

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE - FURG
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Análise fenomenológica da produção
exclusiva de mésons vetoriais utilizando o
modelo de Marquet-Peschanski-Soyez.

Saiane Stavski Reffatti

Rio Grande - RS, 19 de junho de 2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE - FURG
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Saiane Stavski Reffatti

Análise fenomenológica da produção
exclusiva de mésons vetoriais utilizando o
modelo de Marquet-Peschanski-Soyez.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Física de Partículas e Campos.

Orientador: Prof. Dr. João Thiago de Santana Amaral
Coorientador: Prof. Dr. Cristiano Brenner Mariotti

19 de junho de 2022
Rio Grande - RS

Ficha Catalográfica

R332a Reffatti, Saiane Stavski.

Análise fenomenológica da produção exclusiva de mésons
vetoriais utilizando o modelo de *Marquet-Peschanski-Soyez* / Saiane
Stavski Reffatti. – 2022.

85 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande –
FURG, Programa de Pós-Graduação em Física, Rio Grande/RS,
2022.

Orientador: Dr. João Thiago de Santana Amaral.

Coorientador: Dr. Cristiano Brenner Mariotti.

1. Modelo MPS 2. Formalismo de dipolos 3. Escalamento
geométrico 4. Equação BK 5. Mésons vetoriais I. Amaral, João Thiago
de Santana II. Mariotti, Cristiano Brenner III. Título.

CDU 539.126

Catálogo na Fonte: Bibliotecário José Paulo dos Santos CRB 10/2344

Análise fenomenológica da produção exclusiva de mésons vetoriais utilizando o modelo de Marquet-Peschanski-Soyez

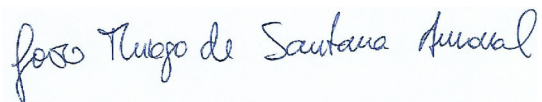
Saiane Stavski Reffatti

Orientador:

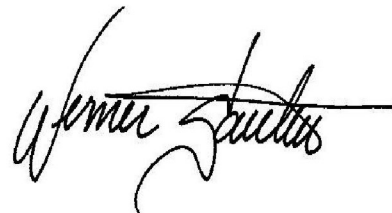
Prof. Dr. João Thiago de Santana Amaral

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física no Curso de Mestrado em Física, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Física.

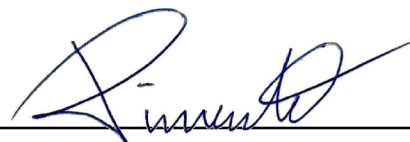
Aprovada por:



Prof. Dr. João Thiago de Santana Amaral



Prof. Dr. Werner Krambeck Sauter



Prof. Dr. Jorge Luiz Pimentel Júnior

Rio Grande
Abril de 2022

Agradecimentos

Aqui deixo meus sinceros agradecimentos à todos que de alguma forma estiveram comigo e me ajudaram durante esses dois anos e meio de mestrado. Obrigada por vocês acreditarem junto comigo que este sonho seria possível.

Agradeço primeiramente e todo dia à Deus, por me permitir realizar o sonho de realizar o mestrado em Física.

Agradeço à minha família, em especial meus pais Laine e Nadir, por sempre apoiarem meus sonhos, me ajudando financeiramente, emocionalmente e por sempre estarem presentes em todas as minhas conquistas. Obrigada por sempre me incentivarem a estudar, a busca sempre mais conhecimento e buscar sempre ser uma pessoa melhor. Essa conquista é por vocês!

Também agradeço em especial minha irmã Ana, que nunca mediu esforços para me ajudar e sempre esteve comigo durante toda a minha caminhada. Obrigada por sempre cuidar de mim e por todo o incentivo para realizar este sonho. Ao meu cunhado Nei, obrigada por todos os ensinamentos durante nossa caminhada juntos no escritório e também por todos os conselhos. Aos meus sobrinhos Ana Alice e Arthur, vocês alegram minha vida.

Não podia deixar de mencionar meu namorado Rudinei, que chegou no meio da jornada do mestrado, mas que entendeu perfeitamente todas as horas de dedicação aos estudos. Obrigada por me entender, me aceitar e me motivar todo dia. Nos dias em que até eu duvidava da minha capacidade você me mostrava que eu era capaz e que daria tudo certo. Obrigada por acreditar em mim e não me deixar desistir.

Aos meus colegas de mestrado, Rosiane, Vagner, Solange, Henrique e Otávio que mesmo não conhecendo pessoalmente, apenas virtualmente, me ajudaram de alguma forma durante toda a jornada de mestrado. Desejo muito sucesso à todos vocês!

Ao professor e orientador Dr. João Thiago. Não tenho palavras para agradecer por tudo. Primeiramente agradecer por todo o conhecimento repassado. Segundo pela amizade, que com certeza foi muito importante durante esse período. Obrigada por sempre estar disponível para me ajudar, me orientar e conversar. Obrigada pelos conselhos, tanto na vida acadêmica, quanto pessoal. Foi um período de mestrado durante uma pandemia e o professor sempre prezou pela saúde mental de seus alunos. Isso fez o diferencial.

À todos os professores do Instituto de Matemática e Física da Universidade Federal do Rio Grande que fizeram parte da minha formação, meus sinceros agradecimentos. Vocês são esplêndidos!

À CAPES por fornecer ajuda financeira durante o período de mestrado. Meu muito obrigado!

“Não sabendo que era impossível, foi lá e fez!”

Jean Cocteau.

Resumo

Neste trabalho realizamos um estudo fenomenológico sobre o modelo desenvolvido por Marquet, Peschanski e Soyez (conhecido como Modelo MPS), que apresenta uma expressão para a amplitude de espalhamento dipolo-próton, a qual obedece à equação de Balitsky-Kovchegov (BK). Originalmente, esse modelo foi utilizado na descrição dos dados de HERA (*Hadron Electron Ring Accelerator*) para a produção exclusiva de mésons vetoriais em colisões elétron-próton. Quinze anos depois, o modelo foi atualizado através de um ajuste a dados mais recentes dos mésons ρ e J/Ψ , com a inclusão do chamado fator de *skewness*. Fixando os parâmetros do modelo MPS atualizado, comparamos os resultados obtidos para as seções de choque diferencial e total com os dados mais recentes da produção exclusiva de mésons vetoriais, estendendo a análise mais recente ao méson ϕ .

Palavras-chaves: Modelo MPS, formalismo de dipolos, escalamento geométrico, equação BK, mésons vetoriais.

Abstract

In this paper we perform a phenomenological study of the model developed by Marquet, Peschanski and Soyez (known as the MPS Model), which presents an expression for the dipole-proton scattering amplitude that obeys the Balitsky-Kovchegov (BK) equation. Originally this model was used to describe HERA (Hadron Electron Ring Accelerator) data for the unique production of vector mesons in electron-photon collisions. Fifteen years later, the model was updated by fitting it to more recent data on the ρ and J/Ψ mesons, with the inclusion of the so-called skewness factor. Fixing the parameters of the updated MPS model, we compared the results obtained for the differential and total shock sections with the most recent data from the exclusive production of vector mesons, extending the most recent analysis to the meson ϕ .

Key-words: MPS model, dipole formalism, geometric scaling, BK equation, vector mesons.

Lista de ilustrações

Figura 1	– Diagrama de Feynman que descreve o espalhamento profundamente inelástico ep . A linha ondulada representa o propagador do fóton como o mediador da interação, enquanto as linhas sólidas representam as partículas interagentes [BARONE; PREDAZZI, 2002].	21
Figura 2	– Esquerda: representação do modelo de pártons. Direita: variáveis do quadri-momentum do próton e do quark [THOMSON, 2013].	24
Figura 3	– Quadri-momentum do quark no modelo de pártons [THOMSON, 2013].	24
Figura 4	– Possíveis novos subprocessos em interações entre quarks e glúons em processo $ep \rightarrow eX$ [AMARAL, 2008].	26
Figura 5	– Possíveis novos subprocessos em interações entre quarks e glúons em processo $ep \rightarrow eX$ [AMARAL, 2008]	27
Figura 6	– Dependência da função de estrutura F_2 em alto e baixo x de Bjorken [THOMSON, 2013].	27
Figura 7	– Resultados experimentais para F_2 com dados obtidos em HERA. Esta figura mostra o momento em que a escala de Bjorken é violada [THOMSON, 2013].	28
Figura 8	– Representação do DIS no referencial de dipolo, onde o fóton se separa em um par quark-antiquark [AMARAL, 2008].	29
Figura 9	– Representação do próton em diferentes regiões do espaço de fase, com as respectivas equações de evolução que descrevem cada fase [PIRES, 2019]	32
Figura 10	– Representação diagramática dos termos da equação BFKL. O primeiro esquema é o dipolo original, que após sofrer um aumento da rapidez, se divide em dois dipolos “filhos” [SOYEZ, 2006].	34
Figura 11	– Espalhamento múltiplo entre um alvo e um projétil feito de dois dipolos. Nesta representação os dipolos interagem simultaneamente [SOYEZ, 2006].	34
Figura 12	– Seção de choque total do processo $\gamma^*p \rightarrow X$ em função da escala τ . Esquerda: Dados experimentais na região de $x < 0.01$. Direita: Dados experimentais na região $x > 0.01$ [STASTO; GOLEC-BIERNAT; KWIECINSKI, 2001].	47
Figura 13	– Diagrama da produção exclusiva de partículas, podendo ser um méson vetorial ou fóton real no estado final [MARQUET; PESCHANSKI; SOYEZ, 2007].	50

Figura 14 – Seção de choque diferencial em função do momentum transferido. Comparação da previsão do modelo MPS com os dados mais recentes do méson ρ das colaborações ZEUS e H1, respectivamente.	58
Figura 15 – Seção de choque diferencial em função do momentum transferido. Comparação da previsão do modelo MPS com os dados mais recentes do méson J/Ψ das colaborações ZEUS e H1, respectivamente.	58
Figura 16 – Seção de choque total em função da virtualidade Q^2 . Comparação entre a previsão do modelo MPS com dados mais recentes da produção do méson J/Ψ , de ZEUS e H1, respectivamente.	59
Figura 17 – Seção de choque diferencial em função do momentum transferido. Comparação com dados mais recentes da produção exclusiva do méson ϕ , para dados de ZEUS e H1, respectivamente.	59
Figura 18 – Seção de choque total em função da virtualidade Q^2 . Comparação entre os dados mais recentes da produção do méson ϕ com as previsões do modelo MPS.	60
Figura 19 – Seção de choque total em função da energia W . Comparação entre dados de ZEUS e H1, respectivamente com as previsões do modelo MPS.	60
Figura 20 – Cinemática do espalhamento no referencial do laboratório.	66

Lista de tabelas

Tabela 1	–	Parâmetros fixos do modelo de função de onda BG.	51
Tabela 2	–	Parâmetros fixos do modelo de função de onda LCG.	52
Tabela 3	–	Parâmetros comuns para os três mésons.	52
Tabela 4	–	Parâmetros c e B obtidos no ajuste original para os modelos BG e LCG e para as combinações BLL e BLB.	54
Tabela 5	–	Parâmetros atualizados do modelo MPS obtidos a partir do ajuste de dados mais recentes de HERA.	55
Tabela 6	–	Resultado do cálculo de χ_{red}^2 para o méson ϕ com 100 dados experi- mentais para dois observáveis: seção de choque total e diferencial. . . .	61

Sumário

1	INTRODUÇÃO	16
2	DIS EM PEQUENO x - REFERENCIAL DE DIPOLO	20
2.1	Espalhamento profundamente inelástico	20
2.2	Modelo de pártons e as funções de estrutura	23
2.3	Função de estrutura na QCD.	25
2.4	DIS no referencial de dipolo	28
3	EQUAÇÃO BK E O ESCALAMENTO GEOMÉTRICO	31
3.1	Saturação	31
3.2	Equação de Balitsky-Kovchegov (BK)	33
3.2.1	Solução 1 - Equação BFKL próximo ao regime de saturação	35
3.2.2	Solução 2 - Equação de Levin-Tuchin no regime de saturação	44
3.3	Escalamento geométrico	46
4	PROCESSOS EXCLUSIVOS EM COLISÕES ep E O MODELO MPS 49	
4.1	Produção exclusiva de mésons vetoriais	49
4.2	Modelo de Marquet-Peschanski-Soyez (MPS)	52
4.2.1	Ajuste original	54
4.2.2	Atualização do modelo MPS	55
4.3	Resultados	56
4.3.1	Discussão dos resultados	57
5	CONCLUSÕES	62
	APÊNDICES	64
	APÊNDICE A – CÁLCULO DA SEÇÃO DE CHOQUE TOTAL DO DIS	65
	APÊNDICE B – CÁLCULO DA FUNÇÃO DE ONDA TRANSVER- SAL E LONGITUDINAL DO FÓTON	69
B.1	Função de onda transversal ($\Psi_T^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}$)	69
B.2	Função de onda longitudinal ($\Psi_L^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}$)	77
	REFERÊNCIAS	81

1 Introdução

O experimento mais simples que revelou e comprovou algumas das propriedades da Cromodinâmica Quântica (QCD, do inglês *Quantum Chromodynamics*) foi o espalhamento profundamente inelástico (DIS, do inglês *Deep Inelastic Scattering*) em colisões elétron-próton, realizadas no colisor HERA. Com o principal objetivo de investigar a estrutura hadrônica em altas energias, o espalhamento é caracterizado pela interação de um elétron com o próton, mediado por um fóton virtual (γ^*) e tem como resultado um estado final composto de um elétron e um sistema hadrônico denotado por X . A reação é expressa como:

$$e + p \rightarrow e' + X.$$

Esse processo depende basicamente de duas variáveis cinemáticas: virtualidade do fóton Q^2 e o x de Bjorken. A virtualidade informa o quanto é possível sondar a estrutura interna do próton e o x de Bjorken descreve a fração de momentum do próton carregada pelo quark com o qual o fóton interage no espalhamento [TAEELS, 2017]. Por exemplo, no regime de altas energias, o que implica em um x pequeno, com o aumento da virtualidade o fóton é capaz de investigar mais a fundo a estrutura interna do hádron e “enxergar” mais partículas.

O DIS pode ter diferentes estados finais. O espalhamento pode ser do tipo **inclusivo**, pois inclui todos os estados finais possíveis e apenas o elétron é medido no estado final. Outro estado final possível são os processos **difrativos**, onde o próton permanece intacto após a colisão. São conhecidos por conter uma região no espaço de fase (conhecido por *gap* de energia – intervalo) onde não é observada a produção de nenhuma partícula. Um caso particular de processos difrativos são os processos **exclusivos**, nos quais, além do próton intacto e o elétron no estado final, há uma única partícula produzida, podendo ser um méson vetorial $\rho, \phi, J/\Psi$ ou um fóton real γ .

Uma das características da QCD, confirmada por meio do DIS, é o aumento da densidade dos párons (quarks e glúons), principalmente dos glúons dentro do próton, no regime de altas transferências de energia, ou quando o x de Bjorken se torna muito pequeno. Este regime corresponde ao regime de saturação da QCD, onde o fato do aumento da densidade dos glúons ser tão grande, faz com que a teoria da perturbação¹ se quebre por fortes efeitos não lineares, mesmo que para um valor da constante de acoplamento pequena [IANCU; LEONIDOV; MCLERRAN, 2001].

¹ Também conhecida por QCD perturbativa (pQCD), nesta teoria, a constante de acoplamento α_s é pequena no regime de altas energias. Por outro lado, em regimes com baixas energias, a constante assume um valor alto, fazendo com que a teoria da perturbação não possa mais ser usada, entrando no regime não perturbativo da QCD.

No entanto, as densidades partônicas não podem crescer infinitamente pelo fato do próton possuir tamanho finito [MARQUET; SCHOEFFEL, 2006]. Se isso ocorresse, então a seção de choque aumentaria inaceitavelmente e eventualmente violaria os limites de unitariedade [IANCU; LEONIDOV; MCLERRAN, 2001]. Em vez disso, espera-se que a seção de choque se aproxime de algum valor assintótico em alta energia, ou seja, sature. A saturação dos glúons é esperada em uma densidade do espaço de fase da ordem de $1/\alpha_s$. Segundo os autores de [IANCU; LEONIDOV; MCLERRAN, 2001], os glúons saturados formam uma nova forma de matéria, denominado Condensado de Vidro Colorido (CGC, do inglês *Color Glass Condensate*). Esse novo estado é caracterizado por ser uma matéria altamente gluônica associada à função de onda do hádron [IANCU; LEONIDOV; MCLERRAN, 2001; MCLERRAN, 2009]. É *color* porque os glúons possuem cor; *glass*, pois se comportam como um corpo desordenado. É como se fosse um líquido em escalas de tempo longas, mas parece ser sólido em escalas de tempo curtas; e *condensate*, pois os glúons acabam gerando uma densidade muito alta dentro do próton [IANCU; LEONIDOV; MCLERRAN, 2002].

No regime de altas energias, é conveniente estudar o DIS no *referencial de dipolo*, onde o fóton virtual emitido pelo elétron tem energia suficiente para se separar em um par quark-antiquark (também denominado dipolo). O dipolo então interage com o próton e por fim, recombina-se produzindo as partículas no estado final. Neste formalismo, os observáveis físicos de interesse, como a seção de choque total e diferencial, são escritas em termos da amplitude de espalhamento de dipolo, ou simplesmente amplitude de dipolo, que depende do tamanho transversal do dipolo, $\mathbf{r}$, do parâmetro de impacto $\mathbf{b}$ e do x de Bjorken. Esta amplitude descreve a interação do dipolo com o próton, e obedece à equação de Balitsky-Kovchegov (BK), originalmente obtida no espaço de coordenadas. No caso simplificado, em que a dependência em b é desconsiderada, mostrou-se no trabalho de Munier e Peschanski [MUNIER; PESCHANSKI, 2003] que a equação BK é equivalente à equação FKPP (Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov). Essas equações são conhecidas por admitir soluções de ondas progressivas, cujo significado físico representa o escalamento geométrico [MUNIER; PESCHANSKI, 2003; STASTO, 2004; MARQUET; PESCHANSKI; SOYEZ, 2005].

O escalamento geométrico é considerado uma das propriedades mais interessantes descobertas pelo DIS [MUNIER; PESCHANSKI, 2003] e atesta que a seção de choque total fóton-próton σ^{γ^*p} depende de uma única variável [MARQUET; SCHOEFFEL, 2006; MUNIER; PESCHANSKI, 2003; STASTO, 2004; SOUZA, 2007], a variável τ em vez das variáveis Q^2 e $Q_s^2(Y)$ separadamente:

$$\sigma^{\gamma^*p}(Y, Q^2) = \sigma^{\gamma^*} \left(\frac{Q^2}{Q_s^2(Y)} \right)$$

onde Q_s^2 é uma função crescente da rapidez ($Y = \ln(1/x)$) denominada de escala de

saturação [MUNIER; PESCHANSKI, 2003], que separa os regimes diluído e saturado no espaço de fase.

A equação BK é a equação de evolução integro-diferencial não linear mais simples da QCD em altas energias. Dependendo do objetivo, a mesma é utilizada tanto para descrever a evolução da energia da função de onda de fóton virtual, quanto para calcular a função de distribuição de glúons de um hádron [MANTYSAARI, 2011]. Tal equação corresponde à equação de Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov (BFKL) [LIPATOV, 1976; KURAEV; LIPATOV; FADIN, 1977; BALITSKY; LIPATOV, 1978], no entanto, com a adição de um termo não linear.

A equação BK foi originalmente obtida no espaço de coordenadas, onde a amplitude de espalhamento de dipolo $N(\mathbf{r}, \mathbf{b}, Y)$, que descreve a interação do dipolo com o próton, depende do tamanho transversal do dipolo, $\mathbf{r}$, do parâmetro de impacto $\mathbf{b}$ e do x de Bjorken. No caso simplificado, em que (i) a dependência em $\mathbf{b}$ é desconsiderada e (ii) trabalha-se no espaço de momentum, mostrou-se que a equação BK admite soluções de ondas progressivas, que se traduz no escalamento geométrico [MUNIER; PESCHANSKI, 2003].

Teoricamente, foi mostrado que as soluções de ondas progressivas também são obtidas em casos mais gerais: no espaço de momentum completo, obtidas por Marquet e Soyez [MARQUET; SOYEZ, 2005], e no espaço de momentum misto, obtidas por Marquet, Peschanski e Soyez [MARQUET; PESCHANSKI; SOYEZ, 2005]. No espaço misto a amplitude, além do tamanho do dipolo, também depende do momentum transferido na colisão, $\mathbf{q}$. Esse resultado inspirou Marquet, Peschanski e Soyez a desenvolverem o modelo fenomenológico MPS [MARQUET; PESCHANSKI; SOYEZ, 2007], o qual se tornou bastante adequado para o estudo da produção exclusiva de mésons vetoriais (processo $\gamma^* p \rightarrow V p$ onde $V = \gamma, \rho, \phi, J/\Psi$), sendo esse, um dos possíveis estados finais do DIS, onde o próton sai intacto da colisão juntamente com a produção de apenas um méson vetorial. Originalmente este modelo foi utilizado para a descrição de dados de HERA para a produção exclusiva de mésons vetoriais em colisões ep , com uma boa qualidade da descrição dos dados experimentais [MARQUET; PESCHANSKI; SOYEZ, 2007].

O modelo MPS também se aplica a outros tipos de processos, como é o caso do efeito compton profundamente virtual (DVCS, do inglês *Deeply Virtual Compton Scattering*). Outro exemplo é a produção de nêutrons dominantes, conforme trabalho de [BECKER, 2017; PIRES, 2019].

Muito recentemente, mais precisamente no início do ano de 2022, Ya-Ping Xie e Victor P. Gonçalves [XIE; GONCALVES, 2022] realizaram a atualização deste modelo para dados mais recentes da produção exclusiva dos mésons ρ e J/Ψ , e encontraram bons resultados. A análise dos autores se restringiu ao modelo de função de onda *Light Cone Gauss* (LCG), dado que foi o melhor resultado obtido para χ^2_{red} . Visto isso, o objetivo

deste trabalho é investigar como o modelo MPS com os parâmetros atualizados por [XIE; GONCALVES, 2022] se comporta em relação aos dados experimentais mais recentes encontrados na literatura para os mésons ρ e J/Ψ , utilizando o modelo de função de onda *Boosted Gaussian* (BG). Ainda, com esta abordagem, estendemos a análise para o méson ϕ , visto que no trabalho mais recente, tal análise não é realizada.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: o Capítulo II descreve o DIS elétron-próton, onde a interação é mediada pela troca de um fóton virtual. No regime de altas energias, esse processo é estudado em um referencial bastante particular, chamado referencial de dipolo, onde o fóton virtual possui energia suficiente para flutuar em um par quark-antiquark, que então interage com o próton. O Capítulo III se concentra na descrição da equação BK e duas de suas soluções analíticas, que são obtidas em detalhes. As expressões resultantes fazem parte da construção do modelo MPS para a amplitude de dipolo. No Capítulo IV está a apresentação do modelo estudado, os parâmetros obtidos nos ajustes realizados até o presente momento, onde comparamos as seções de choque obtidas usando o modelo com os dados experimentais mais recentes. Por fim, o Capítulo V apresenta as conclusões e perspectivas.

2 DIS em pequeno x - referencial de dipolo

O espalhamento profundamente inelástico é um dos assuntos fundamentais para a construção deste trabalho, pois mesmo sendo considerado um dos experimentos mais simples, foi o primeiro que confirmou algumas das propriedades mais importantes previstas pela QCD. Como por exemplo, confirmou que o próton é um sistema dinâmico formado por várias partículas (quarks, pares de quarks-antiquarks e glúons), onde ocorrem interações mediadas pela troca de glúons, como também, a confirmação do aumento da densidade dos párons dentro dos hádrons à medida que a energia em uma colisão aumenta. Desta forma, neste capítulo trataremos primeiramente do DIS inclusivo, com o objetivo de introduzir o assunto, detalhando sua cinemática. Em seguida, estudaremos o mesmo processo, no entanto, em um referencial bastante específico, conhecido como *referencial de dipolo*, onde o fóton virtual carrega toda a energia da interação [MUELLER, 1994]. Neste referencial, a seção de choque total é expressa em termos da amplitude de espalhamento dipolo-próton, sendo uma das quantidades de grande interesse, afinal, é ela que carrega, no caso do DIS, a informação sobre a dinâmica da QCD.

2.1 Espalhamento profundamente inelástico

O espalhamento profundamente inelástico (DIS) é caracterizado pela interação de um lépton ℓ carregado com um núcleon N (podendo ser próton ou nêutron). As interações acontecem por meio da troca de um bóson de calibre como um fóton virtual γ^* ou Z^0 para o caso de correntes neutras e $W^\pm$ para correntes carregadas. O estado final do processo é constituído por um lépton mais um estado hadrônico, aqui denotado por X . Em especial, estudaremos o DIS elétron-próton, o qual está representado na Figura 1. Neste caso, na Equação (1), o lépton é um elétron e o núcleon é um próton, remetendo ao caso de espalhamento inclusivo. A reação é expressa como:

$$e(\ell) + p(P) \rightarrow e'(\ell') + X(P_X) \quad (2.1)$$

onde ℓ e ℓ' são os momentum do elétron no estado inicial e final, respectivamente e P é o momentum do próton. Nesse processo, o núcleo se quebra e o estado final denotado por X com momentum P_X é formado pela criação de novas partículas. Basicamente, esse é um processo no qual o fóton virtual, ou bósons Z^0 , $W^\pm$, são utilizados como uma sonda para resolver pequenas distâncias dentro do próton e estudar seus constituintes partônicos, os quarks e glúons que estão sob o regime da QCD perturbativa [MARQUET; SCHOEFFEL, 2006].

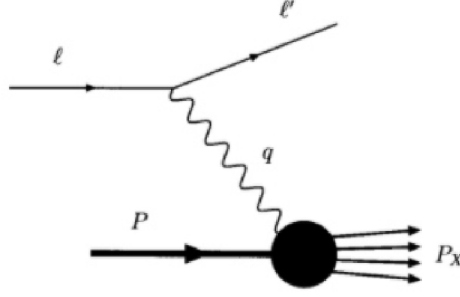


Figura 1 – Diagrama de Feynman que descreve o espalhamento profundamente inelástico ep . A linha ondulada representa o propagador do fóton como o mediador da interação, enquanto as linhas sólidas representam as partículas interagentes [BARONE; PREDAZZI, 2002].

Trabalhando no referencial de repouso do próton, definimos os quadri-momenta das partículas que participam do processo utilizando a referência [KOVCHegov; LEVIN, 2012]. Neste referencial o quadri-momentum do próton é dado por $P^\mu = (m, \vec{0})$, onde m é a massa do próton. O quadri-momentum do elétron incidente é $\ell^\mu = (E, \vec{\ell})$ e do elétron no estado final, $\ell'^\mu = (E', \vec{\ell}')$, onde E e E' são as energias do elétron no estado inicial e final, respectivamente.

O DIS inclusivo depende basicamente de três variáveis cinemáticas. A primeira é a energia E do lépton incidente, ou alternativamente [BARONE; PREDAZZI, 2002], o quadrado da energia do centro de massa da interação elétron-próton, $W = (\ell + P)^2$ – que é uma quantidade fixada pelas condições experimentais. Já as outras duas variáveis, são escolhidas entre as quantidades invariantes abaixo [BARONE; PREDAZZI, 2002; THOMSON, 2013]:

- O quadrado do quadri-momentum do fóton.

$$q^2 = -Q^2 = (\ell - \ell')^2 \quad (2.2)$$

onde Q^2 é conhecida como virtualidade do fóton.

- O quadrado da energia do centro de massa do sistema fóton-próton:

$$s^2 = (P + q)^2 \quad (2.3)$$

- Transferência de energia do elétron para o próton, definida pela variável ν :

$$\nu = \frac{P \cdot q}{m_p} = \frac{s^2 + Q^2 - m_p^2}{2m_p} \quad (2.4)$$

onde m_p é a massa do próton.

- Inelasticidade:

$$y = \frac{P \cdot q}{P \cdot \ell} = \frac{s^2 + Q^2 - m_p^2}{W - m_p^2} \quad (2.5)$$

Essa variável é identificada como a fração de energia perdida pelo elétron durante a colisão, tendo o próton inicialmente em repouso. Ainda neste referencial, a energia do sistema hadrônico criado é sempre maior que a energia do próton no estado final, desta forma, $0 \leq y \leq 1$ [THOMSON, 2013].

- x de Bjorken:

$$x = \frac{Q^2}{2P \cdot q} = \frac{Q^2}{Q^2 + s^2 - m_p^2} \quad (2.6)$$

onde $0 \leq x \leq 1$ para $s^2 \geq m_p^2$. No limite de altas energias, no qual estamos interessados, $s^2 \gg Q^2$, o que faz que na expressão acima, $x \rightarrow 0$. Essa condição no regime de altas energias corresponda a um regime de pequeno x de Bjorken,

$$s \rightarrow \infty, x \approx \frac{Q^2}{s^2} \rightarrow 0 \quad (2.7)$$

A principal quantidade a ser determinada a partir deste experimento é a seção de choque total (σ), a qual é obtida ao integral a seção de choque diferencial sob todos os ângulos sólidos Ω . Esta quantidade é importante pois determina a probabilidade de ocorrer uma colisão entre dois feixes de partículas.

A seção de choque diferencial é dada pela expressão [THOMSON, 2013]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{n}^\circ \text{ de partículas espalhadas em } d\Omega \text{ por un. de tempo}}{\text{fluxo incidente}}$$

No entanto, deve-se deixar claro que as seções de choque diferenciais não se restringem apenas à distribuições angulares. Em algumas situações, pode apenas depender da energia da partícula espalhada ou, como é o caso do espalhamento profundamente inelástico, depender da distribuição angular e da energia da partícula espalhada [BARONE; PREDAZZI, 2002]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \frac{d\sigma}{dE} \sim \frac{d\sigma}{dE' d\Omega}$$

A equação da seção de choque diferencial para o DIS no referencial de repouso do próton é [BARONE; PREDAZZI, 2002; THOMSON, 2013; DEVENISH; COOPER-SARKAR, 2004]:

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2MQ^4} \frac{E'}{E} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \quad (2.8)$$

onde $\alpha = e^2/4\pi$ é a constante de acoplamento, Ω é o ângulo sólido que caracteriza a direção do elétron no estado final, E e E' são as energias do elétron no estado inicial e final, respectivamente, M é a massa do próton e Q^2 a virtualidade. As componentes $L_{\mu\nu}$ e $W^{\mu\nu}$ são os tensores leptônico e hadrônico, respectivamente. Por meio de manipulações matemáticas (Apêndice A), é possível obter a expressão final da seção de choque em termos do x de Bjorken e da inelasticidade y :

$$\frac{d\sigma}{dx dy} = \frac{2\pi\alpha^2}{EMx^2y^2} \left[F_1(x, Q^2)xy^2 + F_2(x, Q^2) \left(1 - y - \frac{Mxy}{2E} \right) \right] \quad (2.9)$$

Na expressão (2.9), $F_1(x, Q^2)$ e $F_2(x, Q^2)$ são funções adimensionais conhecidas como funções de estrutura. Fisicamente, F_1 fornece o número de quarks dentro dos hádrons com fração x de momentum e F_2 fornece a distribuição da fração de momentum longitudinal média [THOMSON, 2013]. Elas descrevem a estrutura do próton medida no DIS inclusivo [SOUZA, 2007], e estão relacionadas com a seção de choque total longitudinal e transversal [BARONE; PREDAZZI, 2002] conforme as expressões abaixo:

$$\begin{aligned} \sigma_L^{\gamma^*p} &= \frac{4\pi^2\alpha_{em}}{Q^2} (F_2(x, Q^2) - 2xF_1(x, Q^2)) \\ \sigma_T^{\gamma^*p} &= \frac{4\pi^2\alpha_{em}}{Q^2} 2xF_1(x, Q^2) \end{aligned} \quad (2.10)$$

A partir das funções de estrutura $F_1(x, Q^2)$ e $F_2(x, Q^2)$, é possível obter a função de estrutura longitudinal F_L

$$F_L = F_2(x, Q^2) - 2xF_1(x, Q^2)$$

e a função de estrutura transversal, F_T :

$$F_T = 2xF_1(x, Q^2).$$

A expressão final para as seções de choque total longitudinal e transversal podem ser reescritas como:

$$\sigma_{L,T}^{\gamma^*p} = \frac{4\pi^2\alpha_{em}}{Q^2} F_{L,T}(x, Q^2) \quad (2.11)$$

Das relações acima, temos que $F_2 = F_L + F_T$, fazendo com que a seção de choque total de seja proporcional a F_2 , conforme expressão abaixo:

$$\sigma^{\gamma^*p} = (\sigma_T^{\gamma^*p} + \sigma_L^{\gamma^*p}) = \frac{4\pi^2\alpha_{em}}{Q^2} F_2(x, Q^2). \quad (2.12)$$

2.2 Modelo de pártons e as funções de estrutura

Antes de os quarks e glúons serem aceitos como constituintes dos hádrons, Feynman propôs que o próton era composto apenas de constituintes pontuais (quarks), os quais denominou de pártons [THOMSON, 2013]. Seu modelo ficou conhecido como modelo de pártons (ou modelo quark-parton), onde no espalhamento o fóton virtual interage com um único quark essencialmente livre (quark de valência), conforme a Figura 2. Este modelo foi formulado em um referencial onde o próton tem energia muito alta, conhecido como referencial de momentum infinito, podendo a massa do próton ser despreza.

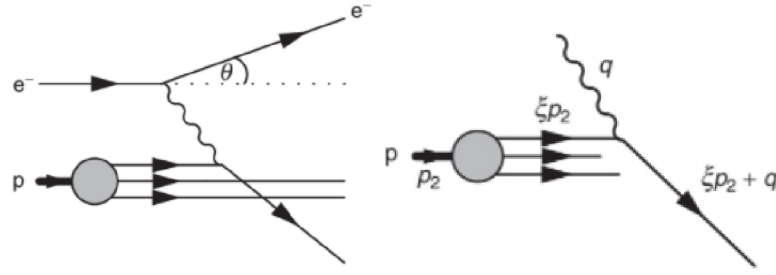


Figura 2 – Esquerda: representação do modelo de partons. Direita: variáveis do quadri-momento do próton e do quark [THOMSON, 2013].

O quadri-momento do quark então pode ser escrito como:

$$p_q = \xi p_2 = (\xi E_2, 0, 0, \xi E_2)$$

onde ξ é a fração de momentum do próton carregado pelo quark, conforme mostra a Figura 3.

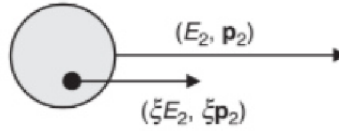


Figura 3 – Quadri-momento do quark no modelo de partons [THOMSON, 2013].

O quark depois da interação com o fóton carrega um quadri-momento:

$$p_q^\mu = (\xi p^\mu + q^\mu)$$

contundo, se o quark estiver na camada de massa, $p_q^2 = m_q^2$, assim,

$$\begin{aligned} (\xi p + q)^2 &= m_q^2 \\ \xi^2 p^2 + 2\xi p \cdot q + q^2 &= m_q^2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

dado que $\xi^2 p^2$ é o momentum do quark inicial,

$$\xi^2 p^2 = m_q^2$$

assim, a Equação (2.13) será:

$$\begin{aligned} m_q^2 + 2\xi p \cdot q + q^2 &= m_q^2 \\ q^2 &= -2\xi p \cdot q \\ -Q^2 &= -2\xi p \cdot q \end{aligned}$$

o que implica que ξ será igual ao x de Bjorken:

$$\xi = \frac{-q^2}{2p \cdot q} = \frac{Q^2}{2p \cdot q} \equiv x \quad (2.14)$$

Assim, o x de Bjorken é identificado como a fração de momentum do próton carregado pelo quark. Portanto, as medidas da dependência em x das funções de estrutura podem ser relacionadas à distribuição de momentum dos quarks dentro do próton [THOMSON, 2013].

Dentro do modelo de pártons foram relevadas duas propriedades sobre as funções de estrutura F_1 e F_2 : a primeira ficou conhecida como *escala de Bjorken*, a qual demonstrou que $F_1(x, Q^2)$ e $F_2(x, Q^2)$ são praticamente independentes de Q^2 [THOMSON, 2013]:

$$F_1(x, Q^2) \rightarrow F_1(x) \quad \text{e} \quad F_2(x, Q^2) \rightarrow F_2(x) \quad (2.15)$$

A segunda propriedade é que as funções de estrutura estão relacionadas pela expressão:

$$F_2(x) = 2xF_1(x) = \sum_q e_q^2 x f_q(x) \quad (2.16)$$

conhecida como relação de *Callan-Gross*, onde a soma é realizada sobre todos os sabores dos quarks e $f_q(x)$ são as funções de distribuição dos quarks [THOMSON, 2013].

Segundo Devenish e Cooper Sarkar [DEVENISH; COOPER-SARKAR, 2004], o modelo de pártons surgiu da tentativa de Feynman fornecer uma imagem física da propriedade de escala que havia sido prevista por Bjorken e observada nos primeiros experimentos do DIS no SLAC *Stanford Linear Accelerator Center* na Califórnia, onde F_2 foi observada como independente de Q^2 . Os primeiros resultados sobre as funções de estruturas F_1 e F_2 foram obtidas por meio do DIS elétron-próton, com elétrons sendo emitidos em uma faixa de energia entre 5 GeV e 20 GeV, onde foram disparados contra um alvo de hidrogênio líquido [THOMSON, 2013].

2.3 Função de estrutura na QCD.

As funções de estrutura $F_i(x, Q^2)$ (com $i = 1, 2$) introduzidas anteriormente, são interpretadas como a probabilidade de encontrar pártons (quarks, antiquarks ou glúons) com fração de momento x , utilizando um fóton como instrumento de sondagem, cuja virtualidade é Q^2 [THOMSON, 2013]. Segundo [MANTYSAARI, 2011], ao considerar o DIS no referencial de momentum infinito (referencial no qual o próton possui momentum muito grande), a virtualidade do fóton define a escala r dos objetos que o fóton pode ver, $r \sim 1/Q$. Isto é, o tamanho aparente dos pártons vistos pelo fóton é $1/Q^2$. Se Q^2 for grande o suficiente, o que corresponde a um comprimento de onda mais curto do fóton virtual, é possível “enxergar” mais internamente o interior dos hádrons. Consequentemente, mais pártons serão “vistos”.

O diagrama apresentado na Figura 2 é uma aproximação de mais baixa ordem, pois os constituintes dos hádrons são considerados como objetos livres [AMARAL, 2008]. Pelo

modelo de pártons, o próton é constituído apenas de partículas pontuais livres (quarks). Contudo, ao se trabalhar com ordens mais altas, vê-se que o próton é um sistema dinâmico, formado por quarks e glúons, onde as interações são explicadas pela teoria da Cromodinâmica Quântica (QCD, do inglês *Quantum Chromodynamics*).

A QCD é uma teoria quântica de campos destinada ao estudo das interações fortes, ou seja, descreve a interação entre quarks (férmions de spin $1/2$) e glúons (bóson de spin 1). Os glúons são as partículas mediadoras da força forte que interagem entre si e mantêm os quarks unidos. Uma das características mais importantes da QCD é que a constante de acoplamento da interação nuclear forte, α_s , é pequena ($\alpha_s \ll 1$) no limite de curtas distâncias, ou equivalentemente a altas energias/grande transferência de momento. Esta propriedade é denominada *liberdade assintótica*, e permite que neste regime, utilize-se da QCD perturbativa (pQCD). No regime oposto, ou seja, maiores distâncias ou pequeno momento transferido, a constante de acoplamento se torna grande ($\alpha_s \sim 1$) e portanto, a teoria de perturbação deixa de ser válida [TAEELS, 2017]. Neste caso, ocorre um aumento da intensidade de interação entre os quarks e glúons no interior dos hádrons, propriedade conhecida como *confinamento*, a qual exclui a possibilidade de observar tais partículas isoladas na natureza.

De acordo com a QCD, as interações entre os quarks e os glúons podem gerar novos subprocessos que contribuem na seção de choque total. Por exemplo, o quark de valência pode emitir um glúon antes ou depois de interagir com o fóton [AMARAL, 2008], como representado na Figura 4.

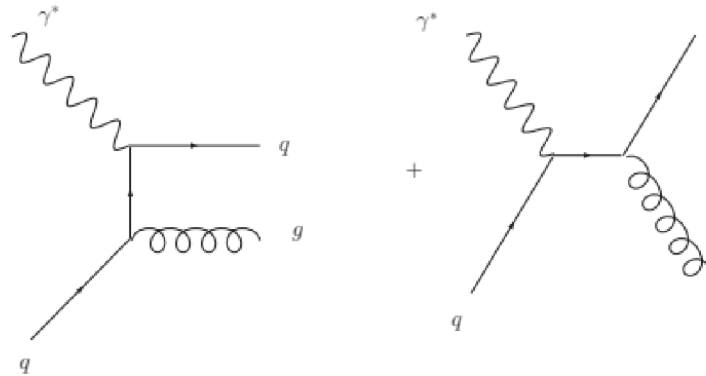


Figura 4 – Possíveis novos subprocessos em interações entre quarks e glúons em processo $ep \rightarrow eX$ [AMARAL, 2008].

Também pode ocorrer de um glúon que foi emitido pelo quark de valência flutuar em um par quark-antiquark (quarks de mar), e um deles interagir com o fóton virtual [AMARAL, 2008], como mostra a Figura 5.

Como mencionado anteriormente, o fóton virtual é considerado como uma sonda, que contabiliza os quarks e antiquarks no interior dos hádrons com uma fração x de momentum, os quais ocupam uma área na ordem de $1/Q^2$. Neste cenário, podemos escrever

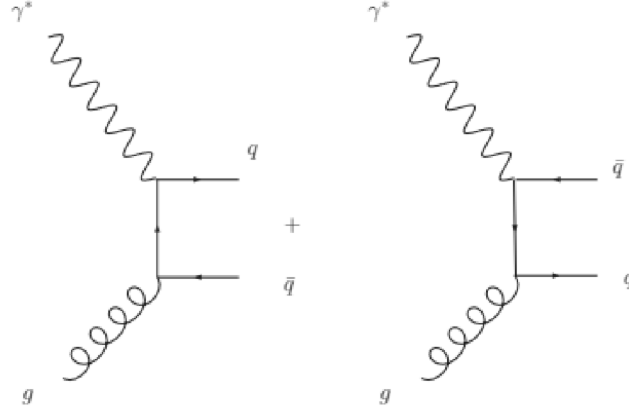


Figura 5 – Possíveis novos subprocessos em interações entre quarks e glúons em processo $ep \rightarrow eX$ [AMARAL, 2008]

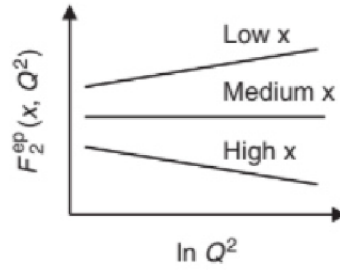


Figura 6 – Dependência da função de estrutura F_2 em alto e baixo x de Bjorken [THOMSON, 2013].

a função de estrutura F_2 [AMARAL, 2008] como:

$$F_2(x, Q^2) = \sum_f e_q^2 x [f_q(x, Q^2) + f_{\bar{q}}(x, Q^2)] \quad (2.17)$$

onde $f_q(x)$ e $f_{\bar{q}}(x)$ são as funções de distribuições dos quarks e antiquarks respectivamente. Contudo, nesta expressão, o que notamos é uma dependência em x e Q^2 das funções de estrutura, resultando na violação da escala de Bjorken.

O experimento que identificou essa violação mostrou diferenças em valores muito baixos e muito altos de x , conforme mostra a Figura 6. Para um valor intermediário de x , a função F_2 não varia com o aumento de Q^2 . No entanto, em alto x a função de estrutura diminui com o aumento de Q^2 , sendo o contrário também válido, isto é, em baixo x a função de estrutura aumenta com o aumento de Q^2 . Isso implica que as funções variam com Q^2 e x , violando até então a teoria postulada pelo modelo de pártons. Este comportamento ficou conhecido como violação de escala de Bjorken, resultando que em alto Q^2 o próton é observado como sendo constituído por uma fração maior de quarks com pequeno x .

A Figura 7 apresenta os resultados obtidos para F_2 em função de Q^2 do experimento ZEUS e H1 do colisor HERA. Os dados revelam que no regime entre $0,01 < x < 0,5$ a escala de Bjorken é consistente com a previsão teórica, conhecida como limite de Bjor-

ken, onde F_1 e F_2 apresentam dependência apenas em x . No entanto, fora deste regime são visualizados desvios, o que sugere que a escala de Bjorken é violada [THOMSON, 2013].

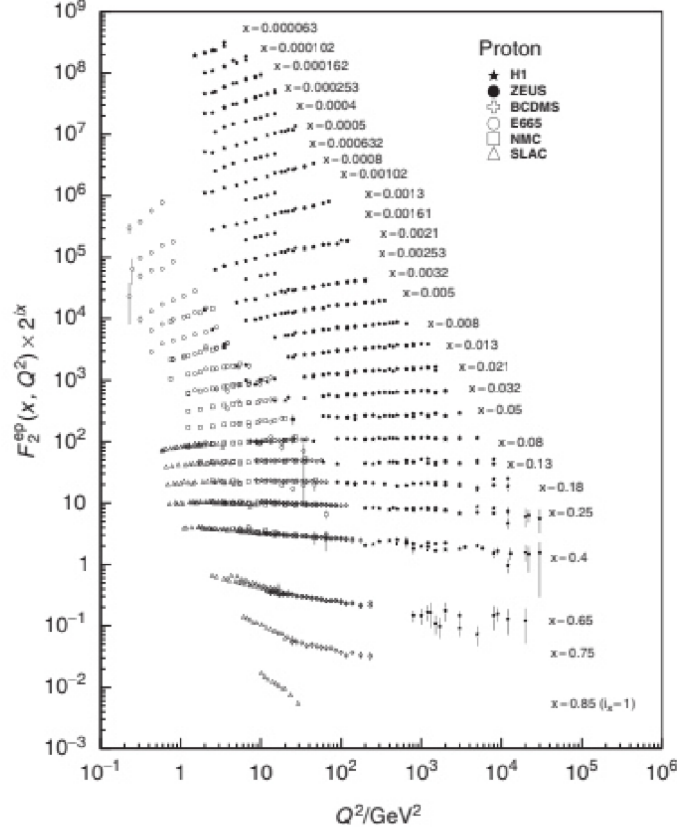


Figura 7 – Resultados experimentais para F_2 com dados obtidos em HERA. Esta figura mostra o momento em que a escala de Bjorken é violada [THOMSON, 2013].

2.4 DIS no referencial de dipolo

Anteriormente, estudou-se o DIS onde o fóton virtual, mediador da interação ep interagia com o próton, sendo este um sistema de quarks e glúons. A evolução desse sistema ocorre no interior do próton e as distribuições partônicas, as quais descrevem a probabilidade do pártion atingido carregar uma fração x do momentum do próton, evoluem em função da virtualidade Q^2 e do x de Bjorken.

Por outro lado, o DIS pode ser analisado em um referencial muito particular, conhecido como referencial de dipolo (Figura 8). Neste tipo de espalhamento, o fóton virtual (γ^*) com virtualidade Q^2 emitido pelo elétron incidente possui energia suficiente para se separar em um par quark-antiquark, também denominado dipolo, onde z e $1-z$ correspondem à fração de momentum do fóton carregada pelo quark e antiquark, respectivamente. O dipolo com tamanho r então interage com o próton e por fim, recombina-se ocorrendo

a produção das partículas do estado final. No diagrama, o estado final onde as partículas são produzidas é representado pela elipse.

Devemos aqui salientar que estamos trabalhando com um espalhamento inelástico, no entanto, a figura mostra um processo elástico. Isso pelo fato que por meio desta figura, conseguimos calcular a seção de choque total do espalhamento, que pelo teorema óptico, se conecta à parte imaginária da amplitude de espalhamento elástica, a qual é a principal quantidade a ser determinada neste referencial [BARONE; PREDAZZI, 2002]. Esta amplitude descreve a interação do dipolo com o próton, obedecendo à equação de Balitsky-Kovchegov (BK). Para determinar essa quantidade, utilizamos a referência [KOWALSKI; MOTYKA; WATT, 2006].

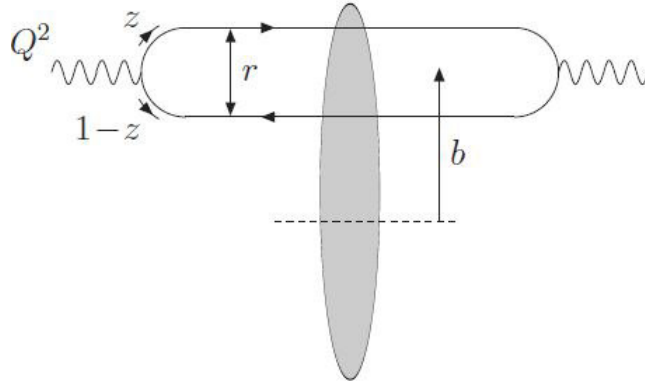


Figura 8 – Representação do DIS no referencial de dipolo, onde o fóton se separa em um par quark-antiquark [AMARAL, 2008].

A amplitude para o processo elástico $\gamma^* p \rightarrow \gamma^* p$ é escrita em função da fatorização do espalhamento em três subprocessos, sob as variáveis de dipolo $\mathbf{r}$ e z : (i) flutuação do fóton emitido pelo elétron no par $q\bar{q}$, (ii) interação do dipolo com o próton, (iii) recombinação do dipolo e produção do estado final. A expressão é dada por:

$$\mathcal{A}_{T,L}^{\gamma^* p}(x, Q, \Delta) = \sum_f \sum_{h, \bar{h}} \int d^2 r \int_0^1 \frac{dz}{4\pi} \Psi_{h\bar{h}}^*(\mathbf{r}, z, Q) \mathcal{A}_{q\bar{q}}(x, \mathbf{r}, \Delta) \Psi_{h\bar{h}}(\mathbf{r}, z, Q) \quad (2.18)$$

As somatórias são referentes aos sabores dos quarks (f) e das helicidades ($h\bar{h}$). No entanto, as helicidades são suprimidas neste cálculo para fins de simplificação [KOWALSKI; MOTYKA; WATT, 2006]. A variável $\Psi(r, z, Q)$ é a função de onda do fóton virtual e fornece a amplitude de probabilidade do fóton virtual (γ^*) flutuar no par $q\bar{q}$ (cálculos detalhados estão no Apêndice B). Já seu conjugado, $\Psi^*(r, z, Q)$, é a amplitude de probabilidade do par $q\bar{q}$ recombinar-se e formar outras partículas no estado final como o fóton ou mésons vetoriais e $\mathcal{A}_{q\bar{q}}(x, \mathbf{r}, \Delta)$ denota a amplitude de espalhamento do dipolo. A variável Δ é definida como o momentum transversal perdido pelo próton no final da interação, $\mathbf{r}$ é o tamanho do dipolo e o x é a variável de Bjorken. O fator $1/4\pi$ é adicionado como uma convenção, sendo refletida na normalização das funções de onda [KOWALSKI; MOTYKA; WATT, 2006].

O termo $\mathcal{A}_{q\bar{q}}(\mathbf{r}, \mathbf{\Delta}, Y)$ é definido após realizar uma transformada de Fourier e relacionar com o elemento de matriz S , $S(\mathbf{r}, \mathbf{b}, Y)$, onde $\mathbf{b}$ é o parâmetro de impacto:

$$\mathcal{A}_{q\bar{q}}(\mathbf{r}, \mathbf{\Delta}, Y) = \int d^2\mathbf{b} e^{-i\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Delta}} \mathcal{A}_{q\bar{q}}(\mathbf{r}, \mathbf{b}, Y) = i \int d^2\mathbf{b} e^{-i\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Delta}} 2[1 - S(\mathbf{r}, \mathbf{b}, Y)] \quad (2.19)$$

O teorema óptico [BARONE; PREDAZZI, 2002; KOWALSKI; MOTYKA; WATT, 2006] conecta a seção de choque total para o espalhamento do par $q\bar{q}$ com o próton à parte imaginária da amplitude de espalhamento por meio da expressão:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{tot}} &= \frac{2}{\Phi} \text{Im} A_{\text{el}}(s, t = 0) \\ &\simeq \frac{1}{s} \text{Im} A_{\text{el}}(s, t = 0) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Considerando que $\mathbf{\Delta} = 0$, o que remete ao caso da amplitude de espalhamento elástico *forward*, tem-se que a seção de choque dipolo próton $\sigma_{q\bar{q}}(x, \mathbf{r})$ é:

$$\sigma_{q\bar{q}}(\mathbf{r}, Y) = \text{Im} \mathcal{A}_{q\bar{q}}(\mathbf{r}, \mathbf{\Delta} = 0, Y) = \int d^2\mathbf{b} 2[1 - \text{Re} S(\mathbf{r}, \mathbf{b}, Y)] \quad (2.21)$$

Segundo os autores de [KOWALSKI; MOTYKA; WATT, 2006], a integração em $\mathbf{b}$ do elemento de matriz S na expressão acima, gera a definição da seção de choque diferencial como:

$$\frac{d\sigma_{q\bar{q}}}{d^2\mathbf{b}} = 2[1 - \text{Re} S(\mathbf{r}, \mathbf{b}, Y)] = 2N(\mathbf{r}, \mathbf{b}, Y) \quad (2.22)$$

onde $N(\mathbf{r}, \mathbf{b}, Y)$ é a amplitude de espalhamento elástica dipolo-próton, a qual determina a probabilidade de o dipolo interagir com o próton, sendo uma quantidade que evolui com a equação BK.

É possível então determinar a seção de choque total para o espalhamento γ^*p :

$$\begin{aligned} \sigma_{T,L}^{\gamma^*p}(Y, Q) &= \text{Im} \mathcal{A}_{T,L}^{\gamma^*p}(Y, \mathbf{r}, \mathbf{\Delta} = 0) \\ &= \sum_f \int d^2\mathbf{r} \int_0^1 dz (\Psi^*\Psi)_{T,L}^f \sigma^{q\bar{q}}(Y, \mathbf{r}) \\ &= \sum_f \int d^2\mathbf{r} \int_0^1 dz (\Psi^*\Psi)_{T,L}^f \int d\mathbf{b} 2N(\mathbf{r}, \mathbf{b}, Y) \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde T e L referem-se aos estados de polarização transversal e longitudinal do fóton virtual e as funções de onda do fóton são dadas pelas expressões abaixo. Os cálculos em detalhes para obter tais expressões estão no Apêndice B e as expressões finais são

$$\begin{aligned} \left| \Psi_T^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(\vec{x}_\perp, z) \right|^2 &= 2N_c \sum_f \frac{\alpha_{em} Z_f^2}{\pi} z(1-z) \\ &\times \left\{ a_f^2 [K_1(x_\perp a_f)]^2 [z^2 + (1-z)^2] + m_f^2 [K_0(x_\perp a_f)]^2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

e

$$\left| \Psi_L^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(\vec{x}_\perp, z) \right|^2 = 2N_c \sum_f \frac{\alpha_{em} Z_f^2}{\pi} 4Q^2 z^3 (1-z)^3 [K_0(x_\perp a_f)]^2 \quad (2.25)$$

onde a somatória é dada em termos do sabor dos quarks f , $K_{0,1}$ são as funções de Bessel e $a_f^2 = z(1-z)Q^2 + m_f^2$.

3 Equação BK e o escalamento geométrico

Segundo Soyez [SOYEZ, 2007], a busca pelo entendimento da QCD perturbativa em altas energias começou depois que a QCD foi proposta como a teoria fundamental das interações fortes. Para entender este regime, foi necessário levar em conta os efeitos de saturação, a fim de satisfazer as restrições de unitariedade [SOYEZ, 2006], sendo então, crucial encontrar equações que descrevessem a evolução das amplitudes em direção a altas energias, além de encontrar as propriedades de suas soluções. Esta seção é destinada especialmente ao estudo da equação de evolução não linear mais simples que descreve as propriedades da QCD, a equação de Balitsky-Kovchegov. A equação será apresentada, assim como sua interpretação física e duas soluções analíticas assintóticas serão obtidas em detalhes.

3.1 Saturação

O regime de altas energias vem sendo profundamente investigado por meio de colisões hadrônicas. Neste regime, torna-se necessário levar em conta efeitos não lineares que determinam o comportamento dos quarks e glúons dentro dos hádrons. A consequência ocasionada pelo aumento da energia é o crescimento da distribuição dos pártons, principalmente dos glúons e a saturação. A descrição deste sistema é dada pelo Condensado de Vidro Colorido (CGC) que descreve a QCD em altas energias. Por exemplo, nos processos exclusivos, que serão estudados mais adiante, ocorre uma forte dependência na distribuição de glúons, com isso, a saturação desempenha um papel importante nesses processos, como a produção de mésons vetoriais [PIRES, 2019].

A Figura 9 apresenta a configuração do próton em diferentes regiões do espaço de fase. Inicialmente, com a virtualidade (Q^2) e rapidez (Y) pequena, temos o próton formado por três quarks de valência. Quando a virtualidade aumenta em uma energia (rapidez) fixa, aumenta-se a resolução com que o fóton investiga o interior do próton, e consequentemente o número visualizado de pártons. Nesta configuração, o número de pártons dentro do próton cresce logarithmicamente, enquanto a área ocupada pelos mesmos diminui com o fator $1/Q^2$ (tamanho aparente dos pártons visto pelo fóton), onde o próton evolui para um estado *diluído*. Essa evolução é descrita pela equação de Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi (DGLAP) [BORAH; CHOUDHURY; SAHARIAH, 2012; GRIBOV; LIPATOV, 1972; DOKSHITZER, 1977]. Ao considerar Q^2 fixo e variar a energia e consequentemente Y , teremos outra configuração. Neste caso, conforme mostra a Figura 9, há um aumento do número de pártons com predominância dos glúons, porém, ocupando aproximadamente a mesma área que na configuração anterior. Esta evolução é

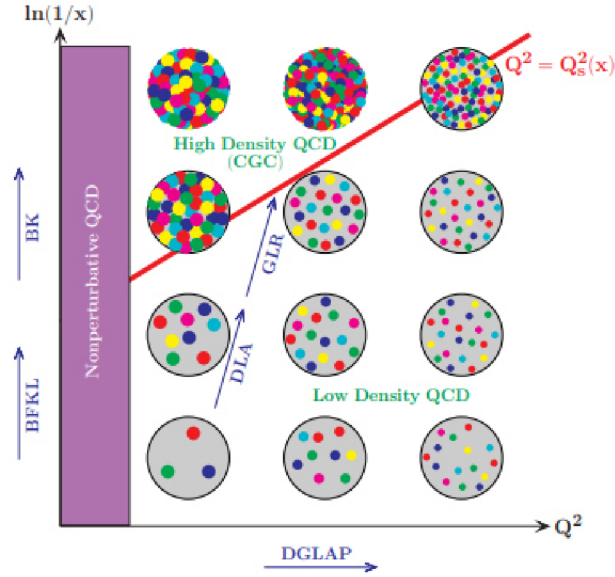


Figura 9 – Representação do próton em diferentes regiões do espaço de fase, com as respectivas equações de evolução que descrevem cada fase [PIRES, 2019]

descrita pela equação linear de Balitsky-Kuraev-Fadin-Lipatov (BFKL) [LIPATOV, 1976; KURAEV; LIPATOV; FADIN, 1977; BALITSKY; LIPATOV, 1978].

O aumento do número de pártons, especialmente dos glúons é consequência da própria divisão dos glúons em altas energias, além de serem emitidos pelos quarks. Esse crescimento faz com que o próton em algum momento, em altas energias, seja visto como um sistema denso. Devido ao tamanho finito do próton, espera-se então que os pártons comecem a se sobrepor dentro do próton, e efeitos de recombinação e espalhamentos múltiplos se tornam importantes e necessários. Os processos de recombinações gluônicas $g+g \rightarrow g$, são responsáveis por reduzir o crescimento da densidade dos glúons, produzindo o efeito de saturação.

Neste regime, a física que descreve esses fenômenos é conhecida como física de *saturação partônica*, introduzida por Gribov, Levin e Ryskin [GRIBOV; LEVIN; RYSKIN, 1983], os quais foram os primeiros a propor uma solução para os problemas encontrados. Ainda, uma *escala de saturação* $Q_s(x)$ é atribuída para separar os regimes diluído e saturado.

No limite de pequeno x , efeitos de saturação passam a ser de interesse, pois levam à equações de evoluções não-lineares como “reguladoras” da evolução do próton, como o caso da equação de Balitsky-Kovchegov (BK) [XIANG et al., 2019; XIANG, 2009; IANCU; ITAKURA; MCLERRAN, 2002].

3.2 Equação de Balitsky-Kovchegov (BK)

Um dos problemas mais desafiadores já encontrados no regime de altas energias da QCD é o entendimento de como ocorre a saturação dos pártons, assunto esse que foi introduzido pela primeira vez por Gribov, Levin e Ryskin [GRIBOV; LEVIN; RYSKIN, 1983] em 1983. Desde então, muitos pesquisadores da área se destinaram a pesquisar equações de evolução na tentativa de descrever a evolução dos sistemas de quarks e glúons em altas densidades e energias.

Dentre as equações, a mais simples é a equação de Balitsky-Kovchegov (BK), a qual inclui efeitos não lineares que satisfaz plenamente as restrições de unitariedade [XIANG et al., 2019]. Esta equação descreve a dinâmica da QCD em altas energias [CAZAROTO, 2009] e corresponde à equação linear BFKL, no entanto, com um termo adicional não linear, o qual é responsável justamente pela diminuição da densidade dos glúons dentro dos hádrons [AMARAL, 2008], já que essa densidade não pode crescer infinitamente. Apesar de ser considerada uma das equações mais simples da QCD, a equação BK não possui solução analítica exata. Deste modo, há apenas duas maneiras de se utilizar da mesma: por meio de (i) soluções numéricas e por (ii) modelos fenomenológicos, sendo mais comum se trabalhar com soluções analíticas assintóticas.

A equação BK descreve a evolução em rapidez $Y = \ln(1/x)$ da amplitude de espalhamento $N(\mathbf{x}, \mathbf{y}, Y)$ de um dipolo com um alvo hadrônico [XIANG, 2009], onde $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ correspondem às coordenadas transversais do quark e do antiquark, respectivamente. Usualmente, em espalhamentos envolvendo altas energias, é conveniente visualizar o processo em um referencial onde o dipolo está se movendo ao longo do eixo z negativo e o alvo está se movendo ao longo do eixo z positivo [XIANG, 2009].

Considerando inicialmente um dipolo com coordenadas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, Figura 10, se houver um aumento da rapidez δY , então há uma probabilidade de o dipolo emitir um glúon, que no limite de grande número de cores, N_c , corresponde a formação de dois dipolos finais, $(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ e $(\mathbf{z}, \mathbf{y})$, conforme mostra o segundo e o terceiro diagrama da Figura 10. O último diagrama significa que o glúon no momento da interação com o alvo não se encontra na função de onda do dipolo, ele é emitido/reabsorvido antes/depois da interação com o alvo [SOYEZ, 2006].

O diagrama abaixo (Figura 11) representa o termo quadrático da equação BK, o qual significa que os dipolos interagem simultaneamente.

Matematicamente, a equação BK é escrita como:

$$\partial_Y N_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \int d^2\mathbf{z} \mathcal{M}_{\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}} [N(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + N(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - N(\mathbf{x}, \mathbf{z})N(\mathbf{z}, \mathbf{y})] \quad (3.1)$$

a qual é formada pelos três termos lineares, que correspondem à equação BFKL e pelo

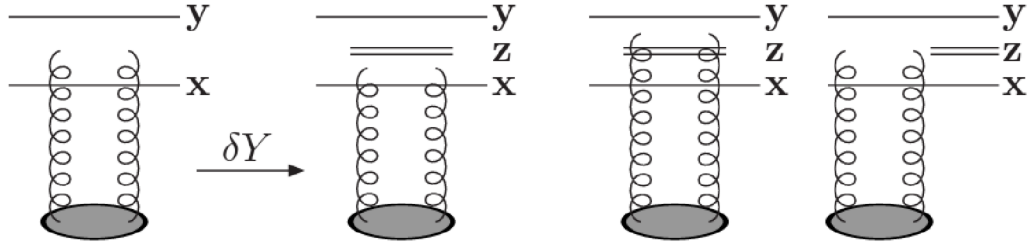


Figura 10 – Representação diagramática dos termos da equação BFKL. O primeiro esquema é o dipolo original, que após sofrer um aumento da rapidez, se divide em dois dipolos “filhos” [SOYEZ, 2006].

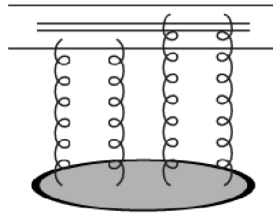


Figura 11 – Espalhamento múltiplo entre um alvo e um projétil feito de dois dipolos. Nesta representação os dipolos interagem simultaneamente [SOYEZ, 2006].

termo quadrático $N_Y(\mathbf{x}, \mathbf{z})N_Y(\mathbf{z}, \mathbf{y})$. A variável $\mathcal{M}_{xyz}$ é dada pela relação:

$$\mathcal{M}_{xyz} \equiv \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2(\mathbf{y} - \mathbf{z})^2} \quad (3.2)$$

Utilizando as relações $r = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, $r_1 = \mathbf{x} - \mathbf{z}$ e $r_2 = \mathbf{z} - \mathbf{y}$, onde r é o módulo do vetor $\mathbf{r}$ ($r = |\mathbf{r}|$), a equação pode ser escrita em uma forma simplificada, de modo que:

$$\frac{\partial N(r, Y)}{\partial Y} = \int \frac{d^2 z}{2\pi} K(r, r_1, r_2) [N(r_1, Y) + N(r_2, Y) - N(r, Y) - N(r_1, Y)N(r_2, Y)] \quad (3.3)$$

onde o kernel K de evolução é dado por:

$$K(r, r_1, r_2) = \bar{\alpha}_s \frac{r^2}{r_1^2 r_2^2} \quad (3.4)$$

e a constante $\bar{\alpha}_s$ é:

$$\bar{\alpha}_s = \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \quad (3.5)$$

O termo não linear da equação (3.1) evita que a amplitude cresça indefinidamente ao passo que a rapidez aumenta, garantindo sua unitariedade. No entanto, tem-se outra versão muito utilizada da equação BK em termos de S , onde S é o elemento da matriz do espalhamento dipolo-hádron. Utilizando a relação abaixo:

$$N(\mathbf{x} - \mathbf{y}, Y) = 1 - S(\mathbf{x} - \mathbf{y}, Y) \quad \text{ou} \quad N(r, Y) = 1 - S(r, Y)$$

em que $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, conseguimos transformar a equação (3.1) em:

$$\frac{\partial}{\partial Y} S(\mathbf{x} - \mathbf{y}, Y) = \frac{\alpha N_c}{2\pi^2} \int d^2 z \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2 (\mathbf{z} - \mathbf{y})^2} [S(\mathbf{x} - \mathbf{z}, Y) S(\mathbf{z} - \mathbf{y}, Y) - S(\mathbf{x} - \mathbf{y}, Y)] \quad (3.6)$$

ou de forma simplificada:

$$\frac{\partial}{\partial Y} S(r, Y) = \frac{\alpha N_c}{2\pi^2} \int dz \frac{r^2}{r_1^2 r_2^2} [S(r_1, Y) S(r_2, Y) - S(r, Y)] \quad (3.7)$$

Como (3.6) e (3.7) são as mesmas equações, no entanto, escritas de modo diferente, ambas podem ser resolvidas analiticamente em duas regiões distintas: próximo a região de saturação e no regime de saturação [XIANG et al., 2019], conforme seções abaixo.

3.2.1 Solução 1 - Equação BFKL próximo ao regime de saturação

A primeira solução analítica da equação BK a ser estudada é solução da equação BFKL próxima ao regime de saturação, no limite em que $r \gg 1/Q_s$. O estudo foi baseado nas referências [IANCU; ITAKURA; MCLERRAN, 2002] e [SOUZA, 2007], além das referências contidas nos trabalhos em questão.

Como visto anteriormente, a equação BK é dada pela expressão (3.3):

$$\frac{\partial N(r, Y)}{\partial Y} = \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \int d^2 z \frac{r^2}{r_1^2 r_2^2} [N(r_1, Y) + N(r_2, Y) - N(r, Y) - N(r_1, Y) N(r_2, Y)] \quad (3.8)$$

Na expressão acima, o termo quadrático pode ser desprezado, pois no regime de saturação $r \gg 1/Q_s$ e $S(r) \ll 1$. Essas considerações são válidas pois a contribuição vem da coordenada $z_\perp$ [SOUZA, 2007]. Realizando algumas manipulações do tipo que:

$$N(r_1, Y) + N(r_2, Y) = 2N(z_\perp) \quad \text{e} \quad \alpha_s = \frac{\bar{\alpha}_s \pi}{N_c} \quad (3.9)$$

a equação (3.8) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial N(r, Y)}{\partial Y} = \bar{\alpha}_s \int \frac{d^2 z_\perp}{2\pi} \frac{r^2}{(r - z_\perp)^2 z_\perp^2} [2N(z_\perp) - N(r, Y)] \quad (3.10)$$

Isolando o fator 2 na expressão acima, chegamos na expressão:

$$\frac{\partial N(r, Y)}{\partial Y} = \frac{\bar{\alpha}_s}{\pi} \int d^2 z_\perp \frac{r^2}{(r - z_\perp)^2 z_\perp^2} [N(z_\perp) - \frac{1}{2} N(r, Y)] \quad (3.11)$$

a qual é a equação BFKL no espaço de coordenadas. Para obter a solução da expressão acima, utiliza-se da transformada de Mellin com respeito à coordenada transversal:

$$N(r, Y) = \int \frac{d\gamma}{2\pi i} \left(\frac{r_\perp^2}{l^2} \right)^\gamma N(\gamma, Y) \quad (3.12)$$

onde $l^2 = 1/\Lambda_{QCD}$, $r_\perp^2 \ll l^2$ e

$$N(\gamma, Y) = e^{\bar{\alpha}_s \chi(\gamma) Y} N_0(\gamma, Y_0) \quad (3.13)$$

a qual é solução da equação¹

$$\frac{\partial N(\gamma, Y)}{\partial Y} = \bar{\alpha}_s \chi(\gamma) N(\gamma, Y) \quad (3.14)$$

onde $\chi(\gamma)$ corresponde aos auto-valores do núcleo da equação BFKL no espaço de Mellin [IANCU; ITAKURA; MCLERRAN, 2002], dado por:

$$\chi(\gamma) = 2\Psi(1) - \Psi(\gamma) - \Psi(1 - \gamma) \quad (3.15)$$

Substituindo (3.13) em (3.12):

$$N(r, Y) = \int_C \frac{d\gamma}{2\pi i} \left(\frac{r^2}{l^2} \right)^\gamma [e^{\bar{\alpha}_s \chi(\gamma) Y} N_0(\gamma, Y_0)] \quad (3.16)$$

Como forma de simplificação, realizamos a seguinte operação:

$$\left(\frac{r^2}{l^2} \right)^\gamma = e^{\gamma \ln \left(\frac{r^2}{l^2} \right)} \quad \text{onde} \quad \rho = \ln \frac{r^2}{l^2} \quad (3.17)$$

devidas propriedades abaixo:

$$e^{\ln(x)} = x \quad \text{e} \quad \ln(A^B) = B \ln A \quad (3.18)$$

A expressão (3.16) se torna:

$$N(r, Y) = \int_C \frac{d\gamma}{2\pi i} e^{\gamma \rho + \bar{\alpha}_s \chi(\gamma) Y} \quad (3.19)$$

Considerando que $N_0(\gamma, Y_0)$ é constante² e chamando

$$F(\gamma, \rho, Y) = \gamma \rho + \bar{\alpha}_s \chi(\gamma) Y \quad (3.20)$$

chegamos à expressão:

$$N(r, Y) = \int_C \frac{d\gamma}{2\pi i} e^{F(\gamma, \rho, Y)} \quad (3.21)$$

Expandindo $F(\gamma, \rho, Y)$ em uma série de Taylor até segunda ordem em torno de γ_0 e utilizando a condição de contorno, $C = \{\gamma = \gamma_0 + i\nu, -\infty < \nu < \infty\}$:

$$\begin{aligned} F(\gamma, \rho, Y) &= F(\gamma_0) + F'(\gamma_0) \frac{(\gamma - \gamma_0)^1}{1!} + F''(\gamma_0) \frac{(\gamma - \gamma_0)^2}{2!} + \dots \\ F(\gamma, \rho, Y) &= F(\gamma_0) + F''(\gamma_0) \frac{(\gamma - \gamma_0)^2}{2!} \end{aligned} \quad (3.22)$$

¹ Para provar esta relação, basta substituir $N(\gamma, Y)$ na expressão 3.14 e derivar em relação a Y .

² A condição inicial $N_0(\gamma, Y_0)$ é considerada como constante, pois é assumida que a mesma não varia rapidamente no intervalo γ de interesse.

onde o ponto de sela diz que:

$$\left. \frac{\partial F(\gamma, \rho, Y)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma_0} = 0, \quad \gamma_0 = \gamma_0(r, Y) \quad (3.23)$$

Substituindo o resultado (3.22) na expressão (3.21), tem-se:

$$N(r, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\gamma}{2\pi i} e^{F(\gamma_0) + F''(\gamma_0) \frac{(\gamma - \gamma_0)^2}{2!}} \quad (3.24)$$

e, lembrando da condição que $\gamma = \gamma_0 + i\nu$, chegamos na relação:

$$\begin{aligned} N(r, Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{2\pi i} e^{F(\gamma_0) + F''(\gamma_0) \frac{(\gamma_0 + i\nu - \gamma_0)^2}{2!}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{2\pi i} e^{F(\gamma_0) - \frac{1}{2}\nu^2 F''(\gamma_0)} \\ &= e^{F(\gamma_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{2\pi i} e^{-\frac{1}{2}\nu^2 F''(\gamma_0)} \end{aligned} \quad (3.25)$$

A integral acima é uma integral gaussiana do tipo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (3.26)$$

Chamando de $a = \frac{1}{2}F''(\gamma_0)$ e $x^2 = \nu^2$, chegamos na expressão:

$$N(r, Y) = \frac{e^{F(\gamma_0)}}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{F''(\gamma_0)}} = \frac{e^{F(\gamma_0)}}{2\pi} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{F''(\gamma_0)}} = e^{F(\gamma_0)} \frac{1}{\sqrt{2\pi F''(\gamma_0)}} \quad (3.27)$$

onde γ_0 satisfaz a condição do ponto de sela em (3.23).

Trabalhando com a expressão (3.20), obtém-se:

$$F(\gamma, \rho, Y) = \gamma\rho + \bar{\alpha}_s \chi(\gamma)Y = \gamma\rho + \bar{\alpha}_s Y(2\Psi(1) - \Psi(\gamma) - \Psi(1 - \gamma)) \quad (3.28)$$

Para $0 < \gamma < 1$, temos a seguinte aproximação:

$$2\psi(1) - \psi(\gamma) - \psi(1 - \gamma) \approx \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{1 - \gamma} + 4 \ln 2 - 4 \quad (3.29)$$

logo, $F(\gamma, \rho, Y)$ será:

$$F(\gamma, \rho, Y) = \gamma\rho + \bar{\alpha}_s Y \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{1 - \gamma} + 4 \ln 2 - 4 \right) \quad (3.30)$$

Substituindo a relação (3.30) em (3.23) e derivando em relação a γ :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F(\gamma, \rho, Y)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma_0} &= \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\gamma\rho + \bar{\alpha}_s Y \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{1 - \gamma} + 4 \ln 2 - 4 \right) \right] = 0 \\ &= \rho + \bar{\alpha}_s Y \left(-\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{(1 - \gamma)^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Definimos uma nova variável $\mathcal{R}$, a qual é dada pelo resultado da expressão acima:

$$\mathcal{R} = -\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{(1-\gamma)^2} = \frac{-\rho}{\bar{\alpha}_s Y} \quad (3.32)$$

Assim, redefinindo $F(\gamma_0)$, tem-se:

$$\begin{aligned} F(\gamma_0) &= \gamma_0 \rho + \bar{\alpha}_s Y \chi(\gamma_0) = -\gamma_0 \mathcal{R} \bar{\alpha}_s Y + \bar{\alpha}_s Y \chi(\gamma_0) = \bar{\alpha}_s Y (-\gamma_0 \mathcal{R} + \chi(\gamma_0)) \\ F(\gamma_0) &= \bar{\alpha}_s Y F(\gamma_0(\mathcal{R}), \mathcal{R}) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Existem 3 casos limites, no qual obtém-se um único ponto de sela, γ_0 , que está entre $0 < \gamma < 1$. Sua posição varia dependendo da razão de $\rho/\bar{\alpha}_s Y$. São os três casos [XIANG et al., 2019; XIANG, 2009; IANCU; ITAKURA; MCLERRAN, 2002]:

1. Quando $\rho/\bar{\alpha}_s Y$ é positivo e suficientemente grande: o ponto de sela está próximo de $\gamma = 0$.
2. Quando $\rho/\bar{\alpha}_s Y$ é pequeno: o ponto de sela está próximo de $\gamma = 1/2$.
3. Quando $\rho/\bar{\alpha}_s Y$ é negativo: o ponto de sela está próximo de $\gamma = 1$.

No primeiro caso, onde $\gamma_0 \ll 1$, a expressão para $F(\gamma)$ se torna:

$$F(\gamma) \simeq \gamma \rho + \frac{\bar{\alpha}_s Y}{\gamma} \quad (3.34)$$

Para determinar o ponto de sela γ_0 neste caso, aplicamos a condição do ponto de sela utilizada anteriormente em $F(\gamma)$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F(\gamma)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=\gamma_0} &= 0 \\ \rho - \frac{\bar{\alpha}_s Y}{\gamma_0^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

então

$$\gamma_0 = \sqrt{\frac{\bar{\alpha}_s Y}{\rho}} \quad (3.36)$$

Encontrado γ_0 , podemos determinar quem é $F(\gamma_0)$:

$$F(\gamma_0) = \gamma_0 \rho + \frac{\bar{\alpha}_s Y}{\gamma_0} = \sqrt{\frac{\bar{\alpha}_s Y}{\rho}} \rho + \frac{\bar{\alpha}_s Y}{\sqrt{\frac{\bar{\alpha}_s Y}{\rho}}}$$

Simplificando a expressão acima:

$$F(\gamma_0) = 2\sqrt{\bar{\alpha}_s Y \rho} \quad (3.37)$$

determinamos que a derivada segunda é:

$$F''(\gamma_0) = \frac{2\bar{\alpha}_s Y}{\gamma_0^3} \quad (3.38)$$

Substituindo os resultados acima em $N(r, Y)$ (Equação 3.27), chegamos na expressão final:

$$N(r, Y) = e^{2\sqrt{\bar{\alpha}_s Y} \rho} \sqrt{\frac{\gamma_0^3}{4\pi\bar{\alpha}_s Y}} \quad (3.39)$$

No segundo caso, quando $\rho/\bar{\alpha}_s Y \sim 0$ e $\gamma \sim 1/2$, o ponto de sela é estimado como:

$$\gamma_0 = \frac{1}{2} - \delta \quad (3.40)$$

Para determinar δ , devemos realizar praticamente os mesmos passos que anteriormente. Primeiro vamos determinar a expressão para $F(\gamma)$ e consequentemente para $F(\gamma_0)$. Uma vez que a condição do ponto de sela exige que $\gamma = \gamma_0$.

Determinando $F(\gamma)$ e $F(\gamma_0)$:

$$\begin{aligned} F(\gamma) &= \gamma\rho + \bar{\alpha}_s Y \chi(\gamma) = \gamma\rho + \bar{\alpha}_s Y (2\Psi(1) - \Psi(\gamma) - \Psi(1 - \gamma)) \\ F(\gamma_0) &= \gamma_0\rho + \bar{\alpha}_s Y (2\Psi(1) - \Psi(\gamma_0) - \Psi(1 - \gamma_0)) \end{aligned} \quad (3.41)$$

e derivando parcialmente em relação à γ , utilizando a expressão abaixo:

$$\left. \frac{\partial F(\gamma)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=\gamma_0} = 0 \quad (3.42)$$

Encontramos que:

$$\rho + \bar{\alpha}_s Y (-\Psi'(\gamma_0) + \Psi'(\gamma_0)) = 0 \quad (3.43)$$

$$\rho + \bar{\alpha}_s Y \left(-\Psi' \left(\frac{1}{2} - \delta \right) + \Psi' \left(\frac{1}{2} + \delta \right) \right) = 0 \quad (3.44)$$

Realizando uma expansão em série para os dois termos entre parênteses na equação acima:

$$\begin{aligned} \Psi' \left(\frac{1}{2} - \delta \right) &= \Psi' \left(\frac{1}{2} \right) - \Psi'' \left(\frac{1}{2} \right) \delta + \frac{1}{2!} \Psi''' \left(\frac{1}{2} \right) \delta^2 - \dots \\ \Psi' \left(\frac{1}{2} + \delta \right) &= \Psi' \left(\frac{1}{2} \right) + \Psi'' \left(\frac{1}{2} \right) \delta + \frac{1}{2!} \Psi''' \left(\frac{1}{2} \right) \delta^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.45)$$

e subtraindo uma expressão da outra, nos resta apenas o termo $2\Psi''(1/2)$. Substituindo este resultado na expressão (3.44), temos a seguinte relação:

$$\rho + \bar{\alpha}_s Y 2\Psi'' \left(\frac{1}{2} \right) \delta = 0 \quad (3.46)$$

Isolando a variável δ da expressão acima:

$$\delta = \frac{-\rho}{\bar{\alpha}_s Y 2\Psi''(1/2)} \quad (3.47)$$

e, chamando $\beta = -2\Psi''(1/2)$, obtém-se:

$$\delta = \frac{\rho}{\beta\bar{\alpha}_s Y} \quad (3.48)$$

Para enfim determinar a expressão $N(r, Y)$ para este caso, além de $F(\gamma_0)$ precisamos da derivada segunda de F , $F''(\gamma_0)$. Determinando $F(\gamma_0)$:

$$F(\gamma_0) = \rho\gamma_0 + \alpha_s Y \bar{\chi}(\gamma_0) = \rho \left(\frac{1}{2} - \delta \right) + \bar{\alpha}_s Y \chi \left(\frac{1}{2} - \delta \right) \quad (3.49)$$

Realizando a derivada segunda:

$$F''(\gamma_0) = \bar{\alpha}_s Y \chi''(1/2 - \delta) \quad (3.50)$$

em que:

$$\chi''(1/2) = -2\Psi''(1/2) = 28\zeta(3) \equiv \beta \quad (3.51)$$

Vale ressaltar que as relações acima, na expressão (3.51) são retiradas do trabalho de [IANCU; ITAKURA; MCLERRAN, 2002].

A expressão para $N(r, Y)$ será:

$$N(r, Y) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \delta - \rho \delta + \bar{\alpha}_s Y \chi(1/2 - \delta) \right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{\alpha}_s Y \beta}} \quad (3.52)$$

Ainda é possível expandir o termo $\chi(1/2 - \delta)$ em uma série de Taylor até segunda ordem em δ :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \\ \chi \left(\frac{1}{2} - \delta \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi^{(n)}(1/2)}{n!} \left(\frac{1}{2} - \delta - \frac{1}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi^{(n)}(1/2)}{n!} (-\delta)^n \\ &= \chi(1/2) - \chi'(1/2)\delta + \frac{1}{2}\chi''(1/2)\delta^2 \\ &= \omega + \frac{1}{2}\beta\delta^2 \end{aligned} \quad (3.53)$$

onde a variável $\omega = \chi(1/2)$. Substituindo o resultado acima na expressão (3.52), tem-se que a amplitude é:

$$N(r, Y) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \rho - \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\beta\bar{\alpha}_s Y} + \omega\bar{\alpha}_s Y \right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{\alpha}_s Y \beta}} \quad (3.54)$$

Para o terceiro e último caso, vamos considerar que $\gamma_0 = 1 - \delta_1$. Logo, para encontrar quem é δ_1 começamos por determinar $F(\gamma)$:

$$F(\gamma) = \gamma\rho + \bar{\alpha}_s \chi(\gamma)Y = \gamma\rho + \bar{\alpha}_s Y \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{1-\gamma} + 4\ln(2) - 4 \right) \quad (3.55)$$

Em que o ponto de sela é dada pela condição:

$$\left. \frac{\partial F(\gamma)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=\gamma_0} = 0 \quad (3.56)$$

Assim a expressão (3.55) será:

$$\begin{aligned} \rho + \bar{\alpha}_s Y \left(-\frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{(1-\gamma_0)^2} \right) &= 0 \\ \rho + \bar{\alpha}_s Y \left(-\frac{1}{(1-\delta_1)^2} + \frac{1}{\delta_1^2} \right) &= 0 \\ \delta_1 &= \sqrt{\frac{\bar{\alpha}_s Y}{(-\rho)}} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Determinando $F(\gamma_0)$, passo a passo como segue abaixo:

$$\begin{aligned} F(\gamma_0) &= \gamma_0 \rho + \bar{\alpha}_s Y \chi(\gamma_0) \\ F(\gamma_0) &= (1-\delta_1) \rho + \bar{\alpha}_s Y \chi(1-\delta_1) \\ F(\gamma_0) &= \rho - \delta_1 + \frac{\bar{\alpha}_s Y}{\delta_1} \\ F(\gamma_0) &= \sqrt{\bar{\alpha}_s Y (-\rho)} \end{aligned} \quad (3.58)$$

A derivada segunda, $F''(\gamma_0)$ é determinada como:

$$F''(\gamma_0) = \frac{2\bar{\alpha}_s Y}{\delta_1^3} \quad (3.59)$$

Assim, a expressão final para a amplitude $N(r, Y)$ é:

$$N(r, Y) = e^{\rho + \sqrt{\bar{\alpha}_s Y (-\rho)}} \sqrt{\frac{\delta_1^3}{4\pi \bar{\alpha}_s Y}} \quad (3.60)$$

Os autores de [IANCU; ITAKURA; MCLERRAN, 2002] realizam uma análise sobre os três casos apresentados. O primeiro caso é válido apenas quando consideramos a equação BFKL no espaço de momentum, onde $\rho = \ln(k^2/\Lambda^2)$ é sempre positivo. O terceiro caso, aplica-se apenas ao espaço de coordenadas, onde $\rho = r^2/l^2$. Este limite é comum às equações BFKL e DGLAP pois descreve o comportamento das soluções em grande k^2 ou pequeno r . Por outro lado, o segundo caso se aplica tanto ao espaço de momentum ($r > 0$) quanto ao espaço de coordenadas ($r < 0$). Em análises padrão da equação BFKL, este é o caso que descreve o limite de altas energias.

É possível determinar $Q_s(Y)$ a partir da solução de $N(r, Y)$ da equação BFKL (expressão 3.11), utilizando a condição de saturação $N(r_\perp = 1/Q_s(Y))=1$. Para essa estimativa, utilizaremos a aproximação do ponto de sela:

$$\begin{aligned} F(\rho, \gamma, Y) &= \gamma \rho + \bar{\alpha}_s Y \chi(\gamma) \\ \left. \frac{\partial F(\gamma)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=\gamma_0} &= \rho + \bar{\alpha}_s Y (-\Psi'(\gamma) - \Psi'(1-\gamma)) = 0 \end{aligned} \quad (3.61)$$

isolando os termos com dependência em γ e reescrevendo a expressão acima:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \gamma} [\Psi(\gamma) + \Psi(1 - \gamma)] \right|_{\gamma_0} = -\frac{\rho}{\bar{\alpha}_s Y} \equiv -\mathcal{R} \quad (3.62)$$

Deste modo, justifica-se o fato do ponto de sela ser na verdade uma função de apenas uma variável $\mathcal{R}$:

$$\gamma_0(r, Y) = \gamma_0(\mathcal{R}) \quad (3.63)$$

onde

$$\mathcal{R} \equiv \frac{(-\rho)}{\bar{\alpha}_s Y} = \frac{1}{\bar{\alpha}_s Y} \ln \frac{1}{r^2 \Lambda^2} \quad (3.64)$$

Se estimarmos a integral de Mellin apenas no ponto de sela, temos:

$$N(r, Y) \simeq e^{\bar{\alpha}_s Y F(\gamma_0(\mathcal{R}), \mathcal{R})} \quad (3.65)$$

pois $F(\gamma)$ pode ser escrito como $F(\gamma) = \bar{\alpha}_s Y F(\gamma_0(\mathcal{R}), \mathcal{R})$.

Devido ao critério de saturação indicado inicialmente, podemos agora encontrar uma expressão para $Q_s(Y)$. Considerando que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_s$:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_s = -\frac{\rho_s}{\bar{\alpha}_s Y} = \frac{1}{\bar{\alpha}_s Y} \ln \frac{1}{r_\perp^2 \Lambda^2} = \frac{1}{\bar{\alpha}_s Y} \ln \frac{Q_s^2}{\Lambda^2} \quad (3.66)$$

sendo que $\mathcal{R}_s$ é um número puro e não uma função de Y . Veremos a seguir que $\mathcal{R}_s$ é um número puro, o qual não depende de Y . Multiplicando ambos os lados da expressão acima por $(-\gamma_s)$:

$$(-\gamma_s) \left. \frac{\partial}{\partial \gamma} [\Psi(\gamma) + \Psi(1 - \gamma)] \right|_{\gamma=\gamma_s} \equiv -\mathcal{R}_s(-\gamma_s) \quad (3.67)$$

Aplicando a condição:

$$\left. \frac{\partial F(\gamma_0(\mathcal{R}), \mathcal{R})}{\partial \gamma_0} \right|_{\mathcal{R}=\mathcal{R}_s} = 0 \quad (3.68)$$

em $F(\rho, \gamma, Y)$:

$$F(\rho, \gamma, Y)|_{\gamma=\gamma_s} = \gamma \rho + \bar{\alpha}_s Y \chi(\gamma) \quad (3.69)$$

a mesma é resolvida como:

$$\gamma \rho + \bar{\alpha}_s Y \chi(\gamma_s) = 0 \quad (3.70)$$

Isolando $\chi(\gamma_s)$ na expressão (3.70):

$$\chi(\gamma_s) = \frac{-\rho \gamma_s}{\bar{\alpha}_s Y} \chi(\gamma_s) = \gamma_s \mathcal{R}_s \quad (3.71)$$

substituindo o resultado acima na Equação (3.67):

$$-\gamma_s \chi'(\gamma_s) = \mathcal{R}_s \gamma_s = \chi(\gamma_s) \quad (3.72)$$

logo,

$$\chi'(\gamma_s) = \frac{\chi(\gamma_s)}{\gamma_s} \quad (3.73)$$

Caso resolvêssemos numericamente [SOUZA, 2007; XIANG et al., 2019; XIANG, 2009; IANCU; ITAKURA; MCLERRAN, 2002], encontraríamos os valores correspondentes de:

$$\mathcal{R}_s = 4,88339... \quad \gamma_s = 0,627549... \quad (3.74)$$

Segundo os autores [IANCU; ITAKURA; MCLERRAN, 2002], conforme os resultados encontrados, o valor de γ_s não se encontra muito distante de $1/2$, o que é consistente com o fato de que o valor de $\mathcal{R}_s$ está na faixa em que se espera, um comportamento BFKL “genuíno”, ou seja, $\mathcal{R}_s < 8$.

Também é possível resolver $N(r, Y)$ para $\mathcal{R}$ um pouco acima de $\mathcal{R}_s$, ou seja, $\mathcal{R} > \mathcal{R}_s$. Essa condição assegura que estamos em um regime linear. Para este caso, adota-se que:

$$0 < \mathcal{R} - \mathcal{R}_s \ll \mathcal{R}_s, \text{ ou } 1 < \ln \frac{Q^2}{Q_s^2(Y)} \ll \ln \frac{Q_s^2(Y)}{\Lambda_{QCD}^2} \quad (3.75)$$

A condição $\mathcal{R} - \mathcal{R}_s \ll \mathcal{R}_s$ permite realizar uma expansão de $F(\gamma_0(\mathcal{R}), \mathcal{R})$:

$$\begin{aligned} F(\gamma_0(\mathcal{R}), \mathcal{R}) &\simeq F(\gamma_0(\mathcal{R}_s), \mathcal{R}_s) + \left. \frac{d}{d\mathcal{R}} F(\gamma_0(\mathcal{R}), \mathcal{R}) \right|_{\mathcal{R}=\mathcal{R}_s} + \dots \\ &= -\gamma_s(\mathcal{R} - \mathcal{R}_s) + \dots, \end{aligned} \quad (3.76)$$

fazendo com que acima da escala de saturação, a equação para a amplitude de espalhamento dipolo-hádron seja do tipo:

$$N(r, Y) \simeq \kappa e^{-\bar{\alpha}_s Y \gamma_s(\mathcal{R} - \mathcal{R}_s)} \quad (3.77)$$

onde $\kappa < 1$ e

$$\bar{\alpha}_s Y(\mathcal{R} - \mathcal{R}_s) = \ln \frac{1}{r_\perp^2 Q_s^2(Y)} \quad (3.78)$$

Assim, a expressão para amplitude se torna:

$$N(r, Y) \simeq \kappa \left(r^2 Q_s^2(Y) \right)^{\gamma_s} \quad (3.79)$$

Como visualiza-se na expressão (3.79), a amplitude é dependente da variável $r^2 Q_s^2(Y)$. Essa dependência é conhecida como a propriedade do escalamento geométrico.

Ainda, é possível realizar uma expansão de segunda ordem no termo $F(\gamma_0(\mathcal{R}), \mathcal{R})$:

$$\begin{aligned} F(\gamma_0(\mathcal{R}), \mathcal{R}) &\simeq F(\gamma_0(\mathcal{R}_s), \mathcal{R}_s) + \left. \frac{d}{d\mathcal{R}} F(\gamma_0(\mathcal{R}), \mathcal{R}) \right|_{\mathcal{R}=\mathcal{R}_s} (\mathcal{R} - \mathcal{R}_s) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\mathcal{R}^2} F(\gamma_0(\mathcal{R}), \mathcal{R})|_{\mathcal{R}=\mathcal{R}_s} (\mathcal{R} - \mathcal{R}_s)^2 \end{aligned} \quad (3.80)$$

Da expressão acima, teremos que:

$$\frac{d^2}{d\mathcal{R}^2} = -\gamma_s \quad (3.81)$$

logo,

$$F(\gamma_0(\mathcal{R}), \mathcal{R}) = -\gamma_s(\mathcal{R} - \mathcal{R}_s) - \frac{\gamma'_s}{2}(\mathcal{R} - \mathcal{R}_s)^2 \quad (3.82)$$

Em $N(r, Y)$:

$$N(r, Y) = \kappa e^{\bar{\alpha}_s Y (-\gamma_s(\mathcal{R} - \mathcal{R}_s) - \frac{\gamma'_s}{2}(\mathcal{R} - \mathcal{R}_s)^2)} \quad (3.83)$$

Chegamos na expressão final para a amplitude de espalhamento $N(r, Y)$:

$$N(r, Y) \simeq \kappa \left(r^2 Q_s^2(Y) \right)^{\gamma_s} \exp \left[-\frac{\gamma'_s}{2\bar{\alpha}_s Y} \left(\ln \frac{1}{r^2 Q_s^2(Y)} \right)^2 \right] \quad (3.84)$$

3.2.2 Solução 2 - Equação de Levin-Tuchin no regime de saturação

A solução analítica da equação BK no regime de saturação foi derivada por Levin e Tuchin [LEVIN; TUCHIN, 2000], que carrega sua nomeação. No regime de altas energias, é comum utilizar a expressão (3.6), no entanto, negligenciando o termo quadrático:

$$\frac{\partial}{\partial Y} S(x_\perp - y_\perp, Y) = -\frac{\alpha N_c}{2\pi^2} \int d^2 z_\perp \frac{(x_\perp - y_\perp)^2}{(x_\perp - z_\perp)^2 (z_\perp - y_\perp)^2} S(x_\perp - y_\perp, Y) \quad (3.85)$$

Esta aproximação é realizada pois no regime de saturação N é próximo de 1 e portanto S é muito pequeno, logo o termo quadrático se torna desprezível em relação ao termo linear.

Para fins de simplificação, utilizaremos a notação já utilizada anteriormente, $r = |\mathbf{r}|$:

$$\begin{aligned} (x_\perp - y_\perp) &= r \\ (x_\perp - z_\perp) &= r_1 \\ (z_\perp - y_\perp) &= r_2 \end{aligned} \quad (3.86)$$

que transforma a Equação (3.85) em:

$$\frac{\partial}{\partial Y} S(r, Y) = -\frac{\alpha N_c}{2\pi^2} \int d^2 z_\perp \frac{r^2}{r_1^2 r_2^2} S(r, Y) \quad (3.87)$$

Assumindo que $S(r, Y)$ é muito pequeno, o que ocorre apenas quando o tamanho do dipolo é grande em comparação com $1/Q_s$, o limite inferior de integração se restringe aos regimes: $r^2 \gg 1/Q_s^2$, como também $r_1^2 \gg 1/Q_s^2$ e $r_2^2 \gg 1/Q_s^2$.

Para resolver a integral acima, primeiramente é necessário trabalhar com o termo $d^2 r$, sendo útil lembrar de algumas propriedades de integração, como o caso abaixo, que transforma $d^2 r$ em dr^2 :

$$\int r d^2 r d\phi f(r) = 2\pi \int r dr^2 f(r) = 2\pi \int dr^2 f(r) \quad (3.88)$$

onde $r = (z - y)$ e $f(r) = 1/r^2$. Note que a integral do meio em (3.88) é a mesma integral em (3.87), no entanto sem o termo 2, logo por simetria, esse fator deve aparecer pelo fato das regiões dominadas pelas integrais: $1/Q_s \ll r_1 \ll r$, logo $r \sim r_2$ ou $1/Q_s \ll r_2 \ll r$ onde $r \sim r_1$. Desta forma a equação (3.87) assume a forma:

$$\frac{\partial}{\partial Y} S(r, Y) = -2\pi \frac{\alpha N_c}{2\pi^2} \int_{1/Q_s^2}^{r^2} dr_2^2 \frac{1}{r_2^2} S(r, Y) \quad (3.89)$$

com $N_c = \bar{\alpha}\pi/\alpha$. Chamando $r_2^2 = x$, teremos uma integral do tipo:

$$\frac{\partial}{\partial Y} S(r, Y) = -\bar{\alpha} \int_{1/Q_s^2}^{r^2} \frac{dx}{x} S(r, Y) \quad (3.90)$$

resolvendo e aplicando os limites de integração:

$$\frac{\partial}{\partial Y} S(r, Y) = -\bar{\alpha} [\ln(r^2) - \ln(1/Q_s^2)] \quad (3.91)$$

dado que $\ln(1/Q_s^2) = \ln(1) - \ln(Q_s^2)$:

$$\frac{\partial}{\partial Y} S(r, Y) = -[\ln(r^2) + \ln(Q_s^2)] S(r, Y) = -\bar{\alpha} \ln[r^2 Q_s^2(Y)] S(r, Y) \quad (3.92)$$

Definindo a variável de escalamento como $\xi \equiv \ln[r^2 Q_s^2(Y)]$ e derivando [KOV-CHEGOV; LEVIN, 2012]:

$$\frac{\partial \xi}{\partial Y} = \frac{\partial \ln[r^2 Q_s^2(Y)]}{\partial Y} = c\bar{\alpha}_s \quad (3.93)$$

onde c é uma constante. Podemos escrever $\partial S(r, Y)/\partial Y$ como

$$\frac{\partial S}{\partial Y} = \frac{\partial S}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial Y} \quad (3.94)$$

logo,

$$\frac{\partial S}{\partial \xi} c\bar{\alpha} = -\bar{\alpha} \ln[r^2 Q_s^2(Y)] S(r, Y) \quad (3.95)$$

assim,

$$\frac{\partial S}{\partial \xi} = -\frac{1}{c} \xi S(r, Y) \quad (3.96)$$

a qual possui solução do tipo

$$S(\xi) = S_0 e^{-\xi^2/2c} \quad (3.97)$$

Aplicando tal resultado para a amplitude de espalhamento $N(r, Y)$:

$$N(r, Y) = 1 - S_0 e^{-\ln^2[r^2 Q_s^2(Y)]/2c} \quad (3.98)$$

que é conhecida como expressão de Levin-Tuchin [SOUZA, 2007; CAZAROTO, 2009].

3.3 Escalamento geométrico

O escalamento geométrico é considerado uma das propriedades fenomenológicas mais interessantes em pequeno x de Bjorken, ou em grande rapidez $Y = \ln(1/x)$. Essa propriedade foi confirmada pelo DIS inclusivo em altas energias em experimentos realizados em HERA [STASTO, 2004; MARQUET; PESCHANSKI; SOYEZ, 2007], sendo estendido para casos exclusivos [KOWALSKI; MOTYKA; WATT, 2006]. Por meio desta propriedade a seção de choque total $\sigma_{\text{tot}}^{\gamma^*p \rightarrow X}(Y, Q^2)$ depende exclusivamente de apenas uma variável, τ , e não de Y e Q^2 separadamente [MUNIER; PESCHANSKI, 2003; STASTO, 2004; MARQUET; PESCHANSKI; SOYEZ, 2007; IANCU; ITAKURA; MCLERRAN, 2002], conforme mostra a relação abaixo:

$$\sigma_{\text{tot}}^{\gamma^*p \rightarrow X}(Y, Q^2) = \sigma_{\text{tot}}^{\gamma^*p \rightarrow X}(\tau) \quad (3.99)$$

onde a variável τ é dada por:

$$\tau = \frac{Q^2}{Q_s^2(Y)} \quad (3.100)$$

em que Q^2 é a virtualidade do fóton e $Q_s^2(Y)$ é a escala de saturação, dada pela relação:

$$Q_s^2(Y) = Q_0^2 e^{\lambda Y} \quad (3.101)$$

com $\lambda \sim 0,3$ e $Q_0 \sim 0,1 \text{ GeV}$ [IANCU; ITAKURA; MCLERRAN, 2002].

A comparação de duas regiões distintas na Figura 12, a qual apresenta dados da seção de choque total $\sigma_{\text{tot}}^{\gamma^*p}$ em função de τ , mostra que o escalamento geométrico está delimitado em pequenas regiões ($x < 0,01$). Podemos observar que na figura da esquerda os dados se sobrepõem em uma única curva. Já para valores grandes de x , figura da direita, a propriedade deixa de ser válida.

Uma das quantidades de maior interesse neste trabalho, é a amplitude de espalhamento dipolo-próton, a qual descreve a interação do dipolo com o próton, obedecendo à equação BK, originalmente obtida no espaço de coordenadas. No caso simplificado, em que a dependência em b é desconsiderada, e trabalha-se no espaço de momentum, mostrou-se que essa equação admite soluções de ondas progressivas, a qual se traduz no escalamento geométrico [MUNIER; PESCHANSKI, 2003]. Esta propriedade é evidenciada nas soluções analíticas da equação BK obtidas nas expressões (3.84) e (3.98), as quais mostram uma característica comum: a dependência na variável de escalamento $r^2 Q_s^2$.

A propriedade do escalamento geométrico em termos da amplitude também pode ser obtida em casos mais gerais. Além do espaço de coordenadas, pode ser obtida tanto no espaço de momentum completo e simplificado, quanto no espaço misto, conforme descrito nos itens abaixo:

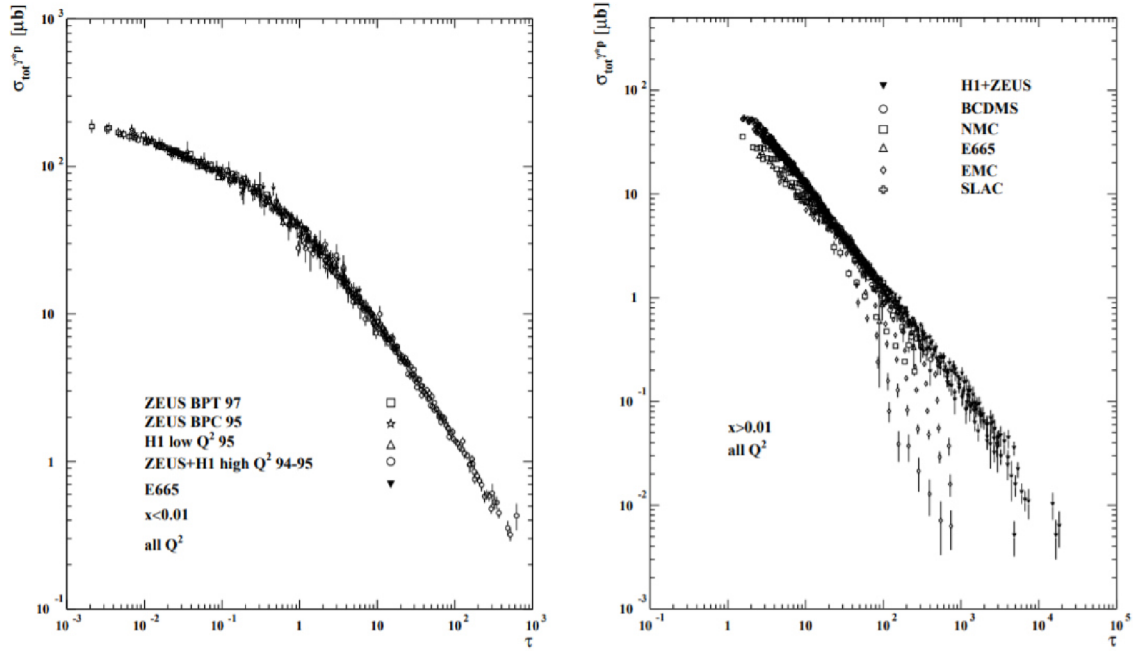


Figura 12 – Seção de choque total do processo $\gamma^*p \rightarrow X$ em função da escala τ . Esquerda: Dados experimentais na região de $x < 0.01$. Direita: Dados experimentais na região $x > 0.01$ [STASTO; GOLEC-BIERNAT; KWIECINSKI, 2001].

- No espaço de coordenadas, com dependência em $\mathbf{r}$ e Y , a expressão é dada por:

$$N(\mathbf{r}, Y) = N(r^2 Q_s^2(Y)) \quad (3.102)$$

em que a escala de saturação é parametrizada como:

$$Q_s^2(Y) = Q_0^2 e^{\lambda Y} \quad (3.103)$$

- No espaço de momentum completo (*full momentum space*) [MARQUET; PESCHANSKI; SOYEZ, 2005], com dependência no momentum do dipolo $\mathbf{k}$ e no momentum transferido $\mathbf{q}$, a amplitude é dada por:

$$N(\mathbf{k}, \mathbf{q}, Y) = N\left(\frac{\mathbf{k}^2}{Q_s^2(\mathbf{q}, Y)}\right) \quad (3.104)$$

onde Q_s^2 é:

$$Q_s^2(\mathbf{q}, Y) = \mathbf{q}^2 e^{\lambda Y} \quad (3.105)$$

A expressão da amplitude pode ser obtida por meio de uma transformada de Fourier dupla [MARQUET, 2006], saindo de $N(\mathbf{r}, \mathbf{b}, Y)$ para $\tilde{N}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, Y)$ [MARQUET; SOYEZ, 2005], por meio da expressão abaixo:

$$\tilde{N}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2\mathbf{x} d^2\mathbf{y}}{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{i(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{y}} N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (3.106)$$

A expressão (3.104) foi obtida por [MARQUET; SOYEZ, 2005] para o caso em que $\mathbf{k}$ é muito maior que o momentum transferido $\mathbf{q}$ e a escala do alvo k_0 . Neste caso, as soluções da equação BKFL se tornam superposições de ondas, e portanto, assumem, soluções de ondas progressivas para a equação BK.

- No espaço de momentum simplificado [MARQUET; SOYEZ, 2005], tem-se a dependência apenas no parâmetro $\mathbf{k}$:

$$N(Y, \mathbf{k}) = N\left(\frac{\mathbf{k}^2}{Q_s^2(Y)}\right) \quad (3.107)$$

em que:

$$Q_s^2(Y) = Q_0^2 e^{\lambda Y} \quad (3.108)$$

Os autores Marquet, Peschanski e Soyez [MARQUET; PESCHANSKI; SOYEZ, 2005] mostraram que as soluções de ondas progressivas para o caso *forward*, $q = 0$, podem ser estendidas, incluindo o momentum $\mathbf{q}$, desde que $k \gg q$. Neste caso, denominado como espaço misto, a escala de saturação apresenta uma forma semelhante do espaço de coordenadas, porém, ela é proporcional a $\mathbf{q}$.

- A amplitude no espaço misto é dada pela relação:

$$N(\mathbf{r}, \mathbf{q}; Y) = N(r^2 Q_s^2(\mathbf{q}, Y)) \quad (3.109)$$

onde a escala de saturação para momentum transferido intermediário é:

$$Q_s^2(\mathbf{q}, Y) = \mathbf{q}^2 e^{\lambda Y} \quad (3.110)$$

O fato das soluções de ondas progressivas – bem como a propriedade de escalamento geométrico – serem obtidas tanto no espaço de momentum quanto no espaço misto, como mostrado acima, motivaram Marquet, Peschanski e Soyez a desenvolverem o modelo MPS [MARQUET; PESCHANSKI; SOYEZ, 2007], um modelo de saturação para a amplitude, o qual será abordado no próximo capítulo.

4 Processos exclusivos em colisões ep e o Modelo MPS

Marquet, Peschanski e Soyez desenvolveram o modelo fenomenológico MPS [MARQUET; PESCHANSKI; SOYEZ, 2007], o qual se tornou bastante adequado para o estudo da produção exclusiva de mésons vetoriais (processo $\gamma^*p \rightarrow Vp$ onde $V = \gamma, \rho, \phi, J/\Psi$), sendo esse, um dos possíveis estados finais do DIS, onde o próton sai intacto da colisão juntamente com a produção de apenas um méson vetorial. Originalmente este modelo foi utilizado para a descrição de dados de HERA para a produção exclusiva de mésons vetoriais em colisões ep , com uma boa qualidade da descrição dos dados experimentais. No entanto, este modelo foi atualizado recentemente, em 2022, para dados mais recentes da produção exclusiva dos mésons ρ e J/Ψ [XIE; GONCALVES, 2022]. Neste capítulo será apresentado um breve histórico do modelo MPS, bem como a comparação da seção de choque obtida a partir do modelo atualizado em [XIE; GONCALVES, 2022] com dados mais recentes da produção exclusiva dos mésons vetoriais ρ e J/Ψ , utilizando o modelo de função de onda *Boosted Gaussian* (BG). A análise será estendida para o méson ϕ , para verificar com que qualidade do modelo MPS atualizado descreve dados para este méson, visto que no trabalho [XIE; GONCALVES, 2022] tal análise não é discutida.

4.1 Produção exclusiva de mésons vetoriais

Um dos possíveis estados finais do DIS é a produção exclusiva de mésons vetoriais, conforme representado na Figura 13. Semelhante à descrição realizada na Figura 8, inicialmente o fóton emitido pelo elétron se separa em um dipolo com tamanho r e fração de momentum z e $1 - z$, momentum do quark e anti-quark respectivamente. Esse fóton interage elasticamente com o próton [MARQUET; PESCHANSKI; SOYEZ, 2007], com transferência de momentum $\mathbf{q}$ – interação representada pela elipse – sendo que no estado final tem-se um próton intacto e a produção exclusiva de apenas uma partícula, podendo ser um méson vetorial $\rho, \phi, J/\Psi$ ou um fóton real, γ , com um *gap* de rapidez separando esses estados.

A expressão da seção de choque diferencial para o processo $\gamma^*p \rightarrow Vp$ onde $V = \rho, \phi, J/\Psi$ ou γ é [KOWALSKI; MOTYKA; WATT, 2006]:

$$\frac{d\sigma_{T,L}^{\gamma^*p \rightarrow Vp}}{dt} = \frac{1}{16\pi} \left[1 + \left(\beta_{T,L}^{(V)} \right)^2 \right] \left| \mathcal{A}_{T,L}^{\gamma^*p \rightarrow Vp} \right|^2 \quad (4.1)$$

em que $t = -\mathbf{q}^2$ e $\left(\beta_{T,L}^{(V)} \right)^2$ é responsável pela contribuição da parte real da amplitude e é

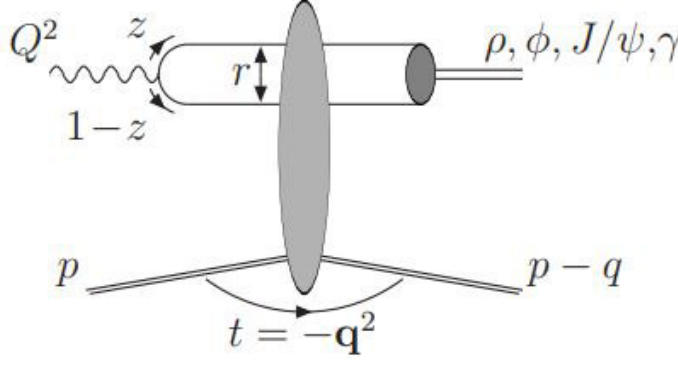


Figura 13 – Diagrama da produção exclusiva de partículas, podendo ser um méson vetorial ou fóton real no estado final [MARQUET; PESCHANSKI; SOYEZ, 2007].

obtido utilizando as relações abaixo [XIE; GONCALVES, 2022]:

$$\beta_{T,L}^{(V)} = \tan\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) \quad \text{sendo que} \quad \lambda = \frac{\partial \log(\mathcal{A}_{T,L}^{\gamma^* p \rightarrow Vp})}{\partial \log(1/x)} \quad (4.2)$$

Na expressão 4.1, $\mathcal{A}_{T,L}^{\gamma^* p \rightarrow Vp}$ é a parte imaginária da amplitude de espalhamento, dada por:

$$\mathcal{A}_{T,L}^{\gamma^* p \rightarrow Vp} = \int d^2x d^2y \int_0^1 dz \Phi_{T,L}^{\gamma^* V}(z, \mathbf{x} - \mathbf{y}; Q^2, M_V^2) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{y}} N(\mathbf{x}, \mathbf{y}; Y) \quad (4.3)$$

onde $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são as posições transversais do quark e antiquark respectivamente, os quais formam o dipolo. A quantidade $N(\mathbf{x}, \mathbf{y}; Y)$, denominada como amplitude de espalhamento dipolo-próton, carrega toda a dependência de energia através da rapidez Y , que é obtida por meio do quadrado da energia do centro de massa, W , da massa dos mésons M_V , e da virtualidade Q^2 , conforme expressão abaixo:

$$Y = \log\left(\frac{W^2 + Q^2}{M_V^2 + Q^2}\right) \quad (4.4)$$

Neste formalismo, é conveniente realizar uma troca de variável, de modo que a amplitude de espalhamento dipolo-próton é escrita como uma função de $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ e $\mathbf{b} = z\mathbf{x} + (1-z)\mathbf{y}$. Assim, as integrais passam a ser em termos de $\mathbf{b}$ e $\mathbf{r}$ e a expressão da seção de choque diferencial é dada por:

$$\frac{d\sigma_{T,L}^{\gamma^* p \rightarrow Vp}}{dt} = \frac{1}{16\pi} \left[1 + (\beta_{T,L}^{(V)})^2\right] \left| \int d^2r \int_0^1 dz \Phi_{T,L}^{\gamma^* V}(z, \mathbf{r}; Q^2, M_V^2) e^{-iz\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \tilde{N}(\mathbf{r}, \mathbf{q}; Y) \right|^2 \quad (4.5)$$

onde $\tilde{N}(\mathbf{r}, \mathbf{q}; Y)$ é dada pela Transformada de Fourier:

$$\tilde{N}(\mathbf{r}, \mathbf{q}; Y) = \int d^2b e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}} N(\mathbf{r}, \mathbf{b}; Y) \quad (4.6)$$

Para as expressões (4.3) e (4.5) é necessário obter as funções de sobreposição $\Phi_{T,L}^{\gamma^* V}$, que segundo [KOWALSKI; MOTYKA; WATT, 2006], descrevem a flutuação do fóton com

polarização transversal (T) ou longitudinal (L) em um dipolo, seguido da formação do estado final.

A função de sobreposição transversal é dada por [KOWALSKI; MOTYKA; WATT, 2006]:

$$\Phi_T^{\gamma^*V}(z, \mathbf{r}, Q^2) = \hat{e}_f e \frac{N_c}{\pi z(1-z)} \left\{ m_f^2 K_0(\epsilon r) \phi_T(r, z) - (z^2 + (1-z)^2) \epsilon K_1(\epsilon r) \partial_r \phi_T(r, z) \right\} \quad (4.7)$$

e a função de sobreposição longitudinal é dada por [KOWALSKI; MOTYKA; WATT, 2006]:

$$\Phi_L^{\gamma^*V}(z, \mathbf{r}, Q^2) = \hat{e}_f e \frac{N_c}{\pi} 2Qz(1-z) K_0(\epsilon r) \left[M_V \phi_L(r, z) + \delta \frac{m_f^2 - \nabla_r^2}{M_V z(1-z)} \phi_L(r, z) \right] \quad (4.8)$$

em que $e = \sqrt{4\pi\alpha_{em}}$, $\hat{e}_f$ é a carga efetiva do méson vetorial, $N_c = 3$ é o número de cores, M_V a massa do méson, m_f a massa do quark com sabor f , e $\nabla_r^2 \equiv [(1/r)\partial_r + \partial_r^2]$.

As funções $\phi_{L,T}$ são funções de onda dos mésons vetoriais, as quais existem diversos modelos encontrados na literatura. Aqui mencionamos os modelos utilizados pelas referências base, que são o modelo *Boosted Gaussian* (BG) e *Light Cone Gauss* (LCG). Para BG, considera-se $\delta = 1$ e as funções transversais e longitudinais são dadas por:

$$\phi_{T,L}(z, r) = N_{T,L} z(1-z) \exp \left(-\frac{m_f^2 R^2}{8z(1-z)} - \frac{2z(1-z)r^2}{R^2} + \frac{m_f^2 R^2}{2} \right) \quad (4.9)$$

onde os parâmetros $N_{T,L}$ e R são livres e são respectivamente:

Tabela 1 – Parâmetros fixos do modelo de função de onda BG.

Méson	$R^2(GeV^{-2})$	N_L	N_T
ρ	12,9	0,853	0,911
ϕ	11,2	0,825	0,919
J/Ψ	2,3	0,575	0,578

Para a função LCG, considera-se $\delta = 0$ e as expressões longitudinal e transversal são respectivamente:

$$\begin{aligned} \phi_T(z, r) &= N_T [z(1-z)]^2 \exp \left(-\frac{r^2}{2R_T^2} \right) \\ \phi_L(z, r) &= N_L z(1-z) \exp \left(-\frac{r^2}{2R_L^2} \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde $N_{T,L}$ e $R_{T,L}$ estão determinados na tabela abaixo:

Além dos parâmetros mencionados nas Tabelas 1 e 2, utiliza-se também parâmetros denominados como comuns, como apresentados na Tabela 3.

A partir dos modelos BG e LCG, é possível realizar combinações que resultam em outros modelos como é o caso do modelo BLL e BLB, os quais serão mencionados nas próximas seções.

Tabela 2 – Parâmetros fixos do modelo de função de onda LCG.

Méson	$R_L^2 (GeV^{-2})$	R_T^2	N_L	N_T
ρ	10,4	21,0	1,79	4,47
ϕ	9,7	16,0	1,41	4,75
J/Ψ	3,0	6,5	0,83	1,23

Tabela 3 – Parâmetros comuns para os três mésons.

Méson	$M_V (GeV)$	$m_f (GeV)$	$\hat{e}_f$
ρ	0,776	0,14	$1/\sqrt{2}$
ϕ	1,019	0,14	1/3
J/Ψ	3,097	1,4	2/3

4.2 Modelo de Marquet-Peschanski-Soyez (MPS)

Marquet, Peschanski e Soyez propuseram um modelo de saturação para a amplitude de espalhamento $\tilde{N}(\mathbf{r}, \mathbf{q}; Y)$ [MARQUET; PESCHANSKI; SOYEZ, 2007]. Conhecido como modelo MPS, é inspirado em um importante resultado baseado na equação de Balitsky-Kovchegov: no espaço misto a amplitude apresenta propriedade de escalamento geométrico, conforme mostra a expressão abaixo, considerando que $r = |\mathbf{r}|$:

$$\tilde{N}(\mathbf{r}, \mathbf{q}; Y) = 2\pi R_p^2 f(\mathbf{q}) N(r^2 Q_s^2(Y, \mathbf{q})) \quad (4.11)$$

onde R_p é o raio do próton, $f(\mathbf{q}) = \exp(-B\mathbf{q}^2)$ é um fator de forma do próton e $N(r^2 Q_s^2(Y, \mathbf{q}))$ é a amplitude de espalhamento do modelo de saturação de Iancu, Itakura e Munier [IANCU; ITAKURA; MUNIER, 2004].

A escala de saturação da equação (4.11) é dada por:

$$Q_s^2(Y, \mathbf{q}) = Q_0^2 (1 + c\mathbf{q}^2) e^{\lambda Y} \quad (4.12)$$

a qual interpola as regiões de pequenas e intermediárias transferências de momentum.

A expressão final do modelo MPS, para momentum transferido diferente de zero, é dada por:

$$\tilde{N}(\mathbf{r}, \mathbf{q}; Y) = 2\pi R_p^2 e^{-B\mathbf{q}^2} N(r Q_s(Y, \mathbf{q}), Y) \quad (4.13)$$

A expressão (4.13) é uma extensão do caso *forward*, onde não há transferência de momentum durante a interação dipolo-próton, ou seja $\mathbf{q} = 0$, conforme mostra a expressão abaixo:

$$\tilde{N}(\mathbf{r}, \mathbf{q} = 0; Y) = 2\pi R_p^2 N(r^2 Q_s^2(Y)) \quad (4.14)$$

Neste caso, considerando $\mathbf{q} = 0$ na expressão (4.12), recuperamos o resultado:

$$Q_s^2 = Q_0^2 e^{\lambda Y} \quad (4.15)$$

A amplitude $N(rQ_s(Y, \mathbf{q}), Y)$ do modelo de saturação de Iancu, Itakura e Munier (IIM) [IANCU; ITAKURA; MUNIER, 2004], também conhecido por modelo de dipolo CGC [IANCU; ITAKURA; MUNIER, 2004; REZAEIAN; SCHMIDT, 2013], conecta duas regiões: para pequenos dipolos, ou seja, $\mathbf{r} \ll 1/Q_s$, a amplitude de espalhamento é baseada na solução da equação BFKL próximo a linha de saturação, conforme determinada na expressão (3.84). Já para dipolos maiores, $\mathbf{r} \gg 1/Q_s$, a amplitude de espalhamento engloba efeitos não lineares, sendo descrita pela equação de Levin-Tuchin, conforme determinada na expressão (3.98). As expressões são respectivamente:

$$N(\mathbf{r}Q_s(Y), Y) = \begin{cases} N_0 \left(\frac{\mathbf{r}^2 Q_s^2(Y)}{4} \right)^{\gamma_c} \exp \left[-\frac{\ln^2(\mathbf{r}^2 Q_s^2(Y)/4)}{2\kappa\lambda Y} \right] & \text{para } \mathbf{r}^2 Q_s^2(Y) \leq 4 \\ 1 - e^{-\alpha \ln^2(\beta \mathbf{r}^2 Q_s^2(Y))} & \text{para } \mathbf{r}^2 Q_s^2(Y) > 4 \end{cases} \quad (4.16)$$

Ambas as equações acima apresentam uma combinação de variáveis $r^2 Q_s^2$, sendo justamente a propriedade conhecida como escalamento geométrico. A primeira equação apresentada em (4.16) contém um termo que depende explicitamente de Y , o qual viola a propriedade do escalamento geométrico. Entretanto, este termo pode ser desprezado quando Y se torna muito grande e o termo exponencial tende a 1. Essa violação é esperada, sendo que em uma determinada região abaixo da linha de saturação também tem-se a propriedade do escalamento geométrico, conhecido como escalamento geométrico estendido.

O modelo IIM originalmente foi ajustado aos dados da função de estrutura F_2 de HERA, levando em conta apenas as contribuições dos três quarks mais leves na função de onda do fóton, $m_{u,d,s} = 0,14$ GeV. No entanto, Soyez [SOYEZ, 2007] realizou uma atualização deste ajuste, incluindo contribuições de quarks pesados, como o *charm* com massa $m_c = 1,4$ GeV e *bottom* com $m_b = 4,5$ GeV. A amplitude $N_0 = 0,7$ é um valor fixado, o qual é utilizado até hoje em ajustes. No trabalho de Iancu, Itakura e Munier [IANCU; ITAKURA; MUNIER, 2004], os autores testaram a dependência deste parâmetro em uma janela de valores, $(0,5; 0,7; 0,9)$, utilizando duas massas de quarks m_q diferentes. Os resultados mostram que o melhor valor obtido para χ_{red}^2 é com $N = 0,7$. Esse valor forneceu e continua fornecendo bons resultados, fazendo com que as variações em torno deste valor levem apenas a pequenas diferenças. O coeficiente $\kappa \approx 9,9$ é fixado pela solução da equação BFKL em ordem dominante [SOYEZ, 2007; IANCU; ITAKURA; MUNIER, 2004] e outros parâmetros como γ_c , x_0 , λ e σ_0 que estão presentes no cálculo da seção de choque total e diferencial, são obtidos por um ajuste aos dados de HERA para a função de estrutura F_2 .

As constantes α e β das expressões (4.16) são determinadas a partir da condição que a amplitude $N(rQ_s, Y)$ e sua derivada são contínuas em $r^2 Q_s^2 = 4$, resultando em

$$\alpha = -\frac{N_0^2 \gamma_c^2}{(1 - N_0)^2 \ln(1 - N_0)} \quad \beta = \frac{1}{2} (1 - N_0)^{-\frac{1-N_0}{N_0 \gamma_c}}. \quad (4.17)$$

Neste modelo, os parâmetros c e B mencionados são ajustados pelas condições experimentais: c está relacionado com a escala de saturação e B é a inclinação do fator de forma. Uma observação importante realizada pelos autores de [MARQUET; PESCHANSKI; SOYEZ, 2007] é que o fator de forma depende unicamente do fator B e assim, acaba sendo independente do méson vetorial criado no estado final. Então a diferença nos processos da produção de mésons vetoriais ou do fóton real vem exclusivamente das funções de onda, estando de acordo com as previsões da equação BK [MARQUET; PESCHANSKI; SOYEZ, 2005; MARQUET; SOYEZ, 2005]. Isto é, cada partícula é sensível a sua maneira dependendo da função de onda e assim, sentem a saturação de maneiras diferentes.

4.2.1 Ajuste original

Marquet, Peschanski e Soyez em seu trabalho [MARQUET; PESCHANSKI; SOYEZ, 2007], consideraram a forma da amplitude do modelo de saturação proposto por Iancu, Itakura e Munier [IANCU; ITAKURA; MUNIER, 2004], no entanto, em sua versão estendida [SOYEZ, 2007], a qual inclui quarks pesados. Os parâmetros utilizados no modelo original foram: $\lambda = 0,2197$, $Q_0 = 0,298$ GeV, $R_p = 3,34$ GeV⁻¹ onde R_p é o raio do próton, $\gamma_c = 0,7376$, $\kappa = 9,9$ e $N_0 = 0,7$. Além desses parâmetros, os parâmetros c e B obtidos do ajuste para cada modelo de função de onda foram:

Tabela 4 – Parâmetros c e B obtidos no ajuste original para os modelos BG e LCG e para as combinações BLL e BLB.

Parâmetros	BG	LCG	BLL	BLB
c (GeV ⁻²)	4,077	4,472	4,258	4,041
B (GeV ⁻²)	3,754	3,724	3,708	3,713

A diferença nos processos de produção de ρ , ϕ , J/Ψ ou γ vem totalmente das funções de onda, em que diferentes mésons vetoriais são sensíveis a diferentes tamanhos de dipolos e, portanto, sentem a saturação de maneira diferente. Os autores em seus ajustes realizaram algumas combinações para entender até que ponto a análise dependia do modelo usado para as funções de onda de mésons vetoriais. Testaram a dependência dos resultados com relação a duas escolhas de função de onda que segundo eles, provaram gerar bons resultados. Consideraram a função *Boosted Gaussian* (BG) para o méson ρ e *Light Cone Gauss* (LCG) para o méson ϕ . Além disso, realizaram combinações denominadas BLL e BLB:

- BLL – BG para ρ , LCG para ϕ e J/Ψ .
- BLB – BG para ρ , LCG para ϕ , BG para J/Ψ .

Para a análise utilizaram de 269 dados experimentais extraídos das colaborações ZEUS e H1 [ADLOFF et al., 2000; CHEKANOV et al., 2005a; CHEKANOV et al., 2004a; AKTAS et al., 2006a], sendo que dos quatro modelos de funções de onda citados acima, a melhor descrição foi gerada pelo modelo BLB, o qual obteve um $\chi^2_{red} = 1,186$.

Os autores constataram que há uma dependência significativa na escolha da função de onda. A função LCG foi significativamente melhor para o méson ϕ , enquanto que BG descreveu melhor o méson ρ . Concluíram então que obtiveram uma descrição global satisfatória, onde as combinações BLB e BLL melhoraram claramente os resultados de χ^2_{red} . Esses resultados mostram, segundo os autores, uma consistência entre as previsões da QCD no regime de saturação e as medições realizadas em HERA. Também realizaram previsões para o fóton real, γ , (DVCS, em inglês *Deeply Virtual Compton Scattering*) obtendo uma boa descrição.

4.2.2 Atualização do modelo MPS

Ya-Ping Xie e Victor P. Gonçalves [XIE; GONCALVES, 2022] muito recentemente (início do ano de 2022) atualizaram os parâmetros do modelo MPS para a produção exclusiva dos mésons vetoriais ρ e J/Ψ utilizando dados mais recentes de HERA. O principal objetivo dos autores era realizar a atualização dos parâmetros do modelo e verificar se a análise de processos exclusivos em futuros colisores ep como *Electron - Ion Colliders* (EIC) [BOER et al., 2011; ACCARDI et al., 2016; ASCHENAUER et al., 2019] e *Large Hadron Electron Collider* (LHeC) [AGOSTINI et al., 2021], poderia ser usado para tratamentos distintos da dinâmica da QCD em altas energias.

Realizaram atualizações para as funções de onda BG e LCG, incluindo o fator de *skewedness* [REZAEIAN; SCHMIDT, 2013] – também conhecido por fator R_g – na expressão da seção de choque diferencial (equação 4.1). Para a atualização do modelo, os autores utilizaram dados experimentais na faixa de virtualidade $Q^2 \in 0.045 - 45 \text{ GeV}^2$ e $x \leq 0,01$. Obtiveram os resultados apresentados na Tabela 5:

Tabela 5 – Parâmetros atualizados do modelo MPS obtidos a partir do ajuste de dados mais recentes de HERA.

	$R_p(\text{GeV}^{-1})$	γ_s	λ	x_0	$c(\text{GeV}^{-2})$	$B(\text{GeV}^{-2})$
BG	3,44	0,720	0,207	$7,97 \times 10^{-6}$	1,35	3,25
LCG	3,46	0,728	0,205	$8,01 \times 10^{-6}$	1,48	3,09

Ao observar a Tabela 5, percebemos que os valores para R_p , γ_s , λ e x_0 são próximos para os dois modelos de função de onda. No entanto, o valor de χ^2_{red} mostra o quanto os resultados são dependente do modelo escolhido. Para a função de onda BG obtiveram um valor de $\chi^2_{red} = 1,39$, já para a função de onda LCG, $\chi^2_{red} = 1,13$, sendo então o melhor

valor obtido. Assim, os autores restringiram a análise ao modelo LCG, a qual descreveu muito bem os dados experimentais.

A inclusão do fator R_g leva em consideração o fato que os glúons anexados ao par $q\bar{q}$ podem carregar diferentes frações de momentum do próton [REZAEIAN; SCHMIDT, 2013], tanto no processo de produção exclusiva de mésons vetoriais quanto para a produção de um fóton real. Desta forma, a seção de choque diferencial dos processos difrativos exclusivos pode então ser escrita em termos da amplitude de espalhamento como [XIE; GONCALVES, 2022]:

$$\frac{d\sigma_{T,L}^{\gamma^*p \rightarrow Ep}}{dt} = \frac{1}{16\pi} \left[1 + \left(\beta_{T,L}^{(V)} \right)^2 \right] \left| \mathcal{A}_{T,L}^{\gamma^*p \rightarrow Ep} \right|^2 R_g^2 \quad (4.18)$$

onde β é dado por:

$$\beta = \tan \left(\frac{\pi}{2} \bar{\delta} \right), \quad \text{e} \quad \bar{\delta} = \frac{\partial \ln (\text{Im } \mathcal{A}_{T,L})}{\partial \ln 1/x} \quad (4.19)$$

O fator R_g é calculado como [XIE; GONCALVES, 2022; SHUVAEV et al., 1999]:

$$R_g = \frac{2^{2\bar{\delta}+3} \Gamma(\bar{\delta} + 5/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\bar{\delta} + 4)} \quad (4.20)$$

Visto que o modelo MPS foi atualizado para o modelo BG e LCG, e que os autores de [XIE; GONCALVES, 2022] plotaram apenas curvas com LCG, a próxima seção apresenta alguns resultados obtidos para os mésons ρ , ϕ e J/Ψ utilizando a função BG. Além do cálculo de χ_{red}^2 para ϕ , o qual também não foi incluso na análise de [XIE; GONCALVES, 2022].

4.3 Resultados

Nesta seção estão apresentados os resultados obtidos para a produção exclusiva dos mésons vetoriais ρ , ϕ e J/Ψ . Foi elaborado um código em linguagem **Fortran** e utilizado o programa **QtGrace** para a obtenção das curvas teóricas, utilizando os parâmetros atualizados recentemente por Ya-Ping e Victor Gonçalves [XIE; GONCALVES, 2022].

No trabalho mais recentes com os parâmetros atualizados, os autores realizaram o ajuste aos dados experimentais e obtiveram o valor de χ_{red}^2 apenas para as funções de onda BG e LCG. Porém, as curvas foram apresentadas apenas utilizando LCG. Neste trabalho escolhemos plotar algumas curvas com a função BG para os mésons ρ e J/Ψ , para confirmar os resultados obtidos pelos autores. Também realizamos uma extensão para o méson ϕ , visto que no trabalho [XIE; GONCALVES, 2022] essa análise também não é realizada.

Primeiramente, fixou-se os parâmetros do trabalho [XIE; GONCALVES, 2022] e calculou-se teoricamente as seções de choque total e diferencial no referencial de dipolo

com a inclusão do fator R_g . Os resultados foram comparados com dados mais recentes de HERA para a produção exclusiva dos mésons ρ [CHEKANOV et al., 2007] [AARON et al., 2010], méson ϕ [AARON et al., 2010] [CHEKANOV et al., 2005b] e méson J/Ψ [CHEKANOV et al., 2004b] [AKTAS et al., 2006b].

Para analisar quantitativamente a relação entre os resultados obtidos e o esperado, realizamos o cálculo do χ^2/N_{pts} (onde N_{pts} é o número de pontos). A quantidade χ^2 reduzido é definida como [VUOLO, 1996]:

$$\chi_{red}^2 = \frac{\chi^2}{\nu} \quad (4.21)$$

onde ν é o número de graus de liberdade do ajuste. Se N_{pts} é o número de pontos e p é o número de parâmetros ajustados, $\nu = N_{pts} - p$. Neste trabalho iremos trabalhar com parâmetros fixos, logo, $\chi_{red}^2 = \chi^2/N_{pts}$.

Foram construídos gráficos da seção de choque diferencial ($d\sigma/dt$) em função do momentum transferido ($|t| = q^2$), seção de choque total (σ) em função de Q^2 e seção de choque total (σ) em função da energia (W) para diferentes valores de virtualidade. Em cada gráfico as barras de erros indicam as incertezas estatísticas e sistemáticas somadas em quadratura.

4.3.1 Discussão dos resultados

Nesta seção estão apresentados os gráficos obtidos para os mésons ρ , ϕ e J/Ψ , bem como a discussão em torno dos resultados. Importante salientar que neste trabalho não realizamos novos ajustes, e sim, fixamos os parâmetros obtidos no trabalho mais recente de Ya-Ping e Victor Gonçalves. Nos gráficos abaixo, os pontos são os dados experimentais retirados das colaborações H1 e ZEUS e as curvas são os resultados obtidos. Outro detalhe a ser comentado, é que em alguns gráficos, os dados foram multiplicados por potências de base 10, para uma melhor separação dos dados e melhor visualização dos resultados.

Os gráficos da Figura 14 apresentam uma comparação das previsões do modelo MPS com os dados experimentais de HERA para a produção exclusiva do méson ρ referente à seção de choque diferencial em função do momentum $|t|$. No gráfico da esquerda estão os resultados referente aos dados da colaboração ZEUS com energia de $W = 90$ GeV e o gráfico da direita, dados da colaboração H1 com energia de $W = 75$ GeV, respectivamente. Conforme mostram os gráficos, no geral, as curvas se ajustam bem aos dados experimentais. Apenas é visualizado uma superestimação de alguns dados em momentum transferido maiores que $0,5 \text{ GeV}^2$ no caso de ZEUS.

Já os gráficos da Figura 15 mostram os resultados referente à seção de choque diferencial em função do momentum $|t|$ para o méson J/Ψ . Em ambos os gráficos ocorre uma superestimação dos dados experimentais para virtualidades até $0,5 \text{ GeV}^2$. Já para virtualidades maiores, no caso de dados de H1, ocorre uma subestimação dos dados.

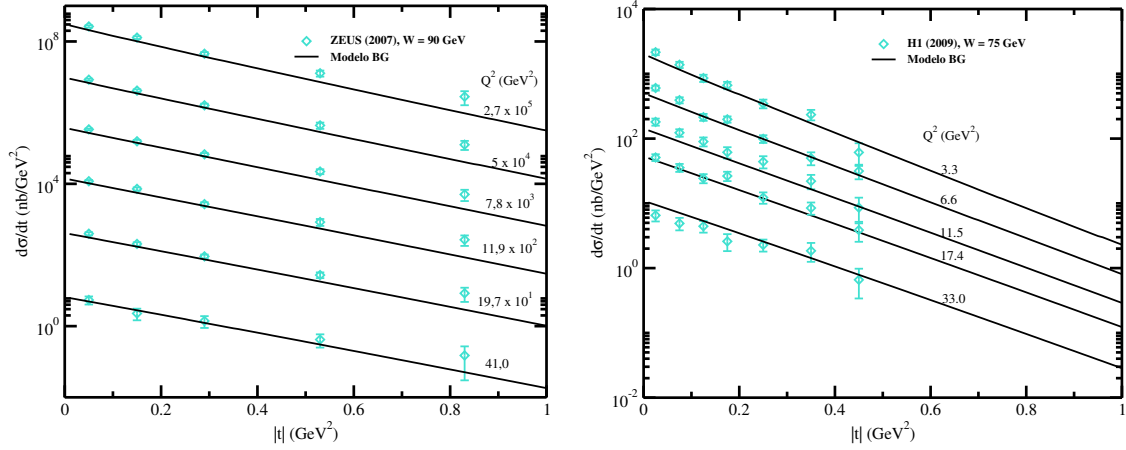


Figura 14 – Seção de choque diferencial em função do momentum transferido. Comparação da previsão do modelo MPS com os dados mais recentes do méson ρ das colaborações ZEUS e H1, respectivamente.

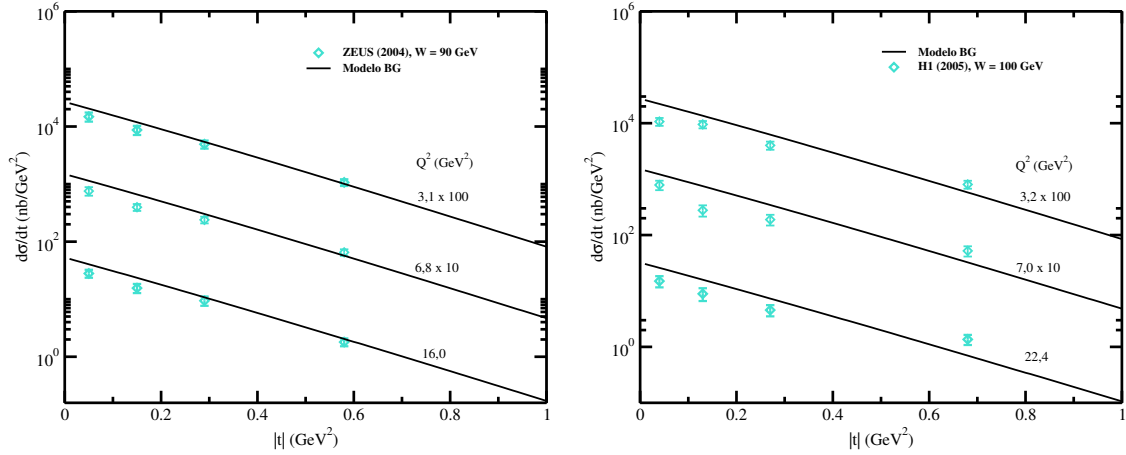


Figura 15 – Seção de choque diferencial em função do momentum transferido. Comparação da previsão do modelo MPS com os dados mais recentes do méson J/Ψ das colaborações ZEUS e H1, respectivamente.

Na Figura 16 estão os resultados obtidos para a seção de choque total em função da virtualidade Q^2 para o méson J/Ψ , os quais também estão de acordo com as previsões teóricas. Conseguimos visualizar que as curvas descrevem bem os dados experimentais em ambas as colaborações, exceto para alguns dados de H1 com virtualidades menores. Mas no geral, são bons resultados obtidos.

Por fim, são apresentados os resultados para o méson ϕ de todos os observáveis físicos, visto que no trabalho [XIE; GONCALVES, 2022] esta análise não é realizada, além do cálculo de χ^2_{red} , para uma análise quantitativa. Os primeiros gráficos apresentados na Figura 17 são referentes à seção de choque diferencial em função do momentum $|t|$. O gráfico da esquerda apresenta dados de ZEUS com energia de 75 GeV e o gráfico da direita, dados de H1 também com energia de 75 GeV. Para dados de ZEUS obtemos um bom ajuste para todas as virtualidades incluídas, o que não acontece para dados de H1. Neste caso, percebemos uma discrepância muito grande das curvas em relação aos dados,

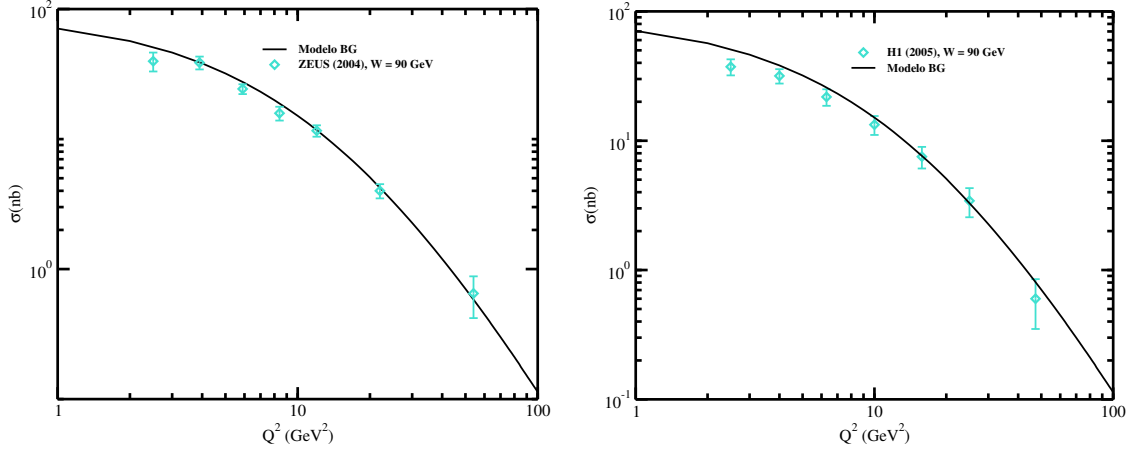


Figura 16 – Seção de choque total em função da virtualidade Q^2 . Comparação entre a previsão do modelo MPS com dados mais recentes da produção do méson J/Ψ , de ZEUS e H1, respectivamente.

principalmente para a virtualidade $Q^2 = 15,8 \text{ GeV}^2$. Resultados como estes influenciam no resultado global do χ_{red}^2 , como veremos mais adiante.

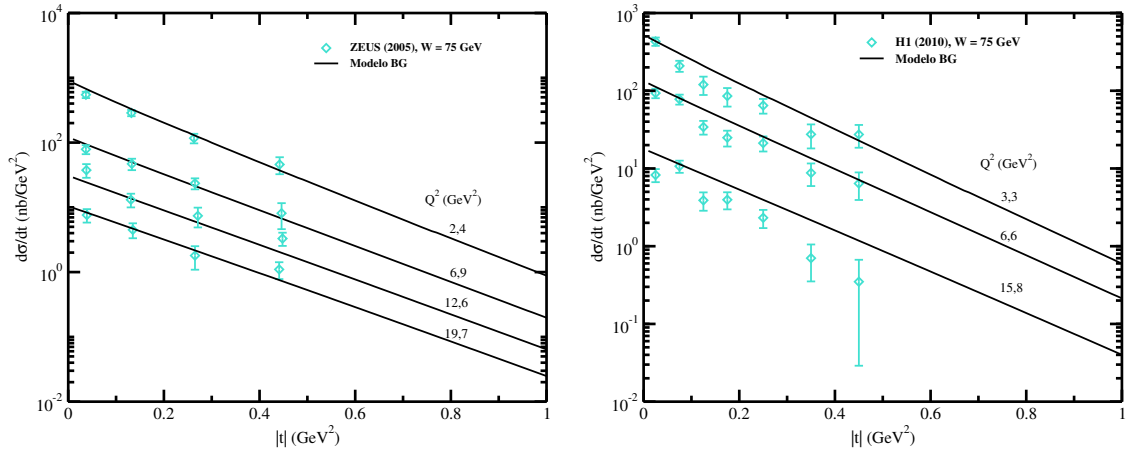


Figura 17 – Seção de choque diferencial em função do momentum transferido. Comparação com dados mais recentes da produção exclusiva do méson ϕ , para dados de ZEUS e H1, respectivamente.

Os gráficos na Figura 18 mostram os resultados obtidos para a seção de choque total em função da virtualidade Q^2 . Para dados de ZEUS (gráfico da esquerda), conforme aumenta o valor da virtualidade ocorre uma superestimação dos dados. Já no gráfico da direita, a curva descreve bem praticamente todos os pontos experimentais.

Os últimos resultados são gráficos da seção de choque total em função da energia W , conforme mostra a Figura 19. Para este observável obtemos um resultado considerado razoável para dados de ZEUS (gráfico da esquerda), no que tange as virtualidades de 3,8 e 6,5 GeV. Para uma virtualidade maior, como o caso de 13 GeV, já acontece uma subestimação dos dados. No gráfico da direita, onde estão os dados de H1, os resultados não são satisfatórios para nenhuma virtualidade testada. Há uma discrepância enorme

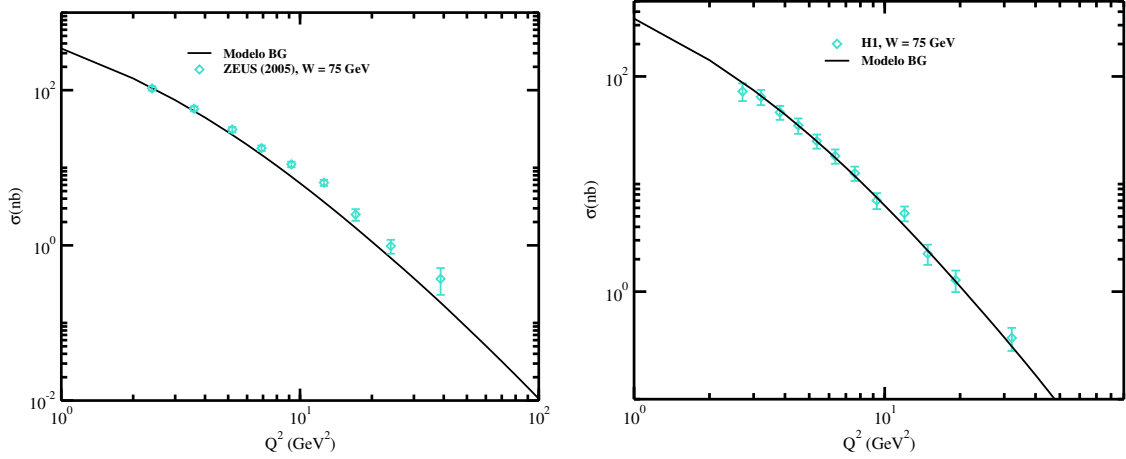


Figura 18 – Seção de choque total em função da virtualidade Q^2 . Comparação entre os dados mais recentes da produção do méson ϕ com as previsões do modelo MPS.

tanto entre os próprios pontos quanto em relação à curva.

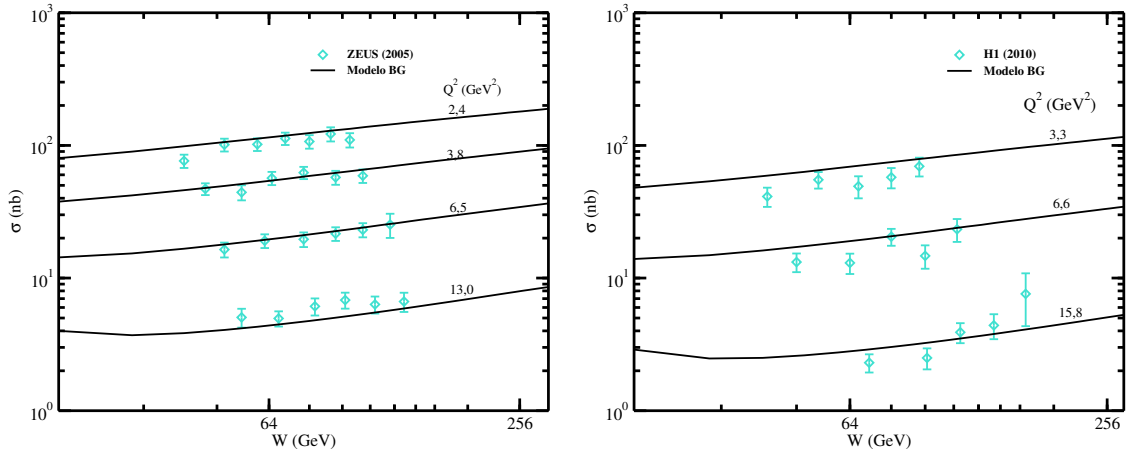


Figura 19 – Seção de choque total em função da energia W . Comparação entre dados de ZEUS e H1, respectivamente com as previsões do modelo MPS.

Para o méson ϕ , o valor calculado de χ^2_{red} para a seção de choque total e diferencial estão dispostos na Tabela 6. O resultado global não indica uma descrição favorável. Isso pelo fato que para ser considerado um resultado satisfatório, o valor de χ^2_{red} tem que estar entre 0 e 1, sempre mais próximo a 1. No entanto, valores um pouco acima de 1, como o caso do trabalho de Ya-Ping e Victor Gonçalves, onde os mesmos encontraram valores de 1, 13 e 1, 39 ainda são considerados razoáveis na literatura.

Neste trabalho, obtemos um valor global de 2,49, conforme mostra a tabela, sendo considerado um valor fora do limite de confiabilidade. Esse resultado pode ser um dos possíveis motivos dos autores de [XIE; GONCALVES, 2022] não realizarem análise para este méson, pois o mesmo iria degradar o resultado global obtido pelos autores.

Visto o resultado obtido, faz-se então necessário testar combinações de funções de

Tabela 6 – Resultado do cálculo de χ_{red}^2 para o méson ϕ com 100 dados experimentais para dois observáveis: seção de choque total e diferencial.

Observável	N_{pts}	BG
σ	51	1,79
$d\sigma/dt$	49	3,22
Total	100	2,49

onda para uma possível melhora dos resultados, como é realizado no trabalho original, visto que há uma dependência significativa na escolha da função para cada méson.

5 Conclusões

Um dos principais objetivos da física hadrônica de altas energias é procurar sinais da saturação dos pártons. Isso motivou o desenvolvimento de intensos estudos voltados para a fenomenologia ao longo dos últimos anos, os quais mostraram que o espalhamento profundamente inelástico no referencial de dipolo é o experimento mais simples e eficiente para estudar o regime de altas densidades da QCD e investigar a estrutura interna dos hádrons.

Em particular, neste trabalho realizamos um estudo fenomenológico do modelo proposto por Marquet, Peschanski e Soyez [MARQUET; PESCHANSKI; SOYEZ, 2007], o qual foi utilizado originalmente para a descrição de dados de HERA para a produção exclusiva de méson vetoriais em colisões elétron-próton (ep) no formalismo de dipolos da QCD. O modelo MPS com os ajustes originais apresentou bons resultados, onde os gráficos do trabalho confirmam isso, bem como o valor de χ_{red}^2 para as 4 diferentes funções de onda utilizadas, BG, LCG, BLL e BLB. No entanto quando aplicamos tal modelo aos dados mais recentes, percebeu-se a indispensável atualização dos parâmetros do modelo.

Essa atualização ocorreu muito recentemente, no início do ano de 2022, com o trabalho de Ya-Ping e Victor Gonçalves [XIE; GONCALVES, 2022], onde os autores atualizaram os parâmetros para os modelos de funções de onda BG e LCG. No trabalho em questão, foram apresentados apenas resultados para os mésons ρ e J/Ψ . Ambas as funções de onda BG e LCG para os mésons vetoriais foram incluídas no estudo, mas as curvas apresentadas foram aquelas fornecidas usando o modelo LCG, pois foi o modelo que resultou em um melhor valor de χ_{red}^2 obtido. Sobre a não inclusão do méson ϕ , os autores não mencionam nada em relação do mesmo, mas segundo os resultados obtidos neste trabalho, um dos possíveis motivos é o fato de os resultados para este méson degradarem o valor de χ_{red}^2 global.

Selecionamos os dados mais recentes da produção exclusiva dos mésons ρ , ϕ e J/Ψ e utilizando os parâmetros atualizados em 2022 por [XIE; GONCALVES, 2022], construímos gráficos com o objetivo de comparar os dados mais recentes com as previsões teóricas referente aos três mésons, usando a função de onda BG, visto que no trabalho [XIE; GONCALVES, 2022] esses resultados não são apresentados. No geral, os gráficos para o méson ρ e J/Ψ apresentam uma descrição razoável dos dados experimentais, o que vai ao encontro com o valor obtido de $\chi_{red}^2 = 1,39$ pelos autores utilizando o modelo BG.

Para o méson ϕ , realizamos uma extensão, visto que também não é realizado no trabalho de [XIE; GONCALVES, 2022]. Plotamos gráficos para a seção de choque diferencial e total e o valor total de χ_{red}^2 mostra um ajuste degradado. Essa conclusão pode

ser confirmada por exemplo, ao observar os gráficos da seção de choque total em função da energia W . Esses resultados indicam o motivo de os autores de [XIE; GONCALVES, 2022] não utilizarem os resultados para ϕ .

Pelos resultados obtidos, concluímos que é necessário ampliar a análise, ou seja, realizar um ajuste similar ao feito no trabalho original, gerando combinações de modelos de função de onda a partir das funções de onda BG e LCG, para os três mésons, ρ , ϕ e J/Ψ . Como perspectivas, assim como sugerido em [MARQUET; PESCHANSKI; SOYEZ, 2007], utilizaremos outros modelos de saturação para a função $N(rQ_s(\mathbf{q}, Y), Y)$ em (4.13).

Apêndices

APÊNDICE A – Cálculo da seção de choque total do DIS

Neste apêndice está o cálculo detalhado que chega na expressão da seção de choque total. O tensor leptônico ($L_{\mu\nu}$) descreve a interação do elétron com o fóton virtual, sendo determinado ao utilizar das regras de Feynman para a QED,

$$L_{\mu\nu} = 2[k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - g_{\mu\nu}(k \cdot k')] \quad (\text{A.1})$$

Já o tensor hadrônico ($W^{\mu\nu}$) no estado geral é dado por [DEVENISH; COOPER-SARKAR, 2004]:

$$W^{\mu\nu} = -W_1 g^{\mu\nu} + \frac{W_2}{M^2} - i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p \cdot q \frac{W_3}{2M^2} + q^\mu q^\nu \frac{W_4}{M^2} + (p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu) \frac{W_5}{M^2} + i(p^\mu q^\nu - p^\nu q^\mu) \frac{W_6}{2M^2} \quad (\text{A.2})$$

onde M é a massa do hádron. Este tensor depende basicamente de três variáveis cinemáticas, p, p', k . No entanto, é possível estabelecer uma relação entre tais, de modo que $p + q = p'$. Logo, no final das contas, o tensor hadrônico depende de apenas duas variáveis independentes [PIRES, 2019], o qual é parametrizado seguindo algumas propriedades [DEVENISH; COOPER-SARKAR, 2004]:

- Conservação da corrente eletromagnética: $q_\mu W^{\mu\nu} = q_\nu W^{\mu\nu} = 0$.
- Paridade e inversão temporal: $W^{\mu\nu} = W^{\nu\mu}$.
- Conservação da simetria: $W^{\mu\nu}$ não pode conter nenhum quadrivetor antissimétrico.

Assim, a equação (A.2) pode ser simplificada, pois nem todos os termos contribuem para a seção de choque diferencial, como exemplo, o termo W_6 e W_3 , restando então:

$$W^{\mu\nu} = -W_1 g^{\mu\nu} + \frac{W_2}{M^2} + q^\mu q^\nu \frac{W_4}{M^2} + (p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu) \frac{W_5}{M^2}$$

Devido à propriedade da conservação de corrente [PIRES, 2019; DEVENISH; COOPER-SARKAR, 2004], $q_\mu W^{\mu\nu} = 0$, e pelo fato que os quatro termos não são independentes, W_4 e W_5 podem ser reescritos em termos de W_1 e W_2 :

$$W_5 = -W_2 \frac{p \cdot q}{q^2}$$

e

$$W_4 = W_2 \left(\frac{p \cdot q}{q^2} \right)^2 + W_1 \frac{M^2}{q^2}$$

o que resulta em:

$$W^{\mu\nu} = W_1 \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + \frac{W_2}{M^2} \left(p^\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left(p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu \right) \quad (\text{A.3})$$

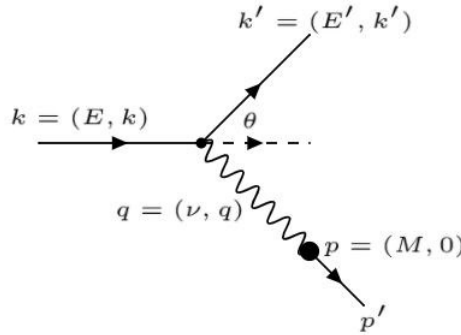
onde W_1 e W_2 são conhecidas como funções de estrutura inelásticas [CAZAROTO, 2009].

Para se chegar na seção de choque diferencial final do espalhamento, é necessário realizar a contração dos índices entre os tensores $L_{\mu\nu}$ e $W^{\mu\nu}$, de modo que:

$$\frac{1}{2m_N} W^{\mu\nu} L_{\mu\nu} = 4W_1(k \cdot k') + \frac{2W_2}{M^2} [2(k \cdot p)(k' \cdot p) - (k \cdot k')M^2] \quad (\text{A.4})$$

Para se obter uma expressão mais clara, é possível determinar um quadro referencial específico e expressar os vetores k , k' , p , p' e q em termos da energia e do ângulo de espalhamento. Aplicando o referencial do laboratório, conforme a Figura 20 ilustra: obtemos que:

Figura 20 – Cinemática do espalhamento no referencial do laboratório.



Fonte: Autoria própria

$$p^\mu = (\mathbf{M}, 0, 0, 0)$$

$$k^\mu = (E, k)$$

$$k'^\mu = (E', k')$$

assim, o produto escalar entre k e k' será:

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{k}' &= |k||k'| \cos \theta \\ &= EE' \cos \theta \end{aligned}$$

Já o produto escalar quadri-dimensional é dado pela relação

$$a \cdot b = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

deste modo,

$$\begin{aligned} k \cdot k' &= k^0 k'^0 - \vec{k} \cdot \vec{k}' \\ &= EE' - EE' \cos \theta \\ &= EE'(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

como $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$:

$$k \cdot k' = 2EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (\text{A.5})$$

Para a relação

$$(p \cdot k)(p \cdot k') = M^2 EE' \quad (\text{A.6})$$

Substituindo as relações (A.5) e (A.6) na equação (A.4):

$$\begin{aligned} &= \left[4W_1 \left(2EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{2W_2}{M^2} \left(2M^2 EE' - 2M^2 EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] \\ &= \left[4W_1 \left(2EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{2W_2}{M^2} 2M^2 EE' \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] \\ &= \left[4W_1 \left(2EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + 4W_2 EE' \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \end{aligned}$$

reorganizando:

$$\frac{1}{2M} W^{\mu\nu} L_{\mu\nu} = 4EE' \left(2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (\text{A.7})$$

Logo, em termos das funções de estrutura W_1 e W_2 , a seção de choque será:

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \left[2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (\text{A.8})$$

Porém, podemos escrever a expressão da seção de choque em termos das variáveis x de Bjorken e da inelasticidade y . Para isso, utiliza-se da relação abaixo [BARONE; PREDAZZI, 2002]:

$$dE' d\Omega = \frac{2ME}{E'} \pi y dx dy$$

assim,

$$\frac{d\sigma}{dx dy} = \frac{2\pi MEy}{E'} \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \left[2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

dado que:

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{Q^2}{4EE'} \quad (\text{A.9})$$

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{E}{E'} \left(1 - y - \frac{Mxy}{2E} \right) \quad (\text{A.10})$$

Substituindo as equações (A.9) e (A.10) na expressão da seção de choque:

$$\frac{d\sigma}{dxdy} = \frac{2\pi MEy \cdot 4\alpha^2 E'}{Q^4} \left[2W_1 \left(\frac{xyM}{2E'} \right) + W_2 \frac{E}{E'} \left(1 - y - \frac{Mxy}{2E} \right) \right] \quad (\text{A.11})$$

e realizando as manipulações matemáticas necessárias, chegamos na expressão:

$$\frac{d\sigma}{dxdy} = \frac{2\pi\alpha^2}{EMx^2y} \left[W_1(xyM) + W_2E \left(1 - y - \frac{Mxy}{2E} \right) \right]$$

Introduzindo as funções de estruturas adimensionais [BARONE; PREDAZZI, 2002], as quais descrevem a estrutura do nucleon observada no DIS [CAZAROTO, 2009]:

$$\begin{aligned} F_1(x, Q^2) &= MW_1(\nu, Q^2) \\ F_2(x, Q^2) &= \nu W_2(\nu, Q^2) \end{aligned}$$

obtemos a expressão final da seção de choque:

$$\frac{d\sigma}{dxdy} = \frac{2\pi\alpha^2}{EMx^2y^2} \left[F_1(x, Q^2)xy^2 + F_2(x, Q^2) \left(1 - y - \frac{Mxy}{2E} \right) \right] \quad (\text{A.12})$$

APÊNDICE B – Cálculo da função de onda transversal e longitudinal do fóton

Esta seção apresenta o cálculo detalhado das funções de onda do fóton virtual transversal e longitudinal, utilizando a referência [KOVCHegov; LEVIN, 2012].

B.1 Função de onda transversal ($\Psi_T^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}$)

Começando com a função de onda transversal, partimos da expressão

$$\Psi_{T,L}^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(k_\perp, z) = e Z_f \underbrace{\frac{z(1-z)\delta_{ij}}{k_\perp^2 + m_f^2 + Q^2 z(1-z)}}_A \underbrace{\bar{u}_\sigma(k) \gamma \cdot \epsilon_{T,L}^\lambda \cdot v_{\sigma'}(q-k)}_B \quad (\text{B.1})$$

de modo a começar a dedução pelo produto escalar entre os espinores de Dirac e a matriz γ (parte B). Ao aplicar a definição do complexo conjugado para os elementos de matriz:

$$\bar{u}_\sigma(k) \gamma \cdot \epsilon_T^\lambda v_{\sigma'}(q-k) = (\bar{v}_{\sigma'}(q-k) \gamma u_\sigma(k))^* \cdot \epsilon_T^\lambda \quad (\text{B.2})$$

Dado que o vetor de polarização transversal é

$$\epsilon_T^\lambda = (0, 0, \vec{\epsilon}^\lambda) \quad (\text{B.3})$$

ou seja, $\epsilon^{\lambda\pm} = 0$ e utilizando a propriedade do produto escalar em coordenadas do cone de luz:

$$u \cdot v = \frac{1}{2} u^+ v^- + \frac{1}{2} u^- v^+ - \vec{u}_\perp \cdot \vec{v}_\perp$$

o produto escalar entre $\gamma \cdot \epsilon_T^\lambda$ será:

$$\begin{aligned} \gamma \cdot \epsilon_T^\lambda &= \frac{1}{2} \gamma^+ \epsilon^{\lambda-} + \frac{1}{2} \gamma^- \epsilon^{\lambda+} - \vec{\gamma}_\perp \cdot \vec{\epsilon}_\perp \\ &= -\vec{\gamma}_\perp \cdot \vec{\epsilon}_\perp \\ &= -\gamma_1 \epsilon_1^\lambda - \gamma_2 \epsilon_2^\lambda \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Deste modo, ao aplicar a expressão (B.4) em (B.2), o produto escalar final será:

$$= -(\bar{v}_{\sigma'}(q-k) \gamma_\perp^1 u_\sigma(k))^* \cdot \epsilon_{T,1}^\lambda - (\bar{v}_{\sigma'}(q-k) \gamma_\perp^2 u_\sigma(k))^* \cdot \epsilon_{T,2}^\lambda \quad (\text{B.5})$$

Ainda, para facilitar o cálculo, podemos escrever a equação B.5 como

$$= -(\mathbb{I}_1^{\sigma,\sigma',\lambda}(q,k) + \mathbb{I}_2^{\sigma,\sigma',\lambda}(q,k)) \quad (\text{B.6})$$

No entanto, ainda é necessário utilizar dos elementos da matriz de Dirac construídos a partir de espinores u e v , na forma

$$\frac{\bar{v}_{\sigma'}(p')}{\sqrt{p'^+}} \gamma_{\perp}^i \frac{u_{\sigma}(p)}{\sqrt{p^+}} \quad (\text{B.7})$$

o que gera como resultado a expressão seguinte:

$$\delta_{\sigma,-\sigma'} \left(\frac{p_{\perp}^{'i} - i\sigma\epsilon^{ij}p_{\perp}^{'j}}{p'^+} + \frac{p_{\perp}^i + i\sigma\epsilon^{ij}p_{\perp}^j}{p^+} \right) - \delta_{\sigma\sigma'} \sigma m_f \left(\frac{p'^+ + p^+}{p'^+ p^+} \right) (\delta^{i1} + i\sigma\delta^{i2}) (\epsilon_T) \quad (\text{B.8})$$

Agora, é necessário realizar a soma em ij para os termos $\mathbb{I}_1$ e $\mathbb{I}_2$ da expressão (B.6). Deve-se atentar ao fato de estarmos trabalhando com o complexo conjugado, deste modo, os sinais que acompanham os números complexos serão trocados. Começando em $\mathbb{I}_1$, com $i = 1$ e realizando a soma em j :

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_1 = & \delta_{\sigma,-\sigma'} \left(\frac{p_{\perp}^{'1} + i\sigma(\epsilon^{11}p_{\perp}^{'1} + \epsilon^{12}p_{\perp}^{'2})}{p'^+} + \frac{p_{\perp}^1 - i\sigma(\epsilon^{11}p_{\perp}^1 + \epsilon^{12}p_{\perp}^2)}{p^+} \right) \\ & - \delta_{\sigma\sigma'} \sigma m_f \left(\frac{p'^+ + p^+}{p'^+ p^+} \right) (\delta^{11} - i\sigma\delta^{12}) (\epsilon_{T,1}) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Porém, nas expressões $\mathbb{I}_1$ e consequentemente em $\mathbb{I}_2$ é necessário multiplicar pelo fator

$$\sqrt{(q^+ - k^+)k^+} \quad (\text{B.10})$$

para compensar os fatores que estão dividindo a expressão (B.7).

Logo, dado que $\epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1$ e $\epsilon^{11} = \epsilon^{22} = 0$, a expressão (B.9) será simplificada de modo que:

$$\mathbb{I}_1 = \left\{ \delta_{\sigma,-\sigma'} \left(\frac{p_{\perp}^{'1} + i\sigma p_{\perp}^{'2}}{p'^+} + \frac{p_{\perp}^1 - i\sigma p_{\perp}^2}{p^+} \right) - \delta_{\sigma\sigma'} \sigma m_f \left(\frac{p'^+ + p^+}{p'^+ p^+} \right) (\delta^{11}) \right\} \epsilon_{T,1} \sqrt{(q^+ - k^+)k^+} \quad (\text{B.11})$$

Realizando os mesmos passos para $\mathbb{I}_2$, com $i = 2$ e realizando a soma em j :

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_2 = & \delta_{\sigma,-\sigma'} \left(\frac{p_{\perp}^{'2} + i\sigma(\epsilon^{21}p_{\perp}^{'1} + \epsilon^{22}p_{\perp}^{'2})}{p'^+} + \frac{p_{\perp}^2 - i\sigma(\epsilon^{21}p_{\perp}^1 + \epsilon^{22}p_{\perp}^2)}{p^+} \right) \\ & - \delta_{\sigma\sigma'} \sigma m_f \left(\frac{p'^+ + p^+}{p'^+ p^+} \right) (\delta^{21} - i\sigma\delta^{22}) (\epsilon_{T,2}) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

simplificando,

$$\mathbb{I}_2 = \left\{ \delta_{\sigma,-\sigma'} \left(\frac{p_{\perp}^{'2} - i\sigma p_{\perp}^{'1}}{p'^+} + \frac{p_{\perp}^2 + i\sigma p_{\perp}^1}{p^+} \right) - \delta_{\sigma\sigma'} \sigma m_f \left(\frac{p'^+ + p^+}{p'^+ p^+} \right) (i\sigma\delta^{22}) \right\} \epsilon_{T,2} \sqrt{(q^+ - k^+)k^+} \quad (\text{B.13})$$

O próximo passo é substituir as variáveis p e p' por k e $q - k$. Começando com a equação (B.11):

$$\mathbb{I}_1 = \left\{ \delta_{\sigma,-\sigma'} \left(\frac{(q-k)_{\perp} + i\sigma(q-k)_{\perp}^2}{(q-k)^+} + \frac{k_{\perp} - i\sigma k_{\perp}^2}{k^+} \right) - \delta_{\sigma\sigma'} \sigma m_f \left(\frac{(q-k)^+ + k^+}{(q-k)^+ k^+} \right) \right\} \epsilon_{T,1} \sqrt{(q^+ - k^+)k^+} \quad (\text{B.14})$$

Uma observação importante ao fato que o índice 2 contido nos parênteses não significa ao quadrado e sim que são coordenadas 2.

Reorganizando os termos:

$$\mathbb{I}_1 = \left\{ \delta_{\sigma, -\sigma'} \left(\frac{q_{\perp} - k_{\perp} + i\sigma(q_{\perp}^2 - k_{\perp}^2)}{(q-k)^+} + \frac{k_{\perp} - i\sigma k_{\perp}^2}{k^+} \right) - \delta_{\sigma\sigma'} \sigma m_f \left(\frac{q^+}{(q-k)^+ + k^+} \right) \right\} \epsilon_{T,1} \sqrt{(q^+ - k^+)k^+} \quad (\text{B.15})$$

tirando o mínimo múltiplo comum, considerando a seguinte propriedade¹

$$q^\mu = \left(q^+, -\frac{Q^2}{q^+}, 0_{\perp} \right) \quad (\text{B.16})$$

e colocando q^+ em evidência, de modo a utilizar da propriedade que $z = k^+/q^+$, a qual representa a fração do momentum do cone de luz do fóton transportado pelo quark, chegamos que a expressão $\mathbb{I}_1$ final será:

$$\mathbb{I}_1 = \frac{1}{\sqrt{z(1-z)}} \left\{ \delta_{\sigma, -\sigma'} \left(z(-k_{\perp} - i\sigma k_{\perp}^2) + (1-z)(k_{\perp} - i\sigma k_{\perp}^2) \right) + (\delta_{\sigma\sigma'} \sigma m_f) \right\} \epsilon_{T,1} \quad (\text{B.17})$$

Da mesma forma, substituindo os termos $q - k$ e q na equação (B.13):

$$\mathbb{I}_2 = \left\{ \delta_{\sigma, -\sigma'} \left(\frac{(q-k)_{\perp}^2 - i\sigma(q-k)_{\perp}^1}{(q-k)^+} + \frac{k_{\perp}^2 + i\sigma k_{\perp}^1}{k^+} \right) - \delta_{\sigma\sigma'} \sigma m_f \left(\frac{(q-k)^+ + k^+}{(q-k)^+ + k^+} \right) (i\sigma \delta^{22}) \right\} \epsilon_{T,2} \sqrt{(q^+ - k^+)k^+} \quad (\text{B.18})$$

como $q_{\perp} = 0$ e tirando o mínimo múltiplo comum, simplificamos a equação:

$$\mathbb{I}_2 = \frac{1}{\sqrt{z(1-z)}} \left\{ \delta_{\sigma, \sigma'} [z(-k_{\perp}^2 + i\sigma k_{\perp}) + (1-z)(k_{\perp}^2 + i\sigma k_{\perp})] - \delta_{\sigma\sigma'} \sigma^2 i m_f \right\} \epsilon_{T,2} \sqrt{(q^+ - k^+)k^+} \quad (\text{B.19})$$

neste caso, temos que $\sigma^2 = 1$.

Agora, deve-se somar $\mathbb{I}_1$ e $\mathbb{I}_2$ e em seguida, substituir na expressão inicial (equação B.1). Durante a manipulação desses passos, deve-se levar em conta o produto vetorial

$$\vec{\epsilon}_{\perp}^{\lambda} \times \vec{k}_{\perp} = -i\lambda \vec{\epsilon}_{\perp}^{\lambda} \cdot \vec{k}_{\perp} \quad (\text{B.20})$$

Assim, chegamos então na expressão

$$\begin{aligned} \Psi_T^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(\vec{k}_{\perp}, z) &= e Z_f \sqrt{z(1-z)} \delta_{ij} \\ &\times \frac{(1 - \delta_{\sigma\sigma'}) \vec{\epsilon}_{\perp}^{\lambda} \cdot \vec{k}_{\perp} (1 - 2z - \sigma\lambda) + \delta_{\sigma\sigma'} m_f (1 + \sigma\lambda) / \sqrt{2}}{\vec{k}_{\perp}^2 + m_f^2 + Q^2 z(1-z)} \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Uma vez que o interesse se concentra em utilizar a função de onda do fóton virtual no espaço de coordenadas transversais, é necessário realizar uma transformada de Fourier:

$$\Psi_{T,L}^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(\vec{x}_{\perp}, z) = \int \frac{d^2 k_{\perp}}{(2\pi)^2} e^{i\vec{k}_{\perp} \cdot \vec{x}_{\perp}} \Psi_{T,L}^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(\vec{k}_{\perp}, z) \quad (\text{B.22})$$

¹ $q_{\perp} = 0$

Por meio desta transformada, podemos dividir a equação (B.21) em duas integrais:

$$\int \frac{d^2 k_\perp}{(2\pi)^2} e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} \frac{\delta_{\sigma\sigma'} \frac{m_f}{\sqrt{2}} (1 + \sigma\lambda)}{\vec{k}_\perp^2 + a_f^2} \quad (\text{B.23})$$

$$\int \frac{d^2 k_\perp}{(2\pi)^2} e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} (1 - \delta_{\sigma\sigma'}) (1 - 2z - \sigma\lambda) \frac{\vec{k}_\perp \cdot \vec{\epsilon}_\perp^\lambda}{\vec{k}_\perp^2 + a_f^2} \quad (\text{B.24})$$

onde

$$a_f^2 = Q^2 z(1 - z) + m_f^2$$

Começando com a primeira integral (equação B.23) e colocando as constantes para fora da integral:

$$\left(\delta_{\sigma\sigma'} \frac{m_f}{\sqrt{2}} (1 + \sigma\lambda) \right) \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 k_\perp \frac{e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp}}{\vec{k}_\perp^2 + a_f^2} \quad (\text{B.25})$$

Para a resolução desta integral, existe uma propriedade que é uma adaptação da Função de Green:

$$\int \frac{d^2 q_\perp}{q_\perp^2 + m^2} e^{i\vec{q}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} = 2\pi K_0(mx_\perp) \quad (\text{B.26})$$

Assim, a primeira integral tem como resultado:

$$\left(\delta_{\sigma\sigma'} \frac{m_f}{\sqrt{2}} (1 + \sigma\lambda) \right) \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 k_\perp \frac{e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp}}{\vec{k}_\perp^2 + a_f^2} = \left(\delta_{\sigma\sigma'} \frac{m_f}{\sqrt{2}} (1 + \sigma\lambda) \right) \frac{1}{2\pi} K_0(a_f x_\perp) \quad (\text{B.27})$$

Resolvendo a segunda integral (equação B.24), de forma a inicialmente separar as constantes:

$$\int \frac{d^2 k_\perp}{(2\pi)^2} e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} (1 - \delta_{\sigma\sigma'}) (1 - 2z - \sigma\lambda) \frac{\vec{k}_\perp \cdot \vec{\epsilon}_\perp^\lambda}{\vec{k}_\perp^2 + a_f^2} = \frac{(1 - \delta_{\sigma\sigma'}) (1 - 2z - \sigma\lambda)}{(2\pi)^2} \vec{\epsilon}_\perp^\lambda \left[\int d^2 k_\perp \vec{k}_\perp \frac{e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp}}{\vec{k}_\perp^2 + a_f^2} \right] \quad (\text{B.28})$$

Ao observar a integral na expressão (B.28), percebe-se que o vetor $\vec{k}_\perp$ é resultado da operação do gradiente na exponencial. Logo, podemos utilizar da propriedade utilizada anteriormente, conforme mostrado abaixo:

$$\vec{k}_\perp \cdot e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} = -i \vec{\nabla}_\perp (e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp}) \quad (\text{B.29})$$

$$\int d^2 k_\perp \vec{k}_\perp \frac{e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp}}{\vec{k}_\perp^2 + a_f^2} = -i \vec{\nabla}_\perp \left(\int d^2 k_\perp \frac{e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp}}{\vec{k}_\perp^2 + a_f^2} \right) \quad (\text{B.30})$$

conhecendo o resultado da integral já utilizado anteriormente:

$$\begin{aligned} &= -i \vec{\nabla}_\perp [2\pi K_0(a_f x_\perp)] \\ &= -2\pi i \vec{\nabla}_\perp [K_0(a_f x_\perp)] \end{aligned}$$

e aplicando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} &= -2\pi i \frac{\partial K_0}{\partial(a_f x_\perp)} \frac{\partial(a_f x_\perp)}{\partial \vec{x}_\perp} \\ &= -2\pi i (K'_0) a_f \vec{\nabla}(x_\perp) \end{aligned}$$

dado que $K'_0(z) = -K_1(z)$

$$= 2\pi i K_1(a_f x_\perp) a_f \frac{\vec{x}_\perp}{x_\perp} \quad (\text{B.31})$$

Agora, substituindo (B.31) em (B.28), resolvemos a segunda integral:

$$\frac{(1 - \delta_{\sigma\sigma'})(1 - 2z - \sigma\lambda)}{(2\pi)^2} \vec{\epsilon}_\perp^\lambda \left(2\pi i K_1(a_f x_\perp) a_f \frac{\vec{x}_\perp}{x_\perp} \right) \quad (\text{B.32})$$

Por fim, juntando as expressões (B.27) e (B.32):

$$\begin{aligned} \Psi_T^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(\vec{x}_\perp, z) &= \frac{eZ_f}{2\pi} \sqrt{z(1-z)} \delta_{ij} \left[(1 - \delta_{\sigma\sigma'})(1 - 2z - \sigma\lambda) i a_f \frac{\vec{\epsilon}_\perp^\lambda \cdot \vec{x}_\perp}{x_\perp} K_1(x_\perp a_f) \right. \\ &\quad \left. + \delta_{\sigma\sigma'} \frac{m_f}{\sqrt{2}} (1 + \sigma\lambda) K_0(x_\perp a_f) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

O próximo passo é efetuar o módulo ao quadrado de $\Psi_T^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}$. Em seguida, é necessário realizar uma soma sobre os números quânticos i, j e sobre as helicidades σ, σ' , além da média sobre $\lambda^{\pm 1}$.

Vários são os caminhos para se deduzir tal expressão, no entanto, o modo mais prático encontrado foi novamente dividindo a expressão (B.33) e trabalhando termo a termo. Trabalhando apenas com os termos dentro do [], dividimos de tal forma:

$$\begin{aligned} d &= (1 - \delta_{\sigma\sigma'})(1 - 2z - \sigma\lambda) a_f K_\perp(a_f x_\perp) \\ c &= \delta_{\sigma\sigma'} \frac{m_f}{\sqrt{2}} (1 + \sigma\lambda) K_0(x_\perp a_f) \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

o termo que sobrou, podemos reescrevê-lo como:

$$\frac{\vec{\epsilon}_\perp^\lambda \cdot \vec{x}_\perp}{x_\perp} = - \left(\frac{\lambda x_\perp^1}{\sqrt{2} x_\perp} + \frac{i x_\perp^2}{\sqrt{2} x_\perp} \right) \quad (\text{B.35})$$

devido à propriedade do vetor de polarização transversal

$$\vec{\epsilon}_\perp^\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda, i) \quad (\text{B.36})$$

Assim, podemos denominar a e b como:

$$a = \frac{\lambda x_\perp^1}{\sqrt{2} x_\perp} \quad b = \frac{x_\perp^2}{\sqrt{2} x_\perp} \quad (\text{B.37})$$

Logo, a expressão (B.33) pode ser reescrita de forma mais simplificada:

$$\Psi_T^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(\vec{x}_\perp, z) = \frac{eZ_f \sqrt{z(1-z)} \delta_{ij}}{2\pi} [di(a+ib) + c] \quad (\text{B.38})$$

Aplicando o módulo ao quadrado:

$$|\Psi_T^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(\vec{x}_\perp, z)|^2 = \frac{e^2 Z_f^2 [z(1-z)] \delta_{ij}^2}{4\pi^2} [di(a+ib) + c]^2 \quad (\text{B.39})$$

Resolvendo os termos que estão entre []:

$$[di(a+ib) + c] \cdot [-di(a-ib) + c] = d^2(a^2 + b^2) - 2bcd + c^2 \quad (\text{B.40})$$

Podemos simplificar ainda mais a expressão ao substituir os termos em a e b , de modo que o resultado $a^2 + b^2 = 1/2$. Logo:

$$|\Psi_T^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(\vec{x}_\perp, z)|^2 = \frac{e^2 Z_f^2 [z(1-z)] \delta_{ij}}{4\pi^2} \left[d^2 \frac{1}{2} - 2bcd + c^2 \right] \quad (\text{B.41})$$

Realizado todos esses passos, chega o momento em começar a realizar as somatórias e por fim, a média em λ . Começando com a somatória em i, j , visualizamos que apenas ocorre dependência na Delta de Kronecker (δ_{ij}), a qual é:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1; & i = j \\ 0; & i \neq j \end{cases} \quad (\text{B.42})$$

onde $i, j = 1, 2, 3$, assim,

$$\begin{aligned} \sum_{ij} |\Psi_T^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(\vec{x}_\perp, z)|^2 &= \frac{e^2 Z_f^2 [z(1-z)]}{4\pi^2} \sum_{ij} \delta_{ij} \left[d^2 \frac{1}{2} - 2bcd + c^2 \right] \\ &= \frac{e^2 Z_f^2 [z(1-z)]}{4\pi^2} \left[d^2 \frac{1}{2} - 2bcd + c^2 \right] \sum_{ij} \delta_{ij} \\ &= \frac{e^2 Z_f^2 [z(1-z)]}{4\pi^2} \left[d^2 \frac{1}{2} - 2bcd + c^2 \right] \sum_{i=j} \delta_{ij} + \sum_{i \neq j} \delta_{ij} \\ &= \frac{e^2 Z_f^2 [z(1-z)]}{4\pi^2} \left[d^2 \frac{1}{2} - 2bcd + c^2 \right] \sum_{ii} \delta_{ii} \\ &= \frac{e^2 Z_f^2 [z(1-z)]}{4\pi^2} \left[d^2 \frac{1}{2} - 2bcd + c^2 \right] \sum_{i=1}^{N_c} \delta_{ii} \\ &= \frac{e^2 Z_f^2 [z(1-z)]}{4\pi^2} \left[d^2 \frac{1}{2} - 2bcd + c^2 \right] N_c \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

onde N_c é o número de cores quânticos igual a 3.

A próxima somatória é sobre as helicidades denotados por σ e σ' . Neste caso, a dependência ocorre em todos os termos dentro do []. Assim, novamente será realizado o cálculo em partes. Iniciando com o termo d^2 :

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma, \sigma'} d^2 &= \sum_{\sigma, \sigma'} (1 - \delta_{\sigma\sigma'})^2 (1 - 2z - \sigma\lambda)^2 a_f^2 k_\perp^2 \\ &= \sum_{\sigma\sigma'} (1 - 2\delta_{\sigma\sigma'} + \delta_{\sigma\sigma'}^2) (2 + 4z^2 - 4z + 2\sigma\lambda(2z - 1)) a_f^2 k_\perp^2\end{aligned}$$

como $\delta_{\sigma\sigma'}^2 = \delta_{\sigma\sigma'}$,

$$\begin{aligned}&= \sum_{\sigma\sigma'} (1 - \delta_{\sigma\sigma'}) (2 + 4z^2 - 4z + 2\sigma\lambda(2z - 1)) a_f^2 k_\perp^2 \\ &= \sum_{\sigma\sigma'} (2 + 4z^2 - 4z + 2\sigma\lambda(2z - 1)) a_f^2 k_\perp^2 - \sum_{\sigma\sigma'} \delta_{\sigma\sigma'} (2 + 4z^2 - 4z + 2\sigma\lambda(2z - 1)) a_f^2 k_\perp^2\end{aligned}$$

Realizando a soma primeiro em σ , os termos que não possuem dependência dobram de valor e aqueles que possuem devem levar em conta o valor de σ que varia entre 1 e -1. Desta forma:

$$\begin{aligned}&= \sum_{\sigma} (2 + 4z^2 - 4z + 2\sigma\lambda(2z - 1)) a_f^2 k_\perp^2 - \sum_{\sigma} \delta_{\sigma\sigma'} (2 + 4z^2 - 4z + 2\sigma\lambda(2z - 1)) a_f^2 k_\perp^2 \\ &= (4 + 8z^2 - 8z) a_f^2 k_\perp^2 - (2 + 4z^2 - 4z) a_f^2 k_\perp^2\end{aligned}\tag{B.44}$$

agora realizando a somatória em σ' :

$$\begin{aligned}&= \sum_{\sigma'} (4 + 8z^2 - 8z) a_f^2 k_\perp^2 - \sum_{\sigma'} (2 + 4z^2 - 4z) a_f^2 k_\perp^2 \\ &= (8 + 16z^2 - 16z) a_f^2 k_\perp^2 - (4 + 8z^2 - 8z) a_f^2 k_\perp^2 \\ &= (4 + 8z^2 - 8z) a_f^2 k_\perp^2 \\ &= 4(1 + 2z^2 - 2z) a_f^2 k_\perp^2\end{aligned}\tag{B.45}$$

Ao simplificar a expressão (B.45), definimos a somatória em d^2 como sendo:

$$\sum_{\sigma, \sigma'} d^2 = 4(z^2 + (z - 1)^2) a_f^2 k_\perp^2\tag{B.46}$$

Realizando a somatória de σ, σ' para o termo c^2 da expressão (B.41):

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma, \sigma'} c^2 &= \sum_{\sigma, \sigma'} \delta_{\sigma\sigma'}^2 \frac{m_f^2}{(\sqrt{2})^2} (1 + \sigma\lambda)^2 K_0^2(x_\perp a_f) \\ &= \sum_{\sigma, \sigma'} \delta_{\sigma\sigma'} \frac{m_f^2}{2} (1 + 2\sigma\lambda + \sigma^2\lambda^2) K_0^2(x_\perp a_f)\end{aligned}\tag{B.47}$$

como $\sigma^2\lambda^2 = 1$,

$$= \sum_{\sigma, \sigma'} \delta_{\sigma\sigma'} \frac{m_f^2}{2} (2 + 2\sigma\lambda) K_0^2(x_\perp a_f)$$

começando com a somatória em σ :

$$\begin{aligned} &= \frac{m_f^2}{2} K_0^2(x_\perp a_f) \sum_{\sigma} \delta_{\sigma\sigma'} (2 + 2\sigma\lambda) \\ &= m_f^2 K_0^2(x_\perp a_f) \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

fazendo a somatória em σ' , chegamos na expressão final:

$$\sum_{\sigma, \sigma'} c^2 = 2 m_f^2 K_0^2 \quad (\text{B.49})$$

A última somatória sob as helicidades se concentra no termo $2bcd$:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma, \sigma'} 2bcd &= \sum_{\sigma, \sigma'} 2 \frac{x_\perp^2}{\sqrt{2}x_\perp} (1 - \delta_{\sigma\sigma'}) (1 - 2z - \sigma\lambda) a_f k_\perp \delta_{\sigma\sigma'} \frac{m_f}{\sqrt{2}} (1 + \lambda\sigma) K_0 \\ &= \frac{x_\perp^2}{x_\perp} a_f m_f K_0 (1 - \delta_{\sigma\sigma'}) \delta_{\sigma\sigma'} (1 - 2z - \sigma\lambda) \\ &= \frac{x_\perp^2}{x_\perp} a_f m_f K_0 (\delta_{\sigma\sigma'} - \delta_{\sigma\sigma'}) \delta_{\sigma\sigma'} (1 - 2z - \sigma\lambda) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

Depois de realizar todas as somatórias, ainda é necessário realizar a média sobre a somatória de λ , de modo que:

$$\sum_{\sigma, \sigma'} \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \sum_{ij} \left| \Psi_T^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(\vec{x}_\perp, z) \right|^2 \quad (\text{B.51})$$

Logo, juntando as expressões (B.43), (B.46), (B.49) conforme a expressão (B.41):

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma\sigma'} \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \sum_{ij} \left| \Psi_T^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(\vec{x}_\perp, z) \right|^2 &= \frac{e^2 Z_f^2 [z(1-z)]}{4\pi^2} N_c \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \left[\frac{4(z^2 + (z-1)^2) a_f^2 k_\perp}{2} + 2m_f^2 K_0^2 \right] \\ &= \frac{e^2 Z_f^2 [z(1-z)]}{4\pi^2} N_c \sum_{\lambda} [(z^2 + (z-1)^2) a_f^2 K_\perp^2 + m_f^2 K_0^2] \\ &= \frac{e^2 Z_f^2 [z(1-z)]}{4\pi^2} N_c 2[(z^2 + (z-1)^2) a_f^2 K_\perp^2 + m_f^2 K_0^2] \\ &= \frac{e^2 Z_f^2 [z(1-z)]}{2\pi^2} N_c 2[(z^2 + (z-1)^2) a_f^2 K_\perp^2 + m_f^2 K_0^2] \quad (\text{B.52}) \end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned} \alpha_{em} &= \frac{e^2}{4\pi} \\ \frac{e^2}{2\pi^2} &= \frac{2e^2}{4\pi} \frac{1}{\pi} = \frac{2\alpha_{em}}{\pi} \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

Chegamos assim, na expressão final para a função de onda transversal do fóton com a somatória sob todos os sabores (f):

$$\begin{aligned} \left| \Psi_T^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(\vec{x}_\perp, z) \right|^2 &= 2N_c \sum_f \frac{\alpha_{em} Z_f^2}{\pi} z(1-z) \\ &\quad \times \left\{ a_f^2 [K_1(x_\perp a_f)]^2 [z^2 + (1-z)^2] + m_f^2 [K_0(x_\perp a_f)]^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

Continuamente, a seção abaixo é destinada para a dedução da expressão da função de onda longitudinal.

B.2 Função de onda longitudinal ($\Psi_L^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}$)

Para calcular a função de onda do fóton longitudinal, partimos dos mesmos princípios que os utilizados anteriormente. No entanto, agora utilizando o vetor de polarização longitudinal (ϵ_L^λ):

$$\epsilon_L^\lambda = \left(\frac{q^+}{Q}, \frac{Q}{q^+}, \vec{0}_\perp \right) \quad (\text{B.55})$$

onde o produto escalar será:

$$\begin{aligned} u \cdot v &= \frac{1}{2} u^+ v^- + \frac{1}{2} u^- v^+ - \vec{u}_\perp \cdot \vec{v}_\perp \\ \gamma \cdot \epsilon_L^\lambda &= \frac{1}{2} \gamma^+ \epsilon^{\lambda-} + \frac{1}{2} \gamma^- \epsilon^{\lambda+} \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

Obtemos assim a seguinte configuração:

$$\gamma \cdot \epsilon_L^\lambda = \frac{1}{2} [(\bar{v}_{\sigma'}(q-k) \gamma^+ u_\sigma(k))^* \cdot \epsilon_L^{\lambda-} + (\bar{v}_{\sigma'}(q-k) \gamma^- u_\sigma(k))^* \cdot \epsilon_L^{\lambda+}] \quad (\text{B.57})$$

Para tal arranjo, temos que os elementos de matrizes serão:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{v}_{\sigma'}(p')}{\sqrt{p'^+}} \gamma^+ \frac{u_\sigma(p)}{\sqrt{p^+}} &= 2 \delta_{\sigma, -\sigma'} \\ \frac{\bar{v}_{\sigma'}(p')}{\sqrt{p'^+}} \gamma^- \frac{u_\sigma(p)}{\sqrt{p^+}} &= \delta_{\sigma, -\sigma'} \frac{2}{p^+ p'^+} (\vec{p}_\perp \cdot \vec{p}'_\perp - i \sigma \vec{p}_\perp \times \vec{p}'_\perp - m^2) \\ &\quad - \delta_{\sigma\sigma'} \sigma \frac{2m}{p^+ p'^+} [(p'^1 + i \sigma p^2) + (p^1 + i \sigma p^2)] \end{aligned}$$

Ao reunir as expressões acima e lembrando que devemos multiplicar toda a expressão pelo fator descrito na equação (B.10) para compensar os denominadores $\sqrt{p'^+}$ e $\sqrt{p^+}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\{ [2 \delta_{\sigma, -\sigma'}] \epsilon_L^{\lambda-} \sqrt{p'^+} \sqrt{p^+} + \left[\delta_{\sigma, -\sigma'} \frac{2}{p^+ p'^+} (\vec{p}_\perp \cdot \vec{p}'_\perp - i \sigma \vec{p}_\perp \times \vec{p}'_\perp - m^2) \right. \right. \\ \left. \left. - \delta_{\sigma\sigma'} \sigma \frac{2m}{p^+ p'^+} [(p'^1 + i \sigma p^2) + (p^1 + i \sigma p^2)] \right] \right\} \epsilon_L^{\lambda+} \sqrt{p'^+} \sqrt{p^+} \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

Para simplificar a expressão acima, trabalhamos primeiro com o produto escalar e o produto vetorial, de modo que devemos substituir $p = k$ e $p' = q - k$:

$$\begin{aligned} \vec{p}_\perp \times \vec{p}'_\perp &= p^1 p'^2 - p^2 p'^1 \\ &= k^1 (q^2 - k^2) - k^2 (q^1 - k^1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dada a propriedade contida na equação (B.16), teremos que o produto vetorial será nulo.

Já o produto escalar:

$$\begin{aligned}
 \vec{p}_\perp \cdot \vec{p}'_\perp &= p^1 p'^1 + p^2 p'^2 \\
 &= k^1 (q^1 - k^1) + k^2 (q^2 - k^2) \\
 &= -(k^1)^2 - (k^2)^2 \\
 &= -k_\perp^2
 \end{aligned}$$

Ainda, ao substituir as variáveis p e p' por k e $q - k$, simplificamos mais ainda a expressão, devido ao termo:

$$(p^1 + i\sigma p^2) + (p^1 + i\sigma p^2)$$

pois,

$$((q^1 - k^1) + i\sigma(q^2 - k^2)) + (k^1 + i\sigma k^2) = 0$$

Agora, podemos reunir os resultados encontrados nos produtos vetorial e escalar, bem como os valores de $\epsilon_L^{\lambda\pm}$ na expressão geral (equação B.58):

$$\frac{1}{2} \left\{ [2\delta_{\sigma,-\sigma'}] \frac{Q}{q^+} \sqrt{k^+(q-k)^+} + \left[\delta_{\sigma,-\sigma'} \frac{1}{k^+(q-k)^+} (-k_\perp^2 - m_f^2) \frac{q^+}{Q} \right] \sqrt{K^+(q-k)^+} \right\} \quad (\text{B.59})$$

Podemos simplificar a expressão acima, assumindo que

$$\delta_{\sigma,-\sigma'} = 1 - \delta_{\sigma,\sigma'}$$

logo, a mesma será:

$$= (1 - \delta_{\sigma,\sigma'}) \left\{ \frac{Q}{q^+} \sqrt{k^+(q-k)^+} + \frac{1}{k^+(q-k)^+} (-k_\perp^2 - m_f^2) \frac{q^+}{Q} \sqrt{k^+(q-k)^+} \right\} \quad (\text{B.60})$$

O próximo passo é conseguir escrever a expressão acima em termos da fração do momentum do cone de luz transportada pelo quark (z). Desta forma, realizando as manipulações necessárias:

$$\begin{aligned}
 &= (1 - \delta_{\sigma,\sigma'}) \left\{ \frac{Q}{q^+} \sqrt{q^+ \left(1 - \frac{k^+}{q^+}\right) k^+} + \frac{q^+}{Q} \frac{(-\vec{k}_\perp^2 - m_f^2)}{\sqrt{q^+ \left(1 - \frac{k^+}{q^+}\right) k^+}} \right\} \\
 &= (1 - \delta_{\sigma,\sigma'}) \left\{ Q \sqrt{z(1-z)} - \frac{\vec{k}_\perp^2 + m_f^2}{Q \sqrt{z(1-z)}} \right\} \\
 &= (1 - \delta_{\sigma,\sigma'}) \left\{ \frac{Q^2 z(1-z) - \vec{k}_\perp^2 - m_f^2}{Q \sqrt{z(1-z)}} \right\}
 \end{aligned}$$

ainda, conseguimos escrever a última equação como:

$$= (1 - \delta_{\sigma,\sigma'}) \left\{ \frac{2Q^2 z(1-z)}{Q \sqrt{z(1-z)}} - \frac{Q^2 z(1-z) + \vec{k}_\perp^2 + m_f^2}{Q \sqrt{z(1-z)}} \right\} \quad (\text{B.61})$$

Depois disso, é necessário substituir a equação (B.61) na expressão inicial (equação B.1) para assim, obter a expressão da função de onda do fóton longitudinal:

$$\Psi_L^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(\vec{k}_\perp, z) = \frac{eZ_f z(1-z)\delta_{ij}}{\vec{k}_\perp^2 + m_f^2 + Q^2 z(1-z)} (1 - \delta_{\sigma, \sigma'}) \left\{ \frac{2Q^2 z(1-z)}{Q\sqrt{z(1-z)}} - \frac{Q^2 z(1-z) + \vec{k}_\perp^2 + m_f^2}{Q\sqrt{z(1-z)}} \right\}$$

simplicando:

$$= \frac{eZ_f z(1-z)\delta_{ij}}{\vec{k}_\perp^2 + m_f^2 + Q^2 z(1-z)} (1 - \delta_{\sigma, \sigma'}) 2Q\sqrt{z(1-z)} - eZ_f \sqrt{z(1-z)} \delta_{ij} (-\delta_{\sigma, \sigma'}) \quad (\text{B.62})$$

Ao chegar à equação (B.62), negligenciamos o segundo termo que nos daria uma função delta, $\delta^2(x_\perp)$, na função de onda do espaço de coordenadas transversal, pois dipolos de tamanho transversal igual a zero não interagem com o núcleo (ou seja, eles têm seção transversal de espalhamento zero) e, portanto, tais configurações não contribuem para as funções de estrutura DIS [KOVCHegov; LEVIN, 2012].

Nota: Quando se realiza a Transformada de Fourier sob a equação acima para o segundo termo, temos que a mesma é a transformada de uma constante o que gera um termo proporcional à delta $\delta^2(x_\perp)$, que desprezamos. Isto é, decorre que a transformada de Fourier que gera a função Delta de Dirac é a analoga a contida na expressão:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk$$

Logo, a equação (B.62) será:

$$\Psi_L^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(\vec{k}_\perp, z) = \frac{eZ_f [z(1-z)]^{3/2} \delta_{ij} 2Q (1 - \delta_{\sigma\sigma'})}{\vec{k}_\perp^2 + m_f^2 + Q^2 z(1-z)} \quad (\text{B.63})$$

a qual denota a função de onda longitudinal no espaço de momento.

Em seguida, realizamos a Transformada de Fourier² utilizando a equação (B.22):

$$\begin{aligned} \Psi_{T,L}^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(\vec{x}_\perp, z) &= \int \frac{d^2 k_\perp}{(2\pi)^2} e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} \Psi_{T,L}^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(\vec{k}_\perp, z) \\ &= \int \frac{d^2 k_\perp}{(2\pi)^2} e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} \left(\frac{eZ_f [z(1-z)]^{3/2} \delta_{ij} 2Q (1 - \delta_{\sigma\sigma'})}{\vec{k}_\perp^2 + m_f^2 + Q^2 z(1-z)} \right) \\ &= \frac{eZ_f [z(1-z)]^{3/2} \delta_{ij} 2Q (1 - \delta_{\sigma, \sigma'})}{4\pi^2} \int d^2 k_\perp \frac{e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp}}{\vec{k}_\perp^2 + a_f^2} \end{aligned} \quad (\text{B.64})$$

onde $a_f^2 = m_f^2 + Q^2 z(1-z)$.

Como já sabemos o resultado da integral acima (equação B.26), dispomos do seguinte resultado:

$$\Psi_L^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(\vec{x}_\perp, z) = \frac{eZ_f}{2\pi} [z(1-z)]^{3/2} \delta_{ij} 2Q (1 - \delta_{\sigma\sigma'}) K_0(x_\perp a_f) \quad (\text{B.65})$$

² Poderíamos ter realizado a transformada de Fourier para os dois termos, mas por quesito de simplificação, desprezamos o termo antes pelo fato de sabermos do resultado.

Por fim, é necessário realizar o módulo ao quadrado da equação (B.65), e consequentemente as somatórias em i, j e sobre as helicidades σ, σ' .

Ao realizar estes passos devemos nos atentar que:

$$\begin{aligned}\alpha_{EM} &= \frac{e^2}{4\pi} \\ \frac{e^2}{\pi^2} &= \frac{e^2}{4\pi} \frac{4}{\pi} = \frac{4\alpha_{EM}}{\pi}\end{aligned}\tag{B.66}$$

Chegamos assim, na expressão final da função de onda longitudinal do fóton.

$$\left| \Psi_L^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(\vec{x}_\perp, z) \right|^2 = 2N_c \sum_f \frac{\alpha_{EM} Z_f^2}{\pi} 4Q^2 z^3 (1-z)^3 [K_0(x_\perp a_f)]^2 \tag{B.67}$$

Referências

- AARON, F. D. et al. Diffractive Electroproduction of rho and phi Mesons at HERA. *JHEP*, v. 05, p. 032, 2010. [57](#)
- ACCARDI, A. et al. Electron Ion Collider: The Next QCD Frontier: Understanding the glue that binds us all. *Eur. Phys. J. A*, v. 52, n. 9, p. 268, 2016. [55](#)
- ADLOFF, C. et al. Elastic electroproduction of rho mesons at HERA. *Eur. Phys. J. C*, v. 13, p. 371–396, 2000. [55](#)
- AGOSTINI, P. et al. The Large Hadron-Electron Collider at the HL-LHC. *J. Phys. G*, v. 48, n. 11, p. 110501, 2021. [55](#)
- AKTAS, A. et al. Elastic J/psi production at HERA. *Eur. Phys. J. C*, v. 46, p. 585–603, 2006. [55](#)
- AKTAS, A. et al. Elastic J/psi production at HERA. *Eur. Phys. J. C*, v. 46, p. 585–603, 2006. [57](#)
- AMARAL, J. T. de S. *Amplitudes de espalhamento na cromodinâmica quântica em altas energias no formalismo de dipolos*. Tese (Doutorado) — Instituto de Física da UFRGS, 2008. [10](#), [25](#), [26](#), [27](#), [29](#), [33](#)
- ASCHEHAUER, E. C. et al. The electron-ion collider: assessing the energy dependence of key measurements. *Rept. Prog. Phys.*, v. 82, n. 2, p. 024301, 2019. [55](#)
- BALITSKY, I. I.; LIPATOV, L. N. The Pomeron Singularity in Quantum Chromodynamics. *Sov. J. Nucl. Phys.*, v. 28, p. 822–829, 1978. [18](#), [32](#)
- BARONE, V.; PREDAZZI, E. *High-Energy Particle Diffraction*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2002. v.565. (Texts and Monographs in Physics, v.565). ISBN 978-3-540-42107-8. [10](#), [21](#), [22](#), [23](#), [29](#), [30](#), [67](#), [68](#)
- BECKER, V. M. *Escalação geométrica no formalismo de dipolos da QCD em altas energias: uma aplicação a processos exclusivos em HERA com nêutron dominante*. 2017. [18](#)
- BOER, D. et al. Gluons and the quark sea at high energies: Distributions, polarization, tomography. 8 2011. [55](#)
- BORAH, N. N. K.; CHOUDHURY, D. K.; SAHARIAH, P. K. Non-singlet spin structure function $g_1(\text{NS}) (x,t)$ in the DGLAP approach. *Pramana*, v. 79, p. 833–837, 2012. [31](#)
- CAZAROTO, E. R. *Espalhamento inelástico profundo em colisões elétron-íon*. 2009. [33](#), [45](#), [66](#), [68](#)
- CHEKANOV, S. et al. Exclusive electroproduction of J/psi mesons at HERA. *Nucl. Phys. B*, v. 695, p. 3–37, 2004. [55](#)
- CHEKANOV, S. et al. Exclusive electroproduction of J/psi mesons at HERA. *Nucl. Phys. B*, v. 695, p. 3–37, 2004. [57](#)

- CHEKANOV, S. et al. Exclusive electroproduction of phi mesons at HERA. *Nucl. Phys. B*, v. 718, p. 3–31, 2005. [55](#)
- CHEKANOV, S. et al. Exclusive electroproduction of phi mesons at HERA. *Nucl. Phys. B*, v. 718, p. 3–31, 2005. [57](#)
- CHEKANOV, S. et al. Exclusive rho0 production in deep inelastic scattering at HERA. *PMC Phys. A*, v. 1, p. 6, 2007. [57](#)
- DEVENISH, R.; COOPER-SARKAR, A. *Deep inelastic scattering*. [S.l.: s.n.], 2004. [22](#), [25](#), [65](#)
- DOKSHITZER, Y. L. Calculation of the Structure Functions for Deep Inelastic Scattering and e^+e^- Annihilation by Perturbation Theory in Quantum Chromodynamics. *Sov. Phys. JETP*, v. 46, p. 641–653, 1977. [31](#)
- GRIBOV, L. V.; LEVIN, E. M.; RYSKIN, M. G. Semihard Processes in QCD. *Phys. Rept.*, v. 100, p. 1–150, 1983. [32](#), [33](#)
- GRIBOV, V. N.; LIPATOV, L. N. Deep inelastic $e p$ scattering in perturbation theory. *Sov. J. Nucl. Phys.*, v. 15, p. 438–450, 1972. [31](#)
- IANCU, E.; ITAKURA, K.; MCLERRAN, L. Geometric scaling above the saturation scale. *Nucl. Phys. A*, v. 708, p. 327–352, 2002. [32](#), [35](#), [36](#), [38](#), [40](#), [41](#), [43](#), [46](#)
- IANCU, E.; ITAKURA, K.; MUNIER, S. Saturation and BFKL dynamics in the HERA data at small x . *Phys. Lett. B*, v. 590, p. 199–208, 2004. [52](#), [53](#), [54](#)
- IANCU, E.; LEONIDOV, A.; MCLERRAN, L. The Color glass condensate: An Introduction. In: *Cargese Summer School on QCD Perspectives on Hot and Dense Matter*. [S.l.: s.n.], 2002. p. 73–145. [17](#)
- IANCU, E.; LEONIDOV, A.; MCLERRAN, L. D. Nonlinear gluon evolution in the color glass condensate. 1. *Nucl. Phys. A*, v. 692, p. 583–645, 2001. [16](#), [17](#)
- KOVCHegov, Y. V.; LEVIN, E. *Quantum chromodynamics at high energy*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2012. v. 33. ISBN 978-0-521-11257-4, 978-1-139-55768-9. [21](#), [45](#), [69](#), [79](#)
- KOWALSKI, H.; MOTYKA, L.; WATT, G. Exclusive diffractive processes at HERA within the dipole picture. *Phys. Rev. D*, v. 74, p. 074016, 2006. [29](#), [30](#), [46](#), [49](#), [50](#), [51](#)
- KURAEV, E. A.; LIPATOV, L. N.; FADIN, V. S. The Pommeranchuk Singularity in Nonabelian Gauge Theories. *Sov. Phys. JETP*, v. 45, p. 199–204, 1977. [18](#), [32](#)
- LEVIN, E.; TUCHIN, K. Solution to the evolution equation for high parton density QCD. *Nucl. Phys. B*, v. 573, p. 833–852, 2000. [44](#)
- LIPATOV, L. N. Reggeization of the Vector Meson and the Vacuum Singularity in Nonabelian Gauge Theories. *Sov. J. Nucl. Phys.*, v. 23, p. 338–345, 1976. [18](#), [32](#)
- MANTYSAARI, H. *Balitsky–Kovchegov equation*. Tese (Doutorado) — University of Jyväskylä a Department of Physics, 2011. [18](#), [25](#)

- MARQUET, C. *Chromodynamique quantique à haute énergie, théorie et phénoménologie appliquée aux collisions de hadrons*. Tese (Doutorado) — Paris, LPTHE, 2006. [47](#)
- MARQUET, C.; PESCHANSKI, R. B.; SOYEZ, G. Traveling waves and geometric scaling at non-zero momentum transfer. *Nucl. Phys. A*, v. 756, p. 399–418, 2005. [17](#), [18](#), [47](#), [48](#), [54](#)
- MARQUET, C.; PESCHANSKI, R. B.; SOYEZ, G. Exclusive vector meson production at HERA from QCD with saturation. *Phys. Rev. D*, v. 76, p. 034011, 2007. [10](#), [18](#), [46](#), [48](#), [49](#), [50](#), [52](#), [54](#), [62](#), [63](#)
- MARQUET, C.; SCHOEFFEL, L. Geometric scaling in diffractive deep inelastic scattering. *Phys. Lett. B*, v. 639, p. 471–477, 2006. [17](#), [20](#)
- MARQUET, C.; SOYEZ, G. The Balitsky-Kovchegov equation in full momentum space. *Nucl. Phys. A*, v. 760, p. 208–222, 2005. [18](#), [47](#), [48](#), [54](#)
- MCLERRAN, L. A Brief Introduction to the Color Glass Condensate and the Glasma. In: *38th International Symposium on Multiparticle Dynamics*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 3–18. [17](#)
- MUELLER, A. H. Soft gluons in the infinite momentum wave function and the BFKL pomeron. *Nucl. Phys. B*, v. 415, p. 373–385, 1994. [20](#)
- MUNIER, S.; PESCHANSKI, R. B. Geometric scaling as traveling waves. *Phys. Rev. Lett.*, v. 91, p. 232001, 2003. [17](#), [18](#), [46](#)
- PIRES, D. S. *Produção de nêutrons dominantes a altas energias*. Tese (Doutorado) — Instituto de São Paulo, 2019. [10](#), [18](#), [31](#), [32](#), [65](#)
- REZAEIAN, A. H.; SCHMIDT, I. Impact-parameter dependent Color Glass Condensate dipole model and new combined HERA data. *Phys. Rev. D*, v. 88, p. 074016, 2013. [53](#), [55](#), [56](#)
- SHUVAEV, A. G. et al. Off diagonal distributions fixed by diagonal partons at small x and xi. *Phys. Rev. D*, v. 60, p. 014015, 1999. [56](#)
- SOUZA, M. S. K. *Dipolos de cor e interações a altas energias*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2007. [17](#), [23](#), [35](#), [43](#), [45](#)
- SOYEZ, G. QCD at high energy: Saturation and fluctuation effects. *Acta Phys. Polon. B*, v. 37, p. 3477–3510, 2006. [10](#), [31](#), [33](#), [34](#)
- SOYEZ, G. Saturation QCD predictions with heavy quarks at HERA. *Phys. Lett. B*, v. 655, p. 32–38, 2007. [31](#), [53](#), [54](#)
- STASTO, A. M. Nonlinear evolution equations in QCD. *Acta Phys. Polon. B*, v. 35, p. 3069–3102, 2004. [17](#), [46](#)
- STASTO, A. M.; GOLEC-BIERNAT, K. J.; KWIECINSKI, J. Geometric scaling for the total gamma* p cross-section in the low x region. *Phys. Rev. Lett.*, v. 86, p. 596–599, 2001. [10](#), [47](#)
- TAEELS, P. *Quantum chromodynamics at small Bjorken-x*. Tese (Doutorado) — Antwerp U., Antwerp U., 2017. [16](#), [26](#)

- THOMSON, M. *Modern particle physics*. [S.l.: s.n.], 2013. [10](#), [21](#), [22](#), [23](#), [24](#), [25](#), [27](#), [28](#)
- VUOLO, J. H. *Fundamentos da teoria de erros*. [S.l.]: Blucher, 1996. [57](#)
- XIANG, W. High energy scattering in the saturation regime including running coupling and rare fluctuation effects. *Phys. Rev. D*, v. 79, p. 014012, 2009. [32](#), [33](#), [38](#), [43](#)
- XIANG, W. et al. Rare fluctuations of the S -matrix at NLO in QCD. *Phys. Rev. D*, v. 99, n. 9, p. 096026, 2019. [32](#), [33](#), [35](#), [38](#), [43](#)
- XIE, Y.-P.; GONCALVES, V. P. Exclusive processes in ep collisions at the EIC and LHeC: A closer look on the predictions of saturation models. *Phys. Rev. D*, v. 105, n. 1, p. 014033, 2022. [18](#), [19](#), [49](#), [50](#), [55](#), [56](#), [58](#), [60](#), [62](#), [63](#)