

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

ESTUDO DE RRT PARA O CRESCIMENTO DE CAMINHOS CONDUTIVOS
INSERIDOS EM SÓLIDOS COM GERAÇÃO DE ENERGIA EMPREGANDO O DESIGN
CONSTRUTAL

por

Ricardo Marcolla

Dissertação para obtenção do Título
de Mestre em Engenharia

Rio Grande, junho, 2022

Ricardo Marcolla

“Estudo de RRT para o crescimento de caminhos condutivos inseridos em sólidos com geração de energia empregando o Design Construtal”

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande - FURG, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área de concentração: Modelagem Computacional.

Aprovada em 28/06/2022.

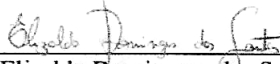
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Emanuel da Silva Diaz Estrada (Orientador – FURG)



Prof. Dr. Jeferson Avila Souza (coorientador – FURG)



Prof. Dr. Elizaldo Domingues dos Santos (FURG)



Prof. Dr. Ulisses Brisolara Corrêa (UFPel)

Rio Grande - RS
2022

Ficha Catalográfica

M321e Marcolla, Ricardo.

Estudo de RRT para o crescimento de caminhos condutivos inseridos em sólidos com geração de energia empregando o *design* construtal / Ricardo Marcolla. – 2022.

66 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Rio Grande/RS, 2022.

Orientador: Dr. Emanuel da Silva Diaz Estrada.

Coorientador: Dr. Jeferson Avila Souza.

1. Teoria construtal 2. Transferência de calor 3. Grafos não-direcionais 4. Caminhos condutivos 5. RRT I. Estrada, Emanuel da Silva Diaz II. Souza, Jeferson Avila III. Título.

CDU 536.2

Catálogo na Fonte: Bibliotecário José Paulo dos Santos CRB 10/2344

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Universidade Federal do Rio Grande (FURG).

Gostaria de agradecer a minha família, amigos e aos meus professores orientador e coorientador que me deram apoio nesta jornada.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

Com o avanço da tecnologia tem-se buscado computadores e sistemas eletrônicos com maior poder de processamento e com menores dimensões. Com esta tendência à miniaturização, o estudo da geometria de cavidades resfriadoras e caminhos condutivos aplicados a técnicas de transferência de calor tem sido um foco devido a sua influência ao resfriar sistemas eletrônicos de pequeno porte. Neste trabalho é apresentado o estudo do algoritmo RRT (do inglês, Rapidly-Exploring Random Tree) para gerar caminhos condutivos inseridos dentro de um sólido com geração interna de calor de formato quadrado empregando design construtal para a redução da resistência térmica adimensional máxima do sistema. É proposta uma estrutura de dados para construir as geometrias, que possa ser utilizada em conjunto ao algoritmo RRT de forma a permitir a aplicação da teoria construtal na construção das geometrias dos caminhos apesar do comportamento não-determinístico do algoritmo RRT. As equações de transferência de calor do sistema serão resolvidas no regime permanente, porém o crescimento do caminho condutivo terá um comportamento pseudo-transiente. Para cada etapa de crescimento do caminho condutivo o algoritmo RRT utiliza a localização da região de maior temperatura do sistema como objetivo do caminho e percorre o sólido gerando um grafo não-direcionado representando o percurso entre o caminho condutivo e este objetivo. A partir deste grafo, o algoritmo controla a etapa de crescimento e modifica a espessura dos ramos do caminho condutivo. O processo se repete até que o caminho condutivo ocupe uma fração de área pré-determinada do domínio. As geometrias geradas seguem o formato aproximado de árvores ou das raízes de uma árvore com seus ramos possuindo espessura variável, que aumenta conforme eles são explorados pelo algoritmo, facilitando acesso ao fluxo de calor e indicando que esses ramos são relevantes para remover calor do domínio. Ao comparar os resultados obtidos neste trabalho com os resultados de trabalhos já estabelecidos na literatura o modelo proposto obteve resultados superiores as geometrias em formato I, X e X não-uniforme e a geometria gerada pelo algoritmo genético usando técnica construtiva, e se aproximou dos resultados otimizados da literatura. Foi observado que pode se modificar o número de vértices do grafo de forma a aumentar a liberdade de crescimento do caminho condutivo se obtendo melhores resultados e redução no desvio padrão. Por fim, apesar da natureza não-determinística do modelo proposto ele oferece resultados satisfatórios com rapidez e baixo custo computacional. O modelo proposto tem espaço para futuras melhorias e a possibilidade de adaptação para problemas com diferentes restrições geométricas.

Palavras-chaves: teoria construtal, transferência de calor, grafos não-direcionais, caminhos condutivos, RRT.

ABSTRACT

The advancement of technology has strengthened the search for smaller computers and electronic devices with more processing power. With the miniaturization trend, the study of the geometry of conductive pathways and convective cavities applied to heat transfer techniques has become a focus due to its impact on the cooling of small electronic systems. This work presents the study of the application of the RRT (Rapidly exploring random tree) algorithm on the generation of conductive pathways, inserted into a square body with internal heat generation applying constructal design to minimize the system's dimensionless thermal resistance. It's proposed a data structure to construct the geometries that can be utilized together with the RRT algorithm in order to allow the construction of the pathway's geometries according to constructal design theory despite RRT's non-deterministic nature. The system's heat transfer equations will be solved on the permanent regime, however the conductive pathway's growth will follow a pseudo-transient behavior. For each of the conductive pathway's growth steps the RRT uses the position of the system's region of highest temperature as the path's objective and searches the heat generating body creating a non-directed graph that represents the path between the objective and the conductive pathway. From this graph, the algorithm controls the growth step and modifies the width of the conductive pathway's branches. The process repeats itself until the conductive pathway has occupied a pre-determined area fraction of the domain. The geometries created have the approximated shape of trees or tree branches, with the objective of facilitating access to the heat that flows through the domain. The branches of this pathway have variable width that grows as they are explored by the algorithm, indicating that these branches are relevant to remove heat from the domain. When comparing the results of this work with the results of works established in literature the proposed model obtained superior results to the I, X and non-uniform X shaped geometries and to the geometry generated by a genetic algorithm using a constructive technique, and got approximated results to the optimized results found in literature. It was observed that the number of vertexes in the graph can be modified in order to obtain better results and lower standard deviation. Finally, despite its non-deterministic nature, the proposed model offers satisfactory results with fast speed and low computational cost. The proposed model has space for future improvements and the possibility of being adapted to problems with different geometric constraints.

Keywords: Constructal theory, heat transfer, undirected graphs, conductive pathways, RRT.

ÍNDICE

1.	INTRODUÇÃO	13
1.1.	Objetivos	21
2.	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	22
2.1	Teoria construtal	22
2.2.	Caminhos de alta condutividade	22
2.3.	Transferência de calor por condução	23
2.4.	Equação da difusão de calor	24
2.5.	Software Gmsh	24
2.6.	Software OpenFOAM	25
2.7.	Grafos	25
2.9.	Algoritmo RRT (Rapidly-Exploring Random Tree)	28
3.	MODELOS MATEMÁTICO E COMPUTACIONAL	32
3.1.	Modelo matemático	32
3.2.	Modelo computacional	35
4.	RESULTADOS	46
4.1.	Teste das geometrias	46
4.2.	Verificação do modelo para a solução	50
4.3.	Análise da influência da variação no número de vértices na resistência térmica adimensional máxima	52
4.4.	Análise dos resultados obtidos em relação as geometrias já estabelecidas na literatura	59
5.	CONCLUSÕES	63
6.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	64

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Configuração mais otimizada em formato Y adaptada de Lorenzini et al. (2011).	14
Figura 1.2 - Exemplos de campos de temperatura de configurações otimizadas em formato de Ψ adaptada de Hajmohammadi (2017).	15
Figura 1.3. – Exemplos de caminhos com formato em árvore aumentando o número de ramos adaptada de Almogbel e Bejan (1999).	15
Figura 1.4. – Exemplos de campos de temperatura para caminhos de formato X uniforme e não-uniforme adaptada de Lorenzini et al. (2013b).	16
Figura 1.5. – Configurações propostas em formato de tridente adaptado de Hajmohammadi et al. (2013).	17
Figura 1.6. – Configurações propostas em formato de múltiplos + adaptada de Feng et al.(2015).	17
Figura 1.7. – Exemplos da geometria com formato de árvore com ramos desiguais, adaptada de Hajmohammadi et al. (2019).	18
Figura 1.8. – Algumas das configurações otimizadas adaptadas de Lorenzini et al.(2014).	19
Figura 1.9. – Exemplos de geometrias obtidas por Avendaño et al. (2018).	19
Figura 1.10. – Exemplo de geometrias geradas, adaptada de Hajmohammadi e Rezaei (2019).	20
Figura 1.11. – Exemplo com variação na geometria do sólido com geração interna de calor, adaptada de Hajmohammadi e Rezaei (2019).	20
Figura 2.1 – Exemplo de caminho condutivo transferindo calor por condução adaptado de Lorenzini et al. (2013a).	23
Figura 2.2. – Grafo com cinco vértices e cinco arestas possuindo um ciclo.	25
Figura 2.3. – Grafo com seis vértices e cinco arestas. Em destaque o caminho entre os vértices A e F.	26
Figura 2.4. – Grafo com pesos nas arestas.	27
Figura 2.5. – Matriz de adjacência do grafo da Fig. 2.4.	27
Figura 2.6. – Exemplo de um RRT explorando um espaço 2D adaptado de Lavalley (1998).	28
Figura 2.7. – Exemplo do ponto aleatório a uma distância maior do que o comprimento máximo de aresta entre dois vértices.	29
Figura 2.8. – Exemplo de passo de crescimento do RRT para o caso da Figura 2.7.	29
Figura 2.9. – Exemplo de passo de crescimento do RRT para o caso da Figura 2.8.	30
Figura 2.10. – Exemplo de uma árvore do RRT.	30
Figura 2.11. – Fluxograma apresentando o funcionamento do algoritmo RRT, adaptado de Lavalley (1998).	31
Figura 3.1. – Representação do problema em domínio bidimensional com as condições de contorno.	32
Figura 3.2. – Fluxograma representando o modelo computacional do trabalho.	36
Figura 3.3. – Domínio físico representado pela estrutura de dados.	37
Figura 3.4. – Exemplos de diferentes subdivisões da área do sistema físico quando representado por matrizes 2x2, 3x3 e 4x4.	37
Figura 3.5. – Grafos que representam o sistema físico adimensional quando representado por matrizes 2x2, 3x3 e 4x4 e com os vértices em suas respectivas subáreas.	38
Figura 3.6. – Comprimento do dissipador de calor e dos lados das subáreas para $\tilde{H}=7\tilde{L}_0$.	38
Figura 3.7 – Grafo representando o domínio físico do sistema referente a subdivisão apresentada na Fig 3.6.	39
Figura 3.8. – Representação de caso onde $\tilde{E}_{min}$ é cinco vezes menor que $\tilde{L}_0$.	40
Figura 3.9. – Representação de uma subárea com um ramo do caminho condutivo, de espessura adimensional mínima, passando por seu centro.	40
Figura 3.10. – Representação em forma matricial de uma subárea.	41
Figura 3.11. – Exemplo de variação de espessura de acordo com o peso da aresta entre vértices adjacentes.	42
Figura 3.12 – Exemplo de um grafo de 49 vértices representando um sistema com $\tilde{H}=7\tilde{L}_0$ cujo vértice destacado, vértice número 7, foi determinado como posição do ponto de maior calor do	

sistema.	43
Figura 3.13 – Exemplo de um possível caminho gerado pelo RRT entre a base do caminho condutivo e o ponto de maior calor do sistema, destacado pelo vértice 7.	43
Figura 3.14. – Exemplo do crescimento de um caminho condutivo.	44
Figura 3.15 – Exemplo de alguns estágios de crescimento de um caminho condutivo até que ele atinge sua área máxima.	45
Figura 4.1. – Grafo representando uma geometria em formato I.	46
Figura 4.2. – Grafo representando uma geometria em formato I atualizado com os pesos das arestas.	47
Figura 4.3. – Matriz da geometria gerada para o grafo da Fig. 4.2.	48
Figura 4.4 – Grafo em formato de T.	48
Figura 4.5 – Geometria gerada a partir do grafo da Fig. 4.4.	49
Figura 4.6. – Grafo de maior complexidade.	49
Figura 4.7. – Geometria gerada a partir do grafo da Fig. 4.6.	50
Figura 4.8 – Geometria simulada ao realizar a verificação do modelo.	51
Figura 4.9 – Exemplos de variação da geometria de acordo com o aumento no número de vértices do grafo.	52
Figura 4.10 – Exemplos de diferentes geometrias obtidas para grafos de tamanhos 7x7(esquerda) e 11x11(direita) com $\Phi = 0,1$ e $\tilde{k}_p = 100$.	53
Figura 4.11 – Exemplos de diferentes geometrias obtidas para grafos de tamanhos 7x7 e 11x11 com $\Phi = 0,1$ e $\tilde{k}_p = 300$.	54
Figura 4.12 – Média de θ_{max} e desvio padrão para os dados da tabela 4.	56
Figura 4.13 –Campos de temperatura com exemplos de diferentes geometrias obtidas ao se realizar testes com grafos de tamanho 21x21 com $\Phi = 0,1$ e $\tilde{k}_p = 100$.	57
Figura 4.14 –Campos de temperatura com exemplos de diferentes geometrias obtidas ao se realizar testes com grafos de tamanho 21x21 com $\Phi = 0,1$ e $\tilde{k}_p = 300$.	57
Figura 4.15 –Campos de temperatura para grafos de tamanho 11x11(esquerda) e 21x21(direita) com $\Phi = 0,2$ e $\tilde{k}_p = 300$.	58
Figura 4.16 – Valores de θ_{max} para as geometrias I, X e X não-uniforme adaptadas de Almogbel e Bejan (1999), Lorenzini et al. (2013a) e Lorenzini et al. (2013b), para $\Phi = 0,2$ e $\tilde{k}_p = 300$.	59
Figura 4.17 – Valor de θ_{max} para a geometria em formato de garfo adaptada de Hajmohammadi et al. (2013), para $\Phi = 0,2$ e $\tilde{k}_p = 300$	60
Figura 4.18 – Valor de θ_{max} para a melhor geometria gerada pelo algoritmo genético, adaptada de Avendaño et al. (2018), para $\Phi = 0,2$ e $\tilde{k}_p = 300$.	60
Figura 4.19 – Valor de θ_{max} para a geometria otimizada gerada pelo algoritmo recursivo, adaptada de Hajmohammadi e Rezaei (2019), para $\Phi = 0,2$ e $\tilde{k}_p = 300$.	61
Figura 4.20 – Valor de θ_{max} para a geometria otimizada em formato de árvore adaptada de Hajmohammadi et al. (2019), para $\Phi = 0,2$ e $\tilde{k}_p = 300$.	61

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Teste de solução independente da malha	51
Tabela 2. Comparação entre os modelos	51
Tabela 3. Comparação entre os resultados do modelo de grafos 7x7 e 11x11	54
Tabela 4. Testes do tamanho do grafo em relação a redução de $\Theta_{\max}$ e desvio padrão	55
Tabela 5. Melhores resultados obtidos para grafos de 21x21	58

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área (m^2)
A_p	Área do caminho condutivo (m^2)
E	Espessura dos ramos da geometria (m)
$\dot{E}$	Taxa de Energia (W)
H	Altura (m)
i, j	Dimensões da matriz
k_0	Condutividade térmica do sólido ($Wm^{-1}K^{-1}$)
k_p	Condutividade térmica do caminho condutivo ($Wm^{-1}K^{-1}$)
L_0	Largura do dissipador de calor (m)
q	Taxa de geração de calor (W)
q''	Fluxo de calor (Wm^{-2})
q'''	Taxa de geração de calor volumétrica (Wm^{-3})
T	Temperatura (K)
x, y	Coordenadas espaciais (m)
W	Espessura do sólido (m)

Símbolos gregos

Φ	Fração de área do caminho condutivo em relação ao sólido
Θ	Resistência térmica adimensional

Sub índices

max	Máxima
min	mínima

Sobrescrito

$\sim$	Variável adimensional
--------	-----------------------

1. INTRODUÇÃO

Equipamentos eletrônicos estão presentes em praticamente todas as áreas de nossas vidas, com o exemplo mais comum destes dispositivos sendo o computador, que varia de tamanhos portáteis a grandes servidores (Chu, 2004). A busca por maior poder computacional e velocidade de processamento em dispositivos cada vez menores e mais compactos resultou na área da eletrônica sendo uma das áreas com maior avanço nos últimas décadas (Moore e Shi, 2014). Esta corrida por miniaturização em conjunto com maior complexidade eletrônica pode ser facilmente observada em telefones celulares que ao longo de sua existência têm se aproximado de computadores miniaturizados.

Desde o desenvolvimento dos primeiros computadores eletrônicos em 1940, o resfriamento de componentes eletrônicos com eficácia tem sido de grande importância ao garantir o avanço de novas tecnologias, Chu (2004). Porém, é documentado que a redução de tamanho e aumento da densidade de componentes eletrônicos e outros circuitos aumentaram a capacidade computacional dos dispositivos em detrimento da dissipação de calor, (Moore e Shi, 2014).

O estudo sobre o resfriamento de sólidos geradores de calor sempre foi um assunto amplamente abordado na área de engenharia, porém, a redução de tamanho de sistemas eletrônicos que acompanha o avanço do poder computacional dificulta a utilização de certas técnicas de resfriamento, (Bejan, 1997).

O trabalho realizado em Bejan (1997) demonstra possíveis aplicações da teoria construtal no resfriamento de pequenos sistemas eletrônicos. Em Bejan e Lorente (2008) é apresentada a eficiência do uso do resfriamento de sólidos geradores de calor usando condução ao se reduzir suas dimensões do domínio. Logo, com o foco em maximizar a transferência de calor através caminhos condutivos é então reforçada a importância que o estudo do impacto que o formato da geometria dos caminhos tem no sistema afim de facilitar a transferência de calor.

Este estudo pode ser explicado pela teoria construtal, Bejan (1997) observa que ao, otimizar a condução de calor em um sólido com geração interna de calor utilizando caminhos condutivos, o formato otimizado obtido em forma de árvore poderia ser explicado e previsto segundo a teoria construtal. Bejan e Zane (2012) como a proposta que tudo aquilo que se move é um sistema de fluxo/escoamento e para este sistema de dimensões finitas persistir no tempo ele dever evoluir de maneira a facilitar o trânsito dos fluxos pelo sistema.

Esta teoria é abordada para contruir geometrias de caminhos condutivos e cavidades resfriadoras em diversos estudos. Lorenzini et. al. (2011) estudou o efeito que a variação dos graus de liberdade de cavidades isotérmicas com formatos T e Y inseridas em um sólido com geração interna de calor tem sobre a resistência térmica global do sistema. Foi observado que as configurações que facilitavam o fluxo de calor do sistema eram as configurações que distribuíam a cavidade de forma mais uniforme ao longo das regiões de temperatura mais alta. A Figura 1.1 mostra o campo de temperaturas para a melhor configuração de formato Y.

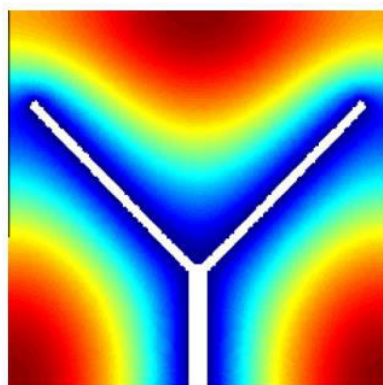


Figura 1.1. – Configuração mais otimizada em formato Y adaptada de Lorenzini et al. (2011).

Lorenzini et al. (2012) deu continuação ao estudo de cavidades convectivas com formato T inseridas em um sólido com geração interna de calor ao variar o formato da cavidade T e também o formato do sólido. Foi observado que tanto para o caso onde apenas o formato da cavidade quanto para o caso onde ambas a cavidade e o sólido tinham suas geometrias alteradas, as melhores configurações eram aquelas que melhor distribuíam a cavidade ao longo dos focos de calor dentro do sólido.

Hajmohammadi (2017) propôs uma geometria com formato Ψ para cavidades isotérmicas. A cavidade proposta foi comparada com todos os formatos de cavidade previamente estabelecidos na literatura (formatos I, T, H, Y, X e T-Y). Variando os graus de liberdade da cavidade foi determinado que cavidade em formato Ψ possui maior eficiência do que todos os formatos analisados o que pode ser justificado pelo seu formato que se aproxima de uma árvore, cujos alguns exemplos de campos de temperatura de diversas configurações otimizadas podem ser observados na Fig 1.2.

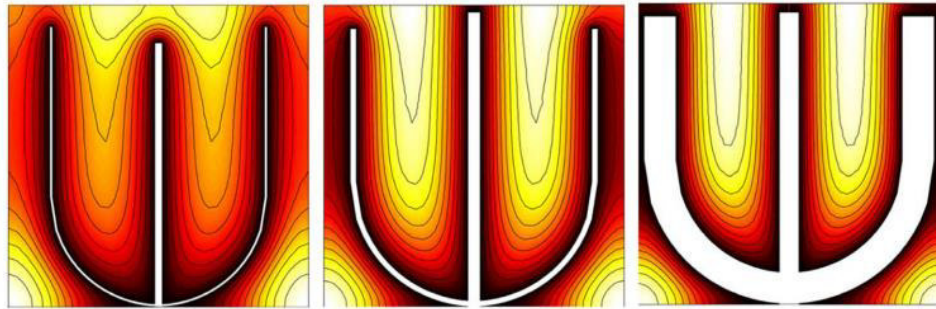


Figura 1.2. – Exemplos de campos de temperatura de configurações otimizadas em formato de Ψ adaptada de Hajmohammadi (2017).

As geometrias sendo estudadas começaram relativamente simples com formatos em I, T ou Y e evoluíram de modo a obter formas que melhor atingem as regiões de maior temperatura do sistema.

Em Almogbel e Bejan (1999) o conceito de teoria construtal é expandido e esta teoria pode utilizada para maximizar a transferência de calor em um sólido com geração interna de calor. Utilizando diversos formatos diferentes de caminhos condutivos, o estudo determinou que o aumento da complexidade do formato do caminho influencia positivamente a redução da resistência térmica do sistema, desde que, as geometrias do caminho adotassem um formato que permitisse o caminho condutivo se expandir de forma a maximizar seu contato com os focos de calor do sistema. Em cada teste, a complexidade das formas estudadas aumentava ao adicionar mais ramos a geometria, como pode ser observado nos exemplos da Fig 1.3.

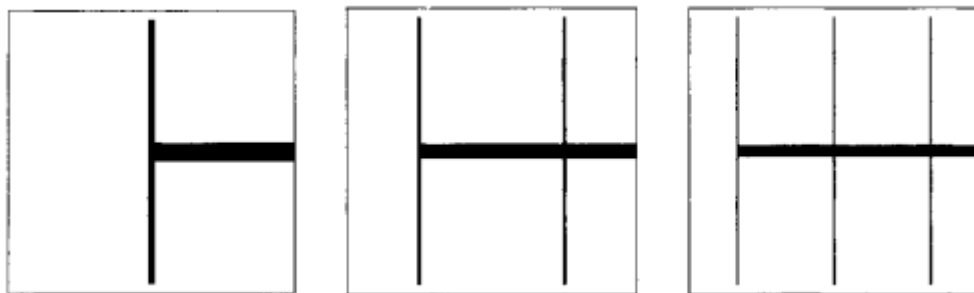


Figura 1.3. – Exemplos de caminhos com formato em árvore aumentando o número de ramos adaptada de Almogbel e Bejan (1999).

O aumento da complexidade das formas estudadas teve impacto positivo na redução da resistência térmica do sistema. Porém, se observou que a diferença entre os valores da resistência

térmica entre uma configuração e outra da geometria diminui conforme a quantidade de ramos do caminho condutivo aumentava. Se concluiu então que ao maximizar a transferência de calor, aumentar a complexidade da árvore pode levar a um caso onde a eficiência da árvore mais complexa não justifica o esforço em gerá-la, ao se comparar com uma árvore mais simples. Também se observou que o formato de árvore não necessita de alto número de ramos para oferecer resultados ótimos.

O estudo de formatos de árvores com base na teoria construtal continuou a ser abordado em Bejan e Lorente (2007), onde a teoria foi aplicada a sistemas de fluxos de forma mais amplas para exemplificar a abrangência de áreas onde poderia se aplicar a teoria construtal com sucesso. Em Lorenzini et al. (2017) um caminho condutivo em formato T foi estudado levando em consideração a introdução de um terceiro material no sistema. Este material agia como uma resistência de contato entre o caminho condutivo e o sólido com geração interna de calor, aproximando o caso estudado dos casos encontrados na realidade. Em Horbach et al. (2014) o estudo de um caminho condutivo com geometria em formato Y teve como resultado que a geometria do caminho variava para atingir o melhor fluxo de calor dependendo da variação da relação entre a resistência térmica do caminho condutivo e o sólido. Em Lorenzini et al. (2013a) foi abordado o estudo de um caminho condutivo com formato X uniforme para resfriar um sólido com geração interna de calor, cujo exemplo de campo de temperaturas pode ser observado na Fig 1.4a. Em Lorenzini et al. (2013b) se estudou o design construtal de um caminho condutivo com formato X não-uniforme obtendo-se melhores resultados devido a melhor distribuição do formato X não-uniforme ao longo das regiões de temperatura mais alta do sistema, cujo exemplo de campo de temperaturas pode ser observado na Fig 1.4b.

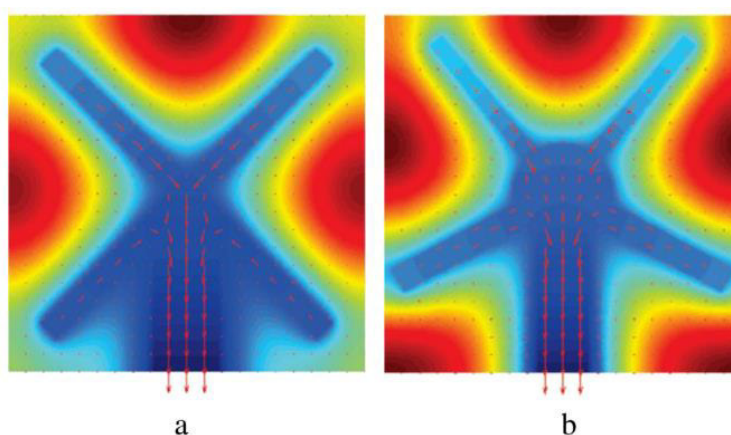


Figura 1.4. – Exemplos de campos de temperatura para caminhos de formato X uniforme e não-uniforme adaptada de Lorenzini et al. (2013b).

Em Lorenzini et al. (2014) a geometria X foi estudada no comparativo entre caminhos condutivos e cavidades isotérmicas utilizando o conceito de teoria construtal. O estudo determinou que a cavidade pode ser considerada um caso específico do caminho condutivo, ambos tendo resultados muito parecidos para a mesma geometria e com a maior relação entre a condutividade do caminho e a condutividade do sólido. Enquanto as mudanças na geometria da cavidade em forma de X tiveram um efeito maior na capacidade de resfriamento do sólido, o caminho condutivo é mais afetado por variações na diferença de condutividade entre o caminho e o sólido.

Continuando o estudo de diversas geometrias para a redução de temperatura em um sólido, novos formatos de caminhos condutivos seguindo a teoria construtal foram abordados. Estes se aproximam mais do formato de árvore, como Hajmohammadi et al. (2013) que apresenta dois tipos de caminhos condutivos com formato de tridente, Fig 1.5.

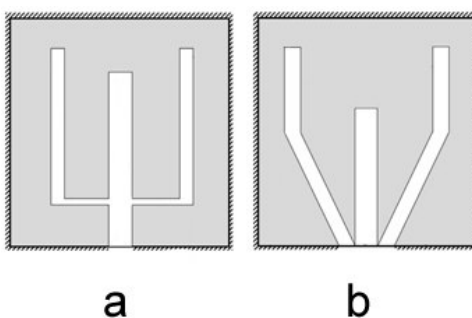


Figura 1.5. – Configurações propostas em formato de tridente adaptada de Hajmohammadi et al. (2013).

Os resultados obtidos foram superiores as geometrias já estabelecidas na literatura, com a geometria apresentada na Figura 1.5b. melhor facilitando o fluxo de calor.

O formato de caminhos condutivos em forma de “+” proposto em Feng et al.(2015) fugiu do padrão ao não apresentar um ponto de início do caminho condutivo no centro de uma aresta do sistema, como pode ser observado na Fig 1.6.

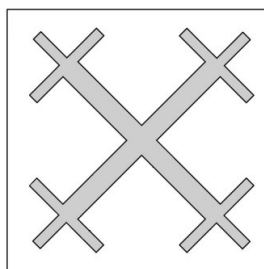


Figura 1.6. – Configurações propostas em formato de múltiplos + adaptada de Feng et al.(2015).

Esta geometria apresentou melhores resultados do que a geometria em forma de X porém inferior aos resultados apresentados pelas geometrias em forma de tridente de Hajmohammadi et al. (2013). Conforme a complexidade das geometrias de caminhos condutivos e cavidades aumentou, novos algoritmos para gerar a geometria foram propostos.

Cetkine e Oliani (2015) estudaram o comportamento da forma de caminhos condutivos ao otimizar a transferência de calor em um sólido com geração de calor não uniforme. Observou-se que os formatos encontrados nos caminhos condutivos para diferentes gradientes de temperatura foram de árvores assimétricas. O estudo foi feito variando os formatos das árvores assimétricas de maneira a maximizar o fluxo de calor saindo do sistema. Foi determinado que os formatos de árvores assimétricas tiveram o comportamento esperado segundo a teoria construtal, porém não foi possível obter uma geometria ótima que atendesse a todos os casos de geração de calor não-uniforme no sistema. Estes caminhos, seguiram o comportamento observado por Bejan (1997). Os formatos apresentados se aproximam da forma de uma árvore encontrada na natureza, onde galhos e raízes crescem em direção de fontes de água e nutrientes.

Em Hajmohammadi et. al. (2019) é proposto um modelo de geometria de caminhos condutivos com formatos de árvore com ramos desiguais para a otimização do resfriamento de sólidos geradores de calor, Fig. 1.7.

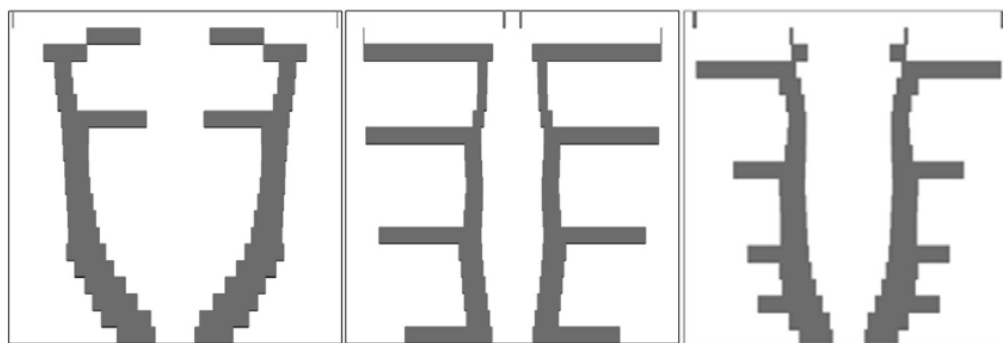


Figura 1.7. – Exemplos da geometria com formato de árvore com ramos desiguais, adaptada de Hajmohammadi et al. (2019).

Os estudos feitos com base na teoria construtal analisaram a influência dos graus de liberdade da geometria no desempenho do sistema e em grande parte se utilizavam de busca exaustiva para encontrar a configuração com melhor escoamento de fluxo de calor do sistema. Porém, recentemente o foco de trabalhos tem sido o estudo da implementação de diferentes algoritmos para a geração da geometria de cavidades resfriadoras e caminhos condutivos.

Procurando estudar o efeito que a resistência térmica adimensional tem sobre o formato de uma cavidade convectiva, Lorenzini et al. (2014) apresenta um algoritmo genético para gerar uma geometria em formato Y para a cavidade em um sólido com geração interna de calor de formato quadrado. Neste algoritmo genético os graus de liberdade da geometria, a simulação e a resistência térmica adimensional correspondem as variáveis de entrada, a função de custo e o custo, respectivamente. Os resultados foram validados através do uso de busca exaustiva onde todas as configurações possíveis são simuladas. Na Fig 1.8 são mostradas algumas das configurações otimizadas apresentadas no trabalho.

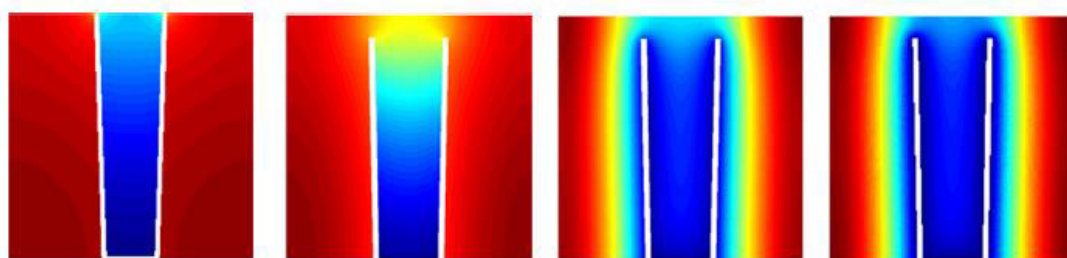


Figura 1.8. – Algumas das configurações otimizadas adaptadas de Lorenzini et al.(2014).

Vianna et al. (2017) propõem um algoritmo evolutivo com base na teoria construtal para construir a geometria de uma cavidade resfriadora. O foco do trabalho não foi a otimização da geometria em relação a redução da resistência térmica adimensional, mas o estudo do comportamento do formato da geometria conforme a cavidade crescia na direção das regiões de mais alta temperatura do sistema.

Em Avendaño et al. (2018) são propostas duas metodologias para a construção de caminhos de alta condutividade inseridos em um sólido com geração interna de calor e formato quadrado com o propósito de minimizar a resistência térmica adimensional do sistema. As metodologias utilizaram conceitos de teoria construtal e foram implementadas através de algoritmos genéticos. A primeira metodologia visa facilitar a construção do caminho utilizando todo o espaço disponível enquanto a segunda metodologia visa construir o caminho distribuindo uma porcentagem do espaço disponível para cada evolução. A Fig. 1.9 apresenta um exemplo de geometria para cada metodologia.

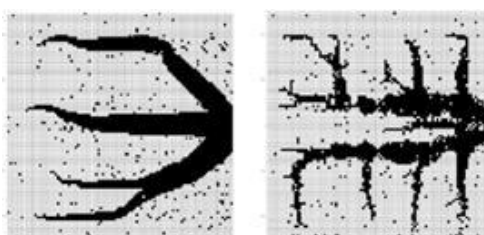


Figura 1.9. – Exemplos de geometrias obtidas por Avendaño et al. (2018).

Ao comparar os resultados entre ambas as metodologias foi estimado que em 93% dos casos a primeira metodologia apresenta maior redução na resistência térmica adimensional do sistema. Porém, embora a primeira metodologia tenha obtido resultados superiores, ambas as metodologias tiveram comportamento semelhante ao gerar geometrias em formato de árvore, se aproximando a padrões encontrados na natureza.

Em Hajmohammadi e Rezaei (2019) é proposto um algoritmo rápido para otimizar a geometria de caminhos condutivos através da localização recursiva dos retângulos que geram o caminho, Fig. 1.10. O tamanho e posição dos retângulos é definido pelo algoritmo de modo a posiciona-los de forma que eles reduzam a temperatura do sistema e que estejam em contato com retângulos previamente já posicionados.

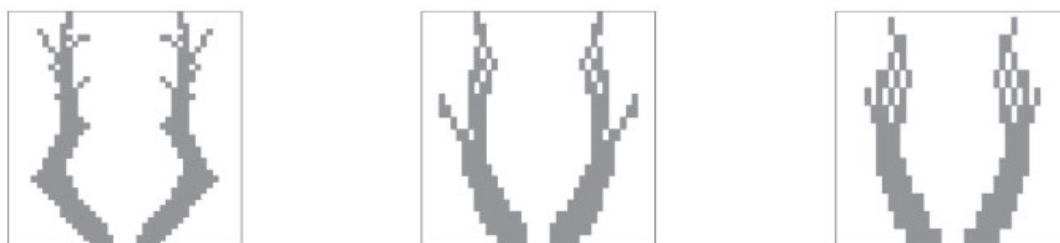


Figura 1.10. – Exemplo de geometrias geradas, adaptada de Hajmohammadi e Rezaei (2019).

Durante o estudo, Hajmohammadi e Rezaei (2019) observaram que a eficiência do algoritmo proposto poderia ser melhorada ao se modificar a geometria do sólido com geração interna de calor, Fig. 1.11.

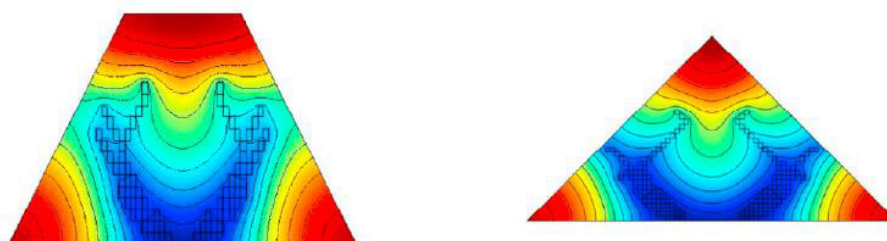


Figura 1.11. – Exemplo com variação na geometria do sólido com geração interna de calor, adaptada de Hajmohammadi e Rezaei (2019).

A busca por meios simples de gerar geometrias complexas, utilizando baixo esforço computacional, tem sido um foco crescente para pesquisas sobre teoria construtal aplicada a problemas de transferência de calor. Logo, o trabalho aqui apresentado torna-se pertinente ao realizar

o estudo da aplicação do algoritmo RRT (Rapidly Exploring Random Tree, do inglês Árvore aleatória de rápida exploração) proposto por Lavalle (1998), para o crescimento de caminhos condutivos utilizando a teoria construtal e ao propor uma estrutura de dados, de baixa complexidade, que pode ser facilmente integrada e modificada para atender diferentes necessidades de futuros trabalhos nesta área de pesquisa.

1.1. Objetivos

O objetivo deste trabalho é estudo da aplicação do algoritmo RRT para o crescimento de caminhos condutivos empregando a teoria construtal para guiar a construção de geometrias em formato de árvore para maximizar a condução de calor em sólidos com geração interna de calor.

Os objetivos específicos do trabalho são:

- implementar um algoritmo de crescimento da geometria baseado no RRT;
- usando a teoria dos grafos, criar um modelo de variação da espessura dos ramos da geometria do caminho condutivo seguindo conceitos da teoria construtal;
- verificar as geometrias geradas pelo modelo;
- analisar o tamanho do grafo do modelo sendo estudado de acordo com os resultados simulados;
- comparar os resultados obtidos em relação a modelos já estabelecidos pela literatura;
- analisar a aplicabilidade do algoritmo baseado em RRT ao design construtal de caminhos condutivos inseridos em um sólido com geração interna de calor;

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Esta seção apresenta a fundamentação teórica sobre os principais temas abordados durante a pesquisa realizada para este trabalho. Os conceitos apresentados devem servir de suporte para auxiliar a compreensão da pesquisa.

2.1. Teoria construtal

Sejam as raízes de uma árvore crescendo em direção aos nutrientes e fontes de água ou os ossos de uma raposa sendo ocos para que a mesma possa caminhar sobre a neve no inverno, segundo Bejan e Zane, (2012) as formas encontradas na natureza não são aleatórias e sim baseadas na física.

Ao definir a teoria construtal, Bejan e Zane, (2012) ditam que tudo aquilo que se move, seja animado ou inanimado, é um sistema de fluxo/escoamento e que para este persistir no tempo ele deve evoluir de maneira a reduzir a resistência das correntes que passam por ele. No caso de um animal, como a raposa ou o ser humano por exemplo, evoluindo de maneira a minimizar o esforço realizado para realizar as ações necessárias para sua sobrevivência.

A teoria construtal pode ser utilizada em diversas áreas científicas, porém o trabalho realizado por Bejan, (1997) demonstrou a aplicabilidade na área de otimização de transferência de calor ao estudar a otimização das formas de caminhos de alta condutividade em um sólido com geração interna de calor. Neste estudo, Bejan (1997) observou que a eficiência da transferência de calor pelos caminhos condutivos aumenta conforme sua geometria era modificada de forma que o caminho se aproximasse dos pontos de foco de calor no sistema.

2.2. Caminhos de alta condutividade

O resfriamento de materiais com geração uniforme de calor é um campo amplamente estudado na literatura, (Lorenzini et al., 2013a), (Lorenzini et al., 2013b), (Hajmohammadi et al., 2013), (Avendaño et al., 2018). Sendo a teoria construtal, comumente utilizada para auxiliar a otimização de caminhos condutivos e cavidades isotérmicas.

As pequenas dimensões dos sistemas sendo abordados e os estudos feitos a respeito do impacto que o formato destas cavidades e caminhos podem ter no resfriamento do sistema demonstram a importância do estudo destas técnicas em conjunto com teoria constructal, Lorenzini

et al. (2011). Caminhos de alta condutividade são comumente utilizados para a dissipação de calor em componentes eletrônicos, (Bejan, 1997).

Tendo um sólido com geração interna de calor com tamanho finito composto por um material de baixa condutividade térmica. Um segundo material, com alta condutividade é inserido no sólido de forma que o calor flui do material com menor condutividade para o material com maior condutividade, que compõe o caminho condutivo para um dissipador de calor, (Lorenzini et al., 2013a). Na Fig. 2.1 pode ser observado o campo de temperaturas para um caso de condução de calor com caminhos de alta condutividade.

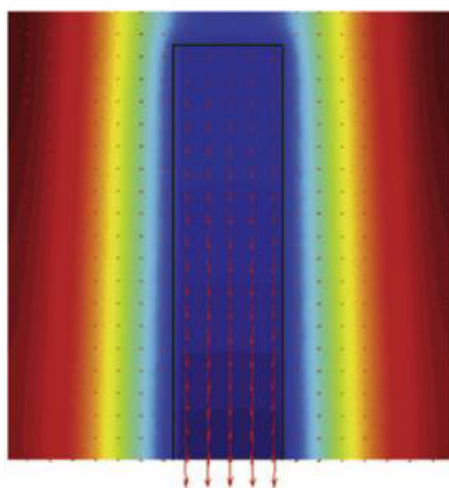


Figura 2.1 – Exemplo de caminho condutivo transferindo calor por condução adaptado de Lorenzini et al. (2013a).

Bejan e Lorente (2008) demonstra que ao reduzir muito o tamanho do sólido, a transferência de calor por condução pode se sobrepor a convecção, devido ao fato de que o espaço disponível deve ser utilizado por material que contribua no resfriamento do sistema e não por dutos que movimentem o fluido.

2.3. Transferência de calor por condução

Sempre que existir um gradiente de temperatura em um meio sólido, o calor fluirá da região de maior temperatura à região de menor temperatura espontaneamente, ou seja, da região mais energética à região menos energética, (Hahn e Ozisik, 2012).

O fluxo de calor transferido através de condução em um material homogêneo é indicada pela Eq. 2.1.

$$q'' = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.1)$$

2.4. Equação da difusão de calor

Toda a energia transferida de um sistema para outro é igual a variação de sua energia interna, portanto, toda a energia é conservada, (Hahn e Ozisik, 2012).

Portanto, através da Eq. 2.2, pode se definir a forma geral da conservação de energia de um sistema através da relação entre a taxa energia acumulada no sistema, a taxa de energia gerada no sistema, a taxa de energia entrando no sistema e a taxa de energia saindo do sistema.

$$\dot{T}E_{gerada} + \dot{T}E_{entra} - \dot{T}E_{sai} = \dot{T}E_{sistema} \quad (2.2)$$

As coordenadas cartesianas da equação da difusão de calor se dão pela Eq. 2.3.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q''' = 0 \quad (2.3)$$

2.5. Software Gmsh

O software Gmsh é um gerador de malha de elementos finitos *open source* que gera malhas para códigos que resolvem a solução discreta através do método dos volumes finitos. Neste trabalho foi utilizada a versão Gmsh 4.0. Este software contém quatro módulos para descrição geométrica, geração da malha, resolução e pós-processamento. A entrada de informações em cada um desses módulos pode ser realizada manualmente, através de um arquivo de texto ASCII com tipo (.geo) utilizando a própria linguagem de programação do Gmsh ou através de API em C, C++ e Python ou através da interface gráfica.

Neste trabalho, o software Gmsh cria uma malha a partir das parâmetros e coordenadas armazenados em um arquivo de texto ASCII (com o tipo de arquivo sendo .geo) gerado pelo algoritmo que gerencia todo o processo sendo simulado. Neste arquivo se encontram as dimensões e

coordenadas que especificam o formato dos materiais que compõe o caminho condutivo e o sólido com geração interna de calor, a discretização da malha e a identificação de quais condições contorno estão ligadas a cada aresta do sistema.

2.6. Software OpenFOAM

OpenFOAM é um software *open source* voltado para a solução numérica de problemas de dinâmica dos fluídos computacional com pré e pós-processamento.

Neste trabalho, primeiramente é informado ao software OpenFOAM as informações a respeito do problema de transferência de calor a ser resolvido, como a condutividade dos materiais envolvidos, as condições de contorno e o passo de tempo a que se deve resolver o problema. Durante a execução do algoritmo, o software recebe a malha do sistema após ela ser gerada pelo Gmsh. Após isso, é calculado o campo de temperaturas do sistema em regime permanente utilizando o método dos volumes finitos, (Maliska, 2017). O solver usado para encontrar a solução é o chtMultiRegionFoam que utiliza o algoritmo PIMPLE, (Passalacqua e Fox, 2011).

2.7. Grafos

Nesta seção serão apresentados os conceitos sobre a teoria dos grafos utilizados nesta pesquisa. De acordo com West (2000), a teoria dos grafos estuda a relação entre os objetos de um determinado conjunto. Grafos são estruturas que possuem um conjunto de vértices e arestas. Arestas são um sub-conjunto de pares não ordenados de vértices, como exemplificado na Fig. 2.2.

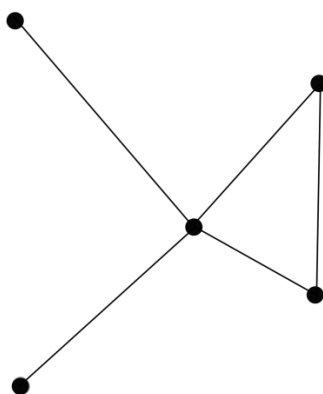


Figura 2.2. – Grafo com cinco vértices e cinco arestas possuindo um ciclo.

Existem diversos tipos de grafos, porém o tipo de grafo utilizado neste trabalho é categorizado como árvore não-direcionada e finita. Um grafo pode ser chamado de árvore se o mesmo for conexo e acíclico. Em um grafo conexo existe pelo menos um caminho entre quaisquer par de vértices do grafo. O grafo pode ser chamado de acíclico quando não existe nenhum ciclo no grafo, ou seja, não existe nenhum caminho onde o vértice inicial e final coincidam (West, 2000).

Em um grafo pode-se definir um caminho a partir do conjunto de arestas que levam de um determinado vértice a outro. Na Fig. 2.3 se apresenta um grafo de seis vértices e cinco arestas com um caminho de três arestas representadas pela cor vermelha e por setas levado do vértice A ao F, com as arestas ligando os vértices F ao D e B ao C não fazendo parte do caminho.

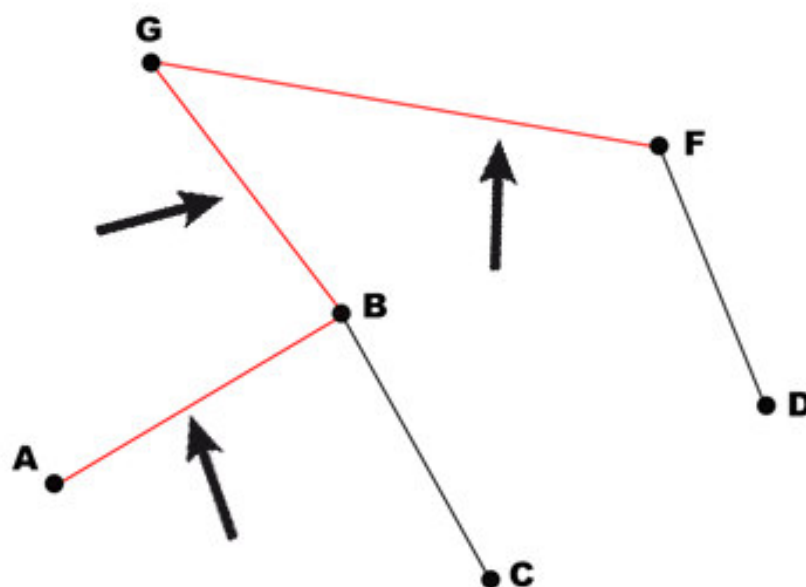


Figura 2.3. – Grafo com seis vértices e cinco arestas. Em destaque o caminho entre os vértices A e F.

Um grafo pode ser direcionado ou não-direcionado, onde em grafos direcionados as arestas permitem movimento apenas em um sentido, (West ,2000). O grafo apresentado na Figura 2.3 é um grafo não-direcionado, ou seja, as arestas deste grafo permitem movimento independente do sentido.

Arestas podem ter pesos relacionadas a elas. A Fig. 2.4 mostra o mesmo grafo da Fig. 2.3 porém, agora as arestas possuem pesos diferentes representados por números destacados em vermelho e nenhum caminho está sendo destacado.

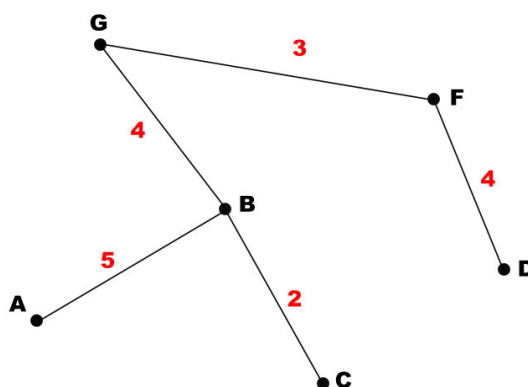


Figura 2.4. – Grafo com pesos nas arestas.

Um grafo finito pode ser representado por uma matriz de adjacência. Dado um grafo com n vértices, se constrói uma matriz com dimensões de n colunas e n linhas, (West, 2000).

Neste trabalho os valores em uma linha i e coluna j representam o peso da aresta que existe entre eles. Caso o valor do peso seja zero então não existe uma aresta conectando os dois vértices. A Figura 2.5 representa a matriz de adjacência do grafo representado na Figura 2.4.

	A	B	C	D	F	G
A	0	5	0	0	0	0
B	5	0	2	0	0	4
C	0	2	0	0	0	0
D	0	0	0	0	4	0
F	0	0	0	4	0	3
G	0	4	0	0	3	0

Figura 2.5. – Matriz de adjacência do grafo da Fig. 2.4.

Como pode-se observar na Fig 2.5, a matriz de adjacência de seis linhas por seis colunas representando o grafo da Fig. 2.4, é simétrica devido ao grafo ser não-direcionado, indicando que as arestas permitem movimento em ambas as direções. A diagonal principal sempre será composta pelo valor zero, pois, o grafo é acíclico.

Neste trabalho, grafos são utilizados devido a capacidade de representar os caminhos gerados pelo algoritmo RRT em formatos de grafos, portanto, permitindo assim o uso de teoria dos grafos para melhor analisar o caminho gerado, assim como facilitar a conversão do caminho para a malha pelo software Gmsh.

2.8. Algoritmo RRT (Rapidly-Exploring Random Tree)

Nesta seção será apresentado o algoritmo de geração de caminhos escolhido para o estudo realizado neste trabalho. Realizando-se a pesquisa sobre os conceitos da teoria construtal, pode-se notar as vantagens oferecidas pelos formatos naturais encontrados em uma árvore. Estas vantagens foram levadas em consideração durante a escolha do algoritmo RRT.

O algoritmo gerador de caminhos Rapidly-Exploring Random Tree (RRT), proposto por Lavalle (1998), gera uma árvore que cresce de forma aleatória e explora o domínio físico do sistema, conforme exemplificado na Fig 2.6, ignorando obstáculos, caso exista algum.

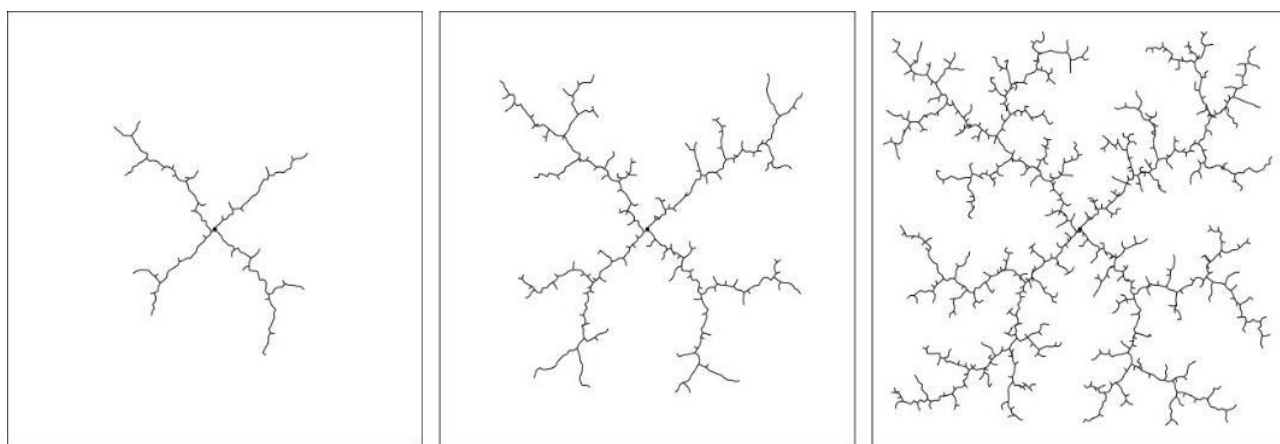


Figura 2.6. – Exemplo de um RRT explorando um espaço 2D (Adaptado de Lavalle (1998)).

O algoritmo tem a vantagem de necessitar de poucas informações para o seu funcionamento, facilitando sua implementação. A flexibilidade do algoritmo RRT para ser moldado de acordo com o problema pode ser observada em Bruce e Veloso (2003) onde RRTs são utilizados para o controle do movimento de robôs em tempo real.

Anos mais tarde, Noreen et al. (2016) citam a capacidade de adaptação de RRTs, mencionado a ampla utilização de RRTs para controle de robôs. Em Viseres et al. (2016) a geração de caminhos é feita aplicando otimização de colônia de formigas ao RRT. Apesar de sua simplicidade, algoritmos

RRT e suas variações tem alta taxa de convergência, (Noreen et al., 2016), capacidade de evitar ciclos e interação com grafos.

O RRT apresentado por Lavalle (1998) tem o funcionamento simples, gerando as árvores com vértices e arestas ao crescer explorando um espaço pré-determinado.

É definido a posição inicial de onde a árvore começa a crescer, a área a ser explorada, um objetivo para a árvore e qual a distância máxima entre dois vértices adjacentes. Também podem ser definidas condições para proibir que a árvore cresça em certas áreas (Lavalle, 1998).

A cada iteração do algoritmo, um ponto aleatório no sistema é escolhido e o RRT faz com que a árvore cresça em direção a ele evitando áreas proibidas. Para isto, se busca qual vértice da árvore é o vizinho mais próximo do ponto, Fig. 2.7.

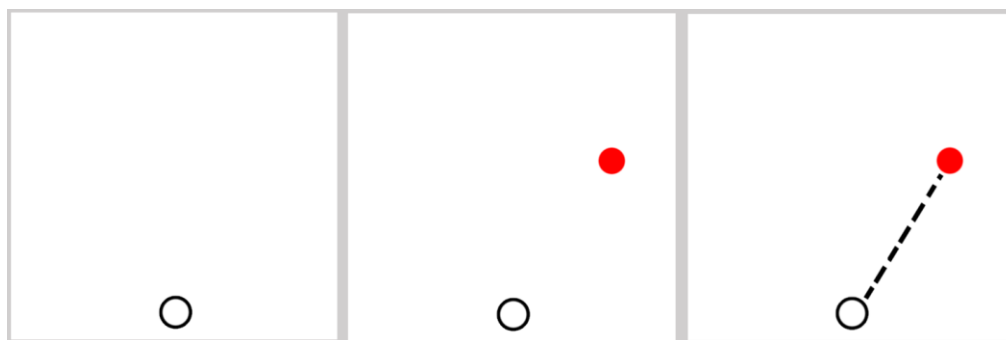


Figura 2.7. – Exemplo do ponto aleatório a uma distância maior do que o comprimento máximo de aresta entre dois vértices.

A partir deste vértice é calculado a posição do novo vértice a ser gerado, na direção do ponto aleatório, e uma aresta é formada entre os dois vértices. Caso a distância entre o vértice vizinho e o ponto aleatório seja menor do que o comprimento máximo definido para cada aresta, o novo vértice é formado exatamente na posição do ponto. Caso o RRT não tenha alcançado o seu objetivo, um novo ponto aleatório é gerado, Fig. 2.8.

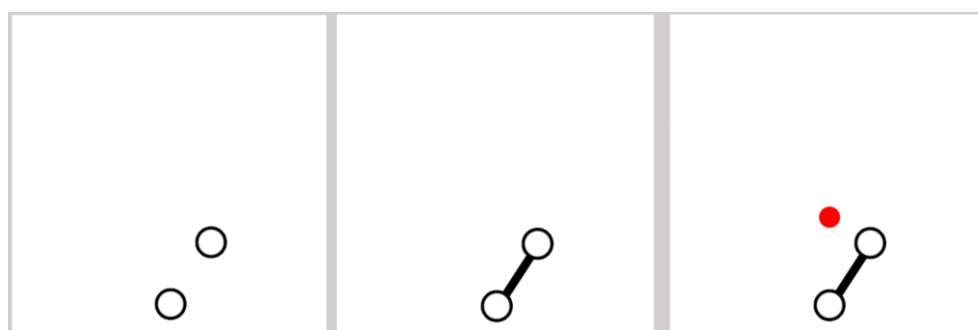


Figura 2.8. – Exemplo de passo de crescimento do RRT para o caso da Figura 2.7.

No exemplo da Fig. 2.8. é então gerado um novo vértice na posição do ponto aleatório, gerando-se uma aresta entre os dois vértices, Fig.2.9.



Figura 2.9. – Exemplo de passo de crescimento do RRT para o caso da Figura 2.8.

Ao crescer desta forma, caso a árvore conclua seu objetivo ou chegue a um número máximo de vértices, o processo se encerra, Fig 2.10. Estas definições são genéricas e possibilitam a utilização do RRT em diversas situações.

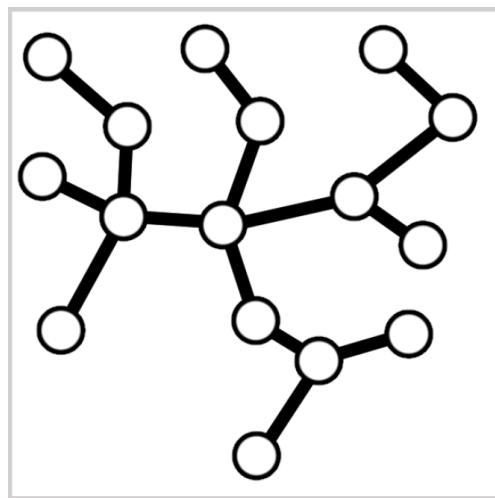


Figura 2.10. – Exemplo de uma árvore do RRT.

A Figura 2.11 apresenta o fluxograma com a funcionamento do RRT.

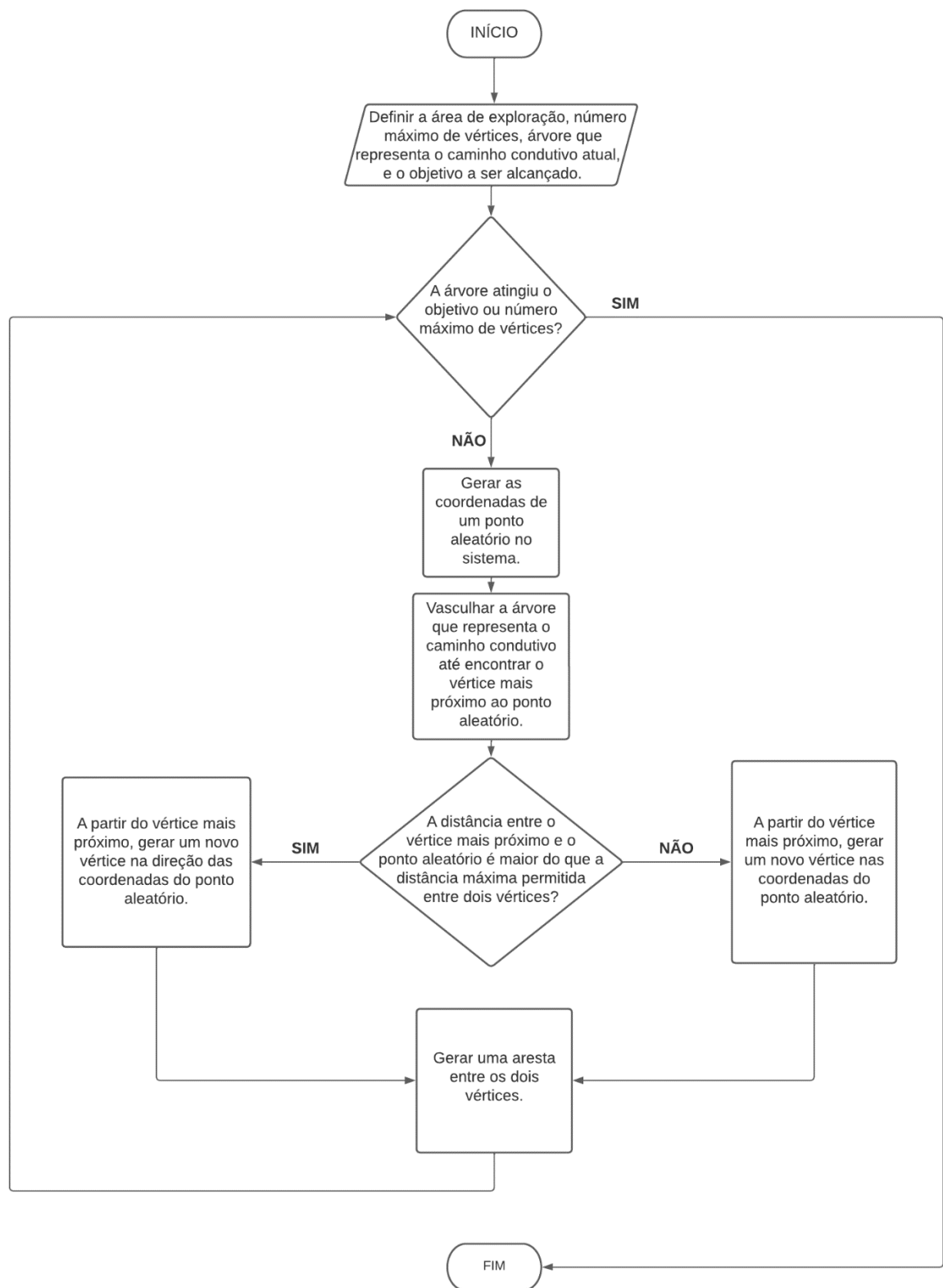


Figura 2.11. – Fluxograma apresentando o funcionamento do algoritmo RRT, adaptado de Lavalley (1998).

3. MODELOS MATEMÁTICO E COMPUTACIONAL

Esta seção apresenta os modelos matemático e computacional propostos neste trabalho.

3.1. Modelo matemático

Considerando um sólido com formato retangular de altura H e largura L com geração de calor uniforme. A configuração do sólido é bidimensional com espessura W suficientemente longa em comparação as dimensões H e L para justificar a solução em domínio 2D. O caminho com material de condutividade k_p está inserido no sólido com condutividade térmica mais baixa k_0 , Fig 3.1.

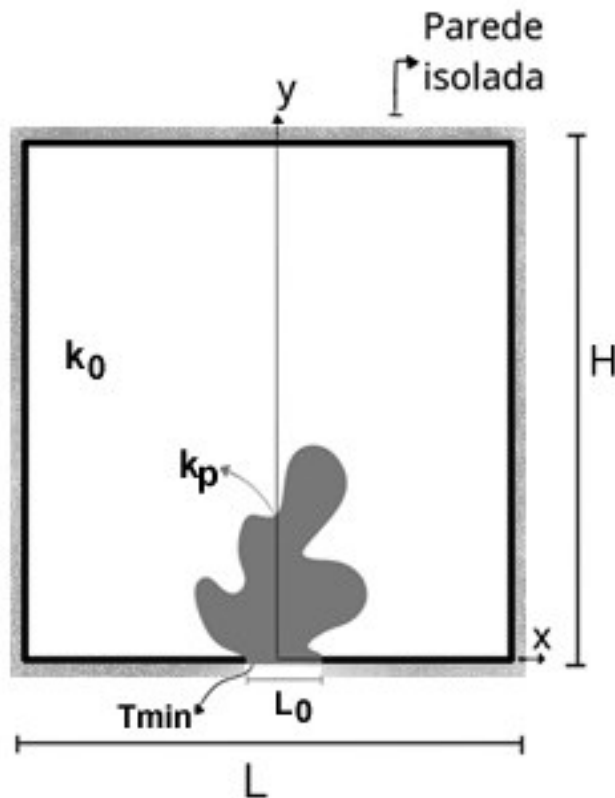


Figura 3.1. – Representação do problema em domínio bidimensional com as condições de contorno.

O calor gerado é removido por um dissipador localizado no centro da base do sólido, também servindo como base do caminho condutivo com largura L_0 . O dissipador possui temperatura T_{min} . Todas as outras paredes externas do sólido estão perfeitamente isoladas. A geração de calor volumétrica uniforme é dada por:

$$q''' = \frac{q_0}{(A - A_p)W} \quad (3.1)$$

onde A_p a área ocupada pelo caminho condutivo e a área total A é dada por:

$$A = H.L \quad (3.2)$$

Para o problema de condução de calor em duas dimensões em regime permanente, com geração de calor constante, a equação da difusão do calor no material de baixa condutividade onde T é a temperatura e k_0 é a condutividade térmica do sólido com geração interna de calor:

$$k_0 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_0 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + q''' = 0 \quad (3.3)$$

e no material de alta condutividade onde k_p é a condutividade térmica do caminho condutivo:

$$k_p \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_p \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (3.4)$$

a fração de área do caminho condutivo é calculada:

$$\Phi = \frac{A_p}{A} \quad (3.5)$$

a resistência térmica adimensional é dada por:

$$\Theta = \frac{T - T_{min}}{q''' A / k_0} \quad (3.6)$$

as dimensões do sistema na forma adimensional são dadas por:

$$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{H}, \tilde{L}_0, \tilde{A} = \frac{x, y, H, L_0, A}{H} \quad (3.7)$$

A relação entre a condutividade do caminho condutivo e o material do sólido com geração de calor é definido como:

$$\tilde{k}_p = \frac{k_p}{k_0} \quad (3.8)$$

As condições de contorno são dadas por:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{x}} = 0 \text{ para } \tilde{x} = -\frac{\tilde{L}}{2} \text{ e } 0 < \tilde{y} < \tilde{H} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{x}} = 0 \text{ para } \tilde{x} = \frac{\tilde{L}}{2} \text{ e } 0 < \tilde{y} < \tilde{H} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{y}} = 0 \text{ para } \tilde{y} = 0 \text{ e } -\frac{\tilde{L}}{2} < \tilde{x} < -\frac{\tilde{L}_0}{2} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{y}} = 0 \text{ para } \tilde{y} = 0 \text{ e } \frac{\tilde{L}_0}{2} < \tilde{x} < \frac{\tilde{L}}{2} \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{y}} = 0 \text{ para } \tilde{y} = \tilde{H} \text{ e } -\frac{\tilde{L}}{2} < \tilde{x} < \frac{\tilde{L}}{2} \quad (3.13)$$

E para o dissipador de calor:

$$\theta = 0 \text{ para } \tilde{y} = 0 \text{ e } -\frac{\tilde{L}_0}{2} \leq \tilde{x} \leq \frac{\tilde{L}_0}{2} \quad (3.14)$$

A análise que permite o cálculo da resistência térmica adimensional, em função da geometria, é dada pela solução numérica das Eqs. 3.3 e 3.4 na forma adimensional, dadas pelas Eqs. 3.15 e 3.16, ao longo da região de alta condutividade:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{y}^2} + 1 = 0 \quad (3.15)$$

$$\tilde{k}_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{x}^2} + \tilde{k}_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{y}^2} = 0 \quad (3.16)$$

3.2. Modelo computacional

Nesta seção são apresentados os métodos computacionais utilizados para a resolução do problema proposto neste trabalho cujo fluxograma pode ser observado na Fig. 3.2.

A estrutura de dados implementada para a resolução do problema foi programada na linguagem C++. No fluxograma da Fig. 3.2 a etapa de definição dos valores de $\tilde{k}_p$, $\tilde{L}_0$, $\tilde{E}_{min}$ e Φ é a única etapa que deve ser realizada manualmente.

O primeiro parâmetro de entrada a ser arbitrado é o parâmetro de relação entre a condutividade do caminho condutivo e o material do sólido com geração de calor, escolhendo-se valores de k_0 e k_p que gerem o valor desejado $\tilde{k}_p$.

A condutividade do material de baixa condutividade e a do caminho condutivo são então definidos no software OpenFOAM.

Logo, iniciando-se a estrutura de dados tem-se a representação do sistema como um sólido retangular, de altura H e largura L onde $H=L$. O domínio físico do sistema representado na forma adimensional é apresentado na Fig 3.3.

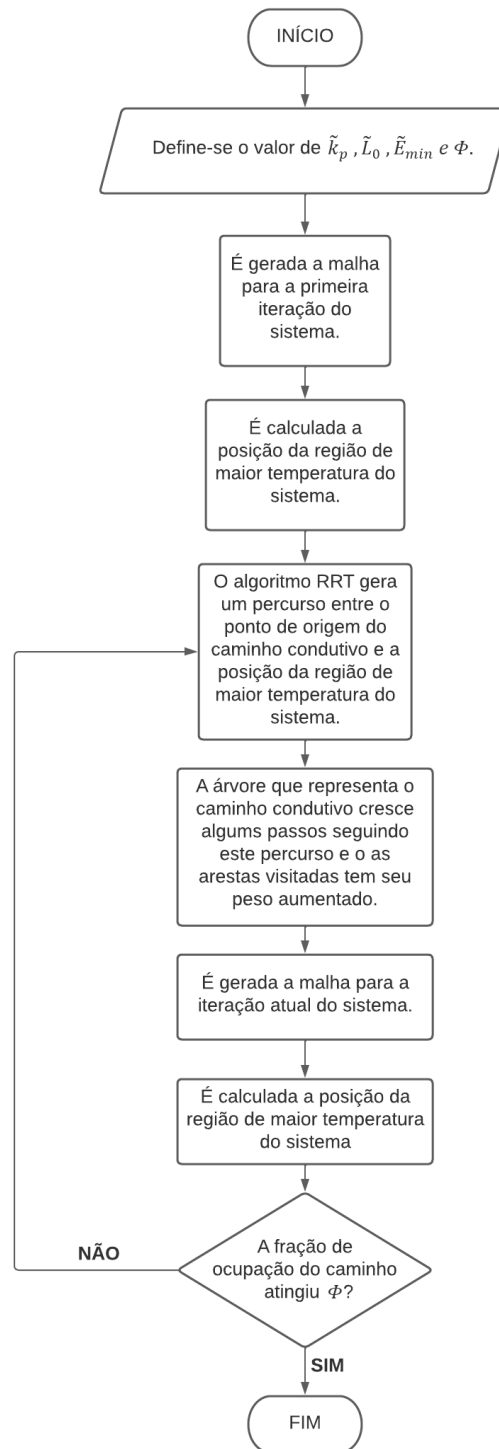


Figura 3.2. – Fluxograma representando o modelo computacional do trabalho.

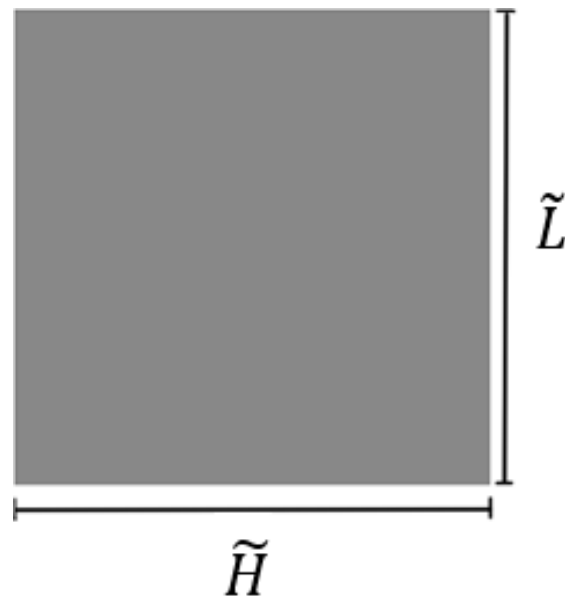


Figura 3.3. – Domínio físico representado pela estrutura de dados.

A estrutura de dados representa o domínio físico do sistema de forma adimensional em relação a um grafo não direcionado em formato quadrado. As dimensões do grafo podem ser representadas de forma matricial e dividem a representação da área do domínio físico em um conjunto de áreas menores, como exemplificado na Fig 3.4.

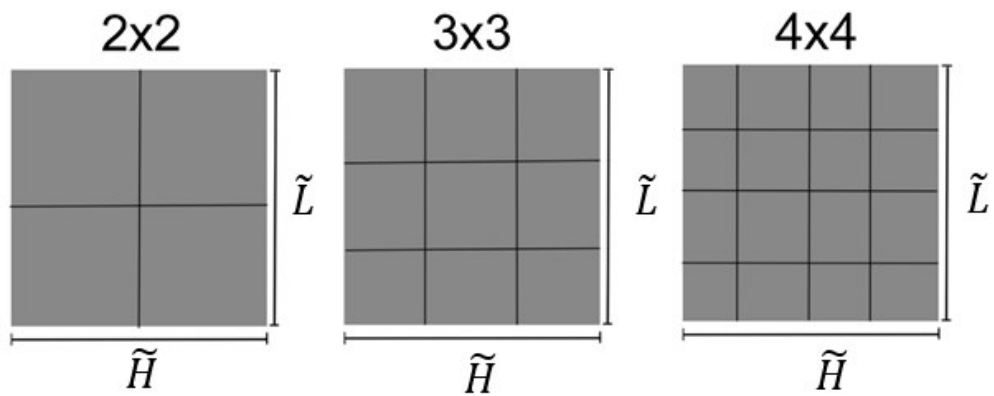


Figura 3.4. – Exemplos de diferentes subdivisões da área do sistema físico quando representado por matrizes 2x2, 3x3 e 4x4.

O número de vértices do grafo não-direcionado é igual ao número de subdivisões da área total. Cada vértice do grafo se encontra no centro de uma das subáreas. A Fig 3.5

apresenta os grafos formados para as subdivisões apresentadas na Fig. 3.4 com os vértices sobrepostos as subáreas que representam.

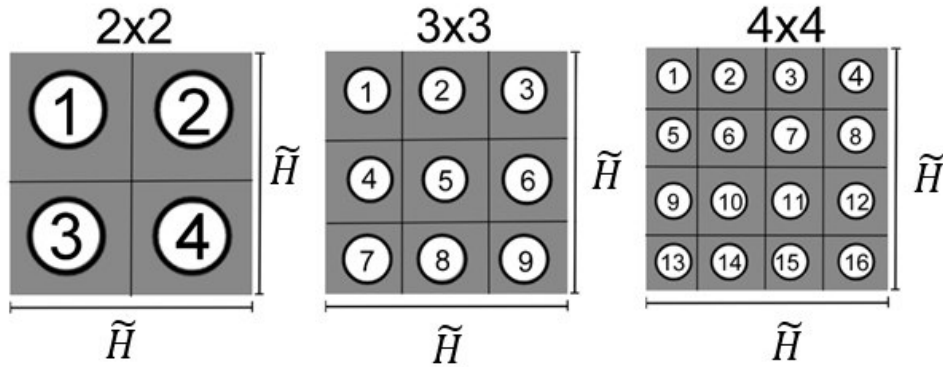


Figura 3.5. – Grafos que representam o sistema físico adimensional quando representado por matrizes 2x2, 3x3 e 4x4 e com os vértices em suas respectivas subáreas.

O parâmetro que determina as dimensões do grafo é o comprimento adimensional do dissipador de calor encontrado no centro da base da superfície inferior do sólido $\tilde{L}_0$ em relação a $\tilde{H}$. O comprimento adimensional dos lados das subáreas quadradas representadas pelos vértices do grafo é igual ao comprimento adimensional $\tilde{L}_0$.

Neste trabalho, definiu-se que a relação entre $\tilde{L}_0$ e $\tilde{H}$ deve ser tal que o número de subdivisões na superfície inferior do sólido seja de valor ímpar para que o dissipador de calor se encontre no centro da superfície inferior do sólido, porém, o algoritmo pode ser utilizado com diferentes posições do dissipador de calor. A Fig 3.6. apresenta um exemplo onde $\tilde{H}=7\tilde{L}_0$.

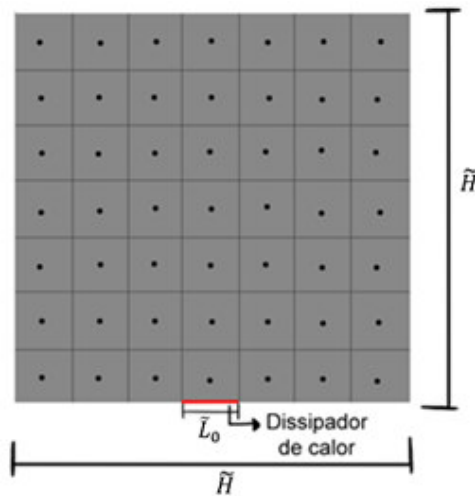


Figura 3.6. – Comprimento do dissipador de calor e dos lados das subáreas para $\tilde{H}=7\tilde{L}_0$.

Para o caso apresentado na Fig. 3.6 o grafo que representa o domínio físico do sistema é apresentado na Fig. 3.7. O vértice relacionado a posição do dissipador de calor é definido como a raiz da árvore que representa o caminho condutivo. O grafo e a representação matricial não interferem diretamente com a malha do domínio físico do sistema, podendo ser observados como diferentes camadas de abstração do modelo se sobrepondo.

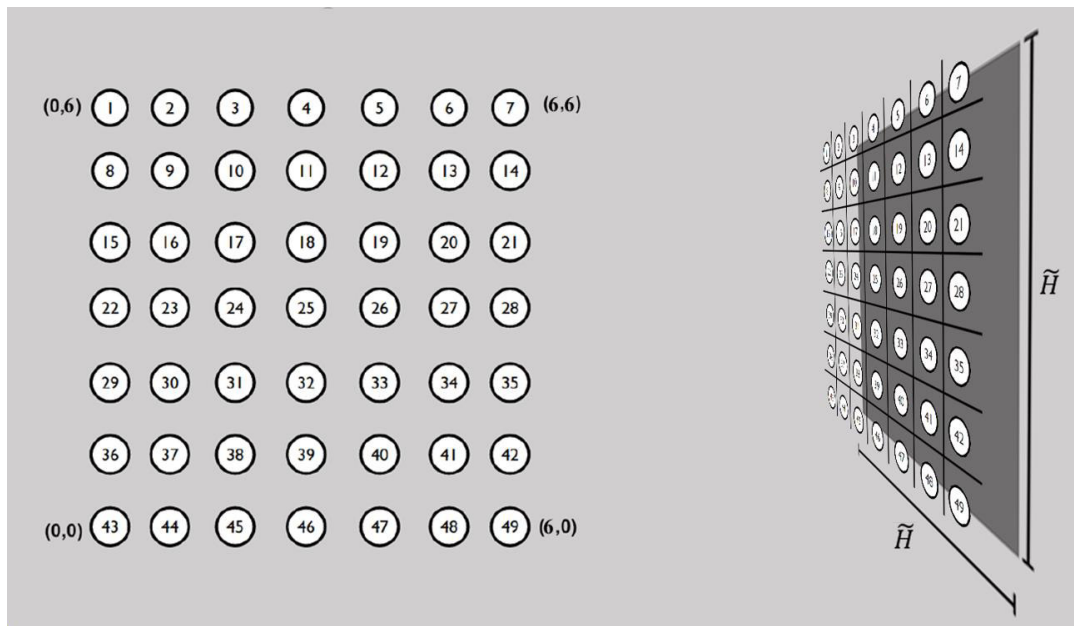


Figura 3.7 – Grafo representando o domínio físico do sistema referente a subdivisão apresentada na Fig 3.6.

Neste trabalho, o comprimento $\tilde{L}_0$ é considerado como a espessura adimensional máxima dos ramos do caminho condutivo. Portanto, a espessura adimensional mínima dos ramos da geometria em forma de árvore, $\tilde{E}_{min}$, deve ser inferior ou igual $\tilde{L}_0$.

A representação de uma subárea que contém vértice em seu centro pode ser subdividida de acordo com o valor de $\tilde{E}_{min}$, onde neste trabalho, $\tilde{E}_{min}$ é cinco vezes menor que $\tilde{L}_0$, portanto a representação de uma subárea pode ser dividida em vinte e cinco áreas menores, como apresentado na Fig. 3.8.

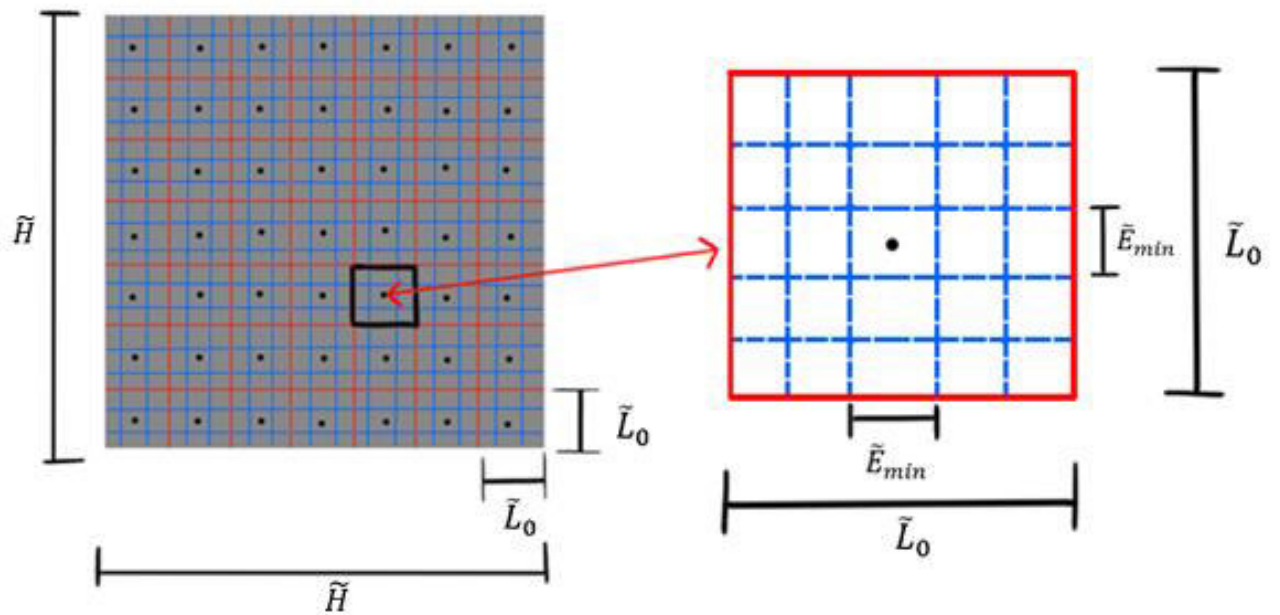


Figura 3.8. – Representação de caso onde $\tilde{E}_{min}$ é cinco vezes menor que $\tilde{L}_0$.

Neste trabalho, a relação entre $\tilde{E}_{min}$ e $\tilde{L}_0$ foi definida de tal modo que seu valor seja ímpar para que o ramo do caminho condutivo cresça no centro da subárea.

A Fig 3.9 apresenta uma subárea onde o ramo do caminho condutivo com espessura adimensional mínima, destacado pela cor verde, está passando por seu centro.

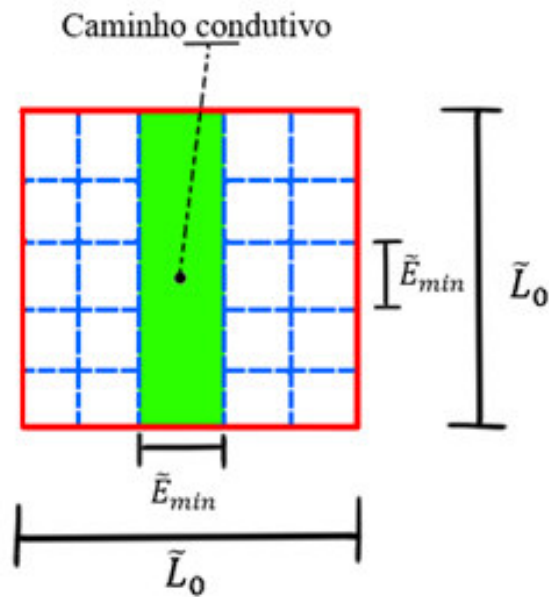


Figura 3.9. – Representação de uma subárea com um ramo do caminho condutivo, de espessura adimensional mínima, passando por seu centro.

Esta subárea pode ser representada de forma matricial onde posições com valor 1 são referentes a uma fração de área ocupada pelo caminho condutivo e posições com valor 0 são posições ocupadas pelo material de baixa condutividade. A Fig. 3.10 apresenta um exemplo para uma subárea onde $\tilde{E}_{min} = 5\tilde{L}_0$.

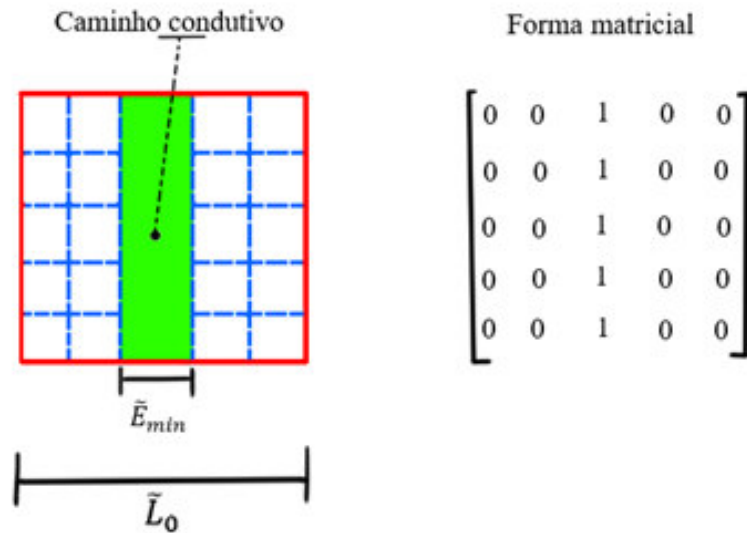


Figura 3.10. – Representação em forma matricial de uma subárea.

No grafo que representa o domínio físico do sistema, o peso das arestas entre dois vértices adjacentes define se o caminho condutivo está passando por aquelas subáreas ou não e a espessura daquele ramo específico do caminho condutivo naquela posição. Arestas com peso nulo representam áreas onde o caminho condutivo não está crescendo.

O valor arbitrado de $\tilde{E}_{min}$ determina quantos graus de crescimento da espessura do caminho condutivo são desejados. A espessura do ramo do caminho condutivo cresce do centro da subárea até as bordas da subárea, respeitando a espessura máxima. Neste trabalho, existem três graus de variação de espessura em um ramo do caminho condutivo em uma determinada subárea. Estas espessuras são indicadas pelos pesos das arestas entre os vértices com valores de 1, 2 ou 3, Fig. 3.11.

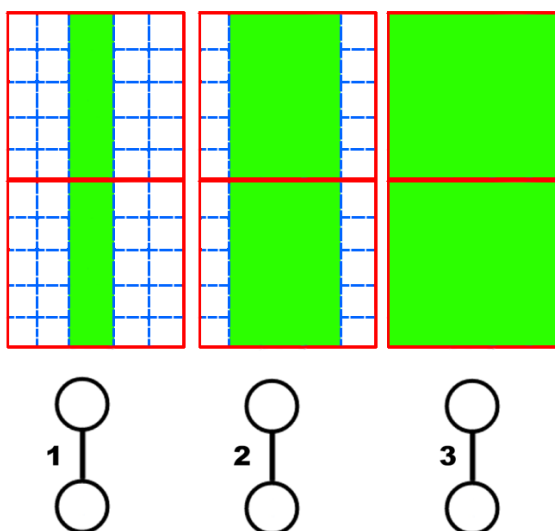


Figura 3.11. – Exemplo de variação de espessura de acordo com o peso da aresta entre vértices adjacentes.

Os ramos do caminho condutivo crescem apenas em x ou y mas não em ambas as dimensões em um mesmo passo. Finalmente deve ser definida a restrição Φ , a fração de área máxima que pode ser ocupada pelo caminho de alta condutividade em relação a área total do sistema.

Com todas configurações do algoritmo definidas, inicia-se o algoritmo e é gerado um arquivo de texto com os parâmetros da geometria do sistema para o passo inicial, onde o caminho condutivo tem apenas sua base. Esse arquivo é enviado para o Software Gmsh através de um comando do terminal que gera a malha para solução numérica do problema. As discretizações realizadas nesta malha são independentes das subdivisões realizadas na representação do sistema físico e nas subáreas que foram realizadas pela estrutura de dados. Portanto, as discretizações realizadas na malha interferem no número de volumes a serem resolvidos nas equações de transferência de calor para o sistema, enquanto as divisões realizadas na representação do sistema pela estrutura de dados apenas delimitam o formato da geometria gerada pelo caminho condutivo no sistema.

A malha do sistema é então enviada ao software OpenFOAM solucionar as equações de transferência de calor, calcular o campo de temperaturas do sistema em regime permanente e determinar as coordenadas da posição da região de maior temperatura do sistema.

Após isso, a estrutura de dados converte estas coordenadas para a posição de um vértice no grafo que representa o domínio físico do sistema e define este vértice como objetivo de

crescimento do caminho condutivo. A Figura 3.12 apresenta um exemplo de um grafo de quarenta e nove vértices cujo vértice destacado de número 7 representa o ponto de maior calor do sistema nesta iteração.



Figura 3.12 – Exemplo de um grafo de 49 vértices representando um sistema com $\tilde{H}=7\tilde{L}_0$ cujo vértice destacado, vértice número 7, foi determinado como posição do ponto de maior calor do sistema.

A estrutura de dados inicia uma iteração do algoritmo de geração de caminhos RRT. O algoritmo RRT explora a área do sólido com geração interna de calor e gera um grafo que representa o percurso que o caminho condutivo deve crescer para atingir o ponto de maior calor do sistema, Fig 3.13.

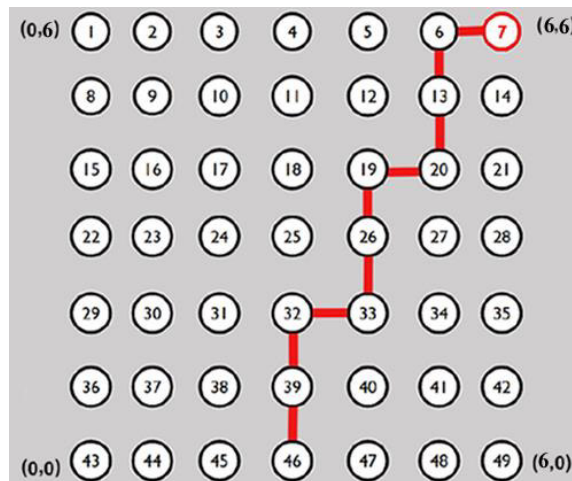


Figura 3.13 – Exemplo de um possível caminho gerado pelo RRT entre a base do caminho condutivo e o ponto de maior calor do sistema, destacado pelo vértice 7.

Neste trabalho, é simulado um regime pseudo-transiente onde ao encontrar o percurso entre o caminho condutivo e o ponto de maior calor do sistema, o caminho condutivo cresce apenas três passos neste caminho. A definição deste número de passos foi feita neste trabalho para simular o processo de crescimento de uma raiz ou de um ramo de uma árvore ao longo do tempo conforme o mesmo busca alcançar regiões com maior concentração de nutrientes. E parâmetro é definido pelo conceito de teoria construtal de que para um sistema de escoamento/fluxo persista, ele tem que evoluir ao longo do tempo de maneira a facilitar o acesso aos fluxos que passam pelo sistema e visa utilizar a natureza determinística do design construtal para diminuir o impacto da natureza não determinística do RRT.

Cada passo se dá pela atualização dos pesos das arestas entre os vértices que foram acessados pelo caminho condutivo ao crescer. Passos de crescimento anteriores não são esquecidos pelo sistema e ao realizar um novo passo de crescimento, o caminho condutivo cresce a partir das áreas que o mesmo já havia alcançado anteriormente. Arestas que foram acessadas apenas uma vez possuem peso 1, arestas que foram acessadas mais de uma vez e menos de cinco, tem peso 2 e arestas que foram acessadas cinco vezes ou mais tem peso 3. A Figura 3.14 apresenta a atualização de pesos entre as arestas ao realizar passos entre dois vértices, seguindo o percurso apresentado na Fig 3.13.

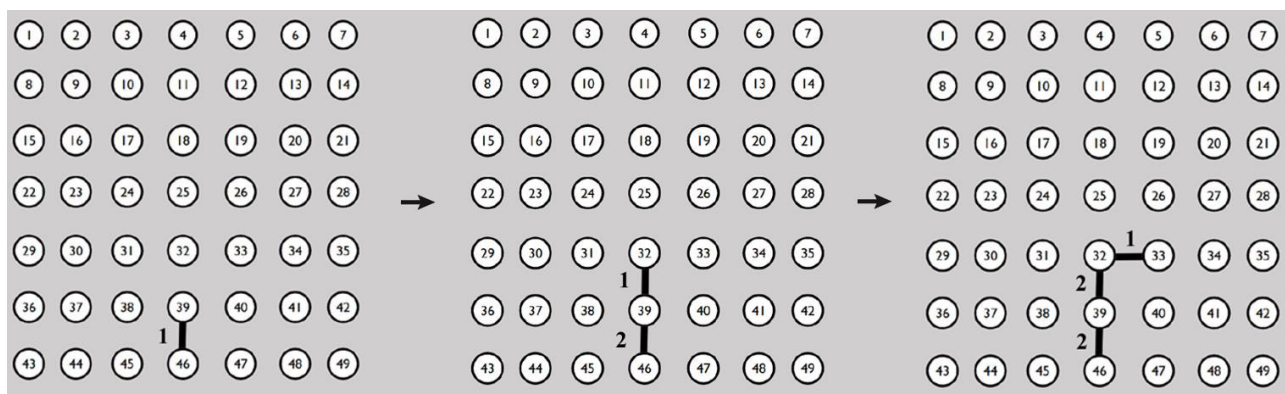


Figura 3.14. – Exemplo do crescimento de um caminho condutivo.

Este comportamento visa simular as raízes de uma árvore, que engrossam ao crescer na direção de focos de nutrientes. Com o novo grafo que representa o domínio físico de sistema definido, a estrutura de dados gera uma malha numérica e o ciclo se repete até que o caminho condutivo alcançar a fração de ocupação definida pela restrição Φ . Um exemplo deste processo pode ser observado na Fig. 3.15 onde são apresentados alguns estágios de crescimento de um caminho condutivo até que ele atinja o valor de Φ .

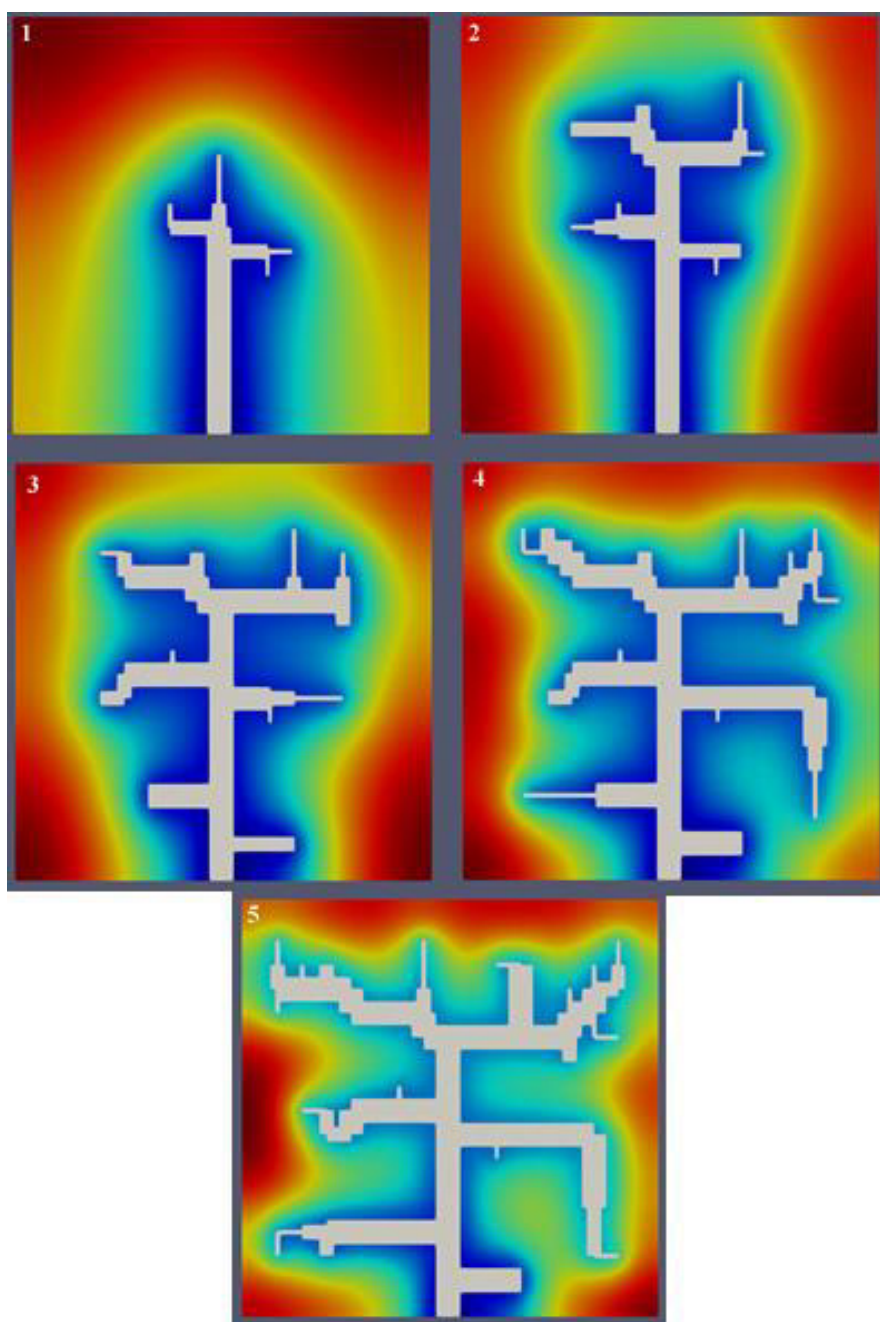


Figura 3.15 – Exemplo de alguns estágios de crescimento de um caminho condutivo até que ele atinge sua área máxima.

4. RESULTADOS

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos neste trabalho ao se pesquisar o tema proposto. São apresentados os resultados dos testes da formação de geometrias, teste de solução independente da malha, a verificação dos modelos utilizando como comparação o modelo proposto no trabalho de Almogbel e Bejan (1999) e os resultados obtidos pelo trabalho proposto comparados com resultados já estabelecidos na literatura.

4.1. Teste de geometrias

O principal objetivo desta fase de testes foi verificar se as geometrias geradas pela estrutura de dados implementada condiziam com o modelo computacional proposto, sem comportamentos inesperados causados por erros de programação.

Para os testes realizados nesta seção, primeiramente foram definidas geometrias de forma arbitrária que deveriam ser representadas pelo sistema através de um conjunto entre vértices e arestas que representam o caminho condutivo. São conhecidas as dimensões da geometria, os vértices que devem ser acessados pelo caminho condutivo, a ordem que os vértices devem ser acessados e o peso das arestas, que indica a espessura do caminho condutivo naquela determinada região.

Entre os diversos testes realizados nesta etapa, serão apresentados 3 casos que melhor representam o método de testagem, o método de obtenção dos parâmetros dos casos de teste e a análise dos resultados obtidos em relação aos resultados desejados.

Para o primeiro caso de teste, a geometria escolhida foi a geometria que seria gerada pelo grafo da Fig. 4.1, uma geometria em formato I.

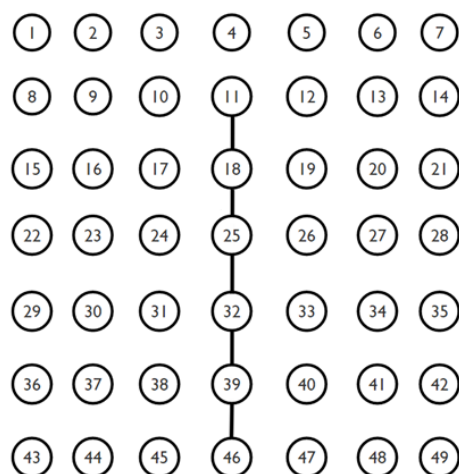


Figura 4.1. – Grafo representando uma geometria em formato I.

Sendo conhecidos os vértices acessados pelo caminho e a relação entre eles através das arestas, é então conhecido o percurso que o caminho condutivo percorreu e o número de passos necessários para o mesmo ter percorrido o percurso.

Este trabalho oferece controle sobre a variação dos pesos das arestas que variam a espessura, podendo os pesos serem definidos para sempre oferecerem espessura máxima ou mínima caso necessário. Porém, os pesos das arestas para os testes realizados e para os modelos que serão apresentados posteriormente, são calculados a partir do número de vezes que o caminho precisaria percorrer aquela aresta para crescer até a posição de maior calor.

Logo, os pesos das arestas que representam a geometria foram calculados, obtendo-se o grafo representado na Fig 4.2.

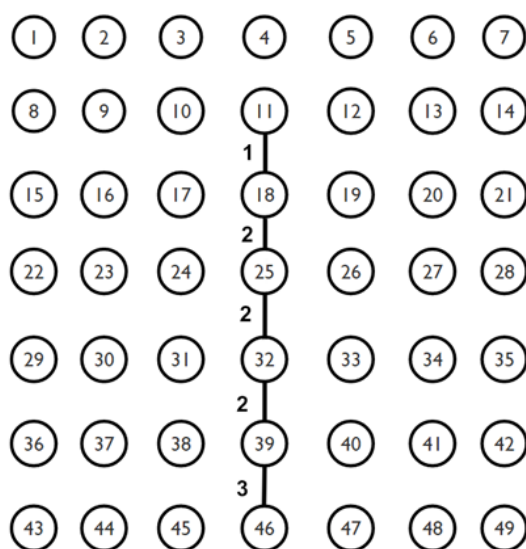


Figura 4.2. – Grafo representando uma geometria em formato I atualizado com os pesos das arestas.

Os pesos das arestas da Figura 4.2 indicam que a espessura da geometria representada deve afinar em direção ao topo conforme os valores dos pesos das arestas diminuem.

Com essas informações, foram calculados as posições dos vértices que representariam o ponto de maior calor do sistema em um determinado momento e a ordem que ao serem introduzidos como parâmetros de entrada para o algoritmo de crescimento do caminho condutivo, iriam gerar a geometria desejada. Estes valores pré-calculados substituem os valores de entrada que seriam obtidos ao analisar o campo de temperaturas.

Após serem calculados todos os parâmetros necessários para a realização do teste, o caso foi simulado. Na Figura 4.3 é mostrada a matriz que representa a geometria gerada, com a área do caminho condutivo destacada em vermelho para maior facilidade de visualização.

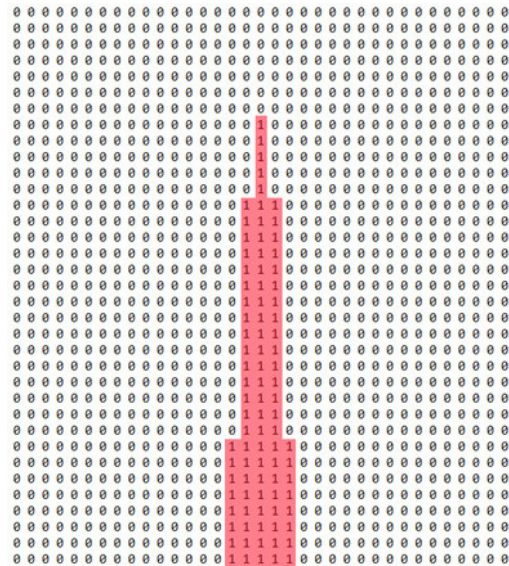


Figura 4.3. – Matriz da geometria gerada para o grafo da Fig. 4.2.

Comparando-se o resultado obtido com o resultado desejado que havia sido determinado no início do teste é observado que a geometria gerada tem o comportamento desejado. As variações de espessura ao longo do eixo y seguiram o modelo.

Para o próximo teste, foi escolhida uma geometria em formato T. O grafo representando o caminho, com os pesos das arestas devidamente atualizados, é apresentado na Fig. 4.4.

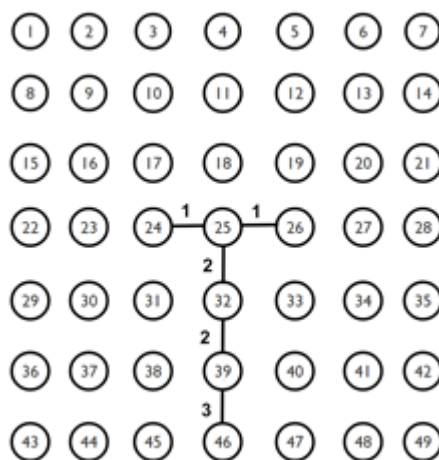


Figura 4.4 – Grafo em formato de T.

A geometria gerada para este grafo é representada na matriz da Fig. 4.5, com a área do caminho condutivo destacada em vermelho.

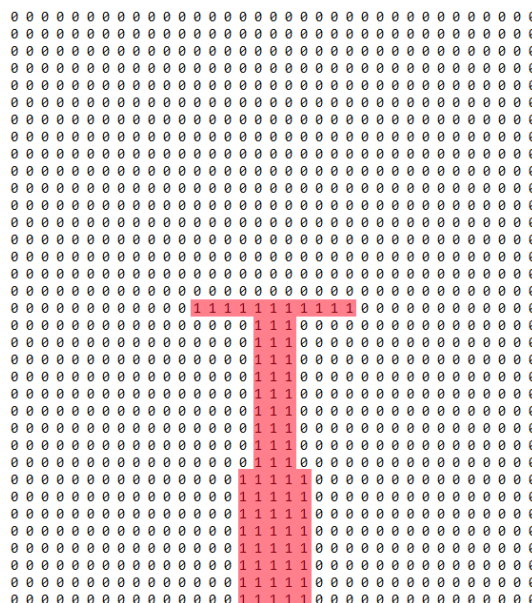


Figura 4.5 – Geometria gerada a partir do grafo da Fig. 4.4.

Ao se analisar o resultado apresentado na Fig. 4.5 é possível concluir que o resultado do teste foi satisfatório.

O terceiro teste trata de uma geometria mais complexa do que as apresentadas nas Fig. 4.2 e 4.4. A geometria escolhida, apresentada na Fig. 4.6 se assemelha mais as geometrias em formato de árvore estudadas neste trabalho, sendo assimétrica e com maior variação entre as espessuras dos diversos ramos.

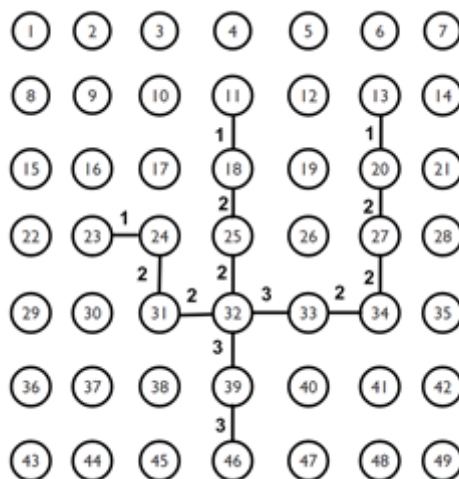


Figura 4.6. – Grafo de maior complexidade.

Na Fig. 4.7 é apresentada a geometria gerada para o grafo da Fig. 4.6.

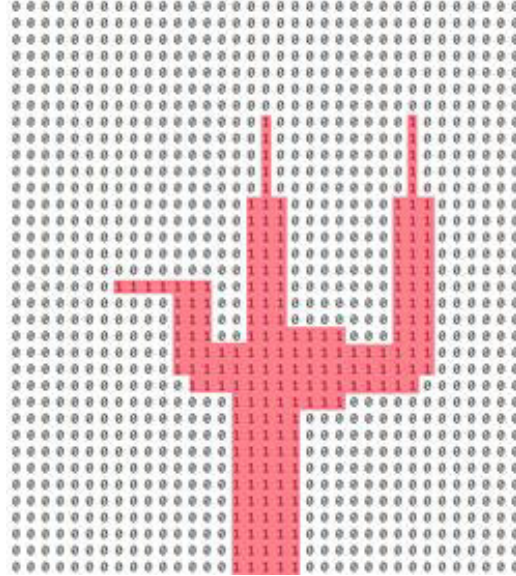


Figura 4.7. – Geometria gerada a partir do grafo da Fig. 4.6.

Ao se analisar os resultados, pode-se observar que a estrutura de dados está gerando geometrias com espessura variável de acordo com o modelo proposto neste trabalho onde ramos que levam a maiores concentrações de calor tem maior espessura. Também pode-se definir que a estrutura de dados está corretamente convertendo o caminho gerado pelo algoritmo de crescimento de caminhos para o formato geométrico que será utilizado para gerar a malha no software Gmsh.

4.2. Verificação do modelo do modelo para a solução

O teste de solução independente da malha e a verificação do modelo proposto foram realizados simulando a condução de calor para um caminho condutivo de formato I com o sólido $H = L$, $\phi = 0,2$ e $\tilde{k}_p = 300$, proposto por Almogbel e Bejan (1999).

A geometria foi construída utilizando a estrutura de dados apresentada neste trabalho. Logo, a malha é construída e então é realizada a solução do problema de transferência de calor.

Se estabeleceu que o teste de solução independente da malha seria satisfeito quando $|\theta^{j\max} - \theta^{j+1\max}| / \theta^{j\max} < 2 \times 10^{-3}$. Os resultados obtidos no teste são apresentados na Tab. 1.

Tabela 1. Teste de solução independente da malha.

Malha	Nº de elementos	$\theta^j_{\max}$	$(\theta^j_{\max} - \theta^{j+1}_{\max})/\theta^j_{\max}$
M1	699	0,1085	$6,912 \times 10^{-3}$
M2	1905	0,10775	$6,96 \times 10^{-3}$
M3	7737	0,107	$1,1682 \times 10^{-3}$
M4	25317	0,106875	-----

Analisando-se os resultados apresentados na Tab. 1, a malha escolhida para as simulações foi a malha M3. A Tabela 2 apresenta a verificação dos resultados para uma relação L/H do caminho condutivo sendo 0,230.

Tabela 2. Comparação entre os modelos.

Φ	$\tilde{k}_p$	$\theta_{\max}$	$\theta_{\max}$ Almogbel e Bejan (1999)
0,2	300	0,107	0,105

A Figura 4.8. apresenta a geometria simulada na verificação do modelo.

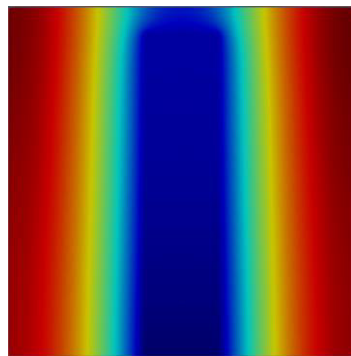


Figura 4.8 – Geometria simulada ao realizar a verificação do modelo.

Na Tabela 2 pode se observar que a diferença entre os resultados obtidos neste trabalho e os obtidos Almogbel e Bejan (1999) possuem uma discrepância inferior a 2%, logo pode se verificar que o modelo tem uma performance satisfatória.

4.3. Análise da influência da variação do número de vértices na resistência térmica adimensional máxima

O número de vértices do grafo que representa o domínio físico do sistema influenciam a espessura dos ramos do caminho condutivo e a geometria final do caminho em si.

Nesta seção serão apresentados os resultados dos testes realizados para diferentes combinações de $\tilde{k}_p$ e Φ para grafos com diferentes número de vértices ao formar o caminho condutivo, tendo sido realizadas com simulações para cada combinação apresentada de $\tilde{k}_p$, Φ e tamanho de grafo. As simulações são rápidas com tempos de execução de até 3 minutos para casos com maior tamanho do grafo.

Na Fig. 4.9 são apresentadas algumas geometrias de caminhos condutivos, onde $\Phi = 0,1$, quando formados por grafos 7x7, 9x9, 11x11 e 13x13, respectivamente.

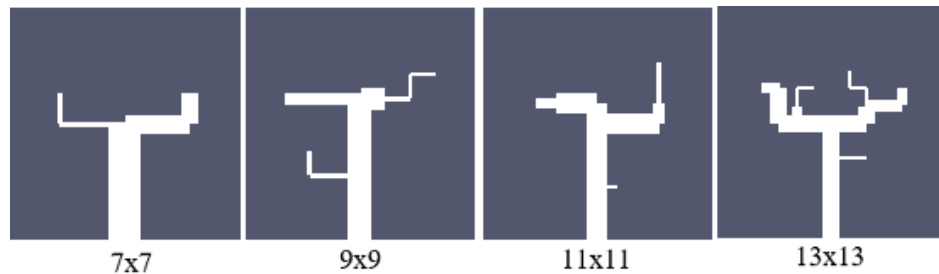


Figura 4.9 – Exemplos de variação da geometria de acordo com o aumento no número de vértices do grafo.

Na Figura 4.9 pode ser observada a influência que o aumento no número de vértices do grafo tem sob o aumento do número de ramos da geometria em formato de árvore do caminho condutivo.

Devido à natureza aleatória do RRT, as geometrias obtidas ao resolver o problema variam de uma simulação para a outra, resultando em θ_{max} diferentes para o mesmo tamanho de grafo sendo utilizado na solução do problema. A partir destes θ_{max} são obtidos o valor médio de θ_{max} , o maior valor obtido de θ_{max} , o menor valor obtido de θ_{max} e o desvio padrão de θ_{max} para as simulações realizadas para aquela configuração.

A seguir serão apresentados os resultados dos testes realizados para grafos de tamanho 7x7 e 11x11. Estes tamanhos foram escolhidos para observar o efeito do aumento gradativo do número de vértices em θ_{max} em conjunto com variação de condutividade térmica adimensional do caminho condutivo.

A Figura 4.10 apresenta os campos de temperatura com a geometria obtida de alguns dos testes realizados para grafos de tamanho 7x7 e 11x11 para parâmetros de $\Phi = 0,1$ com $\tilde{k}_p = 100$.

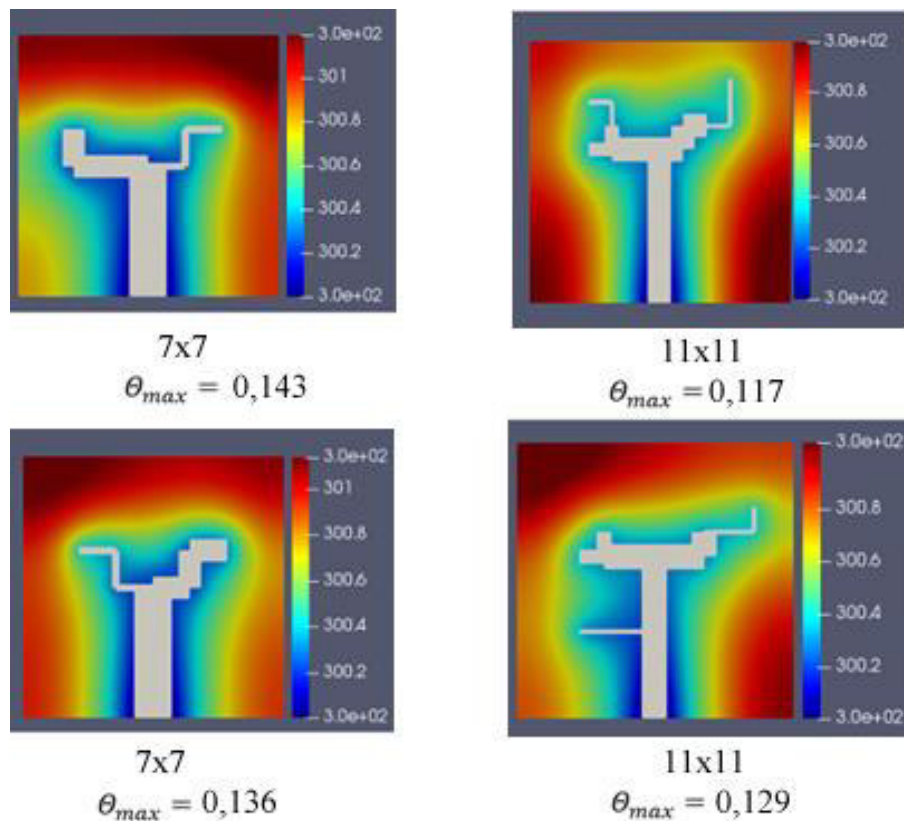


Figura 4.10 – Exemplos de diferentes geometrias obtidas para grafos de tamanhos

7x7(esquerda) e 11x11(direita) com $\Phi = 0,1$ e $\tilde{k}_p = 100$.

Na Figura 4.11 podem ser observados campos de temperatura obtidos em alguns dos testes de grafos de tamanhos 7x7 e 11x11 para $\Phi = 0,1$ com $\tilde{k}_p = 300$.

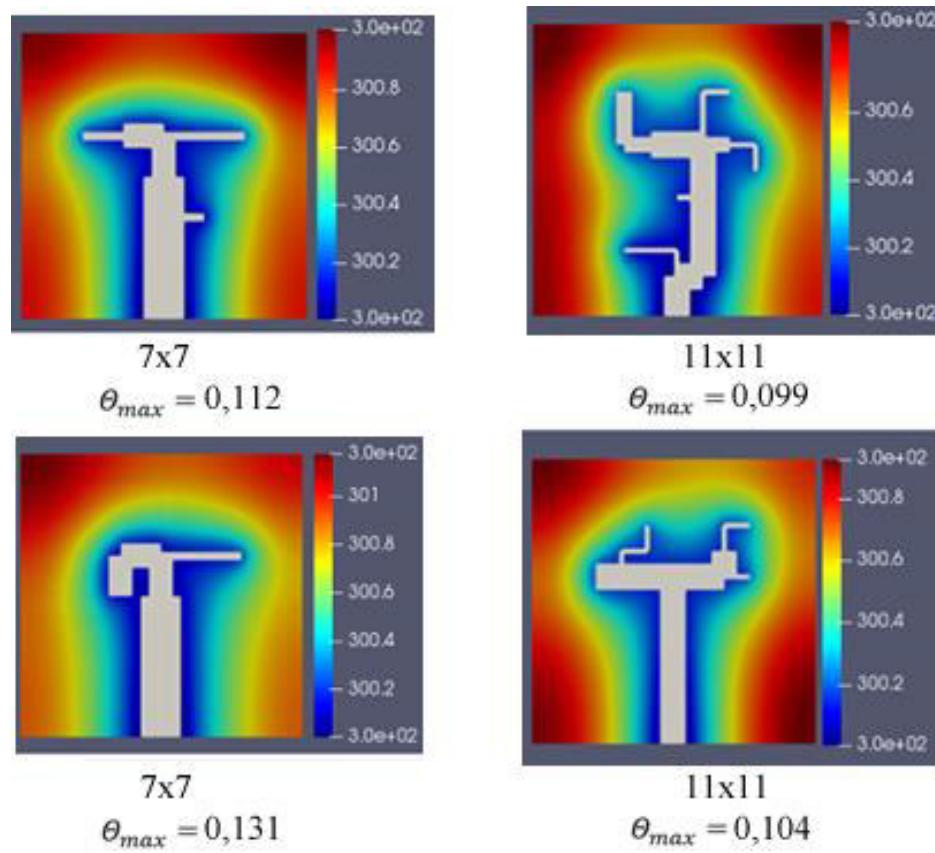


Figura 4.11 – Exemplos de diferentes geometrias obtidas para grafos de tamanhos 7x7 e 11x11 com $\Phi=0,1$ e $\tilde{k}_p = 300$.

É observado que o aumento do número de vértices possibilita maior complexidade no formato do caminho condutivo de modo que a geometria em forma de árvore pode gerar mais ramos e procurar mais pontos de foco de calor, tendo o mesmo Φ que as geometria formadas por grafos com menor número de vértices.

Na Tab. 3 é apresentada a média de θ_{max} obtidas das simulações realizadas para modelos de grafos 7x7 e 11x11. Com casos foram simulados para cada combinação de Φ e $\tilde{k}_p$.

Tabela 3. Comparação entre os resultados do modelo de grafos 7x7 e 11x11

Φ	$\tilde{k}_p$	Média θ_{max} 7x7	Média θ_{max} 11x11
0,1	100	0,14	0,132
0,1	300	0,127	0,112

Para os grafos 7x7 com $\Phi = 0,1$ e $\tilde{k}_p = 100$ foi observado que o desvio padrão de θ_{max} foi de 0,013 com seu maior valor sendo 0,154 e para $\Phi = 0,1$ com $\tilde{k}_p = 300$ foi observado que o desvio padrão de θ_{max} foi de 0,011 com seu maior valor sendo 0,139. Para os grafos 11x11 com $\Phi = 0,1$ com $\tilde{k}_p = 100$ foi observado que o desvio padrão de θ_{max} foi de 0,01 com seu maior valor sendo 0,148 e para $\Phi = 0,1$ com $\tilde{k}_p = 300$ foi observado que o desvio padrão de θ_{max} foi de 0,009 com seu maior valor sendo 0,125.

Pode se observar que ao aumentar o número de vértices no grafo se permite que o caminho condutivo tenha maior liberdade para evoluir. Esta liberdade tem um efeito positivo para a redução de θ_{max} seguindo o conceito de teoria construtal.

Logo, se buscou encontrar o número de vértices do grafo que minimizaria θ_{max} oferecendo maior grau de complexidade ao caminho condutivo sem gerar aumentos exagerados no número de vértices. A Tabela 4 apresenta o resultado dos testes realizados com aumento gradativo do número de vértices do grafo em casos com $\Phi = 0,1$ e $\tilde{k}_p = 300$. Este teste é similar a um teste de independência da malha analisando-se o tamanho do grafo.

Tabela 4. Testes do tamanho do grafo em relação a redução de θ_{max} e desvio padrão.

Tamanho do grafo	Média θ_{max}	Desvio padrão	% Reduzida do anterior
11x11	0,049	0.0048	-----
17x17	0,033	0.0029	34.69%
19x19	0,03	0.0011	Aproximadamente 9%
21x21	0,028	0.0004	Aproximadamente 6.67%

Os resultados na Tabela 4 podem ser observados na Fig. 4.12 onde é apresentado o gráfico da media de θ_{max} e do desvio padrão.

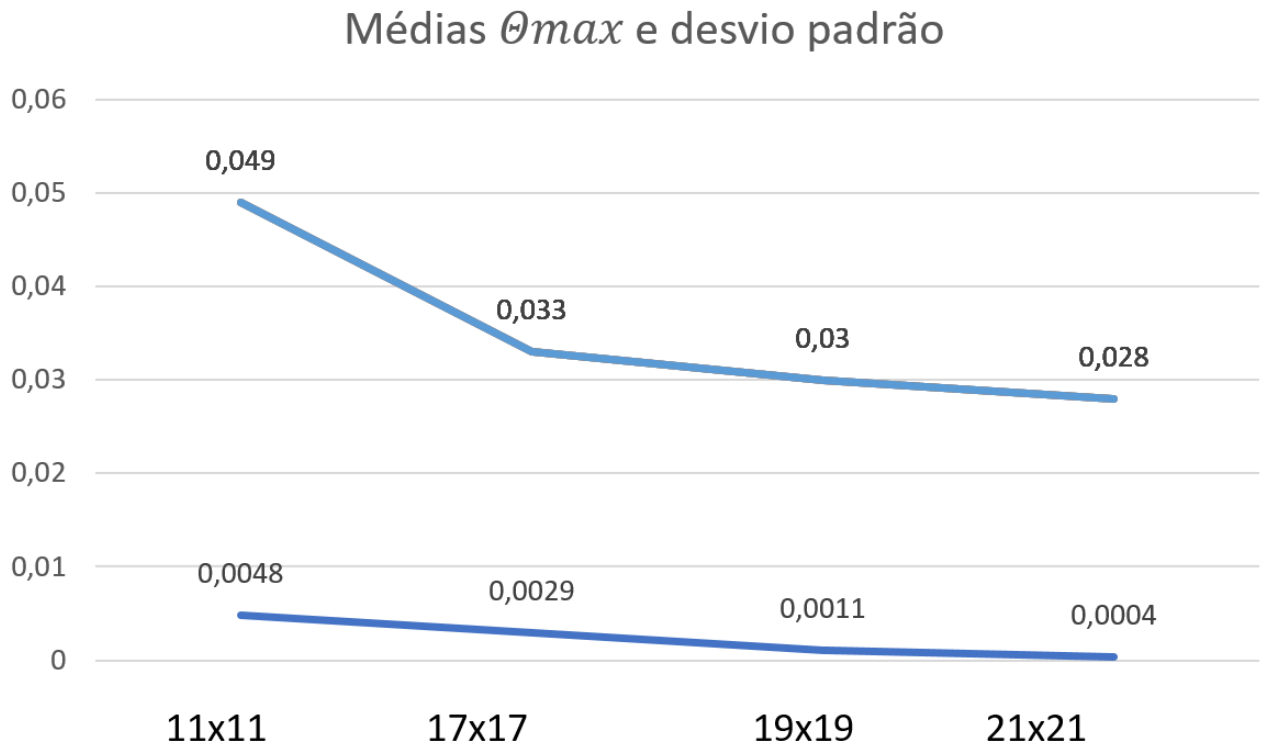


Figura 4.12 – Média de θ_{max} e desvio padrão para os dados da tabela 4.

Realizados os testes, o grafo de tamanho 21x21 foi escolhido para este trabalho devido a a sua alta taxa de redução da θ_{max} com baixo desvio padrão, tendo seu valor mais baixo 0,0275 e seu valor mais alto 0,0286. Maiores aumentos de tamanho para o presente trabalho oferecem uma baixa redução no valor médio de θ_{max} em relação ao tamanho do grafo.

Ao se analisar a Tabela 4 pode ser observado que com o aumento no número de vértices o desvio padrão reduziu drasticamente devido a maior liberdade de evolução proporcionada. Logo, ao aumentar a liberdade de evolução de modo a facilitar o acesso aos fluxos de calor percorrendo o caminho condutivo, seguindo a teoria construtal, a diferença entre o melhor e pior resultado diminuiu consideravelmente, apesar da natureza não-determinística do algoritmo sendo estudado.

A Figura 4.13 traz algumas geometrias formadas para testes com grafos de tamanhos 21x21 para casos onde $\Phi = 0,1$ com $\tilde{k}_p = 100$. Para grafos de tamanho 21x21 com $\Phi = 0,1$ com $\tilde{k}_p = 100$ foi observado desvio padrão de θ_{max} igual a 0,0033 com valor máximo 0,085 e valor mínimo 0,078. A Figura 4.14 traz algumas geometrias formadas para testes com grafos de tamanhos 21x21 para casos onde $\Phi = 0,1$ com $\tilde{k}_p = 300$. Para grafos de tamanho 21x21 com $\Phi = 0,1$ com $\tilde{k}_p = 300$ foi observado desvio padrão de θ_{max} igual a 0,0027 com valor máximo 0,066 e valor mínimo 0,059.

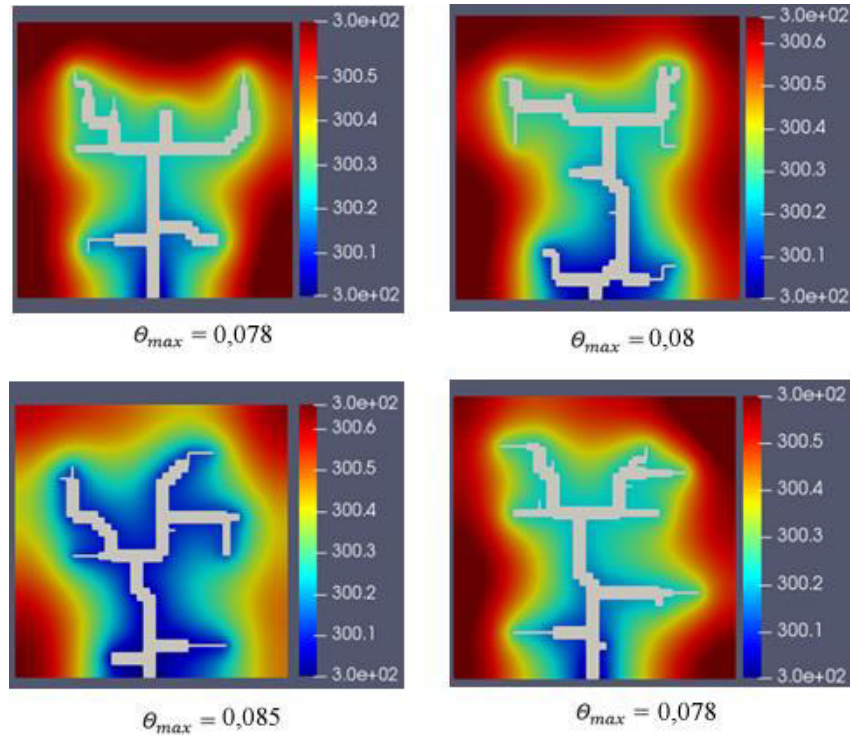


Figura 4.13 –Campos de temperatura com exemplos de diferentes geometrias obtidas ao se realizar testes com grafos de tamanho 21x21 com $\Phi = 0,1$ e $\tilde{k}_p = 100$.

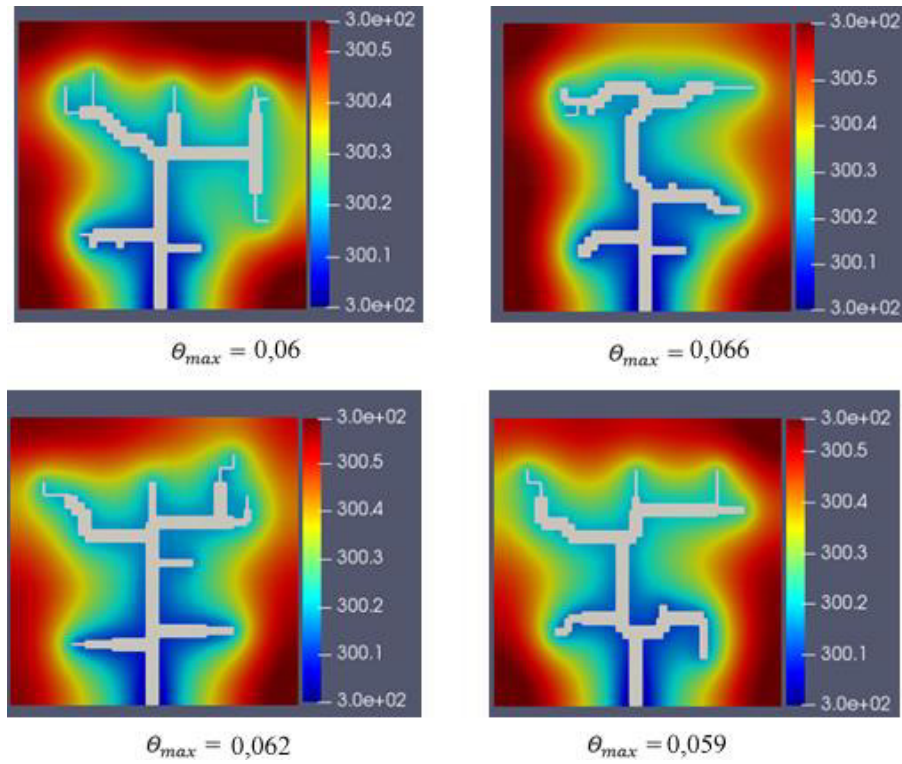


Figura 4.14 –Campos de temperatura com exemplos de diferentes geometrias obtidas ao se realizar testes com grafos de tamanho 21x21 com $\Phi = 0,1$ e $\tilde{k}_p = 300$.

As simulações realizadas neste trabalho são rápidas e requerem pouco esforço computacional, logo os valores mínimos podem ser usados como os melhores resultados obtidos neste trabalho, Tab. 5.

Tabela 5. Melhores resultados obtidos para grafos de 21x21.

Φ	$\tilde{k}_p$	θ_{max}
0.1	100	0,078
0.1	300	0,059
0.2	300	0,0275

A Fig 4.15 apresenta o exemplo de um caminho condutivo gerado a partir de um grafo 11x11 e um caminho gerado a partir de um grafo 21x21 para $\Phi = 0,2$ com $\tilde{k}_p = 300$.

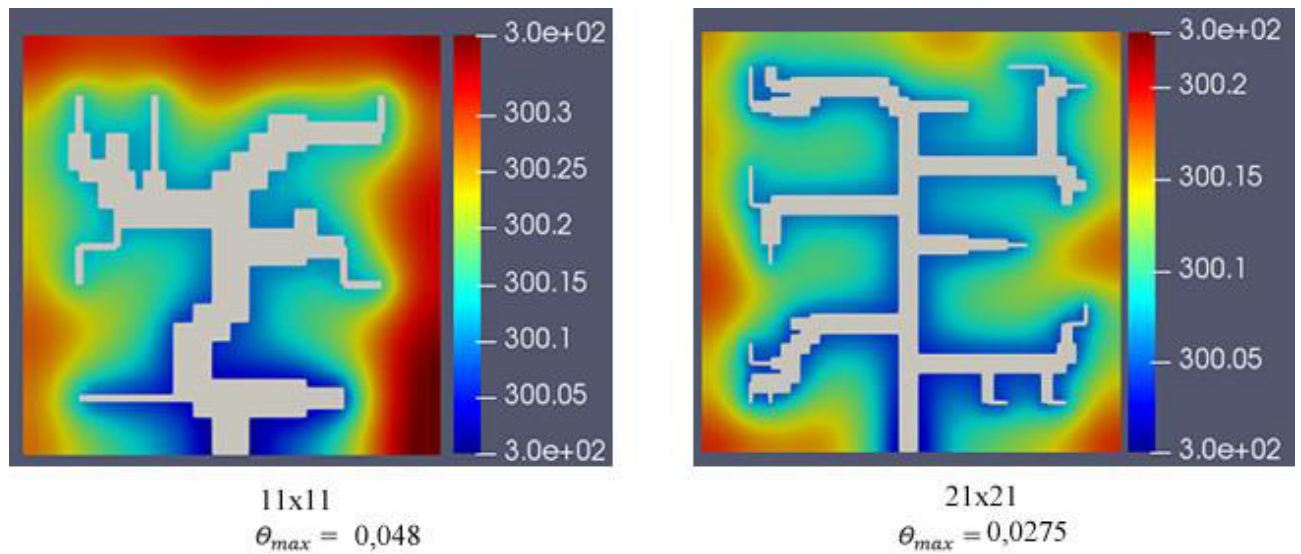


Figura 4.15 –Campos de temperatura para grafos de tamanho 11x11(esquerda) e 21x21(direita) com $\Phi = 0,2$ e $\tilde{k}_p = 300$.

4.4. Análise dos resultados obtidos em relação a geometrias já estabelecidas na literatura

Na Figura 4.16 pode se observar os valores de θ_{max} as geometrias em formato I (Almogbel e Bejan, 1999), X (Lorenzini et al., 2013a) e X não-uniforme (Lorenzini et al., 2013b) para $\Phi = 0,2$ e $\tilde{k}_p = 300$.

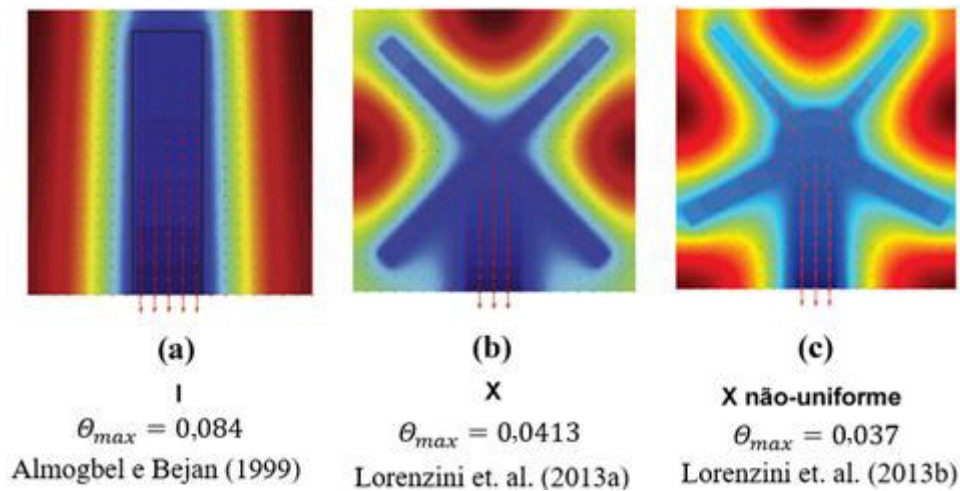
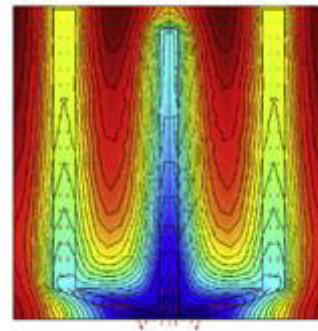


Figura 4.16 – Valores de θ_{max} para as geometrias I, X e X não-uniforme adaptadas de Almogbel e Bejan (1999), Lorenzini et al. (2013a) e Lorenzini et al. (2013b), para $\Phi = 0,2$ e $\tilde{k}_p = 300$.

Como pode ser observado na Fig. 4.16, o melhor resultado de θ_{max} obtido neste trabalho é 67.26% menor do que a geometria em formato I, 33,41% menor do que a geometria em formato X e 25.67% menor do que a geometria em formato X não-uniforme.

Em Hajmohammadi et al. (2013) são propostas duas geometrias de caminho condutivo em formato de garfo, onde a geometria com melhor eficiência na redução de θ_{max} é apresentada na Fig. 4.17 como a configuração (d) em conjunto com seu θ_{max} para $\Phi = 0,2$ com $\tilde{k}_p = 300$.



(d)

Geometria formato de garfo

$$\theta_{max} = 0,02$$

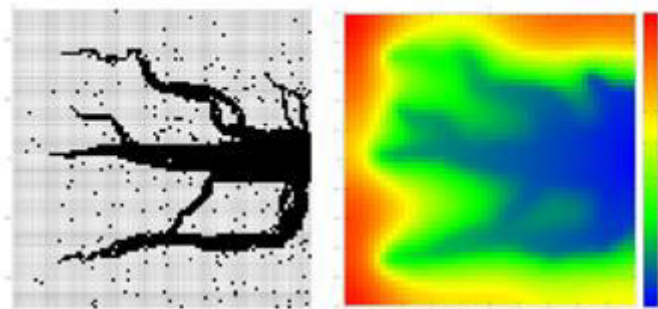
Hajmohammadi et al. (2013)

Figura 4.17 – Valor de θ_{max} para a geometria em formato de garfo adaptada de

Hajmohammadi et al. (2013), para $\Phi = 0,2$ e $\tilde{k}_p = 300$.

Como observado na Fig. 4.17 o θ_{max} obtido por Hajmohammadi et al. (2013) é 27.27% melhor do que o resultado obtido no presente trabalho.

Em Avendaño et al. (2018) são propostos dois algoritmos genéticos para a construção de caminhos condutivos, onde a geometria gerada pelo modelo com melhor eficiência na redução de θ_{max} é apresentada na Fig 4.18 como a configuração (e) em conjunto com seu θ_{max} para $\Phi = 0,2$ e $\tilde{k}_p = 300$.



(e)

**Geometria gerada pelo
algoritmo genético**

$$\theta_{max} = 0,0446$$

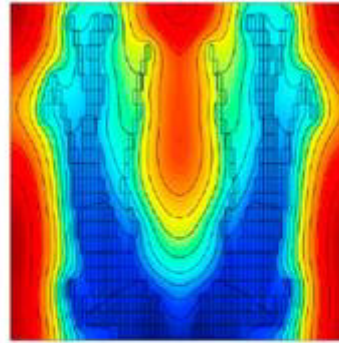
Avendaño et al. (2018)

Figura 4.18 – Valor de θ_{max} para a melhor geometria gerada pelo algoritmo genético,

adaptada de Avendaño et al. (2018), para $\Phi = 0,2$ e $\tilde{k}_p = 300$.

Como observado na Figura 4.18 o θ_{max} deste trabalho é 38.34% melhor do que o resultado obtido por Avendaño et al. (2018). Na Figura 4.19 é apresentada a geometria otimizada obtida pelo

algoritmo recursivo proposto por Hajmohammadi e Rezaei (2019) como a configuração (f) em conjunto com seu θ_{max} para $\Phi = 0,2$ e $\tilde{k}_p = 300$.



(f)

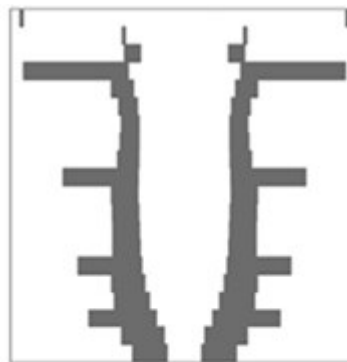
**Geometria gerada
pelo algoritmo recursivo**

$$\theta_{max} = 0,0222$$

Hajmohammadi e Rezaei (2019)

Figura 4.19 – Valor de θ_{max} para a geometria otimizada gerada pelo algoritmo recursivo, adaptada de Hajmohammadi e Rezaei (2019), para $\Phi = 0,2$ e $\tilde{k}_p = 300$.

Pode se observar que o θ_{max} obtido por Hajmohammadi e Rezaei (2019) é 19.27% melhor do que o resultado obtido no presente trabalho. Na Figura 4.20 é apresentada a geometria otimizada do caminho condutivo obtida pelo modelo proposto por Hajmohammadi et al. (2019) como a configuração (g) em conjunto com seu θ_{max} para $\Phi = 0,2$ e $\tilde{k}_p = 300$.



(g)

**Geometria em
formato de árvore com
ramos desiguais**

$$\theta_{max} = 0,0156$$

Hajmohammadi et al. (2019)

Figura 4.20 – Valor de θ_{max} para a geometria otimizada em formato de árvore adaptada de Hajmohammadi et al. (2019), para $\Phi = 0,2$ e $\tilde{k}_p = 300$.

É observado que o θ_{max} obtido por Hajmohammadi et al. (2019) é 43.27% melhor do que o resultado obtido no presente trabalho.

Ao analisar os resultados obtidos neste trabalho com os resultados de trabalhos já estabelecidos na literatura, pode observar-se que o presente trabalho obtêm resultados superiores quando comparado as configurações (a), (b), (c) e (e), e são inferiores aos resultados otimizados da literatura apresentados pelas configurações (d), (f) e (g).

O objetivo deste trabalho não é otimizar o modelo proposto para superar os trabalhos estabelecidos na literatura mas sim estudar a aplicação do algoritmo RRT combinado com a teoria construtal oferecendo como opção um modelo com rápida simulação e baixo custo computacional.

Também deve ser observado que o método proposto não é restrito a modelos de formatos pré-definidos de caminho condutivo ou sólido com geração interna de calor podendo ser aplicado em problemas com diferentes restrições geométricas.

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho, o algoritmo RRT é aplicado para o design construtal de caminhos de alta condutividade para o resfriamento de um sólido com geração interna de calor formando geometrias em formato de árvore com espessura variável em seus ramos. É utilizada uma estrutura de dados para gerenciar a variação da espessura dos ramos da geometria, assim como os passos de crescimento do caminho, aplicando-se um pseudo-transiente para simular o crescimento de uma árvore buscando nutrientes conforme o caminho cresce em direção a focos de calor.

Conforme apresentado na seção de resultados, foi observado que apesar da natureza não-determinística do modelo proposto, ao seguir-se os conceitos de teoria construtal são observados menores desvios padrões nos resultados e maior redução de θ_{max} , obtendo-se resultados satisfatórios quando comparados aos trabalhos estabelecidos na literatura, utilizando baixo poder computacional e pouco tempo de simulação.

O modelo proposto apresenta alto potencial para melhorias em trabalhos futuros assim como a flexibilidade de ser adaptado em diversos problemas com variadas restrições geométricas. Também deve ser observada a influência da resolução dos grafos sobre θ_{max} , tendo grande impacto sobre a eficiência do modelo. Este uso de grafos na construção da geometria do caminho condutivo possibilita o estudo da aplicação de teoria dos grafos para a análise de geometrias formadas em trabalhos futuros.

Para trabalhos futuros, o estudo de outros algoritmos de crescimento aplicados ao design construtal de caminhos condutivos pode oferecer outras linhas de pesquisa, estudando assim o efeito que diferentes algoritmos de geração de caminhos ao serem aplicados no design construtal de caminhos condutivos tem sobre θ_{max} . Também pode ser estudada a modificação do modelo, de modo que o caminho condutivo consiga crescer nas direções diagonais.

6. REFERÊNCIAS

- ALMOGBEL, M.; BEJAN, A.; **Conduction trees with spacings at the tips.** *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 42, n. 20, p. 3739–3756, 1 out. 1999.
- AVENDAÑO, P. A.; SOUZA, J. A.; ADAMATTI, D. F.; **Construction of conductive pathways using Genetic Algorithms and Constructal Theory.** *International Journal of Thermal Sciences*, v. 134, p. 200–207, 1 dez. 2018.
- BEJAN, A.; **Constructal-theory network of conducting paths for cooling a heat generating volume.** *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 40, n. 4, p. 799–816, 1 mar. 1997.
- BEJAN, A.; LORENTE, S.; **Constructal tree-shaped flow structures.** *Applied Thermal Engineering*, v. 27, n. 4, p. 755–761, 1 mar. 2007.
- Bejan, A; Lorente, S.; **Design with Constructal Theory**, Wiley, Hoboken, 2008.
- BEJAN, A., ZANE, J. P.; **Design in Nature**, Doubleday, New York, 2012
- BRUCE, J.; VELOSO, M. M.; **Real-Time Randomized Path Planning for Robot Navigation.** (G. A. Kaminka, P. U. Lima, R. Rojas, Eds.)RoboCup 2002: Robot Soccer World Cup VI. Anais...: Lecture Notes in Computer Science.Berlin, Heidelberg: Springer, 2003
- CETKIN, E.; OLIANI, A.; **The natural emergence of asymmetric tree-shaped pathways for cooling of a non-uniformly heated domain.** *Journal of Applied Physics*, v. 118, n. 2, p. 024902, 14 jul. 2015.
- Chu, R. C; **The Challenges of Electronic Cooling: Past, Current and Future.** *Journal of Electronic Packaging*, 126(4), 491. doi:10.1115/1.1839594, 2004.
- FENG, H.; CHEN L.; XIE Z.; SUN F.; **Constructal design for “+” shaped high conductivity pathways over a square body.** *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 91, p. 162–169, 1 dez. 2015.
- GMSH 4.0.; <https://gmsh.info/>.
- HAJMOHAMMADI, M. R.; ABIANEH V. A.; MOEZZINAJAFABADI M.; DANESHI M.; **Fork-shaped highly conductive pathways for maximum cooling in a heat generating piece.** *Applied Thermal Engineering*, v. 61, n. 2, p. 228–235, 3 nov. 2013.
- HAJMOHAMMADI, M. R.; **Introducing a ψ -shaped cavity for cooling a heat generating medium.** *International Journal of Thermal Sciences*, v. 121, p. 204–212, 1 nov. 2017.

HAJMOHAMMADI, M. R.; REZAEI, E.; **Proposing a new algorithm for the optimization of conduction pathways based on a recursive localization.** Applied Thermal Engineering. doi:10.1016/j.applthermaleng.2019.01.109, 2019.

HAJMOHAMMADI, M. R.; PARSA, H.; NAJAFIAN, J.; **Proposing an optimal tree-like design of highly conductive material configuration with unequal branches for maximum cooling a heat generating piece.** International Journal of Heat and Mass Transfer, 142, 118422. doi:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.07.072, 2019.

HAHN, D. W.; OZISIK, M. N.; **Heat Conduction**, Third edition, 2012.

HORBACH, C. D. S., DOS SANTOS, E. D., ISOLDI, L. A., ROCHA, L. A. O.; **Constructal Design of Y-Shaped Conductive Pathways for Cooling a Heat-Generating Body.** Defect and Diffusion Forum, 348, 245–260. doi:10.4028/www.scientific.net/ddf.348.245, 2014.

LAVALLE, S. M.; **Rapidly-exploring random trees : a new tool for path planning.** 1998.

LORENZINI, G.; BISERNI C.; GARCIA F.L.; ROCHA L.A.O.; **Geometric optimization of a convective T-shaped cavity on the basis of constructal theory.** International Journal of Heat and Mass Transfer, v. 55, n. 23–24, p. 6951–6958, nov. 2012.

LORENZINI, G.; BISERNI C.; ESTRADA E.D.; ISOLDI L.A.; DOS SANTOS E.D.; ROCHA L.A.O.; **Constructal Design of Convective Y-Shaped Cavities by Means of Genetic Algorithm.** Journal of Heat Transfer, v. 136, n. 7, 1 jul. 2014.

LORENZINI, G. BARRETO E.X.; BECKEL C.C.; SCHNEIDER P.S.; ISOLDI L.A.; DOS SANTOS E.D.; ROCHA L.A.O.; **Geometrical evaluation of T-shaped high conductive pathway with thermal contact resistance for cooling of heat-generating medium.** International Journal of Heat and Mass Transfer, v. 108, p. 1884–1893, 1 maio 2017.

LORENZINI, G.; BISERNI, C.; ROCHA, L. A. O.; **Geometric optimization of isothermal cavities according to Bejan's theory.** International Journal of Heat and Mass Transfer, v. 54, n. 17–18, p. 3868–3873, 1 ago. 2011.

LORENZINI, G.; BISERNI, C.; ROCHA, L. A. O.; **Constructal design of X-shaped conductive pathways for cooling a heat-generating body.** International Journal of Heat and Mass Transfer, v. 58, n. 1–2, p. 513–520, 1 mar. 2013a.

LORENZINI, G.; BISERNI, C.; ROCHA, L. A. O.; **Constructal design of non-uniform X-shaped conductive pathways for cooling.** International Journal of Thermal Sciences, v. 71, p. 140–147, 1 set. 2013b.

LORENZINI, G.; BISERNI, C.; ROCHA, L. A. O.; **Geometric optimization of X-shaped cavities and pathways according to Bejan's theory: Comparative analysis.** International Journal of Heat and Mass Transfer, v. 73, p. 1–8, 1 jun. 2014.

Maliska, C, R; **Transferência de calor e Mecânica dos Fluidos Computacional.** 2º edição, 2017.

Moore, A. L.; Shi, L.; **Emerging challenges and materials for thermal management of electronics.** Materials Today, 17(4), 163–174. doi:10.1016/j.mattod.2014.04.003, 2014.

NOREEN, I.; KHAN, A.; HABIB, Z. A; **Comparison of RRT, RRT* and RRT*-Smart Path Planning Algorithms.** IJCSNS International Journal of Computer Science and Network Security, VOL.16 No.10, October 2016

OPENFOAM; <https://openfoam.org/>.

PASSALACQUA, A.; Fox, R. O.; **Implementation of an iterative solution procedure for multi-fluid gas–particle flow models on unstructured grids.** Powder Technology, 213(1-3), 174–187. doi:10.1016/j.powtec.2011.07.030, 2011.

VIANNA, J. C. B.; ESTRADA E.S.D.; ISOLDI L.A.; DOS SANTOS E.D.; SOUZA J.A.; **A new Constructal Theory based algorithm applied to thermal problems.** International Journal of Thermal Sciences, v. 126, p. 118–124, 1 abr. 2017.

VISERAS, A.; LOSADA, R. O.; MERINO, L.; **Planning with ants: Efficient path planning with rapidly exploring random trees and ant colony optimization.** International Journal of Advanced Robotic Systems, v. 13, n. 5, p. 172988141666407, 8 set. 2016.

WEST, D. B.; **West's Graph Theory.** 2 edition edition ed. [s.l.] Prentice Hall, 2000.