

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

**MODELAGEM DA DINÂMICA NEURAL A PARTIR DO  
CÁLCULO FRACIONÁRIO**

por

Jackson Ricardo Pereira de Lucena Silva

Dissertação para obtenção do Título de  
Mestre em Modelagem Computacional

Rio Grande, setembro, 2021

Jackson Ricardo Pereira de Lucena Silva

**“Modelagem da Dinâmica Neural a partir do Cálculo Fracionário”**

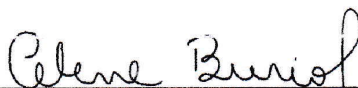
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande - FURG, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área de concentração: Modelagem Computacional.

Aprovado em: 27 de Setembro de 2021

BANCA EXAMINADORA



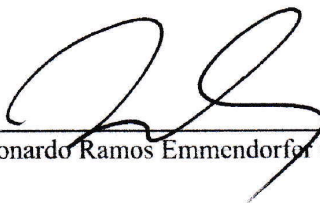
Prof. Dr. Adriano De Cezaro (Orientador – FURG)



Profa. Dra. Celene Buriol (UFSM)



Prof. Dr. Antonio Gledson Oliveira Goulart (FURG)



Prof. Dr. Leonardo Ramos Emmendorfer (FURG)

Rio Grande - RS  
2021

### Ficha Catalográfica

S586m Silva, Jackson Ricardo Pereira de Lucena.

Modelagem da dinâmica neural a partir do cálculo fracionário /  
Jackson Ricardo Pereira de Lucena Silva. – 2021.  
91 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande –  
FURG, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional,  
Rio Grande/RS, 2021.

Orientador: Dr. Adriano de Cezaro.

1. Cálculo Fracionário 2. Modelo de Hopfield 3. Redes Neurais  
I. Cezaro, Adriano de II. Título.

CDU 519.672

Catálogo na Fonte: Bibliotecário José Paulo dos Santos CRB 10/2344

Dedico esta dissertação à minha esposa, por ser uma pessoa muito forte e por estar realizando um sonho nosso - que é a nossa filha.

# AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus pela minha vida.

À minha esposa Maribel, por ter sempre me encorajado nos momentos mais difíceis, estando sempre ao meu lado quando precisei.

A minha primeira filha que está por chegar.

Ao professor Dr. Adriano De Cezaro, que me auxiliou, e que com sua paciência, antes de me ensinar, fez-me aprender.

Agradeço também, à banca julgadora, pela disposição.

Ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional e à Universidade Federal do Rio Grande pela oportunidade de estudar em uma universidade pública e de qualidade.

E, por fim, agradeço ao Instituto Federal Catarinense, onde leciono, por poder realizar esta pesquisa estando licenciado.

# RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo analisar a dinâmica do Cálculo Fracionário no modelo neural de Hopfield. Tal abordagem se justifica, uma vez que muitas redes neurais são capazes de armazenar memórias, assim como o cérebro humano, e o cálculo fracionário tem a capacidade de caracterizar tais fenômenos. Especificamente, pretendemos (i) analisar as propriedades de estabilidade da dinâmica neural fracionária do modelo de Hopfield; (ii) provar a boa colocação com dados iniciais e parâmetros; e (iii) comparar as soluções do modelo de ordem clássica com a de ordem fracionária. Assim, espera-se que os resultados possam servir de base para estudos aplicados de modelagem computacional, engenharia biomédica e medicina, principalmente no que diz respeito ao tratamento de doenças neurológicas que têm a memória como núcleo danificado, como a doença de Alzheimer e a demência de leve a severa, uma vez que as redes neurais artificiais são uma tecnologia emergente.

**Palavras-chaves:** Cálculo Fracionário. Modelo de Hopfield. Redes Neurais.

# ABSTRACT

In this dissertation the aim is to analyze the dynamics of Fractional Calculus in the Hopfield neural model. Such an approach is justified, since many neural networks are capable of storing memories, just like the human brain, and fractional calculus has the capacity to characterize such phenomenon. Specifically, we intend to (i) analyze the stability properties of the fractional neural dynamics of the Hopfield model; (ii) prove good placement with initial data and parameters; and (iii) compare the solutions of the classical order model with the fractional order. Thus, it is hoped that the results can serve as a basis for applied studies of computational modeling, biomedical engineering and medicine, especially with regard to the treatment of neurological diseases that have a damaged nucleus, such as Alzheimer's disease and lead to severe dementia, since artificial neural networks are an emerging technology.

**Keywords:** Fractional Calculus. Hopfield Model. Neural Networks.

# ÍNDICE

|        |                                                                          |    |
|--------|--------------------------------------------------------------------------|----|
| 1      | INTRODUÇÃO                                                               | 13 |
| 1.1    | Redes Neurais Artificiais                                                | 13 |
| 1.1.1  | Neurônio Biológico                                                       | 14 |
| 1.1.2  | Neurônio Artificial                                                      | 14 |
| 1.1.3  | Rede Neural Artificial                                                   | 16 |
| 1.2    | Justificativa                                                            | 20 |
| 1.3    | Objetivos                                                                | 20 |
| 1.3.1  | Objetivo Geral                                                           | 20 |
| 1.3.2  | Objetivos específicos                                                    | 20 |
| 1.4    | Divisão Esquemática do Trabalho                                          | 21 |
| 2      | CÁLCULO FRACIONÁRIO                                                      | 22 |
| 2.1    | Origem do Cálculo Fracionário                                            | 22 |
| 2.2    | Transformada de Laplace                                                  | 23 |
| 2.3    | Função Gama                                                              | 24 |
| 2.3.1  | Exemplo                                                                  | 26 |
| 2.4    | Função Beta                                                              | 26 |
| 2.5    | Função Mittag-Leffler                                                    | 27 |
| 2.6    | Teorema Fundamental do Cálculo                                           | 28 |
| 2.7    | Integral Fracionária de Riemann-Liouville                                | 29 |
| 2.7.1  | Exemplos                                                                 | 31 |
| 2.7.2  | Transformada de Laplace da Integral de Riemann-Liouville                 | 33 |
| 2.8    | Derivada Fracionária de Riemann-Liouville                                | 34 |
| 2.8.1  | Exemplos                                                                 | 35 |
| 2.8.2  | Transformada de Laplace da Derivada de Riemann-Liouville                 | 36 |
| 2.9    | Derivada Fracionária de Caputo                                           | 37 |
| 2.9.1  | Exemplos                                                                 | 39 |
| 2.9.2  | Transformada de Laplace da Derivada de Caputo                            | 40 |
| 2.10   | Comparação entre a derivada fracionária de Riemann-Liouville e de Caputo | 41 |
| 2.11   | Sistemas de Equações Diferenciais de Ordem Fracionária - EDOF            | 42 |
| 2.11.1 | Existência                                                               | 42 |
| 2.11.2 | Unicidade                                                                | 47 |
| 2.11.3 | Dependência Contínua de Problemas de Valores Iniciais com Derivadas      |    |
|        | de Ordem Fracionária                                                     | 49 |
| 2.12   | Efeitos de Memória da Dinâmica Fracionária                               | 54 |
| 2.13   | Boa colocação para Sistemas de EDOs fracionárias de múltiplas ordens     | 55 |

|                                                                                                                                                 |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.14 Estabilidade para PVI com Derivadas de Ordem Fracionária do tipo Caputo . . . . .                                                          | 56 |
| 2.14.1 Estabilidade de Mittag-Leffler . . . . .                                                                                                 | 56 |
| 2.14.2 Método direto de Lyapunov para sistemas fracionários . . . . .                                                                           | 57 |
| 2.14.3 Estabilidade para o sistema com múltiplas ordens . . . . .                                                                               | 58 |
| 2.14.4 Estabilidade para o sistema com mesma ordem . . . . .                                                                                    | 60 |
| 3 REDE NEURAL FRACIONÁRIA DE HOPFIELD . . . . .                                                                                                 | 64 |
| 3.1 Modelo de Hopfield . . . . .                                                                                                                | 64 |
| 3.2 Modelos Fracionários de Hopfield . . . . .                                                                                                  | 66 |
| 3.2.1 Modelo de Hopfield fracionário . . . . .                                                                                                  | 66 |
| 3.2.2 Modelo de Hopfield multifracionário . . . . .                                                                                             | 67 |
| 3.3 Boa colocação para os Modelos de Hopfield de Ordem Fracionária . . . . .                                                                    | 68 |
| 3.4 Análise da estabilidade dos Modelos de Hopfield . . . . .                                                                                   | 70 |
| 3.4.1 Estabilidade do Modelo de Hopfield . . . . .                                                                                              | 70 |
| 3.4.2 Análise de estabilidade de redes neurais de Hopfield de ordem fracionária<br>com entradas externas que variam com o tempo . . . . .       | 72 |
| 3.4.3 Análise de estabilidade de Mittag-Leffler de redes neurais de Hopfield de<br>ordem fracionária com entradas externas constantes . . . . . | 74 |
| 3.4.4 Análise de estabilidade de Mittag-Leffler de redes neurais de Hopfield de<br>múltiplas ordens . . . . .                                   | 75 |
| 4 RESULTADOS NUMÉRICOS . . . . .                                                                                                                | 77 |
| 4.1 Simulação Numérica . . . . .                                                                                                                | 77 |
| 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .                                                                                                                | 83 |
| REFERÊNCIAS . . . . .                                                                                                                           | 85 |
| APÊNDICE . . . . .                                                                                                                              | 89 |
| A TEOREMAS DO PONTO FIXO E VALOR MÉDIO . . . . .                                                                                                | 90 |
| A.1 Teorema do ponto fixo de Weissinger . . . . .                                                                                               | 90 |
| A.2 Teorema do ponto fixo de Banach . . . . .                                                                                                   | 90 |
| A.3 Teorema de ponto fixo de Schauder . . . . .                                                                                                 | 91 |
| A.4 Teorema de Arzelá-Ascoli . . . . .                                                                                                          | 91 |
| A.5 Teorema do Valor Médio . . . . .                                                                                                            | 91 |

## LISTA DE FIGURAS

|     |                                                                                   |    |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 | Estrutura esquemática de um Neurônio Biológico . . . . .                          | 14 |
| 1.2 | Estrutura esquemática de um Neurônio Artificial de McCulloch e Pitts . .          | 15 |
| 1.3 | Arquitetura em camadas de uma rede neural artificial . . . . .                    | 17 |
| 2.1 | Função Gama . . . . .                                                             | 25 |
| 3.1 | Circuito para o neurônio $i$ no modelo de Hopfield. . . . .                       | 65 |
| 4.1 | Soluções para diferentes casos de $\alpha_j$ com entradas externas que variam     |    |
|     | com o tempo . . . . .                                                             | 79 |
| 4.2 | Soluções para diferentes casos de $\alpha_j$ com entradas externas constantes . . | 80 |
| 4.3 | Soluções para diferentes casos de $\alpha_j$ com 10 neurônios . . . . .           | 82 |

## LISTA DE SÍMBOLOS

|                     |                                                                         |
|---------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| $\mathcal{L}$       | Transformada de Laplace                                                 |
| $Re(.)$             | Parte real de um número real complexo                                   |
| $\Gamma(.)$         | Função Gama                                                             |
| $E_\alpha$          | Função Mittag-Leffler com um parâmetro                                  |
| $E_{\alpha,\beta}$  | Função Mittag-Leffler com dois parâmetros                               |
| $I_a^\alpha$        | Integral Fracionária de Riemann-Liouville de ordem fracionária $\alpha$ |
| ${}^{RL}D_a^\alpha$ | Derivada Fracionária de Riemann-Liouville de ordem fracionária $\alpha$ |
| ${}^CD_a^\alpha$    | Derivada Fracionária de Caputo de ordem fracionária $\alpha$            |

## LISTA DE ABREVIATURAS

|       |                                              |
|-------|----------------------------------------------|
| RNA   | Redes Neurais Artificiais                    |
| IA    | Inteligência Artificial                      |
| HNN   | Hopfield Neural Network                      |
| EDO   | Equação Diferencial Ordinária                |
| EDOF  | Equação Diferencial de Ordem Fracionária     |
| CF    | Cálculo Fracionário                          |
| TFC   | Teorema Fundamental do Cálculo               |
| PVI   | Problema de Valor Inicial                    |
| FHNN  | Rede Neural de Hopfield de Ordem Fracionária |
| MFHNN | Rede Neural de Hopfield Multifracionária     |

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

O cérebro é considerado como principal órgão responsável pelo processamento da informação, em animais dotados de um sistema nervoso central. De forma sucinta, o cérebro pode ser encarado como um processador de sinais que explora um paralelismo massivo, por meio de um número muito vasto de elementos processadores chamados neurônios. Os neurônios são células nervosas que se conectam umas às outras através de substâncias químicas (os neurotransmissores) formando as sinapses neurais, as quais, permitem a continuidade do sinal elétrico que trafegam entre elas. A existência, a quantidade e o tipo das sinapses é o que dá ao cérebro sua capacidade de armazenar, processar, recuperar e, principalmente, de generalizar informações (aprendizado) (MCCLELLAND & RUMELHART, 1986).

Tais capacidades ímpares de nosso cérebro levaram a uma questão fundamental: é possível construir uma máquina capaz de se equiparar ao cérebro humano? Embora esta pergunta possa parecer um pouco pretensiosa, à primeira vista, a sociedade moderna se deparou com diversos problemas e aplicações, como o reconhecimento automático de alvos ou caracteres, diagnósticos médicos, sensoriamento remoto, análise de dados (Data Mining), processamento de voz, entre outros, os quais requerem a criação de um mecanismo capaz de reconhecer padrões e reproduzi-los, bem como de aprender com o seu ambiente de forma autônoma (BISHOP, 1995). A tal mecanismo, denominamos Redes Neurais Artificiais (RNA). Para entender melhor o propósito desta dissertação, descreveremos abaixo, de maneira sucinta, alguns dos pontos fundamentais de nossa abordagem.

### 1.1 Redes Neurais Artificiais

Iniciaremos esta seção descrevendo de maneira introdutória o neurônio biológico e sua versão artificial, para então entendermos como funciona uma rede neural artificial.

### 1.1.1 Neurônio Biológico

O cérebro humano e as outras partes do sistema nervoso são compostos de células nervosas (neurônios) e células gliais. Estas últimas são células de suporte do sistema nervoso, e sua função principal consiste em fornecer suporte físico e funcional aos neurônios. Os neurônios são células especializadas na recepção, condução e transmissão de sinais eletroquímicos (JESSOP, 2011). Existem 100 bilhões de neurônios e cerca de 100 trilhões de conexões (sinapses) entre eles no cérebro humano (BARNES & PINEL, 2018).

Embora os neurônios tenham uma grande variedade de formas, tamanhos e localização, a maioria dos neurônios têm estruturas bastante uniformes e os sinais neurais são transmitidos nos mesmos princípios básicos elétricos e químicos (WU, 2011).

O neurônio é uma célula formada pelos seguintes componentes: corpo celular, dendritos, axônio e sinapses, conforme exibido na figura 1.1.



Figura 1.1: Estrutura esquemática de um Neurônio Biológico

Os dendritos captam os estímulos recebidos em um determinado período de tempo e os transmitem ao corpo do neurônio (constitui o centro metabólico e contém o núcleo da célula), onde são processados. Quando tais estímulos atingirem determinado limite, o corpo da célula envia novo impulso que se propaga pelo axônio e é transmitido às células vizinhas por meio de sinapses (podem ser excitatórias ou inibitórias à passagem de informação dependendo dos sinais enviados pelos axônios). Esse processo pode se repetir em várias camadas de neurônios. Como resultado, a informação de entrada é processada, podendo levar o cérebro a comandar reações físicas (FERNEDA, 2006).

### 1.1.2 Neurônio Artificial

O primeiro modelo de neurônio artificial foi apresentado em um trabalho, em 1943, pelo neuroanatomista Warren McCulloch e pelo matemático Walter Pitts (MCCULLOCH e PITTS, 1943). Neste trabalho, os autores descrevem um modelo de cálculo lógico das redes neurais

unificando os estudos da neurofisiologia e da lógica matemática, a partir de uma estrutura e a propriedade do “tudo ou nada” de disparo do neurônio. Eles mostraram como excitação, inibição e limiar podem ser usados para construir uma grande variedade de “neurônios”. Este neurônio artificial, conforme ilustrado na Figura 1.2, ficou conhecido como modelo McCulloch-Pitts ou modelo MCP.

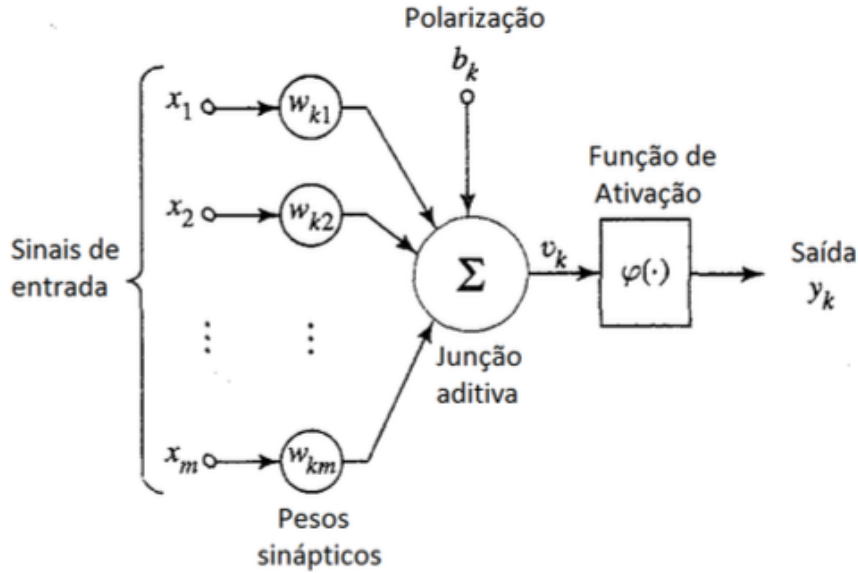


Figura 1.2: Estrutura esquemática de um Neurônio Artificial de McCulloch e Pitts

Comparando com o neurônio biológico, podemos dizer que os dendritos são representados pelas  $m$  entradas  $x_j$  e o axônio é representado pela saída  $y_k$ . Já as sinapses nervosas são representadas por um peso  $w_{kj}$  associado a cada entrada, podendo este ser excitatório (valor positivo) ou inibitório (valor negativo). O corpo celular é responsável por processar os sinais de entrada e transformá-lo em um sinal de saída. A saída do neurônio é o resultado da aplicação da função de ativação, responsável pelo limiar de disparo do neurônio, sobre a soma dos sinais de entradas ponderados pelos seus respectivos pesos sinápticos  $w_k$  somados à polarização externa  $b_k$  bias (que tem o efeito de aumentar ou diminuir a polarização na função de ativação). Esse processo pode ser descrito pelas seguintes equações:

$$u_k = \sum_{j=1}^m w_{k,j} x_j \quad (1.1)$$

$$y_k = \varphi(u_k + b_k) \quad (1.2)$$

onde  $x_1, x_2, \dots, x_m$  representam os sinais de entrada;  $w_{k1}, w_{k2}, \dots, w_{km}$  os pesos sinápticos do neurônio  $k$ ;  $u_k$  é o resultado da função soma;  $b_k$  é o bias;  $\varphi(.)$  é a função de ativação e  $y_k$  é o sinal de saída do neurônio  $k$ .

As funções de ativação mais utilizadas como o limiar de disparo do neurônio numa rede neural são as funções degrau, linear, logística e tangente hiperbólica.

### 1.1.3 Rede Neural Artificial

Uma rede neural é um conjunto interconectado de elementos, unidades ou nós de processamento simples, cuja funcionalidade se baseia na estrutura do neurônio biológico.

A capacidade de processamento da rede é armazenada nas intensidades de conexão entre as unidades, ou pesos, obtidos por um processo de adaptação ou aprendizado de um conjunto de padrões de treinamento (GURNEY, 1997), uma vez que a utilização das redes neurais é uma forma de incorporar características presentes no cérebro humano, como o alto grau de paralelismo, tolerância a falhas, robustez, capacidade de adaptação, auto-organização, entre outras na computação convencional.

Assim, uma rede neural é classificada em duas situações: pode ser uma rede neural biológica, composta de neurônios biológicos, ou uma rede neural artificial (RNA), composta por neurônios artificiais que têm por objetivo resolver problemas de inteligência artificial (IA).

Uma rede neural artificial (RNA) é um modelo computacional inspirado na estrutura do cérebro humano com intuito de explorar os mecanismos de processamento de informação e memória presentes nos sistemas (HUSH, 1993). Em outras palavras, trata-se de uma estrutura distribuída, de processamento paralelo, formada de neurônios artificiais (chamados elementos de processamento) que calculam funções matemáticas, chamadas funções de ativação, interligadas por um grande número de conexões (sinapses), as quais são utilizados para armazenar o conhecimento que está disponível para ser utilizado (HAYKIN, 2009).

A estrutura básica de uma RNA constitui-se de um sistema que permite estabelecer uma relação entre entradas,  $\{x_j\}_{j=1}^m$  e saídas  $\{y_k\}_{k=1}^n$ , inspiradas no sistema nervoso, onde as informações são processadas em paralelo, com possibilidade de aprendizado e distribuído por unidades de processamento. Essas unidades são dispostas em uma ou mais camadas e interligadas por um certo número de conexões (sinapses), normalmente unidirecionais. Na maioria dos modelos de RNA, as conexões estão associadas a pesos  $w_{k,j}$ , os quais servem para armazenar o conhecimento adquirido e ponderar a entrada recebida por cada neurônio da rede (HAYKIN, 2009).

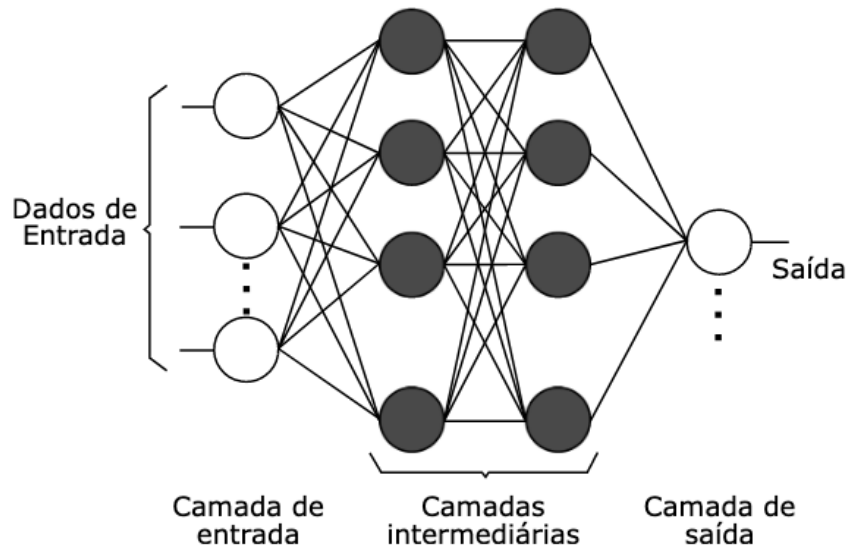


Figura 1.3: Arquitetura em camadas de uma rede neural artificial

À mesma maneira que o cérebro, as RNAs são capazes de aprender por meio de exemplos, generalizando a informação armazenada e reconhecendo padrões, tornando-se uma importante ferramenta na área de aprendizado de máquina (SPÖRL et al., 2011).

Dentre os distintos modelos de RNA, o modelo de Hodgkin-Huxley descreve como o impulso é transmitido quimicamente nas sinapses, e o modelo de FitzHugh-Nagumo, que foi baseado no modelo anterior, tem como objetivo reproduzir os principais resultados das equações de Hodgkin-Huxley. Em ambos modelos anteriores, suas aplicações descrevem o potencial de ação gerada por células cardíacas. Já o modelo de Wilson-Cowan consiste na interação entre duas populações de neurônios excitatórios ou inibitórios, e.g. MONTEIRO (2011).

Um modelo que particularmente nos interessa é o modelo proposto por Hopfield (HOPFIELD, 1982), o qual apresentou em seu artigo *Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computational Abilities*, uma rede neural recorrente que funciona como uma memória associativa direcionável. Assim como o cérebro, a rede neural proposta por Hopfield (HNN) opera com apenas uma camada, ou seja, os neurônios que compõem essa camada são ligados a todos os outros, o que torna essa rede autoassociativa. Outra característica interessante de uma HNN é que esta pode ser implementada em hardwares, bastando combinar os componentes como capacitores e resistores. Descreveremos de maneira mais completa o modelo de Hopfield no Capítulo 3.

Embora as redes de Hopfield pareçam responder à primeira pergunta levantada neste texto, no entanto, a memória associativa descrita pelo modelo de Hopfield é obtida pela incorporação de vetores de memória, que guardam as informações anteriores. Dessa forma, os vetores de memória podem ser requisitados para encontrar o vetor mais semelhante na rede (HU et al., 2015). Entretanto, essa forma de memória associativa para a rede de Hopfield pode gerar alguns vetores incompatíveis. Isso porque, há duas operações no modelo de Hopfield para invocar a memória associativa: autoassociativa (quando um vetor é associado a ele mesmo) e

heteroassociação (quando a associação é feita entre vetores distintos). Há ainda a possibilidade de uma combinação dos dois tipos de associação, caso haja um armazenamento interno dos vetores em uma única matriz de memória [BURLES \(2014\)](#).

A decisão de associação no modelo de Hopfield é tomada a partir do valor escalar, chamado de energia da rede (ou função de Lyapunov), em cada estado. Assim como no cérebro, o objetivo é minimizar a energia, pelas escolhas adequadas do estado, de forma que a rede convirja, eventualmente, a um mínimo local. Dessa forma, se um estado da rede de Hopfield for um mínimo local da função de energia, então ele é um estado estacionário da rede [\(JESSOP, 2011\)](#).

Por fim, é importante notar que a função de energia clássica para o modelo de Hopfield é um caso especial de energia para as redes de Markov, já que a medida de probabilidade associada é uma medida de Gibbs, que tem as propriedades Markovianas [\(BARRA et al., 2018\)](#). Por esse motivo, o tipo de memória capturado pelo modelo de Hopfield só recupera a informação do passo anterior da dinâmica e não de toda história do processo. O cérebro humano, por sua vez, tem a capacidade de juntar informações de várias etapas passadas (se não de todas).

Disto segue a segunda pergunta: seria possível generalizar as redes de Hopfield clássicas, de forma que as informações (memória) de toda a dinâmica seja tomada como parte do processo decisório? A construção da resposta a esta última pergunta faz parte dos resultados desta dissertação.

O primeiro ponto a ser superado nesta direção é a existência de um dispositivo eletrônico capaz de generalizar os capacitores e resistores. De fato, tal dispositivo existe e se chama fractância (Fractance device) [\(BANCHUIN, 2017\)](#). Este dispositivo tem por função a impedância de ordem fracionária, ou seja, tal ordem pode ser de qualquer valor real entre -1 e 1. Uma vez que a fase de sua tensão sempre conduz à de sua corrente, portanto, tem ordem positiva e são referidos como o indutor de ordem fracionária e o capacitor de ordem fracionária, respectivamente. Assim, são relacionadas por uma equação diferencial de ordem fracionária (EDOF).

Partindo desse princípio, os autores [LUNDSTROM et al. \(2008\)](#) descobriram que o cálculo fracionário pode ser bem usado no estudo de redes neurais, por conta da diferenciação fracionária, uma vez que ela fornece neurônios individuais com uma computação fundamental e geral, podendo contribuir para o processamento eficiente de informações, antecipação de estímulos e mudanças de fase, independentes de frequência de disparo neural oscilatório.

Portanto, faz-se necessária a substituição dos capacitores para que as derivadas de ordem fracionária possam fornecer um melhor instrumento para a descrição da memória e das propriedades hereditárias de vários materiais e processos, promovendo resultados significativos, principalmente, nos estudos de redes neurais [\(CHEN et al., 2013\)](#).

Nesse sentido, [BOROOMAND e MENHAJ \(2008\)](#), em seus estudos, mostraram que a partir do dispositivo eletrônico fractância, poderia surgir uma nova rede, ou seja, eles usaram este capacitor generalizado na rede neural de Hopfield contínua, ao invés do capacitor clássico, criando assim uma nova rede, denominada Fractional-order Hopfield Neural Network (FHNN). Neste mesmo trabalho, investigaram a estabilidade através da análise de função semelhante à

energia e mostraram a eficácia da rede FHNN.

Para descrever o comportamento das equações diferenciais de ordem fracionária associada a um problema de fenômenos da natureza, as derivadas fracionárias desempenham o papel fundamental na discussão de uma aplicação (TEODORO et al., 2018), uma vez que as derivadas fracionárias fornecem um excelente instrumento para a descrição da memória e das propriedades hereditárias de vários materiais e processos em comparação com as contrapartes clássicas de ordem inteira (BANCHUIN, 2017).

**Estado da arte na modelagem dinâmica neural fracionária** Sistemas neurais fracionários têm ganhado bastante atenção recente, tanto do ponto de vista da modelagem (TIAN et al., 2014), quanto do que tange aos estudos do comportamento dinâmico de tais sistemas. Em particular, em LIM et al. (2012), mostram-se resultados de estabilidade de sistemas lineares de ordem fracionária sujeitos à saturação de entrada; em TAVAZOEI et al. (2010), os autores exploram as consequências da dinâmica com oscilações não amortecidas; estudos de bifurcações e caos são apresentados por LEUNG et al. (2014); efeitos de sincronização são explorados por HAJIPOUR & AMINABADI (2016); e abordagens que consideram sistemas neurais com atraso são abordados em CHEN et al. (2013) e referências. É importante salientar que este atraso no tempo é considerado essencial na modelagem, haja vista que não apenas influencia a estabilidade da rede neural, mas, também, resulta no aparecimento de oscilações e outros fenômenos instáveis, como o caos. Com base no teorema da comparação e no teorema da estabilidade, DING & SHEN (2016) investigaram a dissipatividade global de uma classe de redes neurais de ordem fracionária (FNNs) com atrasos de tempo e ativações descontínuas no sentido da derivação fracionária de Caputo. Quanto ao problema de sincronização de redes neurais de valor complexo de ordem fracionária com atrasos de tempo, BAO et al. (2016) apresentaram em seus estudos, por meio do controle de feedback de retardo linear e uma desigualdade de ordem fracionária, condições suficientes para garantir a sincronização dos sistemas de resposta-dirigida. Para controlar o caos e a sincronização de redes neurais de ordem fracionária, CHEN et al. (2014) utilizaram o método de Lyapunov para garantir as condições de estabilidade e sincronização globais de Mittag-Leffler, empregando os resultados da teoria das equações diferenciais de ordem fracionária com lados direitos descontínuos. SONG & CAO (2014) obtiveram novas condições suficientes para garantir a existência e a singularidade da solução não trivial. Além disso, propuseram a estabilidade uniforme para uma classe de redes neurais de ordem fracionária em intervalos de tempo fixos. Por fim, KASLIK & SIVASUNDARAM (2012) investigaram a estabilidade e a multiestabilidade, as bifurcações e o caos na dinâmica de redes neurais de ordem fracionária do tipo Hopfield com uma estrutura de anel ou hub. Essas estruturas de conectividade simplificadas desempenham um papel importante na caracterização do comportamento dinâmico da rede, permitindo-nos obter uma visão dos mecanismos subjacentes ao comportamento de redes recorrentes. Com base na análise de estabilidade, o domínio de estabilidade do estado estacionário é completamente caracterizado, assim, pode-se identificar os valores críticos da rede de ordem fracionária, a qual podem ocorrer as bifurcações de Hopf.

## 1.2 Justificativa

A motivação para a escolha da temática de Redes Neurais Artificiais (RNA) dá-se pelo fato de que seus estudos têm despertado grande interesse do meio científico. Isso vem ocorrendo porque esse tipo de rede contém habilidades e possibilidades atraentes para a representação do conhecimento, raciocínio e aprendizado, sendo que sua proposta de usabilidade auxilia na obtenção de melhores resultados na solução de problemas específicos, como análise de imagem, detecção de padrões, entre outros.

Para tanto, para que a RNA seja colocada neste estudo, é necessária a implementação das derivadas de ordem fracionária, já que estas oferecem uma vantagem em relação às derivadas de ordem inteira na modelagem de sistemas biológicos, tal como o comportamento não linear e memória de longo prazo. Tais características obtidas pela introdução de derivadas fracionárias tendem a representar uma melhoria importante no modelo HNN e se assemelham mais com a realidade.

Assim, a relevância deste trabalho é justificada a partir do modelo escolhido para análise, já que o modelo de redes neurais de Hopfield junto ao cálculo fracionário nos auxiliam na compreensão do comportamento dos neurônios e, conseqüentemente, da memória. A incorporação dos dois termos de memória (cálculo fracionário e a rede neural de Hopfield) é, potencialmente, um grande passo em direção ao aprimoramento das características de memória e da eficiência do processamento de informações (LI et al., 2018).

## 1.3 Objetivos

### 1.3.1 Objetivo Geral

Esta dissertação tem como objetivo principal analisar a dinâmica neural com memória. Para tal, analisaremos o modelo proposto por Hopfield, haja vista que esta é considerada na literatura como sendo uma das mais eficientes (WILSON, 2009), e incorporaremos a memória através de uma dinâmica regida pelas derivadas de ordem fracionária.

### 1.3.2 Objetivos específicos

De modo específico, pretendemos:

- i) analisar as propriedades de estabilidade da dinâmica neural do modelo de Hopfield de ordem fracionária;
- ii) provar a boa colocação com dados iniciais e parâmetros;
- iii) comparar as soluções do modelo de ordem clássica com a de ordem fracionária.

## 1.4 Divisão Esquemática do Trabalho

Esta dissertação está organizada em cinco capítulos. No Capítulo 2, apresentaremos uma breve introdução ao cálculo de ordem não inteira, na Seção 2.11 mostraremos resultados de boa colocação para sistemas de equações com derivadas de ordem fracionárias segundo Caputo. Já na Seção 2.14, falaremos sobre a análise de estabilidade para equações diferenciais de ordem fracionária segundo Caputo. Os resultados apresentados aqui estão longe de esgotar os resultados sobre o assunto, mas servirão de base teórica para o desenvolvimento desta dissertação.

No Capítulo 3, apresentaremos o modelo de Hopfield de ordem inteira e sua estabilidade na Seção 3.1, a Implementação da derivada de Caputo no modelo de Hopfield na Seção 3.2, já na Seção 3.3 provaremos os resultados de boa colocação (existência e unicidade dos parâmetros do modelo) e estudaremos os resultados de estabilidade dos pontos estacionários do modelo proposto na Seção 3.4.

No Capítulo 4, discutiremos a implementação numérica do modelo e os resultados simulados.

Reservamos o Capítulo 5 para as conclusões e para discutir algumas direções futuras.

## Capítulo 2

# CÁLCULO FRACIONÁRIO

Neste capítulo apresentaremos um breve histórico e alguns conceitos básicos a respeito do cálculo de ordem arbitrária, conhecido como cálculo de ordem fracionária, bem como resultados de boa colocação para sistemas de equações diferenciais de ordem fracionária, que servirão de embasamento teórico para o desenvolvimento deste trabalho.

### 2.1 Origem do Cálculo Fracionário

As derivadas fracionárias, ou derivadas de ordem não inteira, existem há mais de 300 anos, tendo surgido, quase na mesma época que o cálculo de ordem inteira, numa famosa carta, em que L'Hôpital pergunta a Leibniz o significado de uma derivada de ordem meio, com a resposta de Leibniz, temos o início do Cálculo Fracionário (CF) (CAMARGO e OLIVEIRA, 2016).

A partir de então, o cálculo fracionário chamou a atenção de outros importantes matemáticos: Euler, em 1730, escreveu que a dificuldade em se obter tais derivadas poderia ser mais bem entendida com o auxílio de interpolações na derivada. Lagrange contribuiu de maneira indireta para o CF quando, em 1772, desenvolveu a chamada lei dos expoentes. E, em 1812, Laplace definiu a derivada fracionária em termos de uma integral, bem como outros matemáticos.

Devido às contribuições destes e de outros matemáticos, a teoria de operadores generalizados atingiu um nível de formalismo suficiente para dar início aos estudos mais modernos (CAMARGO, 2009). Depois de terem ficado quase esquecidas por um período de tempo, atualmente, possuem muitas aplicações na física, no processamento de sinais, na mecânica de fluidos, viscoelasticidade, biologia matemática, eletroquímica, sistemas de controle e muitos outros campos (MACHADO et al., 2011).

Para dar sequência aos estudos do CF, é necessário, antes de tudo, conhecer a Transformada de Laplace, a função Gama, a função Beta, a função de Mittag-Leffler e relembrar o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). Em seguida, apresentaremos a definição de integral de ordem fracionária com base em Riemann-Liouville, as derivadas de ordem fracionárias de Riemann-Liouville e Caputo. Também mostraremos os resultados gerais da existência de EDOs com derivadas fracionárias, unicidade e dependência contínua de dados iniciais.

## 2.2 Transformada de Laplace

A transformada de Laplace é uma ferramenta muito útil na análise de equações diferenciais lineares, principalmente no caso em que a equação possui coeficientes constantes (BOYCE e DIPRIMA, 2020). Portanto, nesta seção, veremos que a mesma metodologia também pode ser usada para resolver problemas de valor inicial, para isso, revisaremos brevemente a definição e algumas propriedades.

**Definição 2.1.** (BOYCE e DIPRIMA, 2020) Seja  $f(x)$  uma função definida para  $x \geq 0$  e que  $f$  satisfaz certas condições que serão especificadas mais adiante. Então, a transformada de Laplace de  $f$ , denotada por  $\mathcal{L}[f(x)]$  ou por  $F(s)$ , é definida pela seguinte integral imprópria

$$\mathcal{L}[f(x)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx. \quad (2.1)$$

onde  $s$  é um parâmetro complexo. O teorema a seguir garantirá a existência da transformada de Laplace  $F$  de uma função  $f$  se  $f$  satisfizer determinadas condições.

**Teorema 2.1.** Seja  $f$  uma função contínua no intervalo  $0 \leq x \leq A$  para qualquer  $A$  positivo e  $f(x) \leq Ke^{ax}$  para  $x \geq M$ , de modo que  $a$ ,  $K$  e  $M$  sejam constantes reais e  $K$  e  $M$  positivos. Então, a transformada de Laplace  $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$ , definida pela Equação (2.1), existe para  $\text{Re}(s) > a$ .

*Demonstração.* Mostraremos que a Equação (2.1), converge quando  $\text{Re}(s) > a$ . Para isso, vamos separar a integral imprópria, dada em (2.1), em duas partes, ou seja

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = \int_0^M e^{-sx} f(x) dx + \int_M^{\infty} e^{-sx} f(x) dx. \quad (2.2)$$

Percebe-se que a primeira integral à direita da igualdade existe, visto que  $f$  é uma função contínua no intervalo  $0 \leq x \leq A$ , em particular para  $A = M$ . Na sequência, mostraremos que a segunda integral também existe para  $x \geq M$ , assim temos:

$$\begin{aligned} \left| \int_M^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \right| &\leq \int_M^{\infty} |e^{-sx} f(x)| dx \\ &= \int_M^{\infty} e^{-sx} |f(x)| dx \\ &\leq \int_M^{\infty} e^{-sx} K e^{ax} dx \\ &= K \int_M^{\infty} e^{(a-s)x} dx \\ &= K \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_M^A e^{(a-s)x} dx \\ &= K \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{e^{(a-s)A} - e^{(a-s)M}}{a-s}. \end{aligned}$$

Dessa forma, a segunda integral da Equação (2.1) converge quando  $Re(s) > a$ , o que implica dizermos que

$$\left| \int_M^\infty e^{-sx} f(x) dx \right| \leq K \frac{e^{-(a-s)M}}{a-s} \text{ quando } Re(s) > a.$$

Portanto, a transformada de Laplace de  $f$ ,  $\mathcal{L}[f(x)]$  existe.  $\square$

*Observação 2.1.* Dizemos que uma função  $f$  é de ordem exponencial  $a$  se existem constantes  $M > 0$  e  $a \in \mathbb{R}$ , tal que para todo  $x > 0$ ,

$$|f(x)| \leq Me^{ax}. \quad (2.3)$$

A Transformada de Laplace Inversa, que será definida a seguir, é essencial quando se trata de recuperar a solução original de um problema de valor inicial, quando se utiliza o método da Transformada de Laplace em sua resolução.

**Definição 2.2.** Se  $f(s) = \mathcal{L}[f(x)]$  é a transformada de Laplace de uma função  $f(x)$ , de ordem exponencial  $\alpha$ , então dizemos que  $f(x) = \mathcal{L}^{-1}[f(s)]$  é a transformada de Laplace inversa da função  $F(s)$ , que pode ser definida pela integral complexa de Bromwich

$$\mathcal{L}^{-1}[f(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{sx} f(s) ds. \quad (2.4)$$

a qual  $\gamma$  denota um número complexo arbitrário, fixo, tal que  $Re(\gamma) > \alpha$ . A integral acima deve ser compreendida como uma integral complexa ao longo da reta vertical que passa pelo ponto  $Re(s) > \gamma$ .

## 2.3 Função Gama

A função gama, segundo BRAGA (2016), é bastante utilizada para exprimir resultados numéricos, embora raramente admita uma interpretação física, ela aparece frequentemente em problemas físicos.

Para CAMARGO e OLIVEIRA (2016), a função gama pode ser estudada de várias maneiras, uma delas se deu quando Carl Weierstrass utilizou-a em um produto infinito, já Gauss estudou através de um processo de limite, e Euler foi o primeiro matemático a introduzi-la com o objetivo de interpolar o fatorial sempre que o argumento da função fosse um inteiro. Assim definimos:

**Definição 2.3.** (BRAGA, 2016) Seja  $z = x+yi$  um número complexo. A função gama denotada por  $\Gamma$  e definida como

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (2.5)$$

Como podemos ver, essa integral converge quando  $Re(z) > 0$ , se  $0 < \alpha \leq x \leq \beta < \infty$ , pois

$$|t^{z-1}| = t^{x-1} \leq \begin{cases} t^{\alpha-1}, & 0 \leq t \leq 1 \\ t^{\beta-1}, & t \geq 1. \end{cases}$$

Logo,

$$\int_0^\infty |e^{-t}t^{z-1}|dt \leq \int_0^1 e^{-t}t^{\alpha-1}dt + \int_1^\infty e^{-t}t^{\beta-1}dt \leq \int_0^1 t^{\alpha-1}dt + \int_1^\infty e^{-t}t^{\beta-1}dt.$$

Percebe-se que a primeira integral converge quando temos  $\alpha > 0$ , já a segunda integral converge para qualquer valor de  $\beta$ , portanto, a função (2.5) passa a ser definida no semiplano  $Re(z) > 0$ . E, ainda,  $e^{-t}$  é uma função contínua de  $t$  e  $t^{z-1}$  é uma função analítica, conforme BROWN & CHURCHILL (2015). É possível notar que  $\Gamma(z)$  é uma função analítica no semiplano  $Re(z) > 0$  e suas derivadas podem ser obtidas por derivação sob o sinal de integração, garantida pela convergência da integral no intervalo  $0 < \alpha \leq x \leq \beta < \infty$ . Na Figura 2.1, podemos verificar sua representação gráfica.

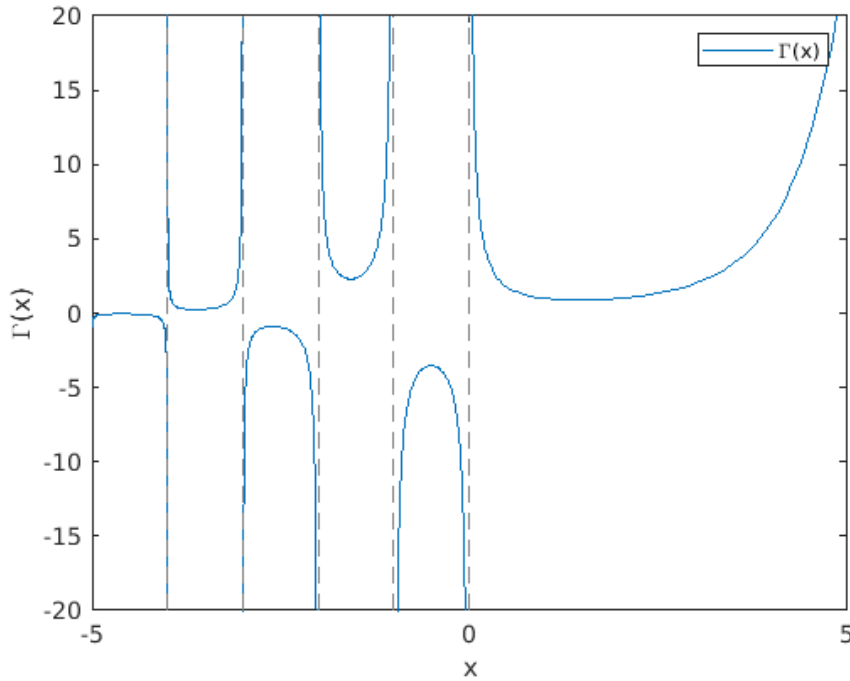


Figura 2.1: Função Gama

A partir da definição (2.5), efetuamos a integração por partes da integral:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^z dt = e^{-t}t^z \Big|_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1} dt = z\Gamma(z). \quad (2.6)$$

que satisfaz a seguinte igualdade de uma propriedade fundamental da função gama.

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (2.7)$$

Em particular, isso implica:

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (2.8)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ . Assim, a função  $\Gamma(z)$  é uma generalização do fatorial.

### 2.3.1 Exemplo

Usando a definição (2.7) com  $z = \frac{1}{2}$ , será obtido  $\Gamma(z)$  para  $z$  semi-inteiro:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n n!} \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

onde foi usada a notação fatorial dupla:

$$\begin{aligned} (2n-1)!! &= 1.3.5.7 \cdots (2n-1), \\ (2n)!! &= 2.4.6.8 \cdots (2n). \end{aligned}$$

## 2.4 Função Beta

Agora, apresentamos a definição da função beta e sua relação com a função gama.

**Definição 2.4.** Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  com  $Re(\alpha) > 0$  e  $Re(\beta) > 0$ , a função beta é denotada  $B(\alpha, \beta)$  e representada por

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt. \quad (2.9)$$

De acordo com [ANDREWS et al. \(1999\)](#), o seguinte teorema estabelece a relação entre as funções gama e beta.

**Teorema 2.2.** Seja  $Re(\alpha) > 0$  e  $Re(\beta) > 0$ , a função beta é denotada  $B(\alpha, \beta)$  e representada por

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \quad (2.10)$$

*Demonstração.* Considerando a equação (2.5), resolveremos o produto, ou seja

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt \int_0^\infty e^{-u}u^{\beta-1}du \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(t+u)}t^{\alpha-1}u^{\beta-1}dtd u.\end{aligned}$$

Introduzindo as mudanças das variáveis  $t = sv$  e  $u = s(1 - v)$ , temos  $t + u = s$  e  $dtd u = sdsdv$ . Assim,

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^1 \int_0^\infty e^{-s}s^{\alpha-1}v^{\alpha-1}s^{\beta-1}(1-v)^{\beta-1}sdsdv.$$

Separando as integrais duplas em relação a  $v$  e  $s$ , podemos, então escrever

$$\int_0^\infty e^{-s}s^{\alpha+\beta-2}sds \int_0^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}dv = \Gamma(\alpha + \beta)B(\alpha, \beta).$$

o que implica na equação (2.10). □

## 2.5 Função Mittag-Leffler

A função de Mittag-Leffler cumpre um papel importante no estudo de equações diferenciais de ordem fracionárias (CAMARGO e OLIVEIRA, 2016). Assim, ela é definida por séries de potências que dependem da função  $\Gamma(x)$ , apresentada na seção 2.3. A seguir, apresentaremos a definição e alguns teoremas que serão essenciais para o restante do trabalho.

**Definição 2.5.** Seja  $\alpha > 0$ , a função de Mittag-Leffler denotada por  $E_\alpha(x)$  com  $x \in \mathbb{C}$  é definida pela seguinte série de potências

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \quad (2.11)$$

podendo ser uma generalização da função exponencial, de modo que para  $\alpha = 1$ , temos

$$\begin{aligned}E_1(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k + 1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\ &= e^x.\end{aligned}$$

Acima, definimos a função Mittag-Leffler com um parâmetro, agora apresentaremos a função com dois parâmetros.

**Definição 2.6.** Sejam  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ , a função de Mittag-Leffler denotada por  $E_{\alpha,\beta}(x)$  é

definida da seguinte maneira

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \quad (2.12)$$

Percebemos que na equação (2.12), quando  $\beta = 1$ , a função de Mittag-Leffler se reduz à equação (2.11), ou seja

$$E_{\alpha,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_{\alpha}(x).$$

O próximo teorema nos garante a convergência da função de Mittag-Leffler com dois parâmetros.

**Teorema 2.3.** Sejam  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ , a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros  $E_{\alpha,\beta}(x)$  é convergente para todo  $x \in \mathbb{C}$ .

*Demonstração.* Da série de potências definida na equação (2.12), temos

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ com } a_k = \frac{1}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

De acordo com DIETHELM (2010) (Teorema 4.1 p. 68), podemos utilizar a expressão denominada por Stirling's, onde  $x \rightarrow \infty$ ,

$$\Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x} (1 + o(1)).$$

Assim, tem-se

$$a_k^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{e}{\alpha k + \beta}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{k}} (2\pi(\alpha k + \beta))^{-\frac{1}{2k}} (1 + o(1)) \rightarrow 0.$$

com  $k \rightarrow \infty$  desde que  $\alpha > 0$ . Portanto, de acordo com o critério da raiz, o raio de convergência das séries de potências é infinito.  $\square$

## 2.6 Teorema Fundamental do Cálculo

Se  $f$  for contínua em  $[a, b]$ , então a função  $g$  definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt \quad a \leq x \leq b. \quad (2.13)$$

é contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$  e  $g'(x) = f(x)$ .

O teorema citado e sua respectiva demonstração podem ser encontrados em STEWART (2016).

Percebemos que a equação (2.13) pode ser reescrita como

$$\frac{d}{d(x)} \int_a^x f(t) dt = f(x). \quad (2.14)$$

o que implica em dizer que se  $f$  for integrado e o resultado derivado, obteremos a função original  $f$ . Ou seja, a relação entre os operadores de diferenciação e os operadores de integração são constituintes do TFC, sendo estes definidos nos espaços de funções adequadas.

**Definição 2.7.** Denotamos por  $D$  o operador que mapeia uma função diferenciável em sua derivada, de forma que

$$Df(t) = f'(t). \quad (2.15)$$

Já para funções integráveis definidas em conjuntos compactos e sua primitiva centrada em  $a$ , definiremos o operador  $I_a$ , de modo que

$$I_a f(t) = \int_a^x f(t) dt \quad a \leq x \leq b. \quad (2.16)$$

Usaremos mais um parâmetro para representar de forma iterada, os operadores diferenciável e integral, quando ambos assumem um  $\alpha \in \mathbb{N}$ . Dessa forma, a simbologia dos operadores ficará  $D^\alpha$  e  $I_a^\alpha$ .

**Lema 2.4.** Seja  $f$  uma função integrável em  $[a, b]$ . Então, para qualquer  $a \leq x \leq b$ , temos,

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{(\alpha - 1)!} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} f(t) dt. \quad (2.17)$$

Para qualquer função  $f$  que possui  $\alpha$ -ésima derivadas contínuas em  $[a, b]$  com  $\beta > \alpha$  vale

$$D^\alpha f = D^\beta I_a^{\beta-\alpha} f. \quad (2.18)$$

Quando  $\alpha$  assume qualquer valor pertencente ao conjunto dos Números Complexos no Lema 2.4, temos uma breve introdução ao CF. Percebe-se na integral a necessidade da noção de fatorial, a qual foi apresentada na seção 2.4

## 2.7 Integral Fracionária de Riemann-Liouville

A integral fracionária definida por Riemann e Liouville será o ponto de partida para o estudo das derivadas fracionárias. De acordo com a abordagem de Riemann-Liouville para o cálculo fracionário, a noção de integral fracionária de ordem  $\alpha$  com  $\alpha > 0$  é uma consequência natural da expressão bem conhecida (geralmente atribuída a Cauchy) que reduz o cálculo da primitiva  $n$ -vezes de uma função  $f(x)$  para uma única integral do tipo convolução (GORENFLO e MAINARDI, 2008).

Seja ela:

$$I_a^n f(x) := f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad a \leq x \leq b \quad e \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.19)$$

Nota-se que quando  $x$  assume o valor 0 com suas derivadas de ordem  $1, 2, \dots, n-1$ , a função  $f(x)$  desaparece, o que nos obriga a dizer que  $f(x)$ , e a partir de agora  $f_n(x)$ , sejam funções causais, ou seja, desaparecendo identicamente para  $x < 0$ . Desse modo, a expressão 3.11 nos leva a estender os valores positivos para a função gama. De fato,  $\Gamma(n) = (n-1)!$ , introduzindo um número real positivo  $\alpha$ , definimos a integral fracionária de Riemann-Liouville por

$$I_a^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad a \leq x \leq b \quad e \quad \alpha \in \mathbb{R}^+. \quad (2.20)$$

Percebe-se que quando  $\alpha$  assume o valor 0, o operador integral fracionário  $I^0 f(x)$  vira um operador identidade, ou seja:

$$I_a^0 f(x) := \mathbb{I} f(x) = f(x). \quad (2.21)$$

onde  $\mathbb{I}$  é o operador identidade.

**Teorema 2.5.** Sejam  $\alpha, \beta \geq 0$  com  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , então temos:

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(x) = I_a^{\alpha+\beta} f(x). \quad (2.22)$$

em particular vale a propriedade comutativa.

*Demonstração.* utilizando a definição da integral fracionária de Riemann-Liouville (2.20), obtém-se:

$$\begin{aligned} I_a^\alpha I_a^\beta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \left( \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-\xi)^{\beta-1} f(\xi) d\xi \right) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^t (x-t)^{\alpha-1} (t-\xi)^{\beta-1} f(\xi) dt d\xi. \end{aligned}$$

Aplicando o teorema de Fubini, temos:

$$\begin{aligned} I_a^\alpha I_a^\beta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\xi) \left( \int_\xi^x (x-t)^{\alpha-1} (t-\xi)^{\beta-1} dt \right) d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_\xi^x (x-t)^{\alpha-1} (t-\xi)^{\beta-1} f(\xi) dt d\xi. \end{aligned}$$

Com a mudança de variável  $t = \xi + u(x - \xi)$  e  $dt = du$ , escreve-se como:

$$\begin{aligned} I_a^\alpha I_a^\beta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\xi) \left( \int_0^1 ((1-u)(x-\xi))^{\alpha-1} + ((x-\xi)u)^{\beta-1} du \right) d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\xi) \left( \int_0^1 (x-\xi)^{\alpha+\beta-1} (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du \right) d\xi. \end{aligned}$$

Usando a função Beta, definida no teorema [2.2](#), temos que

$$\begin{aligned} I_a^\alpha I_a^\beta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-\xi)^{\alpha+\beta-1} f(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-\xi)^{\alpha+\beta-1} f(\xi) d\xi \\ &= I_a^{\alpha+\beta} f(x) \end{aligned}$$

onde queríamos chegar. □

A integral fracionária  $I_a^\alpha f(x)$  pode ser interpretada também como o produto de convolução entre as funções  $f(x)$  e  $\phi(x)$ . Uma vez conhecida a função  $f(x)$ , passamos a definir  $\phi(x)$ , como:

$$\phi_\alpha(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \quad (2.23)$$

ou seja,

$$\phi_\alpha(x) * f(x) = \int_0^x \phi_\alpha(x-t)^{\alpha-1} f(t) dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t) dt = I_0^\alpha f(x). \quad (2.24)$$

A partir da definição e das demonstrações discutiremos dois exemplos referentes à Integral de ordem fracionária segundo Riemann-Liouville.

## 2.7.1 Exemplos

A fim de elucidar a definição apresentada para a Integral fracionária de Riemann-Liouville, calculamos a integral de ordem  $\alpha$  para algumas funções. Começamos demonstrando quanto vale a integral da função potência, já no segundo, aplicamos a definição da integral de ordem inteira e de ordem fracionária em uma função, objetivando comparar os resultados.

### 2.7.1.1 Exemplo 1

Podemos também encontrar uma regra de integração fracionária de ordem  $\alpha$  para a função  $f(x) = x^\mu$  com  $x > 0$  e  $\mu > -1$ .

Pela definição da Equação [\(2.20\)](#), temos:

$$I_a^\alpha x^\mu = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} t^\mu dt. \quad (2.25)$$

Integrando por partes:

$$\begin{aligned} I_0^\alpha x^\mu &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( -\frac{t^\mu (x-t)^\alpha}{\alpha} \Big|_0^x - \int_0^x \frac{(x-t)^\alpha}{\alpha} \mu t^{\mu-1} dt \right) \\ &= -\frac{\mu}{\Gamma(\alpha)\alpha} \int_0^x (x-t)^\alpha t^{\mu-1} dt. \end{aligned}$$

Aplicando novamente:

$$\begin{aligned} I_0^\alpha x^\mu &= -\frac{\mu}{\Gamma(\alpha)\alpha} \left( -\frac{t^{\mu-1} (x-t)^{\alpha+1}}{\alpha} \Big|_0^x - \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha+1}}{\alpha+1} (\mu-1) t^{\mu-2} dt \right) \\ &= \frac{\mu(\mu-1)}{\Gamma(\alpha)\alpha(\alpha+1)} \int_0^x (x-t)^{\alpha+1} t^{\mu-2} dt. \end{aligned}$$

Conforme os resultados, podemos integrar para  $\mu$  integrações, ou seja:

$$\begin{aligned} I_0^\alpha x^\mu &= \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots}{\Gamma(\alpha)\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1+\mu} t^{\mu-\mu} dt \\ &= \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots}{\Gamma(\alpha)\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots} \int_0^x (x-t)^{\alpha+\mu-1} dt \\ &= \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots}{\Gamma(\alpha)\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots} \left( -\frac{(x-t)^{\alpha+\mu}}{\alpha+\mu} \Big|_0^x \right) \\ &= \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots 2.1}{\Gamma(\alpha)\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots (\alpha+\mu)} x^{\alpha+\mu} \\ &= \frac{\mu!}{\Gamma(\alpha+\mu+1)} x^{\alpha+\mu} \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)} x^{\alpha+\mu}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Como vimos, a função gama diverge para valores negativos, ou seja, a expressão acima exige a mesma restrição, tal condição será satisfeita para qualquer  $\mu > -1$  e para qualquer  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ .

### 2.7.1.2 Exemplo 2

Calculemos uma integral clássica e uma integral fracionária para função  $f(x) = x^2$ . Para isso, será usada a definição (2.19) para o caso  $\alpha = 1$  e a definição (2.20) para  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

Para  $\alpha = 1$ , temos:

$$\begin{aligned} I_0^1 f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^x (x-t)^{1-1} t^2 dt \\ &= \int_0^x t^2 dt \\ &= \frac{x^3}{3}. \end{aligned}$$

Já para  $\alpha = \frac{1}{2}$ , segue:

$$\begin{aligned} I_0^{\frac{1}{2}} x^2 &= \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}+1+2)} x^{2+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{7}{2})} x^{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

Sabendo que  $\Gamma(3) = 2!$ ,  $\Gamma(\frac{7}{2}) = (\frac{5}{2})(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})$  e  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ , temos:

$$\begin{aligned} I^{\frac{1}{2}} x^2 &= \frac{2}{\frac{15}{8}\sqrt{\pi}} x^{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{16}{15\sqrt{\pi}} x^{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

## 2.7.2 Transformada de Laplace da Integral de Riemann-Liouville

Pela equação (2.20), segue que a transformada de Laplace da integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem  $\alpha$  de uma função  $f$ , é

$$\mathcal{L}[I_a^\alpha f(x)] = \mathcal{L}[\phi_\alpha(x) * f(x)] = \mathcal{L}[\phi_\alpha(x)] \mathcal{L}[f(x)].$$

Aplicando a definição 2.1 da transformada de Laplace e usando a equação (2.23), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[I_0^\alpha f(x)] &= \mathcal{L}[f(x)] \int_0^\infty e^{-sx} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dx \\ &= \frac{\mathcal{L}[f(x)]}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-sx} x^{\alpha-1} dx. \end{aligned}$$

Realizando a mudança de variável  $u = sx$ , temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[I_0^\alpha f(x)] &= \frac{\mathcal{L}[f(x)]}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^u \frac{u^{\alpha-1}}{s^{\alpha-1}} \frac{du}{s} \\ &= \frac{\mathcal{L}[f(x)]}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}}{s^\alpha} e^u du \\ &= \frac{\mathcal{L}[f(x)] s^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^u du \\ &= \frac{\mathcal{L}[f(x)] s^{-\alpha}}{\cancel{\Gamma(\alpha)}} \cancel{\Gamma(\alpha)} \\ &= \frac{\mathcal{L}[f(x)]}{s^\alpha}. \end{aligned}$$

Portanto, a transformada de Laplace da integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem

$\alpha$  de uma função  $f$  é

$$\mathcal{L}[I_0^\alpha f(x)] = \frac{\mathcal{L}[f(x)]}{s^\alpha}. \quad (2.27)$$

Uma vez definido o operador integral de ordem fracionária e algumas propriedades, passaremos à definição de derivada de ordem fracionária segundo Riemann-Liouville.

## 2.8 Derivada Fracionária de Riemann-Liouville

A definição da derivada de ordem fracionária segundo Riemann-Liouville é baseada principalmente no fato de que a derivada é a operação inversa da integral na lei dos expoentes, e é determinado que a derivada fracionária é a derivada inteira de uma integral de ordem fracionária (DIETHELM, 2010).

**Definição 2.8.** Sejam  $\alpha$  um número complexo e  $m$  o menor inteiro maior que  $Re(\alpha)$  tal que  $Re(\alpha) > 0$ , ou seja,  $m - 1 < Re(\alpha) \leq m$ . A derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de uma função casual  $f$  é representada por:

$${}^{RL}D_a^\alpha f(x) = D^m[I_a^{m-\alpha} f(x)]. \quad (2.28)$$

a qual  $D^m$  é a derivada de ordem inteira e  $I^{m-\alpha}$  a integral fracionária de Riemann-Liouville.

Se  $\alpha = m$ , temos

$${}^{RL}D_a^\alpha f(x) = D^m[I_a^0 f(x)] = \frac{d^m}{dx^m} f(x).$$

e se  $m - 1 < Re(\alpha) \leq m$  temos que

$${}^{RL}D_a^\alpha f(x) = D^m[I_a^{m-\alpha} f(x)] = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_a^x \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau.$$

logo

$${}^{RL}D_a^\alpha f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_a^x \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau, & \text{se } m - 1 < Re(\alpha) \leq m \\ \frac{d^m}{dx^m} f(x), & \text{se } \alpha = m. \end{cases} \quad (2.29)$$

A partir dos estudos de (ORTIGUEIRA e MACHADO (2015)), mostraremos algumas propriedades que serão importantes para o decorrer do trabalho.

**Teorema 2.6.** Sejam  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $f, g$  funções e  $\lambda, \beta$  escalares tal que  $Re(\alpha) > 0$ . Então, para  $m - 1 < Re(\alpha) \leq m$ , temos:

$${}^{RL}D_a^\alpha (\lambda f + \beta g)(x) = \lambda {}^{RL}D_a^\alpha f(x) + \beta {}^{RL}D_a^\alpha g(x). \quad (2.30)$$

*Demonstração.* Utilizando a definição da derivada fracionária de Riemann-Liouville, obtém-se:

$${}^{RL}D_a^\alpha(\lambda f + \beta g)(x) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_a^x \frac{(\lambda f + \beta g)(\tau)}{(x - \tau)^{\alpha-m+1}} d\tau.$$

Colocando em evidência a função à frente da integral, obtemos

$$\frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \left[ \lambda \int_a^x \frac{f(\tau)}{(x - \tau)^{\alpha-m+1}} d\tau + \beta \int_a^x \frac{g(\tau)}{(x - \tau)^{\alpha-m+1}} d\tau \right].$$

Separando as funções  $f$  e  $g$ , chegamos a

$$\frac{\lambda}{\Gamma(m - \alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_a^x \frac{f(\tau)}{(x - \tau)^{\alpha-m+1}} d\tau + \frac{\beta}{\Gamma(m - \alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_a^x \frac{g(\tau)}{(x - \tau)^{\alpha-m+1}} d\tau.$$

Assim, temos

$$\lambda {}^{RL}D_a^\alpha f(x) + \beta {}^{RL}D_a^\alpha g(x).$$

logo, concluímos que a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville é um operador linear em relação à soma de funções e produto por escalar.  $\square$

A partir da definição e das demonstrações, discutiremos dois exemplos referentes à derivada de ordem fracionária segundo Riemann-Liouville.

## 2.8.1 Exemplos

Para esclarecer a definição de derivada fracionária de Riemann-Liouville, calculamos a derivada de ordem  $\alpha$  para algumas funções. No primeiro exemplo, começamos a demonstrar quanto vale a função Potência, assim como foi feito na integral fracionária de Riemann-Liouville, já no segundo, vamos demonstrar que a derivada fracionária de uma constante segundo Riemann-Liouville é diferente de zero.

### 2.8.1.1 Exemplo 1

Vamos calcular a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de ordem  $\alpha$ , sendo  $Re(\alpha) > 0$ , da função  $f(x) = x^\mu$  com  $x > 0$ ,  $\mu > -1$  e  $\alpha - \mu \notin \mathbb{N}^*$ .

Pela definição da Equação (2.28), temos:

$${}^{RL}D_a^\alpha f(x) = D^m [I_a^{m-\alpha} x^\mu]. \quad (2.31)$$

O cálculo da integral fracionária de Riemann-Liouville  $I_a^{m-\alpha} x^\mu$  foi obtido no exemplo 2.7.1.1,

dado pela Equação (2.26), sendo ela

$$I_a^{m-\alpha} x^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)} x^{\alpha+\mu}.$$

Considerando este resultado na Equação (2.31), tem-se

$$D^m [I_a^{m-\alpha} x^\mu] = D^m \left[ \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)} x^{\alpha+\mu} \right]. \quad (2.32)$$

ou ainda

$${}^{RL}D_a^\alpha x^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu-m+1)} x^{\alpha+\mu-m}. \quad (2.33)$$

Tendo em vista que  $m - \alpha \rightarrow \alpha$ , segue o resultado

$${}^{RL}D_a^\alpha x^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} x^{\mu-\alpha}. \quad (2.34)$$

### 2.8.1.2 Exemplo 2

Calculamos a derivada de Riemann-Liouville de ordem  $\alpha$  da função constante,  ${}^{RL}D_a^\alpha k$  com  $k \in \mathbb{R}^*$ , para tanto, partimos da Equação (2.34), isto é,

$${}^{RL}D_a^\alpha x^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} x^{\mu-\alpha}.$$

Admitindo  $\mu = 0$  e  $x = k$ , obtemos

$${}^{RL}D_a^\alpha k^0 = \frac{k^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha+1)}. \quad (2.35)$$

o que implica, na função constante  $f(x) = 1$ , a qual a derivada de Riemann-Liouville é diferente de 0.

## 2.8.2 Transformada de Laplace da Derivada de Riemann-Liouville

A transformada de Laplace da derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem  $\alpha$  de uma função  $f$ , é

$$\mathcal{L}[{}^{RL}D_a^\alpha f(x)] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} D^k I_a^{m-\alpha} s^{m-k-1} f(0). \quad (2.36)$$

na qual  $m$  é o menor inteiro maior que  $\alpha > 0$ .

Pela definição da transformada de Laplace para derivadas e usando a equação (2.28), obte-

mos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[{}^{RL}D_a^\alpha f(x)] &= \mathcal{L}[D^n I_a^{m-\alpha} f(x)] \\
&= s^m \mathcal{L}[I_a^{m-\alpha} f(x)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} D^k [I_a^{m-\alpha} f(0)] \\
&= s^m [s^{-(m-\alpha)} F(s)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} D^{k-(m-\alpha)} f(0) \\
&= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} D^k I_a^{m-\alpha} s^{m-k-1} f(0).
\end{aligned}$$

## 2.9 Derivada Fracionária de Caputo

Como visto na seção anterior, a derivada fracionária de Riemann-Liouville nada mais é que a derivada de ordem inteira de uma integral de ordem fracionária. Já a derivada de ordem fracionária segundo Caputo é bem similar à derivada de Riemann-Liouville, porém o que as difere é a inversão da ordem de integração fracionária com a ordem de derivação. Na sequência, definiremos:

**Definição 2.9.** Sejam  $\alpha$  um número complexo e  $m$  o menor inteiro maior que  $Re(\alpha)$  tal que  $Re(\alpha) > 0$ , ou seja,  $m - 1 < Re(\alpha) \leq m$ . A derivada fracionária segundo Caputo de uma função causal  $f$  é dada por:

$${}^C D_a^\alpha f(x) = I_a^{m-\alpha} D^m f(x). \quad (2.37)$$

em que  $D^m$  é a derivada de ordem fracionária segundo Caputo de ordem  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

Se  $\alpha = m$ , temos

$${}^C D_a^\alpha f(x) = I_a^0 D^m f(x) = \frac{d^m}{dx^m} f(x).$$

e se  $m - 1 < Re(\alpha) \leq m$  temos que

$${}^C D_a^\alpha f(x) = I_a^{m-\alpha} D^m f(x) = I_a^{m-\alpha} f^m(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x \frac{f^m(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau.$$

logo

$${}^C D_a^\alpha f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x \frac{f^m(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau, & \text{se } m - 1 < Re(\alpha) \leq m \\ \frac{d^m}{dx^m} f(x), & \text{se } \alpha = m. \end{cases} \quad (2.38)$$

A definição da derivada fracionária de Caputo é mais restritiva, comparada à derivada fracionária de Riemann-Liouville, pois para a derivada fracionária de Caputo de ordem  $\alpha$ , de uma função  $f$  é necessária a integrabilidade da derivada de ordem  $m$  da função  $f$ , sendo  $m - 1 < Re(\alpha) \leq m$  (CAMARGO, 2009). A partir dos estudos de (ORTIGUEIRA e MACHADO

(2015), mostraremos duas propriedades, sendo que a primeira trata-se da derivada de ordem fracionária de uma constante, trazida no teorema a seguir.

**Teorema 2.7.** Sejam  $\alpha \in \mathbb{R}$  com  $m - 1 < \alpha \leq m$  onde  $m \in \mathbb{N}$  e  $k$  uma constante com  $k \in \mathbb{R}^*$  desse modo, temos:

$${}^C D_a^\alpha k = 0. \quad (2.39)$$

*Demonstração.* Utilizando a Equação (2.37), temos:

$${}^C D_a^\alpha k = I_a^{m-\alpha} D^m k.$$

Derivando a função constante  $k$ , observa-se que

$${}^C D_a^\alpha k = I_a^{m-\alpha} 0.$$

Desse modo, obtemos

$${}^C D_a^\alpha k = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x \frac{1}{(x-\tau)^{\alpha-m+1}} \cdot 0 d\tau = 0.$$

□

Mostramos que a derivada de Caputo de ordem fracionária de uma constante sempre será 0. Outra propriedade importante é a da linearidade, que será apresentada no próximo teorema.

**Teorema 2.8.** Sejam  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $f, g$  funções e  $\lambda, \beta$  escalares tal que  $Re(\alpha) > 0$ . Então, para  $m - 1 < Re(\alpha) \leq m$ , temos:

$${}^C D_a^\alpha (\lambda f + \beta g)(x) = \lambda {}^C D_a^\alpha f(x) + \beta {}^C D_a^\alpha g(x). \quad (2.40)$$

*Demonstração.* Utilizando a definição da derivada fracionária do Caputo, temos:

$${}^C D_a^\alpha (\lambda f + \beta g)(x) = I_a^{m-\alpha} [D^m (\lambda f + \beta g)(x)].$$

Multiplicando a derivada pelas funções  $f, g$  e seus escalares, obtemos

$$I_a^{m-\alpha} [\lambda D^m f(x) + \beta D^m g(x)].$$

Fazendo a distributiva da integral com as funções, chegamos a

$$\lambda I_a^{m-\alpha} D^m f(x) + \beta I_a^{m-\alpha} D^m g(x).$$

Logo, conclui-se que

$$\lambda^C D_a^\alpha f(x) + \beta^C D_a^\alpha g(x).$$

a derivada de Caputo de ordem fracionária é linear em relação à soma de funções e o produto por escalar, conforme mostramos.  $\square$

A partir da definição e das demonstrações, discutiremos dois exemplos referentes à derivada de ordem fracionária segundo Caputo.

## 2.9.1 Exemplos

O primeiro exemplo trata-se de uma função Potência, já o segundo, é só uma aplicação para diferenciar as derivadas clássicas de uma derivada fracionária.

### 2.9.1.1 Exemplo 1

Conforme calculamos para a Integral e à Derivada Riemann-Liouville, calcularemos para a derivada fracionária segundo Caputo de ordem  $\alpha$ , sendo  $Re(\alpha) > 0$ , da função  $f(x) = x^\mu$  com  $x > 0$  e  $\mu \neq 0$ . Sabemos que

$$D^m x^\mu = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu - m + 1)} x^{\mu-m}.$$

Conforme este resultado na Equação (2.37), tem-se

$${}^C D_a^\alpha x^\mu = I_a^{m-\alpha} \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu - m + 1)} x^{\mu-m}. \quad (2.41)$$

Com base o exemplo 2.7.1.1 representado pela Equação (2.26), podemos chegar na solução de  $I_a^{m-\alpha} x^{\mu-m}$  sendo ela

$$I_a^{m-\alpha} x^{\mu-m} = \frac{\Gamma(\mu - m + 1)}{\Gamma(\alpha + \mu - m + 1)} x^{\alpha+\mu-m}. \quad (2.42)$$

de acordo com os resultados das Equações (2.41) e (2.42), obtemos

$${}^C D_a^\alpha x^\mu = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu - m + 1)} \frac{\Gamma(\mu - m + 1)}{\Gamma(\alpha + \mu - m + 1)} x^{\alpha+\mu-m}. \quad (2.43)$$

Tendo em vista que  $m - \alpha \rightarrow \alpha$ , segue o resultado

$${}^C D_a^\alpha x^\mu = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu - \alpha + 1)} x^{\mu-\alpha}. \quad (2.44)$$

Pode-se notar que a derivada da função potência, de acordo com Riemann-Liouville, é dada pela equação (2.34), e é similar com a derivada da função potência, de acordo com Caputo, dada pela equação (2.44).

### 2.9.1.2 Exemplo 2

Seja  $f(x) = x^2$ , calcularemos a derivada fracionária segundo Caputo de ordem  $\alpha = \frac{3}{2}$ . Para tanto, partimos da Equação (2.44), isto é,

$${}^C D_a^{\frac{3}{2}} x^2 = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2 - \frac{3}{2} + 1)} x^{2-\frac{3}{2}}.$$

ou ainda

$${}^C D_a^{\frac{3}{2}} x^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}}. \quad (2.45)$$

Como  $\Gamma(3) = 2$  e  $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , temos

$${}^C D_a^{\frac{3}{2}} x^2 = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}.$$

## 2.9.2 Transformada de Laplace da Derivada de Caputo

A transformada de Laplace da derivada fracionária segundo Caputo de ordem  $\alpha$  de uma função  $f$ , é

$$\mathcal{L}[{}^C D_a^\alpha f(x)] = s^\alpha f(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^k. \quad (2.46)$$

na qual  $m$  é o menor inteiro maior que  $\alpha > 0$ .

Aplicando a transformada de Laplace da integral de Riemann-Liouville e usando a definição de Caputo, dada pela equação (2.37), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[{}^C D_a^\alpha f(x)] &= \mathcal{L}[I_a^{m-\alpha}(D^m f(x))] \\ &= s^{-m+\alpha} \mathcal{L}[D^m f(x)] \\ &= s^{-m+\alpha} \left( s^m \mathcal{L}[f(x)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} f^k(0) \right) \\ &= s^\alpha f(s) - s^{-m+\alpha} \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} f^k(0) \\ &= s^\alpha f(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^k(0). \end{aligned}$$

## 2.10 Comparação entre a derivada fracionária de Riemann-Liouville e de Caputo

A partir das seções anteriores, conseguimos notar que a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville é a derivada de ordem inteira de uma integral fracionária e a derivada fracionária segundo Caputo inverte a ordem, ou seja, é a integral fracionária de uma derivada de ordem inteira. Tendo isso como base, o objetivo desta seção é mostrar qual derivada de ordem fracionária melhor se aplica ao contexto da pesquisa, fazendo uma comparação entre as derivadas de Riemann-Liouville e Caputo.

Segundo CAMARGO (2009), a primeira diferença que devemos notar entre as derivadas é que se  $f(x)$  é uma função na qual as integrais e derivadas fracionárias podem ser aplicadas, assim temos

$${}^{RL}D_a^\alpha f(x) = D^m[I_a^{m-\alpha}f(x)] \neq I_a^{m-\alpha}[D^m f(x)] = {}^CD_a^\alpha f(x). \quad (2.47)$$

em outras palavras, nem sempre é possível permutar integrais fracionárias com derivadas e, se o fizermos, mudaremos o resultado. Deve-se notar que se  $f(x)$  e suas derivadas de ordem inteira forem menores que  $m$  se anulam em  $x = 0^+$ , o que torna a permutação dos operadores verdadeiras. É por essa razão que a função potência  $f(x) = x^\mu$  com  $x > 0$  e  $\mu \neq 0$  manteve os mesmos resultados para as derivadas fracionárias de ordem  $\alpha$  de Riemann-Liouville e Caputo, o que leva a  $f^{(n)}(0^+) = 0 \forall n \leq m-1$ . Em seguida, com base nos estudos de GORENFLO e MAI-NARDI (2008), demonstraremos o teorema que relaciona as equações da derivada fracionária de Riemann-Liouville e da derivada fracionária de Caputo.

**Teorema 2.9.** Sejam  $\alpha \in \mathbb{C}$  com  $m-1 < \text{Re}(\alpha) \leq m$  e  $x > 1$ . Assim, a equação que relaciona a derivada fracionária de Riemann-Liouville com a derivada fracionária de Caputo é

$${}^CD_a^\alpha f(x) = {}^{RL}D_a^\alpha f(x) - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{x^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} f^{(n)}(0^+). \quad (2.48)$$

Com base no resultado da Equação (2.34), pode-se reescrever a (2.48) como

$${}^CD_a^\alpha f(x) = {}^{RL}D_a^\alpha \left[ f(x) - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0^+) \right]. \quad (2.49)$$

*Demonstração.* Fazendo a distributiva, temos:

$${}^CD_a^\alpha f(x) = {}^{RL}D_a^\alpha f(x) - {}^{RL}D_a^\alpha \sum_{n=0}^{m-1} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0^+).$$

Expandindo a segunda derivada fracionária de Riemann-Liouville, obtemos:

$${}^CD_a^\alpha f(x) = {}^{RL}D_a^\alpha f(x) - D^m \left[ \sum_{n=0}^{m-1} \frac{f^{(n)}(0^+)}{n!} I_a^{m-\alpha} x^n \right].$$

Aplicando a Equação (2.26), que é a integral fracionária de uma função potência, tem-se

$${}^C D_a^\alpha f(x) = {}^{RL} D_a^\alpha f(x) - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{f^{(n)}(0)^+}{n!} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n-\alpha+1)} D^m [x^{m-\alpha+n}].$$

Resolvendo a derivada inteira de uma potência para m, temos

$${}^C D_a^\alpha f(x) = {}^{RL} D_a^\alpha f(x) - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{f^{(n)}(0)^+}{n!} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n-\alpha+1)} \frac{\Gamma(n+m-\alpha+1)}{\Gamma(m+n-\alpha+1-m)} x^{m-\alpha+n-m}.$$

O que nos leva à Equação (2.48)

$${}^C D_a^\alpha f(x) = {}^{RL} D_a^\alpha f(x) - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{x^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} f^{(n)}(0^+)$$

Como queríamos mostrar. □

A diferença entre as definições de Riemann-Liouville e Caputo é o resultado da aplicação do cálculo derivado da função constante. Como a fórmula proposta por Caputo é zero, o mesmo não acontecerá com a fórmula de Riemann-Liouville, como demonstramos nas seções anteriores pelas equações (2.35) e (2.7). A partir desses dois resultados, os autores CHEN e HOLM (2003) e DIETHELM (2010) destacam que a derivada fracionária de Caputo é mais significativa para a modelagem de dinâmica de valores iniciais, uma vez que a derivada fracionária de uma constante é nula, o que torna os resultados mais precisos. Portanto, a derivada fracionária de Caputo foi escolhida para modelar o problema.

## 2.11 Sistemas de Equações Diferenciais de Ordem Fracionária - EDOF

Para uma melhor análise, serão apresentadas condições necessárias e suficientes para obter resultados de boa colocação para sistemas de equações com derivadas de ordem fracionárias segundo Caputo, ou seja, mostraremos os resultados para satisfazer o Problema do Valor Inicial - PVI de Existência, Unicidade e Dependência contínua que serão apresentados a seguir. Para este tipo de discussão, contamos com os estudos de DIETHELM (2010), que esclarece bem o assunto.

### 2.11.1 Existência

Primeiramente, vamos introduzir a definição para um sistema de equações de derivadas de ordem fracionária segundo Caputo.

**Definição 2.10.** O Problema de Valor Inicial de ordem fracionária segundo Caputo pode ser representado da seguinte forma

$$\begin{aligned} {}^C D_a^\alpha y(x) &= f(x, y(x)) \\ {}^C D^k y(0) &= y_0^k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (2.50)$$

onde  $n = \lceil \alpha \rceil$ ,  ${}^C D_a^\alpha$  é um operador diferencial fracionário definido por Caputo, conforme definido na Seção 2.9.  ${}^C D^k$  é a condição inicial e assumimos que está centrado em zero. O próximo teorema nos garante um resultado de existência que corresponde ao teorema de existência clássica de Peano para equações de ordem inteira.

**Teorema 2.10.** Sejam  $\alpha > 0$  e  $n = \lceil \alpha \rceil$ . Ainda  $y_0^0, \dots, y_0^{n-1} \in \mathbb{R}$  com  $K > 0$  e  $h^* > 0$ . Definimos

$$G := \left\{ (x, y) : x \in [0, h^*], \left| y - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k y_0^k}{k!} \right| \leq K \right\}.$$

de modo que a função  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua. Além disso, sejam

$$\begin{aligned} M &:= \sup_{(x,z) \in G} |f(x, z)| \\ &\text{e} \\ h &:= \begin{cases} h^*, & \text{se } M = 0; \\ \min \left\{ h^*, \left( \frac{K(\Gamma + 1)}{M} \right)^{\frac{1}{n}} \right\}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Nessas condições, existe uma função  $y \in C[0, h]$  que resolve o problema do valor inicial (2.10).

*Demonstração.* No caso de  $M = 0$ , para todo  $(x, y) \in G$ , temos  $f(x, y) = 0$ . Logo, a função  $y : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $y(x) = \sum_k \frac{x^k y_0^k}{k!}$  é solução do PVI (2.10). Portanto, propomos um polinômio  $T$  que satisfaça as condições iniciais tais que

$$T(x) = \sum_k \frac{x^k y_0^k}{k!}. \quad (2.51)$$

e o conjunto

$$U := \{y \in C[0, h] : \|y - T\|_\infty \leq k\}. \quad (2.52)$$

onde  $U$  é um subconjunto fechado e convexo do espaço de Banach de todas as funções contínuas em  $[0, h]$ , equipado com a norma de Chebyshev (DIETHELM, 2010). Portanto,  $U$  também é um espaço de Banach (consultar o apêndice A.2). Como o polinômio  $T$  é um elemento de  $U$ , sabemos que  $U$  não é vazio. Neste conjunto, o operador  $A$  é definido por

$$(Ay)(x) = T(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt. \quad (2.53)$$

Usando esse operador, a equação de que precisamos para provar sua solvência pode ser reescrita como  $y = Ay$ . Portanto, para provar a existência do resultado que esperamos, basta mostrar que o operador  $A$  tem um ponto fixo. Portanto, a próxima etapa é estudar as propriedades do operador  $A$ , tendo em vista que será de grande importância para o restante do estudo.

Nesse caso, nosso objetivo principal é mostrar que  $Ay \in U$ . Para isso, primeiro observamos que para  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq h$ , temos  $|(Ay)(x_1) - (Ay)(x_2)| =$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{x_1} (x_1 - t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt - \int_0^{x_2} (x_2 - t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \right| \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{x_1} ((x_1 - t)^{\alpha-1} - (x_2 - t)^{\alpha-1}) f(t, y(t)) dt + \int_{x_1}^{x_2} (x_2 - t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \right| \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \left( \int_0^{x_1} |(x_1 - t)^{\alpha-1} - (x_2 - t)^{\alpha-1}| dt + \int_{x_1}^{x_2} (x_2 - t)^{\alpha-1} dt \right). \end{aligned} \quad (2.54)$$

O valor da segunda integral de (2.54) à direita é  $\frac{(x_2 - x_1)^\alpha}{\alpha}$ . Para a primeira integral, estudaremos os três casos em que  $\alpha = 1$ ,  $\alpha < 1$  e  $\alpha > 1$  separadamente. No primeiro caso,  $\alpha = 1$ , a integral é nula, ou seja, o valor da integral é zero. Já no segundo caso, para  $\alpha < 1$ , temos  $\alpha - 1 < 0$ , então  $(x_1 - t)^{\alpha-1} \geq (x_2 - t)^{\alpha-1}$ . Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^{x_1} |(x_1 - t)^{\alpha-1} - (x_2 - t)^{\alpha-1}| dt &= \int_0^{x_1} ((x_1 - t)^{\alpha-1} - (x_2 - t)^{\alpha-1}) dt \\ &= \frac{1}{\alpha} (x_1^\alpha - x_2^\alpha + (x_2 - x_1)^\alpha) \\ &\leq \frac{1}{\alpha} (x_2 - x_1)^\alpha. \end{aligned} \quad (2.55)$$

já no último caso, para  $\alpha > 1$ , temos  $(x_1 - t)^{\alpha-1} \leq (x_2 - t)^{\alpha-1}$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^{x_1} |(x_1 - t)^{\alpha-1} - (x_2 - t)^{\alpha-1}| dt &= \int_0^{x_1} ((x_2 - t)^{\alpha-1} - (x_1 - t)^{\alpha-1}) dt \\ &= \frac{1}{\alpha} (-x_1^\alpha + x_2^\alpha - (x_2 - x_1)^\alpha) \\ &\leq \frac{1}{\alpha} (x_2^\alpha - x_1^\alpha). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Usando a combinação dos resultados (2.55) e (2.56), obtemos

$$|(Ay)(x_1) - (Ay)(x_2)| \leq \begin{cases} \frac{2M}{\Gamma(\alpha+1)} (x_2 - x_1)^\alpha, & \text{se } \alpha \leq 1 \\ \frac{2M}{\Gamma(\alpha+1)} ((x_2 - x_1)^\alpha + x_2^\alpha - x_1^\alpha), & \text{se } \alpha > 1. \end{cases} \quad (2.57)$$

O que podemos perceber na expressão (2.57), é que em ambos os casos, a expressão do lado direito converge para 0 com  $x_2 \rightarrow x_1$ , provando que  $Ay$  é uma função contínua. Dessa forma,

para  $y \in U$  e  $x \in [0, h]$ , tem-se

$$\begin{aligned}
 |(Ay)(x) - T(x)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \right| \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} M x^\alpha \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} M h^\alpha \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} M \frac{K \Gamma(\alpha+1)}{M} \\
 &= K.
 \end{aligned}$$

Portanto, mostramos que  $Ay \in U$  para todo  $y \in U$ .

Uma vez que queremos satisfazer a suposição do Teorema do Ponto Fixo de Schauder (consultar o Apêndice (A.3)), necessitamos apenas provar que  $A(U) := Au : u \in U$  é relativamente compacto, ou seja, o fechamento de  $Au$  é compacto em  $U$ . Para provar que o conjunto é relativamente compacto, a forma mais natural é aplicar o teorema de Arzelá-Ascoli definido no Apêndice (A.4). Para  $z \in A(U)$  e para todo  $x \in [0, h]$ , temos que

$$\begin{aligned}
 |Z(x)| &= |(Ay)(x)| \\
 &\leq |T|_\infty + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \right| \\
 &\leq |T|_\infty + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} M h^\alpha \\
 &\leq |T|_\infty + K
 \end{aligned}$$

o que prova a limitação do conjunto  $AU$ . Além disso, precisamos provar a propriedade de equicontinuidade do conjunto  $A(U)$ , podendo ser derivada da expressão (2.57). Assim, para  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq h$  e  $\alpha \leq 1$  encontramos

$$|(Ay)(x_1) - (Ay)(x_2)| \leq \frac{2M}{\Gamma(\alpha+1)} (x_2 - x_1)^\alpha.$$

Logo, para  $|x_2 - x_1| < \eta$ , temos

$$|(Ay)(x_1) - (Ay)(x_2)| \leq \frac{2M}{\Gamma(\alpha+1)} \eta^\alpha.$$

Observa-se que  $\eta$  não depende de  $y, x_1$  e  $x_2$ , ou seja, vemos que o conjunto  $A(U)$  é contínuo. Do mesmo modo, para  $\alpha > 1$ , usando o Teorema do Valor Médio, consulte o Apêndice (A.5),

obtemos

$$\begin{aligned}
|(Ay)(x_1) - (Ay)(x_2)| &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha + 1)} ((x_2 - x_1)^\alpha + x_2^\alpha - x_1^\alpha) \\
&= \frac{M}{\Gamma(\alpha + 1)} ((x_2 - x_1)^\alpha + \alpha(x_2 - x_1)\xi^{\alpha-1}) \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha + 1)} ((x_2 - x_1)^\alpha + \alpha(x_2 - x_1)h^{\alpha-1}).
\end{aligned}$$

Para algum  $\xi \in [x_1, x_2] \subseteq [0, h]$  e ainda  $(x_2 - x_1)^\alpha < \eta$ , tem-se

$$|(Ay)(x_1) - (Ay)(x_2)| \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha + 1)} (\eta^\alpha - \alpha\eta h^{\alpha-1}). \quad (2.58)$$

Nota-se também que o lado direito da inequação (2.58) é independente de  $y, x_1$  e  $x_2$ , provando igual continuidade. Vimos que a partir do Teorema de Arzelá-Ascóli (A.4), em ambos os casos, resulta que  $A(U)$  é relativamente compacto e através do Teorema do Ponto Fixo de Schauder (A.3), conclui-se que o operador  $A$  tem um ponto fixo. Sendo assim, o ponto fixo de  $A$  é uma solução para nosso problema de valor inicial, apresentado pelo sistema (2.50).  $\square$

**Lema 2.11.** Levando em consideração as hipóteses do Teorema 2.10, a função  $y \in C[0, h]$  é uma solução do problema do valor inicial (2.50), se e somente se, for uma solução da equação integral de Volterra não linear de segundo tipo

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k y_0^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt. \quad (2.59)$$

com  $n = \lceil \alpha \rceil$ .

*Demonstração.* Seja  $z(x) := f(x, y(x))$  com  $z \in [0, h]$ , para isso,  $z$  mantém as mesmas hipóteses que  $x$  e  $y$ . Então, usando a definição do operador diferencial de Caputo, a equação (2.50) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
z(x) &= f(x, y(x)) \\
&= {}^C D_0^\alpha y(x) \\
&= D_0^\alpha (y - T_{n-1}[y; 0])(x) \\
&= D^n I_0^{n-\alpha} (y - T_{n-1}[y; 0])(x).
\end{aligned}$$

já que estamos lidando com funções contínuas, logo podemos aplicar o operador  $I_0^n$  a ambos os lados da equação, encontrando-se

$$I_0^n z(x) = I_0^{n-\alpha} (y - T_{n-1}[y; 0])(x) + q(x).$$

Temos duas situações na equação acima, a primeira trata-se do operador do lado esquerdo  $I_0^n$ , uma vez que  $z$  é contínuo, a ordem do operador é zero, pelo menos com  $n$  na origem,

percebe-se que a diferença  $(y - T_{n-1}[y; 0])$  também tem a mesma propriedade por construção, o que nos leva à segunda situação, o lado direito da equação tem a mesma ordem  $n$  na origem. Portanto, o polinômio  $q$  tem as mesmas propriedades, assim deduzimos (sendo que o grau de  $q$  não pode ser maior que  $n - 1$ ) que  $q = 0$ . Sendo assim, temos

$$I_0^n z(x) = I_0^{n-\alpha}(y - T_{n-1}[y; 0])(x).$$

A partir disso, aplicando o operador de Riemann–Liouville  $I_0^{n-\alpha}$ , obtém-se

$$\begin{aligned} y(x) - T_{n-1}[y; 0](x) &= D_0^{n-\alpha} I_0^n z(x) \\ &= D^1 I_0^{1+\alpha-n} I_0^n z(x) \\ &= D I_0^{1+\alpha} z(x) \\ &= I_0^\alpha z(x). \end{aligned}$$

Retomando as definições de  $z$  e  $T_{n-1}[y; 0]$  onde o segundo é conhecido como polinômio de Taylor, pode-se dizer que obtemos a condição necessária para  $y$  ser uma solução do problema (2.50), satisfazendo a equação integral de Volterra.  $\square$

## 2.11.2 Unicidade

Nesta seção, estudaremos a unicidade da solução para o Problema de Valor Inicial definido em (2.50). Percebe-se que a demonstração deste caso se assemelha à demonstração da derivada clássica, ou seja, de ordem inteira. Este estudo está embasado, conforme as contribuições de DIETHELM (2010). O próximo teorema é o teorema de unicidade.

**Teorema 2.12.** Sejam  $\alpha > 0$  e  $n = \lceil \alpha \rceil$  e ainda  $y_0^0, \dots, y_0^{n-1} \in \mathbb{R}$  com  $K > 0$  e  $h^* > 0$ . Definido o conjunto  $G$  como no Teorema 2.10 e a função  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  ser contínua, cumprindo uma condição de Lipschitz em relação à segunda variável, ou seja, existe uma constante  $L > 0$  independente de  $x, y_1$  e  $y_2$  tal que, para todo  $(x, y_1), (x, y_2) \in G$ , tal que

$$|f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))| \leq L|y_1(x) - y_2(x)|. \quad (2.60)$$

Então, como mostrado no Teorema 2.10, existe uma única função  $y \in C[0, h]$  que satisfaz a condição da solução do problema do valor inicial (2.50).

*Demonstração.* Para provar a unicidade da solução, partimos de um argumento semelhante à prova do Teorema 2.10, uma vez que a demonstração desse teorema se assemelha ao Teorema 2.10. Para isso, usaremos o polinômio  $T$ , o conjunto  $U$  e o operador  $A$ , estes três definidos nas equações (2.51), (2.52) e (2.53), lembrando que ele mapeia conjuntos não vazios, convexos e fechados. Agora devemos provar que  $A$  tem um único ponto fixo. Desse modo, provaremos

para todo  $j \in N_0$ , todo  $x \in [0, h]$  e todo  $y, \tilde{y} \in U$ , temos

$$\|A^j y - A^j \tilde{y}\|_{L^\infty[0,x]} \leq \frac{(Lx^\alpha)^j}{\Gamma(j\alpha + 1)} \|y - \tilde{y}\|_{L^\infty[0,x]}. \quad (2.61)$$

Visando à procura do resultado, aplicaremos o método de indução. No caso de  $j = 0$ , a afirmação é trivial. Para  $j - 1 \rightarrow j$ , temos

$$\begin{aligned} \|A^j y - A^j \tilde{y}\|_{L^\infty[0,x]} &= \|A(A^{j-1}y) - A(A^{j-1}\tilde{y})\|_{L^\infty[0,x]} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sup_{0 \leq w \leq x} \left| \int_0^w (w-t)^{\alpha-1} [f(t, A^{j-1}y(t)) - f(t, A^{j-1}\tilde{y}(t))] dt \right|. \end{aligned}$$

Na sequência, usaremos a condição de Lipschitz em  $f$  e a hipótese de indução, ou seja:

$$\begin{aligned} \|A^j y - A^j \tilde{y}\|_{L^\infty[0,x]} &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \sup_{0 \leq w \leq x} \int_0^w (w-t)^{\alpha-1} |A^{j-1}y(t) - A^{j-1}\tilde{y}(t)| dt \\ &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \sup_{0 \leq w \leq t} |A^{j-1}y(t) - A^{j-1}\tilde{y}(t)| dt \\ &\leq \frac{L^j}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha(j-1))} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\alpha(j-1)} \sup_{0 \leq w \leq t} |y(w) - \tilde{y}(w)| dt \\ &\leq \frac{L^j}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha(j-1))} \sup_{0 \leq w \leq x} |y(w) - \tilde{y}(w)| \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\alpha(j-1)} dt \\ &\leq \frac{L^j}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha(j-1))} \|y - \tilde{y}\|_{L^\infty[0,x]} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha(j-1))}{\Gamma(1+\alpha j)} x^{\alpha j}. \end{aligned}$$

Como  $x \in [0, h]$ , podemos reescrever o resultado acima em todo o intervalo  $[0, h]$ , obtendo

$$\|A^j y - A^j \tilde{y}\|_\infty \leq \frac{(Lh^\alpha)^j}{\Gamma(j\alpha + 1)} \|y - \tilde{y}\|_\infty.$$

onde queríamos chegar. Mostramos que o operador  $A$  satisfaz as hipóteses do Teorema de Weissinger (A.1). Para isso, define-se

$$\rho_j = \frac{(Lh^\alpha)^j}{\Gamma(j\alpha + 1)}. \quad (2.62)$$

é necessário ainda verificarmos se a série

$$\sum_{j=0}^{\infty} \rho_j. \quad (2.63)$$

converge. Por esse motivo, notamos que a equação (2.62) e a série (2.63), nada mais é que a

série de potências da função Mittag-Leffler, definida na seção 2.5, ou seja,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \rho_j = E_{\alpha}(Lh^{\alpha}).$$

logo, a série converge uniformemente de acordo com o Teorema 2.3. Assim, o operador  $A$  satisfaz a suposição do Teorema do Ponto Fixo de Weissinger (A.1), garantindo que exista uma única solução do PVI (2.50).  $\square$

O próximo teorema nos garante a solução para uma simples classe de equações diferenciais fracionárias do tipo Caputo.

**Teorema 2.13.** Sejam  $\alpha > 0$ ,  $n = \lceil \alpha \rceil$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . A solução do valor inicial do problema

$$\begin{aligned} {}^C D^{\alpha} y(x) &= \lambda y(x), \\ y(0) &= y_0, \\ y^{(k)}(0) &= 0, k = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

é dado por

$$y(x) = y_0 E_{\alpha}(\lambda x^{\alpha}), x \geq 0.$$

*Demonstração.* Para mais informações, veja a demonstração em DIETHELM (2010) (Teorema 6.11 p. 101).  $\square$

### 2.11.3 Dependência Contínua de Problemas de Valores Iniciais com Derivadas de Ordem Fracionária

A seguir, estudaremos a dependência contínua de derivadas fracionárias por meio de lemas e teoremas. Por essa razão, assumiremos nesta seção que  $y$  é a única solução do problema do valor inicial (2.50).

**Lema 2.14.** Sejam  $\alpha, T, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_+$  e  $\vartheta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua que satisfaz a desigualdade

$$|\vartheta(x)| \leq \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |\vartheta(t)| dt.$$

para todo  $x \in [0, T]$ . Então,

$$|\vartheta(x)| \leq \varepsilon_1 E_{\alpha}(\varepsilon_2 x^{\alpha}).$$

para todo  $x \in [0, T]$ . Sendo  $E_{\alpha}$  a função Mittag-Leffler de ordem  $\alpha$ , definida na seção 2.5.

*Demonstração.* A solução do problema de valor inicial pode ser dada a partir da função  $\Phi(x) = (\epsilon_1 + \epsilon_3)E_\alpha(\epsilon_2 x^\alpha)$  com  $\epsilon_3 > 0$ , uma vez que aplicando o Teorema 2.13 e a linearidade do problema inicial, esta pode ser vista como

$${}^C D_a^\alpha \Phi(x) = \epsilon_2 \Phi(x).$$

com  $\Phi(0) = \epsilon_1 + \epsilon_3$  e  ${}^C D_a^\alpha \Phi(0) = 0$  para  $k = 1, 2, \dots, \lceil \alpha \rceil - 1$ . Levando em consideração o Lema 2.11, podemos deduzir que  $\Phi$  satisfaz a equação

$$\Phi(x) = \epsilon_1 + \epsilon_3 + \frac{\epsilon_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \Phi(t) dt.$$

pressupondo a função  $\vartheta(0)$ , encontramos

$$|\vartheta(0)| \leq \epsilon_1 < \epsilon_1 + \epsilon_3 = \Phi(0).$$

Desse modo, o parâmetro de continuidade padrão resulta em  $|\vartheta(x)| < \Phi(x)$  para todos  $x \in [0, \Omega]$  com  $\Omega > 0$ . Provemos que a desigualdade está acima de  $[0, T]$ , para isso assumimos que  $x_0$  é o menor número positivo, respeitando a igualdade  $|\vartheta(x_0)| = \Phi(x_0)$ . Então, para  $0 \leq x \leq x_0$ , obtemos  $|\vartheta(x)| \leq \Phi(x)$ , assim temos

$$\begin{aligned} |\vartheta(x_0)| &\leq \epsilon_1 + \frac{\epsilon_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x_0} (x_0 - t)^{\alpha-1} |\vartheta(t)| dt \\ &\leq \epsilon_1 + \frac{\epsilon_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x_0} (x_0 - t)^{\alpha-1} \Phi(t) dt \\ &< \epsilon_1 + \epsilon_3 + \frac{\epsilon_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x_0} (x_0 - t)^{\alpha-1} \Phi(t) dt \\ &= \Phi(x_0). \end{aligned}$$

Considerando nossa escolha de  $x_0$ , notemos que a igualdade não representa uma sentença verdadeira, o que implica uma suposição falsa. Partindo dessa situação, percebemos que

$$|\vartheta(x)| < \Phi(x) = (\epsilon_1 + \epsilon_3)E_\alpha(\epsilon_2 x^\alpha).$$

para todo  $x \in [0, T]$  e  $\epsilon_3 > 0$  o que torna a sentença verdadeira, como queríamos chegar. O próximo teorema nos garante a dependência contínua em relação às condições iniciais.  $\square$

**Teorema 2.15.** Seja  $y$  a solução do problema do valor inicial (2.50) e  $z$  a solução de um PVI, temos

$$\begin{aligned} {}^C D_a^\alpha z(x) &= f(x, z(x)) \\ {}^C D^k z(0) &= z_0^{(k)}, k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Se  $\varepsilon := \max_{k=0,1,\dots,n-1} |y_0^{(k)} - z_0^{(k)}|$  é suficientemente pequeno, então existe algum  $h > 0$  de

modo que ambas as funções  $y$  e  $z$  estão definidas no intervalo  $[0, h]$ , e

$$\sup_{0 \leq x \leq h} |y(x) - z(x)| = O \left( \max_{k=0,1,\dots,n-1} |y_0^{(k)} - z_0^{(k)}| \right).$$

*Demonstração.* Definindo  $\vartheta(x) = y(x) - z(x)$ , descobrimos que  $\vartheta$  é a solução para o problema do valor inicial

$$\begin{aligned} {}^C D_a^\alpha \vartheta(x) &= f(x, y(x)) - f(x, z(x)) \\ {}^C D^k \vartheta(0) &= y_0^{(k)} - z_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (2.65)$$

pois o PVI acima satisfaz a suposição do Teorema 2.10.

Levando em consideração o Lema 2.11, o problema do valor inicial é equivalente à equação

$$\vartheta(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \left( y_0^{(k)} - z_0^{(k)} \right) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} (f(t, y(t)) - f(t, z(t))) dt.$$

Usando a desigualdade de Hölder e a condição de Lipchitz de  $f$ , chega-se a

$$|\vartheta(x)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^k}{k!} + \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |\vartheta(t)| dt.$$

onde  $L$  é a constante de Lipschitz de  $f$ . Portanto, de acordo com Lema 2.14, temos

$$|\vartheta(x)| \leq O(\varepsilon) E_\alpha(Lh^\alpha) = O(\varepsilon).$$

onde queríamos chegar. □

No teorema a seguir, apresentaremos a dependência contínua dos parâmetros do modelo em estudo.

**Teorema 2.16.** Seja  $y$  a solução do problema do valor inicial (2.50) e  $z$  a solução de um PVI, temos

$$\begin{aligned} {}^C D_a^\alpha z(x) &= \tilde{f}(x, z(x)) \\ {}^C D^k z(0) &= z_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Onde  $\tilde{f}$  deve satisfazer as mesmas suposições que  $f$ , ou seja

$$\varepsilon := \max_{(x_1, x_2) \in G} |f(x_1, x_2) - \tilde{f}(x_1, x_2)|.$$

Se  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno, então existe algum  $h > 0$  de modo que ambas as funções  $y$

e  $z$  estão definidas no intervalo  $[0, h]$ , e

$$\sup_{0 \leq x \leq h} |y(x) - z(x)| = O \left( \max_{(x_1, x_2) \in G} |f(x_1, x_2) - \tilde{f}(x_1, x_2)| \right).$$

*Demonstração.* Definindo  $\vartheta(x) = y(x) - z(x)$ , descobrimos que  $\vartheta$  é a solução para o problema do valor inicial

$$\begin{aligned} {}^C D_a^\alpha \vartheta(x) &= f(x, y(x)) - \tilde{f}(x, z(x)) \\ {}^C D^k \vartheta(0) &= 0, k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (2.67)$$

a qual é equivalente à equação

$$\vartheta(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} (f(t, y(t)) - \tilde{f}(t, z(t))) dt.$$

Usando a condição da hipótese de Lipchitz de  $f$  e  $\tilde{f}$ , deduzimos que

$$\begin{aligned} \vartheta(x) &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} (|f(t, y(t)) - f(t, z(t))| + |f(t, y(t)) - \tilde{f}(t, z(t))|) dt \\ &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |\vartheta(t)| dt + \varepsilon \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} dt \\ &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |\vartheta(t)| dt + \varepsilon \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Portanto, de acordo com Lema 2.14, temos

$$|\vartheta(x)| \leq O(\varepsilon) E_\alpha(Lh^\alpha) = O(\varepsilon).$$

onde queríamos chegar. □

Os demais resultados da dependência contínua são semelhantes aos resultados de ordem clássica. Porém, para usar o operador fracionário, deve haver um resultado que garanta que ele dependa continuamente em relação à ordem da derivada, que será apresentada pelo teorema a seguir.

**Teorema 2.17.** Seja  $y$  a solução do problema do valor inicial (2.50) e  $z$  a solução de um PVI, temos

$$\begin{aligned} {}^C D_a^{\tilde{\alpha}} z(x) &= f(x, z(x)) \\ {}^C D^k z(0) &= z_0^{(k)}, k = 0, 1, \dots, \tilde{n}-1. \end{aligned} \quad (2.68)$$

onde  $\tilde{\alpha} > \alpha$  e  $\tilde{n} := \lceil \tilde{\alpha} \rceil$  com  $\varepsilon := \tilde{\alpha} - \alpha$ , assim

$$\varepsilon^* := \begin{cases} 0, & \text{se } \tilde{n} = n, \\ \max \left\{ \left| y_0^{(k)} \right| : n \leq k \leq \tilde{n}-1 \right\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se  $\varepsilon$  e  $\varepsilon^*$  são suficientemente pequenos, então existe algum  $h > 0$  de modo que ambas as funções  $y$  e  $z$  estão definidas no intervalo  $[0, h]$ , e

$$\sup_{0 \leq x \leq h} |y(x) - z(x)| = O \left( \max \left\{ 0, \max \left\{ |y_0^{(k)}| : n \leq k \leq \tilde{n} - 1 \right\} \right\} \right).$$

*Demonstração.* [DIETHELM \(2010\)](#) destaca que a existência e a unicidade das soluções podem ser deduzidas como a situação acima, podendo ser reescritas como o limite da diferença, usando a combinação entre os problemas de valores iniciais [\(2.50\)](#) e [\(2.17\)](#) como equações equivalentes e o Lema [2.59](#). Assim temos,

$$\begin{aligned} \vartheta(x) &= y(x) - z(x) \\ &= - \sum_{k=n}^{\tilde{n}-1} \frac{x^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt - \frac{1}{\Gamma(\tilde{\alpha})} \int_0^x (x-t)^{\tilde{\alpha}-1} f(t, z(t)) dt \\ &= - \sum_{k=n}^{\tilde{n}-1} \frac{x^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \left( f(t, y(t)) - f(t, z(t)) \right) dt \\ &\quad + \int_0^x \left( \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(x-t)^{\tilde{\alpha}-1}}{\Gamma(\tilde{\alpha})} \right) f(t, z(t)) dt. \end{aligned}$$

Dada a condição da hipótese de Lipchitz de  $f$ , implica que

$$\begin{aligned} \vartheta(x) &\leq \sum_{k=n}^{\tilde{n}-1} \frac{x^k}{k!} |y_0^{(k)}| + \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |\vartheta(t)| dt \\ &\quad + \max_{(x_1, x_2) \in G} |f(x_1, x_2)| \int_0^x \left| \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(x-t)^{\tilde{\alpha}-1}}{\Gamma(\tilde{\alpha})} \right| dt. \end{aligned}$$

Certamente, a soma é  $O(\varepsilon^*)$ . Desse modo, podemos limitar a segunda integral como:

$$\begin{aligned} \int_0^x \left| \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(x-t)^{\tilde{\alpha}-1}}{\Gamma(\tilde{\alpha})} \right| dt &= \int_0^x \left| \frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{u^{\tilde{\alpha}-1}}{\Gamma(\tilde{\alpha})} \right| dt \\ &\leq \int_0^h \left| \frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{u^{\tilde{\alpha}-1}}{\Gamma(\tilde{\alpha})} \right| dt \\ &= O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Calculando a integral explícita, ou seja, encontrando o zero do integrando da expressão, chegamos a

$$\left( \frac{\Gamma(\tilde{\alpha})}{\Gamma(\alpha)} \right) \frac{1}{\Gamma(\tilde{\alpha}) - \Gamma(\alpha)}.$$

convergindo para  $\exp(\psi(\alpha))$  como  $\tilde{\alpha} \rightarrow \alpha$  e  $\psi = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$ . Se  $h$  for menor do que este valor, o integrando não tem mudança de sinal. Caso contrário, devemos dividir o intervalo de integração neste ponto. Nos dois casos, a expressão resultante é restrita por  $O(\tilde{\alpha} - \alpha) = O(\varepsilon)$ . Em suma,

encontramos

$$|\vartheta(x)| \leq O(\varepsilon) + O(\varepsilon^*) + \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |\vartheta(t)| dt.$$

Portanto, se aplicarmos o Lema 2.14 produziremos o resultado esperado. Assumindo a hipótese do Teorema 2.17, mostraremos dois casos especiais.

**Corolário 2.17.1.** Seja  $\tilde{n} = n$ , logo

$$\sup_{0 \leq x \leq h} |y(x) - z(x)| = O(\tilde{\alpha} - \alpha).$$

**Corolário 2.17.2.** Sejam  $\tilde{n} > n$  e  $y_0^{(k)}$  com  $k = n, n+1, \dots, \tilde{n}-1$ , então

$$\sup_{0 \leq x \leq h} |y(x) - z(x)| = O(\tilde{\alpha} - \alpha).$$

As demonstrações dos corolários 2.17.1 e 2.17.2 podem ser encontrados em DIETHELM (2010).  $\square$

## 2.12 Efeitos de Memória da Dinâmica Fracionária

Conforme DIETHELM (2010), as equações de ordem inteira são ferramentas apropriadas para a modelagem de sistemas sem memória, enquanto as equações de ordem fracionária são o método de escolha para a descrição de sistemas com memória. A seguinte observação mostrará a diferença entre as duas.

*Observação 2.2.* Olhemos a equação 2.59 do Lema 2.11, para algum  $\alpha \in (0, 1]$  e para dois valores diferentes de  $x$ , digamos  $x_1$  e  $x_2$  com  $x_1 < x_2$ , subtraindo a segunda dessas equações da primeira, resultando em

$$\begin{aligned} y(x_2) - y(x_1) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x_2} (x_2 - t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x_1} (x_1 - t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x_1} [(x_2 - t)^{\alpha-1} - (x_1 - t)^{\alpha-1}] f(t, y(t)) dt \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^{x_2} (x_2 - t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt. \end{aligned} \tag{2.69}$$

Primeiramente, consideramos o caso clássico, ou seja, o operador diferencial de ordem inteira  $\alpha = 1$ . É claro que o termo entre colchetes do lado direito da equação 2.69 é zero, assim, toda a primeira integral desaparece. Já a segunda integral implica num fato bem conhecido de que, se já sabemos a solução  $y(x_1)$  do nosso PVI 2.50 no ponto  $x_1 > 0$ , então podemos calcular a solução no ponto  $x_2 > x_1$  exclusivamente com base em  $y(x_1)$  e na função  $f$ . Logo,

não precisamos usar nenhuma informação sobre  $y(x)$  para  $x \in [0, x_1)$ . Esta observação é de importância fundamental na modelagem matemática de muitos sistemas em física, engenharias e outras ciências, porque afirma que é suficiente observar o estado de um sistema de primeira ordem em um ponto arbitrário a tempo de computar seu comportamento no futuro.

Quando olhamos para o caso fracionário  $0 < \alpha < 1$ , a situação é diferente. Ao contrário do caso clássico, a primeira integral do lado direito da equação 2.69 não desaparece, ou seja, sempre que quisermos calcular a solução  $y(x_2)$  em algum ponto  $x_2$ , é necessário levar em consideração todo o histórico de  $y$ , desde o ponto de partida 0 até o ponto de interesse  $x_2$ . O que reflete a não localidade dos operadores diferenciais fracionários de Caputo. Portanto, esta observação tem uma influência substancial na construção de métodos numéricos para tais equações, uma vez que um sistema de ordem fracionária pode modelar alguns fenômenos do mundo real.

## 2.13 Boa colocação para Sistemas de EDOs fracionárias de múltiplas ordens

A fim de provar o resultado de existência e unicidade para sistemas gerais de múltiplas ordens, o Teorema 2.18 será muito importante, já que será abordado em uma das nossas propostas.

**Teorema 2.18.** Sejam  $\alpha_j > 0$  para  $j = 1, 2, \dots, n$  e  $f_j : [0, X] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  com  $j = 1, 2, \dots, n$  funções contínuas que satisfazem as condições de Lipschitz com respeito a todos os seus argumentos, exceto o primeiro. Consideremos o problema do valor inicial dado pelo sistema diferencial fracionário de múltiplas ordens com a seguinte condição inicial

$$\begin{aligned} {}^C D_a^{\alpha_j} y_j(x) &= f_j(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ y_j^{(k)}(0) &= y_{j,0}^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \lceil \alpha_j \rceil - 1. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Então, o problema do valor inicial tem uma única solução contínua.

*Demonstração.* (DIETHELM, 2010) Uma aplicação do Lema 2.11 mostra que o problema do valor inicial (2.70) é equivalente ao sistema de equações de Volterra

$$y_j(x) = \sum_{k=0}^{\lceil \alpha_j \rceil - 1} y_{j,0}^{(k)} \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_j)} \int_0^x (x-t)^{\alpha_j-1} f_j(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) dt \quad (2.71)$$

com  $j = 1, 2, \dots, n$ . Em seguida, definimos  $\alpha := \min_j \alpha_j$  e reescrevemos (2.71) na forma

$$y_j(x) = \sum_{k=0}^{\lceil \alpha_j \rceil - 1} y_{j,0}^{(k)} \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \tilde{f}_j(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) dt.$$

para  $j = 1, 2, \dots, n$ , onde

$$\tilde{f}_j(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha_j)} (x - t)^{\alpha_j - \alpha} f_j(t, y_1(t), \dots, y_n(t)).$$

Podendo ser representado de forma vetorial, com  $Y := (y_1, \dots, y_n)^T$ ,  $\tilde{F} := (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n)^T$ , e uma expressão correspondente para os valores iniciais, podemos combinar essas  $n$  equações escalares em uma equação vetorial, ou seja:

$$Y(x) = \sum_{k=0}^{\max_j [\alpha_j] - 1} Y_{j,0}^{(k)} \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x - t)^{\alpha - 1} \tilde{F}(t, Y(t)) dt.$$

Portanto, podemos concluir que todas as funções  $\tilde{f}_j$  são contínuas e satisfazem as condições de Lipschitz em  $y_1, \dots, y_n$ , uma vez que  $\alpha_j \geq \alpha$  para todo  $j$ , o que implica na existência e na unicidade de uma solução contínua  $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$ .  $\square$

## 2.14 Estabilidade para PVI com Derivadas de Ordem Fracionária do tipo Caputo

Nesta seção abordaremos dois tipos de análise de estabilidade para equações diferenciais de ordem fracionária segundo Caputo, para isso, mostraremos a estabilidade de Mittag-Leffler e o Método direto de Lyapunov para sistemas fracionários.

### 2.14.1 Estabilidade de Mittag-Leffler

Para dar sequência no estudo, vamos analisar o ponto de equilíbrio de um sistema.

**Definição 2.11.** Seja a constante  $\tilde{y}$  um ponto de equilíbrio do sistema

$$\begin{aligned} {}^C D_x^\alpha y(x) &= f(x, y(x)) \\ y(x_0) &= y_{x_0}. \end{aligned} \tag{2.72}$$

onde  ${}^C D$  denota o operador fracionário de Caputo,  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in R^n$ ,  $x_0 \geq 0$  é o tempo inicial e  $f : [0, +\infty) \times R^n \rightarrow R^n$  contínua em  $x$  e satisfaz a condição de Lipschitz em  $y$  se e somente se  $f(x, \tilde{y}(x)) = 0$ .

*Observação 2.3.* Sem perda de generalidade, todas as definições e teoremas são dados para os casos em que o ponto de equilíbrio é a origem, ou seja,  $\tilde{y} = 0$ . Note que é possível converter qualquer ponto de equilíbrio para a origem, basta alterar as variáveis com base os Teoremas [2.7](#) e [2.8](#). Se o ponto de equilíbrio em [\(2.72\)](#) for  $\tilde{y} \neq 0$ , com a mudança da variável  $z(x) = y(x) - \tilde{y}$ ,

o sistema (2.72) pode ser reescrito como:

$${}_x^C D_x^\alpha z(x) = {}_x^C D_x^\alpha (y(x) - \tilde{y}) = f(x, y(x)) = f(x, z(x) + \tilde{y}) = g(x, z(x)).$$

onde  $g(x, 0) = 0$  e o novo sistema tem ponto de equilíbrio na origem para a nova variável  $z$ . Agora, a partir dos estudos de ZHANG et al. (2015), LI et al. (2010), dentre outros pesquisadores, podemos definir a estabilidade no sentido de Mittag-Leffler.

**Definição 2.12.** Quando  $\tilde{y} = 0$  é um ponto de equilíbrio do sistema (2.72), a solução de (2.72) é considerada Mittag-Leffler estável se

$$\|y(x)\| \leq [m(y_{x_0})E_\alpha(-\lambda(x - x_0)^\alpha)]^b. \quad (2.73)$$

onde  $\lambda > 0, b > 0, \alpha \in (0, 1), m(0) = 0, m(y) \geq 0$  satisfaz localmente a condição de Lipschitz em  $y \in R^n$  com a constante de Lipschitz  $m_0$ .

**Definição 2.13.** (Estabilidade Mittag-Leffler generalizada) Se  $\tilde{y} = 0$  é um ponto de equilíbrio do sistema (2.72), a solução de (2.72) é considerada estável de Mittag-Leffler generalizada se

$$\|y(x)\| \leq [m(y_{x_0})(x - x_0)^{-\gamma}E_{\alpha, 1-\gamma}(-\lambda(x - x_0)^\alpha)]^b. \quad (2.74)$$

onde  $-\alpha < \gamma \leq 1 - \alpha, \lambda > 0, b > 0, \alpha \in (0, 1), m(0) = 0, m(y) \geq 0$  satisfaz localmente a condição de Lipschitz em  $y \in R^n$  com a constante de Lipschitz  $m_0$ .

*Observação 2.4.* Ressalta-se em ZHANG et al. (2017) que para sistemas de ordem fracionária, a estabilidade de Mittag-Leffler pertence a uma classe de estabilidade assintótica, ou seja,  $\|y(x)\| \leq 0$  com  $x \rightarrow +\infty$ .

## 2.14.2 Método direto de Lyapunov para sistemas fracionários

O método direto de Lyapunov, segundo LI et al. (2010), é uma condição suficiente para mostrar a estabilidade de sistemas não lineares de ordem fracionária, pois, por meio dele, conseguimos analisar a estabilidade sem a necessidade de resolver explicitamente as equações diferenciais, sendo assim, se houver uma função de Lyapunov, o sistema é estável. Partindo desse princípio, apresentaremos o teorema do método direto de Lyapunov para sistemas fracionários.

**Teorema 2.19.** Sejam  $x_0 = 0$  o ponto de equilíbrio do sistema de ordem fracionária (2.72),  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, a, b$  constantes arbitrárias positivas e  $V(x, y(x))$  uma função continuamente diferenciável, tal que

$$\alpha_1 \|y\|^a \leq V(x, y(x)) \leq \alpha_2 \|y\|^{ab}. \quad (2.75)$$

$${}_0^C D_x^\alpha V(x, y(x)) \leq -\alpha_3 \|y\|^{ab}. \quad (2.76)$$

onde  $D \subset R^n$  é um domínio que contém a origem,  $x \geq 0, \alpha \in (0, 1)$  e  $V(x, y(x)) : [0, \infty) \times D \rightarrow R$  satisfaz localmente a condição de Lipschitz em  $y$ . Se as suposições se sustentam globalmente em  $R^n$ , então o ponto de equilíbrio  $\tilde{y} = 0$  é globalmente Mittag-Leffler estável.

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [LI et al. \(2010\)](#).

Para [ZHANG et al. \(2015\)](#), é difícil encontrar uma função de Lyapunov apropriada que satisfaça as desigualdades [\(2.75\)](#) e [\(2.76\)](#). Portanto, apresentaremos no Teorema [2.20](#) o segundo método estendido de Lyapunov, que busca analisar a estabilidade de Mittag-Leffler das equações diferenciais de ordem fracionária de modo a enfraquecer as condições do Teorema [2.19](#) o que pode nos levar a outros candidatos à função de Lyapunov.

**Teorema 2.20.** Para  $x_0 = 0$ , o ponto de equilíbrio do sistema de ordem fracionária [\(2.72\)](#) é Mittag-Leffler estável no ponto de equilíbrio  $\tilde{y} = 0$  se existe uma função contínua  $V(x, y(x))$ , tal que

$$\begin{aligned} \alpha_1 \|y\|^a &\leq V(x, y(x)) \leq \alpha_2 \|y\|^{ab}. \\ {}^C D_x^\alpha V(x^+, y^+(x)) &\leq -\alpha_3 \|y(x)\|^{ab}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

onde  $D \subset R^n$  é um domínio que contém a origem,  $x \geq 0, \alpha \in (0, 1)$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, a, b$  constantes arbitrárias positivas,  $\dot{V}(x, y(x))$  é contínuo por partes, e  $\lim_{\tau \rightarrow x^+} \dot{V}(\tau, y(\tau))$  existe para qualquer  $x \in [0, \infty)$ ;  $V(x^+, y^+(x)) \triangleq \lim_{\tau \rightarrow x^+} V(\tau, y(\tau))$  e  $V(x, y(x)) : [0, \infty) \times D \rightarrow R$  satisfaz localmente a condição de Lipschitz em  $y$ . Se as suposições se sustentam globalmente em  $R^n$ , então o ponto de equilíbrio  $\tilde{y} = 0$  é globalmente Mittag-Leffler estável. A desigualdade [\(2.77\)](#) é assegurada para quase todos os lugares.

A demonstração desse teorema pode ser encontrado em [ZHANG et al. \(2015\)](#).

Buscando encontrar a função de Lyapunov mais apropriada, o Lema [2.21](#) será muito útil para o decorrer do trabalho, pois ele trará uma desigualdade de ordem fracionária de Caputo.

**Lema 2.21.** [\(ZHANG et al., 2015\)](#). Se  $h(x) \in C^1([0, +\infty))$  denota uma função continuamente diferenciável, a seguinte desigualdade é válida:

$${}^C D_x^\alpha |h(x^+)| \leq \text{sgn}(h(x)) {}^C D_x^\alpha h(x). \quad (2.78)$$

onde  $0 < \alpha < 1$  e  $\text{sgn}(h(x))$  é o sinal da função  $h(x)$ . Observe que a desigualdade [\(2.78\)](#) também se aplica a quase todos os lugares, quando  $h'(x)$  existe.

### 2.14.3 Estabilidade para o sistema com múltiplas ordens

Consideremos o problema do valor inicial dado pelo sistema diferencial fracionário de múltiplas ordens com a seguinte condição inicial

$$\begin{aligned} {}^C D_a^{\alpha_j} y_j(x) &= f_j(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \quad j = 1, 2, \dots, n. \\ y_j^{(k)}(0) &= y_{j,0}^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, [\alpha_j] - 1. \end{aligned} \quad (2.79)$$

com  $\alpha_j \in (0, 1)$  e  $f_j : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$  contínua em  $x$  e localmente Lipschitz em  $y_j$  se e somente se  $f_j(x, y_0(x)) = 0$ . Para analisarmos a estabilidade do sistema (2.79), temos que levar em consideração o Lema (2.22) e o Teorema sobre o método direto generalizado fracionário de Lyapunov com multivariáveis, que serão apresentados a seguir.

**Lema 2.22.** Se  $y_j = 0$  é um ponto de equilíbrio do sistema (2.79),  $f_j$  é Lipschitz em  $y_j$  com Lipschitz constante  $l$  e é contínuo por partes em relação a  $x$ , então a solução do sistema (2.79) satisfaz

$$\|y_j(x)\| \leq \|y_j(x_0)\| E_\alpha(l(x - x_0))^\alpha. \quad (2.80)$$

onde  $\alpha \in (0, 1)$  e  $\|\cdot\|$  denota uma norma arbitrária.

**Teorema 2.23.** (YU et al., 2013) Sejam  $y_j(0) = 0$  um ponto de equilíbrio do sistema (2.79),  $D \subset \mathbb{R}^n$  um domínio que contém a origem e  $V(x, y_j(x)) : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função continuamente diferenciável e localmente Lipschitz em relação a  $y_j$  de modo que

$$\alpha_1 \|y_j\|^a \leq V(x, y_j(x)) \leq \alpha_2 \|y_j\|^{ab}. \quad (2.81)$$

$${}_0^C D_x^\zeta V(x, y_j(x)) \leq -\alpha_3 \|y_j\|^{ab}. \quad (2.82)$$

onde  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, a, b$  são constantes arbitrárias positivas,  $x \geq 0, \zeta \in (0, 1), y_j \in D$ . Se as suposições se sustentam em  $\mathbb{R}^n$ , então o ponto de equilíbrio  $y_j = 0$  é globalmente Mittag-Leffler estável.

*Demonstração.* A partir das desigualdades (2.81) e (2.82), temos

$${}_0^C D_x^\zeta V(x, y_j(x)) \leq -\frac{\alpha_3}{\alpha_2} V(x, y_j(x)).$$

Existe uma função não negativa  $Z(x)$  que satisfaz

$${}_0^C D_x^\zeta V(x, y_j(x)) + Z(x) = -\frac{\alpha_3}{\alpha_2} V(x, y_j(x)). \quad (2.83)$$

Aplicando a Transformada de Laplace em (2.83), obtemos

$$s^\zeta V(s) - s^{\zeta-1} V(0) + Z(s) = -\frac{\alpha_3}{\alpha_2} V(s). \quad (2.84)$$

onde a constante não negativa  $V(0) = (0, y_j(0))$  e  $V(s) = \mathcal{L}[V(x, y_j(x))]$ , ou seja:

$$V(s) = \frac{s^{\zeta-1} V(0) - Z(s)}{s^\zeta + \frac{\alpha_3}{\alpha_2}}.$$

Se  $y_j(0) = 0$ , ou seja,  $V(0) = 0$ , a solução para o sistema (2.79) é  $y_j(x) = 0$  e se  $y_j(0) \neq 0$ ,  $V(0) > 0$ . Como  $V(x, y_j)$  é localmente Lipschitz em relação a  $y_j$ , a única solução da

Equação (2.84) é seguida do Lema (2.22) e da transformada inversa de Laplace, assim temos:

$$V(x) = V(0)E_\zeta\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}x^\zeta\right) - Z(x) * \left[x^{\zeta-1}E_{\zeta,\zeta}\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}x^\zeta\right)\right].$$

Uma vez que  $x^{\zeta-1}$  e  $E_{\zeta,\zeta}\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}x^\zeta\right)$  são funções não negativas, segue que

$$V(x) \leq V(0)E_\zeta\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}x^\zeta\right). \quad (2.85)$$

Substituindo a Equação (2.81) na Equação (2.85), obtemos

$$\|y_j\| \leq \left[\frac{V(0)}{\alpha_1}E_\zeta\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}x^\zeta\right)\right]^{\frac{1}{a}}.$$

onde  $\frac{V(0)}{\alpha_1} \geq 0$  para  $y_j(0) \neq 0$ . Seja  $m = \frac{V(0)}{\alpha_1} = \frac{V(0),y_j(0)}{\alpha_1} \geq 0$ , então temos

$$\|y_j\| \leq \left[mE_\zeta\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}x^\zeta\right)\right]^{\frac{1}{a}}.$$

onde  $m = 0$  é válido se e somente se  $y_j(0) = 0$ . Como  $V(x, y_j)$  é localmente Lipschitz em relação a  $y_j$  e se e somente se  $y_j(0) = 0$ , segue que  $m = \frac{V(0),y_j(0)}{\alpha_1}$  também satisfaz localmente a condição de Lipschitz em  $y_j(0)$  e  $m = 0$ , o que implica que o sistema (2.79) é a estabilidade de Mittag-Leffler.  $\square$

## 2.14.4 Estabilidade para o sistema com mesma ordem

A fim de analisar a estabilidade de redes neurais de Hopfield de ordem fracionária com mesma ordem, a qual será feita na seção 3.4, o sistema de ordem fracionária não autônomo (2.72) é estudado primeiramente como um modelo geral que será derivado do próximo Teorema.

**Teorema 2.24.** (ZHANG et al., 2017). Para uma solução  $y(x)$  do sistema (2.72), temos que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ , se existem constantes arbitrárias positivas  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, a, b$  e  $y(0) \in D$ , uma função contínua  $V(x, y(x))$  e uma suavemente por partes  $h(x) : [0, +\infty) \rightarrow R$ , satisfazendo

$$\alpha_1 \|y\|^\alpha \leq V(x, y(x)) \leq \alpha_2 \|y\|^{ab}. \quad (2.86)$$

$${}_0^C D_x^\alpha V(x^+, y^+(x)) \leq -\alpha_3 \|y(x)\|^{ab} + h(x). \quad (2.87)$$

$$\int_0^{+\infty} |h(x)| dx = \gamma < +\infty. \quad (2.88)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} |h(x)| \tau^\rho < \eta. \quad (2.89)$$

onde  $x \geq 0$ ,  $D \subset R^n$  é um domínio que contém a origem,  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\dot{V}(x, y(x))$  é contínuo por partes, e  $\dot{V}(x^+, y^+(x))$  existe para qualquer  $x \in [0, \infty)$ ; e  $V(x, y(x)) : [0, \infty) \times D \rightarrow R$  satisfaz localmente a condição de Lipschitz em  $y$ . Se as suposições se sustentam globalmente em  $R^n$ , então obtemos  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$  para qualquer  $x(0) \in R^n$ .

*Demonstração.* Das desigualdades (2.86) e (2.87), a seguinte desigualdade se mantém em quase todos os lugares:

$${}_0^C D_x^\alpha V(x^+, y^+(x)) \leq -\frac{\alpha_3}{\alpha_2} V(x, y(x) + h(x)).$$

Então existe uma função não negativa  $m(x)$  que satisfaz

$${}_0^C D_x^\alpha V(x^+, y^+(x)) + m(x) = -\frac{\alpha_3}{\alpha_2} V(x, y(x) + h(x)). \quad (2.90)$$

Tomando a transformada de Laplace de (2.90), chegamos a

$$s^\alpha V^+(s) - V(0^+)s^{\alpha-1} + M(s) = -\frac{\alpha_3}{\alpha_2} V(s) + H(s). \quad (2.91)$$

onde  $V(0^+) = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} V(\tau, y(\tau))$ ,  $V^+(s) = \mathcal{L}[V(x^+, y^+(x))]$ ,  $V(s) = \mathcal{L}[V(x, y(x))]$ ,  $M(s) = \mathcal{L}[m(x)]$  e  $H(s) = \mathcal{L}[h(x)]$ . Devido à continuidade da função  $V(x, y(x))$  e (2.91), obtemos  $V(x^+, y^+(x)) = V(x, y(x))$ ,  $V^+(s) = V(s)$  e

$$V(s) = \frac{V(0)s^{\alpha-1} - M(s) + H(s)}{s^\alpha + \frac{\alpha_3}{\alpha_2}}.$$

Portanto,  $V(x, y(x))$  satisfaz localmente a condição de Lipschitz em  $y$ , assim, de acordo com o teorema de existência e unicidade, existe uma única solução. Para obtermos essa única solução, aplicaremos a transformada inversa de Laplace na Equação (2.90),

$$V(x) = V(0)E_\alpha\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}x^\alpha\right) + [h(x) - m(x)] * \left[x^{\alpha-1}E_{\alpha\alpha}\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}x^\alpha\right)\right].$$

Desde que  $x^{\alpha-1}$  e  $E_{\alpha\alpha}\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}x^\alpha\right)$  sejam funções não negativas, a equação acima torna-se

$$V(x) \leq V(0)E_\alpha\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}x^\alpha\right) + h(x) * \left[x^{\alpha-1}E_{\alpha\alpha}\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}x^\alpha\right)\right]. \quad (2.92)$$

na sequência, notamos que o  $\lim_{x \rightarrow +\infty} V(0)E_\alpha\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}x^\alpha\right) = 0$ , já para segunda situação  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) * \left[x^{\alpha-1}E_{\alpha\alpha}\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}x^\alpha\right)\right] = 0$  provaremos que é válida.

Assim, denotamos como  $\phi(x) = h(x) * \left[x^{\alpha-1}E_{\alpha\alpha}\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}x^\alpha\right)\right]$  devido a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0$ , existe  $N_1 > 0$  para qualquer  $\frac{\epsilon_1}{3\gamma}$  tal que  $0 \leq \phi(x) < \frac{\epsilon_1}{3\gamma}$  com  $x \geq N_1$ . Logo, de acordo com a equação (2.88), temos:

$$\begin{aligned}
|h(x) * \phi(x)| &\leq \int_0^x |h(x-\tau)|\phi(\tau)d\tau \\
&= \int_0^{N_1} |h(x-\tau)|\phi(\tau)d\tau + \int_{N_1}^x |h(x-\tau)|\phi(\tau)d\tau \\
&\leq \int_0^{N_1} |h(x-\tau)|\phi(\tau)d\tau + \frac{\epsilon_1}{3\gamma} \int_{N_1}^x |h(x-\tau)|d\tau \\
&= \int_0^{N_1} |h(x-\tau)|\phi(\tau)d\tau + \frac{\epsilon_1}{3\gamma} \int_0^{x-N_1} |h(\xi)|d\xi \\
&\leq \int_0^{N_1} |h(x-\tau)|\phi(\tau)d\tau + \frac{\epsilon_1}{3}.
\end{aligned} \tag{2.93}$$

para qualquer  $x \geq N_1$ . Então, de acordo com a Equação (2.89), sabemos que existe uma constante  $0 < \delta \ll 1$  com  $\delta = \left( \frac{\epsilon_1(\alpha - \rho)\Gamma(\alpha)}{4\eta} \right)^{\frac{1}{\alpha - \rho}}$  tal que  $|h(x)| \tau^\rho$  para qualquer  $x \in [0, +\infty)$  e  $\tau \in (0, \delta)$ . Além disso, considerando a convergência de  $E_\alpha\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}x^\alpha\right)$ , obtemos

$$\begin{aligned}
|h(x) * \phi(x)| &\leq \int_0^\delta |h(x-\tau)|\phi(\tau)d\tau + \int_\delta^{N_1} |h(x-\tau)|\phi(\tau)d\tau + \frac{\epsilon_1}{3} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\delta [|h(x-\tau)|\tau^{\alpha-1} + o(|h(x-\tau)|\tau^{\alpha-1})] d\tau \\
&+ \int_\delta^{N_1} |h(x-\tau)|\phi(\tau)d\tau + \frac{\epsilon_1}{3} \\
&\leq \frac{\eta}{(\alpha - \rho)\Gamma(\alpha)} \delta^{\alpha-\rho} + o(\delta^{\alpha-\rho}) + \int_\delta^{N_1} |h(x-\tau)|\phi(\tau)d\tau + \frac{\epsilon_1}{3} \\
&\leq \int_\delta^{N_1} |h(x-\tau)|\phi(\tau)d\tau + \frac{2\epsilon_1}{3}.
\end{aligned}$$

A função  $\phi(x)$  é contínua e convergente com  $x \in [\delta, N_1]$ , onde atinge seu máximo definido em  $M(\delta, N_1) = \max\{\phi(x) | x \in (\delta, N_1)\}$ . Portanto, devido à equação (2.88), existe  $N_2 \geq 0$  para qualquer  $\frac{\epsilon_1}{3M(\delta, N_1)} > 0$  tal que  $\int_0^{+\infty} |h(x)| dx < \frac{\epsilon_1}{3M(\delta, N_1)}$  com  $x \geq N_2$ . Assim, para qualquer  $x \geq N_1 + N_2$ , temos

$$\begin{aligned}
|h(x) * \phi(x)| &\leq \int_\delta^{N_1} |h(x-\tau)|\phi(\tau)d\tau + \frac{2\epsilon_1}{3} \\
&\leq M(\delta, N_1) \int_\delta^{N_1} |h(x-\tau)|d\tau + \frac{2\epsilon_1}{3} \\
&\leq M(\delta, N_1) \int_{x-\delta}^{x-N_1} |h(s)|ds + \frac{2\epsilon_1}{3} \leq \epsilon_1.
\end{aligned}$$

Logo, provamos que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) * \left[ x^{\alpha-1} E_{\alpha\alpha} \left( -\frac{\alpha_3}{\alpha_2} x^\alpha \right) \right] = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha_1 \|y(x)\|^\alpha \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) =$

0 com base na desigualdade (2.92), o que implica em  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ .

□

## Capítulo 3

# REDE NEURAL FRACIONÁRIA DE HOPFIELD

Neste capítulo apresentaremos o modelo de Hopfield de ordem fracionária e multifracionária, que generaliza o modelo de ordem clássica proposto por Hopfield, e que será descrito brevemente na Seção 3.1. Apresentaremos ainda os resultados de boa colocação para o modelo (existência, unicidade e dependência contínua dos dados iniciais, dos parâmetros e da ordem das derivadas). Além disso, serão demonstrados e exibidos os cálculos de estabilidade para o modelo proposto.

### 3.1 Modelo de Hopfield

Em 1982, John Joseph Hopfield apresentou em seu artigo *Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computational Abilities* propriedades de um tipo de modelo neural que reacendeu grande interesse dos cientistas na análise de redes neurais.

Diferente do modelo neural apresentado em MCCULLOCH e PITTS (1943), no qual os neurônios eram elementos de decisão lógica descritos por uma variável de estado de dois valores (on-off) e recebiam entradas sinápticas de um pequeno número de outros neurônios, HOPFIELD e TANK (1986) tentaram evitar essas limitações para modelar neurônios individuais de forma simples, estudando a estrutura biológica dos sistemas neurais interconectados em grande escala e propondo o seu modelo com ênfase no comportamento e nas propriedades do sistema neural como um todo.

Em seu modelo, um único neurônio é simplificado, de forma que possa ser representado por um dispositivo eletrônico simples contendo resistores, capacitor e um componente não linear que ordena a relação entrada-saída, como podemos ver na figura 3.1.

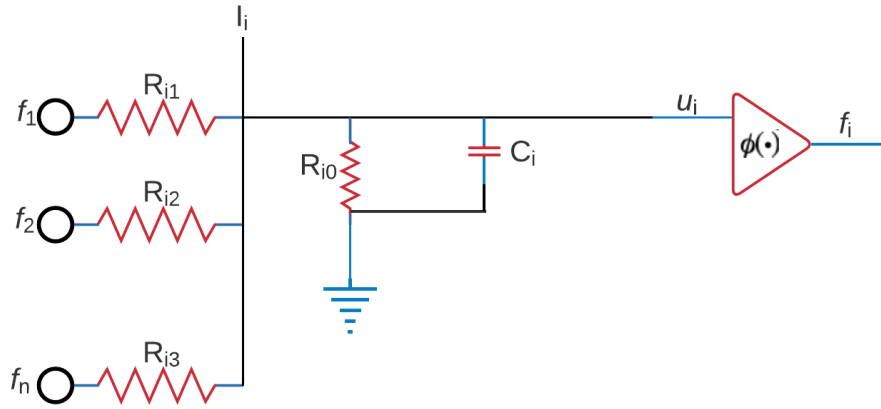


Figura 3.1: Circuito para o neurônio  $i$  no modelo de Hopfield.

Na figura [3.1](#),  $f_i$  com  $i = 0, 1, \dots, J$  é a tensão de saída do neurônio  $i$ ,  $R_{ik}$  com  $k = 0, 1, \dots, J$  são os resistores,  $C_i$  o capacitor,  $I_i$  é a fonte de corrente aplicada exteriormente para o neurônio  $i$ . Por fim,  $u_i$  é a tensão no ponto de interconexão e  $\phi(\cdot)$  é a função de transferência dos amplificadores.

Aplicando a lei de *Ohm* e a lei de *Kirchhoff*, obtemos uma dinâmica de um sistema de  $n$  neurônios acoplados, definida como a rede neural de Hopfield, dada por

$$C_i \frac{du_i(t)}{dt} = -\frac{u_i(t)}{R_i} + \sum_{j=1}^n w_{i,j} f_j(u_j(t)) + I_i \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

De acordo com [ZHANG et al. \(2017\)](#), a resistência  $R_i$  e o capacitor  $C_i$  são paralelos para simular as características de retardo de tempo dos neurônios biológicos. A resistência e os amplificadores operacionais são usados para simular a sinapse e as características não lineares dos neurônios, respectivamente. Portanto, reescrevendo a Equação [\(3.1\)](#) de uma forma mais simples, as equações de estado e saída da Rede Neural de Hopfield com  $n$  neurônios são as seguintes:

$$\begin{aligned} C_i \frac{du_i}{dt} &= -\frac{u_i}{R_i} + \sum_{j=1}^n w_{i,j} f_j + I_i \\ u_i &= \frac{1}{\lambda} \phi_i^{-1}(f_i). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Entre eles,  $u_i(t)$  e  $f_i(t)$  são a entrada e a saída do amplificador operacional do  $i$ -ésimo neurônio no tempo  $t$  (o vetor de saída da rede é calculado recorrentemente a partir de um valor inicial  $u_i(0) = u_1(0), u_2(0), \dots, u_n(0)$ , com  $i = 1, \dots, n$ ),  $I_i$  é a entrada externa,  $\lambda$  é uma variável que ajuda a controlar a taxa de aprendizagem em uma rede,  $w_{ij}$  é a condutância necessária entre o  $i$ -ésimo e  $j$ -ésimo neurônio, respectivamente.

## 3.2 Modelos Fracionários de Hopfield

Como a memória associada ao modelo clássico de Hopfield é uma memória Markoviana (BARRA et al., 2018), nesta seção, motivaremos uma generalização do modelo de Hopfield através do cálculo de ordem fracionária, de forma a utilizar a memória advinda da dinâmica fracionária como uma maneira de descrever o comportamento do cérebro humano.

### 3.2.1 Modelo de Hopfield fracionário

Em BOROOMAND e MENHAJ (2008), os autores propuseram o conceito de Rede Neural de Hopfield de ordem fracionária, substituindo os capacitores clássicos por componentes denominados capacitores fracionários. NAKAGAWA (1992) propôs um novo componente físico, sendo este, um capacitor fracionário que está relacionado ao tipo de dielétrico e pode ser descrito pelo operador de Caputo. Para BOROOMAND e MENHAJ (2008), tal capacitor fracionário pode ser definido como um capacitor generalizado pela relação fracionária entre o terminal de tensão e a corrente que passa por ele. Já que em 1994, WESTERLUND (1994) apresentou um novo modelo de capacitor linear baseado na lei empírica de Curie. Assim como em WESTERLUND (1994), assumiremos que, a partir de uma tensão de entrada geral  $u(t)$ , a corrente seja dada por

$$i(t) = F \frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha} = F({}^C D_t^\alpha u(t)). \quad (3.3)$$

onde  $F$  é a fractância,  ${}^C D^\alpha$  é a derivada de Caputo e  $0 < \alpha < 1$ . Assim, por meio desse capacitor generalizado na rede neural de Hopfield contínua, ao invés do capacitor clássico, chegamos em uma nova rede contínua, denominada Rede Neural de Hopfield de ordem fracionária (FHNN), descritas por equações de ordem fracionária. Nesta modelagem, as equações dinâmicas de estado e saída de FHNN são dadas por

$$\begin{aligned} F_i({}^C D_t^\alpha u_i(t)) &= -\frac{u_i}{R_i} + \sum_{j=1}^n w_{i,j} f_j + I_i \\ u_i &= \frac{1}{\lambda} \phi_i^{-1}(f_i). \end{aligned} \quad (3.4)$$

com condições iniciais  $u_i(0) = u_1(0), u_2(0), \dots, u_n(0)$ . Ainda, em 3.4,  $F_i$  é a fractância do neurônio  $i$ .

A FHNN (3.4) pode ser expressa de uma forma mais apropriada, fazendo as mudanças de variáveis dadas por

$$a_i = \frac{1}{F_i R_i}, \quad w_{ij} = \frac{w_{ij}}{F_i}, \quad I_i = \frac{I_i}{F_i} \quad \text{com } i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.5)$$

Fazendo a mudança de variáveis (3.5) na equação (3.4), obtemos a rede neural de Hopfield de ordem fracionária na forma vetorial sujeita às condições iniciais, dada por

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha \vec{u}(t) &= -A\vec{u}(t) + W\vec{f}(\vec{u}(t)) + \vec{I}(t) \\ \vec{u}(0) &= \vec{u}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde  ${}^C D_t^\alpha$  e  $A$  é a matriz diagonal, cujos coeficientes não nulos representam, respectivamente, as entradas derivadas de Caputo de ordem  $\alpha \in ]0, 1]$  e elementos positivos  $a_i > 0$ , que correspondem à taxa de carregamento do neurônio. O vetor  $\vec{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado da  $i$ -ésima unidade no tempo  $t$  da rede neural,  $W_{n \times n}$  é a matriz que contém como entradas  $w_{ij}$  os pesos e conexão do  $j$ -ésimo neurônio no  $i$ -ésimo neurônio,  $\vec{f}(\vec{u}(t)) = [f_1(u_1(t)), f_2(u_2(t)), \dots, f_n(u_n(t))]^T$  é a função de ativação dos neurônios e  $\vec{I}(t) = [I_1(t), I_2(t), \dots, I_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de entrada externa.

É importante notar que se  $\alpha = 1$ , então temos o modelo de Hopfield clássico (3.1).

### 3.2.2 Modelo de Hopfield multifracionário

Nesta subseção, assumiremos que cada um dos neurônios (ou grupo) que compõem a rede possui uma fractância distinta. Em outras palavras, que a equação (3.3) é dada de maneira generalizada por

$$i(t) = F_i \frac{d^{\alpha_i} u(t)}{dt^{\alpha_i}} = F({}^C D_t^{\alpha_i} u(t)). \quad (3.7)$$

onde  $F_i$  é a fractância,  ${}^C D_t^{\alpha_i}$  é a derivada de Caputo e  $0 < \alpha_i < 1$ . Esta generalização induz a uma Rede Neural de Hopfield multifracionária (MFHNN), cuja dinâmica é descrita por

$$\begin{aligned} F_i({}^C D_t^{\alpha_i} u_i(t)) &= -\frac{u_i}{R_i} + \sum_{j=1}^n w_{i,j} f_j + I_i \\ u_i &= \frac{1}{\lambda} \phi_i^{-1}(f_i). \end{aligned} \quad (3.8)$$

com condições iniciais  $u_i(0) = u_1(0), u_2(0), \dots, u_n(0)$ .

Utilizando a mudança de variáveis (3.5) na equação (3.8), obtemos a rede neural de Hopfield de ordem multifracionária na forma vetorial sujeita às condições iniciais, dada por

$$\begin{aligned} {}^C D_t^{\hat{\alpha}} \vec{u}(t) &= -A\vec{u}(t) + W\vec{f}(\vec{u}(t)) + \vec{I}(t) \\ \vec{u}(0) &= \vec{u}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde  ${}^C D_t^{\hat{\alpha}}$  e  $A$  é a matriz diagonal, cujos coeficientes não nulos representam, respectivamente, as entradas derivadas de Caputo de ordem  $\alpha_i \in ]0, 1]$ , denotadas por  ${}^C D_t^{\alpha_i}$  para  $i = 1, \dots, n$  e elementos positivos  $a_i > 0$ , que correspondem à taxa de carregamento do neurônio. O vetor  $\vec{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado da  $i$ -ésima unidade no tempo  $t$  da rede neural,  $W_{n \times n}$  é a matriz que contém como entradas  $w_{ij}$  os pesos e conexão do  $j$ -ésimo neurônio no  $i$ -ésimo neurônio,  $\vec{f}(\vec{u}(t)) = [f_1(u_1(t)), f_2(u_2(t)), \dots, f_n(u_n(t))]^T$  é a função de ativação dos

neurônios e  $\vec{I}(t) = [I_1(t), I_2(t), \dots, I_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de entrada externa.

Também é importante notar que, se  $\alpha_i = 1$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , então, mais uma vez, retornamos ao modelo clássico de Hopfield [3.1](#).

### 3.3 Boa colocação para os Modelos de Hopfield de Ordem Fracionária

Nesta subseção, analisaremos os resultados de boa colocação (Existência e Unicidade e dependência contínua dos dados iniciais e dos parâmetros, incluindo a ordem da derivada) para a solução dos modelos de Hopfield de ordem fracionária, dada pelo sistema [\(3.6\)](#) e [\(3.9\)](#), respectivamente. Para tal, assumiremos que as seguintes hipóteses sejam satisfeitas:

**Hipótese 1.** Todas as funções de ativação  $f_i$  são contínuas e satisfazem a condição de Lipschitz em  $\mathbb{R}$  com a constante de Lipschitz  $l_i > 0$ , ou seja,

$$|f_i(u_1) - f_i(u_2)| \leq l_i |u_1 - u_2|. \quad (3.10)$$

para todo  $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$  com  $i = 1, 2, \dots, n$

**Hipótese 2.** Existem constantes positivas  $\beta_i$  com  $i = 1, 2, \dots, n$  tal que

$$c_i = a_i \beta_i - \sum_{j=1}^n |w_{j,i}| \beta_i l_i > 0. \quad (3.11)$$

*Observação 3.1.* A Hipótese [1](#) garante as condições de existência e unicidade da solução para os sistemas fracionários [\(3.6\)](#) e [\(3.9\)](#) com base a seção [2.11](#).

O próximo resultado é auxiliar para a análise que segue.

**Lema 3.1.** Assuma as Hipóteses [1](#) e [2](#) satisfeitas,  $I(t)$  seja contínua com relação a  $t$ . Então, a função  $G(t, u) := -Au(t) + Wf(u(t)) + \hat{I}(t)$  é contínua com relação a  $t$  e Lipschitz contínua com relação a segunda variável.

*Demonstração.* A continuidade, segue da continuidade com relação a  $t$  das funções envolvidas.

Em seguida, denotamos  $\|x\|$  a 1-norma do vetor  $x$  ou matriz  $x$  correspondente,

$$\|x\| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

com  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T \in \mathbb{R}^n$ .

Definiremos  $H(\mu) = (H_1(\mu), H_2(\mu), \dots, H_n(\mu))^T$ , onde

$$H_i(\mu) = \beta_i \sum_{j=1}^n w_{i,j} f_j\left(\frac{\mu_j}{a_j \beta_j}\right) + \beta_i \hat{I}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.12)$$

com  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T \in \mathbb{R}^n$ . Devido à Hipótese [1](#), para dois vetores quaisquer  $\mu, \nu \in \mathbb{R}^n$ , obtemos

$$\begin{aligned} |H_i(\mu) - H_i(\nu)| &= \beta_i \left| \sum_{j=1}^n w_{i,j} \left[ f_j \left( \frac{\mu_j}{a_j \beta_j} \right) - f_j \left( \frac{\nu_j}{a_j \beta_j} \right) \right] \right| \\ &\leq \beta_i \sum_{j=1}^n \frac{|w_{i,j}| L_j}{a_j \beta_j} |\mu_j - \nu_j|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|H(\mu) - H(\nu)\| &= \sum_{i=1}^n |H_i(\mu) - H_i(\nu)| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{|w_{i,j}| \beta_i L_j}{a_j \beta_j} |\mu_j - \nu_j| \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{|w_{i,j}| \beta_i L_i}{a_i \beta_i} |\mu_j - \nu_j|. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Assim, usando a Hipótese [2](#) na equação [\(3.13\)](#), temos

$$\begin{aligned} \|H(\mu) - H(\nu)\| &\leq \sum_{j=1}^n \left( 1 - \frac{c_i}{a_i \beta_i} \right) |\mu_i - \nu_i| \\ &\leq k \|\mu - \nu\|. \end{aligned}$$

onde  $k = \max \left\{ 1 - \frac{c_1}{a_1 \beta_1}, 1 - \frac{c_2}{a_2 \beta_2}, \dots, 1 - \frac{c_n}{a_n \beta_n} \right\} < 1$ . □

**Teorema 3.2.** Assumindo que as hipóteses do Lema [3.1](#) sejam satisfeitas. Então, existe uma única solução contínua  $u$  em  $[0, T]$ , para algum  $T > 0$  do PVI [\(3.6\)](#)-[\(3.9\)](#). Além disso, a solução  $u$  depende continuamente das condições iniciais, dos parâmetros e da ordem  $\alpha$  da derivada.

*Demonstração.* Segue do Lema [3.1](#) que as hipóteses dos Teoremas [2.10](#), [2.12](#) e [2.15](#) são satisfeitas. Assim, as afirmativas do teorema são verdadeiras para o sistema de Hopfield fracionário [\(3.6\)](#). Além disso, repetindo os passos do Teorema [2.18](#), concluimos que ele também será verdadeiro para o sistema de Hopfield de ordem multifracionária [\(3.9\)](#). □

**Corolário 3.2.1.** Assumindo que as hipóteses do Lema [3.1](#) sejam satisfeitas. Então, o modelo clássico de Hopfield [\(3.1\)](#) possui uma única solução contínua  $u$  em  $[0, T]$ , para algum  $T > 0$ .

Além disso, a solução  $u$  depende continuamente das condições iniciais e dos parâmetros.

*Demonstração.* A demonstração segue diretamente do Teorema [3.2](#) com  $\alpha = 1$ . □

### 3.4 Análise da estabilidade dos Modelos de Hopfield

Nesta seção, analisaremos os resultados de estabilidade para a solução dos modelos de ordem fracionária de Hopfield, dada pelos sistemas (3.6) e (3.9), respectivamente. Em particular, incluiremos uma breve descrição dos resultados para o modelo clássico de Hopfield (3.1). Para tal, usaremos as construções teóricas apresentadas na seção 2.14 e o próximo resultado, que garante a existência de pontos de equilíbrio para ambos os modelos analisados.

**Teorema 3.3.** (ZHANG et al., 2017) Assuma as Hipóteses do Lema 3.1 satisfeitas. Então, existe uma única solução de  $-Au(t) + Wf(u(t)) + \hat{I} = 0$ . Em outras palavras, os sistemas de Hopfield de ordem fracionária (3.6) e (3.9) possuem um e somente um ponto de equilíbrio não trivial.

*Demonstração.* De maneira análoga aos passos apresentados no Lema 3.1, segue que a aplicação  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma contração em  $\mathbb{R}^n$ . Portanto, pelo Teorema do ponto fixo de Banach (consultar o apêndice A.2), existe um único ponto fixo  $\hat{\mu} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $H(\hat{\mu}) = \hat{\mu}$ , ou seja

$$\hat{\mu}_i = \beta_i \sum_{j=1}^n w_{i,j} f_j \left( \frac{\hat{\mu}_j}{a_j \beta_j} \right) + \beta_i \hat{I}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Desse modo, para  $\hat{u}_i = \frac{\hat{\mu}_i}{a_i \beta_i}$ , logo

$$-a_i \hat{u}_i + \sum_{j=1}^n w_{i,j} f_j(\hat{u}_j) + \hat{I}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Assim, temos

$$-A\hat{u} + Wf(\hat{u}) + \hat{I} = 0 \tag{3.14}$$

onde  $\hat{u} = [\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n]^T$  é o único ponto de equilíbrio do sistema (3.14).  $\square$

O resultado acima é fundamental para a análise que segue. Em particular, se aplica para o modelo clássico de Hopfield (3.1), com  $\alpha = 1$ .

**Corolário 3.3.1.** Assuma as Hipóteses do Teorema 3.3 satisfeitas. Então existe um único ponto estacionário para o modelo clássico de Hopfield (3.1).

*Demonstração.* Segue diretamente dos resultados do Teorema 3.3 com  $\alpha = 1$ .  $\square$

#### 3.4.1 Estabilidade do Modelo de Hopfield

Nesta subseção, para fins de completude do trabalho, apresentaremos a estabilidade do modelo (3.2) proposta por Hopfield. Consideremos a seguinte função de energia como uma função de Lyapunov

$$E = -\frac{1}{2} \sum_i^n \sum_j^n w_{i,j} f_j f_i - \sum_i^n I_i f_i + \frac{1}{\lambda} \sum_i^n \frac{1}{R_i} \int_0^{f_i} \phi_i^{-1}(t) dt. \quad (3.15)$$

É importante observar que, se os pesos  $w_{i,j} = w_{j,i}$ , ou seja, se estes são simétricos, então esta função de energia tem um gradiente de tempo negativo  $\frac{dE}{dt} \leq 0$ . Em outras palavras, derivando a função de energia (3.15) em relação a  $t$  ao longo das trajetórias do sistema (3.2), temos:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial E}{\partial f_i} \frac{df_i}{dt} \quad (3.16)$$

considerando  $w_{i,j} = w_{j,i}$ ,  $w_{i,i} = 0$ ,  $u_i = \phi_i^{-1}(f_i)$  e realizando a substituição da Equação (3.15) na Equação (3.16), obtemos

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( -\sum_{j=1}^n w_{i,j} f_j - I_i + \frac{u_i}{R_i} \right) \frac{df_i}{dt}. \quad (3.17)$$

Observando a Equação (3.2), temos

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( -C_i \frac{du_i}{dt} \right) \frac{df_i}{dt}. \quad (3.18)$$

sendo  $\frac{df_i}{dt} = \phi'_i(u_i) \frac{du_i}{dt}$ , assim extraímos da Equação (3.18)

$$\frac{dE}{dt} = -\sum_{i=1}^n C_i \left( \frac{du_i}{dt} \right)^2 (\phi'_i(u_i)). \quad (3.19)$$

Uma vez que a função de ativação é uma função monótona crescente,  $\phi'_i > 0$ , temos

$$\frac{dE}{dt} = -\sum_{i=1}^n C_i \left( \frac{du_i}{dt} \right)^2 (\phi'_i(u_i)) \leq 0. \quad (3.20)$$

A partir da equação (3.15), vemos que a função  $E$  é limitada e sua derivada é não positiva, quando  $\frac{dE}{dt} = 0$ , o que implica em

$$-\frac{u_i}{R_i} + \sum_{j=1}^n w_{i,j} f_j + I_i = 0.$$

Portanto, a evolução temporal do sistema (3.2) descrito pelas equações diferenciais não lineares de primeira ordem pode representar a trajetória no espaço de estados, buscando os mínimos da superfície de energia  $E$ , e.g. HOPFIELD e TANK (1986), PINHEIRO (2014).

Assim, o sistema (3.2) atua como uma memória endereçável por conteúdo, ou seja, ele é caracterizado por um conjunto de equilíbrio estável. Os pontos iniciais que estão próximos de um equilíbrio particular e distantes de outros convergirão para esse estado estável próximo. A

localização de um ponto de equilíbrio particular é pensada como a informação de uma memória particular. A partir de uma informação parcial sobre essa memória (ou seja, condição inicial próxima o suficiente do ponto fixo), podemos determinar a memória completa (JESSOP, 2011).

### 3.4.2 Análise de estabilidade de redes neurais de Hopfield de ordem fracionária com entradas externas que variam com o tempo

Com base nos estudos de ZHANG et al. (2017), para analisar a estabilidade global do sistema (3.6), precisamos considerar as Hipóteses 1, 2 e a seguinte Hipótese.

**Hipótese 3.** O vetor de entrada externa variável no tempo  $I(t)$  é suave por partes. Existe um vetor constante  $\hat{I} = [\hat{I}_1, \hat{I}_2, \dots, \hat{I}_n]^T$  e uma constante  $\gamma \geq 0$ , tal que

$$\int_0^{+\infty} \|I(t) - \hat{I}\| dt = \gamma < +\infty$$

para  $t \geq 0$ .

**Hipótese 4.** Existem constantes  $\rho < \beta$  e  $\eta > 0$ , tais que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \|I(t) - \hat{I}\| \tau^\rho < \eta$$

para  $t \geq 0$ . Essas Hipóteses serão úteis para a demonstração do seguinte teorema.

**Teorema 3.4.** Assuma que as Hipóteses 1 - 4 sejam satisfeitas. Então, temos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \hat{u}$$

onde  $u(t)$  é uma solução do sistema (3.6) para qualquer  $u(0) \in \mathbb{R}^n$  e  $\hat{u}$  é a única solução de  $-Au(t) + Wf(u(t)) + \hat{I} = 0$ , dada pelo Teorema 3.3.

*Demonstração.* Para provar o teorema, usaremos a equação (3.14) e a mudança de variável  $y(t) = u(t) - \hat{u}$  com  $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T$ , reescrevendo o sistema (3.6) como

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha y(t) &= -A(y(t) + \hat{u}) + Wf(y(t) + \hat{u}) + I(t) \\ &= -A(y(t)) + W[f(y(t) + \hat{u}) - f(\hat{u})] - A(\hat{u}) + Wf(\hat{u}) + I(t) \\ &= -A(y(t)) + W[f(y(t) + \hat{u}) - f(\hat{u})] + I(t) - \hat{I} \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde  $y_i(t) \in C^1(0, +\infty)$  é continuamente diferenciável. Assim, construímos a seguinte função de Lyapunov

$$V(t, y(t)) = \sum_{i=1}^n \beta_i |y_i(t)|. \quad (3.22)$$

É obvio que a função de Lyapunov (3.22) satisfaz a condição de desigualdade (2.75) do Teorema 2.19 da seção 2.14. Dessa forma, provaremos que a função de Lyapunov (3.22) também satisfaz a condição de desigualdade (2.87) do Teorema 2.24 em quase todos os lugares. Devido ao Lema 2.21 e à Hipótese 2, a seguinte desigualdade ocorre em quase todos os lugares:

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha V(t^+, y(t^+)) &= \sum_{i=1}^n \beta_i {}^C D_t^\alpha |y_i(t^+)| \leq \sum_{i=1}^n \beta_i \operatorname{sgn}(y_i(t)) {}^C D_t^\alpha y_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^n \beta_i \operatorname{sgn}(y_i(t)) \left[ -a_i y_i(t) + I_i(t) - \hat{I}_i + \sum_{j=1}^n w_{ij} (f_j(y_j(t) + \hat{u}_j) - f_j(\hat{u}_j)) \right]. \end{aligned}$$

Usando a Hipótese 1, temos

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha V(t^+, y(t^+)) &\leq \sum_{i=1}^n \beta_i \left[ -a_i |y_i(t)| + |I_i(t) - \hat{I}_i| + \sum_{j=1}^n L_j |w_{ij}| |y_j(t)| \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \beta_i (-a_i |y_i(t)| + |I_i(t) - \hat{I}_i|) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_j L_i |w_{ij}| |y_i(t)| \\ &= -\sum_{i=1}^n \left( a_i \beta_i - \sum_{i=1}^n L_i |w_{ij}| \beta_j \right) |y_i(t)| + \sum_{i=1}^n \beta_i |I_i(t) - \hat{I}_i|. \end{aligned}$$

Aplicando a Hipótese 2, obtemos

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha V(t^+, y(t^+)) &\leq -c \sum_{i=1}^n |y_i(t)| + \beta \sum_{i=1}^n |I_i(t) - \hat{I}_i| \\ &= -c \|y(t)\| + \beta \|I(t) - \hat{I}\| \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde  $c = \min \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  e  $\beta = \max \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ . Assim, a desigualdade (3.23) satisfaz a condição (2.87) em quase todos os lugares com  $h(t) = \beta \|I(t) - \hat{I}\|$ . Portanto, a solução do sistema (3.21) é globalmente estável. Assim, com base no Teorema 2.24, temos  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$  para todo  $y(0) \in \mathbb{R}^n$ , o que implica  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0$  para todo  $u(0) \in \mathbb{R}^n$ .  $\square$

Assumindo as hipóteses do Teorema 3.4 satisfeitas, segue o próximo Corolário, o qual contém um resultado de grande importância em nossa análise.

**Corolário 3.4.1.** Se as Hipóteses 1 - 3 forem mantidas e  $I(t)$  satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \hat{I},$$

então  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \hat{u}$ , onde  $u(t)$  é uma solução do sistema (3.6) para qualquer  $u(0) \in \mathbb{R}^n$  e  $\hat{u}$  é a única solução de  $-Au(t) + Wf(u(t)) + \hat{I} = 0$ .

### 3.4.3 Análise de estabilidade de Mittag-Leffler de redes neurais de Hopfield de ordem fracionária com entradas externas constantes

Com base nos estudos de ZHANG et al. (2015), para analisar a estabilidade de Mittag-Leffler no sistema (3.6) com entradas externas constantes, precisamos considerar a Hipótese 1 e a seguinte Hipótese.

**Hipótese 5.** Existem constantes positivas  $d_i$  com  $i = 1, 2, \dots, n$  tal que

$$d_i = a_i - \sum_{j=1}^n |w_{j,i}| l_i > 0. \quad (3.24)$$

**Teorema 3.5.** Sob as Hipóteses 1 e 5. Então o ponto estacionário do sistema (3.6) é Mittag-Leffler globalmente estável.

*Demonstração.* Nossa linha de argumentação aqui será para comprovar as hipóteses do Teorema 3.5, do qual segue que o único ponto estacionário  $\hat{u}$  do sistema (3.6), como dado pelo Teorema 2.19, é Mittag-Leffler globalmente estável. Sejam  $x(t)$  e  $y(t)$  duas soluções do sistema (3.6) com diferentes condições iniciais, assim o novo sistema  $z(t) = x(t) - y(t)$  com  $z(t) = [z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$  pode ser escrito como:

$${}^C D_t^\alpha z_i(t) = -a_i z_i(t) + w_{ij}(f_j(x_j(t)) - f_j(y_j(t))) \quad \text{com } i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.25)$$

onde  $\alpha < 1$ . Se  $z_i(t) \in C^1(0, +\infty)$  é continuamente diferenciável, ou seja, sua derivada é contínua por partes e seu limite existe para qualquer  $x \in [0, +\infty)$ . Assim, construímos a função de Lyapunov dada por

$$V(t, z(t)) = \|z(t)\|_1 = \sum_{i=1}^n |z_i(t)|. \quad (3.26)$$

Note que, pelas Hipóteses 1, 5 e o Lema 2.21, a seguinte desigualdade se aplica a quase todos os lugares:

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha V(t^+, z(t^+)) &= \sum_{i=1}^n {}^C D_t^\alpha |z_i(t^+)| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \text{sgn}(z_i(t)) {}^C D_t^\alpha z_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{sgn}(z_i(t)) \left[ -a_i z_i(t) + \sum_{j=1}^n w_{ij}(f_j(x_j(t)) - f_j(y_j(t))) \right]. \end{aligned}$$

Aplicando a Hipótese 1, temos

$$\begin{aligned}
{}_0^C D_t^\alpha V(t^+, z(t^+)) &\leq \sum_{i=1}^n \left[ -a_i |z_i(t)| + \sum_{j=1}^n l_j |w_{ij}| |z_j(t)| \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \left[ -a_i |z_i(t)| + \sum_{j=1}^n l_i |w_{ij}| |z_i(t)| \right] \\
&= - \sum_{i=1}^n \left[ a_i - \sum_{j=1}^n l_i |w_{ij}| \right] |z_i(t)|.
\end{aligned}$$

Usando a Hipótese [5](#), chegamos em

$${}_0^C D_t^\alpha V(t^+, z(t^+)) \leq -d \|z(t)\|_1 \quad (3.27)$$

a qual  $d = \min \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ .

Portanto, a solução do sistema [\(3.6\)](#) é globalmente estável Mittag-Leffler, ou seja,

$$\|z(t)\| \leq V(0, z(0)) E_\alpha(-dt^\alpha)$$

implicando que  $\tilde{u}$  é o único ponto de equilíbrio do sistema [\(3.6\)](#), ou seja

$$\|u(t) - \tilde{u}\| \leq V(0, u(0) - \tilde{u}) E_\alpha(-dt^\alpha)$$

para qualquer solução do sistema [\(3.6\)](#). □

### 3.4.4 Análise de estabilidade de Mittag-Leffler de redes neurais de Hopfield de múltiplas ordens

Nesta subseção, faremos um paralelo entre os estudos de [YU et al. \(2013\)](#) com os estudos de [ZHANG et al. \(2015\)](#), para analisar a estabilidade de Mittag-Leffler no sistema [\(3.9\)](#). Em outras palavras, precisamos considerar as Hipóteses [1](#) e [5](#), das quais seguem o resultado.

**Teorema 3.6.** Sob as Hipóteses [1](#) e [5](#), qualquer que seja o ponto estacionário do sistema [\(3.9\)](#) é Mittag-Leffler globalmente estável.

*Demonstração.* Partindo da mesma linha de argumentação de sistemas com mesma ordem, iremos aqui comprovar as hipóteses do Teorema [3.6](#), do qual segue que o único ponto estacionário  $\hat{u}$  do sistema [\(3.9\)](#), como dado pelo Teorema [2.23](#), é Mittag-Leffler globalmente estável. Sejam  $x(t)$  e  $y(t)$  duas soluções do sistema [\(3.9\)](#) com diferentes condições iniciais, assim o novo sistema  $z(t) = x(t) - y(t)$  com  $z(t) = [z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$  pode ser escrito como:

$${}_0^C D_t^{\alpha_j} z_i(t) = -a_i z_i(t) + w_{ij} (f_j(x_j(t)) - f_j(y_j(t))) \quad \text{com } i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.28)$$

onde  $\alpha_j \in (0, 1]$ . Se  $z_i(t) \in C^1(0, +\infty)$  é continuamente diferenciável, ou seja, sua derivada é contínua por partes e seu limite existe para qualquer  $x \in [0, +\infty)$ . Agora, consideraremos a função de Lyapunov dada por

$$V(t, z(t)) = \|z(t)\|_1 = \sum_{i=1}^n |z_i(t)|. \quad (3.29)$$

Note que, de acordo com as Hipóteses [1](#), [5](#) e o Lema [2.21](#), a seguinte desigualdade se aplica a quase todos os lugares:

$$\begin{aligned} {}^C D_t^{\alpha_j} V(t, z(t)) &= \sum_{i=1}^n {}^C D_t^{\alpha_j} |z_i(t)| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \operatorname{sgn}(z_i(t)) {}^C D_t^{\alpha_j} z_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^n \operatorname{sgn}(z_i(t)) \left[ -a_i z_i(t) + \sum_{j=1}^n w_{ij} (f_j(x_j(t)) + f_j(y_j(t))) \right]. \end{aligned}$$

Aplicando a Hipótese [1](#), temos

$$\begin{aligned} {}^C D_t^{\alpha_j} V(t, z(t)) &\leq \sum_{i=1}^n \left[ -a_i |z_i(t)| + \sum_{j=1}^n l_j |w_{ij}| |z_j(t)| \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ -a_i |z_i(t)| + \sum_{j=1}^n l_i |w_{ij}| |z_i(t)| \right] \\ &= -\sum_{i=1}^n \left[ a_i - \sum_{j=1}^n l_i |w_{ij}| \right] |z_i(t)|. \end{aligned}$$

Usando a Hipótese [5](#), chegamos em

$${}^C D_t^{\alpha_j} V(t, z(t)) \leq -d \|z(t)\|_1 \quad (3.30)$$

a qual  $d = \min \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ .

Portanto, a solução do sistema [\(3.6\)](#) é globalmente estável Mittag-Leffler, ou seja,

$$\|z(t)\| \leq V(0, z(0)) E_{\alpha}(-dt^{\alpha})$$

implicando que  $\tilde{u}$  é o único ponto de equilíbrio do sistema [\(3.9\)](#), ou seja

$$\|u(t) - \tilde{u}\| \leq V(0, u(0) - \tilde{u}) E_{\alpha}(-dt^{\alpha})$$

para qualquer solução do sistema [\(3.9\)](#). □

## Capítulo 4

# RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo apresentaremos os resultados numéricos para o sistema de rede neural de Hopfield de ordem fracionária (3.6) e (3.9) para diferentes escolhas de  $\alpha_j \in ]0, 1]$ . Para simular esses tipos de sistemas, utilizamos o código FDE\_PI12\_PC.m, proposto por GARRAPA (2018), que se baseia em adaptações do Método Retangular (como preditor) com o Método Trapezoidal (como corretor) para Equações Diferenciais Fracionárias implementado em linguagem Matlab.

### 4.1 Simulação Numérica

Para demonstrar a eficácia dos resultados teóricos obtidos na seção 3.4, apresentaremos simulações para o sistemas (3.6) e (3.9) com entradas externas que variam com o tempo e entradas externas constantes, além disso, analisaremos as consequências das diferentes escolhas de  $\alpha_j \in ]0, 1]$ , ou seja, trabalharemos com situações em que a ordem fracionária dos sistemas citados acima vão ser iguais em todas as equações do sistema e também diferentes em cada equação.

Desse modo, vamos explorar duas situações: na primeira, implementaremos para  $n = 5$  (cinco) neurônios e na segunda para  $n = 10$  (dez) neurônios.

Baseando-se na dinâmica neural fracionária (3.6) e (3.9), consideremos o seguinte sistema acoplado de cinco neurônios, ou seja, cinco estados de equações diferenciais fracionárias na rede, descrito pela seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^C D^{\alpha_1} u_1 = -a_{11}u_1 + \sum_{j=1}^5 w_{1j} f_j(u_j(t)) + I_1 \\ {}^C D^{\alpha_2} u_2 = -a_{22}u_2 + \sum_{j=1}^5 w_{2j} f_j(u_j(t)) + I_2 \\ {}^C D^{\alpha_3} u_3 = -a_{33}u_3 + \sum_{j=1}^5 w_{3j} f_j(u_j(t)) + I_3 \\ {}^C D^{\alpha_4} u_4 = -a_{44}u_4 + \sum_{j=1}^5 w_{4j} f_j(u_j(t)) + I_4 \\ {}^C D^{\alpha_5} u_5 = -a_{55}u_5 + \sum_{j=1}^5 w_{5j} f_j(u_j(t)) + I_5 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

onde  $\alpha_j \in (0, 1]$  com  $j = 1, 2, 3, 4, 5$ ,  $A = (a_{ij})_{5 \times 5} = \text{diag}(5, 7, 5, 7, 5)$ ,  $f_j(u_j(t)) = (\sin(u_j))^T$  para  $j = 1, 2, 3, 4, 5$  e

$$W = (w_{ij})_{5 \times 5} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2.5 & 1 & 1.4 & 2 \\ -1.5 & 3 & -1.5 & 1.2 & 0 \\ 1.3 & -2 & 1 & -1 & 2.8 \\ -0.5 & 2.8 & -1.5 & -2.5 & -1 \end{pmatrix}$$

Para essa situação, dividiremos em dois casos de entradas.

1. Caso: Suponhamos que as entradas do sistema (4.1)  $I_1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ,  $I_2 = \exp(-t)$ ,  $I_3 = \text{sgn}(t - 5)$ ,  $I_4 = \exp(-2t)$  e  $I_5 = \text{sgn}(t)$  sejam entradas externas que variam com o tempo. Levando em consideração os resultados do Teorema 3.3, existe um único ponto de equilíbrio não trivial para o sistema (4.1). Assim, de acordo com as hipóteses 1 e 2 os parâmetros escolhidos são válidos, desde que  $l_i = 1$  e  $\beta_i = 1$  para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ . Utilizando mais uma vez as rotinas do Matlab, podemos calcular que  $\tilde{u} = (-0.18, 0.03, 0.21, 0.03, 0.13)^T$ . Portanto, pelo Teorema 3.5 e pelo Teorema 3.6, a solução estacionária do sistema (4.1) é globalmente Mittag-Leffler estável. Tal resultado teórico pode ser comprovado pela simulação numérica apresentada na figura 4.1, onde os valores iniciais são tomados como  $u_i(0) = (1, 1, -1, 1, 1)^T$  com  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

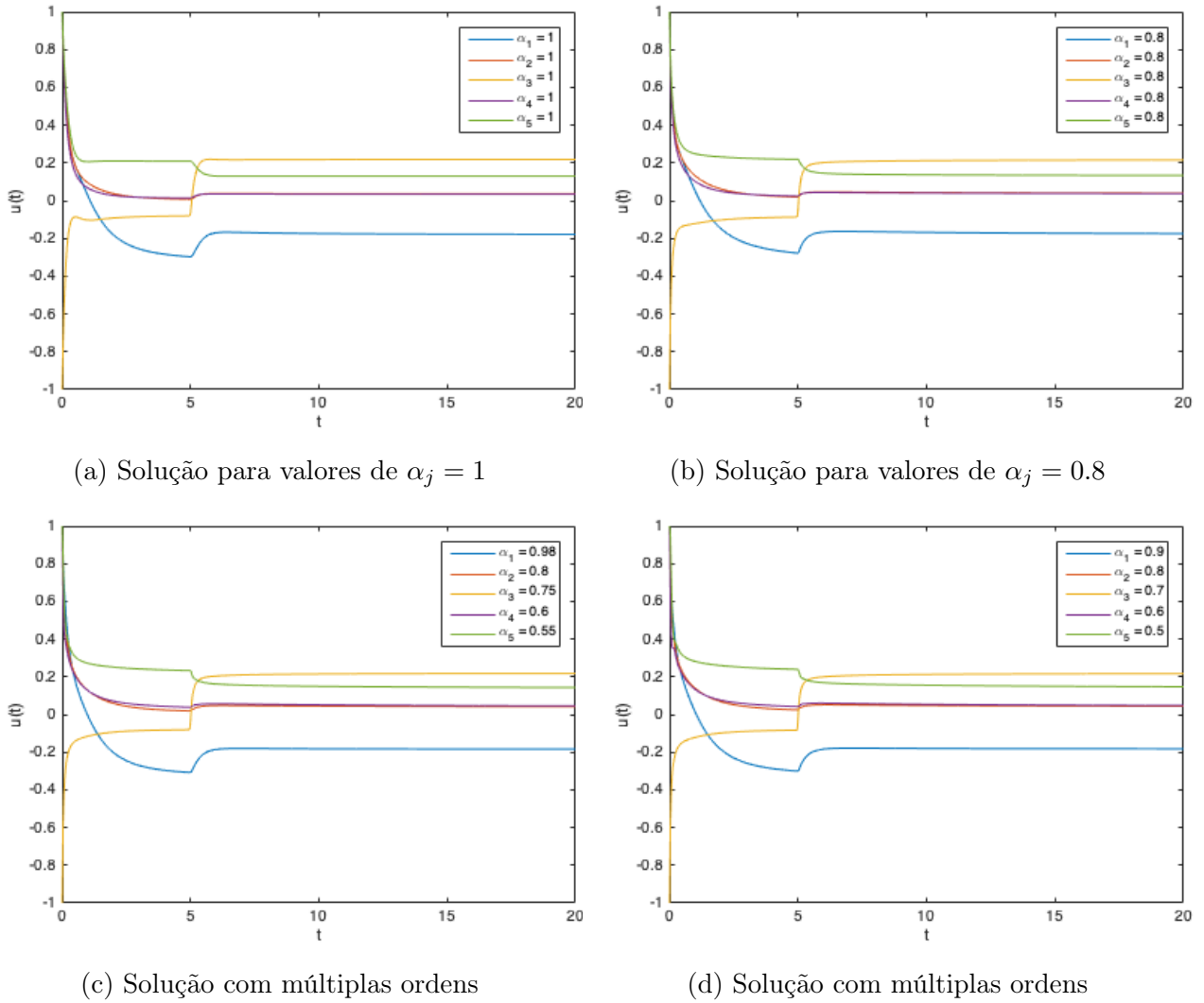
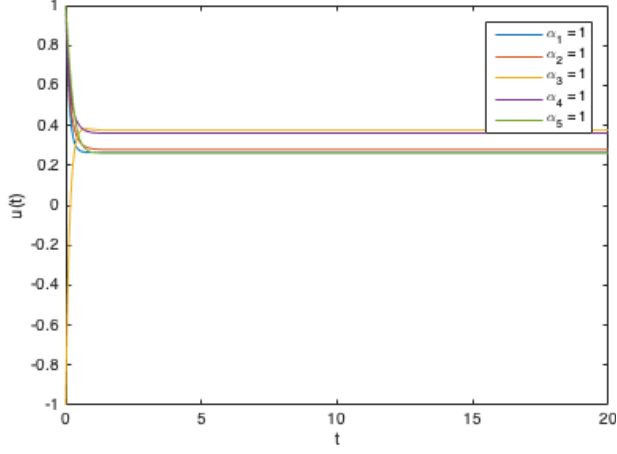
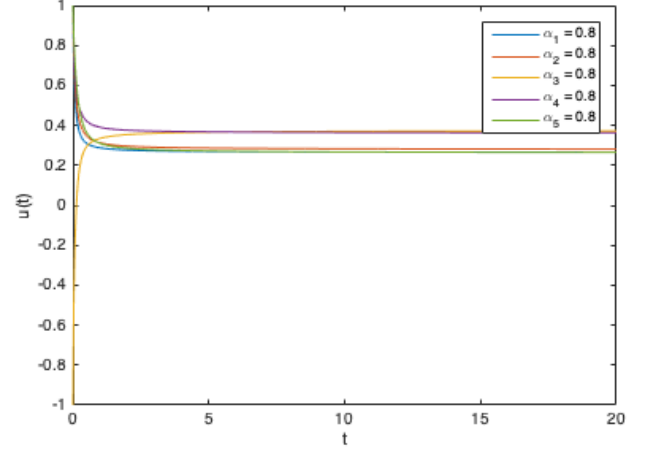
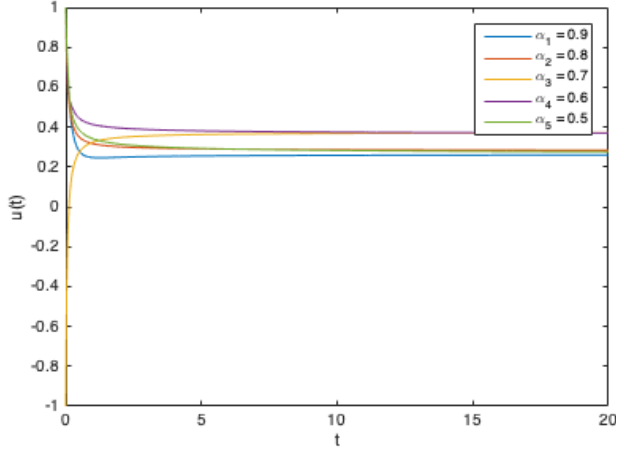


Figura 4.1: Soluções para diferentes casos de  $\alpha_j$  com entradas externas que variam com o tempo

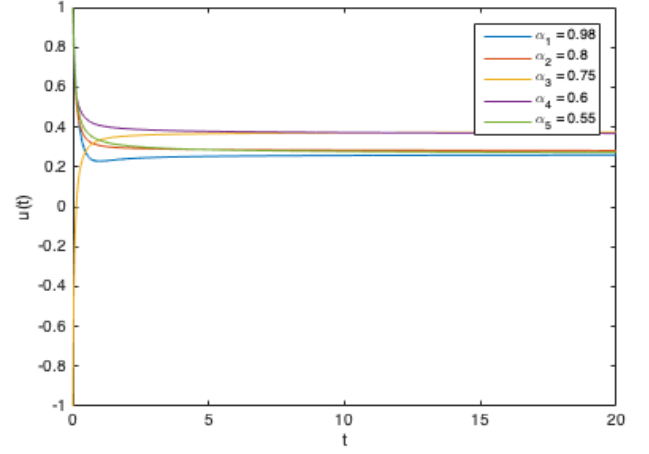
Podemos notar que as figuras (a), (b), (c) e (d) alcançam a estabilidade com um certo tempo  $t$ , ou seja, todas as soluções do sistema (4.1) convergem para o ponto de equilíbrio do sistema.

Agora iremos para o segundo caso.

2. Caso: Sejam  $I_1 = \frac{\pi}{4}, I_2 = 1, I_3 = \frac{\pi}{2}, I_4 = 2$  e  $I_5 = \frac{3\pi}{4}$  entradas constantes para o sistema (4.1). De acordo com o Teorema 3.3, existe um único ponto de equilíbrio não trivial para o sistema (4.1). Dessa forma, as Hipóteses 1 e 5 são satisfeitas para os parâmetros escolhidos, desde que  $l_i = 1$  com  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ . Utilizando as rotinas do Matlab, obtemos que  $\tilde{u} = (0.26, 0.27, 0.37, 0.36, 0.26)^T$  é o ponto estacionário, que pode ser visto na simulação numérica apresentada na figura 4.2, onde os valores iniciais, os parâmetros e as ordens fracionárias são os mesmos utilizados nas simulações do primeiro caso.

(a) Solução para valores de  $\alpha_j = 1$ (b) Solução para valores de  $\alpha_j = 0.8$ 

(c) Solução com múltiplas ordens



(d) Solução com múltiplas ordens

Figura 4.2: Soluções para diferentes casos de  $\alpha_j$  com entradas externas constantes

Assim, o Teorema 3.5 nos garante que existe um único ponto de equilíbrio  $\tilde{u}$ , que é dado por  $\tilde{u} = (0.26, 0.27, 0.37, 0.36, 0.26)^T$ . Percebemos pelas simulações apresentadas na Figura 4.2, que independentemente das escolhas de  $\alpha_j \in ]0, 1]$ , o ponto de equilíbrio do sistema (4.1) é globalmente Mittag-Leffler estável.

Já para segunda situação, assumiremos que  $n = 10$  (dez) neurônios e que a matriz de pesos  $w_{ij}$  seja uma matriz simétrica e sem autorrealimentação de neurônio, isso nos garantirá a estabilidade para o sistema de ordem clássica (PINHEIRO et al., 2020). Para isso, consideremos a dinâmica neural fracionária (3.6) e (3.9), assim o seguinte sistema acoplado de dez neurônios é descrito pelo seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^C D^{\alpha_1} u_1 = -a_{11}u_1 + \sum_{j=1}^5 w_{1j} f_j(u_j(t)) + I_1 \\ {}^C D^{\alpha_2} u_2 = -a_{22}u_2 + \sum_{j=1}^5 w_{2j} f_j(u_j(t)) + I_2 \\ {}^C D^{\alpha_3} u_3 = -a_{33}u_3 + \sum_{j=1}^5 w_{3j} f_j(u_j(t)) + I_3 \\ {}^C D^{\alpha_4} u_4 = -a_{44}u_4 + \sum_{j=1}^5 w_{4j} f_j(u_j(t)) + I_4 \\ {}^C D^{\alpha_5} u_5 = -a_{55}u_5 + \sum_{j=1}^5 w_{5j} f_j(u_j(t)) + I_5 \\ {}^C D^{\alpha_6} u_6 = -a_{66}u_6 + \sum_{j=1}^6 w_{6j} f_j(u_j(t)) + I_6 \\ {}^C D^{\alpha_7} u_7 = -a_{77}u_7 + \sum_{j=1}^7 w_{7j} f_j(u_j(t)) + I_7 \\ {}^C D^{\alpha_8} u_8 = -a_{88}u_8 + \sum_{j=1}^8 w_{8j} f_j(u_j(t)) + I_8 \\ {}^C D^{\alpha_9} u_9 = -a_{99}u_9 + \sum_{j=1}^9 w_{9j} f_j(u_j(t)) + I_9 \\ {}^C D^{\alpha_{10}} u_{10} = -a_{1010}u_{10} + \sum_{j=1}^{10} w_{10j} f_j(u_j(t)) + I_{10} \end{array} \right. \quad (4.2)$$

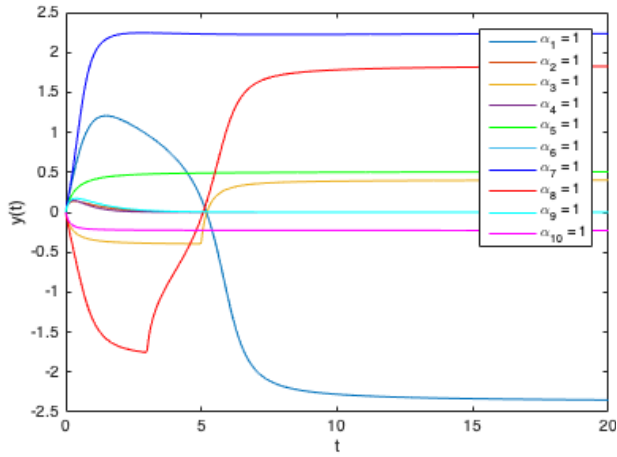
onde  $\alpha_j \in (0, 1]$  com  $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ ,  $A = (a_{ij})_{10 \times 10} = \text{diag}(1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2)$ ,  $f_j(u_j(t)) = (\sin(u_j))^T$  para  $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$  e

$$W = (w_{ij})_{10 \times 10} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.4 \end{pmatrix}$$

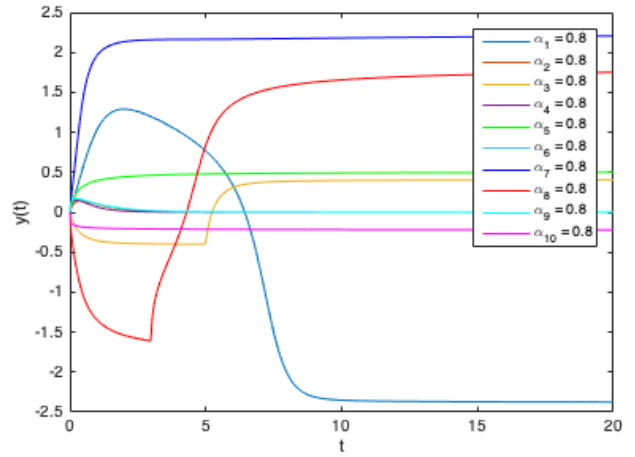
com valores iniciais  $u_i(0) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$  sendo  $i = 1, 2, 3, \dots, 10$ . Neste caso, apresentaremos as simulações somente para entradas externas que variam com o tempo, ou seja,  $I_i(t)$  receberá as seguintes entradas:

$$\left[ \frac{1-t^2}{1+t^2}, \exp(-t), \operatorname{sgn}(t-5), \exp(-2t), \operatorname{sgn}(t), \frac{1}{t^2}, \exp(-\frac{t}{2}), \operatorname{sgn}(t-3), \exp(-t), -\operatorname{sgn}(\frac{t}{2}) \right]^T$$

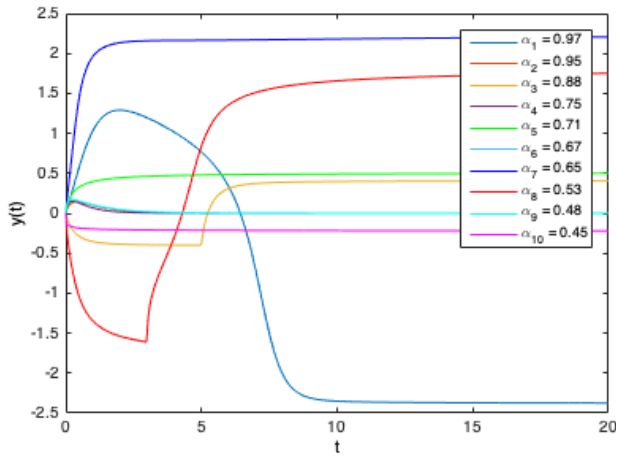
As figuras abaixo apresentam a solução para quatro casos.



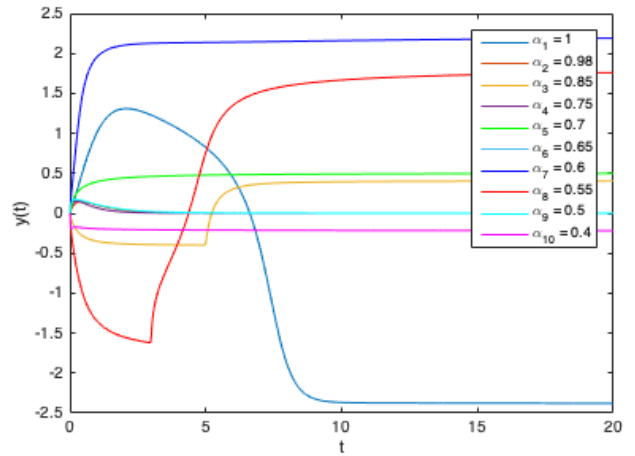
(a) Solução para valores de  $\alpha_j = 1$



(b) Solução para valores de  $\alpha_j = 0.8$



(c) Solução com múltiplas ordens



(d) Solução com múltiplas ordens

Figura 4.3: Soluções para diferentes casos de  $\alpha_j$  com 10 neurônios

Notemos que as figuras (a), (b), (c) e (d), com 10 neurônios, atingem também a estabilidade.

## Capítulo 5

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho investigamos a modelagem da dinâmica neural de Hopfield de ordem fracionária como uma generalização para a modelagem da dinâmica neural clássica proposta por Hopfield, o qual considera que a iteração entre neurônios são dados por mecanismos com memória.

Do ponto de vista teórico, provamos a existência e a unicidade de soluções, bem como a dependência contínua dos dados iniciais e dos parâmetros para os modelos de Hopfield com derivadas de ordem fracionária e de ordens multifracionárias. Ainda, de acordo com o método direto de Lyapunov de ordem fracionária estendida, as condições de estabilidade das redes neurais de Hopfield de ordem fracionária, com uma classe de entradas externas que variam com o tempo e entradas externas constantes, foram demonstradas.

Do ponto de vista numérico computacional, apresentamos diversas simulações numéricas que exemplificam os resultados teóricos apresentados.

Ressaltamos que os objetivos desta pesquisa foram alcançados, tendo em vista que o objetivo principal pretendia analisar a dinâmica neural de Hopfield, implementando a derivada fracionária. Partindo desse princípio, verificamos que unindo a rede neural e a derivada de Caputo, conseguimos encontrar o ponto de equilíbrio do sistema e compará-lo com o modelo clássico, uma vez que o modelo fracionário possui melhor descrição de memória.

No entanto, gostaríamos de deixar claro que o estudo apresentado aqui é apenas o princípio de um grande estudo necessário para entender todo o processo de uma dinâmica fracionária associada às redes neurais. Assim, deixamos alguns pontos a serem estudados em trabalhos futuros, os quais listamos: (i) a implementação do retardo de tempo no modelo de Hopfield de ordem fracionária, bem como (ii) o estudo do caso de bifurcação e sincronização, (iii) a utilização de dados reais para as simulações numéricas, (iv) a investigação dos efeitos da memória advinda das derivadas fracionárias na modelagem das redes neurais, com aplicações na identificação de padrões e solução de problemas computacionais, e (v) a existência e aparição de *clusters* de informações em um sistema com muitos neurônios, que sejam favorecidos pelas derivadas de ordem distintas das usuais na modelagem.

Enfim, acreditamos que o estudo da dinâmica fracionária de Hopfield possa servir de base

para estudos aplicados de modelagem computacional, engenharia biomédica e medicina, em especial, no que tange ao tratamento de doenças neurológicas que têm a memória como núcleo prejudicado, tais como o Mal de Alzheimer e Demência de leve à grave, uma vez que as redes neurais artificiais são uma tecnologia emergente.

## REFERÊNCIAS

- ANDREWS, G. E.; ASKEY, R.; ROY, R. **Special functions**. Cambridge university press, 1999.
- BANCHUIN, R. Novel expressions for time domain responses of fractance device. **Cogent Engineering**, v. 4, n. 1, p. 1320823, 2017.
- BAO, H.; PARK, J. H.; CAO, J. Synchronization of fractional-order complex-valued neural networks with time delay. **Neural Networks**, v. 81, p. 16-28, 2016.
- BARNES, S. J.; PINEL, J. P. J. **Biopsychology**. Pearson, 2018.
- BARRA, A.; BECCARIA, M.; FACHECHI, A. A relativistic extension of Hopfield neural networks via the mechanical analogy. **arXiv preprint arXiv:1801.01743**, 2018.
- BISHOP, C. M. **Neural networks for pattern recognition**. Oxford university press, 1995.
- BOROOMAND, A.; MENHAJ, M. B. Fractional-order Hopfield neural networks. **In International Conference on Neural Information Processing**, p. 883–890, 2008.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, . C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 11. ed. Rio de Janeiro, 2020.
- BRAGA, C. L. R. **Notas de Física Matemática Equações Diferenciais, Funções de Green e Distribuições**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.
- BROWN, J. W.; CHURCHILL, R. V. **Variáveis complexas e aplicações**. McGraw Hill Brasil, 2015.
- BURLES, N. J. **Pattern recognition using associative memories**. Tese de Doutorado, University of York, Reino Unido, 2014.
- CAMARGO, R. F. **Cálculo Fracionário e Aplicações**. Tese de Doutorado, Imecc-Unicamp, Campinas, 2009.
- CAMARGO, R.F.; OLIVEIRA, E.C. **Cálculo Fracionário**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.
- CHEN,L.P; CHAI,Y.R.C; WU, T.D; MA, H.Z. Dynamic analysis of a class of fractional-order neural networks with delay. **Neurocomputing**, v. 111, p. 190–194, 2013.

- CHEN, J.; ZENG, Z.; JIANG, P. Global Mittag-Leffler stability and synchronization of memristor-based fractional-order neural networks. **Neural Networks**, v. 51, p. 1-8, 2014.
- CHEN, W.; HOLM, S. Modified Szabo's wave equation models for lossy media obeying frequency power law. **The Journal of the Acoustical Society of America**, v. 114, n. 5, p. 2570-2574, 2003.
- DIETHELM, K. **The analysis of fractional differential equations:** An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type. Springer, 2010.
- DING, Z.; SHEN, Y. Global dissipativity of fractional-order neural networks with time delays and discontinuous activations. **Neurocomputing**, v. 196, p. 159-166, 2016.
- FLEMMING, D, M.; GONÇALVES, M, Buss. **Cálculo A**. Pearson Educação, 2007.
- FERNEDA, E. Redes neurais e sua aplicação em sistemas de recuperação de informação. **Ciência da Informação**, v. 35, n. 1, p. 25-30, 2006.
- GARRAPPA, R. Numerical solution of fractional differential equations: A survey and a software tutorial. **Mathematics**, v. 6, n. 2, p. 16, 2018.
- GOENFLO, R; MAINARDI, F. C. Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order. **Fracalmo Pre-print**, p. 223-276, 2008.
- GURNEY, K. **An introduction to neural networks**. CRC press, 1997.
- HAIPOUR, A; AMINABADI, S. S. Synchronization of chaotic Arneodo system of incommensurate fractional order with unknown parameters using adaptive method. **Optik**, v. 127, n. 19, p. 7704-7709, 2016.
- HAYKIN, S. **Neural Networks and Learning Machines**. 3. ed. New York: Pearson, 2009.
- HOPFIELD, J. J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. **Proceedings of the national academy of sciences**, v. 79, n. 8, p. 2554-2558, 1982.
- HOPFIELD, J.J; TANK, D.W. Computing with neural Circuits: A Model. **Science** v.233, p. 625-632, 1986.
- HU, S. G. et al. Associative memory realized by a reconfigurable memristive Hopfield neural network. **Nature communications**, v. 6, n. 1, p. 1-8, 2015.
- HUSH, D.R; HORNE B.G. Progress in Supervised neural Networks. **IEEE Signal Processing Magazine**, p. 8-39, 1993.
- JESSOP, R. **Stability and Hopf bifurcation analysis of Hopfield neural networks with a general distribution of delays**. Tese. University of Waterloo, Canadá, 2011.

- KASLIK, E.; SIVASUNDARAM, S. Nonlinear dynamics and chaos in fractional-order neural networks. **Neural Networks**, v. 32, p. 245-256, 2012.
- LEUNG, A. Y. T.; YANG, H. X.; ZHU, P. Bifurcation of a Duffing oscillator having nonlinear fractional derivative feedback. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 24, n. 03, p. 1450028, 2014.
- LI, Y.; CHEN, Y.; PODLUBNY, I. Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability. **Computers & Mathematics with Applications**, v. 59, n. 5, p. 1810-1821, 2010.
- LI,H; CAO,J; JIANG,H; ALSAEDI, A. Finite-time synchronization of fractional-order complex networks via hybrid feedback control. **Neurocomputing** Vol. 320, p. 69–75, 2018.
- LIM, Y. H.; OH, K. K.; AHN, H.S. Stability and stabilization of fractional-order linear systems subject to input saturation. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 58, n. 4, p. 1062-1067, 2012.
- LUNDSTRON, B. N.; HIGGS, M. H.; SPAIN, W. J.; FAIRHALL, A. L. Fractional differentiation by neocortical pyramidal neurons. **Nature Neuroscience** v. 11, n. 11, p. 1335–1342, 2008.
- MACHADO, J. T.; KIRYAKOVA, V.; MAINARDI, F. Recent history of fractional calculus. **Communications in nonlinear science and numerical simulation**, v. 16, n. 3, p. 1140-1153, 2011.
- MCCLELLAND, J. L; RUMELHART, D. E. **Parallel distributed processing - explorations in the microstructure of cognition: Foundations**. Cambridge, MA: MIT press, 1986.
- MCCULLOCH, W. S.; PITTS, W. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. **The bulletin of mathematical biophysics**, v. 5, n. 4, p. 115-133, 1943.
- MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos**. 3. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.
- NAKAGAWA, M.; SORIMACHI, K. Basic characteristics of a fractance device .**IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics Communications and Computer Sciences**, v. 75, n. 12, p. 1814-1819, 1992.
- ORTIGUEIRA, M. D.;& MACHADO, J. A. T. What is a fractional derivative?. **Journal of computational Physics**, v. 293, p. 4-13, 2015.
- PINHEIRO, R. F.; COLÓN, D.; REINOSO, L. L. R. Relating Lurie’s problem, Hopfield’s network and Alzheimer’s disease. In: **Congresso Brasileiro de Automática-CBA**. 2020.

- PINHEIRO, R. F. **O problema de Lurie e aplicações às redes neurais**. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo. São Paulo, 2014.
- SONG, C.; CAO, J. Dynamics in fractional-order neural networks. **Neurocomputing**, v. 142, p. 494-498, 2014.
- SPÖRL, C.; CASTRO, E.; LUCHIARI, A. Aplicação de redes neurais artificiais na construção de modelos de fragilidade ambiental. **Revista do Departamento de Geografia**, v. 21, p. 113-135, 2011.
- STEWART, J. **Cálculo: volume 1**. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.
- TAVAZOEI, M. S.; HAERI, M.; SIAMI, M.; BOLOUKI, S. Maximum number of frequencies in oscillations generated by fractional order LTI systems. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 58, n. 8, p. 4003-4012, 2010.
- TEODORO, G. S.; OLIVEIRA, D. S.; OLIVEIRA, E. C. Sobre derivadas fracionárias. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 40, n. 2, 2018.
- TIAN, J.; YU, Y.; WANG, H. Stability and bifurcation of two kinds of three-dimensional fractional Lotka-Volterra systems. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2014, 2014.
- WESTERLUND, S.; EKSTAM, L. Capacitor theory. **IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation**, v. 1, n. 5, p. 826-839, 1994.
- WILSON, R. C. Parallel hopfield networks. **Neural computation**, v. 21, n. 3, p. 831-850, 2009.
- WU, J. **Introduction to neural dynamics and signal transmission delay**. Vol. 6. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2011.
- ZHANG, S.; YU, Y.; WANG, H. Mittag-Leffler stability of fractional-order Hopfield neural networks. **Nonlinear Analysis: Hybrid Systems**, v. 16, p. 104-121, 2015.
- ZHANG, S.; YU, Y.; GENG, L. Stability analysis of fractional-order Hopfield neural networks with time-varying external inputs. **Neural Processing Letters**, v. 45, n. 1, p. 223-241, 2017.
- YU, J.; HU, H.; ZHOU, S.; & LIN, X. Generalized Mittag-Leffler stability of multi-variables fractional order nonlinear systems. **Automatica**, v. 49, n. 6, p. 1798-1803, 2013.

## APÊNDICE

Neste capítulo, coletamos algumas informações sobre alguns conceitos, definições e teoremas que são úteis para a pesquisa, uma vez que algumas construções estão citadas ao longo do texto.

## Apêndice A

# TEOREMAS DO PONTO FIXO E VALOR MÉDIO

### A.1 Teorema do ponto fixo de Weissinger

**Teorema A.1.** Seja  $(U, d)$  um espaço métrico completo não vazio e seja  $\alpha_j \geq 0$  para todo  $j \in \mathbb{N}_0$ , tal que  $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j$  converge. Ainda, se  $A : U \rightarrow U$  satisfazer a desigualdade

$$d(A^j u, A^j v) \leq \alpha_j d(u, v) \quad (\text{A.1})$$

para todo  $j \in \mathbb{N}$  e  $u, v \in U$ . Então, existe um único ponto fixo  $u^*$  em  $A$ . Assim, para qualquer  $u \in U$ , a sequência  $(A^j u_0)_{j=0}^{\infty}$  converge para este ponto fixo  $u^*$ . O teorema a seguir é uma consequência imediata deste.

### A.2 Teorema do ponto fixo de Banach

**Teorema A.2.** Seja  $(U, d)$  um espaço métrico completo não vazio e seja  $0 \leq \alpha < 1$ . Ainda, se  $A : U \rightarrow U$  satisfazer a desigualdade

$$d(Au, Av) \leq \alpha d(u, v) \quad (\text{A.2})$$

para todo  $u, v \in U$ . Então, existe um único ponto fixo  $u^*$  em  $A$ . Assim, para qualquer  $u_0 \in U$ , a sequência  $(A^j u)_{j=0}^{\infty}$  converge para este ponto fixo  $u^*$ .

Esse teorema assegura apenas a existência de ponto fixo, o que implica em trabalhar com uma hipótese mais fraca para o operador em questão. Assim, o próximo Teorema assegura as hipóteses de existência de soluções.

### A.3 Teorema de ponto fixo de Schauder

**Teorema A.3.** Sejam  $(E, d)$  um espaço métrico completo,  $U$  um conjunto convexo fechado de  $E$ , e  $A : U \rightarrow U$  tal que o conjunto  $Au : u \in U$  é relativamente compacto em  $E$ . Então,  $A$  existe pelo menos um ponto fixo.

Nesse caso, vamos relembrar a seguinte definição:

**Definição A.1.** Sejam  $(E, d)$  um espaço métrico e  $F \subseteq E$ , onde  $F$  é um conjunto chamado relativamente compacto em  $E$  se o fecho de  $F$  é um subconjunto compacto de  $E$ .

### A.4 Teorema de Arzelá-Ascoli

**Teorema A.4.** Seja  $F \subseteq C[a, b]$ , para algum  $b > a$ , e partindo da norma de Chebyshev. Então temos que  $F$  é relativamente compacto em  $C[a, b]$ . Assim, para cada  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que para todo  $f \in F$  e  $x, x^* \in [a, b]$  com  $|x - x^*| < \delta$ , temos  $|f(x) - f(x^*)| < \varepsilon$  sendo uniformemente limitado, assim, existe uma constante  $C > 0$  tal que  $\|f\|_\infty \leq C$  para cada  $f \in F$ .

### A.5 Teorema do Valor Médio

**Teorema A.5.** Seja  $f$  uma função contínua definida num intervalo fechado  $[a, b]$  e diferenciável em  $[a, b]$  existe algum ponto  $c$  em  $[a, b]$  tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (\text{A.3})$$

O teorema citado e sua respectiva demonstração podem ser encontrados em (FLEMMING, 2007, p. 264).