster*, composto por sete itens, é o de Aleksic, A., em verde. Os *clusters* de Mousavi, S.M., Azareh, A. e Kuo, R.J., em azul, amarelo e roxo, respectivamente, são compostos por seis itens. No entanto, destaca-se o *cluster* de Kuo, R.J., que é composto por três artigos, o que demonstra maior colaboração desse autor. Já o *cluster* de Mousavi, S.M. conecta dois trabalhos.

O oitavo *cluster*, em marrom claro, mostra dois artigos interligados por Jolai, F. Por fim, embora o 22º *cluster* seja composto por apenas quatro autores em colaboração, Li, J. une

dois artigos. Desta forma, entende-se que os autores que apresentam mais relações de colaboração são os que mais se destacam no PB.

Figura 8.

Correlação entre autores.



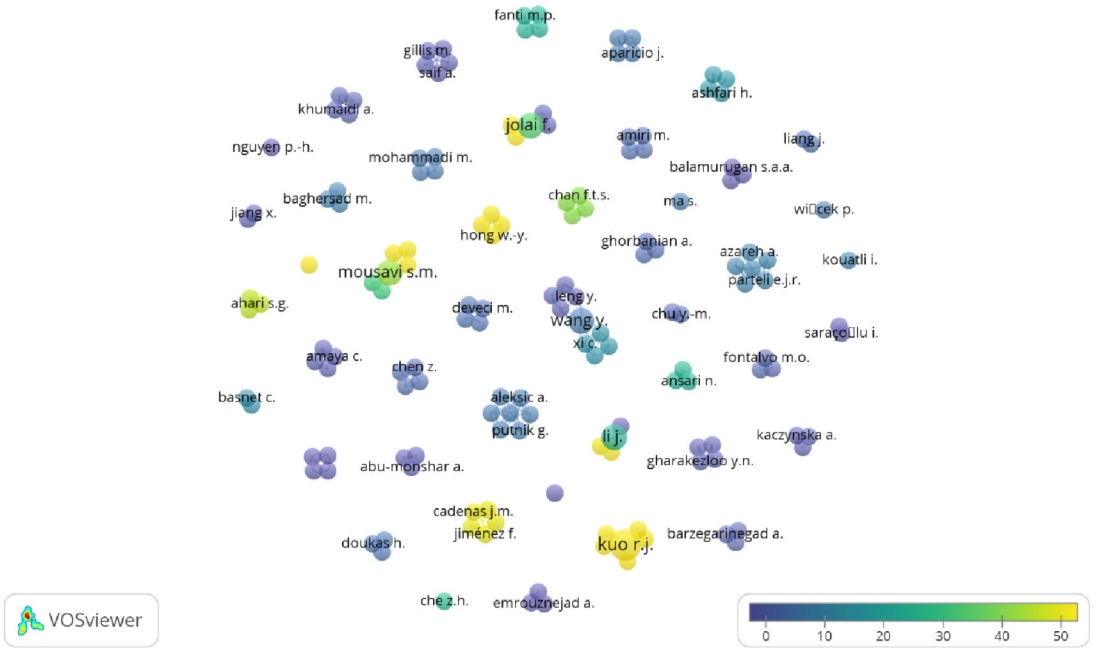
Fonte: elaboração própria.

A Figura 9 apresenta a análise das médias das citações dos autores. Pode se observar que em média a rede de colaboração de Kuo, R.J. é bastante citada. Se destacam também as redes de colaboração de Jolai, F., Mousafi, S.M. e Li, J. Já Kayikci, Y., Hong, W-Y. e Cadenas, J.M. formam três *clusters* que, embora não tenham se destacado quanto à colaboração entre autores, apresentam alta média de citação. Além disto, se observa que essas publicações são mais antigas, o que pode demonstrar que se tratam de referências importantes.

A partir da Figura 10, observa-se que o AG é a palavra-chave que mais interage entre as diversas pesquisas. Das palavras-chave que mais se relacionaram, três *clusters* podem ser observados, dos quais o AG colabora com todos. Isso reforça o potencial do AG observado na bibliometria.

Figura 9.

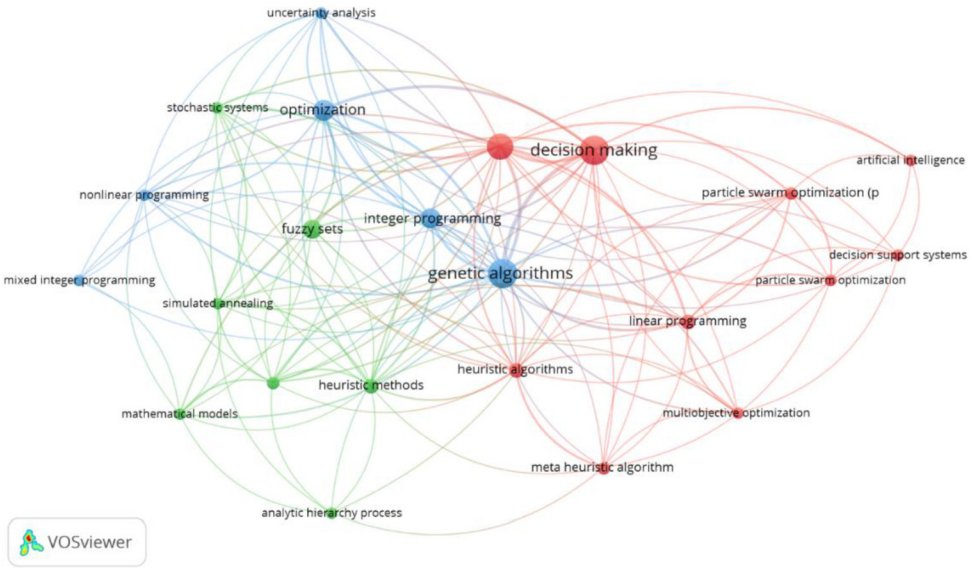
Média das citações dos autores.



Fonte: elaboração própria.

Figura 10.

Relação entre palavras-chave.



Fonte: elaboração própria.

A tabela 2 apresenta a síntese dos artigos e a Figura 11 demonstra a análise esquemática dos métodos utilizados pelos autores. A partir da análise dos estudos que compuseram o PB, se conclui que os AG são uma metaheurística aplicada com eficácia na tomada de decisão multicritério. Por possuírem a habilidade de gerar um conjunto de soluções a cada rodada, têm sido utilizados para resolver problemas de programação linear e não linear.

Percebe-se também o movimento de pesquisadores no intuito de combinar métodos multicritério de agregação, como o AHP e o TOPSIS, e métodos de sobreclassificação, como o ELECTRE e o PROMETHEE, com os AG, a fim de melhorar o tempo computacional de execução destes métodos (Zhang et al., 2013; Khumaidi et al., 2020; Wang et al., 2015; Kouatli, 2013; Ma, 2016; Kayikci, 2010; Kannan et al., 2021; Kamali et al., 2011; Che, 2012; Sadeghi et al., 2016; Leyva-López et al, 2022; Xidonas et al., 2021). Este fato se deve à busca por maior agilidade computacional para os *softwares* de tomada de decisão. Com o desenvolvimento dos DSS, a utilização de métodos multicritério para o apoio à gestão têm se tornado mais acessíveis, viabilizando sua utilização por decisores e especialistas, resultando em ferramentas com melhor desempenho computacional.

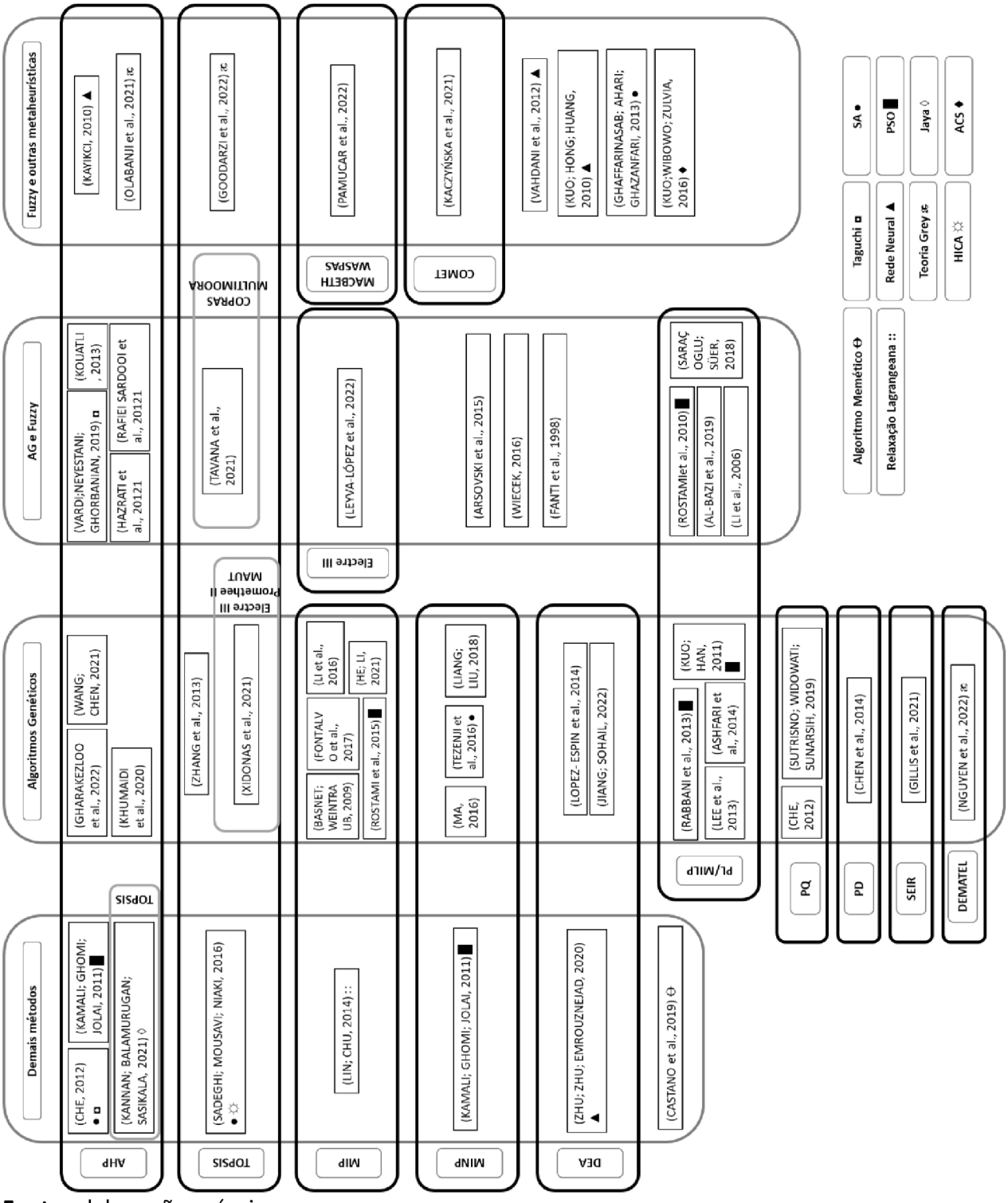
A subjetividade que permeia o contexto decisório também tem sido considerada na tomada de decisão. Alguns métodos da Família ELECTRE, por exemplo, leva em consideração a subjetividade do decisor ao atribuir as avaliações. No ELECTRE III, o índice de credibilidade $\sigma(a, b)$ se assemelha conceitualmente aos conjuntos Fuzzy, onde $\sigma(a, b)$ recebe valores no intervalo de 0 a 1 e os limites de concordância e discordância são graduais. Essa relação de sobreclassificação do ELECTRE III também é utilizada no Electre TRI-nB, no qual as categorias são definidas por perfis limitantes (Bouyssou et al., 22). Alinhado a isso, Leyva-López et al. (2022) utilizam o NSGA II para otimizar o ELECTRE III e obter um ranqueamento final das alternativas.

Diversos métodos para tratar a incerteza são descritos na literatura, dos quais pode-se ressaltar a teoria Fuzzy intuicionista (Atanassov & Gargov, 1989), a teoria dos conjuntos neutrosóficos (Smarandache, 1995) e a teoria dos números grey (Deng, 1982). Dentre os estudos do PB, prevalece o uso da teoria dos conjuntos Fuzzy para tratar a incerteza e a subjetividade que permeiam o processo decisório, permitindo que o decisor inclua suas dúvidas nas avaliações. Além disso, verifica-se que a teoria dos conjuntos Fuzzy é aplicada em associação com diversas metodologias de forma eficiente, incluindo os AG. Outras variações da Teoria Fuzzy, como a Teoria dos Conjuntos Fuzzy Intuicionista e o Hesitante Fuzzy, por exemplo, têm sido utilizadas para avaliação em grupo e decisão sob hesitação.

Conforme pode ser observado na Figura 12, em relação às áreas de aplicação, foram utilizados o AHP, TOPSIS e programação linear, não linear e dinâmica combinados à metaheurísticas para os problemas da cadeia de suprimentos e gestão de estoque. Para seleção de pessoas ou de fornecedores, houve o predomínio do AHP, TOPSIS e Electre III combinados à metaheurísticas. Já na gestão logística ou seleção de local, predominaram estudos utilizando programação linear, não linear e dinâmica combinados à metaheurísticas, além da teoria Fuzzy, AHP e MACBETH.

Figura 11.

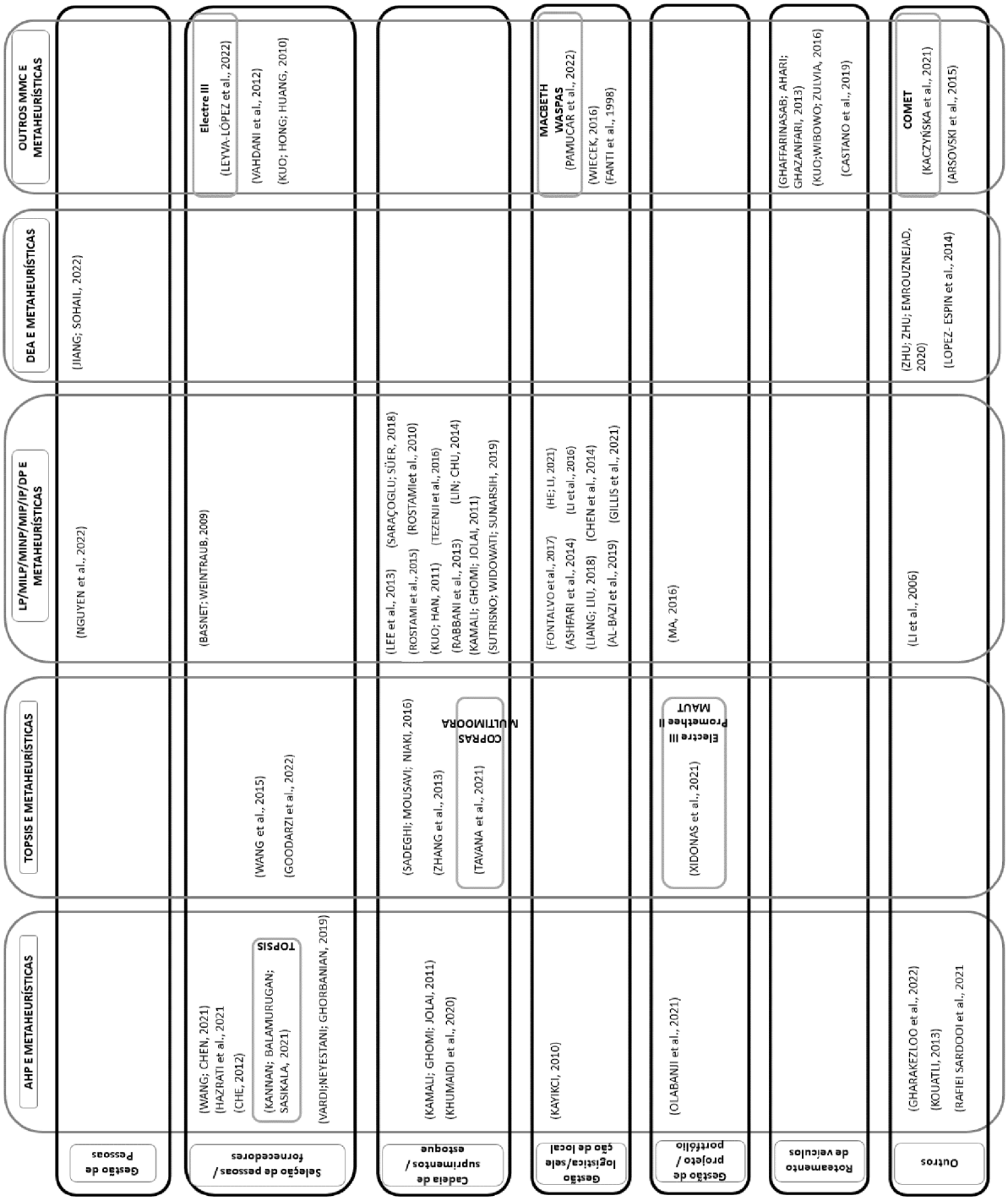
Síntese dos métodos utilizados nos artigos do Portfólio Bibliográfico.



Fonte: elaboração própria.

Figura 12.

Síntese das áreas de aplicação dos modelos nos artigos do Portfólio Bibliográfico.



Fonte: elaboração própria.

Tabela 2.

Metassíntese dos artigos do Portfólio Bibliográfico.

Referência	Aplicação	Características Principais
Basnet e Weintraub (2009)	Seleção de fornecedores	Nesse estudo, o problema de decisão é formulado como um problema bicritério de minimização de custos e minimização do número de fornecedores. Os autores apresentam um AG Multiobjetivo para gerar soluções ótimas, onde cada cromossomo é um conjunto de fornecedores. Com isso, percebe-se a potencialidade dos AG para a otimização de problemas multiobjetivo. Além disso, os resultados do estudo demonstram que as soluções geradas pelo AG ficaram próximas às soluções reais, demonstrando que o AG não apenas é eficiente, como também eficaz, sendo capaz de chegar às soluções próximas à fronteira de Pareto, desde que seus parâmetros sejam corretamente calibrados.
Chen e Schonfeld (2012)	Otimização da logística intermodal, com foco na logística verde	Foi desenvolvido um método híbrido que combina Programação Quadrática e AG (AG-SQP), a fim de otimizar a integração de transportes intermodais na logística verde. Assim como Basnet e Weintraub (2009), os autores utilizam o AG para a otimização do problema multiobjetivos. A SQP produz a solução inicial e o AG gera novas soluções, que desafiam a solução inicial, prevalecendo a solução dominante. O principal achado, além do resultado eficaz, foi que o AG reduziu o tempo de execução do problema. Desta forma, entende-se que o potencial dos AG para a geração de soluções com menor tempo computacional pode ser benéfico em problemas de grandes proporções.
Kuo e Han (2011)	Cadeia de suprimentos	Duas metaheurísticas são utilizadas para otimizar o Problema de Programação Linear de Dois Níveis (BLPP) de distribuição da cadeia de suprimentos, AG e PSO. Foram comparadas três combinações de métodos híbridos, HGAPSO-1, HGAPSO-2 e HGAPSO-3 (esse último proposto pelos autores). Os resultados demonstraram que os métodos híbridos funcionaram melhor do que o AG e o PSO isoladamente e se verificou que o HGAPSO-3 foi superior aos outros dois. Ressalta-se, portanto, a competência dos métodos híbridos.
Zhang et al. (2013)	Cadeia de suprimentos	O AG para otimização multicritério (MCOGA) é proposto com base no TOPSIS, no qual o valor do gene representa o número do fornecedor e a localização do gene representa o número do pedido. Logo, os cromossomos gerados são as alternativas do TOPSIS e o valor de cada alternativa é o valor de aptidão. Desta forma, pode-se observar a flexibilidade dos AG para trabalhar tanto com problemas de otimização em métodos interativos, quanto com métodos baseados no criterio único de síntese.

Chen et al. (2014)	Tomada de decisão em projeto de Sistema de gerenciamento de infraestrutura de transporte	Utilizam um AG para resolver o problema de alocação de recursos (orçamento) e Programação Dinâmica para resolver o modelo de distribuição de projetos, em dois processos interconectados de alocação de recursos e distribuição de projetos. Observa-se uma forma diferente de combinar os métodos, na qual os autores utilizam o AG em uma etapa e a Programação Dinâmica em outra. Ou seja, em cada etapa, consideram-se as características do problema para a seleção do método mais alinhado com o objetivo, combinando posteriormente os resultados obtidos.
He e Li (2021)	Colheita e transporte, como um sistema integrado	Nesse estudo, o problema de roteamento de veículos com várias viagens ao longo do dia é descrito como um Problema de Programação Inteira Mista e um algoritmo híbrido, que combina AG com um algoritmo de distribuição, é desenvolvido para resolver o problema de otimização. Novamente, observa-se a escolha pela hibridização de metaheurísticas, a fim de incrementar o processo de otimização.
Fontalvo et al. (2017)	Gestão logística	Apresenta um modelo estratégico de localização de estoque, multiproduto e com demanda variável. Para resolver o complexo problema de Programação Inteira Mista, foi utilizado AG. A utilização do AG para a otimização do problema permitiu a consideração de aspectos estratégicos e táticos para a tomada de decisão.
Rabbani et al. (2013)	Cadeia de suprimentos	O problema de roteamento de estoque é formulado como uma Programação Linear Inteira Mista (MILP) e é proposto um algoritmo híbrido com AG combinado com PSO. Os autores subdividem o problema em duas etapas e utilizam o AG para encontrar a solução elegível para o primeiro subproblema e o PSO para resolver o segundo subproblema. Pode-se observar que nesse estudo, para cada etapa foi utilizado um algoritmo metaheurístico para a otimização, considerando as características de cada subproblema.
Ma (2016)	Gerenciamento de portfólio de produtos	Nesse estudo, um AG foi utilizado para otimizar o Problema de Programação Inteira Linear, formulado como um modelo de dois níveis líder-seguidor, no qual as decisões do líder servem como restrições para o problema de otimização dos seguidores. Assim, verifica-se a versatilidade dos AG, que podem ser combinados para resolver diferentes problemas de otimização.
Lee et al. (2013)	Gestão de estoque	Nesse artigo, um AG é desenvolvido para resolver o problema de otimização de um modelo de Programação Linear Inteira Mista para o problema de dimensionamento de lote com múltiplos fornecedores, vários períodos e desconto por quantidades. Observa-se a partir desse estudo, a habilidade dos AG resolverem problemas considerando diversos objetivos.

Tezenji et al. (2016)	Gestão da cadeia de abastecimento	Nesse artigo, foi desenvolvido um modelo de Programação Não Linear Inteira Mista (MINP), resolvido através de dois algoritmos metaheurísticos: AG e Recozimento Simulado (SA). O SA apresentou melhores resultados. Observa-se que não foi utilizado um método híbrido, mas feita a comparação do desempenho das duas metaheurísticas para a otimização do problema proposto.
Lopez-Espin et al. (2014)	Eficiência de unidades e *Benchmarking*	Os autores estudam DEA com base em alvos eficientes mais próximos, para que as DMUs ineficientes possam encontrar a fronteira eficiente de forma mais fácil. Para isso, o problema é abordado por meio de AG. É utilizado ainda um método de busca aleatória em algumas partes do AG a fim de explorar melhor o espaço de busca. Esse estudo demonstra a capacidade do AG para otimização de método de programação linear, como também a hibridização de metaheurísticas para potencializar o procedimento de otimização.
Khumaidi et al. (2020)	Gestão da cadeia de abastecimento	Nesse estudo, um AG foi combinado ao método multicritério AHP para analisar problemas de localização de distribuição logística, o AG obtem algumas soluções ótimas sobre fatores econômicos e o AHP avalia as soluções. A partir desse estudo, observa-se mais uma aplicação de AG combinado a método multicritério de agregação.
Ashfari et al. (2014)	Gestão da cadeia de abastecimento	Os autores propõem um modelo de Programação Linear Inteira Mista Estocástica (SMILP) para otimizar múltiplos objetivos, minimizar o custo de instalação, custos de transporte e gerenciamento de estoque e maximizar a satisfação do cliente com uma perspectiva sustentável. Para a resolução do problema é utilizado AG multiobjetivo (SMOGA). Observa-se nesse estudo a competência do AG para otimizar problemas com múltiplos objetivos, tanto em problemas de minimização, quanto de maximização.
Sutrisno et al. (2019)	Seleção de fornecedores e gerenciamento de estoque	Nesse estudo, os autores utilizaram um AG para fornecer soluções para o problema de Programação Quadrática Inteira de seleção probabilística de fornecedores e gerenciamento de estoque, com parâmetros aleatórios no AG, o que resultou no crescimento exponencial do número de variáveis. Assim, os autores concluíram que o AG não é preferido na resolução de problemas de grande escala no que diz respeito à seleção de fornecedores e gestão de estoque. Isso demonstra a importancia tanto da calibração adequada dos parâmetros do AG, quanto da escolha da metaheurística mais alinhada às características do problema.
Li et al. (2016)	Gestão da produção	Nesse estudo, os autores propuseram um novo AG para resolver um modelo de Programação Inteira Mista para maximizar os benefícios econômicos, otimizando o cronograma de produção e estabelecendo uma escala de produção.

Rostami et al. (2015)	Gerenciamento de lotes de entrega	Nesse estudo, são propostos três algoritmos para solucionar o problema de Programação Inteira Mista (MIP), um usando o método B&B (*Branch and Bound algorithm*), um algoritmo DPSO e o último utilizando o AG. O DPSO e o AG foram utilizados para melhorar o tempo computacional de execução do modelo. Os resultados obtidos demonstram que a integração dos métodos podem levar ao aumento da capacidade de tomada de decisão.
Liang e Liu (2018)	Gestão de resíduos sólidos urbanos	Nesse artigo, os autores projetam um AG para otimizar o problema de Programação Não Linear Inteira Mista (MINP), onde a função objetivo minimiza os custos anuais de operação. Considera-se que o AG é aplicado na otimização de um problema multiobjetivo, já que os custos anuais são subdivididos em diversas categorias orçamentárias.
Arsovski et al. (2015)	PME	Nesse estudo, os fatores potenciais verificados de resiliência organizacional (ORPFs) são estimados usando a Teoria dos Conjuntos Fuzzy. Um AG é proposto para obter a combinação de uso de recursos e melhoria dos ORPFs que maximize a resiliência geral. Observa-se, portanto, a utilização de um método da *soft computing* com uma metaheurística para a otimização de um problema multiobjetivo, permitindo contemplar os aspectos de incerteza do problema.
Wang et al., 2015	Licitação eletrônica	Os autores apresentam uma abordagem híbrida que combina AG e TOPSIS, para habilitar e procurar o melhor proponente em licitação eletrônica, onde os atributos dos proponentes são expressos por um conjunto intuicionista de números Fuzzy. Esse estudo destaca-se por apresentar o AG para otimização e a Teoria Fuzzy para incorporar a incerteza do contexto, combinados a um método multicritério de agregação.
Kouatli, 2013	Decisão sob incerteza	O autor propõe uma Técnica Fuzzimétrica Genética (GFT), introduzindo um sistema híbrido onde a lógica Fuzzy lida com elementos de incerteza e um AG aborda a questão da otimização e ajuste. O sistema resulta uma saída, que após ser defuzzificada é multiplicada por um fator de ponderação para se obter a saída discreta. Este fator de ponderação é determinado por meio do AHP. O estudo demonstra, assim, a possibilidade de serem utilizados diferentes métodos em cada etapa do modelo para aprimorar os resultados obtidos.
Rostami et al. (2010)	Cadeia de suprimentos	Nesse estudo, pode-se observar novamente a utilização de diferentes métodos em cada etapa do modelo. Para resolver o problema de Programação Linear Multiobjetivo Possibilístico foi aplicada uma abordagem em duas etapas. Na primeira, o modelo original é convertido em um equivalente e na segunda etapa é usada uma programação por metas Fuzzy. É proposto um AG para a resolução do problema, e para a obtenção da população inicial do AG, foi utilizado PSO.
Al-Bazi at al. (2019)	Gestão aeroportuária	Os autores propõem um modelo de Programação Linear Fuzzy e AG, para maximizar a receita de uma rede de voos de grande

		escala com vários trechos, minimizando o número de assentos vazios e o número de passageiros negados. Observa-se a combinação de métodos para a otimização, considerando as incertezas do problema.
Fanti et al. (1998)	Agendamento de tarefas em sistemas de produção flexíveis	Nesse estudo, os autores utilizaram Teoria Fuzzy e AG. A Teoria Fuzzy é aplicada para a obtenção da medida de desempenho, que é convertida em valores Fuzzy e é computado o índice global. Já o AG faz a busca dos pesos adequados através de um processo de otimização. Dessa forma, observa-se a construção de um modelo que segue dois caminhos, um que gera valores fuzzy e o outro que gera os pesos através do AG.
Wiecek (2016)	Controle de estoque e logística sob incerteza	O artigo apresenta uma proposta de aplicação combinada de lógica Fuzzy e AG para controlar o processo de aquisição em empresas. Compreende-se, assim, que o modelo é capaz de contemplar tanto os aspectos aleatórios, quanto de incertezas.
Li et al. (2006)	Decisão sob incerteza	Nesse artigo, foi utilizado o conceito da abordagem de compromisso, que busca soluções comprometidas ao invés da fronteira ótima de Pareto. Assim, foi desenvolvido um AG baseado em simulação aleatória Fuzzy para obter uma solução de compromisso de uma Programação Linear Multiobjetivo com coeficientes Fuzzy. Logo, pode-se concluir a partir desse trabalho que o AG é capaz de gerar tanto soluções ótimas globais, quanto encontrar ótimos locais.
Saraçoglu e Süer (2018)	Manufatura	Nesse estudo, o AG é utilizado para otimizar o Problema de Programação Linear Inteira Mista Fuzzy. Dessa forma, considerando-se que o modelo desenvolvido é composto por um problema multiobjetivo, pode-se verificar que a combinação de métodos é capaz de solucionar problemas complexos.
Vardi et al. (2019)	Seleção de fornecedores e alocação de pedidos	Nessa pesquisa, foram formulados dois modelos de Programação Linear Inteira Multiobjetivos, um utilizando um AG desenvolvido e o outro, o NSGA. O AHP-Fuzzy foi utilizado para determinar os pesos dos critérios na etapa inicial dos dois modelos. O método Taguchi foi utilizado para ajustar os parâmetros dos algoritmos propostos. Esse estudo demonstra a construção de um modelo com a utilização de diferentes métodos combinados, a fim de lograr seus potenciais.
Kayikci, 2010	Seleção de local para centros logísticos de transporte intermodal	Combina Fuzzy-AHP e Rede Neural Artificial (ANN) para o processo de tomada de decisão. O Fuzzy-AHP é utilizado para obter os pesos dos critérios e a ANN é desenvolvida para desempenhar o processo de tomada de decisão. Esse estudo destaca-se, pois apresenta a utilização da *Machine Learning* e da *soft computing* combinados a um método multicritério de agregação.
Kuo et al. (2016)	Roteamento de veículos	Nesse estudo, os autores utilizam a Teoria Fuzzy para modelar o problema, considerando as incertezas do contexto em que

		se insere, e a otimização do problema é feita por um algoritmo de otimização por colônia de formigas Fuzzy (ACS).
Vahdani et al. (2012)	Seleção e avaliação de fornecedores	Nesse estudo, os autores propõem um modelo computacionalmente eficiente chamado *Locally Linear Neuro-Fuzzy* (LLNF) para prever a avaliação de desempenho de fornecedores. O modelo proposto é treinado por um algoritmo de aprendizagem - o *Locally Linear Model Tree* (LOLIMOT). Pode-se observar, novamente, a utilização da *Machine Learning*, através de conceitos de redes neurais, e da *soft computing*, a partir da Teoria Fuzzy para englobar as incertezas no modelo.
Ghaffari-Nasab et al. (2013)	Roteamento de veículos	Os autores consideram o problema de roteamento e localização com demandas Fuzzy, sendo a demanda do cliente e a capacidade do veículo números Fuzzy triangulares. O modelo híbrido integra simulação estocástica (para estimar o valor real das demandas Fuzzy de cada cliente) e algoritmo de recozimento simulado (para obter o custo esperado) para resolver o problema.
Kuo et al. (2010)	Seleção de fornecedores	Nesse estudo, é proposto um modelo PSO-FNN, que utiliza uma rede neural Fuzzy, na qual os pesos iniciais são gerados pelo PSO, para manipular dados qualitativos. Após, os resultados são integrados por meio de uma rede neural artificial *feed-forward* (ANN) com algoritmo de aprendizado de retropropagação de erro (EBP). Dessa forma, pode-se observar que a Teoria Fuzzy tem sido amplamente empregada para o tratamento das incertezas no processo de tomada de decisão e que diferentes algoritmos metaheurísticos podem ser combinados para otimizar os resultados.
Zhu et al. (2020)	Manufatura	O estudo combina DEA-CCR com quatro algoritmos de *Machine Learning* (ML): Rede Neural de Retropropagação (BPNN-DEA); AG integrado com Rede Neural de Retropropagação (GANN-DEA); Vetor de Suporte de Máquinas (SVM-DEA); e Vetor de Suporte de Máquinas Aprimoradas (ISVM-DEA). Dessa forma, a ML analisa as DMUs que apresentam uma eficiencia, aprendendo as regras dessas DMUs. Após, o modelo é aplicado às DMUs que não tiveram suas eficiências analisadas por DEA. O estudo apresenta um avanço no método DEA, já que a utilização da ML permite que se realize a avaliação apenas na nova DMU.
Kannan et al. (2021)	Tomada de decisão em grupo para seleção de fornecedores	Os autores propõem uma abordagem metaheurística para desenvolver um modelo de tomada de decisão em grupo, que incorpora as informações heterogêneas por meio de um operador de Média de Potência Ponderada (WPA). Os pesos são gerados pelo AHP, e esses pesos são otimizados utilizando-se o algoritmo metaheurístico Jaya. Para a escolha da melhor alternativa foi utilizado TOPSIS.
Kamali et al. (2011)	Cadeia de suprimentos	Os autores desenvolveram um modelo de Programação Não Linear Inteira Mista Multiobjetivo e propuseram dois

		algoritmos metaheurísticos para resolver o problema (PSO e o algoritmo *Scatter Search* (SS)). O AHP foi usado para calcular o desempenho total do fornecedor em critérios qualitativos. Observa-se, novamente, a utilização de metaheurísticas para a otimização multiobjetivo.
Lin e Chu (2014)	Gerenciamento de linha de montagem de produtos mistos	No modelo matemático de Programação Inteira Mista formulado, o complexo espaço de solução torna o programa resultante difícil de resolver usando pacotes de otimização comercial. Portanto, uma heurística baseada em relaxação Lagrangeana foi desenvolvida para resolver este problema de forma eficiente.
Che (2012)	Seleção de fornecedores	Esse estudo demonstra a aplicação de diversos métodos para a otimização do modelo. O autor propõe um modelo de duas fases para encontrar as combinações adequadas de fornecedores. No Modelo 1, os fornecedores são divididos em *clusters*, dependendo da demanda do cliente, através de um algoritmo de agrupamento *k-means* e, para corrigir alguns erros do *k-means*, usa Recozimento Simulado (SA). No modelo 2, é obtida a classificação dos fornecedores mais eficientes através de um algoritmo SA, sendo que o nível adequado para cada parâmetro é definido pelo método Taguchi. O AHP é usado para ponderar os critérios.
Castaño et al. (2019)	Roteamento de veículos	A partir de dados coletados da plataforma *Uber movement,* usados para identificar os padrões de tráfego, duas abordagens diferentes são usadas para gerar soluções para um problema de roteamento e agendamento do técnico: Modelo de Programação Inteira (MIP) e um algoritmo memético.
Sadeghi et al. (2016)	Gestão de estoques	Nesse estudo, o modelo desenvolvido considera as demandas Fuzzy e o objetivo é encontrar uma solução quase ótima considerando múltiplos objetivos. Um algoritmo imperialista competitivo híbrido (HICA) é usado para achar a solução quase ótima e foi utilizado SA para validar o algoritmo HICA, sendo que a comparação dos dois algoritmos foi realizada através de TOPSIS.
Wang e Chen (2021)	Seleção de fornecedores	Os autores propõem uma abordagem mista, utilizando AHP–programação não linear inteira mista (MINLP)–algoritmo genético (AG). A abordagem proposta foi aplicada ao caso real de escolha de fornecedores alternativos diversificados em meio à pandemia de COVID-19. Nesse estudo, pode-se observar que o AG foi utilizado para otimizar o MINLP, além da combinação do método multiobjetivo interativo com o método multicritério de agregação, o que demonstra a versatilidade desses métodos.
Hazrati et al. (2021)	Seleção de fornecedores	Os autores desenvolveram um modelo para seleção de fornecedores considerando dois objetivos - minimizar os custos globais e maximizar a quantidade de produtos encomendados de diferentes fornecedores com base no valor do peso. Os pesos são calculados segundo diferentes critérios

		para cada fornecedor em diferentes períodos, usando o método Fuzzy-AHP. O modelo proposto foi resolvido usando a restrição epsilon em GAMS e algoritmo genético NSGA II no *software* MATLAB.
Rafiei Sardooi et al. (2021)	Gestão de desastres	Os autores descrevem um modelo híbrido que combina mineração de dados e métodos de tomada de decisão multicritério para mapeamento de perigo e vulnerabilidade para avaliar o risco de deslizamento de terra. A probabilidade de deslizamento de terra é mapeada usando três algoritmos de *Machine Learning* (ML) de última geração - Entropia Máxima, *Support Vector Machine* e AG — e os resultados são combinados com Fuzzy-AHP para obter o mapa de risco de deslizamento de terra.
Gharakezloo et al. (2022)	Gestão ambiental	Desenvolvem um modelo híbrido de tomada de decisão estatística para avaliar a vulnerabilidade do aquífero Shiraz, no sul do Irã, usando o algoritmo genético (GA), o método do processo de hierarquia analítica (AHP) e a análise fatorial (FA). Observa-se a combinação de um método multicritério de agregação, considerando dados probabilísticos e um algoritmo metaheurístico de otimização, o que demonstra a flexibilidade em se combinar os métodos.
Kaczyńska et al. (2021)	Ranqueamento de enxadristas	Usa o método COMET para o ranqueamento de enxadristas. O método COMET é um método híbrido que combina a tomada de decisão MCDM com método Fuzzy, englobando assim as incertezas do contexto através da *soft computing*.
Leyva-López et al. (2022)	Seleção de pessoas	A tarefa de seleção de pessoas é modelada como um problema de tomada de decisão multicritério, considerando diversas competências e habilidades para avaliar os candidatos a um cargo específico. Para isso, é utilizado o método Electre III para construir uma relação de outranking fuzzy e NSGA II para explorar tal relação e gerar um ranking como recomendação. Nesse estudo, se observa a utilização de um método multicritério de sobreclassificação com a Teoria Fuzzy e um algoritmo metaheurístico, aprimorando os resultados obtidos ao incorporar a incerteza e otimizar o resultado.
Xidonas et al. (2021)	Gestão de portfólio	Desenvolvem um sistema integrado para apoio à decisão para a gestão de portfólio de 2 etapas. Na primeira, são aplicados 4 métodos de tomada de decisão multicritério: PROMETHEE II, o ELECTRE III, o MAUT e o TOPSIS. Na segunda etapa, são aplicadas 4 métodos de programação matemática: um modelo de programação quadrática inteira mista, um modelo de programação de metas, um modelo de algoritmo genético e um modelo de fluxo PROMETHEE multiobjetivo. Observa-se nesse estudo que os autores realizaram uma ampla combinação de metodologias.
Gillis et al. (2021)	Resposta a epidemias	Propõem uma estrutura de otimização para ajudar os formuladores de políticas a selecionar políticas de fechamento, proteção e viagens para minimizar o número

		total de infecções com um orçamento limitado. A estrutura proposta combina um modelo compartimental SEIR modificado e estratificado por idade para avaliar o impacto das estratégias de resposta e um AG para buscar efetivamente as melhores estratégias.
Tavana et al. (2021)	Gestão da cadeia de suprimentos	É proposto um modelo multicritério fuzzy integrado e abrangente para seleção de fornecedores na cadeia de suprimentos digital. A abordagem fuzzy BWM é usada para medir os pesos dos critérios digitais. Os métodos Fuzzy MULTIMOORA, Fuzzy COPRAS e Fuzzy TOPSIS são usados como métodos de priorização para ordenar os fornecedores. A heurística *maximize agreement heuristic* (MAH) é usada para agregar as classificações de fornecedores obtidas a partir dos métodos de priorização em uma classificação de consenso. Esse estudo demonstra que a incerteza das avaliações é uma preocupação na tomada de decisão.
Goodarzi et al. (2022)	Avaliação de fornecedores verdes	Esse estudo apresenta um modelo integrado de tomada de decisão multicritério (MCDM) e otimização multiobjetivo para avaliação de fornecedores verdes e alocação ótima de pedidos sob incerteza. O método Fuzzy-Delphi é utilizado para refinar os critérios de avaliação de fornecedores, determinar o peso dos critérios e priorizar os fornecedores com base em índices verdes e resilientes. O método de correlação de Grey e TOPSIS (GC-TOPSIS) são usados para analisar os resultados.
Olabanji e Mpofu (2021)	Avaliação de projetos	O objetivo da pesquisa é identificar o projeto conceitual ótimo por meio da hibridização de dois modelos de Tomada de Decisão Multicritério (MCDM) - Processo de Hierarquia Analítica Fuzzy (F-AHP) e Análise Relacional Fuzzy Grey (F-GRA). Nota-se nesse estudo a utilização de duas metodologias para incorporar as incertezas das avaliações, a Teoria Fuzzy e a Teoria Grey.
Jiang e Sohail (2022)	Gestão de recursos humanos	Nesse estudo, um AG é aplicado ao banco de dados distribuído para realizar o melhor esquema de alocação de dados e é construído o modelo de avaliação DEA.
Nguyen (2022)	Gestão de recursos humanos	Propõe um método híbrido baseado em Teoria Grey, Algoritmo Genético e DEMATEL (GA-GDEMATEL) para a gestão de recursos humanos. Esse estudo demonstra a combinação de um método multicritério, com uma metodologia da *soft computing* para incorporar a incerteza e um algoritmo metaheurístico para otimizar o modelo.
Pamucar et al. (2022)	Seleção de centro de recuperação de baterias de veículos elétricos	O autores desenvolveram um modelo integrado de tomada de decisão utilizando o método MACBETH para calcular os pesos dos critérios e métodos de Avaliação de Produto de Soma Agregada de Peso (WASPAS) sob o ambiente fuzzy para avaliar as alternativas e resolver o problema de seleção da localização do centro de recuperação.

Fonte: elaboração própria.

4. Conclusões

Decidir é um processo inerente à vida, é uma atividade constante, realizada na maioria das vezes de forma intuitiva. No entanto, algumas decisões precisam de uma análise fundamentada para que sejam tomadas de forma eficiente, devido a maior complexidade, a presença de *trade-offs* e a maior quantidade de variáveis envolvidas. Nesse contexto se insere a PO, que busca a tomada de decisão com base em modelos matemáticos e de sua evolução surgiram as metodologias multicritério. Por ser um ramo da ciência recente, considera-se que as técnicas e métodos estão em desenvolvimento, e sendo uma área intrinsecamente multidisciplinar, tem sido impactada positivamente pela evolução computacional.

Nesse sentido, a fim de entender como as metaheurísticas têm sido aplicadas à tomada de decisão multicritério, foi realizada uma revisão sistemática da literatura, utilizando-se o Protocolo PRISMA simplificado. Ao final desse processo, foi selecionado um PB composto por 54 artigos. Após, foi realizada a análise bibliométrica. Observou-se que houve o aumento das publicações a partir de 2011, o que demonstra a evolução na área com a utilização de computadores mais potentes. A análise das publicações se demonstrou condizente com o caráter multidisciplinar da PO. Além disso, os estudos foram aplicados aos mais diversos contextos gerenciais. A análise relacional revelou que os autores que mais se destacam no PB são Wang, Y., Kuo, R.J., Mousavi, S.M., Jolai, F., Li, J., Kayikci, Y., Hong, W. Y. e Cadenas, J.M.

Em relação aos métodos matemáticos, se destacou a utilização da Lógica Fuzzy e em relação aos métodos multicritério, se observou a utilização de métodos de agregação, de sobreclassificação e interativos. Dentre as metaheurísticas, o AG foi o mais estudado. Nas combinações de métodos, 65% das pesquisas utilizaram o AG. Conclui-se, portanto, que o AG é uma técnica de otimização estocástica computacional poderosa e, provavelmente, a mais importante técnica de computação evolucionária, que além de simples, trabalham com conjuntos de soluções, estando alinhados às metodologias multiobjetivos.

Por fim, a metassíntese demonstrou que os AG são uma metaheurística aplicada com eficácia para a tomada de decisão multicritério. Por possuírem a habilidade de gerar um conjunto de soluções a cada rodada do algoritmo, têm sido utilizados para resolver problemas de programação linear e não linear, com o objetivo de se chegar ao conjunto de soluções ótimas de Pareto, ou o mais próximo possível do conjunto de soluções ótimas, de forma mais rápida. Percebe-se também o movimento de pesquisadores no intuito de combinar métodos multicritério de agregação, como o AHP e o TOPSIS, e de sobreclassificação, como o ELECTRE e o PROMETHEE, com AG. Enquanto os AGs são empregados em métodos interativos para se chegar à solução Pareto-ótima, nos métodos de agregação e sobreclassificação aparecem combinados a algumas etapas para agilizar o processo de solução.

Esse fato se deve à busca por maior agilidade computacional para *softwares* de tomada de decisão. Com o desenvolvimento dos DSS, a utilização de métodos multicritério para o apoio à gestão têm se tornado mais acessíveis, o que viabiliza a utilização de métodos por decisores e especialistas de forma rápida e ágil. Com a globalização e o aumento da concorrência, o ritmo em que as atividades e decisões empresariais ocorrem também tem aumentado, o que enseja métodos com melhor desempenho computacional.

A revisão de literatura demonstrou também o potencial da teoria dos conjuntos Fuzzy para tratar a incerteza e a subjetividade que permeiam o processo decisório. Assim, a partir da RSL desenvolvida, foi possível identificar que a lógica Fuzzy e os AG podem ser combinados de forma efetiva para tratar a subjetividade e apoiar a tomada de decisões em ambientes complexos.

Diante o exposto, considera-se como oportunidades para futuras pesquisas, a construção de modelos para a tomada de decisão multicritério para o apoio à gestão utilizando metodologias que permitam incorporar os aspectos de incerteza das avaliações, bem como a aplicação de algoritmos metaheurísticos para otimizar a implementação dos modelos. Como limitações da pesquisa, se destaca que não foi realizada a análise de risco de viés em cada estudo e entre estudos.

5. Referências

Al-Bazi, A., Uney, E., & Abu-Monshar, A. (2019). Developing an overbooking fuzzy-based mathematical optimization model for multi-leg flights. In: 8th International Conference on Air Transport - INAIR 2019 GLOBAL TRENDS IN AVIATION. https://doi.org/10.1016/j.trpro.2019.12.031

Arsovski, S., Putnik, G., Arsovski, Z., Tadic, D., Aleksic, A., Djordjevic, A., & Moljevic, S. (2015). Modelling and enhancement of organizational resilience potential in process industry smes. Sustainability. https://doi.org/10.3390/su71215828

Ashfari, H., Sharifi, M., Elmekkawy, T.Y., & Peng, Q. (2014). Facility location decisions within integrated forward/reverse logistics under uncertainty. Procedia CIRP. 17, 606–610. https://doi.org/10.1016/j.procir.2014.01.092

Atanassov, K., & Gargov, G. (1989). Interval valued intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems. 31(3), 343-349. https://doi.org/10.1016/0165-0114(89)90205-4

Basnet, C., & Weintraub, A. (2009). A genetic algorithm for a bicriteria supplier selection problem. International Transactions in Operational Research. 16, 173–189. https://doi.org/10.1111/j.1475-3995.2009.00680.x

Bouyssou, D., Marchant, T., Pirlot, M., Perny, P., Tsoukiàs, A. & Vincke, P. (2000). Evaluation

and decision models: a critical perspective. Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1057/palgrave.jors.2601380

Bouyssou, D., Marchant, T., & Pirlot, M. (2022). A theoretical look at ELECTRE TRI-nB and related sorting models. 4OR-Q J Oper Res. https://doi.org/10.1007/s10288-022-00501-9

Brans, J.P. & Vincke, P. (1985). A Preference Ranking Organisation Method: The PROMETHEE Method for Multiple Criteria. Decision-Making. Management Science, 31, 647-656. https://doi.org/10.1287/mnsc.31.6.647

Castaño, F., Gutierrez, A.F., Velasco, N., & Amaya, C. (2019). Using open access data to model a technician routing and scheduling problem in a congested urban setting. In: 25th International Conference on Production Research Manufacturing Innovation: Cyber Physical Manufacturing. https://doi.org/10.1016/j.promfg.2020.01.357

Charnes, A., Cooper, W.W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research, 2(6), 429–444. https://doi.org/10.1016/0377-2217(78)90138-8

Che, C.H. (2012). Clustering and selecting suppliers based on simulated annealing algorithms. Computers and Mathematics with Applications. 63, 228-238. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.11.014

Chen, Z., Liu, L., Li, L., & Li, H. (2014). A two-stage model for project optimization in transportation infrastructure management system. Mathematical Problems in Engineering. https://doi.org/10.1155/2014/914515

Chen, C.-C., & Schonfeld, P. (2012). A Hybrid Heuristic Technique for Optimizing Intermodal Logistics Timed Transfer Systems. Procedia - Social and Behavioral Sciences, 48, 2566–2576. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.06.1227

Costa, J.F.S., Wanderley, A.J.M.E., & Cosenza, C.A.N. (2005). Utilização de Algoritmos Genéticos em Metodologia Multicritério: uma solução para inconsistência matricial. Revista Gestão Industrial. 1(4), 101-109. https://doi.org/10.3895/S1808-04482005000400011

Deng, J-L. (1982). Control problems of grey systems. Systems and Control Letters. 1(5), 288-294. https://doi.org/10.1016/S0167-6911(82)80025-X

Fanti, M., Maione, B., Naso, D., & Turchiano, B. (1998). Genetic multi-criteria approach to

flexible line scheduling. International Journal of Approximate Reasoning. 19, 5–21. https://doi.org/10.1016/S0888-613X(98)00014-0

Fontalvo, M. O., Maza, V. C., & Miranda, P. (2017). A meta-heuristic approach to a strategic mixed inventory-location model: formulation and application. Transportation Research Procedia. 25, 729–746. https://doi.org/10.1016/j.trpro.2017.05.454

Ghaffari-Nasab, N., Ahari, S.G., & Ghazanfari, M. (2013). A hybrid simulated annealing based heuristic for solving the location-routing problem with fuzzy demands. Scientia Iranica, Transactions E: Industrial Engineering. 20(3), 919–930. https://doi.org/10.1016/j.scient.2013.02.006

Gharakezloo, Y. N., Nikoo, M. R., Karimi-Jashni, A., & Mooselu, M. G. (2022). A hybrid statistical decision-making optimization approach for groundwater vulnerability considering uncertainty. Environmental Science and Pollution Research, 29(6), 8597–8612. https://doi.org/10.1007/s11356-021-16242-x

Gillis, M., Urban, R., Saif, A., Kamal, N., & Murphy, M. (2021). A simulation–optimization framework for optimizing response strategies to epidemics. Operations Research Perspectives, 8, 100210. https://doi.org/10.1016/j.orp.2021.100210

Goodarzi, F., Abdollahzadeh, V., & Zeinalnezhad, M. (2022). An integrated multi-criteria decision-making and multi-objective optimization framework for green supplier evaluation and optimal order allocation under uncertainty. Decision Analytics Journal, 4, 100087. https://doi.org/10.1016/j.dajour.2022.100087

Hwang, C. L., & Yoon, K. (1981). Multiple attribute decision making: methods and applications. Berlin: Springer-Verlag. http://doi.org/10.1007/978-3-642-48318-9

Hazrati, H., Barzegarinegad, A., & Siaby-Serajehlo, H. (2021). A Hybrid Mathematical and Decision-Making Model to Determine the Amount of Economic Order considering the Discount. Mathematical Problems in Engineering, 2021. https://doi.org/10.1155/2021/5229949

He, P., & Li, J. (2021) A joint optimization framework for wheat harvesting and transportation considering fragmental farmlands. Information Processing in Agriculture. 8, 1–14. https://doi.org/10.1016/j.inpa.2020.04.006

Jiang, X., & Sohail, M. (2022). Evaluation Method of Human Resource Management Efficiency of Chain Retail Enterprises Based on Distributed Database. Computational and Mathematical Methods in Medicine, 2022.

https://doi.org/10.1155/2022/1860426

Kaczyńska, A., Kołodziejczyk, J., & Sałabun, W. (2021). A new multi-criteria model for ranking chess players. Procedia Computer Science, 192, 4290–4299. https://doi.org/10.1016/j.procs.2021.09.205

Kamali, A., Fatemi Ghomi, S.M.T., & Jolai, F. (2011). A multi-objective quantity discount and joint optimization model for coordination of a single-buyer multi-vendor supply chain. Computers and Mathematics with Applications. 62, 3251-3269. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.08.040

Kannan, A.S.K., Balamurugan, S.A.A., & Sasikala, S. (2021). A Customized Metaheuristic Approaches for Improving Supplier Selection in Intelligent Decision Making. IEEE Access. 9, 56228-56239. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3071454

Kayikci, Y. (2010). A conceptual model for intermodal freight logistics centre location decisions. The Sixth International Conference on City Logistics - Procedia Social and Behavioral Sciences. 2. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.04.039

Khumaidi, A.; Sukoco, H.; Purwanto, A., & Kurniawan, A. (2020). Design of Warehouse Management System for Fresh Product in Supply Chain Network. International Journal of Advanced Trends in Computer Science and Engineering. 9(1), 308-314. https//doi.org/10.30534/ijatcse/2020/47912020

Kouatli, I. (2013). A Biologicaly Inspired Decision Model for Multivariable Genetic-Fuzzy-AHP System. 17th International Conference in Knowledge Based and Intelligent Information and Engineering Systems - KES2013. 22. https://doi.org/10.1016/j.procs.2013.09.075

Kuo, R., & Han, Y. (2011). A hybrid of genetic algorithm and particle swarm optimization for solving bi-level linear programming problem – a case study on supply chain model. Applied Mathematical Modelling. 35, 3905–3917. https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.02.008

Kuo, R.J., Hong, S.Y., & Huang, Y.C. (2010). Integration of particle swarm optimization-based fuzzy neural network and artificial neural network for supplier selection. Applied Mathematical Modelling. 34, 3976–3990. https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.03.033

Kuo, R.J., Wibowo, B.S., & Zulvia, F.E. (2016). Application of a fuzzy ant colony system to solve the dynamic vehicle routing problem with uncertain service time. Applied

Mathematical Modelling. 40, 9990–10001. https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.06.025

Lee, A.H., Kang, H.-Y., Lai, C.-M., & Hong, W.-Y. (2013). An integrated model for lot sizing with supplier selection and quantity discounts. Applied Mathematical Modelling. 37, 4733–4746. https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.09.056

Leyva-López, J. C., Solano-Noriega, J. J., Gastélum-Chavira, D. A., & Gaxiola-Valenzuela, T. (2022). A Personnel Selection Model for a Software Development Company based on the ELECTRE III Method and a Variant of NSGA-II. Innovar, 32(85). https://doi.org/10.15446/innovar.v32n85.100657

Li, J., Xu, J., & Gen, M. (2006). A class of multiobjective linear programming model with fuzzy random coefficients. Mathematical and Computer Modelling. 44, 1097–1113. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2006.03.013

Li, Q., Zhong, H., Wang, Y., Leng, Y., & Guo, C. (2016). Integrated development optimization model and its solving method of multiple gas fields. Petroleum Exploration and Development. 43(2), 293–300. https://doi.org/10.1016/S1876-3804(16)30033-7

Liang, J., & Liu, M. (2018). Network design for municipal solid waste collection: A case study of the nanjing jiangbei new area. International Journal Environmental Research and Public Health. https://doi.org/10.3390/ijerph15122812

Lin, D.-Y., & Chu, Y.-M. (2014). A lagrangian relaxation approach to the mixed-product assembly line sequencing problem: A case study of a door-lock company in taiwan. Applied Mathematical Modelling. 38, 4493–4511. https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.02.029

Longaray, A.A., Tondolo, V.A.G., Munhoz, P.R. & Tondolo, R.R.P. (2016). Emprego de métodos multicritério em decisões gerenciais: uma análise bibliométrica da produção científica brasileira. Revista Contemporânea de Contabilidade, 13(29), 113-128. http://doi.org/10.5007/2175-8069.2016v13n29p113

Lopez-Espin, J.J., Aparicio, J., Gimenez, D., & Pastor, J.T. (2014). Benchmarking and data envelopment analysis. an approach based on metaheuristics. In: 14th International Conference on Computational Science - Procedia Computer Science. https://doi.org/10.1016/j.procs.2014.05.035

Ma, S. (2016). A nonlinear bi-level programming approach for product portfolio management. SpringerPlus. 5(727), 1-18. https://doi.org/10.1186/s40064-016-

2421-0

Nguyen, P.-H. (2022). GA-GDEMATEL: A Novel Approach to Optimize Recruitment and Personnel Selection Problems. Mathematical Problems in Engineering, 2022. https://doi.org/10.1155/2022/3106672

Olabanji, O. M., & Mpofu, K. (2021). Appraisal of conceptual designs: Coalescing fuzzy analytic hierarchy process (F-AHP) and fuzzy grey relational analysis (F-GRA). Results in Engineering, 9, 100194. https://doi.org/10.1016/j.rineng.2020.100194

Pamucar, D., Ebadi Torkayesh, A., Deveci, M., & Simic, V. (2022). Recovery center selection for end-of-life automotive lithium-ion batteries using an integrated fuzzy WASPAS approach. Expert Systems with Applications, 206, 117827. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2022.117827

Pérez-Gladish, B., Ferreira, F.A.F. & Zopounidis, C. (2020). MCDM/A studies for economic development, social cohesion and environmental sustainability: introduction. International Journal of Sustainable Development and World Ecology. https://doi.org/10.1080/13504509.2020.1821257.

Rabbani, M., Baghersad, M., & Jafari, R. (2013). A new hybrid ga-pso method for solving multi-period inventory routing problem with considering financial decisions. Journal of Industrial Engineering and Management. 6(4), 909–929. https://doi.org/10.3926/jiem.629

Rafiei Sardooi, E., Azareh, A., Mesbahzadeh, T., Soleimani Sardoo, F., Parteli, E. J. R., & Pradhan, B. (2021). A hybrid model using data mining and multi-criteria decision-making methods for landslide risk mapping at Golestan Province, Iran. Environmental Earth Sciences, 80(15). https://doi.org/10.1007/s12665-021-09788-z

Rostami, M., Kheirandish, O., & Ansari, N. (2015). Minimizing maximum tardiness and delivery costs with batch delivery and job release times. Applied Mathematical Modelling. 39, 4909–4927. https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.03.052

Rostami, M., Razmi, J., & Jolai, F. (2010). Designing a genetic algorithm to solve an integrated model in supply chain management using fuzzy goal programming approach. In: 9th IFIP WG 5.5 International Conference on Balanced Automation Systems for Future Manufacturing Networks (BASYS). https://doi.org/10.1007/978-3-642-14341-0 20

Roy, B. (1968). Classement et choix en presence de points de vue multiples (la methode

ELECTRE). Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, 2(1), 57-75.

Saaty, T.L. (1977). A scaling method for priorities in hierarchical structures. Journal of Mathematical Psychology, 15(3), 234-281. https://doi.org/10.1016/0022-2496(77)90033-5

Sadeghi, J., Mousavi, S.M., & Niaki, S.T.A. (2016). Optimizing an inventory model with fuzzy demand, backordering, and discount using a hybrid imperialist competitive algorithm. Applied Mathematical Modelling. 40, 7318-7335. https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.03.013

Saraçoglu, I., & Süer, G.A. (2018). Multi-objective fuzzy flow shop scheduling model in a manufacturing company. In: 28th International Conference on Flexible Automation and Intelligent Manufacturing (FAIM 2018). https://doi.org/0.1016/j.promfg.2018.10.039

Smarandache, F. (1995). Neutrosophic Logic and Set. http://fs.gallup.unm.edu/neutrosophy.htm

Sutrisno, Widowati, & Sunarsih. (2019). Genetic algorithm approach for large scale quadratic programming of probabilistic supplier selection and inventory management problem. In: International Conference on Science and Science Education - Journal of Physics: Conference Series. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1307/1/012001

Tavana, M., Shaabani, A., Di Caprio, D., & Amiri, M. (2021). An integrated and comprehensive fuzzy multicriteria model for supplier selection in digital supply chains. Sustainable Operations and Computers, 2, 149–169. https://doi.org/10.1016/j.susoc.2021.07.008

Tezenji, F.R., Mohammadi, M., Pasandideh, S., & Koupaei, M.N. (2016). An integrated model for supplier location-selection and order allocation under capacity constraints in an uncertain environment. Scientia Iranica, Transactions E: Industrial Engineering. 23, 3009–3025. https://doi.org/10.24200/SCI.2016.4008

Vahdani, B., Iranmanesh, S.H., Mousavi, S.M., & Abdollahzade, M. (2012). A locally linear neuro-fuzzy model for supplier selection in cosmetics industry. Applied Mathematical Modelling. 36, 4714–4727. https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.12.006

Vardi, M., Neyestani, M., & Ghorbanian, A. (2019). Supplier selection and order allocation problem modeling with the aim of comparing incremental discounts versus wholesale discounts by using ga and nsga algorithms. Journal Europeen des Systemes Automatises. 52(1), 23-34. https://doi.org/10.18280/jesa.520104

Wang, Y.-C., & Chen, T. (2021). A Bi-objective AHP-MINLP-GA approach for Flexible Alternative Supplier Selection amid the COVID-19 Pandemic. Soft Computing Letters, 3, 100016. https://doi.org/10.1016/j.socl.2021.100016

Wang, Y.; Xi, C.; Zhang, S., Zhang, W., & Yu, D. (2015). Combined Approach for Government E-Tendering using GA and TOPSIS with Intuitionistic Fuzzy Information. PLoS ONE. 10(7), 1-20. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0130767

Wiecek, P. (2016). Intelligent approach to inventory control in logistics under uncertainty conditions. In: XII Conference on Transport Engineering - Transportation Research Procedia. https://doi.org/10.1016/j.trpro.2016.12.023

Zak, J., & Weglinski, S. (2014). The selection of the logistics center location based on MCDM/A methodology. Transportation Research Procedia, 3, 555-564. https://doi.org/10.1016/j.trpro.2014.10.034

Zhang, H.; Deng, Y.; Chan, F.T.S., & Zhang, X. (2013). A modified multi-criterion optimization genetic algorithm for order distribution in collaborative supply chain. Applied Mathematical Modelling. 37, 7855-7864. https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.05.021

Zhu, N., Zhu, C., & Emrouznejad, A. (2020). A combined machine learning algorithms and dea method for measuring and predicting the efficiency of chinese manufacturing listed companies. Journal of Management Science and Engineering. 6(4), 435-448. https://doi.org/10.1016/j.jmse.2020.10.001

Xidonas, P., Doukas, H., & Sarmas, E. (2021). A python-based multicriteria portfolio selection DSS. RAIRO - Operations Research, 55, S3009–S3034. https://doi.org/10.1051/ro/2020140

Zopounidis, C., & Pardalos, P.M. (Eds.). (2010). Handbook of multicriteria analysis (Vol. 103). Springer Science & Business Media. https://doi.org/10.1007/978-3-540-92828-7

5.2 Fuzzy-MACBETH Hybrid Method: Mathematical Treatment of a Qualitative Scale Using the Fuzzy Theory

International Journal of Computational Intelligence Systems (2023) 16:21
https://doi.org/10.1007/s44196-023-00195-9

RESEARCH ARTICLE



Fuzzy-MACBETH Hybrid Method: Mathematical Treatment of a Qualitative Scale Using the Fuzzy Theory

Tatiane Roldão Bastos[1] · André Andrade Longaray[1] · Catia Maria dos Santos Machado[1] · Leonardo Ensslin[2] · Sandra Rolim Ensslin[3] · Ademar Dutra[2]

Received: 5 October 2022 / Accepted: 30 January 2023
© The Author(s) 2023

Abstract
This paper describes the research procedures adopted in developing a triangular fuzzy number scale based on the semantic scale of MACBETH (Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation Technique). The objective was to mathematically treat the uncertainty and subjectivity of linguistic variables used to assess a decision problem. A matrix was initially obtained based on a decision maker's assessment of a given context analysis. This decision matrix was then fuzzified based on a triangular Fuzzy numbers scale. Next, the inference process was performed using F-LP-MACBETH linear programming problem proposed here, resulting in a Fuzzy scale. This scale was then defuzzified using the centroid method, from which a crisp basic scale emerged, which was then cardinalized. The results show that the MACBETH Fuzzy method proposed here can overcome the classical method's cardinal inconsistency problem, which facilitates its application in complex contexts. Hence, the MACBETH Fuzzy Hybrid method generated numerical values based on the decision makers' semantically consistent assessments in a decision matrix, which by the classical method presents cardinal inconsistency. Therefore, the advantage of the proposed method consists in the possibility of obtaining a cardinal scale aligned to the decision makers' preferences without the need to reassess the context.

Keywords MACBETH method · Semantic scale · Cardinal scale · Fuzzy logic · Fuzzy-MACBETH

Abbreviations

ANP	Analytic network process
AHP	Analytic hierarchy process
BWM	Best–worst method
DSS	Decision support systems
ELECTRE	Elimination and choice translating reality
ERP	Enterprise resource planning
FITradeoff	Flexible and interactive tradeoff
F-LP-MACBETH	Fuzzy linear programming of measuring attractiveness by a categorical based evaluation technique
ICW	Interval criterion weights
LP-MACBETH	Linear programming of measuring attractiveness by a categorical based evaluation technique
MACBETH	Measuring attractiveness by a categorical based evaluation technique
MAUT/UTA	Multi-attribute utility theory/additive utility
MCDA	Multi-criteria decision aid
MCDM	Multi-criteria decision-making
MCDM/A	Multi-criteria decision-making/aid
MODM	Multi-objective decision-making
MOLP	Multi-objective linear programming
PRISMA	Preferred reporting items for systematic reviews and meta-analyses
PROMETHEE	Preference ranking organization method for enrichment evaluation
SMART	Simple multi-attribute rate technique
STEM	Step method

✉ André Andrade Longaray
andrelongaray@gmail.com

[1] Universidade Federal do Rio Grande—FURG, Campus Carreiros, Rio Grande, Rio Grande do Sul CEP 96.203-900, Brazil

[2] Programa de Pós-Graduação em Administração, Universidade do Sul de Santa Catarina—UNISUL, Florianópolis, Santa Catarina CEP 88.010-010, Brazil

[3] Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina—UFSC, Florianópolis, Santa Catarina CEP 88.010-970, Brazil

Published online: 26 February 2023

Supp	Support
TACTIC	Treatment of the alternatives according to the importance of criteria
TODIM	Multi-criteria interactive decision-making
TOPSIS	Technique for order preference by similarity to ideal solution
TRIMAP	Tricriterion multi-objective linear programming
VIKOR	Multi-criteria optimization and compromise solution

1 Introduction

Decision-making permeates people's daily lives as we are constantly making choices. Most decisions are routine and intuitive and do not require further analysis. However, many of the variables involved in complex contexts are subjective and demand trade-offs, requiring individuals to make subjective judgments. As noted by [1], when a decision task is complex, or the impact of actions is relevant, one should resort to a formal or informal decision support technique.

Multi-criteria techniques stand out among formal techniques supporting decision-making. Even though it is sometimes more convenient to consider a single objective and make decisions based on its optimization subject to a set of restrictions, in most cases, multiple objectives or criteria affecting a given context should be considered, as reality is multidimensional [2].

Hence, the various factors composing a decision problem should be modeled based on facts, values, scientific knowledge, and human judgment, which, when considered together, enable a broader view and improved understanding of the potential impact of actions on the context under analysis. Many formulas can be used to combine these factors [1]. A method is chosen among the various multi-criteria techniques based on various factors, such as the type of variables composing a given problem, the nature of such a decision problem, and the compensation of criteria.

In this context, MCDM (Multi-criteria Decision Making) and MCDA (Multi-criteria Decision Aid) are two criteria decision paradigms that, despite epistemological differences, support decisions and gather important tools to structure and assess complex decisions [3]. Furthermore, MCDM/A techniques enable the development of assessment systems based on experts' or decision makers' knowledge, with mathematical procedures and advanced computational methods that support decision-making modeling and solving decision problems [4].

According to [5, 6], Decision Support Systems (DSS) enable the development and use of computational tools to support managers when making decisions. The use of support systems was driven by the advancement of information technologies such as personal computers and communication networks. Therefore, informatics enables computational coding of complex algorithms and the creation of applications and software, able to operationalize multi-criteria methods quickly and easily. Hence, methods that were previously unfeasible due to a significant level of complexity can currently be used with the support of DSS.

A systematic literature review was performed using the simplified PRISMA Protocol (Preferred Reporting Items for Systematic Reviews and Meta-Analyses) to better understand how meta-heuristic-based DSS is used to support multi-criteria decision-making. It resulted in a Bibliographic Portfolio of 54 papers, and a meta-synthesis of these studies revealed that Fuzzy Logic is applied to treat subjectivity by supporting decision-making in complex environments.

The subjectivity permeating decision-making contexts is a concern. Some methods of the Electre Family, for instance, take into account the subjectivity of judges when making assessments by incorporating the credibility index $\sigma(a,b)$, which conceptually resembles Fuzzy sets, where $\sigma(a,b)$ values between 0 and 1 are assigned with gradual agreement and disagreement thresholds. This overclassification in Electre III is also used in Electre TRI-nB, in which the categories are defined by limiting profiles [7].

The literature describes several methods for dealing with uncertainty, among which the intuitionistic fuzzy theory [8], the neutrosophic set theory [9], and the grey number theory [10] stand out. A linguistic metric for Consensus Reaching Processes (LiCRPs) is proposed by [11] for group decision-making. This metric is built upon a Comprehensive Minimum Cost Consensus (CMCC) model based on ELICIT (Extended Comparative Linguistic Expressions with Symbolic Translation) that models decision makers' uncertainty through a Fuzzy 2-Tuple model.

Comparative Linguistic Expression Preference Relations (CLEPR) are presented by [12] to represent decision makers' uncertainty in group decisions, considering multiple self-confidence levels and presenting numerical scales of linguistic terms. In turn, [13] present an FMEA (Failure Modes and Effects Analysis) approach based on Personalized Individual Semantics, with linguistic distribution assessments and incomplete preference information used to model decision makers' uncertain opinions.

Among these, the Fuzzy sets theory prevailed in the papers included in the bibliographic portfolio to deal with the uncertainty and subjectivity permeating the decision-making process, allowing decision makers to include their doubts in the assessments.

Fuzzy logic and its extensions have also been used to incorporate decision makers' assessments into group decision-making as they enable reaching a common solution

in complex environments. For example, the multi-criteria decision model based on Hesitant Fuzzy linguistic term sets presented by [14] shows the ability to incorporate experts' preferences when they hesitate between several linguistic terms, allowing group evaluation in qualitative environments. In the context of Large-Scale Group Decision Making (LSGDM), [6] reveals that multi-criteria methods for classical group decision-making, such as AHP, TOPSIS, MULTIMOORA, and ELECTRE, have been extended to solve LSGDM problems. In this sense, [15] applies Fuzzy preference relations for LSGDM, considering the level of agreement among experts before selecting the best alternative.

Thus, considering that the differential of the Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation Technique (MACBETH) is that it supports multi-criteria decisions in complex environments, facilitating decision-making assessment by using qualitative scales in the analyses, the use of fuzzy numbers to include uncertainty aspects to the scale can improve the method.

According to [16], MACBETH has not yet been expanded to its fuzzy versions, which is corroborated by the literature review and reveals a research opportunity. MACBETH presents a collaborative value-modeling framework in which the context structuring is performed through a socio-technical process, while the value functions for measuring the decision problem are obtained through a linear programming problem based on qualitative assessments [17]. Therefore, the method's main characteristic is to help decision makers to build knowledge about a decision-making context, enabling assessment through uncertain terms that resemble Fuzzy linguistic terms.

Although MACBETH is intended to assess decision problems through qualitative scales, facilitating decision makers' assessments, especially in complex contexts, traditional mathematical techniques do not allow the incorporation of uncertainties arising from linguistic terms. Therefore, the Fuzzy Theory enables the mathematical treatment of such linguistic terms, improving the method.

In this context, this study aims to apply a triangular Fuzzy number in the MACBETH scale of semantic judgments to incorporate human judgment's aspects, such as uncertainty and subjectivity in the scale of linguistic terms. The mathematical modeling proposed here is expected to contribute to the improvement of the classical method by making the scale more flexible in evaluations considered to present cardinal inconsistency.

2 MCDM/A Methods

MCDM/A is the field of Operational Research intended to build evaluation systems based on the knowledge of experts or decision makers, considering multiple criteria that affect the decision-making problem, constituting important tools for structuring and evaluating complex decisions [3]. Choosing among the various MCDM/A methodologies depend on various factors, such as the type of variables that compose the problem, the nature of the decision problem, and compensation criteria.

Table 1 summarizes the classification of methods in the three multi-criteria approaches, according to what [18, 19] proposed. Regarding the matter of discrete variables, the decision problem consists of choosing one from a discrete set of alternatives, in contrast to continuous methods, where the alternatives are implicitly described through a set of restrictions [20].

As for the nature of the decision problem, it can be classified as a choice problem ($P.\propto$), which consists of helping decision makers choose or select a subset that contains the best solutions; classification problem ($P.\beta$), the objective of which is to categorize actions distributed according to pre-defined categories; ordering problem ($P.\gamma$), in which actions are ordered according to the decision makers' order of preference, or a description problem ($P.\delta$), which consists of aiding decision makers to formally and systematically describe actions and their consequences or to develop a cognitive procedure [18].

Finally, regarding the compensation approach, the criteria presenting inferior performance can be compensated by other criteria with good performance. For example, an alternative with higher costs can be considered a good alternative if it presents superior quality and durability, though, in non-compensatory strategies, poor performance cannot be counterbalanced by good ones [20].

As for preference relationships, the methods can be aggregation, outranking, or interactive. The aggregation methods are based on the Single Synthesis Criterion or the Multi-attribute Utility Theory. They are based on the concept of the utility function, that is, how much a given action provides utility to decision makers in the criterion assessed. In the outranking approach, the methods are called outranking or subordination, in which action a is considered to subordinate action b ($a\ S\ b$); a case in which the decision maker considers action a at least as good as action b, proceeding a pairwise comparison through a binary relation, through thresholds.

In addition to the aggregation and outranking methods, interactive methods also adopt the interactive local judgment approach. Also known as Multi-Objective Decision Making (MODM), they originated in mathematical programming, in

Table 1 Synthesis of multi-criteria methods

Approach	Method	Types of problem	Examples of applications
Aggregation Methods Based on Single Synthesis Criterion or Multi-attribute Utility Theory Assumes a multi-attribute utility function or value function to assess the decision maker's preferences It assumes that the relations of preference and indifference are transitive All alternatives are comparable due to the standardization process Performs an analytical aggregation to establish a score for each alternative, allowing comparisons between alternatives Aggregates into a global assessment Aggregation methods Compensatory methods	AHP	α, γ, β (AHP-Sort)	[21–24]
	ANP	α, γ	[25–27]
	SMART	α, γ	[28, 29]
	TODIM	α, γ	[30, 31]
	TOPSIS	α, γ	[32–34]
	MACBETH	α, γ	[17, 35, 36]
	MAUT/UTA	α, γ, β (UTA-DIS)	[37, 38]
	FITradeoff	α, β	[39, 40]
Outranking methods Based on the outranking approach It does not require that the relations of preference and indifference be transitive Allows incomparability between alternatives, using an overclassification between alternatives that are not transitive The criteria weights assume the notion of degree of importance, as there is no transformation of scales in the intra-criterion assessment, in which a global score is assigned to each alternative Allows aggregation into a global assessment Constructivist approach Non-compensatory methods	ELECTRE FAMILY	α, γ, β	[41–44]
	PROMETHEE FAMILY	α, β (Flow-Sort), γ (GAIA)	[44–46]
	TACTIC	α, γ	[47]
	REGIME	α, γ	[48, 49]
Interactive methods Origin in Multi-objective Mathematical Programming It combines computational steps and interaction with the decision maker Does not allow aggregation into a global assessment It seeks to optimize more than one objective function simultaneously	STEM	α, γ	[50–52]
	ICW	α	[53]
	PARETO RACE	α, γ	[54, 55]
	TRIMAP	α, γ	[56, 57]

which Multi-Objective Linear Programming (MOLP) stands out.

Therefore, Operational Research, developed from several related fields of knowledge, gave rise to methods based on different decision-making paradigms for solving problems in different contexts. Thus, the choice of a method to solve a problem or support decision-making depends on the characteristics of the decision-making problem, the context under analysis, and the decision makers' profiles. Keep in mind that the focus of the decision-making process can be optimal or near-optimal or to build the decision maker's knowledge.

The literature shows that MCDM/A methods are used in different contexts. A ranking range based on the MCDM/A approach under an incomplete context is proposed by [58]. The minimum and maximum rankings of each alternative of the multi-attribute decision matrix with incomplete weight information are obtained by a series of mixed 0–1 linear programming models. To obtain the average position of each alternative in the ranking, the Monte Carlo Simulation is applied, and each alternative's minimum, maximum, and mean ranking information is integrated. The model is then applied to a case of assessing risk investment with risk attitudes.

In [59], proposes a hybrid method based on the grey theory, genetic algorithm, and dematel (GA-GDEMATEL) for human resources management. In turn, [60] present the identification of the optimal conceptual design through the hybridization of two MCDM/A models, the Fuzzy Analytical Hierarchy Process (F-AHP) and Fuzzy Grey Relational Analysis (F-GRA). The Fuzzy-Delphi method is used by [61] to refine supplier evaluation criteria, determine the weight of criteria and prioritize suppliers based on green and resilient indexes. The Grey and TOPSIS (GC-TOPSIS) correlation methods are used to analyze the results.

In [62] propose an integrated and comprehensive fuzzy multi-criteria model for supplier selection in the digital supply chain. The fuzzy MULTIMOORA, fuzzy COPRAS, and fuzzy TOPSIS methods are used as prioritization methods to sort suppliers. The maximize agreement heuristic (MAH) method aggregates the supplier rankings obtained from the prioritization methods into a consensus ranking.

The task of personnel selection is modeled by [63] as a multi-criteria decision-making problem, considering several competencies and abilities to assess candidates for a specific position. The Electre III method is built into the software to develop a fuzzy outranking relation, while a multi-objective evolutionary algorithm explores this relationship and

generates a ranking as a recommendation. In [64] develops a hybrid method combining MCDM decision-making with a fuzzy method called COMET (Characteristic Objects Method).

A new integrated decision-making model is developed by [65] based on MACBETH to calculate criteria weights. Additionally, Weighted Aggregated Sum Product Assessment (WASPAS) methods under a fuzzy environment with Dombi norms were intended to assess alternatives to solve a selection problem concerning the recovery center location, considering technical, environmental, economic, and social aspects.

The literature presents the studies implementing Fuzzy-MACBETH; although Table 2 does not present an exhaustive list, it summarizes the most representative ones.

2.1 MACBETH Method

Among the multi-criteria methods used to support decision-making, MACBETH, created by Bana e Costa and Vansnick [72], enables transforming ordinal scales, obtained from value judgments expressed by a judge, into cardinal scales using linear programming. It consists of a multi-criteria mathematical method composed of four phases, which begin with an analysis of the decision-making context and structuring of the problem, establishment of the evaluation elements, development of the evaluation model, and analysis of sensitivity and recommendations [73]. Thus, the MACBETH method can be understood as a socio-technical process that combines technical elements with the social aspects of decision conferencing [74]. According to [75], decision conferencing consists of an interactive group technique, i.e., meetings are held with key actors in the decision-making process, who, assisted by a facilitator, arrive at relevant judgments that help them to understand and structure the issues affecting a given organization (Table 3).

MACBETH's central idea is to offer judges a method to assist in the construction of a numerical scale; thus, it is a tool to convert semantic judgments into cardinal scales [72]. Therefore, this method's main differential is the use of a semantic scale to express the decision maker's assessment, to compare pairs of alternatives, using the categories *indifferent, very weak, weak, moderate, strong, very strong,* and *extreme*. The questioning procedure requires decision makers to assign an absolute verbal judgment about the difference in attractiveness between two alternatives or actions, x and y, for each ordered pair (x,y) in $\mathrm{A}\times\mathrm{A}$ with xPy (x preferable to y).

Where $A = x_1, x_2, \cdots, x_n$ is a set of elements such that $\forall i \neq j \in 1, 2, \cdots, N : x_i P x_j \Leftrightarrow i > j$. Therefore, the elements of set A must be ordered in descending order, that is, $x_n P x_{n-1} P x_{n-2} P \cdots P x_2 P x_1$ and then the upper part of the matrix $n \times n$ is filled with the verbal responses, where $x_{i,j}$ is assigned value $k \in 1, 2, 3, 4, 5, 6$ if, and only if, the decision maker has assigned (x_i, x_j) to a category c_k, according to (1) [76].

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} \cdot & x_{n,n-1} & x_{n,n-2} & \cdots & x_3 & x_2 & x_1 \\ \cdot & \cdot & x_{n-1,n-2} & \cdots & x_{n-1,3} & x_{n-1,2} & x_{n-1,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & x_{n-2,3} & x_{n-2,2} & x_{n-2,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & x_{3,2} & x_{3,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & x_{2,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (1)$$

where:

- $C_1 = \{(x,y) \in A \times A / xPy\}$ and the difference of attractiveness between x and y is **very weak**;
- $C_2 = \{(x,y) \in A \times A / xPy\}$ and the difference of attractiveness between x and y is **weak**;
- $C_3 = \{(x,y) \in A \times A / xPy\}$ and the difference of attractiveness between x and y is **moderate**;
- $C_4 = \{(x,y) \in A \times A / xPy\}$ and the difference of attractiveness between x and y is **strong**;
- $C_5 = \{(x,y) \in A \times A / xPy\}$ and the difference of attractiveness between x and y is **very strong**;
- $C_6 = \{(x,y) \in A \times A / xPy\}$ and the difference of attractiveness between x and y is **extreme**;

Two conditions must be met for the decision maker's answers be semantically consistent:

- $\forall i = 3, 4, \cdots, n$ values x_{ij} on line i cannot decrease when j decreases; and
- $\forall j = 1, 2, \cdots, n-2$ values x_{ij} in column j cannot increase as i decreases.

Thus, the ordinal attractiveness measure consists of assigning a numerical value—a real number $v(x)$—to each alternative x that satisfies the conditions:

- $\forall x, y \in A : xPy \Leftrightarrow v(x) > v(y)$
- $\forall x, y \in A : xIy \Leftrightarrow v(x) = v(y)$

Table 2 Synthesis of studies presenting Fuzzy-MACBETH

Reference	Method	Approach
[66]	MACBETH and Fuzzy 2-tuple, linguistic model	The analysis was performed using an extended version of the MACBETH methodology to take into account the imprecise and linguistic assessments provided by the decision maker when integrating the 2-tuple model, which deals with non-homogeneous information data. This model objectively assesses the alternatives, exempting decision makers' evaluation. Thus, the alternatives present input data that can be numeric, interval, or linguistic values. Afterward, input data are expressed in Fuzzy sets over a specific linguistic domain, called Basic Linguistic Term Set (BLTS). The resulting information is converted into a numerical value β through a function χ. Afterward, β is translated into a 2-tuple linguistic model (S_k, α). A decision matrix and cardinal scale are obtained with the result of the 2-tuple model using the M-MACBETH software. Finally, the traditional MACBETH method is used to determine the criteria weights, in which the decision maker performs pairwise comparisons according to his/her preference. In this study, uncertain contexts are objectively evaluated by the 2-Tuple model. Its main contribution is the assessment of alternatives without the decision maker's participation. Therefore, the modeling presented in [66] differs from the model proposed here, as the purpose of the hybrid Fuzzy-MACBETH method is to allow that decision makers' preferences to be incorporated through a triangular Fuzzy scale, including the uncertainty of linguistic terms to the mathematical modeling
[67]	MACBETH and AHP-Fuzzy	The authors use two multi-criteria methods based on linguistic evaluations, MACBETH and AHP-Fuzzy, to evaluate the alternatives of wind, solar, biomass, geothermal and hydroelectric renewable energies. The objective was to compare the two approaches. The authors conclude that MACBETH and Fuzzy-AHP resulted in the same ranking order of energy alternatives. Even though the methods are based on different approaches, they allow decision makers to make more confident decisions in selecting an alternative. If the ranking order were different, decision makers would need deeper analysis, examining the sources of differences. The above study differs from the one proposed here, as it does not incorporate the Fuzzy Theory into the MACBETH method
[16]	Literature review	The authors performed a literature review to understand how Fuzzy Set Theory has been used in conjunction with multi-criteria decision-making methods. The results showed a strong tendency to combine Fuzzy with multi-criteria methods, such as Fuzzy-AHP, Fuzzy-ANP, Fuzzy-TOPSIS, Fuzzy-ELECTRE, Fuzzy-PROMETHEE, and Fuzzy-VIKOR. Only two papers used MACBETH though, [66] and [67]. Therefore, the authors conclude that the MACBETH method has not yet been expanded to its Fuzzy versions. The result presented in [16] is aligned with the literature review performed for this study. It shows that applying a fuzzy number scale for mathematically treating qualitative scales of the MACBETH method represents a research opportunity
[68]	MACBETH and Fuzzy type-2	Based on the literature, the authors prepared a list of performance indicators for hub airports and performed prioritization based on the Best–Worst method (BWM). The Fuzzy Type-2 method was used to obtain the criteria weights. Afterward, the five criteria obtaining the highest weights were used to evaluate the 19 Iranian international airports using the MACBETH method. Thus, in the study performed by [68], the Fuzzy Theory was not incorporated into MACBETH to encompass the uncertainties of the context in the decision problem assessment, differing from the present study

Table 2 (continued)

Reference	Method	Approach
[69]	MACBETH, Fuzzy-TOPSIS, and Fuzzy Shannon Entropy	The authors used MACBETH to obtain the weights of subjective criteria based on the decision makers' preferences and Fuzzy Shannon Entropy to obtain the weights of objective criteria. Next, Fuzzy-TOPSIS was used to obtain the classification of alternatives, and finally, PROMETHEE II, ELECTRE III, and Fuzzy-VIKOR were used to validate the method. In this study, they used the Fuzzy Theory jointly with other MCDA/M methods to assess alternatives. MACBETH was used separately to obtain criteria weights rather than being expanded to a Fuzzy version
[70]	MACBETH, Intuitionist Fuzzy Set, and Grey Number	The authors introduce a new approach to select ERP (Enterprise Resource Planning) software based on MACBETH, considering grey numbers and intuitionistic fuzzy sets under uncertainty. First, the semantic judgments in the MACBETH method, based on grey numbers, are transformed into an interval scale through grey numbers, after which whitenization is performed, generating a new semantic judgment that is applied in the classical MACBETH method. The second approach proposed is to establish an intuitionistic fuzzy set to evaluate the effects of decision makers on a research problem, that is, to determine the weight of each decision maker. Therefore, [70] applied a grey number scale to MACBETH semantic scale to generate a new numeric scale for the method. Note that the method proposed by the authors above is not intended to provide a mathematical treatment for semantically consistent and cardinally inconsistent decision matrices, as we propose here
[71]	MACBETH and Fuzzy numbers	The authors propose a method to rank alternatives based on the MACBETH method extended to a Fuzzy version. Initially, the decision matrix *mxn* is assembled with *n* criteria and *m* alternatives. In the first step, the weighted values of each criterion are obtained for each decision maker. Next, the criteria are evaluated based on a triangular fuzzy numbers scale, generating a vector of fuzzy weights for each decision maker. These vectors are aggregated, generating, for each criterion, a single fuzzy weight vector. Next, the alternatives are evaluated using a mathematical formula, generating a crisp number for each alternative. Afterward, the MACBETH fuzzy score is calculated for each alternative, multiplying the value of the alternative by the vector of fuzzy weights for each criterion. The global fuzzy value of each alternative is obtained, and this value is then defuzzified, resulting in a rank. This study's objective is not to obtain cardinal scales for each evaluation element but to provide an aggregation method to rank the alternatives based on Fuzzy-MACBETH modeling. Although [71] present an extension of the MACBETH method to a Fuzzy version, the modeling differs from the one presented here, as it does not use a Fuzzy numbers scale to obtain a cardinal scale but to obtain a ranking of the alternatives being assessed

To determine the cardinal value measure for each alternative x, in addition to the two previous conditions, it is necessary that:

- $\forall w, x, y, z \in A$ with an x more attractive than y and a w more attractive than z, ratio $\left[v(x) - v(y)\right]/[v(w) - v(z)]$ corresponds to the measure of attractiveness between x and y, having the difference in attractiveness between w and z as a unit of measure.

Thus, while the ordinal value measure indicates the preference order of alternatives, the cardinal value measure reflects the difference in attractiveness between the alternatives [74]. The pre-cardinal scale, called basic MACBETH scale, can then be obtained from the linear programming problem LP-MACBETH, presented in [74], with x^+ e x^- being the most attractive and least attractive elements of A, respectively.

LP-MACBETH

$$Min\left[v\left(x^+\right) - v(x^-)\right]$$

Subject to restrictions:

1. $v(x^-) = 0$ (arbitrarily chosen value).
2. $v(x) - v(y) = 0, \forall (x, y) \in C_0$.
3. $v(x) - v(y) \geq 1, \forall (x, y) \in C_i \cup \cdots \cup C_s$, with $i, s \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ and $i \leq s$.
4. $v(x) - v(y) \geq v(w) - v(z) + i - s', \forall (x, y) \in C_i \cup \cdots \cup C_s$ and $\forall (w, z) \in C'_i \cup \cdots \cup C'_s$ with $i, s, i', s' \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ and $i \leq s, i' \leq s'$ and $i > s'$.

The basic MACBETH scale is anchored by values $v\left(x^+\right) = 100$ and $v(x^-) = 0$. Hence, MACBETH cardinal scale (μ_x) is obtained from Eq. (2).

$$\mu_x = \alpha v_x + \beta. \tag{2}$$

3 Fuzzy Logic

The Fuzzy set theory was conceived by Lofti A. Zadeh [77] to consider the uncertain aspects of human thought. Differently from randomness, the uncertainty considered by the Fuzzy theory comprises the imprecision of the linguistic variables, which are disregarded in classical mathematical treatment [78]. Hence, imprecise terms such as "small", "large", "a lot", and "a little", among others, are taken into account in the Fuzzy theory [79].

Including Fuzzy logic in decision-making enables considering ambiguous aspects, uncertainty, or indecision permeating real-world problems [69]. By mathematically formalizing such imprecisions, [77] expanded the image set of the characteristic function of a classic (or crisp) set, in which the Fuzzy subset is characterized by a membership function μ_F. Thus, being U a crisp set, a fuzzy subset is characterized by the membership function (3).

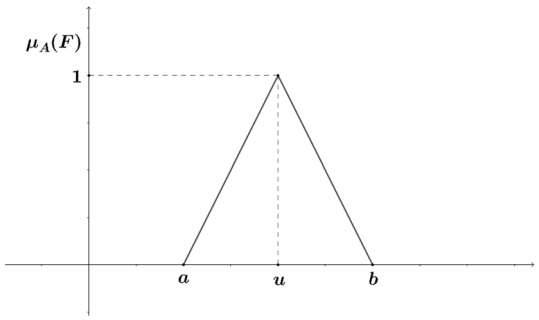


Fig. 1 Triangular fuzzy number

$$\mu_F : U \rightarrow [0.1]. \tag{3}$$

This membership function indicates the degree to which element x of set U belongs to subset F, where $\mu_F(x) = 0$ indicates the non-membership of element x to subset F and $\mu_F(x) = 1$ indicates full membership. According to [80], fuzzy numbers are a fuzzy subset of real numbers, representing the expansion of the notion of confidence intervals. Hence, Fuzzy numbers allow the mathematical modeling of the inaccuracy present in complex systems, the main ones being the triangular Fuzzy number, the trapezoidal Fuzzy number, and bell-shaped Fuzzy number; the triangular number is the most frequently found in the literature [81].

Therefore, a Fuzzy number A is said to be triangular if its membership function is of Eq. (4).

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{u-a}; & if\ a < x \leq u \\ \frac{x-b}{u-b}; & if\ u < x \leq b \\ 0; & otherwise \end{cases} \tag{4}$$

Whose membership function presents a graph in triangular format, with a base $[a,b]$ and vertex $(u,1)$, as shown in Fig. 1. Thus, the triangular fuzzy number is represented by the ordered triplet $(a;\ u;\ b)$ or $a/u/b$ and is the closure

of the support of A $\overline{supp}A$), corresponding to the α-level [A]^0.

Arithmetic operations with fuzzy numbers are linked to interval arithmetic operations, and the following definitions can be stated, which can be considered particular cases of the Zadeh Extension Principle, where $A_1 = (l_1, m_1, u_1)$ and $A_2 = (l_2, m_2, u_2)$ two fuzzy numbers and λ a real number.

- Sum of Fuzzy numbers: $(l_1, m_1, u_1) \oplus (l_2, m_2, u_2) = (l_1 + l_2, m_1 + m_2, u_1 + u_2)$
- Multiplication of a real number by a fuzzy number: $(l_1, m_1, u_1) \odot (\lambda, \lambda, \lambda) = (\lambda l_1, \lambda m_1, \lambda u_1)$
- Difference of Fuzzy numbers: $(l_1, m_1, u_1) \ominus (l_2, m_2, u_2) = (l_1 - l_2, m_1 - m_2, u_1 - u_2)$
- Multiplication of Fuzzy numbers: $(l_1, m_1, u_1) \otimes (l_2, m_2, u_2) = (l_1 \times l_2, m_1 \times m_2, u_1 \times u_2)$
- Division of Fuzzy numbers: $(l_1, m_1, u_1) \oslash (l_2, m_2, u_2) = (l_1 \times \frac{1}{l_2}, m_1 \times \frac{1}{m_2}, u_1 \times \frac{1}{u_2})$

Thus, using a Fuzzy number scale, aligned with MACBETH's semantic scale, can include the uncertainty inherent to linguistic terms used to measure differences in attractiveness between elements assessed in the method's mathematical modeling. Uncertainty in the mathematical representation of such terms is related to the meaning they assume for each individual, which does not correspond to an exact value but to a subjective dimension.

The cardinal scales' dimensionality arising from a qualitative assessment based on the decision maker's preferences can be obtained through the Fuzzy Theory by making the idea of number more flexible, adding uncertainty aspects. Thus, this study provides the MACBETH method with a new approach extended to its Fuzzy version.

4 Proposed Method

According to [20], facts, values, science, and human judgment are essential ingredients for decision-making. Hence, the main feature that prompted the choice of the MACBETH method was the use of qualitative scales to assess decision problems, in which the decision maker assigns semantic judgments to ordered pairs of alternatives and criteria. Hence, value functions are obtained based on the decision makers' perceptions and values.

A value function is the mathematical representation of human judgments, which allows an analytical study of preferences and value judgments [20]. Therefore, to obtain the value functions, the alternatives are compared based on the semantic categories of [72], in which the decision maker assigns an absolute verbal judgment on the difference in attractiveness between x and y, for each ordered pair (x,y) in $A \times A$ with xPy.

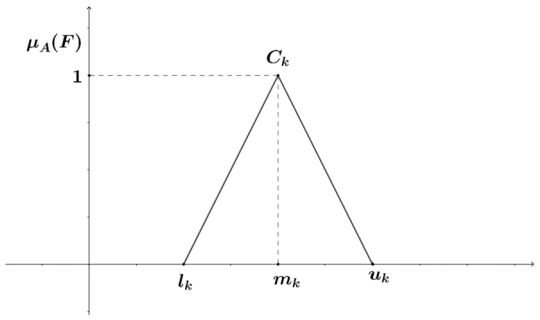


Fig. 2 Triangular fuzzy-MACBETH number

Considering that the objective in the MACBETH method's linear programming problem is to find a numerical value for each alternative that is as close as possible to the center of the interval of the corresponding category, that is, the maximum degree of membership is in the center of the interval, the Fuzzy triangular number was used to build the scale of the Fuzzy-MACBETH method proposed here, as shown in Fig. 2, where $x_{i,j}$ is assigned value $\widetilde{A}$ if and only if the decision maker has assigned (x_i, x_j) to a category c_k, such that:

$$\widetilde{A} = \begin{cases} m_k = k \\ l_k = k - 1 \\ u_k = k + 1 \end{cases} \iff k = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$\widetilde{A} = \begin{cases} m_k = l_k = k \\ u_k = k + 1 \end{cases} \iff C_1$$

$$\widetilde{A} = \begin{cases} m_k = u_k = k \\ l_k = k - 1 \end{cases} \iff C_6.$$

Therefore, the resulting scale can be represented as shown in Fig. 3. The semantic scale is fuzzified based on the decision maker's semantic judgments. In other words, the first task of the Fuzzy-MACBETH method proposed here is to determine the differences between the alternatives in terms

Table 3 Scale of the proposed Fuzzy-MACBETH method

C_k	Semantic scale	$\widetilde{A}$
C_0	Indifference between alternatives	(0, 0, 0)
C_1	Difference concerning very weak attractiveness	(1, 1, 2)
C_2	Difference concerning weak attractiveness	(1, 2, 3)
C_3	Difference concerning moderate attractiveness	(2, 3, 4)
C_4	Difference concerning strong attractiveness	(3, 4, 5)
C_5	Difference concerning very strong attractiveness	(4, 5, 6)
C_6	Difference concerning extreme attractiveness	(5, 6, 6)

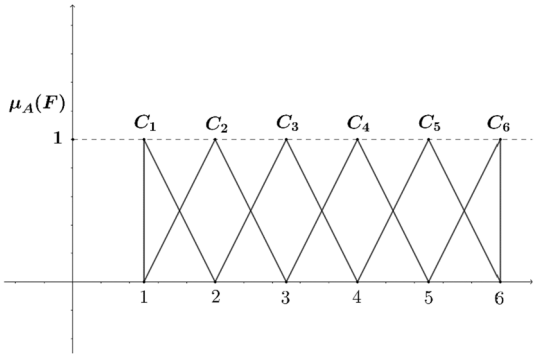


Fig. 3 Graphic scale of the proposed Fuzzy-MACBETH method

of attractiveness, using triangular fuzzy numbers, generating a fuzzy decision matrix.

Having the Fuzzy decision matrix, the basic Fuzzy scale can be obtained through the linear programming problem that we will call F-LP-MACBETH, resulting in a pre-cardinal scale $\widetilde{v}$ for each alternative.

F-LP-MACBETH

$$Min\left[\widetilde{v}\left(x^{+}\right)-\widetilde{v}(x^{-})\right]$$

Subject to restrictions:

1. $\widetilde{v}(x^{-})=(0,0,0)$.
2. $\widetilde{v}(x)-\widetilde{v}(y)=(0,0,0), \forall(x,y)\in C_0$.
3. $\widetilde{v}(x)-\widetilde{v}(y)\geq(1,1,2), \forall(x,y)\in C_k, \quad with \quad k\in\{1,2,3,4,5,6\}$.
4. $\widetilde{v}(x)-\widetilde{v}(y)\geq\widetilde{v}(w)-\widetilde{v}(z), \forall(x,y)\in C_k$ and $\forall(w,z)\in C_{k'}$, with $k,k'\in\{1,2,3,4,5,6\}$ and $k>k'$.

Thus, in the F-LP-MACBETH linear programming problem, the objective function aims to minimize the largest difference in fuzzy values between the more and less attractive alternatives. In the first restriction, the scale origin is fixed, and the second and third restrictions ensure that the ranking order of the elements is preserved. The fourth restriction, which deals with cardinal inconsistency, was made more flexible using the fuzzy number scale, which has gradual and transposed thresholds. This flexibility becomes viable because, in the Fuzzy Theory, an element can simultaneously belong to a subset and its complement, with a certain degree of membership.

The basic Fuzzy scale obtained is still Fuzzy numbers. Hence, an approach to transforming fuzzy numbers into crisp numbers is needed. These approaches include the mean of the maximum, the centroid method, the α-cut methods, and the maximization and minimization sets (MAX–MIN) [82]. In this study, we chose the centroid method, in which the basic crisp scale is obtained by calculating the centroid of the triangular fuzzy number.

This defuzzified basic scale, however, does not yet correspond to the cardinal scale. For that, the scales are first anchored, assigning *zero* to the level of performance the decision maker considered *neutral* and *one hundred* to the level of performance considered *good*, thus enabling aggregate local assessments. Equation (2) is applied to determine the cardinal scale (μ_x).

5 Results and Discussion

This section presents the results of the Fuzzy-MACBETH method proposed here according to two situations: a consistent ordinal and cardinal decision matrix and an inconsistent cardinal decision matrix.

First Example The first example was developed to show the applicability of the method proposed. The procedure to solve these examples is supported by an electronic spreadsheet. The decision matrix M_1, extracted from [74] was used in the first example. This matrix presented semantic and cardinal consistency.

$$M_1=\begin{bmatrix} * & (veryweak) & (weak) & (strong) & (strong) & (verystrong) \\ * & * & (weak) & (moderate) & (moderate) & (strong) \\ * & * & * & (moderate) & (moderate) & (moderate) \\ * & * & * & * & (veryweak) & (veryweak) \\ * & * & * & * & * & (veryweak) \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}.$$

First, the decision matrix is fuzzified, assigning the values of the α-levels [A]^0 of the triangular Fuzzy-MACBETH scale corresponding to each category the decision maker assigned to the differences in attractiveness between the alternatives, as follows:

$$\widetilde{A}_{n\times n}=\begin{bmatrix} * & (1,1,2) & (1,2,3) & (3,4,5) & (3,4,5) & (4,5,6) \\ * & * & (1,2,3) & (2,3,4) & (2,3,4) & (3,4,5) \\ * & * & * & (2,3,4) & (2,3,4) & (2,3,4) \\ * & * & * & * & (1,1,2) & (1,1,2) \\ * & * & * & * & * & (1,1,2) \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}.$$

Table 4 presents the results of the Fuzzy-MACBETH method for the first example. Having the basic Fuzzy scale ($\widetilde{v}_x$) the defuzzification was performed using the centroid method, obtaining the basic scale (v_x). Finally, the cardinal scales (μ_x) were obtained using Eq. (2).

For comparison purposes, Table 5 shows the results obtained by the method proposed here and the classical MACBETH method.

The cardinal scale obtained with the Fuzzy-MACBETH method is coherent with the scale generated in the classical

Table 4 Results of the Fuzzy-MACBETH method concerning the first example

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\widetilde{v}_x$	v_x	μ_x
x_1		1,1,2	4,4,7	9,9,15	10,10,17	11,11,19	11,11,19	13.67	112.12
x_2			3,3,5	8,8,13	9,9,15	10,10,17	10,10,17	12.33	100.00
x_3				5,5,8	6,6,10	7,7,12	7,7,12	8.67	66.68
x_4					1,1,2	2,2,4	2,2,4	2.67	12.15
x_5						1,1,2	1,1,2	1.33	0.00
x_6							0,0,0	0.00	− 12.09

MACBETH method. For example, going from level x_5 to x_4 corresponds to a loss of 10 points in the classical method and 12.15 points in the Fuzzy-MACBETH method, while going from x_5 to x_6, corresponds to an improvement of 70 points according to the MACBETH and 66.68 points according to the Fuzzy-MACBETH. It shows that the mathematical modeling is aligned with the source method.

Second Example In the second example, the decision matrix M_2 presented in [76] was chosen. Although this matrix was originally solved by the MACBETH first version, the latest version of the M-MACBETH software was applied and cardinal inconsistency was also found in the most current model. Even though the decision matrix is semantically consistent, cardinal inconsistency was found, so the decision maker was suggested to change the assessment of the difference in attractiveness between alternatives x_1 and x_3 from *Very Strong* to *Strong*.

Table 6 presents the final matrix obtained from the application of the Fuzzy-MACBETH method. Finally, Table 7 presents the results of the Fuzzy-MACBETH method used for the original decision matrix and of the classical MACBETH method, changing the decision maker's value judgments to correct the cardinal inconsistency.

The cardinal inconsistency resulting from the mathematical modeling based on the problem of numerical representation of multiple semiorders with constant thresholds does not emerge in the modeling based on Fuzzy numbers. The reason is that conventional mathematical treatment cannot incorporate the subjectivity of linguistic variables. In other words, it is impossible to incorporate the meaning that concepts such as *weak*, *strong*, *very strong,* or *extreme* assume for each individual into the modeling through classical mathematical methods. Thus, the main contribution of Fuzzy Logic is verified in this type of uncertainty.

$$M_2 = \begin{bmatrix} * & (strong) & (v.strong) & (v.strong) & (v.strong) & (extreme) & (extreme) & (extreme) \\ * & * & (v.weak) & (weak) & (moderate) & (strong) & (v.strong) & (extreme) \\ * & * & * & (weak) & (weak) & (strong) & (strong) & (v.strong) \\ * & * & * & * & (weak) & (weak) & (strong) & (strong) \\ * & * & * & * & * & (weak) & (moderate) & (strong) \\ * & * & * & * & * & * & (weak) & (weak) \\ * & * & * & * & * & * & * & (v.weak) \\ * & * & * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}.$$

In this study, the Fuzzy-MACBETH method was applied to the original decision matrix, without correcting the inconsistency. The decision matrix was then fuzzified, as follows:

$$\widetilde{A}_{n\times n} = \begin{bmatrix} * & (3,4,5) & (4,5,6) & (4,5,6) & (4,5,6) & (5,6,6) & (5,6,6) & (5,6,6) \\ * & * & (1,1,2) & (1,2,3) & (2,3,4) & (3,4,5) & (4,5,6) & (5,6,6) \\ * & * & * & (1,2,3) & (1,2,3) & (3,4,5) & (3,4,5) & (4,5,6) \\ * & * & * & * & (1,2,3) & (1,2,3) & (3,4,5) & (3,4,5) \\ * & * & * & * & * & (1,2,3) & (2,3,4) & (3,4,5) \\ * & * & * & * & * & * & (1,2,3) & (1,2,3) \\ * & * & * & * & * & * & * & (1,1,2) \\ * & * & * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}.$$

Table 5 Results of the Fuzzy-MACBETH and classical MACBETH methods concerning the first example

	Fuzzy-MACBETH			Classic MACBETH	
	$\widetilde{v}_x$	v_x	μ_x	v_x	μ_x
x_1	11,11,19	13,67	112.12	13	120
x_2	10,10,17	12,33	100.00	11	100
x_3	7,7,12	8,67	66.68	8	70
x_4	2,2,4	2,67	12.15	2	10
x_5	1,1,2	1,33	0.00	1	0
x_6	0,0,0	0,00	− 12.09	0	− 10

Table 6 Final matrix of Fuzzy-MACBETH method for the second example

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1		5,55/5,55/8,25	7,05/7,05/10,75	8,55/8,55/13,25	10,05/10,05/15,75	12,05/12,05/18,75	14,1/14,1/21,5	15,6/15,6/24
x_2			1,5/1,5/2,5	3/3/5	4,5/4,5/7,5	6,5/6,5/10,5	8,55/8,55/13,25	10,05/10,05/15,75
x_3				1,5/1,5/2,5	3/3/5	5/5/8	7,05/7,05/10,75	8,55/8,55/13,25
x_4					1,5/1,5/2,5	3,5/3,5/5,5	5,55/5,55/8,25	7,05/7,05/10,25
x_5						2/2/3	4,05/4,05/5,75	5,55/5,55/8,25
x_6							2,05/2,05/2,75	3,55/3,55/5,25
x_7								1,5/1,5/2,5
x_8								

Table 7 Results of the Fuzzy-MACBETH method for the second example

	Fuzzy-MACBETH			Classic MACBETH	
	$\widetilde{v}_x$	v_x	μ_x	v_x	μ_x
x_1	15,6/15,6/24	18,4	163,76	36	157,14
x_2	10,05/10,05/15,75	11,95	100,00	24	100
x_3	8,55/8,55/13,25	10,11	81,88	21	85,71
x_4	7,05/7,05/10,75	8,28	63,76	17	66,67
x_5	5,55/5,55/8,25	6,45	45,63	13	47,62
x_6	3,55/3,55/5,25	4,11	22,57	8,5	26,19
x_7	1,5/1,5/2,5	1,83	0,00	3	0
x_8	0/0/0	0,00	−18,08	0	− 14,29

In this study, the mathematical modeling allowed us to mathematically incorporate the subjectivity of the linguistic scale of the MACBETH method, generating a cardinal scale based on the decision maker's preferences. The reason is that when the cardinal inconsistency is corrected by changing the decision maker's assessment, one may be at the risk of obtaining a consistent cardinal result, however, at odds with the decision maker's understanding of the decision problem.

The results suggest that the Fuzzy-MACBETH modeling allows the mathematical treatment of linguistic variables of the semantic scale through the application of Fuzzy Logic. Therefore, the uncertainty permeating human thinking can be mathematically incorporated, resulting in a scale aligned with the decision maker's preferences. Considering that the MACBETH differential is the use of a semantic scale to assess alternatives, the method's main benefit is overcoming cardinal inconsistencies arising from traditional mathematical modeling.

Note that there are other multi-criteria methods using Fuzzy scales in the literature, among which the Fuzzy-AHP stands out. However, although both methods, Fuzzy-MACBETH and Fuzzy-AHP, are aggregation methods, they present important differences. The scale generated from the Fuzzy-MACBETH is a cardinal scale obtained a posteriori, based on the differences in attractiveness between pairs of alternatives, using linear programming. That is, *zero* in the cardinal scale obtained from the Fuzzy-MACBETH is not the origin of the scale, allowing us to work with the bipolar concept of attractiveness and repulsiveness. On the other hand, the Fuzzy-AHP presents a ratio scale determined a priori, using eigenvalues and eigenvectors, where *zero* represents the scale's natural threshold, which according to [72] restricts its field of application.

Regarding studies applying the Fuzzy Theory together with the MACBETH method presented in Table 1, note that [70] apply a new approach to the scale of the MACBETH method, in which semantic judgments were transformed into grey numbers. However, the Fuzzy Set Theory was used only to determine the weights the decision makers assigned to the group assessment by applying the Intuitionist Fuzzy Theory. However, in the Fuzzy-MACBETH method proposed here, the problem of cardinal inconsistency was circumvented by transforming it into a semantically consistent decision matrix. [71] propose a new Fuzzy-MACBETH approach for alternative ranking problems, not aiming at the development of scales.

5.1 Sensitivity Analysis

A sensitivity analysis was performed by comparing the results obtained from different methods [65]. Hence, the decision matrix M_3 extracted from [70] was used. The results obtained from the Fuzzy-MACBETH, MACBETH, and Grey-MACBETH methods [70] are shown in Table 8. Additionally, the methods presented in the literature that develop value functions were used, i.e., cardinal scales can be obtained from these methods, which were used to compare the results.

Table 8 Results of the Fuzzy-MACBETH, MACBETH, and Grey-MACBETH methods

	Classic MACBETH		Fuzzy-MACBETH				Grey-MACBETH	
	v_x	μ_x	$\widetilde{v}_x$	v_x	μ_x	Difference (%)	μ_x	Difference (%)
x_1	5	100	5/5/9	6.3333	100.000	0.00	100.0000	0.00
x_2	2	40	2/2/4	2.6667	42.105	5.26	57.1428	42.85
x_3	1	20	1/1/2	1.3333	21.052	5.26	28.5714	42.85
x_4	0	0	0/0/0	0.0000	0.000	0	0.0000	0

$$M_3 = \begin{bmatrix} * & (weak) & (moderate) & (strong) \\ * & * & (veryweak) & (veryweak) \\ * & * & * & (veryweak) \\ * & * & * & * \end{bmatrix}.$$

The results in Table 7 show the alignment of the Fuzzy-MACBETH method with the MACBETH method. Note that the result obtained from the Fuzzy-MACBETH method was closer to that obtained by the original MACBETH. Additionally, the cardinal scale resulting from the Fuzzy-MACBETH showed a percentage difference of 5.26, and the Grey-MACBETH method showed a percentage difference of 42.85 in relation to the MACBETH cardinal scale, revealing the robustness of the proposed method.

6 Conclusions

The mathematical modeling developed in this study led us to the Fuzzy-MACBETH method presented in Sect. 4, which applies a triangular Fuzzy scale to MACBETH semantic scale. It consists of four steps: first, the decision matrix obtained from the decision maker's verbal responses concerning attractiveness differences between pairs of alternatives is fuzzified. Next, the Fuzzy inference procedure is performed based on the F-LP-MACBETH, resulting in a basic Fuzzy scale. Then, the basic fuzzy scale is defuzzified in the third step using the centroid method, which results in a basic crisp scale. Finally, the basic scale is cardinalized.

The results presented and discussed in Sect. 5 show the potential of the Fuzzy-MACBETH method in modeling the imprecision of human speech. Uncertain concepts, such as Very Weak, Weak, Moderate, Strong, Very Strong, and Extreme, which compose the semantic scale of the MACBETH method, can be easily understood in interpersonal interactions; however, translating these into mathematical and computational concepts is not a simple task. The reason is that these are uncertain concepts linked to individual value systems; the meaning of such concepts varies among individuals. Thus, Fuzzy Logic is the tool used to translate the uncertainty of linguistic variables.

Two examples were presented here showing an alignment of the Fuzzy-MACBETH method proposed here with the classical MACBETH method; cardinal scales consistent with those obtained by the classical method were generated when the model was applied to a semantic and cardinal consistent decision matrix. In its application in a semantically consistent decision matrix, which presents cardinal inconsistency with the classical method, the Fuzzy-MACBETH showed the ability to generate a consistent cardinal scale. Overcoming the cardinal inconsistency was possible due to the semantic scale's flexibility obtained with the application of fuzzy numbers, which can incorporate the subjectivity of linguistic variables into the mathematical modeling.

In future studies, we intend to implement the Fuzzy-MACBETH hybrid method in a DSS to facilitate its use by decision-making specialists. Bio-inspired metaheuristics [59, 83, 84] are suggested to facilitate its implementation, considering that evolutionary algorithms enable working both with optimization problems in interactive methods and methods based on the single criterion of synthesis [85]. Another suggestion is to expand the method to allow group evaluation. In this sense, some studies in the literature use the process of obtaining consensus for group decision-making [86–88].

Authors' contributions TRB developed the mathematical modeling, analysis of the algorithm and wrote the manuscript, AAL guided in all stages of development and analysis of the algorithm and CMSM, LE, SRE and AD helped to carry out the analysis with constructive discussions.

Funding Not applicable.

Availability of data and materials Not applicable.

Declarations

Conflict of interest The authors declare no conflicts of interest.

Ethics approval This study did not involve human or animal subjects.

Consent for publication All the authors agree with this manuscript's publication.

Open Access This article is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License, which permits use, sharing, adaptation, distribution and reproduction in any medium or format, as long

as you give appropriate credit to the original author(s) and the source, provide a link to the Creative Commons licence, and indicate if changes were made. The images or other third party material in this article are included in the article's Creative Commons licence, unless indicated otherwise in a credit line to the material. If material is not included in the article's Creative Commons licence and your intended use is not permitted by statutory regulation or exceeds the permitted use, you will need to obtain permission directly from the copyright holder. To view a copy of this licence, visit http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/.

References

1. Bouyssou, D., Marchant, T., Pirlot, M., Perny, P., Tsoukiàs, A., Vincke, P.: Evaluation and decision models: A critical perspective. Kluwer Academic Publishers (International series in operations research and management Science) (2000)
2. Bana Costa, C.: Introdução geral às abordagens multicritério de apoio à tomada de decisão. Investigação Operacional. **8**(1), 117–139 (1988)
3. Pérez-Gladish, B., Ferreira, F.A.F., Zopounidis, C.: Mcdm/a studies for economic development, social, cohesion and environmental sustainability: introduction. Int. J. Sustain. Dev. World Ecol. (2020). https://doi.org/10.1080/13504509.2020.1821257
4. Zak, J., Weglinski, S.: The selection of the logistics center location based on mcdm/a methodology. Transp. Res. Proc. **3**, 555–564 (2014)
5. Stabell, C.B.: Decision support systems: Alternative perspectives and schools. Decis. Support Syst. **3**(3), 243–251 (1987)
6. García-Gamorra, D., Labella, A., Ding, W., Rodríguez, R.M., Martínez, L.: Large-scale group decision making: A systematic review and a critical analysis. IEEE/CAA J. Autom. Sin. **9**(6), 949–966 (2022). https://doi.org/10.1109/JAS.2022.105617
7. Bouyssou, D., Marchant, T., Pirlot, M.: A theoretical look at electre tri-nb and related sorting models. Q. J. Oper. Res. (2022). https://doi.org/10.1007/s10288-022-00501-9
8. Atanassov, K., Gargov, G.: Interval valued intuituinistic fuzzy sets. Fuzzy Sets Syst. **31**(3), 343–349 (1989)
9. Smarandache, F.: Neutrosophic logic and sets. (1995). http://fs.gallup.unm.edu/neutrosophy.htm
10. Deng, J.-L.: Control problems of grey systems. Syst. Control Lett. **1**(5), 288–294 (1982)
11. García-Zamora, D., Labella, A., Rodríguez, R.M., Martínez, L.: A linguistic metric for consensus reaching processes based on ELICIT comprehensive minimum cost consensus models. IEEE Trans. Fuzzy Syst. (2022). https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2022.3213943
12. Zhang, H., Li, C.-C., Liu, Y., Dong, Y.: Modeling personalized individual semantics and consensus in comparative linguistic expression preference relations with self-confidence: An optimization-based approach. IEEE Trans. Fuzzy Syst. (2021). https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2019.2957259
13. Zhang, H., Dong, Y., Xiao, J., Chiclana, F., Herrera-Viedma, E.: Personalized individual semantics-based approach for linguistic failure modes and effects analysis with incomplete preference information. IISE Trans. (2020). https://doi.org/10.1080/24725854.2020.1731774
14. Rodríguez, R.M., Martínez, L., Herrera, F.: Hesitant fuzzy linguistic term sets for decision making. IEEE Trans. Fuzzy Syst. (2012). https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2011.2170076
15. Rodríguez, R.M., Labella, A., Dutta, B., Martínez, L.: Comprehensive minimum cost models for large scale group decision making with consistent fuzzy preference relations. Knowl.-Based Syst. (2021). https://doi.org/10.1016/j.knosys.2021.106780
16. Kahraman, C., Onar, S.C., Oztaysi, B.: Fuzzy multicriteria decision-making: A literature review. Int. J. Comput. Intell. Syst. **8**(4), 637–666 (2015)
17. Bana Costa, C.A., Oliveira, M.D., Vieira, A.C., Freitas, L., Rodrigues, T.C., Bana Costa, J., Freitas, A., Santana, P.: Collaborative development of composite indices from qualitative value judgements: The EURO-HEALTHY Population Health Index model. Eur. J. Oper. Res. (2023). https://doi.org/10.1016/j.ejor.2022.05.037
18. Roy, B.: Multicriteria Methodology for Decision Aiding. 1. ed. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers (Springer Science plus Business Media Dordrecht) (1996)
19. Almeida, A.T.: Processo de Decisão nas Organizações: Construindo Modelos de Decisão Multicritério. 1. ed. São Paulo: Editora Atlas (2013)
20. Beinat, E.: Value Functions for Environmental Management. 1. ed. [S.1.]: Kluwer Academic Publishers (Springer Science plus Business Media Dordrecht) (1997)
21. Chen, T.-Y., Chang, H.-F.: Critical success factors and architecture of innovation services models in data industry. Exp. Syst. Appl. (2023). https://doi.org/10.1016/j.eswa.2022.119014
22. Singh, R., Majumder, C.B., Vidyarthi, A.K.: Assessing the impacts of industrial wastewater on the inland surface water quality: An application of analytic hierarchy process (AHP) model-based water quality index and GIS techniques. Phys. Chem. Earth. (2023). https://doi.org/10.1016/j.pce.2022.103314
23. Krenicky, T., Hrebenyk, L., Chernobrovchenko, V.: Application of concepts of the analytic hierarchy process in decision-making. Manag. Syst. Prod. Eng. **30**(4), 304–310 (2022). https://doi.org/10.2478/mspe-2022-0039
24. Iaria, J., Susca, T.: Analytic Hierarchy Processes (AHP) evaluation of green roof- and green wall- based UHI mitigation strategies via ENVI-met simulations. Urban Clim. (2022). https://doi.org/10.1016/j.uclim.2022.101293
25. AbdolkhaniNezhad, T., Monavari, S.M., Khorasani, M., Robati, N., Farsad, F.: Comparative analytical study of the results of environmental risk assessment of urban landfills approach: bowtie, network analysis techniques (ANP), TOPSIS (case study: Gilan Province). Environ. Monit. Assess. (2022). https://doi.org/10.1007/s10661-022-10513-x
26. Tseng, S.-H., Chen, H.-C., Nguyen, T.S.: Key success factors of sustainable organization for traditional manufacturing industries: A case study in Taiwan. Mathematics. **10**, 4389 (2022). https://doi.org/10.3390/math10224389
27. Chen, Q., Zhang, W., Jin, N., Wang, X., Dai, P.: Digital transformation evaluation for small and medium-sized manufacturing enterprises using the fuzzy synthetic method DEMATEL-ANP. Sustainability. **14**, 13038 (2022). https://doi.org/10.3390/su142013038
28. Ghodusinejad, M.H., Ghodrati, A., Zahedi, R., Yousefi, H.: Multicriteria modeling and assessment of PV system performance in different climate areas of Iran. Sustain. Energy Technol. Assess. (2022). https://doi.org/10.1016/j.seta.2022.102520
29. Nakhaei, J., Bitarafan, M., LaleArefi, S., Kaplinski, O.: Model for rapid assessment of vulnerability of office buildings to blast using swara and smart methods (A case study of swiss re tower). J. Civ. Eng. Manag. **22**(6), 831–843 (2016). https://doi.org/10.3846/13923730.2016.1189457
30. Wang, L., Zhang, Z.-X., Ishizaka, A., Wang, Y.-M., Martínez, L.: TODIMSort: A TODIM based method for sorting problems. Omega (2023). https://doi.org/10.1016/j.omega.2022.102771
31. Elidolu, G., Uflaz, E., Aydin, M., Celik, E., Akyuz, E., Arslan, O.: Numerical risk analysis of gas freeing process in oil/chemical tanker ships. Ocean Eng. (2022). https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.113082

32. Corrente, S., Tasiou, M.: A robust TOPSIS method for decision making problems with hierarchical and non-monotonic criteria. Exp. Syst. Appl. (2023). https://doi.org/10.1016/j.eswa.2022.119045
33. Du, S.: Hybrid Kano-DEMATEL-TOPSIS model based benefit distribution of multiple logistics service providers considering consumer service evaluation of segmented task. Exp. Syst. Appl. (2023). https://doi.org/10.1016/j.eswa.2022.119292
34. Fan, R., Zhang, H., Gao, Y.: The global cooperation in asteroid mining based on AHP, entropy and TOPSIS. Appl. Math. Comput. (2023). https://doi.org/10.1016/j.amc.2022.127535
35. Tavares, R.S., Angulo-Meza, L., Rangel, L.A.D., Sant Anna, A.P.: Interdisciplinary graduate programs: Application of the MACBETH multicriteria method for assessing their performances. Ann. Oper. Res. **316**, 1383 (2022). https://doi.org/10.1007/s10479-021-04108-x
36. Gkouvitsos, I., Giannikos, I.: Using a MACBETH based multicriteria approach for virtual weight restrictions in each stage of a DEA multi-stage ranking process. Oper. Res. Int. Journal **22**, 1787–1811 (2022). https://doi.org/10.1007/s12351-020-00619-w
37. Campos, V.R., Moreira, D.J.S.: Risk assessment with multi-attribute utility theory for building projects. J. Build. Pathol. Rehabil. **7**, 98 (2022). https://doi.org/10.1007/s41024-022-00241-7
38. Zidi, S., Hamani, N., Kermad, L.: New metrics for measuring supply chain reconfgurability. J. Intell. Manuf. **33**, 2371–2392 (2022). https://doi.org/10.1007/s10845-021-01798-9
39. Marques, A.C., Frej, E.A., de Almeida, A.T.: Multicriteria decision support for project portfolio selection with the FITradeoff method. Omega **111**, 2 (2022). https://doi.org/10.1016/j.omega.2022.102661
40. Correia, L.M.A.M., Silva, J.M.N., Leite, W.K.S., Lucas, R.E.C., Colaço, G.A.: A multicriteria decision model to rank workstations in a footwear industry based on a FITradeof-ranking method for ergonomics interventions. Oper. Res. **22**, 3335–3371 (2022). https://doi.org/10.1007/s12351-021-00671-0
41. Darko, A.P., Liang, D., Xu, Z., Agbodah, K., Obiora, S.: A novel multi-attribute decision-making for ranking mobile payment services using online consumer reviews. Exp. Syst. Appl. **213**, 2 (2023). https://doi.org/10.1016/j.eswa.2022.119262
42. Akram, M., Noreen, U., Deveci, M.: Enhanced ELECTRE II method with 2-tuple linguistic *m*-polar fuzzy sets for multi-criteria group decision making. Exp. Syst. Appl. **213**, 2 (2023). https://doi.org/10.1016/j.eswa.2022.119237
43. Tu, Y., Shi, H., Chen, K., Liang, Y., Zhou, X., Lev, B.: Three-reference-point based group ELECTRE III method for urban flood resilience evaluation. Exp. Syst. Appl. **210**, 2 (2022). https://doi.org/10.1016/j.eswa.2022.118488
44. Emamat, M.S.M.M., de Mota, C.M.M., Mehregan, M.R., Moghadam, M.R.S., Nemery, P.: Using ELECTRE-TRI and flowsort methods in a stock portfolio selection contexto. Financial Innovation. Finan. Innov. **8**, 11 (2022). https://doi.org/10.1186/s40854-021-00318-1
45. Akram, M., Sultan, M., Alcantud, J.C.R., Al-Shamiri, M.M.A.: Extended fuzzy N-Soft PROMETHEE method and its application in robot butler selection. Math. Biosci. Eng. **20**(2), 1774–1800 (2022). https://doi.org/10.3934/mbe.2023081
46. Zolfani, S.H., Taheri, H.M., Gharehgozlou, M., Farahani, A.: An asymmetric PROMETHEE II for cryptocurrency portfolio allocation based on return prediction. Appl. Soft Comput. (2022). https://doi.org/10.1016/j.asoc.2022.109829
47. Vansnick, J.-C.: On the problem of weights in multiple criteria decision making (the noncompensatory approach). Eur. J. Oper. Res. **24**(2), 288–294 (1986). https://doi.org/10.1016/0377-2217(86)90051-2
48. Della Spina, L.: Revitalization of inner and marginal areas: A multi-criteria decision aid approach for shared development strategies. Valori e Valutazioni. **25**, 37–44 (2020)
49. Boggia, A., Rocchi, L.: Water use scenarios assessment using multicriteria analysis. J. Multi-Criteria Decis. Anal. **17**(5–6), 125–135 (2010). https://doi.org/10.1002/mcda.457
50. Mitrovic, S., Lecoutere, L., Weerdt, J.D.: A Comparison of Methods for Link Sign Prediction with Signed Network Embeddings. IEEE/ACM International Conference on Advances in Social Networks Analysis and Mining, Vancouver, Canada. (2019) DOI: https://doi.org/10.1145/3341161.3345335
51. Peric, T., Babic, Z., Matejas, J.: Comparative analysis of application efficiency of two iterative multi objective linear programming methods (MP method and STEM method). CEJOR. **26**, 565–583 (2018). https://doi.org/10.1007/s10100-018-0543-x
52. Bare, B.B., Mendoza, G.: Multiple objective forest land management planning: An illustration. Eur. J. Oper. Res. **34**, 44–55 (1988)
53. Korhonen, P., Wallenius, J.: A Pareto race. Naval Res. Logist. **35**, 615–623 (1988)
54. Steuer, R.: An interactive multiple objective linear programming procedure. TIMS Stud. Manag. Sci. **6**, 225–239 (1977)
55. Steuer, R.: Multiple Criteria Optimization: Theory Computation and Application. Wiley, Boca Raton (1986)
56. Machado, L.G., Carlos, I.C., Angulo-Meza, L., de Mello, J.C.C.B.S.: A Multiobjective data envelopment analysis model applied to the evaluation of Brazilian electrical distributors. Simposio Brasileiro de Sistemas Eletricos (2018). https://doi.org/10.1109/SBSE.2018.8395590
57. de Mello, J.C.C.B.S., Clímaco, J.C.N., Angulo-Meza, L.: Efficiency evaluation of a small number of DMUs: An approach based on Li and Reeves's model. Pesquisa Operacional. **29**(1), 97–110 (2009)
58. Liu, Y., Zhang, H., Wu, Y., Dong, Y.: Ranking range based approach to MADM under incomplete context and its application in venture investment evaluation. Technol. Econ. Dev. Econ. **25**(5), 877–899 (2019)
59. Nguyen, P.-H.: GA-GDEMATEL: A novel approach to optimize recruitment and personnel selection problems. Math. Probl. Eng. (2022). https://doi.org/10.1155/2022/3106672
60. Olabanji, O.M., Mpofu, K.: Appraisal of conceptual designs: Coalescing fuzzy analytic hierarchy process (F-AHP) and fuzzy grey relational analysis (F-GRA). Results Eng. **9**, 100194 (2021). https://doi.org/10.1016/j.rineng.2020.100194
61. Goodarzi, F., Abdollahzadeh, V., Zeinalnezhad, M.: An integrated multi-criteria decision-making and multi-objective optimization framework for green supplier evaluation and optimal order allocation under uncertainty. Decis. Anal. J. **4**, 100087 (2022). https://doi.org/10.1016/j.dajour.2022.100087
62. Tavana, M., Shaabani, A., Di Caprio, D., Amiri, M.: An integrated and comprehensive fuzzy multicriteria model for supplier selection in digital supply chains. Sustain. Oper. Comput. **2**, 149–169 (2021). https://doi.org/10.1016/j.susoc.2021.07.008
63. Lopez-Espin, J.J., Aparicio, J., Gimenez, D., Pastor, J.T.: Benchmarking and data envelopment analysis. an approach based on metaheuristics. In: 14th International Conference on Computational Science - Procedia Computer Science (2014). DOI: https://doi.org/10.1016/j.procs.2014.05.035
64. Kaczyńska, A., Kołodziejczyk, J., Sałabun, W.: A new multicriteria model for ranking chess players. Proc. Comput. Sci. **192**, 4290–4299 (2021). https://doi.org/10.1016/j.procs.2021.09.205
65. Pamucar, D., EbadiTorkayesh, A., Deveci, M., Simic, V.: Recovery center selection for end-of-life automotive lithium-ion batteries using an integrated fuzzy WASPAS approach. Exp. Syst. Appl. **206**, 117827 (2022). https://doi.org/10.1016/j.eswa.2022.117827

66. Dhouib, D.: An extension of macbeth method for a fuzzy environment to analyze alternatives in reverse logistics for automobile tire wastes. Omega **42**, 25–32 (2014)
67. Ertay, T., Kahraman, C., Kaya, I.: Evaluation of renewable energy alternatives using macbeth and fuzzy ahp multicriteria methods: The case of turkey. Technol. Econ. Dev. Econ. **19**(1), 38–62 (2013)
68. Pishdar, M., Ghasemzadeh, F., Antucheviciene, J.: A mixed interval type-2 fuzzy best-worst macbeth approach to choose hub airport in developing countries: Case of iranian passanger airports. Transport **34**(6), 639–651 (2019)
69. Carnero, M.C.: Developing a fuzzy topsis model combining macbeth and fuzzy shannon entropy to select a gamification app. Mathematics. **9**(1034), 1–34 (2021). https://doi.org/10.3390/math9091034
70. Yurtyapan, M.S., Aydemir, E.: Erp software selection using intuitionistic fuzzy and interval grey number-based macbeth method. Grey Syst. Theory Appl. (2021). https://doi.org/10.1108/GS-01-2021-0002
71. Pacumar, D., Behzad, M., Bozanic, D., Behzad, M.: Designing a fuzzy decision support framework for assessing solid waste management in the South European region. Environ. Sci. Pollut. Res. **29**, 42862–42882 (2022)
72. Bana e Costa, C., Vansnick, J.-C.: Macbeth—an interactive path towards the construction of cardinal value functions. Int. Trans. Oper. Res. **1**, 4 (1994)
73. Bana Costa, C., Angulo-Meza, L., Oliveira, M.D.O.: O método MACBETH e a aplicação no Brasil. Ana Esteira Engevista. **15**, 1 (2013)
74. Bana Costa, C., de Corte, J.M., Vansnick, J.C.: MACBETH. Int. J. Inform. Technol. Decis. Mak. **11**, 2 (2012)
75. Vieira, A.C., Oliveira, M.D., Bana Costa, C.: Enhancing knowledge construction processes within multicriteria decision analysis: The collaborative value modelling framework. Omega **94**, 2 (2020). https://doi.org/10.1016/j.omega.2019.03.005
76. Bana Costa, C., Vansnick, J.-C.: Uma nova abordagem ao problema da construção de uma função de valor cardinal: MACBETH. Investigação Operacional. **1**, 15 (1995)
77. Zadeh, L.A.: Fuzzy sets. Inform Control. **8**, 338–353 (1965)
78. Petrovic-Lazarevic, S.: Personnel selection fuzzy model. Int. Trans. Oper. Res. **8**, 89–105 (2001)
79. Radojevic, D., Petrovic, S.: A fuzzy approach to preference structure in multicriteria ranking. Int. Trans. Oper. Res. **4**(5/6), 419–430 (1997)
80. Deliktas, D., Ustun, O.: Student selection and assignment methodology based on fuzzy multimoora and multichoice goal programming. Int. Trans. Oper. Res. **24**, 1173–1195 (2017)
81. Zhang, Y., Xu, Z.: Efficiency evaluation of sustainable water management using the hf-todim method. Int. Trans. Oper. Res. **26**, 747–764 (2019)
82. Shiu, J.-Y., Lu, S.-T., Chang, D.-S., Wu, K.-W.: Fuzzy multicriteria decision-making tools for selecting a professional property management company. Int. Trans. Oper. Res. **26**, 1527–1557 (2019)
83. Xidonas, P., Doukas, H., Sarmas, E.: A python-based multicriteria portfolio selection DSS. RAIRO Oper Res. **55**, S3009 (2021). https://doi.org/10.1051/ro/2020140
84. Leyva-López, J.C., Solano-Noriega, J.J., Gastélum-Chavira, D.A., Gaxiola-Valenzuela, T.: A personnel selection model for a software development company based on the ELECTRE III method and a variant of NSGA-II. Innovar (2022). https://doi.org/10.15446/innovar.v32n85.100657
85. Zhang, H., Deng, Y., Chan, F.T.S., Zhang, X.: A modified multicriterion optimization genetic algorithm for order distribution in collaborative supply chain. Appl. Math. Model. **37**, 7855–7864 (2013). https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.05.021
86. Labella, A., Liu, H., Rodríguez, R.M., Martínez, L.: A cost consensus metric for consensus reaching processes based on a comprehensive minimum cost model. Eur. J. Oper. Res. **281**, 316–331 (2020). https://doi.org/10.1016/j.ejor.2019.08.030
87. Dong, Y., Zha, Q., Zhang, H., Herrera, F.: Consensus reaching and strategic manipulation in group decision making with trust relationships. IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Syst. (2021). https://doi.org/10.1109/TSMC.2019.2961752
88. Zha, Q., Dong, Y., Zhang, H., Chiclana, F., Herrera-Viedma, E.: A personalized feedback mechanism based on bounded confidence learning to support consensus reaching in group decision making. IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Syst. (2021). https://doi.org/10.1109/TSMC.2019.2945922

Publisher's Note Springer Nature remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.

5.3 Applying a Genetic Algorithm to Implement the Fuzzy-MACBETH Method in Decision Processes

Applying a Genetic Algorithm to Implement the Fuzzy-MACBETH Method in Decision-Making Processes

Tatiane Roldão Bastos[1], André Andrade Longaray[1], Cátia Maria dos Santos Machado[1], Leonardo Ensslin[2], Sandra Rolim Ensslin[3], Ademar Dutra[2]

[1]Computer Modelling, Center for Computational Sciences, Engineering School and Institute of Mathematics, Statistics and Physics, Federal University of Rio Grande, Rio Grande, 96303900, Rio Grande do Sul, Brazil

[2] Department of Applied Social Sciences, University of Southern Santa Catarina, Florianópolis, 88010010, Santa Catarina, Brazil

[3] Department of Accounting Sciences, Federal University of Santa Catarina, Florianópolis, 88010970, Santa Catarina, Brazil

*Corresponding author: André Andrade Longaray - andrelongaray@gmail.com

Abstract

This paper describes the development of an evolutionary algorithm for building cardinal scales based on the Fuzzy-MACBETH method. This method uses a triangular fuzzy numbers scale in the MACBETH method to incorporate the subjectivity of a semantic scale into mathematical modeling, which enables circumventing the cardinal inconsistency problem of the classical method, facilitating its application in complex contexts. A genetic algorithm is used in the fuzzy system developed here to build the basic fuzzy scale in a cardinally inconsistent decision matrix. The proposed technique is inspired by crossover and mutation genetic operations to explore potential solutions and obtain a cardinal scale aligned with the decision maker's preferences. Finally, an illustrative example of the application of the proposed decision support system is presented. The results confirm that the FGA-MACBETH method aligns with the classical method. This study's primary contribution is that circumventing the problem of cardinal inconsistency in a semantically consistent decision matrix enabled obtaining a cardinal scale without requiring the decision maker to redo his/her initial assessments.

Keywords: Cardinal Scale. FGA-MACBETH. Fuzzy-MACBETH. Fuzzy Number. Fuzzy System. Genetic Algorithm.

1 Introduction

Complex decisions require a detailed analysis of the decision-making problem, considering the multiple aspects of its context. In this sense, MCDM/A is a sub-discipline of Operations Research intended to develop multi-criteria evaluation systems based on the knowledge of specialists or decision makers, consisting of important tools for structuring and assessing complex decisions [1].

Among the multi-criteria methods, MACBETH (Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation Technique), developed by Bana and Costa and Vansnick [2], enables transforming ordinal scales based on value judgments expressed by a decision maker into cardinal scales using linear programming problems (LPP). It is a socio-technical process combining decision-conferencing elements to structure a decision problem [3].

The central idea in the method's mathematical stage is to provide decision makers with a tool that supports evaluations through a semantic scale, converting it to a cardinal scale using a decision support system [4]. Thus, the method's primary differential is allowing decision makers to express their assessments through linguistic terms such as indifferent, very weak, weak, moderate, strong, very strong, and extreme.

The method is used to support multi-criteria decision-making in complex contexts. However, sometimes, the MACBETH method cannot determine a cardinal scale, even if the decision matrix is semantically consistent. In other words, cardinal inconsistency may occur even when the decision maker coherently

(semantically) assesses the evaluation elements. This situation occurs because traditional mathematics does not incorporate the uncertainty inherent to semantic scales.

In this case, the decision maker is asked to modify his/her initial assessment so the method can provide a cardinal scale. Considering that this new cardinal scale was not included in the initial decision matrix, the decision maker may feel unsure whether the resulting model is reliable. Furthermore, the context's complexity hinders the decision maker's task when determining a semantic category to account for the difference in attractiveness between two actions or elements. As shown in [5], the decision maker may perceive a difference in attractiveness *somewhere* between two semantic categories.

In this context, the fuzzy sets theory resembles human thinking, allowing the incorporation of uncertainty inherent to linguistic terms into the scale [6]. Additionally, the measurement of assessment elements may be imprecise, uncertain, or inaccurate due to the imprecision and uncertainty present in real-world decision-making [7]. Thus, using fuzzy numbers to include uncertainty in the scale can improve the method.

In this sense, some studies apply the Fuzzy theory to the MACBETH method. Dhouib [8] expands MACBETH by integrating a 2-tuple fuzzy model, considering decision makers' imprecise and linguistic evaluations. The alternatives in the model developed here present input data that can be numerical, interval, or linguistic and are expressed in fuzzy sets called Basic Linguistics Terms Sets (BLTS). A decision matrix is built with the results of the 2-tuple fuzzy model, and the cardinal scale is obtained with the M-MACBETH software. The traditional MACBETH method, in which a decision maker performs pairwise comparisons according to his/her preference, was used to determine the criteria weights. Note that the 2-tuple model objectively assesses the uncertain context in this study; hence, its main contribution is evaluating alternatives without the participation of a decision maker.

Yurtyapan and Aydemir [9] introduce a new ERP (Enterprise Resource Planning) software selection approach in which semantic judgments are converted into interval scales through grey numbers, generating a new assessment that is subsequently applied in the classical MACBETH method. A second approach was also proposed, aiming at group evaluation, in which an intuitionistic fuzzy set was established to assess the effects of decision makers on the research problem, that is, to determine the weight of each decision maker.

Pacumar *et al.* [10] propose a ranking method based on the MACBETH method expanded to a fuzzy version. Criteria weights were obtained from a triangular fuzzy numbers scale, generating a fuzzy weight vector for each decision maker. The vectors were then aggregated, and the alternatives were assessed through the mathematical formulation proposed. Afterward, the overall fuzzy value of each alternative was obtained, defuzzified, and sorted; i.e., cardinal scales were not obtained for each evaluation element but rather a ranking of alternatives.

However, these studies do not present a new approach to overcoming the cardinal inconsistency problem in a semantically consistent decision matrix presented by the MACBETH method. Finally, the Fuzzy-MACBETH modeling proposed by Bastos et al. [11] and adopted in this study consists of using a fuzzy numbers scale applied to the MACBETH's semantic scale to incorporate the subjectivity of linguistic terms into cardinal scales. Thus, the method's main contribution concerns the possibility of obtaining a cardinally consistent scale in semantically consistent decision matrices, which, according to the classical method, present cardinal inconsistency, thus facilitating the elicitation process for decision makers.

Additionally, computational implementation is important due to the mathematical complexity of the Fuzzy-MACBETH approach. Therefore, this study presents the computational modeling of the Fuzzy-MACBETH method for solving the linear programming problem and developing cardinal scales.

According to [12], innovations and software allow organizations to integrate their activities, contributing to decision-making. Decision support systems contribute to the multi-criteria decision-making process, considering the multidimensional nature of problems and enabling decision makers to incorporate preference systems [13]. Hence, the computational coding of complex algorithms allows the operationalization of multi-criteria methods in a fast and easy-to-handle manner.

Recent studies show the advancements of incorporating soft computing into conventional decision-making methods to deal with uncertainties [14]. Bio-inspired algorithms in evolutionary computation optimize decision-making models in so-called evolutionary systems, which use fuzzy theory to incorporate uncertainties and an evolutionary optimization algorithm, such as genetic algorithms [15].

Given the previous discussion, this paper presents the computational implementation of the Fuzzy-MACBETH method based on a genetic algorithm. The modeling uses genetic crossover and mutation operators to explore potential solutions in a semantically consistent but cardinally inconsistent decision matrix, arriving at a cardinal scale. Therefore, this approach can be quickly and easily operationalized through a decision support system, enabling it to be used in real-world decision-making problems. GA facilitates the implementation of the Fuzzy-MACBETH method, considering that the objective function in the linear programming problem is to minimize the most significant differences in fuzzy attractiveness. Because GA works with discrete and continuous scales, it can be used to operationalize the F-LP-MACBETH linear programming problem.

Thus, the approach developed here enables the development of performance evaluation and multi-criteria decision-making models to assist managers in different contexts. It is applied in the evaluation stage of the MACBETH method with the advantage of overcoming the problem of cardinal inconsistency, preventing the decision maker from having to change his/her initial assessment. Thus, this method uses concepts from evolutionary computing and soft computing to improve a highly regarded method widely used in Operational Research, making it easier to use.

This paper is organized into six sections. Following the introduction, the second section presents the Fuzzy-MACBETH method, the third deals with genetic algorithms (GA), and the computational modeling of the FGA-MACBETH technique proposed here is shown in the fourth section. An illustrative example is described in the fifth section, followed by the sixth section, which presents the conclusions and suggestions for future research, and finally, the references.

2 Fuzzy-MACBETH Method

The value functions in the Fuzzy-MACBETH proposed by Bastos et al. [11] are obtained the same way as in the classical MACBETH, i.e., based on pairwise comparisons of differences of attractiveness between evaluation elements, through a semantic scale composed of six linguistic terms: very weak, weak, moderate, strong, very strong and extreme. Hence, the decision maker assigns an absolute verbal judgment about the difference in attractiveness between x and y for each ordered pair (x,y) in $A \times A$ with xPy (x is preferred to y). Thus, the value functions are based on the decision maker's perceptions and values.

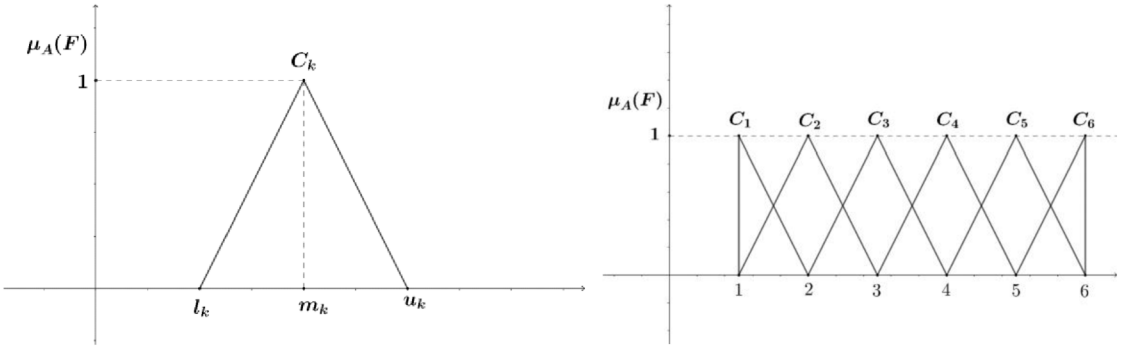
Hence, the method aims to find a basic fuzzy scale for each alternative according to the decision maker's qualitative judgment based on a triangular fuzzy numbers scale. As shown in Fig. 1 (a), where $x_{i,j}$ is assigned value $\tilde{A}$ if and only if the decision maker has assigned a category c_k to (x_i, x_j), such that

$$\tilde{A} = \begin{cases} m_k = k \\ l_k = k-1 \\ u_k = k+1 \end{cases} \Leftrightarrow k = \{2,3,4,5\}, \tag{1}$$

$$\tilde{A} = \begin{cases} m_k = l_k = k \\ u_k = k+1 \end{cases} \Leftrightarrow k = 1, \tag{2}$$

$$\tilde{A} = \begin{cases} m_k = u_k = k \\ l_k = k-1 \end{cases} \Leftrightarrow k = 6. \tag{3}$$

The resulting fuzzy scale is presented in Fig. 1 (b). Thus, the decision maker's qualitative judgments are fuzzified, as shown in Table 1, generating a fuzzified decision matrix.



(a) **(b)**

Fig. 1 (a) Triangular Fuzzy-MACBETH number scale **(b)** Graphical representation of the scale in the Fuzzy-MACBETH method

Source: [10]

Table 1 Fuzzy-MACBETH method scale

C_k	**Semantic Scale**	$\widetilde{A}$
C_0	No differences between the alternatives	(0, 0, 0)
C_1	Very weak difference in attractiveness	(1, 1, 2)
C_2	Weak difference in attractiveness	(1, 2, 3)
C_3	Moderate difference in attractiveness	(2, 3, 4)
C_4	Strong difference in attractiveness	(3, 4, 5)
C_5	Very strong difference in attractiveness	(4, 5, 6)
C_6	Extremely strong difference in attractiveness	(5, 6, 6)

Source: [10]

When using the scale proposed here, the decision maker must first order the evaluation elements (actions or alternatives) in descending order according to his/her preference. Evaluation elements, which the decision maker perceives as *insignificant,* are allocated to the same position in the matrix, as they will have the same cardinal scale. In other words, let the elements be a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5, such that $a_1 = a_2 P a_3 P a_4 P a_5$, with P being "*preferable to.*" The resulting decision matrix will be assembled as shown in Fig. 2.

$$\begin{array}{c} \\ a_1 = a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 = a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cdot & x_{1,2} & x_{1,3} & x_{1,4} \\ \cdot & \cdot & x_{2,3} & x_{2,4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & x_{3,4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \end{array}$$

Fig. 2 Decision matrix

Thus, after the first stage, with the evaluation elements already ordered, the decision maker must assign a linguistic term corresponding to the semantic scale from C_1 a C_6 to each pair $x_{i,j}$, filling in the upper part of the matrix $n \times n$ with verbal responses, such that $\forall i \neq j \in 1, 2, \cdots, N: x_i P x_j \Leftrightarrow i > j$.

After fuzzifying the decision matrix, the basic fuzzy scale $\tilde{v}$ for each alternative, called the pre-cardinal scale, is obtained through the F-LP-MACBETH linear programming problem. The F-LP-MACBETH is

based on the linear programming problem proposed in [3], differing in the fourth restriction, which the triangular fuzzy scale can flexibilize.

F-LP-MACBETH

$$Min[\tilde{v}(x^+) - \tilde{v}(x^-)] \quad (4)$$

Subject to restrictions:

$$\tilde{v}(x^-) = (0,0,0) \quad (5)$$

$$\tilde{v}(x) - \tilde{v}(y) = (0,0,0), \forall (x,y) \in C_0, \quad (6)$$

$$\tilde{v}(x) - \tilde{v}(y) \geq (1,1,2), \forall (x,y) \in C_k,\ k \in \{1,2,3,4,5,6\}, \quad (7)$$

$$\tilde{v}(x) - \tilde{v}(y) \geq \tilde{v}(w) - \tilde{v}(z), \forall (x,y) \in C_k \text{ and } \forall (w,z) \in C_{k'} \text{ and } k, k' \in \{1,2,3,4,5,6\} \text{ and } k > k'. \quad (8)$$

The objective function (4) in the F-LP-MACBETH linear programming problem aims to minimize the most significant differences in the fuzzy values between the most and least attractive alternatives, subject to a set of restrictions that fix the origin of the scale (5), ensuring the ranking order of elements (6) and (7) and dealing with cardinal consistency (8). At the end of this step, the basic fuzzy scale remains a fuzzy number; therefore, the scale is defuzzified using the centroid method to get the basic crisp scale (v_x).

Note that the fuzzy numbers scale enabled to loose up the restriction (8) that requires a cardinal scale. For example, Fig. 1 (b) shows that an element may simultaneously belong to the semantic categories C_3 and C_4 with a certain degree of relevance.

Finally, to obtain the cardinal scale (E_x), the basic scale is anchored by assigning zero to the performance level the decision maker considered neutral and one hundred to the performance level considered good, according to (9), thus enabling the aggregation of local assessments.

$$E_x = \alpha v_x + \beta \quad (9)$$

In other words, the decision matrix in Fig. 3 using the Fuzzy-MACBETH approach results in the fuzzy basic scale $\tilde{v}_x$ presented in Table 2. The basic scale $\tilde{v}_x$ is obtained when the centroid method is applied.

$$\begin{array}{c} \\ a_1 = a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 = a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cdot & C_1 & C_3 & C_4 \\ \cdot & \cdot & C_2 & C_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & C_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \end{array}$$

Fig. 3 Hypothetical Decision Matrix

Table 2 Results for the decision matrix presented in Fig. 3

	$\tilde{v}_x$	v_x	**Anchored**	E_x
$a_1 = a_2$	4.0, 4.0, 7.0	5.00	*Good*	100.0
a_3	3.0, 3.0, 5.0	3.67		73.33
a_4	1.0, 1.0, 2.0	1.33		26.67
a_5	0.0, 0.0, 0.0	0.00	*Neutral*	0.00

System (10) is assembled by anchoring the good and neutral levels, which determines the values for α and β applied to Equation (9) to obtain the cardinal scale. In the hypothetical example presented here, we have $\beta = 0$ and $\alpha = 20$.

$$\begin{cases} 100 = 5\alpha + \beta \\ 0 = 0\alpha + \beta \end{cases} \tag{10}$$

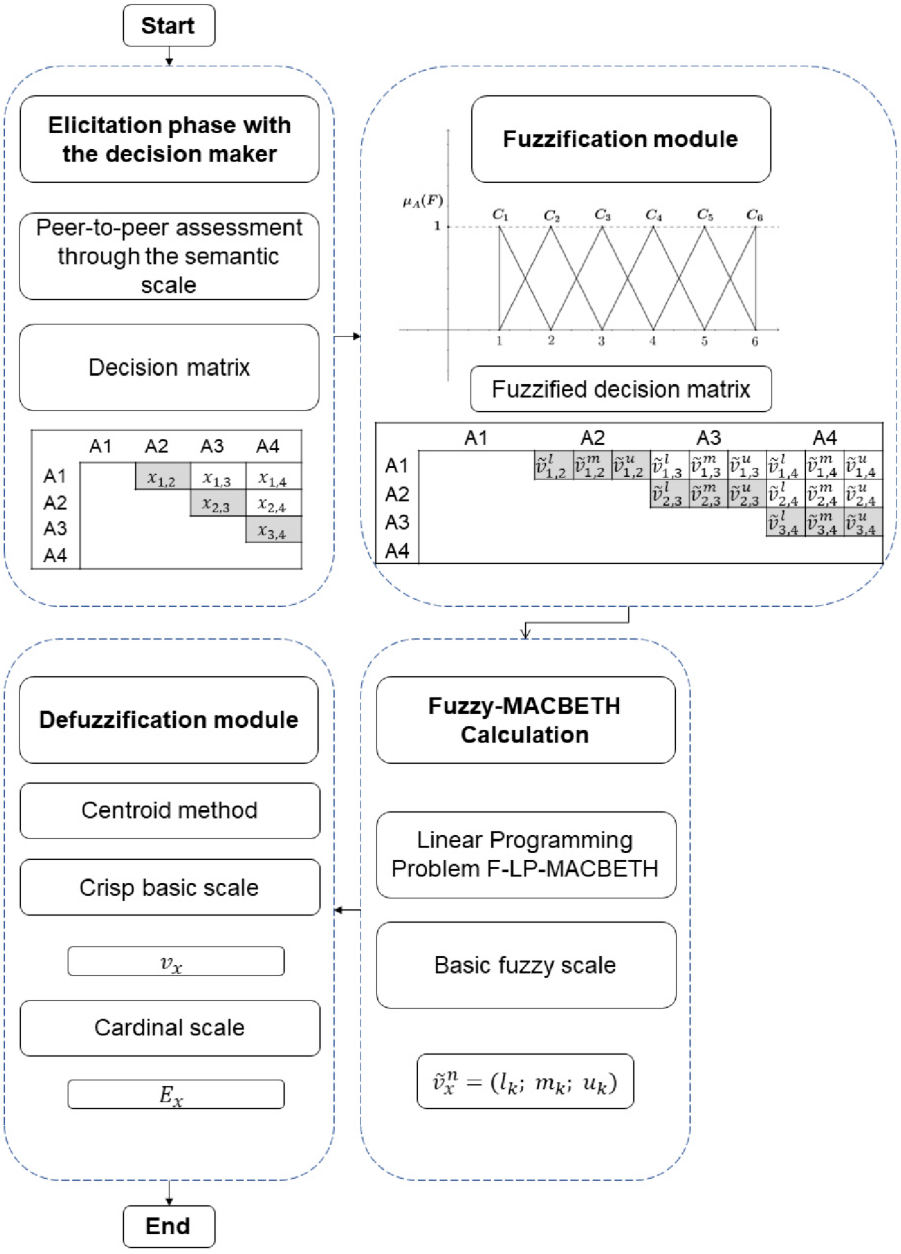


Fig. 4 Algorithm of the Fuzzy-MACBETH system

Fig. 4 presents the algorithm of the Fuzzy-MACBETH system used in this study, visually showing all the steps that begin with the decision maker's elicitation process. The decision maker performs pairwise comparisons of the differences in attractiveness between the evaluation elements, creating the initial decision matrix. Based on the triangular fuzzy numbers scale, the decision matrix is fuzzified in the fuzzification module. Afterward, mathematical procedures are performed to obtain the basic fuzzy scale based on the calculation of the F-LP-MACBETH linear programming problem. Finally, the basic scale is

defuzzified in the defuzzification module, a crisp basic scale is obtained, cardinalization is performed, and the cardinal scale is achieved.

3 Genetic Algorithms

Genetic Algorithms (GA), developed by John H. Holland [16], are a group of metaheuristics inspired by Darwin's theory of evolution. They are part of nature-inspired computation, which seeks to create intelligent systems that reproduce aspects of human behavior. The central idea in GA is based on the natural selection process that controls the evolution of living beings, in which the most adapted organisms tend to live long enough to reproduce and perpetuate their genetic code.

Many studies show that GA is superior to finding the optimal approximate solution in some situations compared to other heuristic algorithms, such as the Tabu Search Algorithm, the Simulated Annealing, and the Ant Colony Algorithm [17]. In recent decades, researchers have preferred using GA, which has been widely used in several knowledge fields due to its adaptability and versatility [18]. Additionally, a probability optimization method that automatically adjusts the search direction without a pre-established rule is adopted, allowing superior global optimization ability [19].

An initial population in GA, formed by chromosomes, represented by a chain of symbols, is randomly defined. Each population evolves during algorithm iterations and is evaluated by a fitness function. The chromosomes can be encoded using various representations, such as binary, integer, real numbers, or letters [20]. Genetic operators: selection, crossover, and mutation must be applied to obtain each generation [21].

The selection process involves determining the individuals participating in the reproduction phase so that the fittest are more likely to be selected [22]. The selection method proposed by [16] is called the roulette wheel selection method, though other methods are found in the literature, such as the tournament [23] and the elitist selection methods [24].

Crossing consists of recombining part of the code of pairs of chromosomes selected to generate offspring [25]. Several crossing methods differ according to the choice of the locus of the chromosomes that will be exchanged and the way they will be recombined, such as a point [25], multipoint [26], or uniform [19].

Finally, a mutation operator is needed to ensure the population's genetic diversity, obtained by changing one or more randomly chosen locus genes [25]. The correct definition of GA parameters is critical for good performance, as it will define the balance between the search mechanisms and the diversity of solutions, avoiding premature convergence.

4 Proposed FGA-MACBETH method

The FGA-MACBETH method proposed in this study consists of the computational modeling of the Fuzzy-MACBETH method based on Genetic Algorithms. The genetic concepts of selection, crossover, and mutation were used to solve the F-LP-MACBETH Linear Programming Problem (PPL) in a decision matrix with cardinal inconsistency, as shown in the system in Fig. 5.

Therefore, each chromosome consists of a triangular fuzzy number of three genes, represented by ordered real numbers. The population comprises n chromosomes, where n is the number of evaluation elements that form the decision matrix. An initial population is randomly generated according to the decision maker's semantic categories, representing a potential solution to cardinal inconsistency, inserted in the upper diagonal of the decision matrix, highlighted in Fig. 6.

The F-LP-MACBETH linear programming problem is calculated with the matrix containing the values of the initial population of the genetic algorithm, and cardinal consistency is verified. Thus, the fitness function consists of the objective function of the Fuzzy-MACBETH method.

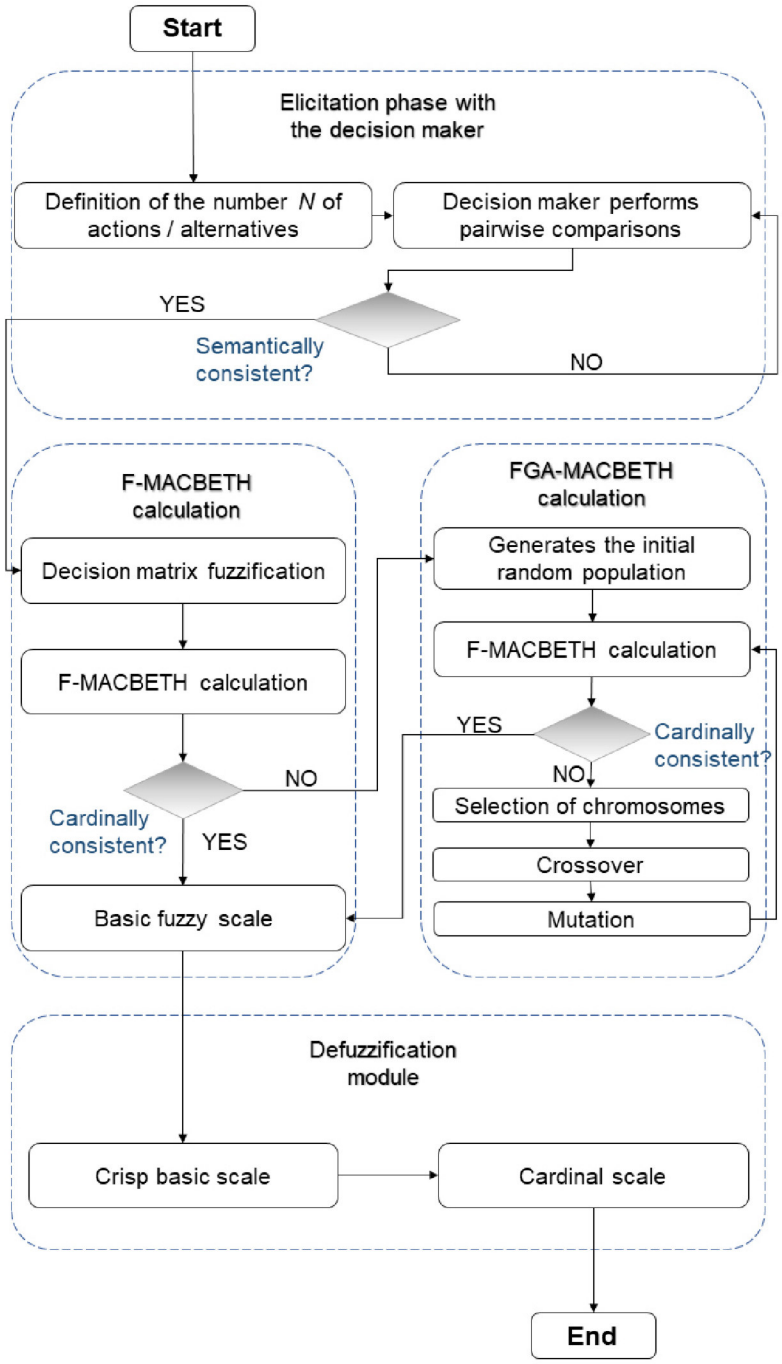


Fig. 5 Algorithm of the FGA-MACBETH system.

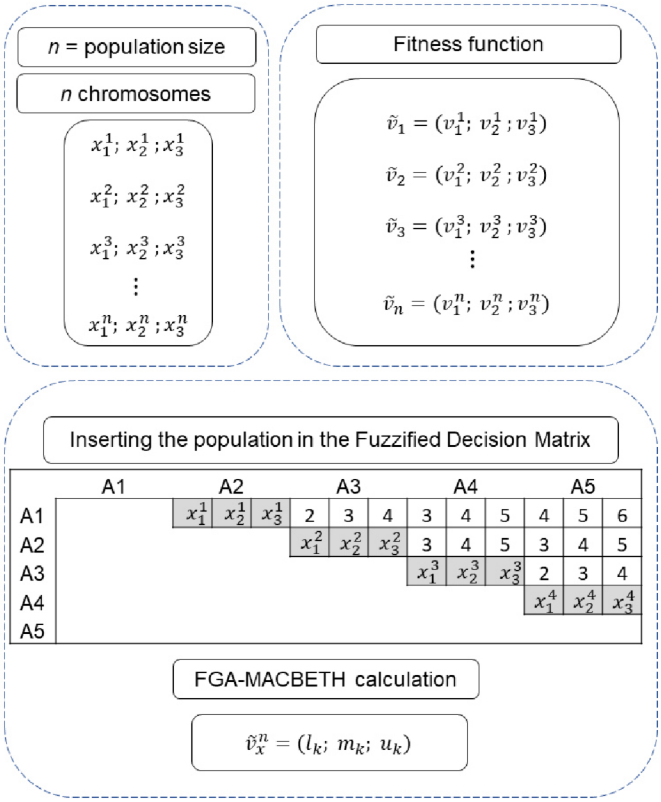


Fig. 6 Details of the genetic operators of the FGA-MACBETH method.

If the F-LP-MACBETH calculation shows cardinal inconsistency, the program initiates genetic algorithm rounds, selecting the chromosomes that will undergo crossover and mutation. The chromosomes in the matrix's upper diagonal, highlighted in Fig. 6, are selected through the tournament method, i.e., each chromosome has the same probability of being selected.

As shown in Fig. 7, crossing at a fixed single point between locus 0 and 1 was chosen. The genetic parameters were calibrated through tests. The best configuration obtained was a crossover probability of 0.90 and a mutation probability of 0.35. The cycle repeats until cardinal consistency or the termination parameter is reached.

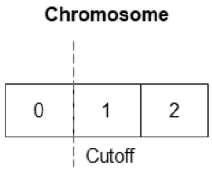


Fig. 7 Detailing the cut point for the crossing operator.

Python language, version 3.9, through the integrated development environment Pycharm, developed by JetBrains, was used for programming the FGA-MACBETH method. The pseudo-code of Algorithm 1 presents the Fuzzy-MACBETH calculation until the scales are determined in case of cardinal consistency.

Algorithm 1 Fuzzy-MACBETH Calculation.

m, n ← number of evaluation elements
judgments ← function defined to receive the pairwise comparisons and return the mxn array
consistentjudgments ← function defined to check semantic consistency
displaymatrix ← function defined to display the array

fuzzifiedmatrix ← function defined to apply the triangular fuzzy scale to the decision
matrixfuzzyquality ← function defined to provide the qualitative fuzzy matrix
calc_fuzzymacbeth ← function defined to perform the Fuzzy-MACBETH calculation
cardinalconsistency ← function defined to check if array is cardinally consistent

judgments (initialmatrix, m, n)
consistentjudgments (initialmatrix, m, n)
displaymatrix (initialmatrix)
fuzzifiedmatrix (fuzzymatrix, m, n)
displaymatrix (fuzzymatrix)
fuzzyquality(fuzzyqualitymatrix, m, n)
calc_fuzzymacbeth(fuzzyqualitymatrix, fuzzymatrix, n)
displaymatrix (fuzzymatrix)
if cardinalconsistency = 'Not' **then**
    write ("Inconsistent matrix")
else
    write ("Consistent matrix")
endif
if consistenciacardinal ≠ 'Not'
    write ("Basic Fuzzy Scale")
    for each row on the matrix
        Calculate the basic fuzzy scale
        write (fuzzymatrix)
    endfor
    write ("Defuzzified scale")
    for each row on the matrix
        Calculate the crisp scale
        write (crisp)
    endfor
    write ("Cardinal scale")
    calculate alpha
    calculate beta
    for each row on the matrix
        Calculate the cardinal scale
        write (cardinal)
    endfor
endif

In case of cardinal inconsistency, the calculation of the scales is performed using the method based on a genetic algorithm, as shown in the pseudo-code of Algorithm 2.

Algorithm 2 Calculation FGA-MACBETH

---

for each row on the matrix
    for each column on the matrix
        if fuzzyqualitymatrix [l][((l + 1) * 3)] = 'VWEAK' **then**
            Randomly generate a fuzzy number for the very weak scale
            Insert the new fuzzy number into the matrix
        if fuzzyqualitymatrix [l][((l + 1) * 3)] = 'WEAK' **then**
            Randomly generate a fuzzy number for the weak scale
            Insert the new fuzzy number into the matrix
        if fuzzyqualitymatrix [l][((l + 1) * 3)] = 'MOD' **then**
            Randomly generate a fuzzy number for the moderate scale
            Insert the new fuzzy number into the matrix
        if fuzzyqualitymatrix [l][((l + 1) * 3)] = 'STRO' **then**
            Randomly generate a fuzzy number for the strong scale
            Insert the new fuzzy number into the matrix
        if fuzzyqualitymatrix [l][((l + 1) * 3)] = 'VSTRO' **then**

```
                    Randomly generate a fuzzy number for the very strong scale
                    Insert the new fuzzy number into the matrix
            if fuzzyqualitymatrix [l][(l + 1) * 3)] = 'EXT' then
                    Randomly generate a fuzzy number for the extreme scale
                    Insert the new fuzzy number into the matrix
            endif
        endfor
endfor
calc_fuzzymacbeth(fuzzyqualitymatrix, fuzzymatrix, n)
if consistenciacardinal ≠ 'Not'
        Calculate the scales as demonstrated in Algorithm 1
endif
if consistenciacardinal = 'Not'
        while True
            if consistenciacardinal ≠ 'Not'
                    write (fuzzymatrix)
                    break
            for each row on the matrix
                    for each column on the matrix
                            Calculate the crossover value for each category
                            Check the crossover probability
                            Perform gene selection
                            carry out the crossing
                    endfor
            endfor
            for each row on the matrix
                    for each column on the matrix
                            Calculate the mutation value for each category
                            Check the probability of mutation
                            Perform gene selection
                            mutate
                    endfor
            endfor
        endwhile
        calc_fuzzymacbeth(fuzzyqualitymatrix, fuzzymatrix, n)
        Calculate the scales as demonstrated in Algorithm 1
endif
```

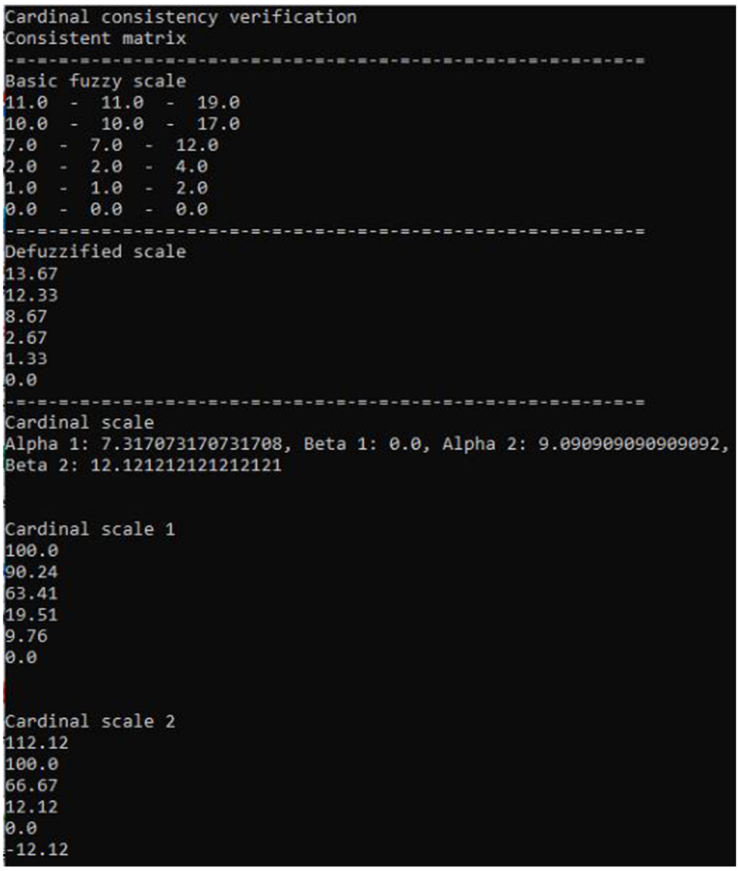
The results of the method applied to two decision matrices are presented to show how the computational modeling was performed. The decision matrix (M_1) extracted from [3] was chosen in the first example.

$$M_1 = \begin{bmatrix} * & (very\ weak) & (weak) & (strong) & (strong) & (very\ strong) \\ * & * & (weak) & (moderate) & (moderate) & (strong) \\ * & * & * & (moderate) & (moderate) & (moderate) \\ * & * & * & * & (very\ weak) & (very\ weak) \\ * & * & * & * & * & (very\ weak) \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

The results are presented in Fig. 8. Table 3 shows the results of the classical MACBETH method and those obtained through FGA-MACBETH modeling for comparison purposes.

The second example concerns the decision matrix (M_2), extracted from [27], which, although semantically consistent, presents cardinal inconsistency. Thus, the decision maker had to change his/her initial assessment in the classical MACBETH method to correct the inconsistency. As shown in Fig. 9, the FGA-MACBETH modeling can generate a cardinal scale for the decision maker's initial decision matrix. Table 4 presents the results of the two methods, MACBETH and FGA-MACBETH, for comparison purposes.

$$M_2 = \begin{bmatrix} * & (weak) & (moderate) & (strong) & (very\ strong) \\ * & * & (very\ weak) & (strong) & (strong) \\ * & * & * & (moderate) & (moderate) \\ * & * & * & * & (weak) \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$


```
Cardinal consistency verification
Consistent matrix
=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-
Basic fuzzy scale
11.0  -  11.0  -  19.0
10.0  -  10.0  -  17.0
7.0  -  7.0  -  12.0
2.0  -  2.0  -  4.0
1.0  -  1.0  -  2.0
0.0  -  0.0  -  0.0
=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-
Defuzzified scale
13.67
12.33
8.67
2.67
1.33
0.0
=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-
Cardinal scale
Alpha 1: 7.317073170731708, Beta 1: 0.0, Alpha 2: 9.090909090909092,
Beta 2: 12.121212121212121


Cardinal scale 1
100.0
90.24
63.41
19.51
9.76
0.0


Cardinal scale 2
112.12
100.0
66.67
12.12
0.0
-12.12
```

Fig. 8 Application of the FGA-MACBETH method in the first example.

Table 3 Comparative analysis of the MACBETH method and the FGA-MACBETH modeling for the first example.

	FGA-MACBETH			**Classic MACBETH**	
	$\tilde{v}_x$	v_x	E_x	v_x	E_x
x_1	11,11,19	13.67	112.12	13	120
x_2	10,10,17	12.33	100.00	11	100
x_3	7,7,12	8.67	66.67	8	70
x_4	2,2,4	2.67	12.12	2	10
x_5	1,1,2	1.33	0.00	1	0
x_6	0,0,0	0.00	-12.12	0	-10

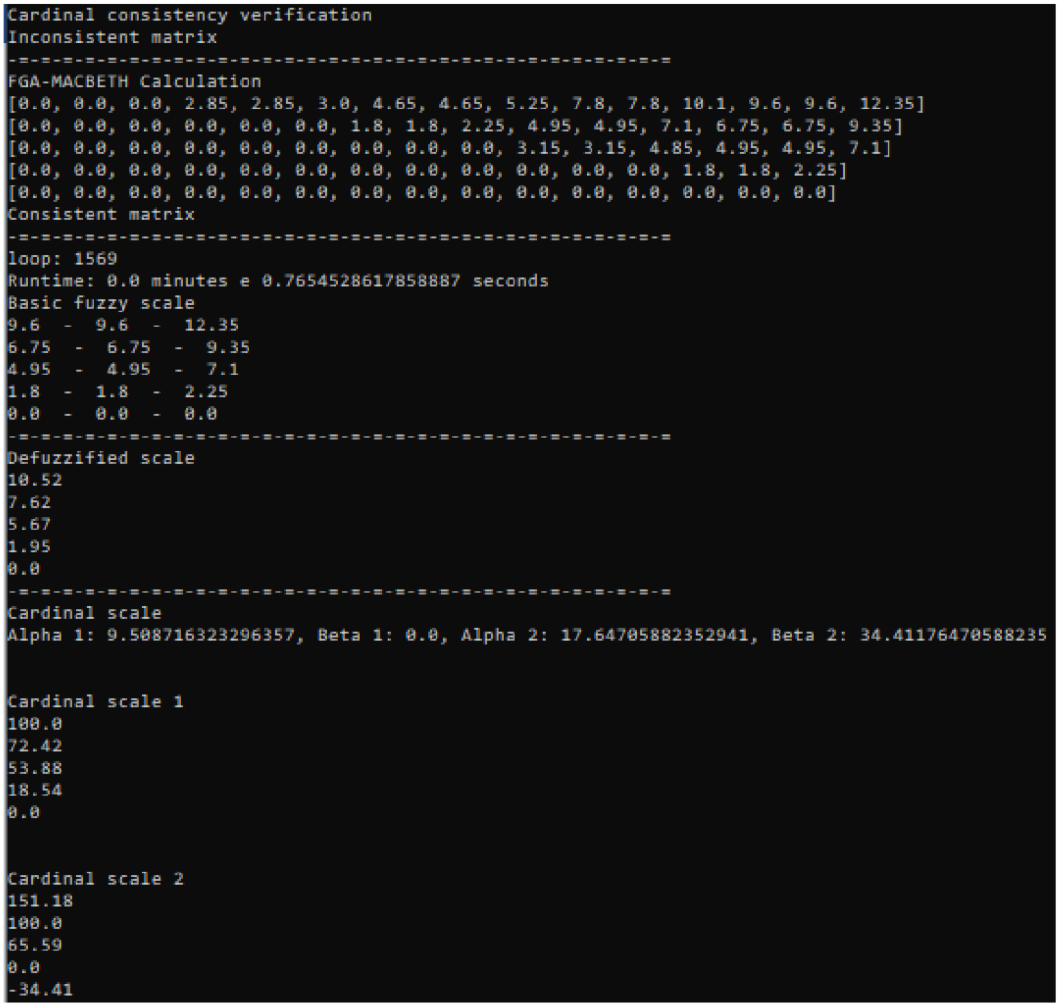


Fig. 9 Application of the FGA-MACBETH method in the second example.

Table 4 Comparative analysis of the MACBETH method and the FGA-MACBETH modeling for the second example

	FGA-MACBETH			**Classic MACBETH**	
	$\tilde{v}_x$	v_x	E_x	v_x	E_x
x_1	9.6,9.6,12.35	10.52	100.00	10	100
x_2	6.75,6.75,9.35	7.62	72.42	7	70
x_3	4.95,4.95,7.1	5.67	53.88	5	50
x_4	1.8,1.8,2.25	1.95	18.54	1	10
x_5	0,0,0	0.0	0.00	0	0

The two examples show an alignment between the FGA-MACBETH method and the classical MACBETH method. The first example applied the method to a semantically and cardinally consistent decision matrix, reaching a cardinal scale consistent with that obtained by the MACBETH method. In the second example, the FGA-MACBETH method found a cardinal scale consistent with the one in the classical MACBETH method; however, the decision maker did not have to change his/her initial assessments. Therefore, the main advantage of fuzzy modeling based on a genetic algorithm is that the need for context reassessments is decreased, thus facilitating the decision maker's task.

The methods are combined to facilitate the technique's implementation to solve real-world problems. The Fuzzy theory was applied to incorporate the uncertainty inherent to the qualitative terms composing the semantic scale in mathematical modeling. Hence, it contributes to correcting the cardinal inconsistency problem in a semantically consistent decision matrix, facilitating decision makers to use the method. GA was used in the computational implementation, which is vital for using the method in real-world decision-making. Therefore, the decision to combine the methods was not random but intended to incorporate the potential of both methods in this approach's development.

5 Application of the model

The paper by Bana and Costa et al. [28], which describes an application of multi-criteria decision analysis in a real case study, was used to illustrate the method's application. Such a study was replicated using the FGA-MACBETH method to verify whether the results aligned with the evaluation model built with the M-MACBETH software. This study was chosen because it was validated by the international scientific community, reaching 445 citations from its publication in 1999 to 2023 [29]. Furthermore, the study's data, mainly all the decision-maker pairwise comparison matrices (fundamental for the case study to be replicated here), were accessible, as the paper originated from the master's thesis by [30].

A multi-criteria model was developed in the earlier case study to assess market capacity and suggest strategies for small and medium-sized companies in the textile sector in Santa Catarina, Brazil. The objective was to support these companies in facing the crisis caused in the industry due to globalization and the opening of the market for foreign products. The model was developed using a decision-support constructivist methodology based on the perceptions of managers and specialists in the textile sector through three stages: structuring, evaluation, and recommendations or directions.

The problem was defined in the structuring phase as determining strategies for the small and medium-sized textile industries in Santa Catarina. The critical points of view were listed and organized into 11 Fundamental Points of View (FPV) using cognitive maps and then classified under three areas of interest (Self-Analysis, Product, and External Analysis), as shown in Fig. 10.

The descriptors consist of ordinal scales to operationalize the criteria and measure the context's properties [31]. Hence, the descriptors are the indicators for the ordinal measurement of performance based on what the decision maker considers relevant to measure, using cognitive maps and an interactive process between the decision maker and facilitator. Thus, 11 descriptors were defined, one for each FPV.

After briefly describing the decision-making context's structuring phase, this paper will focus on the evaluation phase, in which the value functions were obtained from the descriptors' ordinal scales by applying the M-MACBETH software. The cardinal scales obtained with the FGA-MACBETH model developed here show how the results align.

Three companies from the textile industry in Santa Catarina, a state in the southern region of Brazil, were assessed. The first company is a T-shirt and knitwear producer that manufactures 100,000 pieces monthly. The second makes T-shirts and children's clothes, manufacturing 600,000 pieces/month. The third manufactures 40,000 pairs of jeans per month. Because this study's objective was not to compare the companies but individually assess their performance, two fictitious companies served as parameters for the analysis. One fictional company's performance was considered good, and the other's was considered neutral, i.e., the decision maker did not find its performance attractive or repulsive.

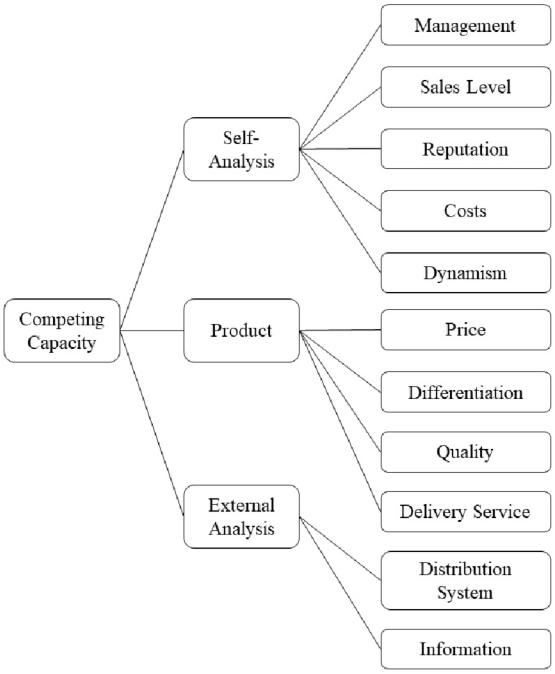


Fig. 10 Tree of Fundamental Points of View.

Source: [28]

Pairwise comparisons of the differences in attractiveness between the impact levels of each descriptor for each evaluated company were performed using the MACBETH method's semantic scale. In this study, the ordinal scale based on these comparisons was transformed into cardinal scales, or value functions, through the FGA-MACBETH method. Table 5 and Fig. 11 show the results obtained by both methods for the Reputation descriptor (M_3). This analysis highlights the alignment between the cardinal scale generated by the FGA-MACBETH method and the scale generated by the M-MACBETH software.

$$M_3 = \begin{bmatrix} * & (moderate) & (strong) & (\text{very } strong) & (\text{extreme}) \\ * & * & (moderate) & (\text{very } strong) & (\text{extreme}) \\ * & * & * & (strong) & (very\ strong) \\ * & * & * & * & (very\ strong) \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Table 5 Comparative analysis of value functions generated by the M-MACBETH and FGA-MACBETH methods for the reputation descriptor

Descriptor	**Impact levels**	**M-MACBETH**	**FGA-MACBETH**
		Cardinal Scale	**Cardinal Scale**
3 Reputation	N5	100	100.00
	N4	83	82.35
	N3	67	64.71
	N2	42	41.18
	N1	0	0.00

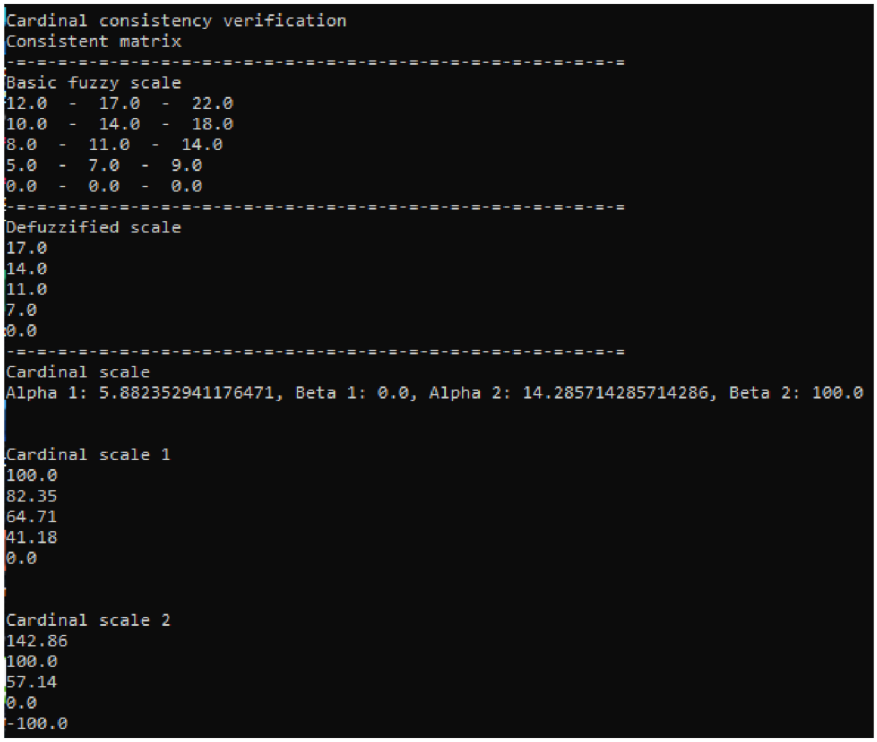


Fig. 11 Result obtained by FGA-MACBETH for the Reputation descriptor

This procedure was performed for all descriptors, highlighting that cardinal scales were obtained for the differentiation descriptor (M_4), which, according to the MACBETH method, presented cardinal inconsistency; the initial evaluation was changed to correct the inconsistency. The cardinal scales were obtained through the FGA-MACBETH method without changing the initial judgments. Table 6 and Fig. 12 present the results, showing the ability of the proposed method to build value functions based on the decision maker's judgments.

$$M_4 = \begin{bmatrix} * & (moderate) & (strong) & (very\ strong) & (very\ strong) & (extreme) \\ * & * & (weak) & (moderate) & (strong) & (\text{very } strong) \\ * & * & * & (moderate) & (strong) & (very\ strong) \\ * & * & * & * & (weak) & (\text{moderate}) \\ * & * & * & * & * & (very\ weak) \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Table 6 Comparative analysis of the value functions generated by the M-MACBETH and FGA-MACBETH methods for the differentiation descriptor

Descriptor	**Impact levels**	**M-MACBETH**	**FGA-MACBETH**
		Cardinal Scale	**Cardinal Scale**
7 Differentiation	N6	100	100.00
	N5	70	69.64
	N4	60	55.50
	N3	35	29.16
	N2	20	12.95
	N1	0	0.00

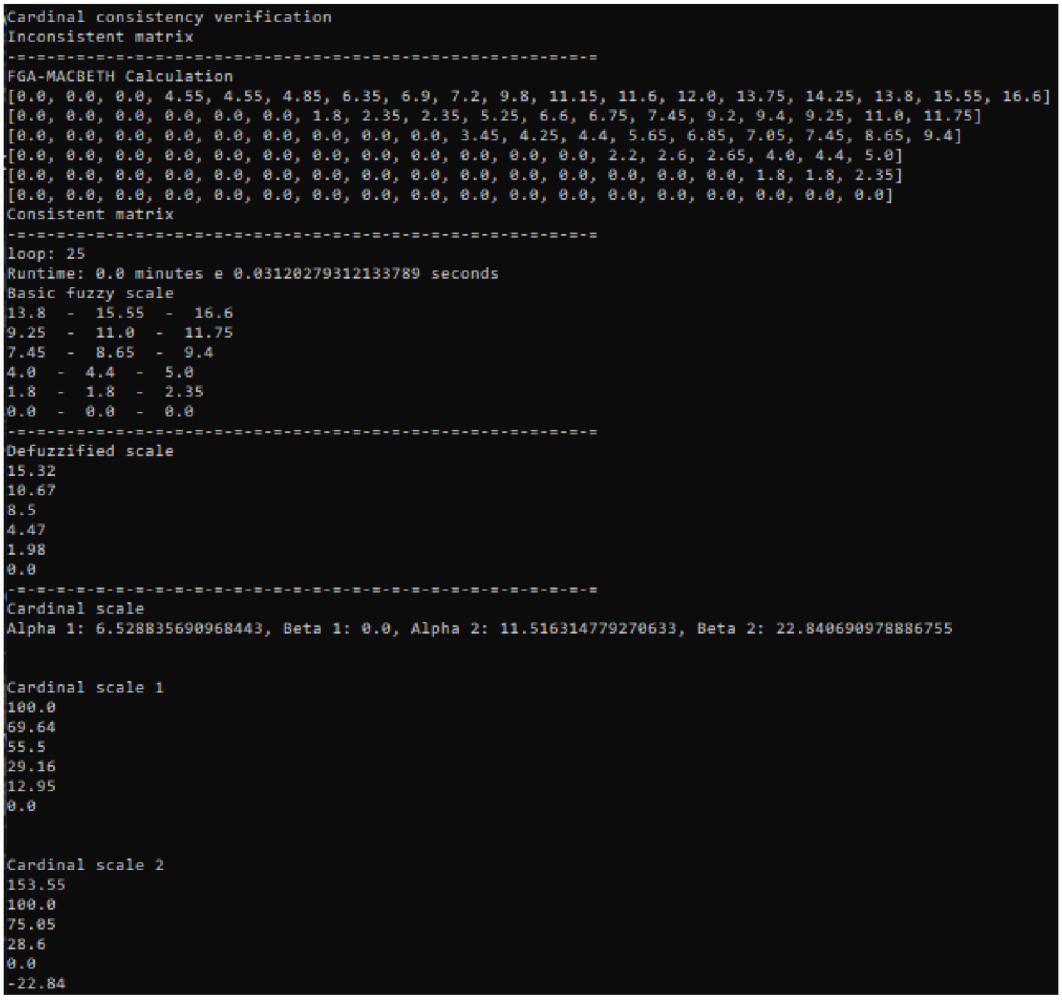


Fig. 12 Results obtained by FGA-MACBETH for the Differentiation descriptor

Weights, or compensation rates, obtained by the M-MACBETH software and presented in [28] were used to assess each company's overall performance. Hence, the companies' performance was assessed in each descriptor based on the decision maker's evaluations. Fig. 13 presents the assessment of local performance based on the MACBETH and FGA-MACBETH methods, showing that the method developed in this study coherently assessed performance while aligned with the MACBETH method.

This method also enabled assessing the companies' overall performance in each area of interest. Fig. 14 shows no changes in the results obtained by the FGA-MACBETH method. Hence, only company 3 performed worse in the Self-Analysis area of interest than the one the decision maker considered neutral. All companies performed better than the one considered neutral in the Product area of interest. In turn, companies 1 and 3 performed worse than the level considered neutral in the External Analysis area of interest—notably, the overall assessment generated by the FGA-MACBETH method aligned with the original method.

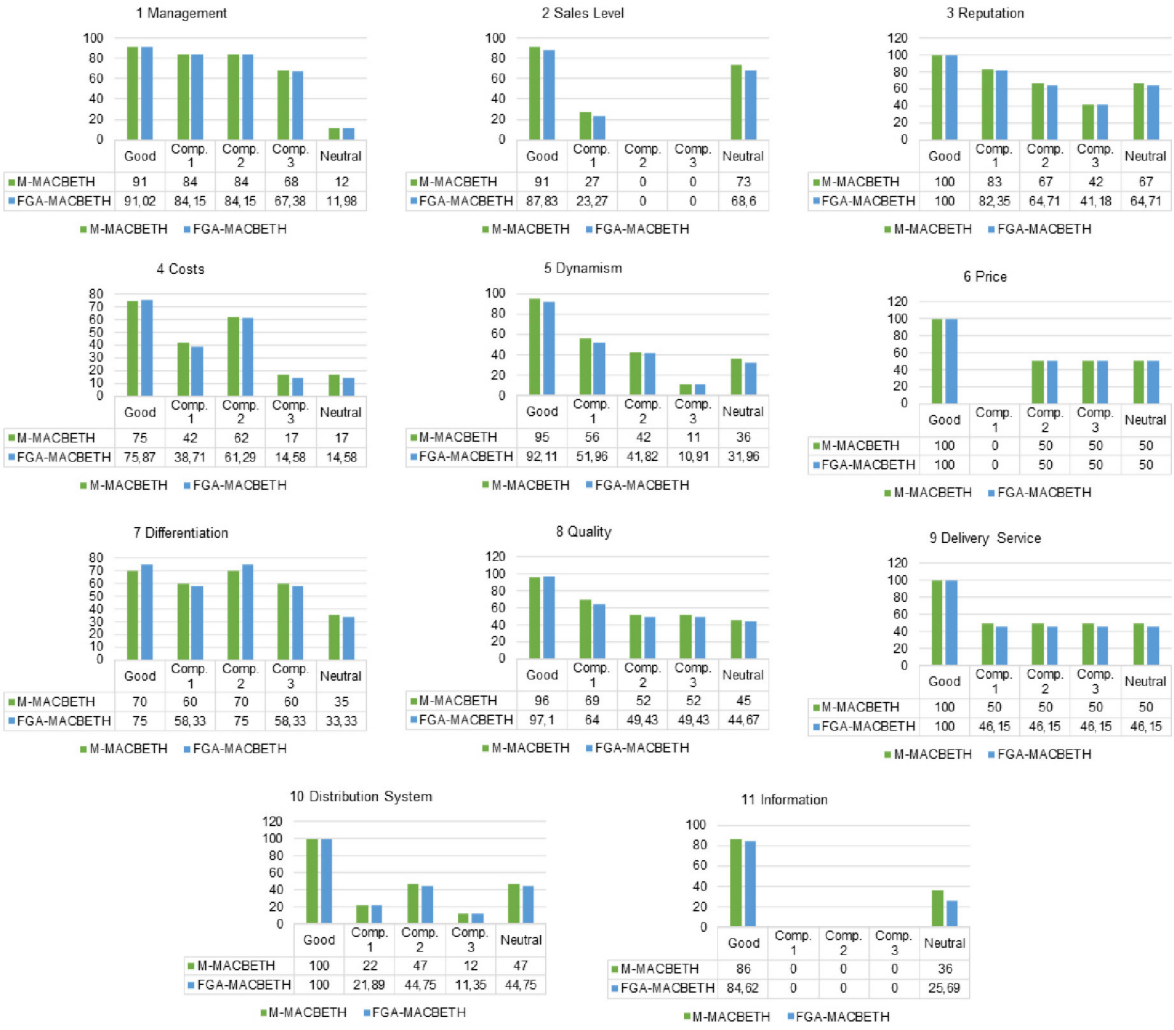


Fig. 13 Comparative analysis of the companies' local evaluation for each descriptor

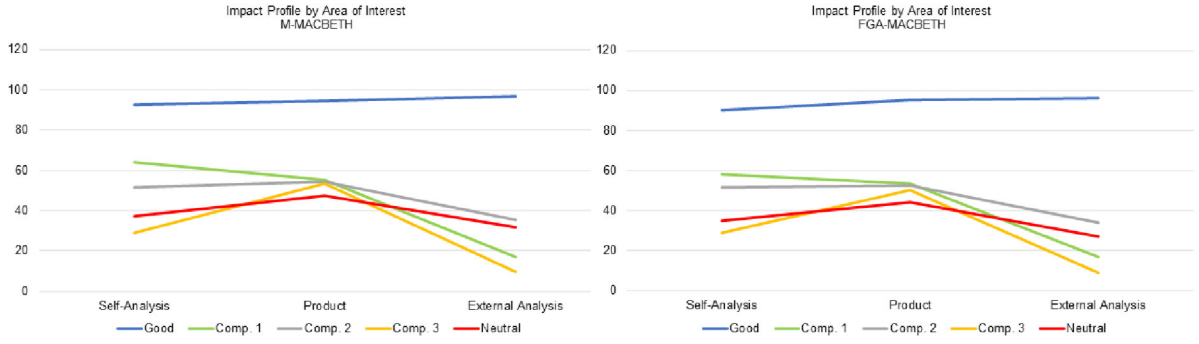


Fig. 14 Comparative analysis of the impact profile by area of interest

Finally, a sensitivity analysis of the overall evaluation was developed to verify the robustness of the evaluation model obtained by the FGA-MACBETH method. Therefore, the compensation rate of the Self-Analysis area of interest, which the decision maker considered the most important, was reduced by 10% and increased by 10% to verify whether changes in the weights of the areas of interest changed the companies' overall assessment.

Thus, with w_1 being the compensation rate of the Self-Analysis interest area, w_2 the compensation rate of the Product interest area, and w_3 the compensantion rate of the External Analysis interest area, the sensitivity analysis is performed by $w_1' = w_1 - 10\%$ and $w_1'' = w_1 + 10\%$, calculating the corresponding values of w_2', w_3', w_2'' and w_3'' without changing the proportions between the compensation rates w_1, w_2 and w_3.

Fig. 15 presents the sensitivity analysis results, which showed that minor variations in the compensation rates do not alter the overall assessment of each area of interest, confirming that the model proposed here is indeed robust.

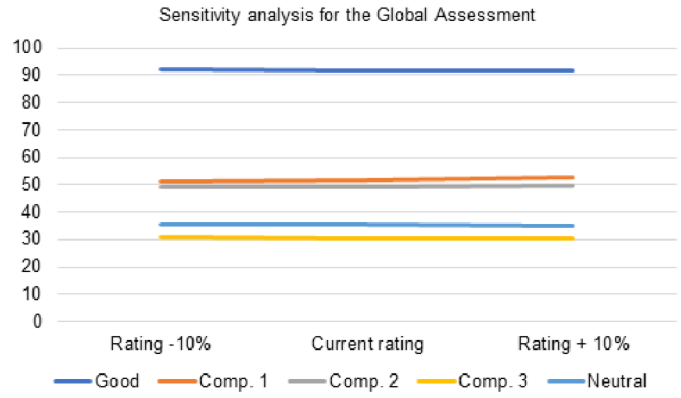


Fig. 15 Sensitivity analysis of the overall assessment

The case study showed that the method presented here is helpful in Operational Research, in multi-criteria decision-making problems in complex contexts, facilitating the task of assessing evaluation elements when using a semantic scale to compare between pairs; hence, the method's applicability is improved when the Fuzzy version is used. At the same time, its implementation using GA allows for reaching the cardinal scale fast and enables the method to be applied to real-world problems. Thus, like the MACBETH method, the FGA-MACBETH method can reach a performance evaluation model to assist managers in their decision-making tasks.

6 Conclusions

The computational implementation of the FGA-MACBETH method was performed in this study through a bio-inspired metaheuristic. The FGA-MACBETH method uses a triangular fuzzy numbers scale to incorporate the subjectivity inherent to the linguistic terms of the semantic scale of the MACBETH method into the mathematical modeling. Hence, the F-LP-MACBETH linear programming problem is used to make the LPP of the original MACBETH method flexible.

Such flexibility, enabled by applying the triangular fuzzy numbers scale, allows incorporating the subjectivity of the linguistic terms of the semantic categories, mathematically translating them into a basic fuzzy scale. This basic fuzzy scale is defuzzified by the centroid method, giving rise to a basic crisp scale consisting of the pre-cardinal scale. Afterward, a cardinal scale is obtained for each evaluation element.

A hybrid method was developed for the computational implementation using a genetic algorithm to solve the cardinally inconsistent decision matrix. Therefore, the genetic concepts of selection, crossover, and

mutation were applied to go through the solution space and reach the cardinal solution. The process of solving the cardinally consistent matrix with fuzzy variables through LPP was facilitated using the genetic algorithm. Because it is a stochastic resolution method that analyzes potential solutions randomly originated, the solutions are generated until the inconsistency is resolved.

Two illustrative examples were presented to show how the model works in a semantically and cardinally consistent decision matrix and a decision matrix with cardinal inconsistency. The case study [28] was replicated using the FGA-MACBETH to demonstrate the method's applicability.

The results confirm the alignment between the FGA-MACBETH and the classical MACBETH method. This study's primary contribution is that the method developed here enabled circumventing the problem of cardinal inconsistency in a semantically consistent decision matrix, obtaining a cardinal scale without requiring the decision maker to redo his/her initial evaluation.

Therefore, the modeling developed here is expected to improve the MACBETH method by incorporating the fuzzy theory's ability to mathematically treat linguistic variables, making the LPP more flexible, and facilitating the decision maker's task when making assessments using qualitative terms.

Suggestions for future studies include using other computational metaheuristics to compare the performance of computational implementations. Additionally, combining different metaheuristics is suggested to compare hybrid methods and isolated metaheuristics. Within the group decision scope, we recommend the application of Large-Scale Group Decision Making (LSGDM), applying fuzzy preference relations for LSGDM, and considering the level of agreement among experts before selecting the best alternative [32]. For group decision-making, we also suggest using a linguistic metric for Consensus Reaching Processes (LiCRPs) [33]. In this sense, some studies use the process of obtaining consensus for group decision-making [34-36]. Intuitionistic fuzzy numbers can be adopted to assess non-membership and membership degrees together [33-37]. The use of fuzzy extensions of the ordered weighted average method for the aggregation of evaluations, as proposed in [34-38], is also suggested. Additionally, we intend to improve the computational modeling presented in this study to make its application feasible through an on-site implemented decision support system.

Finally, the scale proposed here comprises linguistic terms corresponding to seven semantic categories, following the linguistic proposition of the MACBETH method. Different decision contexts can be assessed using the semantic terms composing the scale, but different linguistic granularities can be used, which is a suggestion for future studies.

List of Abbreviations

FGA-MACBETH: Fuzzy Genetic Algorithm of Measuring Attractiveness by a Categorical-Based Evaluation Technique

F-LP-MACBETH: Fuzzy Linear Programming of Measuring Attractiveness by a Categorical-Based Evaluation Technique

FPV: Fundamental Points of View

GA: Genetic Algorithms

LPP: Linear Programming Problem

MACBETH: Measuring Attractiveness by a Categorical-Based Evaluation Technique

MCDM/A: Multi-criteria Decision-Making/Aid

M-MACBETH: Decision Support System of Measuring Attractiveness by a Categorical-Based Evaluation Technique

Declarations

Ethics Approval: This study did not involve human or animal subjects.

Consent for publication: All the authors agree with this manuscript's publication.

Availability of data and material: Not applicable.

Conflict of interest: The authors declare no conflicts of interest.

Funding: Not applicable.

Authors' contributions: TRB developed the mathematical modeling analysis of the algorithm and wrote the manuscript, AAL guided in all stages of development and analysis of the algorithm, and CMSM, LE, SRE, and AD helped to carry out the analysis with constructive discussions.

References

[1] Pérez-Gladish, B., Ferreira, F.A.F., Zopounidis, C.: Mcdm/a studies for economic development, social, cohesion and environmental sustainability: introduction, International Journal of Sustainable Development and World Ecology. (2020). DOI: 10.1080/13504509.2020.1821257.

[2] Bana e Costa, C., Vansnick, J.-C.: Macbeth - an interactive path towards the construction of cardinal value functions, International Transactions in Operational Research. 1(4), 489-500 (1994). DOI: 10.1016/0969-6016(94)90010-8.

[3] Bana e Costa, C., De Corte, J.-M., Vansnick, J.-C.: MACBETH. International Journal of Information Technology and Decision Making. 11(2), 359-387 (2012). DOI: 10.1142/S0219622012400068.

[4] Andrade, G.N., Alves, L.A., Andrade, F.V.S., Mello, J.C.C.B.S. de.: Evaluation of power plants technologies using multicriteria methodology MACBETH. IEEE Latin America Transactions. 14(1), 188-198 (2016). DOI: 10.1109/TLA.2016.7430079.

[5] Bana e Costa, C., Vansnick, J.C.: Uma nova abordagem ao problema da construção de uma função de valor cardinal: MACBETH. Investigação Operacional. 15(1), 15-35 (1995).

[6] Fagundes, M.V.C., Keler, Á.C., Teles, E.O., Vieira de Melo, S.A.B., Freires, F.G.M.: Multicriteria decision-making system for supplier selection considering risk: a computational fuzzy AHP-based approach. IEEE Latin America Transactions. 19(9), 1564-1572 (2021). DOI: 10.1109/TLA.2021.9468610.

[7] Wang, J.-Q., Zhang, H.-Y.: Multicriteria decision-making approach based on Atanassov's Intuitionistic Fuzzy Sets with incomplete certain information on weights. IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 21(3), 510-515 (2013). DOI: 10.1109/TFUZZ.2012.2210427.

[8] Dhouib, D.: An extension of MACBETH method for a fuzzy environment to analyze alternatives in reverse logistics for automobile tire wastes. Omega. 42, 25-32 (2014). DOI: 10.1016/j.omega.2013.02.003.

[9] Yurtyapan, M.S., Aydemir, E.: ERP software selection using intuitionistic fuzzy and interval grey number-based MACBETH method. Grey Systems: Theory and Application. 12(1), 78-100 (2021). DOI: 10.1108/GS-01-2021-0002.

[10] Pacumar, D., Behzad, M., Bozanic, D., Behzad, M.: Designing a fuzzy decision support framework for assessing solid waste management in the South European region. Environmental Science and Pollution Research. 29, 42862-42882 (2022). DOI: 10.1007/s11356-022-18891-y.

[11] Bastos, T.R., Longaray, A.A., Santos Machado, C.M. dos, Ensslin, L., Ensslin, S.R., Dutra, A.: Fuzzy-MACBETH hybrid method: mathematical treatment of a qualitative scale using the fuzzy theory. International Journal of Computational Intelligence Systems. 16(21), 1-16 (2023). DOI: 10.1007/s44196-023-00195-9.

6 Conclusões

A partir dos objetivos específicos definidos na Seção 3, a tese foi desenvolvida em três fases, conforme se observa na Figura 6. Na primeira fase, foi desenvolvida a revisão sistemática de literatura sobre a utilização de algoritmos evolutivos na tomada de decisão multicritério. Assim, o primeiro artigo apresenta o resultado dessa etapa da pesquisa, que contempla o primeiro objetivo específico.

Na segunda fase, foram desenvolvidas a revisão da literatura sobre a utilização da Teoria Fuzzy no método MACBETH e a modelagem matemática Fuzzy-MACBETH. Desta etapa, resultou o segundo artigo da tese, que contempla o segundo, o terceiro e o sexto objetivos específicos.

Por fim, na terceira fase, foi realizada a modelagem computacional, através da implementação do método Fuzzy-MACBETH a partir de um algoritmo genético. Desta etapa, resultou o terceiro artigo, que contempla o quarto, o quinto e o sexto objetivos específicos.

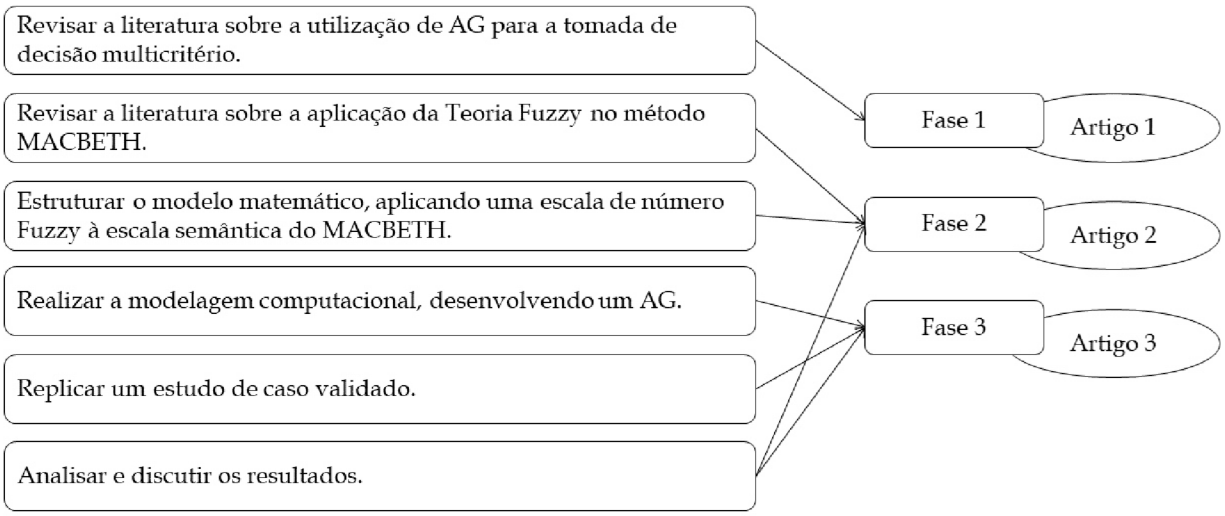


Figura 6: Consecução dos objetivos específicos da tese

A partir da modelagem matemática desenvolvida na presente pesquisa, chegou-se ao método Fuzzy-MACBETH apresentado no segundo artigo da Seção 5, o qual aplica uma escala Fuzzy triangular à escala semântica do MACBETH. A modelagem é composta por quatro etapas: primeiro a matriz de decisão, obtida a partir das respostas verbais do decisor sobre as diferenças de atratividade entre pares de alternativas, é fuzzificada. Após, é executado o procedimento de inferência Fuzzy, a partir do F-LP-MACBETH, resultando em uma escala básica Fuzzy. Na terceira etapa, a escala básica Fuzzy é defuzzificada através do método do centróide, dando origem à escala básica *crisp*. Por fim, é realizada a cardinalização da escala básica.

Os resultados obtidos demonstram o potencial do método Fuzzy-MACBETH na modelagem da imprecisão do discurso humano. Conceitos incertos, como *Fraco*, *Moderado* e *Forte*, por exemplo, que compõem a escala semântica do método MACBETH, podem

ser facilmente compreendidos nas comunicações interpessoais, no entanto, traduzir estes conceitos matematicamente e computacionalmente não é uma tarefa fácil, visto que são conceitos incertos, atrelados ao sistema de valores individual. Ou seja, o significado de *Fraco* ou *Forte* varia para cada indivíduo. Desta forma, a ferramenta utilizada para traduzir a incerteza das variáveis linguísticas é a Lógica Fuzzy.

Para a implementação do método Fuzzy-MACBETH, foi desenvolvida a modelagem computacional baseada em Algoritmo Genético, conforme demonstrado no terceiro artigo da Seção 5, denominada FAG-MACBETH. A escolha do Algoritmo Genético se deu pois trabalham com populações, onde a cada rodada do método computacional de busca, uma população de possíveis soluções é gerada a partir de operadores probabilísticos projetados com base em conceitos biológicos, no qual as populações tendem a evoluir para soluções melhores a medida em que o processo avança. Segundo Zhang et al. (2013), os algoritmos genéticos são um dos algoritmos modernos de otimização heurística amplamente adotados por muitos pesquisadores.

Desta forma, na modelagem FAG-MACBETH, o algoritmo genético é responsável por gerar possíveis soluções para a matriz de decisão semanticamente consistente, mas que apresenta inconsistência cardinal. Com isto tem-se a principal contribuição da presente tese, ao se contornar o problema da inconsistência cardinal em matriz de decisão semanticamente consistente, obtendo-se uma escala cardinal sem que o decisor refaça suas avaliações iniciais. Para demonstrar o funcionamento da modelagem desenvolvida, foi replicado o estudo de caso de Bana e Costa et al. (1999), cujos resultados mostraram-se alinhados ao método de origem.

Destaca-se ainda a necessidade de se desenvolver uma interface para o sistema de suporte a decisão que viabilize a interação homem-computador e permita a utilização da modelagem FAG-MACBETH pela comunidade científica, oportunizando sua aplicação em estudos futuros. Pode-se verificar como oportunidades de futuras pesquisas a aplicação de outras metaheurísticas computacionais no método Fuzzy-MACBETH, a fim de se realizar o estudo comparativo de seus desempenhos, bem como o estudo comparativo de métodos híbridos e a utilização de metaheurísticas isoladas; bem como a aplicação de extensões da Teoria Fuzzy no método FAG-MACBETH para a avaliação em grupo.

Referências

AL-BAZI, A.; ÜNEY, E.; ABU-MONSHAR, A. Developing an overbooking fuzzy-based mathematical optimization model for multi-leg flights. In: **8th International Conference on Air Transport - INAIR 2019 GLOBAL TRENDS IN AVIATION**. [S.l.]: 10.1016/j.trpro.2019.12.031, 2019. v. 43.

ARSOVSKI, S.; PUTNIK, G.; ARSOVSKI, Z.; TADIC, D.; ALEKSIC, A.; DJORDJEVIC, A.; MOLJEVIC, S. Modelling and enhancement of organizational resilience potential in process industry smes. **Sustainability**, doi:10.3390/su71215828, v. 7, p. 16483–16497, 2015.

ASHFARI, H.; SHARIFI, M.; ELMEKKAWY, T. Y.; PENG, Q. Facility location decisions within integrated forward/reverse logistics under uncertainty. **Procedia CIRP**, v. 17, p. 606–610, 2014.

ATANASSOV, K.; GARGOV, G. Interval valued intuitionistic fuzzy sets. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 31, n. 3, p. 343–349, 1989.

BANA E COSTA; DE CORTE; VANSNICK. Macbeth. **International Journal of Information Technology and Decision Making**, v. 11, n. 2, 2012.

BANA E COSTA; VANSNICK. **The MACBETH approach: basic ideas, software, and an application**. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, Book Series: Mathematical Modelling: Theory and Applications, 1999.

BANA E COSTA, C. Introdução geral às abordagens multicritério de apoio à tomada de decisão. **Investigação Operacional**, v. 8, n. 1, p. 117–139, 1988.

BANA E COSTA, C.; ANGULO-MEZA, L.; OLIVEIRA, M. D. O método macbeth e a aplicação no brasil. **ENGEVISTA**, v. 15, n. 1, 2013.

BANA E COSTA, C.; DE CORTE, J.-M.; VANSNICK, J. Macbeth. **Working paper of London School of Economics**, https://m-macbeth.com/references/, 2003.

BANA E COSTA, C.; DE CORTE, J.-M.; VANSNICK, J.-C. **ON THE MATHEMATICAL FOUNDATIONS OF MACBETH**. [S.l.]: Springer (International series in operations research and management science), 2005.

BANA E COSTA, C.; ENSSLIN, L.; CORRêA, E.; VANSNICK, J.-C. Decision support systems in action: Integrated application in a multicriteria decision aid process. **European Journal of Operational Research**, v. 113, p. 315–335, 1999.

BANA E COSTA, C.; VANSKICK, J. Uma nova abordagem ao problema da construção de uma função de valor cardinal: Macbeth. In: **Investigação Operacional**. [S.l.: s.n.], 1995. v. 15.

BANA E COSTA, C.; VANSNICK, J.-C. Macbeth - an interactive path towards the construction of cardinal value functions. **International Transactions in Operational Research**, v. 1, n. 4, 1994.

BASNET, C.; WEINTRAUB, A. A genetic algorithm for a bicriteria supplier selection problem. **International Transactions in Operational Research**, v. 16, p. 173–189, 2009.

BASTOS, T.; LONGARAY, A. Algoritmos genéticos aplicados à métodos multicritério: uma revisão sistemática da literatura. In: **Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional – João Pessoa: UFPB, 2021**. [S.l.]: https://proceedings.science/sbpo-series/sbpo-2021/papers/algoritmos-geneticos-aplicados-a-metodos-multicriterio–uma-revisao-sistematica-da-literatura, 2021. v. 53.

BASTOS, T.; LONGARAY, A.; MACHADO, C. d. S.; ENSSLIN, L.; ENSSLIN, S.; DUTRA, A. Fuzzy-macbeth hybrid method: mathematical treatment of a qualitative scale using the fuzzy theory. **International Journal of Computational Intelligence Systems**, https://doi.org/10.1007/s44196-023-00195-9, v. 16, n. 21, p. 1–16, 2023.

BEINAT, E. **Value Functions for Environmental Management**. 1. ed. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers (Springer Science plus Business Media Dordrecht), 1997.

BOUYSSOU, D.; MARCHANT, T.; PIRLOT, M. A theoretical look at electre tri-nb and related sorting models. **4OR-Q J Oper Res**, https://doi.org/10.1007/s10288-022-00501-9, 2022.

BOUYSSOU, D.; MARCHANT, T.; PIRLOT, M.; PERNY, P.; TSOUKIàS, A.; VINCKE, P. **EVALUATION AND DECISION MODELS: a critical perspective**. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers (International series in operations research and management science), 2000.

CARNERO, M. C. Developing a fuzzy topsis model combining macbeth and fuzzy shannon entropy to select a gamification app. **Mathematics**, https://doi.org/10.3390/math9091034, v. 9, n. 1034, p. 1–34, 2021.

CASTANO, F.; GUTIERREZ, A. F.; VELASCO, N.; AMAYA, C. Using open access data to model a technician routing and scheduling problem in a congested urban setting. In: **25th International Conference on Production Research Manufacturing Innovation: Cyber Physical Manufacturing**. [S.l.]: 10.1016/j.promfg.2020.01.357, 2019. v. 39.

CHE, Z. H. Clustering and selecting suppliers based on simulated annealing algorithms. **Computers and Mathematics with Applications**, v. 63, p. 228–238, 2012.

CHEN, Z.; LIU, L.; LI, L.; LI, H. A two-stage model for project optimization in transportation infrastructure management system. **Mathematical Problems in Engineering**, https://doi.org/10.1155/2014/914515, v. 2014, n. Article ID 914515, p. 8 pages, 2014.

CHERIF, M.; FRIKHA, H. Assessment of risks alternatives in the tunisian case study within triangular fuzzy macbeth. In: **14th International conference of Logistics and Supply Chain Management LOGISTIQUA**. [S.l.]: https://doi.org/10.1109/LOGISTIQUA55056.2022.9938122, 2022. p. 1–5.

CLIVILLé, V.; MAURIS, G.; BERRAH, L. A quantified industrial performance measurement system based on a choquet fuzzy integral. In: **IEEE International Conference on Fuzzy Systems**. [S.l.]: https://doi.org/10.1109/FUZZY.2006.1681841, 2006. p. 1057–1064.

DELIKTAS, D.; USTUN, O. Student selection and assignment methodology based on fuzzy multimoora and multichoice goal programming. **International Transactions in Operational Research**, v. 24, p. 1173–1195, 2017.

DENG, J.-L. Control problems of grey systems. **Systems and Control Letters**, v. 1, n. 5, p. 288–294, 1982.

DHOUIB, D. An extension of macbeth method for a fuzzy environment to analyze alternatives in reverse logistics for automobile tire wastes. **Omega**, v. 42, p. 25–32, 2014.

ERTAY, T.; KAHRAMAN, C.; KAYA, I. Evaluation of renewable energy alternatives using macbeth and fuzzy ahp multicriteria methods: the case of turkey. **Technological and Economic Development of Economy**, v. 19, n. 1, p. 38–62, 2013.

FANTI, M.; MAIONE, B.; NASO, D.; TURCHIANO, B. Genetic multi-criteria approach to flexible line scheduling. **International Journal of Approximate Reasoning**, v. 19, p. 5–21, 1998.

FONTALVO, M. O.; MAZA, V. C.; MIRANDA, P. A meta-heuristic approach to a strategic mixed inventory-location model: formulation and application. **Transportation Research Procedia**, v. 25, p. 729–746, 2017.

GHAFFARI-NASAB, N.; AHARI, S. G.; GHAZANFARI, M. A hybrid simulated annealing based heuristic for solving the location-routing problem with fuzzy demands. **Scientia Iranica, Transactions E: Industrial Engineering**, v. 20, n. 3, p. 919–930, 2013.

GHARAKEZLOO, Y.; NIKOO, M.; KARIMI-JASHNI, A.; MOOSELU, M. A hybrid statistical decision-making optimization approach for groundwater vulnerability considering uncertainty. **Environmental Science and Pollution Research**, https://doi.org/10.1007/s11356-021-16242-x, v. 29, n. 6, 2022.

GILLIS, M.; URBAN, R.; SAIF, A.; KAMAL, N.; MURPHY, M. A simulation–optimization framework for optimizing response strategies to epidemics. **Operations Research Perspectives**, https://doi.org/10.1016/j.orp.2021.100210, v. 8, n. 100210, 2021.

GOODARZI, F.; ABDOLLAHZADEH, V.; ZEINALNEZHAD, M. An integrated multi-criteria decision-making and multi-objective optimization framework for green supplier evaluation and optimal order allocation under uncertainty. **Decision Analytics Journal**, https://doi.org/10.1016/j.dajour.2022.100087, v. 4, n. 100087, 2022.

HARIK, G. R.; LOBO, F. G.; GOLDBERG, D. E. The compact genetic algorithm. **IEEE TRANSACTIONS ON EVOLUTIONARY COMPUTATION**, v. 3, n. 4, p. 287–297, 1999.

HAZRATI, H.; BARZEGARINEGAD, A.; SIABY-SERAJEHLO, H. A hybrid mathematical and decision-making model to determine the amount of economic order considering the discount. **Mathematical Problems in Engineering**, https://doi.org/10.1155/2021/5229949, 2021.

HE, P.; LI, J. A joint optimization framework for wheat harvesting and transportation considering fragmental farmlands. **Information Processing in Agriculture**, v. 8, p. 1–14, 2021.

HOLLAND, J. Genetic algorithms. **Scientific American**, v. 267, n. 1, p. 66–73, 1992.

HOLLAND, J. H. **Adaptation in Natural and Articial Systems**. [S.l.]: East Lansing, USA: University of Michigan Press, 1975.

IMOUSSATEN, A. Practical extension of macbeth methodology to deal with sophisticated preferences' models. In: **IEEE International Conference on Fuzzy Systems**. [S.l.]: https://doi.org/10.1109/FUZZ-IEEE55066.2022.9882540, 2022.

ISHIZAKA, A.; NEMERY, P. **Multi-Criteria Decision Analysis: methods and software**. 1. ed. [S.l.]: Wiley, 2013.

JIANG, X.; SOHAIL, M. Evaluation method of human resource management efficiency of chain retail enterprises based on distributed database. **Computational and Mathematical Methods in Medicine**, https://doi.org/10.1155/2022/1860426, 2022.

KACZYNSKA, A.; KOLODZIEJCZYK, J.; SALABUN, W. A new multi-criteria model for ranking chess players. **Procedia Computer Science**, https://doi.org/10.1016/j.procs.2021.09.205, v. 192, p. 4290—-4299, 2021.

KAHRAMAN, C.; ONAR, S. C.; OZTAYSI, B. Fuzzy multicriteria decision-making: A literature review. **International Journal of Computational Intelligence Systems**, v. 8, n. 4, p. 637–666, 2015.

KAMALI, A.; GHOMI, S. M. T. F.; JOLAI, F. A multi-objective quantity discount and joint optimization model for coordination of a single-buyer multi-vendor supply chain. **Computers and Mathematics with Applications**, v. 62, p. 3251–3269, 2011.

KANNAN, A. S. K.; BALAMURUGAN, S. A. A.; SASIKALA, S. A customized metaheuristic approaches for improving supplier selection in intelligent decision making. **IEEE Access**, 10.1109/ACCESS.2021.3071454, v. 9, p. 56228–56239, 2021.

KARUPPIAH, K.; SANKARANARAYANAN, B.; ALI, S. A novel quality function deployment based integrated framework for improving supply chain sustainability. **Engineering Management Journal**, https://doi.org/10.1080/10429247.2022.2097575, p. 1–14, 2022.

KAYIKCI, Y. A conceptual model for intermodal freight logistics centre location decisions. In: **The Sixth International Conference on City Logistics - Procedia Social and Behavioral Sciences**. [S.l.]: doi:10.1016/j.sbspro.2010.04.039, 2010. v. 2.

KHUMAIDI, A.; SUKOCO, H.; PURWANTO, A.; KURNIAWAN, A. Design of warehouse management system for fresh product in supply chain network. **International Journal of Advanced Trends in Computer Science and Engineering**, v. 9, n. 1, p. 308–314, 2020.

KOUATLI, I. A biologicaly inspired decision model for multivariable genetic-fuzzy-ahp system. In: **17th International Conference in Knowledge Based and Intelligent Information and Engineering Systems - KES2013**. [S.l.]: doi: 10.1016/j.procs.2013.09.075, 2013. v. 22.

KUMAR, M.; HUSIAN, M.; UPRETI, N.; GUPTA, D. Genetic algorithm: Reviewand application. **International Journal of Information Technology and Knowledge Management**, v. 2, n. 2, p. 451–454, 2010.

KUO, R.; HAN, Y. A hybrid of genetic algorithm and particle swarm optimization for solving bi-level linear programming problem – a case study on supply chain model. **Applied Mathematical Modelling**, v. 35, p. 3905–3917, 2011.

KUO, R. J.; HONG, S. Y.; HUANG, Y. C. Integration of particle swarm optimization-based fuzzy neural network and artificial neural network for supplier selection. **Applied Mathematical Modelling**, v. 34, p. 3976–3990, 2010.

KUO, R. J.; WIBOWO, B. S.; ZULVIA, F. E. Application of a fuzzy ant colony system to solve the dynamic vehicle routing problem with uncertain service time. **Applied Mathematical Modelling**, v. 40, p. 9990–10001, 2016.

LEE, A. H.; KANG, H.-Y.; LAI, C.-M.; HONG, W.-Y. An integrated model for lot sizing with supplier selection and quantity discounts. **Applied Mathematical Modelling**, v. 37, p. 4733–4746, 2013.

LEYVA-LóPEZ, J.; SOLANO-NORIEGA, J.; GASTéLUM-CHAVIRA, D.; GAXIOLA-VALENZUELA, T. A personnel selection model for a software development company based on the electre iii method and a variant of nsga-ii. **Innovar**, https://doi.org/10.15446/innovar.v32n85.100657, v. 32, n. 85, 2022.

LI, J.; XU, J.; GEN, M. A class of multiobjective linear programming model with fuzzy random coefficients. **Mathematical and Computer Modelling**, v. 44, p. 1097–1113, 2006.

LI, Q.; ZHONG, H.; WANG, Y.; LENG, Y.; GUO, C. Integrated development optimization model and its solving method of multiple gas fields. **Petroleum Exploration and Development**, v. 43, n. 2, p. 293–300, 2016.

LIANG, J.; LIU, M. Network design for municipal solid waste collection: A case study of the nanjing jiangbei new area. **International Journal Environmental Research and Public Health**, doi:10.3390/ijerph15122812, v. 15, n. 2812, p. 1–15, 2018.

LIN, D.-Y.; CHU, Y.-M. A lagrangian relaxation approach to the mixed-product assembly line sequencing problem: A case study of a door-lock company in taiwan. **Applied Mathematical Modelling**, v. 38, p. 4493–4511, 2014.

LOPEZ-ESPIN, J. J.; APARICIO, J.; GIMENEZ, D.; PASTOR, J. T. Benchmarking and data envelopment analysis. an approach based on metaheuristics. In: **14th International Conference on Computational Science - Procedia Computer Science**. [S.l.]: doi: 10.1016/j.procs.2014.05.035, 2014. v. 29.

MA, S. A nonlinear bi-level programming approach for product portfolio management. **SpringerPlus**, v. 5, n. 727, p. 1–18, 2016.

NAJI, M.; MOUSRIJ, A. Holistic multi-criteria performance measurement system for the maintenance function. **Journal of the Operational Research Society**, https://doi.org/10.1080/01605682.2022.2118635, p. 1–15, 2022.

NGUYEN, P.-H. Ga-gdematel: A novel approach to optimize recruitment and personnel selection problems. **Mathematical Problems in Engineering**, https://doi.org/10.1155/2022/3106672, 2022.

OLABANJI, O.; MPOFU, K. Appraisal of conceptual designs: Coalescing fuzzy analytic hierarchy process (f-ahp) and fuzzy grey relational analysis (f-gra). **Results in Engineering**, https://doi.org/10.1016/j.rineng.2020.100194, v. 9, n. 100194, 2021.

PACUMAR, D.; BEHZAD, M.; BOZANIC, D.; BEHZAD, M. Designing a fuzzy decision support framework for assessing solid waste management in the south european region. **Environmental Science and Pollution Research**, v. 29, p. 42862–42882, 2022.

PACUMAR, D.; TORKAYESH, A.; BISWAS, S. Supplier selection in healthcare supply chain management during the covid-19 pandemic: a novel fuzzy rough decision-making approach. In: **Annals of Operations Research**. [S.l.]: https://doi.org/10.1007/s10479-022-04529-2, 2022.

PACUMAR, D.; TORKAYESH, A.; DEVECI, M.; SIMIC, V. Recovery center selection for end-of-life automotive lithium-ion batteries using an integrated fuzzy waspas approach. **Expert Systems with Applications**, https://doi.org/10.1016/j.eswa.2022.117827, v. 206, n. 117827, 2022.

PAMUCAR, D.; TORKAYESH, A. E.; DEVECI, M.; SIMIC, V. Recovery center selection for end-of-life automotive lithium-ion batteries using an integrated fuzzy waspas approach. **Expert Systems with Applications**, https://doi.org/10.1016/j.eswa.2022.117827, v. 206, n. 117827, 2022.

PARREIRAS, R. O. Algoritmos evolucionários e técnicas de tomada de decisão em análise multicritério. **(Tese de doutorado) Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte**, 2006.

PETROVIC-LAZAREVIC, S. Personnel selection fuzzy model. **International Transactions in Operational Reasearch**, v. 8, p. 89–105, 2001.

PISHDAR, M.; GHASEMZADEH, F.; ANTUCHEVICIENE, J. A mixed interval type-2 fuzzy best-worst macbeth approach to choose hub airport in developing countries: case of iranian passanger airports. **Transport**, v. 34, n. 6, p. 639–651, 2019.

PéREZ-GLADISH, B.; FERREIRA, F. A. F.; ZOPOUNIDIS, C. Mcdm/a studies for economic development, social cohesion and environmental sustainability: introduction. **International Journal of Sustainable Development and World Ecology**, https://doi.org/10.1080/13504509.2020.1821257, 2020.

RABBANI, M.; BAGHERSAD, M.; JAFARI, R. A new hybrid ga-pso method for solving multi-period inventory routing problem with considering financial decisions. **Journal of Industrial Engineering and Management**, v. 6, n. 4, p. 909–929, 2013.

RADOJEVIC, D.; PETROVIC, S. A fuzzy approach to preference structure in multicriteria ranking. **International Transactions in Operational Reasearch**, v. 4, n. 5/6, p. 419–430, 1997.

ROSTAMI, M.; KHEIRANDISH, O.; ANSARI, N. Minimizing maximum tardiness and delivery costs with batch delivery and job release times. **Applied Mathematical Modelling**, v. 39, p. 4909–4927, 2015.

ROSTAMI, M.; RAZMI, J.; JOLAI, F. Designing a genetic algorithm to solve an integrated model in supply chain management using fuzzy goal programming approach. In: **9th IFIP WG 5.5 International Conference on Balanced Automation Systems for Future Manufacturing Networks (BASYS)**. [S.l.]: 10.1007/978-3-642-14341-0_20, 2010. v. 9.

ROY, B. **Multicriteria Methodology for Decision Aiding**. 1. ed. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers (Springer Science plus Business Media Dordrecht), 1996.

SADEGHI, J.; MOUSAVI, S. M.; NIAKI, S. T. A. Optimizing an inventory model with fuzzy demand, backordering, and discount using a hybrid imperialist competitive algorithm. **Applied Mathematical Modelling**, v. 40, p. 7318–7335, 2016.

SARAçOGLU, I.; SüER, G. A. Multi-objective fuzzy flow shop scheduling model in a manufacturing company. In: **28th International Conference on Flexible Automation and Intelligent Manufacturing (FAIM 2018)**. [S.l.]: 0.1016/j.promfg.2018.10.039, 2018. v. 17.

SARDOOI, E. R.; AZAREH, A.; MESBAHZADEH, T.; SARDOO, F. S.; PARTELI, E.; PRADHAN, B. A hybrid model using data mining and multi-criteria decision-making methods for landslide risk mapping at golestan province, iran. **Environmental Earth Sciences**, https://doi.org/10.1007/s12665-021-09788-z, v. 80, n. 15, 2021.

SCHEILI, A.; DELPLA, I.; RODRIGUEZ, M. Development of a drinking water quality index based on a participatory procedure using mixed multicriteria methods. **Environ Monit Assess**, https://doi.org/10.1007/s10661-020-08516-7, v. 192, n. 558, 2020.

SMARANDACHE, F. Neutrosophic logic and set. http://fs.gallup.unm.edu/neutrosophy.htm, 1995.

STABELL, C. B. Decision support systems: Alternative perspectives and schools. **Decision Support Systems**, v. 3, n. 3, p. 243–251, 1987.

SUTRISNO; WIDOWATI; SUNARSIH. Genetic algorithm approach for large scale quadratic programming of probabilistic supplier selection and inventory management problem. In: **International Conference on Science and Science Education - Journal of Physics: Conference Series**. [S.l.]: doi:10.1088/1742-6596/1307/1/012001, 2019. v. 1307.

TAVANA, M.; SHAABANI, A.; CAPRIO, D. D.; AMIRI, M. An integrated and comprehensive fuzzy multicriteria model for supplier selection in digital supply chains. **Sustainable Operations and Computers**, https://doi.org/10.1016/j.susoc.2021.07.008, v. 2, p. 149—-169, 2021.

TAVARES, R.; ANGULO-MEZA, L.; RANGEL, L.; SANT'ANNA, A. Interdisciplinary graduate programs: application of the macbeth multicriteria method for assessing their performances. **Annals of Operations Research**, https://doi.org/10.1007/s10479-021-04108-x, v. 316, p. 1383—1399, 2022.

TEZENJI, F. R.; MOHAMMADI, M.; PASANDIDEH, S.; KOUPAEI, M. N. An integrated model for supplier location-selection and order allocation under capacity constraints in an uncertain environment. **Scientia Iranica, Transactions E: Industrial Engineering**, v. 23, p. 3009–3025, 2016.

TOLGA, A.; BASAR, M. The assessment of a smart system in hydroponic vertical farming via fuzzy mcdm methods. **Journal of Intelligent and Fuzzy Systems**, https://doi.org/10.3233/JIFS-219170, v. 42, n. 1, p. 1–12, 2022.

VAHDANI, B.; IRANMANESH, S. H.; MOUSAVI, S. M.; ABDOLLAHZADE, M. A locally linear neuro-fuzzy model for supplier selection in cosmetics industry. **Applied Mathematical Modelling**, v. 36, p. 4714–4727, 2012.

VARDI, M.; NEYESTANI, M.; GHORBANIAN, A. Supplier selection and order allocation problem modeling with the aim of comparing incremental discounts versus wholesale discounts by using ga and nsga algorithms. **Journal Europeen des Systemes Automatises**, https://doi.org/10.18280/jesa.520104, v. 52, n. 1, p. 23–34, 2019.

VIEIRA, A. C.; OLIVEIRA, M. D.; BANA E COSTA, C. Enhancing knowledge construction processes within multicriteria decision analysis: The collaborative value modelling framework. **Omega**, https://doi.org/10.1016/j.omega.2019.03.005, v. 94, 2020.

WANG, Y.; XI, C.; ZHANG, S.; ZHANG, W.; YU, D. Combined approach for government e-tendering using ga and topsis with intuitionistic fuzzy information. **PLoS ONE**, doi:10.1371/journal.pone.0130767, v. 10, n. 7, p. 1–20, 2015.

WANG, Y.-C.; CHEN, T. A bi-objective ahp-minlp-ga approach for flexible alternative supplier selection amid the covid-19 pandemic. **Soft Computing Letters**, v. 3, n. 100016, 2021.

WIECEK, P. Intelligent approach to inventory control in logistics under uncertainty conditions. In: **XII Conference on Transport Engineering - Transportation Research Procedia**. [S.l.]: doi: 10.1016/j.trpro.2016.12.023, 2016. v. 18.

XIDONAS, P.; DOUKAS, H.; SARMAS, E. A python-based multicriteria portfolio selection dss. **RAIRO Operations Research**, https://doi.org/10.1051/ro/2020140, v. 55, p. S3009—-S3034, 2021.

YURTYAPAN, M. S.; AYDEMIR, E. Erp software selection using intuitionistic fuzzy and interval grey number-based macbeth method. **Grey Systems: Theory and Application**, https://doi-org.ez40.periodicos.capes.gov.br/10.1108/GS-01-2021-0002, ahead-of-print, n. ahead-of-print, 2021.

ZADEH, L. A. Fuzzy sets. **Information and Control**, v. 8, p. 338–353, 1965.

ZAK, J.; WEGLINSKI, S. The selection of the logistics center location based on mcdm/a methodology. In: **Transportation Research Procedia**. [S.l.: s.n.], 2014. v. 3, p. 555–564.

ZHANG, H.; DENG, Y.; CHAN, F. T.; ZHANG, X. A modified multi-criterion optimization genetic algorithm for order distribution in collaborative supply chain. **Applied Mathematical Modelling**, v. 37, p. 7855–7864, 2013.

ZHANG, Y.; XU, Z. Efficiency evaluation of sustainable water management using the hf-todim method. **International Transactions in Operational Research**, v. 26, p. 747–764, 2019.

ZHU, N.; ZHU, C.; EMROUZNEJAD, A. A combined machine learning algorithms and dea method for measuring and predicting the efficiency of chinese manufacturing listed companies. **Journal of Management Science and Engineering**, ahead-of-print, n. ahead-of-print, 2020.

A Apêndice 1

Tabela 3: Síntese dos artigos do Portfólio Bibliográfico

Método	Referência	Aplicação	Características principais
Algoritmos Genéticos	(BASNET; WEIN-TRAUB, 2009)	Seleção de fornecedores	A seleção de fornecedores é encarada como um problema bicritério: minimização de custos e minimização do número de fornecedores. É apresentado um modelo de Programação Inteira Mista para problemas de pequeno e médio portes, fazendo uso de metaheurística para problemas de proporção maiores. Apresenta um Algoritmo Genético Multiobjetivo para gerar as soluções ótimas de Pareto, onde cada cromossono (solução) é um conjunto de fornecedores. Os resultados mostraram que as soluções geradas pelo AG ficaram próximas às soluções reais.
	(CHE, 2012)	Otimização da logística intermodal, com foco na logística verde	A fim de promover a logística verde, uma abordagem útil é otimizar a integração dos transportes intermodais. Para isso, foi desenvolvida uma técnica híbrida que combina Programação Quadrática e Algoritmo Genético (GA-SQP). A SQP foi utilizada para produzir a solução inicial. Caso a solução inicial seja a solução dominante, o AG ainda assim irá gerar novas soluções, desafiando a solução inicial. O agoritmo hibrido pôde resolver a variabilidade nos resultados ideias em SQP e reduziu o tempo de execução do AG.

Continua

Método	Referência	Aplicação	Características principais
	(KUO; HAN, 2011)	Cadeia de suprimentos	Aplica Programação Linear de Dois Níveis (BLPP) ao problema de distribuição da cadeia de suprimentos e desenvolve um método híbrido baseado em AG e PSO (Otimização por Enxame de Partículas). No modelo de distribuição proposto, a função objetivo de primeiro nível define a melhor quantidade de compra do produto de acordo com as faixas de capacidade dos fabricantes, a fim de maximizar o lucro total dos centros de distribuição, já a função objetivo de segundo nível minimiza os gastos totais. Foram comparados três métodos híbridos, o HGAPSO-1, HGAPSO-2 e HGAPSO-3 (este último proposto pelos autores). Os resultados demonstraram que os métodos híbridos funcionam melhor do que o AG e o PSO isoladamente e verificou-se que o HGAPSO-3 é superior aos outros dois.
	(ZHANG et al., 2013)	Cadeia de suprimentos	O estudo combina AG com TOPSIS. Um AG para otimização multicritério (MCOGA) é proposto com base no TOPSIS, no qual o valor do gene representa o número do fornecedor e a localização do gene que representa o número do pedido. Logo, os cromossomos gerados serão as alternativas do TOPSIS, sendo avaliados segundo três critérios, custo total (TC), lead time total (TLT) e Equidade de utilização (EU). O valor de cada alternativa (cromossomo) gerado pelo TOPSIS será o valor de aptidão.
	(CHEN et al., 2014)	Tomada de decisão em projeto de sistema de gerenciamento de infraestrutura de transporte	A infraestrutura de transporte inclui estradas, pontes, túneis, aeroportos, ferrovias e portos marítimos. A otimização do projeto foi separada em dois processos interconectados, a alocação de recursos e a distribuição do projeto, e um novo modelo de duas fases foi desenvolvido. Foi utilizado AG para resolver o problema de alocação de recurso (orçamento) e Programação Dinâmica para resolver o modelo de distribuição de projetos.

Continua

Método	Referência	Aplicação	Características principais
	(HE; LI, 2021)	Colheita e transporte como um sistema integrado	Considera os problemas da colheita e do transporte de forma integrada, a fim de reduzir os custos operacionais. No trabalho, as terras agrícolas fragmentadas são abstraídas como pontos geograficamente dispersos e cada ponto só pode ser colhido apenas uma vez. O período de colheita dura muitos dias e o problema é de roteamento de veículo com várias viagens. O trigo é colhido por colheitadeiras e transportado para o depósito em várias viagens ao longo do dia. Um modelo de Programação Inteira Mista é desenvolvido para descrever o problema. Um agoritmo híbrido é desenvolvido, combinando um algoritmo genético híbrido com um algoritmo de atribuição, a fim de otimizar as rotas das colheitadeiras e transporte de uma perspectiva de sistemas.
	(FONTALVO; MAZA; MIRANDA, 2017)	Gestão logística	Estuda uma rede de distribuição que minimize os custos logísticos. Apresentam um modelo estratégico de localização de estoque, multiproduto e de demanda variável. Para resolver o complexo problema de Programação Inteira Mista, foi utilizado Algoritmo Genético. O modelo permitiu a tomada de decisão considerando aspectos estratégicos e táticos ao mesmo tempo.
	(RABBANI; BAGHERSAD; JAFARI, 2013)	Cadeia de suprimentos	O problema de roteamento de estoque é formulado como uma Programação Linear Inteira Mista (MILP) e é proposto um algoritmo híbrido com AG combinado com PSO. Como o problema de roteamento de estoque é complexo, foi subdividido em dois subproblemas (de roteamento de veículos e de inventário/estoque). O AG proposto constrói rotas de veículos em cada período, ou seja, encontra uma solução elegível para o primeiro subproblema. O segundo subproblema é resolvido por um algoritmo PSO.

Continua

Método	Referência	Aplicação	Características principais
	(MA, 2016)	Gerenciamento de portfólio de produtos	O problema de gerenciamento de portfólio de produto líder-seguidor é resolvido com base em um modelo de Programação Inteira Não Linear de dois níveis, onde o tomador de decisão em um nível superior assume a função de líder e os de nível inferior são os seguidores. Os resultados da tomada de decisão do líder funcionam como restrições para o problema de otimização dos seguidores. Quando os decisores chegam as suas decisões ótimas, o problema retorna para o líder, para ajustar sua decisão. Para a resolução do MINP, foi utilizado AG com dois tipos de cromossomos, o cromossomo de nível superior (ULC) e o de nível inferior (LLC).
	(LEE et al., 2013)	Gestão de estoque	O artigo trata do problema de dimensionamento de lote de estoque multiperíodo de produto único, considerando um ambiente com múltiplos períodos e múltiplos fornecedores. Inicialmente é construído um modelo de Programação Linear Inteira Mista para resolver o problema de dimensionamento de lote com múltiplos fornecedores, vários períodos e desconto por quantidades. Após, um AG é proposto para resolver o problema.
	(TEZENJI et al., 2016)	Gestão da cadeia de abastecimento	Neste artigo foi investigado um modelo integrado para problemas de seleção de localização de fornecedores e alocação de pedidos. Foi desenvolvido um modelo de Programação Não Linear Inteira Mista (MINP), resolvido através de dois algoritmos metaheurísticos: AG e Recozimento Simulado (SA). O resultado mostrou que o SA apresentou melhores resultados do que o AG.
	(LOPEZ-ESPIN et al., 2014)	Eficiência de unidades e *Benchmarking*	Os autores estudam DEA com base em alvos eficientes mais próximos, a partir da ideia de menor distância, para que as DMUs ineficientes possam encontrar a fronteira eficiente de forma mais fácil. Para isso, o problema é abordado por meio de AG. É utilizado ainda um método de busca aleatória em algumas partes do AG a fim de explorar melhor o espaço de busca.

Continua

Método	Referência	Aplicação	Características principais
	(KHUMAIDI et al., 2020)	Gestão da cadeia de abastecimento	O artigo trata da gestão da cadeia de suprimentos de armazéns de produtos perecíveis. Foi projetado um sistema de gestão de armazém inteligentes (SWMS) através da implementação de tecnologias RFID (*Radio Frequency Identification*) e RSSF (sensor de redes sem fio) e foi utilizado AG combinado ao AHP para resolução de problemas. A arquitetura do projeto é a seguinte: primeiro os podutos que chegam do fornecedor são embalados em paletes e etiquetas do RFID são afixadas. Depois, a tomada de decisão da localização dos produtos e paletes é feita usando AG e AHP. Dentro de cada palete tem sensores de temperatura, umidade e capacidade instalados. O AG e o AHP são aplicados para analisar problemas de localização de distribuição logística, o AG para obter algumas soluções ótimas sobre fatores econômicos e AHP para avaliar as soluções.
	(ASHFARI et al., 2014)	Gestão da cadeia de abastecimento	Os autores propõem um modelo de Programação Linear Inteira Mista Estocástica (SMILP) para otimizar a localização e o tamanho de instalações e centros de serviço em fluxos diretos e reversos integrados sob incerteza. O objetivo do modelo é minimizar o custo de instalação, custos de transporte e gerenciamento de estoque e, simultaneamente, maximizar a satisfação do cliente com uma perspectiva sustentável. O problema é resolvido pelo método da soma ponderada em um AG multiobjetivo (SMOGA).
	(SUTRISNO; WIDOWATI; SUNARSIH, 2019)	Seleção de fornecedores e gerenciamento de estoque	Os autores usam AG para fornecer soluções para o problema de Programação Quadrática Inteira de seleção probabilística de fornecedores e gerenciamento de estoque. O AG foi empregado usando parâmetros aleatórios com uma função de distribuição de probabilidade conhecida. Devido a presença desses parâmetros aleatórios o número de variáveis no modelo determinístico equivalente cresceu exponencialmente. Assim, concluiu-se que o AG não é preferido na resolução de problemas de grande escala no que diz respeito à seleção de fornecedores e gestão de estoque.

Continua

Método	Referência	Aplicação	Características principais
	(LI et al., 2016)	Gestão da produção	Propõem um modelo de Programação Inteira Mista para maximizar os benefícios econômicos, otimizando o cronograma de produção e estabelecendo uma escala de produção. Tendo em vista as características do problema, um novo AG incorporado em camadas adaptativas é proposto para resolver este modelo. O modelo de otimização proposto é preciso, e o AG fornece convergência, garantindo que vários campos de gás possam ser explorados de forma ordenada.
	(ROSTAMI; KHEIRANDISH; ANSARI, 2015)	Gerenciamento de lotes de entrega	Neste estudo, é abordada a programação de um conjunto de entregas com horários de liberação específicos. Cada lote tem um custo de entrega específico e o objetivo é minimizar os custos de atraso máximo. Foi desenvolvido um modelo de Programação Inteira Mista (MIP), que após transformado em um modelo linear foi resolvido pelo *solver* CPLEX no ambiente de modelagem GAMS. Após, foi desenvolvido um algoritmo de ramificação e limitação (método B&B - *branch and bound algorithm*). Para melhorar o tempo computacional, foram utilizados PSO e AG. Assim, são propostos 3 algoritmos para solucionar o problema, um usando o método B&B, um algoritmo DPSO e o último utilizando o AG. Os autores concluem que os métodos propostos podem não levar a grandes inovações individuais, mas sua integração e uso em várias situações podem aumentar as capacidades de tomada de decisão das empresas e, eventualmente, reduzir os custos de produção e distribuição.
	(WANG; CHEN, 2021)	Seleção de fornecedores	Os autores propõem uma abordagem mista, utilizando AHP–programação não linear inteira mista (MINLP)–algoritmo genético (AG). A abordagem proposta foi aplicada ao caso real de escolha de fornecedores alternativos diversificados em meio à pandemia de COVID-19. Nesse estudo, pode-se observar que o AG foi utilizado para otimizar o MINLP, além da combinação do método multiobjetivo interativo com o método multicritério de agregação, o que demonstra a versatilidade desses métodos.

Continua

Método	Referência	Aplicação	Características principais
	(GHARAKEZLOO et al., 2022)	Gestão ambiental	Desenvolvem um modelo híbrido de tomada de decisão estatística para avaliar a vulnerabilidade do aquífero Shiraz, no sul do Irã, usando o algoritmo genético (GA), o método do processo de hierarquia analítica (AHP) e a análise fatorial (FA). Observa-se a combinação de um método multicritério de agregação, considerando dados probabilísticos e um algoritmo metaheurístico de otimização, o que demonstra a flexibilidade em se combinar os métodos.
	(XIDONAS; DOUKAS; SARMAS, 2021)	Gestão de portfólio	Desenvolvem um sistema integrado para apoio à decisão para a gestão de portfólio de 2 etapas. Na primeira, são aplicados 4 métodos de tomada de decisão multicritério: PROMETHEE II, o ELECTRE III, o MAUT e o TOPSIS. Na segunda etapa, são aplicadas 4 métodos de programação matemática: um modelo de programação quadrática inteira mista, um modelo de programação de metas, um modelo de algoritmo genético e um modelo de fluxo PROMETHEE multiobjetivo. Observa-se nesse estudo que os autores realizaram uma ampla combinação de metodologias.
	(GILLIS et al., 2021)	Resposta a epidemias	Propõem uma estrutura de otimização para ajudar os formuladores de políticas a selecionar políticas de fechamento, proteção e viagens para minimizar o número total de infecções com um orçamento limitado. A estrutura proposta combina um modelo compartimental SEIR modificado e estratificado por idade para avaliar o impacto das estratégias de resposta e um AG para buscar efetivamente as melhores estratégias.
	(JIANG; SOHAIL, 2022)	Gestão de recursos humanos	Nesse estudo, um AG é aplicado ao banco de dados distribuído para realizar o melhor esquema de alocação de dados e é construído o modelo de avaliação DEA.
	(NGUYEN, 2022)	Gestão de recursos humanos	Propõe um método híbrido baseado em Teoria Grey, Algoritmo Genético e DEMATEL (GA-GDEMATEL) para a gestão de recursos humanos. Esse estudo demonstra a combinação de um método multicritério, com uma metodologia da soft computing para incorporar a incerteza e um algoritmo metaheurístico para otimizar o modelo.

Continua

Método	Referência	Aplicação	Características principais
	(LIANG; LIU, 2018)	Gestão de resíduos sólidos urbanos	Os autores propõem um modelo de otimização para o projeto de rede de coleta de resíduos sólidos urbanos. O problema foi formulado como um modelo de Programação Não Linear Inteira Mista (MINP), onde a função objetivo minimiza os custos anuais de operação, que inclui o custo de transporte entre as comunidades e as estações de transferência de lixo, o custo do transporte de resíduos sólidos entre as estações e os aterros sanitários e o custo operacional nessas estações. Para resolver o modelo proposto, primeiro o modelo foi linearizado e depois foi projetado um AG eficiente para resolvê-lo. Assim, cada cromossomo representa uma solução do problema.
Algoritmo Genético e Teoria Fuzzy	(ARSOVSKI et al., 2015)	PME	Os autores apresentam um modelo de duas etapas para avaliação e aprimoramento da resiliência organizacional em Pequenas e Médias Empresas (PMEs) da indústria de processo em um ambiente incerto. É baseado na avaliação de fatores potenciais verificados de resiliência organizacional (ORPFs) estimado usando a Teoria dos Conjuntos Fuzzy. Uma combinação quase ideal de uso de recursos e melhoria de ORPFs para garantir a maximização da resiliência geral é obtida com base no modelo de um AG proposto.
	(WANG et al., 2015)	Licitação eletrônica	A fim de desenvolver o campo das Licitações eletrônicas governamentais (GeT), os autores apresentam uma abordagem híbrida que combina AG e TOPSIS, para habilitar e procurar o melhor proponente, onde os atributos dos proponentes são expressos por um conjunto intuicionista de números Fuzzy. O AG é aplicado para obter automaticamente os pesos ideais dos critérios de avaliação dos proponentes. E o TOPSIS é utilizado para procurar o proponente ideal. O desenvolvimento da metodologia utilizando informações Fuzzy permitiram calcular a linguagem vaga facilitando a tarefa de avaliação dos proponentes de forma mais realista e objetiva.

Continua

Método	Referência	Aplicação	Características principais
	(KOUATLI, 2013)	Decisão sob incerteza	Propõe uma Técnica Fuzzimétrica Genética (GFT). Um sistema baseado em regras Fuzzy é uma heurística construída como um conjunto de regras. Geralmente, as regras são do tipo $If\,A \ldots Then\,B$, onde A e B são variáveis Fuzzy. Para sistemas SISO (Entrada Única Saída Única), uma inferência Fuzzy direta pode ser aplicada às variáveis Fuzzy de entrada e saída, submetendo a saída a um processo de defuzzificação. Em um sistema MIMO (Múltiplas Entradas Múltiplas Saídas), as regras são da forma $If\,\{A_1 \ldots A_n\} \ldots Then\,\{B_1 \ldots B_n\}$. Nesse caso, a modelagem do sistema se torna mais complexa e algoritmos especiais são necessários para ajustar o sistema. Em vez de inventar algoritmos para detectar e remover regras inconsistentes, o autor descreve um modelo para evitar a complexidade, introduzindo um sistema híbrido onde a lógica Fuzzy lida com elementos de incerteza e um AG aborda a questão da otimização e ajuste. Na GFT, cada conjunto de regras que descrevem o sistema Entrada $*$ Saída é um cromossomo. Após, a saída defuzzificada é multiplicada por um fator de ponderação para se obter a saída discreta Y_j como resultado da entrada específica X_i. Este fator de ponderação, chamado Fator de Importância de Entrada, é determinado por meio do AHP.
	(ROSTAMI; RAZMI; JOLAI, 2010)	Cadeia de suprimentos	Os autores apresentam um modelo multiobjetivo com restrições de recursos e prazos de entrega. Para resolver o problema de Programação Linear Multiobjetivo Possibilístico foi aplicada uma abordagem em duas etapas. Na primeira, o modelo original é convertido em um equivalente e na segunda etapa é usada uma programação por metas Fuzzy. É proposto um AG para a resolução. Para obter a população inicial do AG, foi utilizado PSO.

Continua

Método	Referência	Aplicação	Características principais
	(AL-BAZI; ÜNEY; ABU-MONSHAR, 2019)	Gestão aeroportuária	A identificação do nível ideal de *overbooking* (prática de vender um serviço em quantidade maior do que a capacidade da empresa) é uma tarefa desafiadora para o setor da aviação civil devido as incertezas. Por isso, os autores propõem um modelo de Programação Linear Fuzzy e AG, para maximizar a receita de uma rede de voos de grande escala com vários trechos, minimizando o número de assentos vazios e o número de passageiros negados.
	(FANTI et al., 1998)	Agendamento de tarefas em sistemas de produção flexíveis	O trabalho trata do problema de agendamento de produção em ambientes complexos. Usando a Teoria dos Conjuntos Fuzzy e AG, este artigo segue duas principais direções. A primeira é a definição de uma medida de desempenho múltipla expressando requisitos conflitantes e imprecisos. É definida uma função de adesão adequada para converter a medida de desempenho em valores fuzzy e computar o índice global. A segunda direção, consiste na síntese de uma técnica de controle multicritério para o sequenciamento de tarefas. Para isso, foi utilizada a combinação de um conjunto de regras heurísticas em um único critério de despacho, através de um algoritmo de tomada de decisão multicritério. Assim, a busca de pesos adequados é feita codificando os pesos das regras em cadeias binárias e usando-os como cromossomos em um processo de otimização genética.
	(WIECEK, 2016)	Controle de estoque e logística sob incerteza	O artigo apresenta uma proposta de aplicação combinada de lógica Fuzzy e AG para controlar o processo de aquisição em empresas. A abordagem apresentada considera o impacto de fatores externos aleatórios na forma de demanda e incerteza de prazo de entrega.
	(LI; XU; GEN, 2006)	Decisão sob incerteza	Neste artigo, foi utilizado o conceito da abordagem de compromisso, que busca soluções comprometidas ao invés da fronteira ótima de Pareto. Assim, foi desenvolvido um AG baseado em simulação aleatória Fuzzy para obter uma solução de compromisso de uma Programação Linear Multiobjetivo com coeficientes Fuzzy.

Continua

Método	Referência	Aplicação	Características principais
	(SARAçOGLU; SüER, 2018)	Manufatura	Apresentam um estudo de caso em uma fábrica de calçados com produção de acordo com as datas de vencimento. O desempenho do sistema de produção é medido pela minimização do tempo do fluxo total e do *makespan* (tempo que decorre do início ao fim do trabalho). Devido à complexidade do problema, as famílias de produtos são decididas de acordo com o tempo de operação para maximizar a utilização em todas as células com o uso do AG. A programação de fluxo de loja é então realizada usando modelagem objetiva de Programação Linear Inteira Mista Fuzzy. São desenvolvidas 3 fases: (1) Alocação da mão de obra a fim de maximizar a produção (MILP); (2) Aplicação do AG para minimizar o desvio da taxa de utilização entre grupos de famílias; (3) Sequenciamento de tarefas para minimizar o *makespan* e o tempo de fluxo. No modelo de programação proposto, uma abordagem de avaliação Fuzzy é proposta para resolver o problema multiobjetivo.
	(HAZRATI; BARZEGA-RINEGAD; SIABY-SERAJEHLO, 2021)	Seleção de fornecedores	Os autores desenvolveram um modelo para seleção de fornecedores considerando dois objetivos - minimizar os custos globais e maximizar a quantidade de produtos encomendados de diferentes fornecedores com base no valor do peso. Os pesos são calculados segundo diferentes critérios para cada fornecedor em diferentes períodos, usando o método Fuzzy-AHP. O modelo proposto foi resolvido usando a restrição epsilon em GAMS e algoritmo genético NSGA II no software MATLAB.
	(SARDOOI et al., 2021)	Gestão de desastres	Os autores descrevem um modelo híbrido que combina mineração de dados e métodos de tomada de decisão multicritério para mapeamento de perigo e vulnerabilidade para avaliar o risco de deslizamento de terra. A probabilidade de deslizamento de terra é mapeada usando três algoritmos de Machine Learning (ML) de última geração - Entropia Máxima, Support Vector Machine e AG — e os resultados são combinados com Fuzzy-AHP para obter o mapa de risco de deslizamento de terra.

Continua

Método	Referência	Aplicação	Características principais
	(LEYVA-LóPEZ et al., 2022)	Seleção de pessoas	A tarefa de seleção de pessoas é modelada como um problema de tomada de decisão multicritério, considerando diversas competências e habilidades para avaliar os candidatos a um cargo específico. Para isso, é utilizado o método Electre III para construir uma relação de outranking fuzzy e NSGA II para explorar tal relação e gerar um ranking como recomendação. Nesse estudo, se observa a utilização de um método multicritério de sobreclassificação com a Teoria Fuzzy e um algoritmo metaheurístico, aprimorando os resultados obtidos ao incorporar a incerteza e otimizar o resultado.
	(VARDI; NEYESTANI; GHORBANIAN, 2019)	Seleção de fornecedores e alocação de pedidos	O objetivo do trabalho é modelar o problema de seleção de fornecedores com base em descontos incrementais e de atacado. Foram formulados dois modelos de Programação Linear Inteira Multiobjetivos, um com possibilidade de desconto parcial existente para a quantidade do pedido e um com possibilidade de desconto de atacado existente para a quantidade do pedido. Na primeira etapa, foi utilizado AHP-Fuzzy para determinar os pesos dos critérios. Na segunda etapa, o problema multiobjetivo foi transformado em um problema de objetivo único através do método do peso. Na terceira etapa, foram desenvolvidos dois algoritmos (um AG e o NSGA). Os valores ideais foram alcançados durante a execução dos dois modelos no *software* GAMS. Utilizou-se o método Taguchi para ajustar os parâmetros dos algoritmos propostos.
Teoria Fuzzy e outras metaheurísticas	(KAYIKCI, 2010)	Seleção de local para centros logísticos de transporte intermodal	Combina AHP Fuzzy e Rede Neural Artificial (ANN) para o processo de tomada de decisão do local mais adequado para implantação de centros logísticos de transporte intermodal. O AHP Fuzzy é utilizado para obter os pesos dos critérios e a ANN é desenvolvida para desempenhar o processo de tomada de decisão, através de uma modelagem no MatLab.

Continua

Método	Referência	Aplicação	Características principais
	(KUO; WIBOWO; ZULVIA, 2016)	Roteamento de veículos	Os autores tratam do problema de roteamento de veículos dinâmico, quando a empresa recebe pedidos continuamente durante o período de atendimento. Com o objetivo de maximizar o número de clientes atendidos e minimizar o tempo de espera dos clientes, considerando o tempo de serviço incerto utilizando a teoria Fuzzy, propõem um algoritmo de otimização por colônia de formigas Fuzzy (ACS).
	(VAHDANI et al., 2012)	Seleção e avaliação de fornecedores	Os autores apresentaram uma nova estrutura para a seleção de fornecedores na indústria cosmética. Um modelo computacionalmente eficiente chamado *Locally Linear Neuro-Fuzzy* (LLNF) é introduzido para prever a avaliação de desempenho de fornecedores. O modelo proposto é treinado por um algoritmo de aprendizagem - o *Locally Linear Model Tree* (LOLIMOT). Este modelo envolve a aprendizagem com base nos dados disponíveis e considera a imprecisão e incerteza das informações, a partir dos conceitos de Redes Neurais e Teoria dos Conjuntos Fuzzy. Os resultados computacionais mostram que o modelo apresentado tem um desempenho melhor do que três técnicas usadas para comparação (rede neural perceptron multicamadas (MLP), rede neural de função de base radial (RBF) e máquina de vetor de suporte de mínimos quadrados (LS-SVM)).

Continua

Método	Referência	Aplicação	Características principais
	(GHAFFARI-NASAB; AHARI; GHAZANFARI, 2013)	Roteamento de veículos	Os autores consideram o problema de roteamento e localização (LRP) com demandas Fuzzy, sendo a demanda do cliente e a capacidade do veículo números Fuzzy triangulares. Após um veículo ter atendido um cliente, a preferência de utilizar o mesmo veículo para o próximo cliente é expressa por $C_r \in [0, 1]$. Quando $C_r = 0$, o veículo deve retornar ao depósito. Quando $C_r = 1$, o veículo deve atender o próximo cliente com certeza absoluta. O índice de preferência do despachante igual a $C_r^* \in [0, 1]$, se o despachante for avesso ao risco escolherá um valor perto de um e se for a favor, escolherá um valor perto de zero. Se a relação $C_r \geq C_r^*$ é cumprida, então o veículo deve ser enviado para o próximo cliente; caso contrário, o veículo deve ser devolvido ao depósito, e outro veículo deverá ser enviado ao próximo cliente. O modelo híbrido integra simulação estocástica (para estimar o valor real das demandas Fuzzy de cada cliente, dado o C_r^*) e algoritmo de recozimento simulado (para obter o custo esperado) para resolver o problema.
	(TAVANA et al., 2021)	Gestão da cadeia de suprimentos	É proposto um modelo multicritério fuzzy integrado e abrangente para seleção de fornecedores na cadeia de suprimentos digital. A abordagem fuzzy BWM é usada para medir os pesos dos critérios digitais. Os métodos Fuzzy MULTIMOORA, Fuzzy COPRAS e Fuzzy TOPSIS são usados como métodos de priorização para ordenar os fornecedores. A heurística maximize agreement heuristic (MAH) é usada para agregar as classificações de fornecedores obtidas a partir dos métodos de priorização em uma classificação de consenso. Esse estudo demonstra que a incerteza das avaliações é uma preocupação na tomada de decisão.

Continua

Método	Referência	Aplicação	Características principais
	(GOODARZI; ABDOL-LAHZADEH; ZEINAL-NEZHAD, 2022)	Avaliação de fornecedores verdes	Esse estudo apresenta um modelo integrado de tomada de decisão multicritério (MCDM) e otimização multiobjetivo para avaliação de fornecedores verdes e alocação ótima de pedidos sob incerteza. O método Fuzzy-Delphi é utilizado para refinar os critérios de avaliação de fornecedores, determinar o peso dos critérios e priorizar os fornecedores com base em índices verdes e resilientes. O método de correlação de Grey e TOPSIS (GC-TOPSIS) são usados para analisar os resultados.
	(OLABANJI; MPOFU, 2021)	Avaliação de projetos	O objetivo da pesquisa é identificar o projeto conceitual ótimo por meio da hibridização de dois modelos de Tomada de Decisão Multicritério (MCDM) - Processo de Hierarquia Analítica Fuzzy (F-AHP) e Análise Relacional Fuzzy Grey (F-GRA). Nota-se nesse estudo a utilização de duas metodologias para incorporar as incertezas das avaliações, a Teoria Fuzzy e a Teoria Grey.
	(KUO; HONG; HUANG, 2010)	Seleção de fornecedores	O sistema proposto é composto por um conjunto de fatores quantitativos (qualidade, finanças, localização, preço, prazo de entrega e produtividade), um modelo PSO-FNN para manipular os dados qualitativos (é posposta uma Rede Neural Fuzzy, na qual os pesos iniciais são gerados pelo PSO) e um modelo de decisão integrada (os resultados das duas etapas anteriores são integrados por meio de uma rede neural artificial *feed-forward* (ANN) com algoritmo de aprendizado de retropropagação de erro (EBP)).

Continua

Método	Referência	Aplicação	Características principais
Outros métodos	(ZHU; ZHU; EMROUZNEJAD, 2020)	Manufatura	DEA é uma metodologia que utiliza a PL para avaliar a eficiência de DMUs. No entanto, quando uma nova DMU surge, toda a avaliação DEA deve ser refeita. Nesse sentido, o estudo combina DEA-CCR com quatro algoritmos de *Machine Learning* (ML): Rede Neural de Retropropagação (BPNN-DEA); AG integrado com Rede Neural de Retropropagação (GANN-DEA); Vetor de Suporte de Máquinas (SVM-DEA); e Vetor de Suporte de Máquinas Aprimoradas (ISVM-DEA). Primeiro, as eficiências das DMUs são avaliadas com DEA-CCR, onde a eficiência é a variável alvo e as variáveis de *input* e *output* são variáveis de recursos. Em seguida, se utiliza ML para analisar as DMUs que apresentam uma eficiência (ou seja, passaram pela análise DEA) e aprender as regras dessas DMUs. Após o treinamento da ML com os dados de treinamento, ele é aplicado às DMUs que não tiveram suas eficiências analisadas por DEA.
	(KANNAN; BALAMURUGAN; SASIKALA, 2021)	Tomada de decisão em grupo para seleção de fornecedores	Os autores propõem uma abordagem metaheurística para desenvolver um modelo de tomada de decisão em grupo. Incorpora as informações heterogêneas por meio de um operador de Média de Potência Ponderada (WPA) para evitar perda de informações. Os pesos são gerados pelo AHP, e esses pesos são otimizados utilizando-se o algoritmo metaheurístico Jaya. Para a escolha da melhor alternativa foi utilizado TOPSIS.
	(KAMALI; GHOMI; JOLAI, 2011)	Cadeia de suprimentos	Os autores desenvolveram um modelo de Programação Não Linear Inteira Mista Multiobjetivo para coordenar um sistema de múltiplos fornecedores e comprador único e propuseram dois algoritmos metaheurísticos para resolver o problema (PSO e o algoritmo *Scatter Search* (SS)). A fim de incorporar critérios qualitativos ao modelo, foi usado AHP para calcular o desempenho total de um fornecedor em critérios qualitativos em termos de peso global (w_i) de cada fornecedor.

Continua

Método	Referência	Aplicação	Características principais
	(LIN; CHU, 2014)	Gerenciamento de linha de montagem de produtos mistos	Neste artigo, é estudado um problema de sequenciamento de linha de montagem para uma indústria de fechaduras em Taiwan. No modelo matemático de Programação Inteira Mista, a função objetivo minimiza os custos de produção, de manutenção de estoque, de atraso do pedido e de trocas na linha de produção. As restrições estipulam condições de trabalho extraordinárias, como horas extras, quantidade de trabalhadores na fábrica, tamanho de estoque e de armazenamento. O complexo espaço de solução torna o programa resultante difícil de resolver usando pacotes de otimização comercial. Portanto, uma heurística baseada em relaxação Lagrangeana foi desenvolvida para resolver este problema de forma eficiente.
	(CHE, 2012)	Seleção de fornecedores	O autor propõe um modelo de duas fases para encontrar as combinações adequadas de fornecedores. No Modelo 1, os fornecedores são divididos em *clusters*, dependendo da demanda do cliente, através de um algoritmo de agrupamento *k-means* e, para corrigir alguns erros do *k-means*, usa Recozimento Simulado (SA). No modelo 2, é obtida a classificação dos fornecedores mais eficientes. Como os procedimentos no Modelo 2 incluem um desconto por quantidade, o que aumenta sua complexidade, o SA também é utilizado, sendo que o nível adequado para cada parâmentro é definido pelo método Taguchi. O AHP é usado para ponderar cada fator (custo, qualidade e tempo do fornecedor).
	(CASTANO et al., 2019)	Roteamento de veículos	O objetivo do trabalho é melhorar as decisões de roteamento, adotando funções de tempo de viagem adequadas entre pares de locais que são construídos com base em informações disponíveis gratuitamente. Primeiro, os dados foram coletados da plataforma *Uber movement* e usados para identificar os padrões de tráfego. A seguir, duas abordagens diferentes são usadas para gerar soluções para um problema de roteamento e agendamento do técnico: Modelo de Programação Inteira (MIP) e um algoritmo memético.

Continua

Método	Referência	Aplicação	Características principais
	(KACZYNSKA; KOLODZIEJCZYK; SALABUN, 2021)	Ranqueamento de enxadristas	Usa o método COMET para o ranqueamento de enxadristas. O método COMET é um método híbrido que combina a tomada de decisão MCDM com método Fuzzy, englobando assim as incertezas do contexto através da *soft computing*.
	(PAMUCAR et al., 2022)	Seleção de centro de recuperação de baterias de veículos elétricos	O autores desenvolveram um modelo integrado de tomada de decisão utilizando o método MACBETH para calcular os pesos dos critérios e métodos de Avaliação de Produto de Soma Agregada de Peso (WASPAS) sob o ambiente fuzzy para avaliar as alternativas e resolver o problema de seleção da localização do centro de recuperação.
	(SADEGHI; MOUSAVI; NIAKI, 2016)	Gestão de estoques	Os autores desenvolvem um modelo de estoque gerenciado pelo fornecedor restrito com demanda Fuzzy para um único fornecedor da cadeia de suprimentos de vários varejistas. Embora existam duas restrições (espaço de armazenamento e número de pedidos), o objetivo deste artigo é encontrar uma solução quase ótima incluindo o tamanho do pedido, a taxa de reposição dos varejistas, a quantidade máxima de itens pendentes nos pedidos dos varejistas e o preço adequado do item para minimizar o custo total do estoque. Um algoritmo imperialista competitivo híbrido (HICA) é usado para achar a solução quase ótima. Foi utilizado SA para validar o algoritmo HICA, sendo que a comparação dos dois algoritmos foi realizada através de TOPSIS.

Fonte: Elaborado pela autora.

B Apêndice 2

Tabela 4: Síntese dos trabalhos que apresentam a abordagem Fuzzy MACBETH

Referência	**Métodos**	**Abordagem**
(DHOUIB, 2014)	MACBETH e Modelo linguístico Fuzzy *2-tuple*	Neste estudo, a análise foi realizada usando uma versão estendida da metodologia MACBETH para levar em conta as avaliações imprecisas e linguísticas fornecidas pelo decisor ao integrar o modelo *2-tuple* que lida com dados de informação não homogêneos. Nesse modelo, as alternativas são avaliadas de forma objetiva, dispensando a avaliação do decisor. Assim, as alternativas apresentam dados de entrada que podem ser valores numéricos, de intervalos ou linguísticos. Após, os dados de entrada são expressos em conjuntos Fuzzy sobre um domínio linguístico específico, chamado *Basic Linguistic Term Set* (BLTS). A informação resultante é convertida em um valor numérico β através de uma função χ. Após, β é traduzido em um modelo linguístico *2-tuple* (S_k,α). Com o resultado do modelo *2-tuple* obtém-se a matriz de decisão e a escala cardinal é obtida com o *software* M-MACBETH. Para determinar os pesos dos critérios, é utilizado o método MACBETH tradicional, no qual o decisor realiza as comparações par a par de acordo com sua preferência.
(ERTAY; KAHRAMAN; KAYA, 2013)	MACBETH e AHP-Fuzzy	Os autores utilizam dois métodos multicritério baseados em avaliações linguísticas, o MACBETH e o AHP-Fuzzy, para avaliar as alternativas de energias renováveis Eólica, Solar, Biomassa, Geotérmica e Hidrelétrica. O objetivo do trabalho é comparar os resultados das duas abordagens. Os autores concluem que, como tanto o MACBETH, quanto o Fuzzy AHP resultaram na mesma ordem de classificação das alternativas energéticas, embora os dois métodos sejam baseados em abordagens diferentes, permite que os tomadores de decisão tomem decisões mais confiantes na seleção de uma alternativa. Se a ordem de classificação fosse diferente, os tomadores de decisão precisariam de uma análise mais profunda, examinando as fontes das diferenças.

Continua

Referência	Métodos	Abordagem
(KAHRAMAN; ONAR; OZTAYSI, 2015)	Revisão de literatura	Os autores realizaram uma revisão de literatura a fim de compreender como a Teoria dos Conjuntos Fuzzy tem sido utilizada em conjunto com métodos muticritério de tomada de decisão. Os resultados da pesquisa demonstraram a forte tendência em se combinar Fuzzy com métodos multicritério, podendo-se citar o Fuzzy-AHP, Fuzzy-ANP, Fuzzy-TOPSIS, Fuzzy-ELECTRE, Fuzzy-PROMETHEE e Fuzzy-VIKOR. No entando, foram encontrados apenas dois artigos na temática do estudo utilizando o MACBETH (Dhouib (2014) e Ertay, Kahraman e Kaya (2013)). Os autores concluem que o método MACBETH ainda não foi expandido para suas versões Fuzzy.
(PISHDAR; GHASEMZADEH; ANTUCHEVICIENE, 2019)	MACBETH e Fuzzy *type-2*	Os autores prepararam uma lista de indicadores de desempenho para aeroportos centrais com base na literatura e realizam a priorização com base no método *Best-Worst* (BWM). O método Fuzzy *Type-2* é utilizado para obter os pesos dos critérios. Após, os cinco critérios que obtiveram maiores pesos são utilizados para avaliar os 19 aeroportos internacionais iranianos através do método MACBETH.
(CARNERO, 2021)	MACBETH, Fuzzy-TOPSIS e Fuzzy *Shannon Entropy*	A autora utilizou o MACBETH para obter os pesos dos critérios subjetivos com base nas preferências do decisor e Fuzzy *Shannon Entropy* para obter os pesos dos critérios objetivos. Posteriormente, Fuzzy-TOPSIS é usado para obter a classificação das alternativas. Por fim, para validar o método foram utilizados PROMETHEE II, ELECTRE III e Fuzzy-VIKOR.
(YURTYAPAN; AYDEMIR, 2021)	MACBETH, Conjunto Fuzzy Intuicionista e *Grey Number*	Os autores introduzem uma nova abordagem para seleção de *software* ERP (*Enterprise Resource Planning*) baseado em MACBETH, considerando *grey numbers* e Conjuntos Fuzzy Intuicionista sob incerteza. No método MACBETH baseado em *grey numbers*, os julgamentos semânticos são transformados em escala de intervalo através de números *grey*, após é feita a *whitenization*, gerando um novo julgamento semântico que será aplicado no método MACBETH clássico. A segunda abordagem proposta é estabelecer um conjunto Fuzzy intuicionista para avaliar os efeitos dos tomadores de decisão no problema de pesquisa, ou seja, para determinar o peso de cada decisor.

Continua

Referência	Métodos	Abordagem
(PACUMAR et al., 2022)	MACBETH e Números Fuzzy	Neste trabalho, os autores propõem um método para ranquear alternativas com base no método MACBETH estendido para uma versão Fuzzy. Inicialmente, a matriz de decisão $m \times n$ é montada, com os n critérios e m alternativas. Na primeira etapa, os valores ponderados de cada critério são obtidos para cada decisor. Os critérios são avaliados com base em uma escala de números Fuzzy triangulares, gerando um vetor de pesos fuzzy para cada decisor. Esses vetores são agregados, gerando, para cada critério, um único vetor de pesos fuzzy. Após, as alternativas são avaliadas com base em uma formulação matemática proposta, gerando um número *crisp* para cada alternativa. Posteriormente, o escore fuzzy MACBETH é calculado para cada alternativa, multiplicando o valor da alternativa pelo vetor de pesos fuzzy de cada critério. O valor global fuzzy de cada alternativa é obtido, esse valor é defuzzificado e é feito o ranqueamento. Nesse estudo, o objetivo não é a obtenção de escalas cardinais para cada elemento de avaliação, mas sim fornecer um método de agregação para o ranqueamento de alternativas, com base na modelagem Fuzzy-MACBETH.
(PACUMAR; TORKAYESH; BISWAS, 2022)	MACBETH e Conjunto Fuzzy Aproximado	Este artigo desenvolve uma nova abordagem de tomada de decisão FRN-MACBETH-CODAS utilizando uma técnica de avaliação baseada em categorias (MACBETH) e um novo método de avaliação baseado em distância combinatória para abordar o problema de seleção de fornecedores durante a pandemia de COVID-19. Devido à alta incerteza, informações vagas e incompletas para problemas de tomada de decisão durante a pandemia do COVID-19, a abordagem de tomada de decisão desenvolvida é implementada sob números aproximados fuzzy. Os pesos dos critérios são obtidos a partir da metodologia MACBETH com números aproximados fuzzy e as alternativas são avaliadas a partir do CODAS com números aproximados fuzzy. Inicilmente, os critérios são ranqueados em ordem decrescente e é montada a matriz de decisão dos critérios. São realizadas as comparações par a par entre critérios e os pesos são obtidos a partir de um modelo de programação linear Fuzzy-MACBETH. Os pesos dos critérios, que são números fuzzy, são posteriormente transformados em números fyzzy aproximados, sendo determinada as distâncias ponderadas, determinando-se a matriz de avaliação relativa, a partir da qual é feita a decisão final.

Continua

Referência	Métodos	Abordagem
(PACUMAR et al., 2022)	MACBETH e Fuzzy-WASPAS	Os autores desenvolvem um novo modelo integrado de tomada de decisão baseado em MACBETH para calcular os pesos dos critérios. Adicionalmente, métodos de *Weighted Aggregated Sum Product Assessment* (WASPAS) em ambiente fuzzy com normas Dombi visaram avaliar alternativas para resolver um problema de seleção de localização de centro de recuperação, considerando aspectos técnicos, ambientais, econômicos e sociais.
(CLIVILLé; MAURIS; BERRAH, 2006)	MACBETH e Integral de Choquet Fuzzy	Os autores utilizam o método MACBETH para quantificar tanto os desempenhos elementares, como os agregados, utilizando integral de Choquet fuzzy para realizar a agregação da avaliação global, a fim de modelar diferentes tipos de comportamento do tomador de decisão.
(CHERIF; FRIKHA, 2022)	MACBETH e Número Fuzzy triangular	Esta pesquisa trata de avaliação de risco em ambiente fuzzy. Para isso, é desenvolvida uma extensão que integra o método MACBETH em um ambiente de tomada de decisão fuzzy, em um processo composto por 5 etapas. No primeiro, são definidos os critérios (n) e as alternativas (m) e é montada a matriz de decisão ($m \times n$). A segunda etapa é a homogeneização que permite a unificação de todos os tipos de dados de entrada, já que o tomador de decisão aplica diferentes tipos de informações para expressar a avaliação. Após, são definidos os escores de superioridade, inferioridade e indiferença, e é calculada a matriz normalizada. O terceiro passo é transformar a informação normalizada em números fuzzy triangulares, onde para cada critério é obtido um par fuzzy (A_k, γ_k), onde A_k é um termo linguístico e γ_k é um valor entre 0 e 1, para cada alternativa. A quarta etapa é a construção da matriz de comparação par a par fuzzy. A diferença de atratividade entre duas alternativas é formulada pela diferença. Portanto, para cada critério, a diferença representa a categoria semântica do MACBETH. Assim, uma matriz de julgamentos categóricos é construída. Por fim, as alternativas são classificadas utilizando-se o *software* M-MACBETH.

Continua

Referência	Métodos	Abordagem
(IMOUSSATEN, 2022)	MACBETH e Integral de Choquet Fuzzy	Neste artigo, uma extensão da metodologia MACBETH a modelos não aditivos é proposta. Em particular, os procedimentos de questionamento e desagregação são estendidos para lidar com identificação de numerosos parâmetros para modelos não aditivos. Primeiramente, é feita a adaptação do procedimento de questionamento MACBETH relacionado à determinação dos pesos dos atributos para a determinação dos coeficientes da transformada de Mobius. Neste procedimento, alternativas particulares são apresentadas ao decisor para expressar preferência relacionada às interações dos pares de atributos. Em seguida, é demonstrada uma medida fuzzy baseada na integral de Choquet representando as preferências coletadas. Por fim, é apresentada a extensão do programa linear no método MACBETH para um não linear, garantindo uma distribuição uniforme do coeficiente caso não sejam fornecidas informações sobre diferença de atratividade.
(SCHEILI; DELPLA; RODRIGUEZ, 2020)	MACBETH, Delphi e Lógica Fuzzy	Neste artigo é proposta uma nova abordagem para desenvolver um índice de qualidade da água potável que permita aos gestores identificar rotineiramente as vulnerabilidades em um sistema de distribuição, levando em conta as prioridades dos gestores e operadores de água. A abordagem é baseada na participação de oito pesquisadores e gestores de recursos hídricos. A entrada desses participantes foi incluída por meio de uma combinação dos métodos Delphi e MACBETH, que foram aplicados a um índice desenvolvido usando Lógica fuzzy.
(TOLGA; BASAR, 2022)	MACBETH, WEDBA e Lógica Fuzzy	Neste estudo, é feita a seleção de tecnologias para três alternativas de fazendas verticais por meio de métodos multicritério. Para isto, foi empregada a lógica fuzzy para superar as incertezas e os métodos WEDBA (Weighted Euclidean Distance Based Approximation) e MACBETH para avaliar alternativas.
(NAJI; MOUSRIJ, 2022)	MACBETH, Integral de Choquet e Lógica Fuzzy	Este artigo apresenta um sistema de medição de desempenho de manutenção, que permite a identificação de todos os indicadores de desempenho relevantes usando uma abordagem de decomposição hierárquica. Posteriormente, os indicadores elementares de desempenho são quantificados por meio de uma abordagem de medição baseada na teoria dos conjuntos fuzzy, que trata da indisponibilidade e falta de confiabilidade dos dados, bem como da limitação de tempo e recursos. Finalmente, um método de agregação baseado no método de MACBETH combinado com a integral de Choquet é usado para medir o desempenho global da manutenção.

Continua

Referência	Métodos	Abordagem
(KARUPPIAH; SANKARA-NARAYANAN; ALI, 2022)	FMACBETH, FAHP e FDM	Os autores propõem uma abordagem integrada para projetar uma Cadeia de Suprimentos Sustentável resiliente, considerando requisitos técnicos e de clientes. A abordagem integrada consiste no método fuzzy Delphi (FDM), processo de hierarquia analítica fuzzy (FAHP), medida de atratividade fuzzy por uma técnica de avaliação baseada em categorias (FMACBETH) e Desdobramento da Função Qualidade (QFD). Os resultados obtidos com FAHP e FMACBETH são incorporados ao QFD para identificar os requisitos técnicos necessários.

Fonte: Elaborado pela autora.