

MATHEUS SILVA COLMENERO DE OLIVEIRA

**Soluções da equação da geodésica para uma
métrica tipo Schwarzschild em uma gravitação
não-conservativa**

Rio Grande

2023

MATHEUS SILVA COLMENERO DE OLIVEIRA

Soluções da equação da geodésica para uma métrica tipo Schwarzschild em uma gravitação não-conservativa

Este exemplar corresponde dissertação de mestrado no programa de modelagem computacional devidamente apresentado pelo estudante Matheus Silva Colmenero de Oliveira no Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande (FURG).

Área de concentração: Física

UNIVERSIDADE FEDERAL DE RIO GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional
(PPGMC)

Orientador: Prof. Dr. Matheus Jatkoske Lazo

Rio Grande
2023

Ficha Catalográfica

O48s Oliveira, Matheus Silva Colmenero de.
 Soluções da equação da geodésica para uma métrica tipo
 Schwarzschild em uma gravitação não-conservativa / Matheus Silva
 Colmenero de Oliveira. – 2023.
 66 f.

 Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande –
 FURG, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional,
 Rio Grande/RS, 2023.
 Orientador: Dr. Matheus Jatkoske Lazo.

 1. Gravitação não conservativa 2. Princípio da mínima ação
 3. Órbitas planetárias I. Lazo, Matheus Jatkoske II. Título.

CDU 004

Catálogo na Fonte: Bibliotecário José Paulo dos Santos CRB 10/2344

Matheus Silva Colmenero de Oliveira

**“SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DA GEODÉSICA PARA UMA MÉTRICA TIPO
SCHWARZSCHILD EM UMA GRAVITAÇÃO NÃO-CONSERVATIVA”**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande - FURG, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área de concentração: Modelagem Computacional.

Aprovada em: 29/09/2023

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Matheus Jatkoske Lazo (Orientador – FURG)

Documento assinado digitalmente
 **ANTONIO GLEDSON DE OLIVEIRA GOULART**
Data: 03/11/2023 11:34:14-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Antonio Gledson Oliveira Goulart (FURG)



Prof. Dr. Carlos Frajuca

Documento assinado digitalmente
 **NADJA SIMAO MAGALHAES**
Data: 16/10/2023 14:26:22-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Nadja Simão Magalhães (UNIFESP)

Rio Grande - RS
2023

Em Prol a vida na terra.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente, e principalmente, a Any Cartagena Barrocas Pimenta pelo apoio e ajuda ao longo de todo esse percurso. Também agradeço ao professor Matheus por ser novamente meu orientador e aos demais convidados como o professor pelos ensinamentos e companheirismo . Agradeço os meus pais que me incentivaram e me apoiaram. Agradeço ao CienciaNews, e a spacetoday. Ademais, espero que minhas contribuições ao mundo reverberem para além do meu nome.

Resumo

Nesta dissertação de mestrado estudamos um princípio da mínima ação para sistemas não conservativos, baseado no problema variacional de Herglotz, e estudamos a formulação de teorias de gravitação relativísticas e não relativísticas para sistemas não conservativos. Este trabalho teve também como objetivo iniciar o estudo de efeitos dissipativos destas teorias na órbita planetária e analisar de modo mais profundo as soluções da equação de campo de Einstein para uma métrica não conservativa. Neste caso, como resultado inédito, estudamos a órbita planetária em duas teorias de gravitação não conservativas obtidas à partir do princípio da mínima ação generalizado de Herglotz. Na primeira teoria estudamos os efeitos da dissipação de energia orbital em uma teoria não conservativa do tipo newtoniana. Na segunda teoria, estudamos o problema da órbita planetária na gravitação relativística não conservativa proposta recentemente por Lazo et al. [10].

Palavras-chaves: gravitação não conservativa, princípio da mínima ação, órbitas planetárias.

Abstract

In this master's thesis we study a principle of least action for non-conservative systems, based on Herglotz's variational problem, and we study the formulation of relativistic and non-relativistic theories of gravitation for non-conservative systems. This work also aimed to begin the study of the dissipative effects of these theories on planetary orbit and to analyze in more depth the solutions of Einstein's field equation for a non-conservative metric. In this case, as an unprecedented result, we studied the planetary orbit in two non conservative gravitation theories obtained from the generalized Herglotz principle of least action. In the first theory we study the effects of orbital energy dissipation in a non conservative theory of the Newtonian type. In the second theory, we study the problem of planetary orbit in non conservative relativistic gravitation recently proposed by Lazo et al. [\[10\]](#).

Keywords: non conservative gravitation, the principle of least action, planetary orbits.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	9
2	O PRINCÍPIO DA MÍNIMA AÇÃO DE HAMILTON	14
2.1	O princípio da mínima ação	14
2.1.1	A mecânica analítica	15
2.1.2	Teorias clássicas de campos: o eletromagnetismo	16
2.1.3	Geodésicas	18
2.2	Equação de campo de Einstein e ação Einstein-Hilbert	20
2.2.1	Métrica de Schwarzschild	24
2.2.2	A geodésica para a métrica de Schwarzschild	27
3	O PRINCÍPIO DA MÍNIMA AÇÃO DE HERGLOTZ	31
3.1	Um princípio da mínima ação para campos dissipativos	34
4	TEORIAS DE GRAVITAÇÃO NÃO-CONSERVATIVAS	37
4.1	Uma gravitação não-relativística e dissipativa: órbita com dissipação na mecânica newtoniana	37
4.2	Uma gravitação relativística não-conservativa	39
5	O PROBLEMA DA ÓRBITA NA TEORIA NÃO-CONSERVATIVA	44
5.1	Uma métrica do tipo Schwarzschild para a gravitação não conservativa	44
5.2	A geodésica para orbitas na teoria não-conservativa	46
5.3	Solução numérica para a equação de movimento orbital na gravitação não conservativa	49
6	CONCLUSÃO	57
A	CÓDIGO NUMÉRICO EM PYTHON USADO PARA O PROBLEMA DA ÓRBITA NA GRAVITAÇÃO DE EINSTEIN E NA GRAVITAÇÃO NÃO CONSERVATIVA	59

B	CÓDIGO NUMÉRICO EM PYTHON USADO PARA O PROBLEMA DA ÓRBITA NA GRAVITAÇÃO NÃO CONSERVATIVA DO TIPO NEWTONIANA	61
	REFERÊNCIAS	63

1 Introdução

Através da teoria eletromagnética de Maxwell, desde a segunda metade do século XIX, descobrimos que a luz é uma manifestação de ondas eletromagnéticas que se propagam, no vácuo, com velocidade c . Ainda no século XIX descobriu-se ainda que esta velocidade é uma constante universal independente da velocidade da fonte de luz ou do observador. A busca por compreender a natureza da luz levou a uma nova definição de transformações entre referenciais inerciais, que por sua vez, resultaram na construção das teorias da relatividade especial e geral [1].

Referenciais inerciais são aqueles em que uma partícula, que não está sujeita a forças, está parada ou se movimentando em linha reta e com velocidade constante. Assim, na mecânica newtoniana esses são referenciais que relacionam-se através de transformações de coordenadas chamadas de transformações de Galileu. Nestes referenciais as leis básicas de mecânica, além de estarem na sua forma matemática mais simples, apresentam a mesma estrutura matemática em todos os referenciais inerciais. Em outras palavras, as leis da mecânica não se alteram em forma através das transformações de Galileu. Por exemplo, a segunda lei de Newton que tem como forma $\vec{F} = m\vec{a}$ em um dado referencial inercial, onde $\vec{F}$ e $\vec{a}$ são as força e aceleração da partícula no referencial, e m é a massa da partícula, se transforma em $\vec{F}' = m\vec{a}'$ (mesma estrutura matemática) em um outro referencial inercial (onde $\vec{a}'$ é a aceleração no novo referencial). Portanto, a forma matemática das leis básicas da dinâmica não se alteram entre referencias inerciais. Esta característica é chamada de “princípio da relatividade” da mecânica newtoniana, enunciado, no Principia (após as 3 Leis): “Os movimentos dos corpos incluídos em um dado espaço são os mesmos entre si, esteja este espaço em repouso ou seguindo uniformemente em linha reta” [2].

Com o surgimento da teoria eletromagnética de Maxwell observou-se um problema de inconsistência com a mecânica newtoniana em relação às transformações dos campos entre referenciais inerciais de Galileu. Por conseguinte, se levantou três hipóteses para explicar o fenômeno [2]:

1. **A mecânica newtoniana e as equações de Maxwell são validas, mas o princípio da relatividade de Galileu não se aplicada a todas as leis físicas**

existente. Além disso, supõe-se que exista um éter (um meio material desconhecido) na qual a luz se desloca com movimento retilíneo e uniforme.

2. O princípio da relatividade de Galileu aplica-se a todas as leis físicas e a mecânica newtoniana está correta. Nesse caso, as equações de Maxwell teriam que ser modificadas, e deveria ser possível observar desvios das leis da eletrodinâmica clássica.
3. Deve existir um princípio da relatividade (não mais a relatividade de Galileu) que aplica-se a todas as leis físicas, e as equações de Maxwell são corretas. Nesse caso, a mecânica newtoniana e as transformação de Galileu não estão corretas: ou seja, podemos observar desvios das leis da mecânica newtoniana.

Para provar a existência do éter, Albert A. Michelson e Edward W. Morley, procuraram testar estas hipóteses em laboratório analisando experimentos de detecção da variação de velocidade da luz em 1881 e 1887. O experimento tratava-se de uma mesa giratória a qual possuía uma fonte de luz e um detector de luz, onde ela seria dividida por um prisma. Em seguida, a luz seria refletida por duas lentes até o detector, onde pela diferença entre as fases dos dois raios de luz poderia obter-se a diferença na velocidade de propagação dos feixes de luzes refletidas pelos espelhos, medindo-se dessa forma, o movimento da Terra em relação ao "éter". Como na figura abaixo [3].

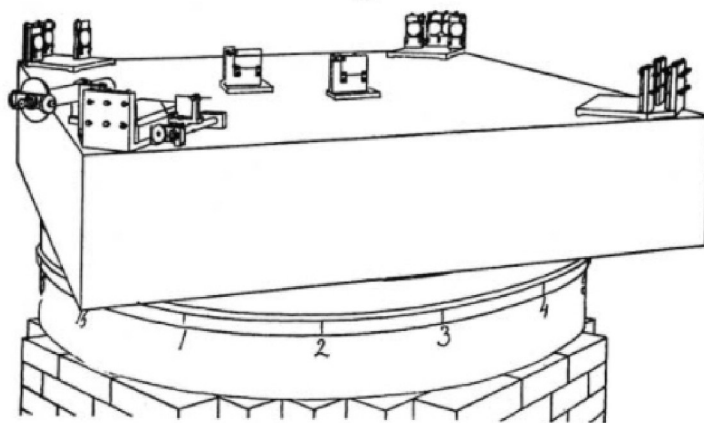


Figura 1 – Ilustração do experimento de Michelson e Morley.

A ideia do experimento era observar o efeito do vento etéreo em ondas de luz. Este efeito deveria ser algo análogo ao efeito do vento sobre as ondas de som. Como nenhuma

diferença foi encontrar na velocidade da luz, se conclui-se que necessitava-se de uma nova teoria. Assim em 1905 Albert Einstein [4], desenvolveu uma teoria de relatividade especial corrigindo a inconsistência entre a mecânica (uma nova teoria mecânica com novas definições para referenciais inerciais) e a teoria eletromagnética de Maxwell, e explicando porque a velocidade da luz é independente da escolha de referencial. A teoria da relatividade especial foi proposta por Einstein em seu trabalho sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento e está edificada em dois postulados [2]:

1. **O princípio da relatividade: as leis da física são as mesma em todos os referenciais inerciais.**
2. **O princípio da constante da velocidade da luz: a velocidade da luz c , no vácuo, é a mesma em todos os referenciais inerciais, e é independente do movimento da fonte.**

Ademais, Einstein estendeu posteriormente a ideia de que as leis física não deveriam depender da escolha entre referenciais mesmo quando os referenciais em questão são não inerciais [1, 5, 6, 7]. Nestes trabalhos publicados em 1907 Einstein propôs o chamado princípio da equivalência, que estabelece que a geometria do espaço-tempo (que não é mais plana) é equivalente a distribuição matéria e energia [4], ou seja, a geometria do espaço-tempo é equivalente a gravitação. Nascia uma das teorias de maior sucesso da física, a relatividade geral, também conhecida como gravitação de Einstein. Com a relatividade geral é possível explicar quase todos os fenômenos astronômicos conhecidos, como o desvio da luz por objetos maciços, o desvio para o vermelho/azul da luz de objetos em movimento, a precessão do periélio de Mercúrio, etc [1, 5, 6, 7].

Além disso, com a relatividade geral pudemos compreender razoavelmente bem a própria cosmologia do Universo, desde sua origem, evolução (formação de galáxias, estrelas, etc) e possíveis futuros [1, 5, 6, 7]. Apesar de todo o sucesso da relatividade geral, atualmente uns dos maiores mistérios da física são o problema de rotação de galáxias, onde a mecânica newtoniana (e também a relatividade geral) não explica por completo o movimento de rotação de estrelas entorno do eixo central da galáxia, e a expansão acelerada do Universo. Uma forma de tentar explicar esses fenômenos é supondo a existência de um tipo exótico de matéria, chamada de matéria escura, e um tipo exótico de energia, chamada de energia escura. A matéria escura seria responsável pela maior parte da matéria

do Universo e explicaria a curva de rotação das galáxia. Já a energia escura, que deveria corresponder a maior parte da energia do Universo, explicaria a expansão acelerada [8, 9].

Ao ajustar um modelo teórico da composição do universo ao conjunto combinado de observações cosmológicas, supondo válidas a teoria de gravitação de Einstein, os cientistas acreditam que a composição do universo deve ser de aproximadamente 68% de energia escura, 27% de matéria escura, e somente 5% de matéria normal [8, 9]. A matéria escura, se existir, ao contrário da matéria normal, não interage com o campo eletromagnético. Isso significa que ela não absorve, reflete ou emite luz, tornando-a extremamente difícil de detectar (e portanto, difícil de provar se ela existe ou não). O mesmo problema encontramos com a energia escura, cuja existência é extremamente difícil de ser verificada. Portanto, a existência da matéria escura e da energia escura ainda não foram verificadas diretamente (se é que existem). Neste sentido novas proposta teóricas tentam buscar explicação para estes fenômenos. Uma alternativa é supor que não existam matéria escura e energia escura, e que a teoria da gravitação precisa ser modificada (assim como a mecânica newtoniana precisou ser modificada com a formulação da relatividade especial). Neste sentido, recentemente foi proposta uma nova teoria de gravitação não-conservativa por meio de uma formulação lagrangiana para sistemas dissipativos [10]. A formulação baseia-se em uma generalização do problema variacional de Herglotz proposto inicialmente nos anos 30 do século XX [10]. Esta teoria mostrou-se promissora ao explicar a expansão acelerada do Universo sem precisar de energia escura [10].

Para compreender esta teoria de gravitação não-conservativas, precisamos primeiro de uma generalização do princípio da mínima ação para sistemas não-conservativos. Neste contexto, um dos objetivos deste trabalho de qualificação é estudar o princípio da mínima ação generalizado de Herglotz [10, 11], e estudar a formulação de teorias de gravitação (relativísticas e não relativísticas) para sistemas não-conservativos. Este trabalho tem também como objetivo iniciar o estudo de efeitos dissipativos desta teoria na órbita planetária. Neste caso, como resultado inédito, estudamos a órbita planetária em uma teoria de gravitação não-conservativa do tipo newtoniana obtida à partir do princípio da mínima ação generalizado de Herglotz. Por fim, estudamos a formulação da gravitação relativística proposta em [10], e como continuação até o término do mestrado, pretendemos estudar o problema da órbita planetária nesta última teoria.

O trabalho está organizado da seguinte forma. No capítulo 2 revisamos o princípio da mínima ação de Hamilton e o aplicamos em diversos problemas, incluindo na formulação

da gravitação de Einstein. Neste capítulo também é discutido brevemente o problema da órbita planetária na teoria de Einstein. O capítulo 3 é dedicado ao estudo do princípio da mínima ação de Herglotz e sua generalização para campos. As teorias de gravitação não conservativas são apresentadas no capítulo 4. Finalmente, no capítulo 5 discutimos a continuação do nosso trabalho até o término do mestrado e apresentamos um cronograma das atividades que serão realizadas.

2 O princípio da mínima ação de Hamilton

Neste capítulo apresentamos uma breve revisão do princípio da mínima ação de Hamilton e sua aplicação na construção da teoria da relatividade geral, assim como de outras teorias física.

2.1 O princípio da mínima ação

A formulação lagrangiana da mecânica newtoniana é baseada no princípio da mínima ação de Hamilton, onde ela descreve o movimento de uma partícula em coordenadas generalizadas. Segundo o princípio da mínima ação, a trajetória descrita por uma partícula é aquela que minimiza o funcional ação [13, 14]:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L[x(t), \dot{x}(t), t] dt, \quad (2.1)$$

onde $x(t)$ é a posição da partícula no instante t . Como a trajetória descrita pela partícula é a que minimiza a ação, ela pode ser obtida anulando-se a variação do funcional:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L[x(t) + \delta x(t), \dot{x}(t) + \delta \dot{x}(t), t] dt - \int_{t_1}^{t_2} L[x(t), \dot{x}(t), t] dt = 0, \quad (2.2)$$

onde variamos a trajetória da partícula de $x(t)$ para $x(t) + \delta x(t)$, e a função $\delta x(t)$ satisfaz a condição de fronteira $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$. Expandindo em Taylor até primeira ordem a lagrangiana na primeira integral obtemos:

$$L[x(t) + \delta x(t), \dot{x}(t) + \delta \dot{x}(t), t] = L[x(t), \dot{x}(t), t] + \frac{\partial L}{\partial x} \delta x(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}(t) + O(\delta^2 x, \delta^2 \dot{x}).$$

Substituindo esta expansão em (2.2), desprezando os termos de segunda ordem, e usando integração por partes no segundo termo, obtemos:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right] \delta x dt + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \right|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right] \delta x dt = 0, \quad (2.3)$$

que deve ser satisfeita para qualquer função δx . Do teorema fundamental do cálculo variacional [13, 14], a única solução para o problema (2.3) é que a função $x(t)$ satisfaça a equação diferencial:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0, \quad (2.4)$$

conhecida como equação de Euler-Lagrange [13, 14].

Uma observação muito importante para o desenvolvimento deste trabalho é que a ação (2.1), para descrever um sistema físico, deve ser um escalar da teoria, ou seja, um invariante sob transformações de referenciais correspondente à teoria física que se utiliza. Por exemplo, se o sistema for no contexto da mecânica clássica, a ação deve ser um invariante por transformações de Galileu. Já para um sistema relativístico, a ação deve ser invariante localmente por transformações de Lorentz.

O princípio da mínima ação apresentado nesta seção pode ser facilmente generalizado para partículas em espaços com dimensão maior e também para campos. O princípio da mínima ação é um dos princípios mais importantes da física. É a partir dele que a dinâmica das teorias físicas (clássicas ou quânticas) é geralmente obtida. Em princípio, a única restrição para que seja válido o princípio da mínima ação de Hamilton é que o sistema deve ser conservativo [10]. Apresentamos a seguir alguns exemplos de aplicação.

2.1.1 A mecânica analítica

Na mecânica analítica [14], a função lagrangiana $L[x(t), \dot{x}(t), t] = K - V$ corresponde à energia cinética K menos a energia potencial V do sistema. Por exemplo, para uma partícula sob a ação de um potencial $V(x)$, a lagrangiana da mecânica se reduz à:

$$L = K - V = \frac{m(\dot{x})^2}{2} - V(x). \quad (2.5)$$

Note que esta lagrangiana é um invariante sobre transformações de Galileu se a função potencial depender da distância da partícula até a fonte do potencial (fonte da força mecânica externa à partícula). Neste caso, a ação também é um invariante. Inserindo (2.5) na equação de Euler-Lagrange (2.4), obtemos a equação de movimento da partícula:

$$m\ddot{x}(t) = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} = F,$$

que coincide com a segunda lei de Newton, e onde identificamos $F = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}$ como sendo a força atuando na partícula.

2.1.2 Teorias clássicas de campos: o eletromagnetismo

Podemos estender o princípio da mínima ação para campos. Seja ψ_μ ($\mu = 0, 1, \dots, n-1$) um campo vetorial físico em um espaço de dimensão n (uma dimensão temporal e $n-1$ espaciais). A função lagrangiana do campo é então definida por [14]:

$$L = \int_V \mathcal{L} \left(\psi_\mu, \frac{\partial \psi_\mu}{\partial t}, \frac{\partial \psi_\mu}{\partial x_i}, x_i, t \right) dx^{n-1}, \quad (2.6)$$

onde a integral é no volume espacial V , e $\mathcal{L}$ é chamada de função densidade de lagrangiana. A função $\mathcal{L}$ é, em geral, uma função do campo e de suas derivadas temporais e espaciais (em t e em x_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$)).

A ação de um sistema é dado pela integral da lagrangiana L no tempo, ou seja,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \mathcal{L} dx^n, \quad (2.7)$$

onde reescrevemos $dt = dx_0$ e $dx^n = dt dx^{n-1}$. Para a ação (2.7), as equações de E-L correspondentes são [13, 14]:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{x_\nu} \psi_\mu)} \right) = 0, \quad (2.8)$$

onde $\mu, \nu = 0, 1, \dots, n$, e utilizamos a convenção de soma de Einstein sobre índices repetidos.

Por fim, vamos considerar a lagrangiana de um campo eletromagnético. Seja $\phi_\mu = A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ o quadrivetor potencial do eletromagnetismo. O tensor de campo de Maxwell $F_{\mu\nu}$ é dado por:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

onde usamos, como usual, $x_0 \equiv ct$ e a métrica de Minkowski $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$. Como convenção, índices latinos correspondem apenas às coordenadas espaciais (isto é, $i, j, k, \dots = 1, 2, 3$) e índices gregos incluem ambas coordenadas de espaço e tempo (isto é: $\mu, \nu, \sigma, \dots = 0, 1, 2, 3$). As componentes F_{0i} do tensor de Maxwell (2.9) correspondem ao campo elétrico, e as componentes F_{ij} correspondem ao campo magnético.

É importante observar que todas as propriedades do campo eletromagnético são determinadas pelo tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$ e não pelo potencial vetor A_μ . Como consequência, a lagrangiana para o campo eletromagnético deverá ser construída pelo

tensor de Maxwell e não pelo potencial vetor. A razão para isso é o fato de que o tensor eletromagnético (2.9) exibe invariância de calibre, ou seja, o potencial vetor é uma quantidade não unicamente definida na teoria eletromagnética. Modificando o potencial vetor da seguinte forma

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \phi, \quad (2.10)$$

não afeta os campos eletromagnéticos, pois

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu(A_\nu + \partial_\nu \phi) - \partial_\nu(A_\mu + \partial_\mu \phi) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \partial_\mu \partial_\nu \phi - \partial_\nu \partial_\mu \phi = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}.$$

Portanto, a transformação (2.10) não altera o tensor eletromagnético e, conseqüentemente, os campos.

Finalmente, a densidade de lagrangiana para o campo eletromagnético pode ser construída, pelo tensor $F_{\mu\nu}$ definido em (2.9), como:

$$\mathcal{L}_{\text{campo}} = -\frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.11)$$

onde $F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma}$. É importante mencionar que a lagrangiana (2.11) é o invariante (sobre as transformações de Lorentz) mais simples que podemos construir a partir dos campos eletromagnéticos [15]. A ação eletromagnética é então dada por:

$$S = -\frac{1}{16\pi c} \int_{\Omega} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} dx^4 - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} j^\mu A_\mu dx^4, \quad (2.12)$$

onde $dx^4 = c dt d^3x$, $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$ é o quadrivetor corrente, $\Omega = [t_1, t_2] \times V$ é o volume do espaço quadridimensional, e a segunda integral em (2.12) representa a interação entre campo e matéria. A condição necessária para o extremo do funcional ação definido acima é dada pela equação de E-L (2.8). Da (2.8) obtemos o chamado segundo par de equações de Maxwell:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu. \quad (2.13)$$

Identificando as componentes dos campos elétricos e magnéticos, o segundo par de equação de Maxwell (2.13) pode ser escrito em uma forma mais familiar:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

É importante notar que o segundo par de equações de Maxwell não fixa completamente a dinâmica dos campos eletromagnéticos. Isto pode ser visto a partir do fato de que

(2.14) fixa a variação temporal do campo elétrico (relacionada à derivada $\partial_t \mathbf{E}$) mas não a variação temporal do campo magnético. Para fixar completamente os campos, precisamos de condições adicionais chamadas de primeiro par de equações de Maxwell. Essas equações são consequências diretas da definição do tensor eletromagnético e de sua invariância por calibre. Da definição (2.9) é fácil verificar que:

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0. \quad (2.15)$$

Identificando as componentes da equação (2.15) com os campos elétrico e magnético, obtemos a forma mais familiar do primeiro par de equações de Maxwell.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

As equações (2.14) e (2.16) fixam completamente a dinâmica dos campos elétrico e magnético e constituem as famosas quatro equações de Maxwell:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{E}, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

2.1.3 Geodésicas

O funcional ação, ou mais precisamente o cálculo variacional, permite determinar a trajetória de partículas livres (sem interação com outras partículas ou com campos¹) em muitos tipos de espaços (euclidiano ou não). As equações de movimento destas partículas livres são conhecidas na matemática como geodésicas [1, 5, 6, 7, 16, 17]. Dados dois pontos no espaço, a geodésica corresponde à curva de menor comprimento ligando estes pontos, ou seja, dado um ponto inicial e um ponto final, uma partícula livre percorre sempre a trajetória de menor distância entre esses pontos. Portanto, a trajetória é a que minimiza o funcional ação

$$S = \int ds, \quad (2.18)$$

¹ Devido ao princípio da equivalência, na relatividade geral as partículas sob ação de um campo gravitacional também seguem como trajetórias geodésicas em um espaço curvo [1, 5, 6, 7].

onde ds é o diferencial do parâmetro comprimento de arco s da trajetória, que satisfaz:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.19)$$

e $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^\beta)$ é o tensor métrico definindo a geometria do espaço. Note que como ds é o elemento de comprimento de arco, a ação (2.18) será naturalmente um invariante sobre as transformações de coordenadas no espaço curvo definido pela métrica $g_{\mu\nu}$. Supondo que a trajetória x^μ é alterada para $x^\mu + \delta x^\mu$, então teremos:

$$\begin{aligned} \delta(ds^2) = 2ds\delta(ds) &= \delta(g_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu + g_{\mu\nu}\delta(dx^\mu)dx^\nu + g_{\mu\nu}dx^\mu\delta(dx^\nu) \\ &= g_{\mu\nu,\beta}\delta(x^\beta)dx^\mu dx^\nu + 2g_{\mu\beta}dx^\mu\delta(dx^\beta), \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde usamos o fato de que $g_{\mu,\nu}$ é um tensor simétrico, e

$$\delta(g_{\mu\nu}) = g_{\mu\nu}(x^\beta + \delta(x^\beta)) - g_{\mu\nu}(x^\beta) = g_{\mu\nu,\beta}\delta(x^\beta) + O(\delta^2(x^\beta)).$$

Usando $\delta(dx^\beta) = d\delta(x^\beta)$ e $dx^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}ds = \dot{x}^\mu ds$ em (2.20), obtemos:

$$\delta(ds) = \left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu,\beta}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\delta(x^\beta) + g_{\mu\beta}\dot{x}^\mu\frac{d\delta(x^\beta)}{ds} \right) ds. \quad (2.21)$$

Portanto, da variação da ação (2.18) obtemos a condição:

$$\delta(S) = \int \delta(ds) = \int \left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu,\beta}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\delta(x^\beta) + g_{\mu\beta}\dot{x}^\mu\frac{d\delta(x^\beta)}{ds} \right) ds = 0. \quad (2.22)$$

Fazendo integração por partes no segundo termo do integrando em (2.22), e impondo a condição $\delta(x^\beta) = 0$ sobre o ponto inicial e final da trajetória, obtemos:

$$\delta(S) = \int \delta(ds) = \int \left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu,\beta}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu - \frac{d}{ds}(g_{\mu\beta}\dot{x}^\mu) \right) \delta(x^\beta) ds = 0. \quad (2.23)$$

Do lema fundamental do cálculo variacional [13, 14] obtemos, então:

$$\frac{d}{ds}(g_{\mu\beta}\dot{x}^\mu) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu,\beta}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0. \quad (2.24)$$

Reescrevendo

$$\frac{d}{ds}(g_{\mu\beta}\dot{x}^\mu) = g_{\mu\beta}\ddot{x}^\mu + g_{\mu\beta,\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = g_{\mu\beta}\ddot{x}^\mu + \frac{1}{2}(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu})\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu, \quad (2.25)$$

onde usamos o fato de que $g_{\mu,\nu}$ é um tensor simétrico. Substituindo (2.25) em (2.24), e multiplicando por $g^{\beta\rho}$ obtemos:

$$\frac{d^2x^\rho}{d\tau^2} + g^{\beta\rho} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0,$$

onde fizemos a substituição de variável $s = \tau$ para o tempo próprio (onde consideramos a partir daqui, sem perda de generalidade, $c = 1$). Portanto, obtemos como equação de movimento da partícula livre a famosa equação da geodésica

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (2.26)$$

onde

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = g^{\beta\rho} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} \right)$$

é o chamado símbolo de Christoffel [1, 5, 6, 7, 16, 17].

É importante mencionar que se o espaço for plano (euclidiano), então $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = 0$, e a equação da geodésica se reduz à $\frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} = 0$, de onde obtemos uma reta como trajetória da partícula livre. Em outras palavras, no espaço plano, a reta é a curva de menor comprimento ligando dois pontos do espaço. No caso de um espaço curvo, teremos $\frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} \neq 0$ e a geodésica não será mais uma reta.

2.2 Equação de campo de Einstein e ação Einstein-Hilbert

Da mesma forma que as equações de Maxwell descrevem como o campo elétrico e magnético respondem à presença das distribuições de cargas e correntes, as equações de Einstein descrevem como a métrica do espaço-tempo responde à uma distribuição de energia e o momento. Vamos considerar um espaço-tempo com a métrica $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^\beta)$ ($\beta = 0, 1, 2, 3$) definida no domínio $\Omega \in \mathbb{R}^4$. Então, o problema variacional para o campo gravitacional consiste em determinar o tensor métrico $g_{\mu\nu}$, que extremiza o funcional integral

$$S = \int_{\Omega} \mathcal{L}(x^\mu, g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,\beta}) \sqrt{-g} d^4 x, \quad (2.27)$$

onde $g_{\mu\nu,\beta} = \partial_\beta g_{\mu\nu}$, $\sqrt{-g} = \sqrt{-\det g}$, e $\delta\Omega$ é a fronteira de Ω , e $g_{\mu\nu}$ satisfazem as condições de contorno $g_{\mu\nu}(\delta\Omega) = g_{\mu\nu}^{\delta\Omega}$ com $g_{\mu\nu}^{\delta\Omega} : \delta\Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Falta ainda determinar quem é a função lagrangiana $\mathcal{L}$. Para a ação (2.27) ser um invariante, esta lagrangiana deve ser contraída com invariantes do espaço-tempo curvo. O próximo passo é verificar quais são esses possíveis invariantes para construir $\mathcal{L}$. A geometria do espaço-tempo é caracterizada pelo tensor de Riemann:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}. \quad (2.28)$$

Do tensor de Riemann, podemos verificar as seguintes propriedades [1, 5]:

i) Simetria $R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$

ii) Anti-simetria $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu} = R_{\sigma\rho\nu\mu}$

iii) Cíclica $R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} + R_{\rho\sigma\mu\nu} = 0$,

onde $R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\lambda\rho} R^\lambda_{\sigma\mu\nu}$. Podemos contrair o tensor de Riemann $R_{\rho\sigma\mu\nu}$ com o tensor métrico $g^{\rho\sigma}$, para construir o tensor de Ricci

$$R_{\sigma\nu} = g^{\rho\mu} R_{\rho\sigma\mu\nu}. \quad (2.29)$$

A propriedade de simetria i), garante que o tensor de Ricci também exibe a propriedade de simetria

$$R_{\sigma\nu} = R_{\nu\sigma}, \quad (2.30)$$

e a propriedade de anti-simetria ii) diz-nos que $R_{\sigma\nu}$ é o único tensor de segunda ordem que pode ser construído através do tensor $R_{\rho\sigma\mu\nu}$. Consequentemente, multiplicando ii) por $g^{\rho\mu}$, $g^{\rho\sigma}$ e $g^{\mu\nu}$ temos

$$\begin{aligned} R_{\sigma\nu} &= -g^{\rho\mu} R_{\sigma\rho\mu\nu} = -g^{\rho\mu} R_{\rho\sigma\nu\mu} = g^{\rho\mu} R_{\sigma\rho\nu\mu} \\ g^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma\mu\nu} &= g^{\mu\nu} R_{\rho\sigma\mu\nu} = 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Então, a natureza anti-simétrica do tensor $R_{\rho\sigma\mu\nu}$ permite construir apenas um único tensor de segunda ordem. Em consequência, os únicos escalares são obtidos contraindo as expressões em (2.31), ou seja

$$\begin{aligned} R &= g^{\sigma\nu} R_{\sigma\nu} = g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} R_{\rho\sigma\mu\nu} = -g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} R_{\sigma\rho\mu\nu} \\ g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

E por fim, pela propriedade iii) temos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \tilde{\epsilon}^{\rho\sigma\mu\nu} R_{\rho\sigma\mu\nu} = 0 \quad (2.33)$$

Podemos concluir que o único invariante (escalar) não nulo que pode ser construído a partir do tensor Ricci $R_{\sigma\nu}$ é o escalar de Ricci $R = g^{\sigma\nu} R_{\sigma\nu}$.

Com um único invariante, a lagrangiana mais simples para o campo gravitacional é $\mathcal{L} = \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_g$, onde $\mathcal{L}_m$ é a lagrangiana correspondente à parte da matéria e

$$\mathcal{L}_g = R. \quad (2.34)$$

O problema em utilizar diretamente a lagrangiana (2.34) é que ela depende efetivamente de termos contendo até a derivada segunda da métrica, devido a definição do tensor de Riemann (2.28), o que implica que o princípio clássico da mínima ação (2.27) deveria ser modificado incluindo condições sobre as derivadas de segunda ordem na fronteira do domínio [7]. Uma alternativa é identificar que o escalar de Ricci pode ser reescrito como [7] $R = \tilde{L} - L$, com $\tilde{L} = g^{\mu\nu}(\Gamma_{\mu\sigma,\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu,\sigma}^\sigma)$ e $L = g^{\mu\nu}(\Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\rho}^\rho - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\sigma)$. Uma vez que a segunda derivada ocorre em $\tilde{L}$ linearmente, podemos pela regra do produto reescrever [7]

$$\tilde{L} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left((g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma \sqrt{g})_{,\nu} - (g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \sqrt{g})_{,\sigma} - (g^{\mu\nu} \sqrt{g})_{,\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma + (g^{\mu\nu} \sqrt{g})_{,\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \right), \quad (2.35)$$

onde o operador $(\cdot)_{,\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma}$, onde g é o determinante do tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Os dois primeiros termos são derivadas totais, então não têm contribuição para a equação do campo gravitacional [5, 7]. Sobrando apenas os dois últimos termos, que com o auxílio da derivação covariante podem ser escritos na forma equivalente à $2L$. Consequentemente, a equação do campo gravitacional pode ser obtida apenas levando em conta termos efetivos na densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L}(x^\mu, g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta,\mu}) = \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{ef} = \mathcal{L}_m + L, \quad (2.36)$$

pois $\int_\Omega \tilde{L} \sqrt{d^d x} = 2 \int_\Omega L \sqrt{d^d x} + \text{constante}$ [7].

Para obter as equações de campo generalizadas, vamos definir uma família da métrica $g_{\mu\nu}$ tal que

$$g_{\mu\nu}(x^\mu) = g_{\mu\nu}^*(x^\beta) + \delta(g_{\mu\nu})(x^\beta), \quad (2.37)$$

onde $g_{\mu\nu}^*$ é a métrica que extremiza S em (2.27), e $\delta(g_{\mu\nu})$ satisfazem as condições de fronteira $\delta(g_{\mu\nu})(\delta\Omega) = 0$. Tomando a variação de (2.27) com (2.36) obtemos

$$\delta(S) = \int_\Omega \delta(\mathcal{L}(x^\mu, g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta,\mu}) \sqrt{g}) d^4x = \int_\Omega [\delta(L\sqrt{g}) + \delta(\mathcal{L}_m\sqrt{g})] d^4x = 0. \quad (2.38)$$

Calculemos primeiro os termos da (2.38) referente à parte da geometria, ou seja, referente ao termo $\delta_\epsilon(L\sqrt{g})$ (veja [7]):

$$\begin{aligned} \delta \left(\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta g^{\mu\nu} \sqrt{g} \right) &= \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \delta \left(\Gamma_{\alpha\beta}^\beta g^{\mu\nu} \sqrt{g} \right) + \delta \left(\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \right) \Gamma_{\alpha\beta}^\beta g^{\mu\nu} \sqrt{g} \\ &= \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \delta \left(g^{\mu\nu} \sqrt{g} \right)_{,\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\beta \left[\delta \left(\Gamma_{\mu\nu}^\alpha g^{\mu\nu} \sqrt{g} \right) - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \delta \left(g^{\mu\nu} \sqrt{g} \right) \right] \\ &= \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \delta \left(g^{\mu\nu} \sqrt{g} \right)_{,\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^\beta \delta \left(g^{\alpha\nu} \sqrt{g} \right)_{,\nu} - \Gamma_{\alpha\beta}^\beta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \delta \left(g^{\mu\nu} \sqrt{g} \right), \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde foi usado o produto das derivadas e as igualdades [7]

$$\begin{aligned}\Gamma_{\nu\mu}^{\mu}\sqrt{} &= \sqrt{}_{,\nu} \\ (g^{\mu\nu}\sqrt{})_{,\nu} &= -g^{\nu\beta}\Gamma_{\beta\nu}^{\mu}\sqrt{}.\end{aligned}\tag{2.40}$$

Da mesma maneira temos que

$$\begin{aligned}\delta\left(\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}g^{\mu\nu}\sqrt{}\right) &= \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}\delta\left(\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}g^{\mu\nu}\sqrt{}\right) + \delta\left(\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}\right)\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}g^{\mu\nu}\sqrt{} \\ &= \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}\left[\delta\left(\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}\right)g^{\mu\nu}\sqrt{} + \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}\delta\left(g^{\mu\nu}\sqrt{}\right)\right] + \delta\left(\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}\right)\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}g^{\mu\nu}\sqrt{} \\ &= 2\delta\left(\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}\right)\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}g^{\mu\nu}\sqrt{} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}\delta\left(g^{\mu\nu}\sqrt{}\right) \\ &= 2\delta\left(\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}g^{\mu\nu}\sqrt{}\right)\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}\delta\left(g^{\mu\nu}\sqrt{}\right) \\ &= -\delta\left(g^{\mu\alpha}_{,\beta}\sqrt{}\right)\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}\delta\left(g^{\mu\nu}\sqrt{}\right),\end{aligned}\tag{2.41}$$

onde usamos:

$$g^{\mu\nu}_{,\sigma} = -\left(g^{\nu\beta}\Gamma_{\sigma\beta}^{\mu} + g^{\mu\beta}\Gamma_{\sigma\beta}^{\nu}\right).\tag{2.42}$$

Podemos então escrever que:

$$\delta_{\epsilon}\left(L\sqrt{}\right) = \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\delta_{\epsilon}\left(g^{\mu\nu}\sqrt{}\right)_{,\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}\delta_{\epsilon}\left(g^{\alpha\nu}\sqrt{}\right)_{,\nu} + \left(\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\right)\delta_{\epsilon}\left(g^{\mu\nu}\sqrt{}\right).\tag{2.43}$$

Então, da condição (2.38) obtemos:

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}\left[\delta(L\sqrt{}) + \delta(\mathcal{L}_m\sqrt{})\right]d^4x \\ &= \int_{\Omega}\left[\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\delta_{\epsilon}(g^{\mu\nu}\sqrt{})_{,\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha}\delta_{\epsilon}(g^{\mu\nu}\sqrt{})_{,\nu} + \left(\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\right)\delta_{\epsilon}(g^{\mu\nu}\sqrt{})\right. \\ &\quad \left.+ 8\pi GT_{\mu\nu}\delta_{\epsilon}(g^{\mu\nu})\sqrt{}\right]d^4x = 0,\end{aligned}\tag{2.44}$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento definido por $\delta(\mathcal{L}_m\sqrt{}) = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}\delta_{\epsilon}(g^{\mu\nu})\sqrt{}$ [7]. Depois de realizar uma integração por partes, e dado que $\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{}) = \delta(g^{\mu\nu})\sqrt{} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}\delta(g^{\alpha\beta})\sqrt{}$, obtemos [7]:

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}\left[\delta(L\sqrt{}) + \delta(\mathcal{L}_m\sqrt{})\right]d^4x \\ &= -\int_{\Omega}\delta(g^{\mu\nu})\sqrt{}\left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - 8\pi GT_{\mu\nu}\right]d^4x \\ &\quad + \int_{\Omega}\left(\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{}) - \Gamma_{\mu\nu}^{\nu}\delta(g^{\mu\alpha}\sqrt{})\right)_{,\alpha}d^4x = 0.\end{aligned}\tag{2.45}$$

A última integral em (2.44) é nula pois, pela condição de fronteira, temos $\delta(g_{\mu\nu})(\delta\Omega) = 0$. Assim, a partir do lema fundamental do cálculo variacional obtemos de (2.44) a equação do campo gravitacional:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu},\tag{2.46}$$

conhecida como equação de Einstein, e que fixam a geometria do espaço-tempo dada uma distribuição de energia e momentum.

Antes de finalizar o capítulo vamos mostrar que a gravitação de Einstein contém, como caso especial de campos fracos, a gravitação newtoniana. Para isto, vamos analisar o caso de campos fracos. Em espaços quase planos a métrica é aproximadamente a de Minkowski [5], isto é, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ com $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Em primeira ordem em h , escolhendo o calibre $\eta^{\mu\nu}(h_{\mu\rho,\nu} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu,\rho}) = 0$ [10], obtemos à partir das equações de campo [5]:

$$\square^2 h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu} \quad (2.47)$$

onde $S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T^\lambda{}_\lambda$. No caso homogêneo $S_{\mu\nu} = 0$, a equação de campo (2.47) descreve em coordenadas cartesianas ondas gravitacionais [5]. Além disso, para uma distribuição estática e esférica de massa, e no vácuo, a equação de campo se reduz à:

$$\nabla^2 h_{00} = 0, \quad (2.48)$$

que tem como solução (impondo condições de fronteira adequadas [5]) a gravitação newtoniana pois, neste caso, temos:

$$h_{00} = -\frac{2}{c^2} \frac{GM}{r}, \quad (2.49)$$

que resulta no potencial gravitacional Newtoniano [5].

Finalmente, considerando campos não tão fracos, onde é preciso utilizar aproximações de maior ordem em $h_{\mu\nu}$, Einstein provou que a presença de um termo de correção à gravitação newtoniana explicava com precisão o problema da precessão do periélio de Mercúrio [5]. Este foi um dos principais indícios de que a teoria de Einstein estava correta logo após a sua formulação. Veremos nas próximas duas subseções uma breve discussão sobre o problema da órbita planetária na gravitação de Einstein.

2.2.1 Métrica de Schwarzschild

A equação de campo de Einstein (2.46) corresponde a um sistema de dez equações diferenciais não-lineares. Soluções exatas para esta equação só existem em casos simples, onde a simetria do problema permite simplificar as equações diferenciais envolvidas. A métrica de Schwarzschild foi a primeira solução publicada da equação de campo Einstein (2.46). Esta solução corresponde a geometria do espaço-tempo gerada por um objeto

estático massivo de massa M condensado em uma esfera com um raio r . Neste caso, a métrica do espaço-tempo no vácuo (exterior ao corpo) reflete a simetria esférica da distribuição de massa. Neste sentido, este trabalho buscou de forma simples realizar uma revisão literária das principais características e aspectos das soluções da métrica de Schwarzschild e seu papel de relevância dentro do contexto da mecânica relativística atual [1, 7, 18].

Para lidarmos a solução de Schwarzschild podemos utilizar coordenadas esféricas [1, 5, 6, 18]. Neste caso, a simetria do problema nos permite escrever a métrica em coordenadas esféricas como [1, 5, 6, 18]:

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad (2.50)$$

onde $d\Omega^2 = r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\psi^2$ é o quadrado do elemento de ângulo sólido, com (θ, ψ) variáveis de ângulo sobre uma superfície esférica de raio r centrada na distribuição esférica de massa. Portanto, o tensor métrico é diagonal:

$$g_{\nu\mu} = \begin{bmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}.$$

E os símbolos de Christoffel não nulos são [1, 5, 6, 18]:

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{A'(r)}{2A(r)}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r}{A(r)}, \quad \Gamma_{\psi\psi}^r = \frac{-r\sin\theta}{A(r)}, \quad \Gamma_{tt}^r = \frac{B'(r)}{2A(r)}, \quad (2.51)$$

$$\Gamma_{\psi\psi}^\theta = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^r = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\psi r}^\psi = \Gamma_{r\psi}^r = \frac{1}{r}, \quad (2.52)$$

$$\Gamma_{\psi\theta}^\psi = \Gamma_{\theta\psi}^\psi = \cot\theta, \quad \Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = \frac{B'(r)}{2B(r)}. \quad (2.53)$$

Por fim os termos não automaticamente nulos do Tensor de Ricci são [1, 5, 6, 18]:

$$R_{rr} = \frac{B''(r)}{2B(r)} - \frac{1}{4} \left(\frac{B'(r)}{B(r)} \right) \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} \right), \quad (2.54)$$

$$R_{\theta\theta} = -1 + \frac{r}{2A(r)} \left(-\frac{A'(\hat{r})}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) + \frac{1}{A(r)}, \quad (2.55)$$

$$R_{\psi\psi} = \sin^2\theta R_{\theta\theta}, \quad (2.56)$$

$$R_{tt} = -\frac{B''(r)}{2A(r)} + \frac{1}{4} \left(\frac{B'(r)}{A(r)} \right) \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{B'(r)}{A(r)} \right). \quad (2.57)$$

É importante ressaltar uma solução para as equações de Einstein no vácuo (fora da distribuição de massa) para o problema de uma distribuição esférica pode ser obtida anulando-se todos os termos do tensor de Ricci, ou seja, impondo $R_{\mu\nu} = 0$ [1, 5, 6, 18]. Neste caso, multiplicando (2.54) por A^{-1} e (2.57) por B^{-1} , somando ambas, obtemos:

$$\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} = 0 \implies \frac{d}{dr}(AB) = 0,$$

o que implica que $A(r)B(r) = cte$. Como a geometria do espaço tempo deve ser plana quando o raio vai para infinito, devemos ter:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1.$$

Isso nos garante que as funções $A(r)$ e $B(r)$ são uma o inverso da outra, ou seja,

$$A(r) = \frac{1}{B(r)}.$$

Substituindo este resultado na equação (2.55), e fazendo $R_{\theta\theta} = 0$ no vácuo, obtemos:

$$R_{\theta\theta} = -1 + B'(r)r + B(r) = 0,$$

que tem como solução:

$$B(r) = 1 - \frac{r_s}{r},$$

onde o valor da constante r_s corresponde ao chamado de raio de Schwarzschild, que estabelece o limite mínimo para o raio de um objeto massivo de massa M para que ele não se torne um buraco negro. Isto ocorre pois devemos ter $B(r) > 0$ para que a métrica do espaço tempo seja não-singular. Podemos identificar r_s com a massa do objeto analisado através da chamada velocidade de escape $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GmM}{r_s} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r_s}}$ de um corpo da superfície do objeto massivo com seu raio mínimo r_s . Se substituirmos a velocidade v pela velocidade da luz c , teremos [18]:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}. \quad (2.58)$$

Portanto, podemos rescrever [18]:

$$B(r) = 1 - \frac{2GM/c^2}{r} = 1 - \frac{r_s}{r}, \quad (2.59)$$

e

$$A(r) = \left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}. \quad (2.60)$$

Com esses resultados, a equação (2.56) é automaticamente satisfeita. Além disso, podemos reescrever ds^2 como:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (2.61)$$

definindo a chamada métrica de Schwarzschild. Para esta métrica, os símbolos de Christoffel resultam em [1]:

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2} \frac{r_s}{r(r - r_s)}, \quad (2.62)$$

$$\Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = \frac{1}{2} \frac{r_s}{r(r - r_s)}, \quad (2.63)$$

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2} \frac{r_s(r - r_s)}{r^3}, \quad (2.64)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = r_s - r, \quad (2.65)$$

$$\Gamma_{\psi\psi}^r = (r_s - r) \sin^2 \theta, \quad (2.66)$$

$$\Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\psi r}^\psi = \Gamma_{r\psi}^\psi = \frac{1}{r}, \quad (2.67)$$

$$\Gamma_{\psi\psi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \quad (2.68)$$

$$\Gamma_{\theta\psi}^\psi = \Gamma_{\psi\theta}^\psi = \cot \theta. \quad (2.69)$$

2.2.2 A geodésica para a métrica de Schwarzschild

Vamos analisar a equação da geodésica (2.26) em um espaço com métrica de Schwarzschild. A solução desta equação descreve, por exemplo, o movimento orbital de planetas ao redor de estrelas. Fazendo $c = 1$, sem perda de generalidade, e usando a métrica de Schwarzschild e os símbolos de Christoffel da subseção anterior, obtemos da equação da geodésica (2.26) 4 termos não automaticamente nulos [1, 18]:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 r}{d\tau^2} - \left(\frac{r_s}{2r(r - r_s)} \right) \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - (r - r_s) \left[\left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\psi}{d\tau} \right)^2 \right] \\ & + \left(\frac{r_s(r - r_s)}{2r^3} \right) \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0, \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} - \sin\theta \cos\theta \left(\frac{d\psi}{d\tau} \right)^2 = 0, \quad (2.71)$$

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} + 2 \cot\theta \frac{d\psi}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} = 0, \quad (2.72)$$

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} + \frac{r_s}{r(r-r_s)} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} = 0. \quad (2.73)$$

Como observamos que o espaço-tempo possui uma certa simetria (simetria esférica), então haverá quantidades física conservadas associadas a trajetória geodésica [1]. Essas quantidades surgem naturalmente nas equações da geodésica acima. Por exemplo, a equação (2.71) tem como uma solução a função constante $\theta = \frac{\pi}{2}$, o que implica que o movimento orbital resultante ocorrerá em um plano. Isto junto com o fato de que a métrica é independente do ângulo ψ implica na conservação de momento angular $L = cte$. A conservação do momento angular surge como solução da equação (2.72) fazendo $\theta = \frac{\pi}{2}$, de onde obtemos:

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} = 0,$$

e multiplicando por $m r^2$ (m é a massa da partícula em órbita):

$$m r^2 \frac{d^2\psi}{d\tau^2} + 2 m r \frac{d\psi}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} = 0 \rightarrow \frac{d}{d\tau} \left(m r^2 \frac{d\psi}{d\tau} \right) = 0 \rightarrow m r^2 \frac{d\psi}{d\tau} = L = cte, \quad (2.74)$$

onde L é o momento angular da partícula em órbita. Da quarta equação (2.73) obtemos a lei de conservação da energia [1, 13, 14, 15]. Para encontrar este resultado, multiplicamos (2.73) por $\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)$:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{d^2t}{d\tau^2} + \frac{r_s}{r^2} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} &= 0 \rightarrow \frac{d}{d\tau} \left[\frac{dt}{d\tau} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \right] = 0 \\ &\rightarrow \frac{dt}{d\tau} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) = \frac{E}{m} = cte, \end{aligned} \quad (2.75)$$

onde E é a energia orbital [1].

Finalmente, resta apenas uma das 4 equações da geodésica para resolver, a equação (2.70). A solução desta equação nos dará a órbita planetária na gravitação de Einstein. Substituindo $\theta = \frac{\pi}{2}$, reescrevendo $\frac{d\psi}{d\tau}$ e $\frac{dt}{d\tau}$ em função de L e E (fazendo $m = 1$, sem perda de generalidade), e reescrevendo $\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\psi} \frac{d\psi}{d\tau}$, obtemos da (2.70) após algumas manipulações (para mais detalhes veja [1]):

$$\left(\frac{dr}{d\psi} \right)^2 + \frac{1}{L^2} r^4 - \frac{r_s}{L^2} r^3 + r^2 - r_s r = \frac{E^2}{L^2} r^4. \quad (2.76)$$

Para simplificar a resolução desta última equação, fazemos a mudança de variável [1]):

$$x = \frac{2L^2}{r_s r},$$

em (2.76) e derivamos uma vez em relação a ψ . Desta forma, a (2.76) se transforma em [1]):

$$\frac{d^2 x}{d\psi^2} - 1 + x = \frac{3r_s^2}{4L^2} x^2. \quad (2.77)$$

É importante salientar que no limite $r_s \rightarrow 0$ a equação da geodésica (2.77) se reduz a equação de movimento da gravitação Newtoniana. Portanto, o termo do lado direito da equação (2.77) pode ser interpretado como um termo de correção à gravitação newtoniana. Este termo explica o problema da precessão da órbita de Mercúrio. Para ilustrar o efeito de precessão orbital na gravitação de Einstein, na Figura 2 apresentamos a solução numérica da equação (2.77) com as condições iniciais $r(0) = 1$ e $\frac{r(0)}{d\psi} = 0$, e com os valores $r_s = 0.01$ e $L = 0.05$. Neste gráfico, em azul temos a órbita na gravitação de Einstein apresentando a precessão da órbita planetária. Para comparação, em laranja temos a órbita planetária na gravitação de Newton. O código numérico utilizado para obter a solução apresentada na Figura 2 foi implementado em Python e está disponível no Apêndice A.

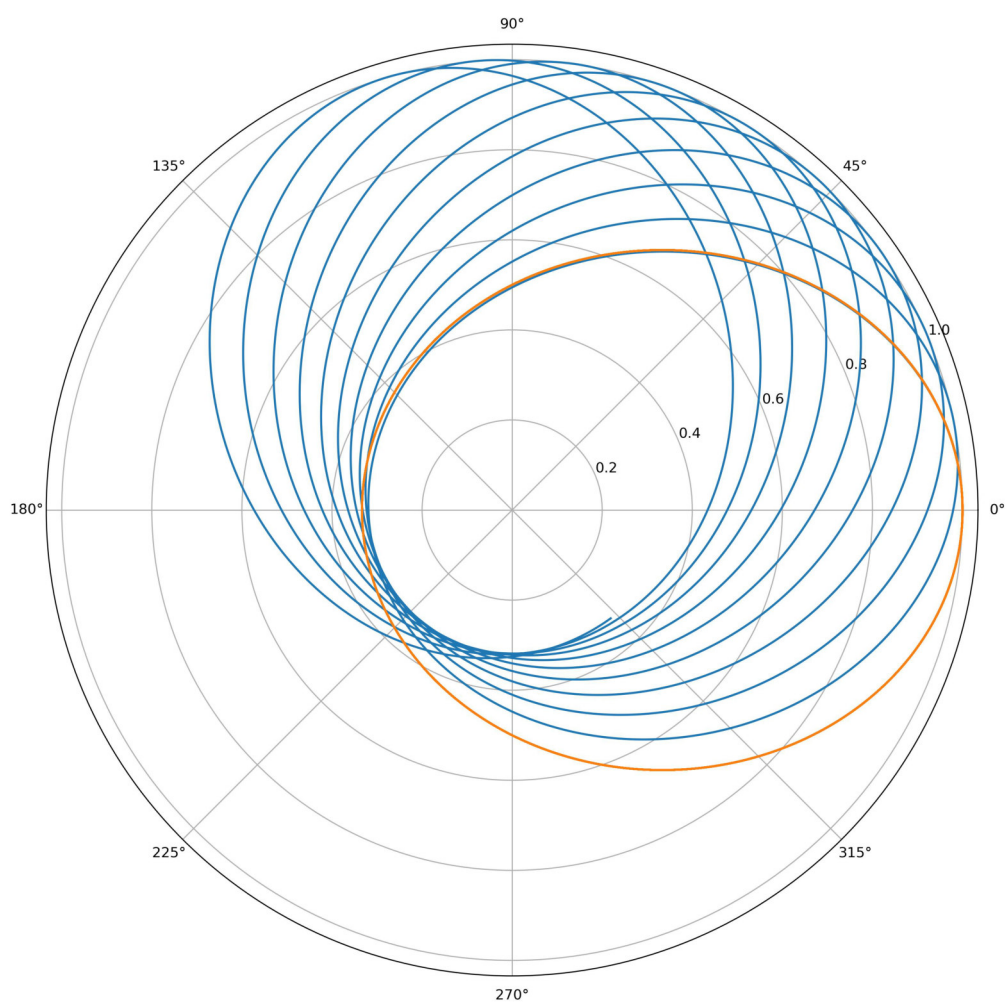


Figura 2 – Solução da equação da geodésica com a métrica de Schwarzschild em azul. Para comparação, em laranja temos a órbita planetária na gravitação de Newton.

3 O princípio da mínima ação de Herglotz

A motivação para a pesquisa de teorias de gravitação não conservativa foi fundamental na necessidade de encontrar respostas, que proporcionassem ferramentas para o entendimento de mecanismos na observados na cosmologia e na astrofísica de partículas. Especificamente, por meio do princípio da mínima ação de Herglotz. Assim poderemos formular teorias de gravitação não-conservativas, precisamos primeiro de uma generalização do princípio da mínima ação para sistemas não-conservativos. O princípio da mínima ação é um dos pilares fundamentais na construção de qualquer teoria física moderna. Em todas as teorias, clássica ou quântica, a dinâmica de qualquer sistema conservativo é obtida à partir deste princípio. No entanto, é bem conhecido que as equações de movimento de sistemas dissipativos não podem ser obtidas diretamente pelo princípio da mínima ação [10, 11]. Durante todo o século passado, diversos métodos foram desenvolvido para tentar contornar esta dificuldade. Exemplos incluem as lagrangianas dependentes do tempo, as variáveis auxiliares de Bateman, e ações com derivadas fracionárias [11]. Infelizmente, em todas estas abordagens ou se utiliza de lagrangianas não-físicas, como nos dois primeiros exemplos, ou se utiliza de operadores não-locais com propriedades algébricas diferentes das derivadas usuais. Apesar das diferenças, em todos esses métodos para adaptar o princípio da mínima ação para sistemas não-conservativos, a ação é sempre definida da forma usual como a integral de uma função lagrangiana que depende do tempo, posição (ou campos), e suas derivadas. No entanto, recentemente foi proposto um novo princípio da mínima ação para sistemas não conservativos, baseado no problema variacional de Herglotz, que controna essas dificuldades [10, 11].

O problema variacional original de de Herglotz consiste no problema de determinar a função $x(t)$ que extremiza o valor $M(t_1)$, onde o funcional $M(t)$ (com $t \in [t_0, t_1]$) é solução da equação diferencial [10]

$$\frac{dM}{dt} = L(t, x(t), \dot{x}(t), M(t)), \quad (3.1)$$

sujeita as condições iniciais e de contorno:

$$M(t_0) = m_0, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1.$$

É importante notar que (3.1) representa uma família de equações diferenciais pois para cada função $x(t)$ temos uma equação diferente. Portanto, $M(t)$ depende de $x(t)$. Além disso, o problema de Herglotz se reduz ao problema fundamental do cálculo variacional se a função lagrangiana L não depender de $M(t)$. Neste caso temos [10]:

$$\begin{aligned}\dot{M}(t) &= L(t, x(t), \dot{x}(t)), \quad t \in [a, b] \\ M(t_0) &= s_0, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1,\end{aligned}\tag{3.2}$$

então, integrando (3.2), obtemos o problema clássico da cálculo variacional:

$$M(t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \tilde{L}(t, x(t), \dot{x}(t)) dt,\tag{3.3}$$

onde $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, e

$$\tilde{L}(t, x(t), \dot{x}(t)) = L(t, x(t), \dot{x}(t)) + \frac{s_0}{t_1 - t_0}.\tag{3.4}$$

Herglotz provou [10] que uma condição necessária para que a função $x(t)$ seja um extremante do funcional (3.1) é dada pela generalização da equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial L}{\partial M} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0.\tag{3.5}$$

É importante notar que no caso do problema clássico do cálculo variacional (3.3), nós temos $\frac{\partial L}{\partial S} = 0$, e a equação diferencial (3.5) se reduz a equação clássica de Euler-Lagrange. Além disso, a aplicação do problema de Herglotz para sistemas não conservativos é evidente mesmo no caso mais simples, onde a dependencia da lagrangiana na ação é linear. Por exemplo, a função

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) - \frac{\gamma}{m}M\tag{3.6}$$

descreve um sistema dissipativo com uma partícula pontual de massa m sob ação de um potencial $U(x)$ e uma força viscosa com coeficiente de resistência γ . De (3.5), a equação de movimento resultante é:

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} = F,\tag{3.7}$$

que uma força de atrito proporcional à velocidade $\dot{x}$, onde $\ddot{x}$ é a aceleração da partícula e $F = -\frac{dU}{dx}$ é uma força externa conservativa. Neste contexto, o termo linear $\frac{\gamma}{m}M$ na lagrangiana (3.6) pode ser interpretado como a função potencial da força não conservativa [10].

Para demonstrar que o extremante do problema de Herglotz satisfaz a equação generalizada de Euler-Lagrange (3.5), fazemos (como usual) uma variação da função

$x(t) \longrightarrow x(t) + \epsilon \delta x(t)$ ($t \in [t_0, t_1]$) onde $\delta x(t)$ satisfaz a condição de fronteira $\delta x(t_0) = \delta x(t_1) = 0$. Integrando a (3.1) obtemos:

$$M(x(t) + \epsilon \delta x(t), \dot{x}(t) + \epsilon \delta \dot{x}(t), t) = \int L(x(t) + \epsilon \delta x(t), \dot{x}(t) + \epsilon \delta \dot{x}(t), t) dt.$$

Derivando em relação a ϵ obtemos:

$$\frac{\partial M}{\partial \epsilon} = \int \left(\frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial \epsilon} \right) dt,$$

e derivando novamente em relação a t :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial M}{\partial \epsilon} = \left(\frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial \epsilon} \right). \quad (3.8)$$

Fazendo a mudança de variável

$$\Omega = \frac{\partial M}{\partial \epsilon},$$

podemos reescrever (3.8) como:

$$\frac{d\Omega}{dt} - \frac{\partial L}{\partial M} \Omega = \left(\frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right), \quad (3.9)$$

que satisfaz a condição de fronteira $\Omega(t_0) = \Omega(t_1) = 0$ quando $\epsilon = 0$ (pois $x(t)$ é um extremante), e é um EDO de primeira ordem linear. Podemos usar o método de fator de integração para resolver esta EDO [19]. Seja uma EDO da forma:

$$\dot{y} + a(x)y = b(x),$$

temos como fator de integração $\mu(x) = \exp \left(\int a(x) dx \right)$ onde $\mu \neq 0$. Portanto, a EDO pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt} (y(x)\mu(x)) = b(x)\mu(x),$$

de onde obtemos a solução por integração direta [19]:

$$y(x) = \exp \left(- \int a(x) dx \right) \int b(x) \exp \left(\int a(x) dx \right) dx$$

Retornando para o nosso problema (3.9), e usando o método de fator de integração com a condição de fronteira $\Omega(t_0) = \Omega(t_1) = 0$, obtemos:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right) \exp \left(- \int \frac{\partial L}{\partial M} dt \right) dt = 0.$$

Logo usando integrais por partes, obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial M}{\partial \dot{x}} \right) \exp \left(- \int \frac{\partial L}{\partial M} dt \right) \delta x dt \\ & + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \exp \left(- \int \frac{\partial L}{\partial M} dt \right) \right] \Big|_{t_0}^{t_1} = 0. \end{aligned}$$

Usando a condição de fronteira $\delta x(t_0) = \delta x(t_1) = 0$ resulta em:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial M}{\partial \dot{x}} \right) \exp \left(- \int \frac{\partial L}{\partial M} dt \right) \delta x dt = 0.$$

Finalmente, do teorema fundamental do cálculo variacional [13, 14], obtemos a equação generalizada de Euler-Lagrange (3.5):

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial M}{\partial \dot{x}} = 0.$$

Vejamos a seguir a generalização do princípio variacional de Herglotz para várias variáveis [11][12].

3.1 Um princípio da mínima ação para campos dissipativos

Para um campo escalar $\phi(x^\mu) = \phi(x^1, x^2, \dots, x^d)$ definido em um domínio $\Omega \in \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3, \dots$), o problema clássico do cálculo variacional consiste em encontrar o campo ϕ que extremiza o funcional:

$$S(\delta\Omega) = \int_{\delta\Omega} \mathcal{L}(x^\mu, \phi(x^\mu), \partial_\nu \phi(x^\mu)) d^d x, \quad (3.10)$$

onde $\delta\Omega$ é a fronteira de Ω , e ϕ satisfaz a condição de fronteira $\phi(\delta\Omega) = \phi_{\delta\Omega}$ com $\phi_\Omega : \delta\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Antes de generalizar para o problema de Herlotz, é importante notar que (3.10), para um dado campo ϕ , se reduz a uma função $S(\delta\Omega)$ da fronteira [11]. Em [11], foi discutido que se existir um campo vetorial s^μ tal que

$$S(\delta\Omega) = \int_{\delta\Omega} s^\mu n_\mu d\sigma, \quad (3.11)$$

então, do teorema da divergência obtemos:

$$S(\delta\Omega) = \int_{\delta\Omega} s^\mu n_\mu d\sigma = \int_\Omega \partial_\mu s^\mu d^d x = \int_\Omega \mathcal{L}(x^\mu, \phi(x^\mu), \partial_\nu \phi(x^\mu), s^\mu) d^d x, \quad (3.12)$$

onde n_μ um campo vetorial externo e normal à superfície $\delta\Omega$, e $d\sigma$ o elemento diferencial de área desta superfície.

Em [11] é proposta a generalização do princípio de Herglotz para campos da seguinte forma. Seja a densidade de ação s^μ um campo vetorial diferenciável em $\Omega \in \mathbb{R}^d$. O problema fundamental do cálculo variacional de Herlotz para campos consiste em determinar o campo ϕ que extremiza $S(\delta\Omega)$, onde $S(\delta\Omega)$ é dado por:

$$\begin{aligned} \partial_\mu s^\mu &= \mathcal{L}(x^\mu, \phi(x^\mu), \partial_\mu \phi(x^\mu), s^\mu), \quad x^\mu = (x^1, x^2, \dots, x^d) \in \Omega \\ S(\delta\Omega) &= \int_{\delta\Omega} s^\mu n_\mu d\sigma, \quad \phi(\delta\Omega) = \phi_{\delta\Omega}, \quad \phi(\delta\Omega) : \delta\Omega \rightarrow \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Como no problema original de Herglotz, é fácil observar que a ação definida por (3.13) reduz-se à ação usual (3.10) quando a lagrangiana não depende do campo de densidade de ação s^μ .

Para obter a generalização da equação de Euler-Lagrange para o problema definido pela ação (3.13), vamos seguir os passos usados em [11]. Vamos definir as variações de ϕ da seguinte forma:

$$\phi(x^\mu) = \phi^*(x^\mu) + \varepsilon \eta(x^\mu), \quad (3.14)$$

onde $\varepsilon \in \mathbb{R}$ e $\eta(x^\mu)$ é um campo satisfazendo a condição de fronteira $\eta(\delta\Omega) = 0$. Depois de integrar ambos os lados da equação (3.13) sobre Ω (de forma semelhante ao que fizemos na seção anterior), obtemos

$$S(\delta\Omega) = \int_{\Omega} \mathcal{L}(x^\mu, \phi(x^\mu), \partial_\nu \phi(x^\mu), s^\mu) d^d x, \quad (3.15)$$

e, tomando a derivada com respeito à ε obtemos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \frac{dS(\delta\Omega)}{d\varepsilon} &= \int_{\Omega} \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{L}(x^\mu, \phi(x^\mu), \partial_\mu \phi(x^\mu), s^\mu) d^d x \\ &= \int_{\Omega} \left[\eta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} + \partial_\mu \eta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} + \gamma_\mu \frac{ds^\mu}{d\varepsilon} \right] d^d x, \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde por simplicidade escrevemos $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \phi)} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_1 \phi)}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_2 \phi)}, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_d \phi)} \right)$. Por outro lado, também temos de (3.13)

$$\frac{dS(\delta\Omega)}{d\varepsilon} = \int_{\delta\Omega} \frac{ds^\mu}{d\varepsilon} n_\mu d\sigma = \int_{\Omega} \partial_\mu \frac{ds^\mu}{d\varepsilon} d^d x. \quad (3.17)$$

Usando (3.17) em (3.16) obtemos:

$$\int_{\Omega} \left[\partial_\mu \frac{ds^\mu}{d\varepsilon} - \eta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \eta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \gamma_\mu \frac{ds^\mu}{d\varepsilon} \right] d^d x = 0. \quad (3.18)$$

Uma condição suficiente para satisfazer (3.18) para qualquer domínio Ω é

$$\partial_\mu \zeta^\mu - \eta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \eta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \gamma_\mu \zeta^\mu = 0, \quad (3.19)$$

onde $\zeta^\mu = \frac{ds^\mu}{d\varepsilon}$. Como $\gamma_\mu = \partial_\mu f(x^\nu)$ é um campo gradiente em Ω , a (3.19) implica que ζ pode ser escrita como (usando o fator integrante para uma equação linear, como fizemos na seção anterior):

$$\zeta^\mu(\varepsilon) = A^\mu(x^\mu, \phi, \partial_\mu \phi, s^\mu) e^{f(x^\nu)}, \quad (3.20)$$

onde

$$\partial_\mu A^\mu(x^\mu, \phi, \partial_\mu \phi, s^\mu) = \left(\eta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} + \partial_\mu \eta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) e^{-f(x^\nu)}. \quad (3.21)$$

Finalmente, como $S(\delta\Omega)$ tem seu valor extremo em ϕ^* , devemos ter:

$$\left. \frac{dS(\delta\Omega)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (3.22)$$

Então, de (3.13) e (3.22) obtemos:

$$\left. \frac{dS(\delta\Omega)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{\delta\Omega} \left. \frac{ds^\mu}{d\varepsilon} n_\mu \right|_{\varepsilon=0} d\sigma = \int_{\delta\Omega} \zeta^\mu(0) n_\mu d\sigma = 0, \quad (3.23)$$

já que a superfície $\delta\Omega$ é independente de ε . Além disso, como (3.23) deve ser válida para qualquer domínio, temos:

$$\int_{\delta\Omega} \zeta^\mu(0) n_\mu d\sigma = 0 \implies \int_{\delta\Omega} \left. A^\mu n_\mu \right|_{\varepsilon=0} d\sigma = \int_{\Omega} \left. \partial_\mu A^\mu \right|_{\varepsilon=0} d^d x = 0. \quad (3.24)$$

Portanto, de (3.21) e (3.24) obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\eta \frac{\partial \mathcal{L}(x^\mu, \phi^*, \partial_\mu \phi^*, s^\mu)}{\partial \phi^*} + \partial_\mu \eta \frac{\partial \mathcal{L}(x^\mu, \phi^*, \partial_\mu \phi^*, s^\mu)}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} \right] e^{-f(x^\nu)} d^d x \\ &= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(x^\mu, \phi^*, \partial_\mu \phi^*, s^\mu)}{\partial \phi^*} - \frac{d}{dx^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}(x^\mu, \phi^*, \partial_\mu \phi^*, s^\mu)}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} \right. \\ & \quad \left. + \gamma_\mu \frac{\partial \mathcal{L}(x^\mu, \phi^*, \partial_\mu \phi^*, s^\mu)}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} \right] e^{-f(x^\nu)} \eta d^d x \\ &+ \int_{\Omega} \left[\frac{d}{dx^\mu} \left(\eta \frac{\partial \mathcal{L}(x^\mu, \phi^*, \partial_\mu \phi^*, s^\mu)}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} e^{-f(x^\nu)} \right) \right] d^d x = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

A última integral em (3.25) é zero pois $\eta(\delta\Omega) = 0$. Então, do teorema fundamental do cálculo variacional obtemos a generalização da equação de Euler-Lagrange para campos dissipativos [11]:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} - \frac{d}{dx^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} \right) + \gamma_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} = 0. \quad (3.26)$$

É fácil verificar que se a lagrangiana não depende de s^μ , a equação (3.26) se reduz ao caso usual

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} - \frac{d}{dx^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} \right) = 0, \quad (3.27)$$

já que neste caso $\gamma_\mu = 0$.

Finalmente, a generalização do problema (3.13) para vários campos é direta. Para o caso com vários campos $\phi^i(x^\mu) = \phi^i(x^1, x^2, \dots, x^d)$ ($i = 1, \dots, N$), a generalização da equação de Euler-Lagrange (3.26), com $\partial_{s^\mu} \mathcal{L} = \gamma_\mu = \partial_\mu f(x^\nu)$, fica [11]:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{i*}} - \frac{d}{dx^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^{i*})} \right) + \gamma_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^{i*})} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.28)$$

O princípio da mínima ação para campos conservativos proposto em [11] estabelece que as equações de movimentos de campos físicos ϕ^i são as que extremizam a ação (3.13) para diversos campos. Como consequência, os campos dissipativos físicos devem satisfazer a equação de Euler-Lagrange generalizada (3.28).

4 Teorias de gravitação não-conservativas

Entre uns dos maiores mistérios da física atual são o problema de rotação de galáxias, onde a mecânica newtoniana não explica por completo o movimento de rotação de estrelas entorno do eixo central, e a expansão acelerada do Universo. Uma forma de tentar explicar esses fenômenos é supondo a existência de um tipo exótico de matéria, chamada de matéria escura, e um tipo exótico de energia, chamada de energia escura. A matéria escura seria responsável pela maior parte da matéria do Universo e explicaria a curva de rotação das galáxia. Já a energia escura, que deveria corresponder a maior parte da energia do Universo, explicaria a expansão acelerada. No entanto, a existência da matéria escura e da energia escura ainda não foram verificadas diretamente. Neste sentido novas proposta teóricas tentam buscar explicação para estes fenômenos. Uma alternativa é supor que não existam matéria escura e energia escura, e que a teoria da gravitação precisa ser modificada. Recentemente [10] foi proposta uma nova teoria de gravitação não-conservativa por meio de uma formulação lagrangiana para sistemas não-conservativos. A formulação baseia-se no problema variacional de Herglotz discutido no capítulo anterior.

Neste capítulo estudamos a formulação de teorias de gravitação (relativísticas e não relativísticas) para sistemas não conservativos. Como resultado inédito, estudamos a órbita planetária em uma teoria de gravitação não-conservativa do tipo newtoniana obtida à partir do princípio da mínima ação generalizado de Herglotz. Por fim, estudamos a formulação da gravitação relativística proposta em [10], e como trabalho futuro, pretendemos estudar o problema da órbita planetária nesta última teoria.

4.1 Uma gravitação não-relativística e dissipativa: órbita com dissipação na mecânica newtoniana

Nesta seção estudamos o efeito dissipativo introduzido pelo princípio variacional de Herglotz para a gravitação newtoniana. Consideremos um sistema físico não-conservativo que consiste de uma partícula se move-se em linhas retas descritas em coordenadas esféricas,

onde K é a energia cinética e V a energia potencial (gravitacional com fonte na origem) e $L_d(M)$ é a parte da lagrangiana não-conservativa. Temos então:

$$L = K - V(r) + L_d(M) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{GMm}{r} - \gamma S, \quad (4.1)$$

onde γ é uma constante, G é a constante de gravitação universal, M é massa da fonte do campo, e consideramos que o movimento ocorre em um plano.

Aplicando a equação generalizada de Euler-Lagrange para o caso $d = 1$ e $N = 2$, com $x^1 = t$, $\phi^1 = r$ e $\phi^2 = \theta$, obtemos:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{GM}{r^2} + \gamma\dot{r} = 0 \quad (4.2)$$

e

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + \gamma r\dot{\theta} = 0. \quad (4.3)$$

que descreve a órbita de um planeta em torno de uma estrela na gravitação não conservativa definida pela lagrangiana (4.1).

Na Figura 3 apresentamos a solução numérica do sistema (4.2) e (4.3) obtida em Python. Foi utilizado como condição inicial $r(0) = 1$, $\dot{r}(0) = 0$, $\theta(0) = 0$ e $\dot{\theta}(0) = 0.8$. Também foi utilizado $GM = 1$, e o parâmetro de dissipação $\gamma = 0.01$. Vemos em azul a órbita de um planeta na gravitação dissipativa, onde a presença de forças dissipativas resultam em uma órbita espiralada com o planeta caindo lentamente em direção à estrela. Este tipo de problema pode ser utilizado para modelar, por exemplo, um planeta que perde energia e momentum angular através da emissão de matéria (ou de energia, por exemplo térmica) para o espaço. Para fins de comparação, ilustramos em laranja a órbita de um planeta na gravitação newtoniana. O código numérico utilizado para obter a solução apresentada na Figura 3 foi implementado em Python e está disponível no Apêndice B.

Finalmente, para $\theta(t_0) = \dot{\theta}(t_0)$, o movimento torna-se radial (queda livre) e a equação (4.2) se reduz à:

$$m\ddot{r} + \gamma m\dot{r} = -\frac{GMm}{r^2}, \quad (4.4)$$

onde multiplicamos pela massa m . Esta última equação torna o caráter dissipativo da teoria ainda mais evidente. Enquanto do lado direito da equação temos a força de gravitação newtoniana, do lado esquerdo surge uma força de atrito viscosa proporcional à velocidade da partícula e com coeficiente de viscosidade γm ,

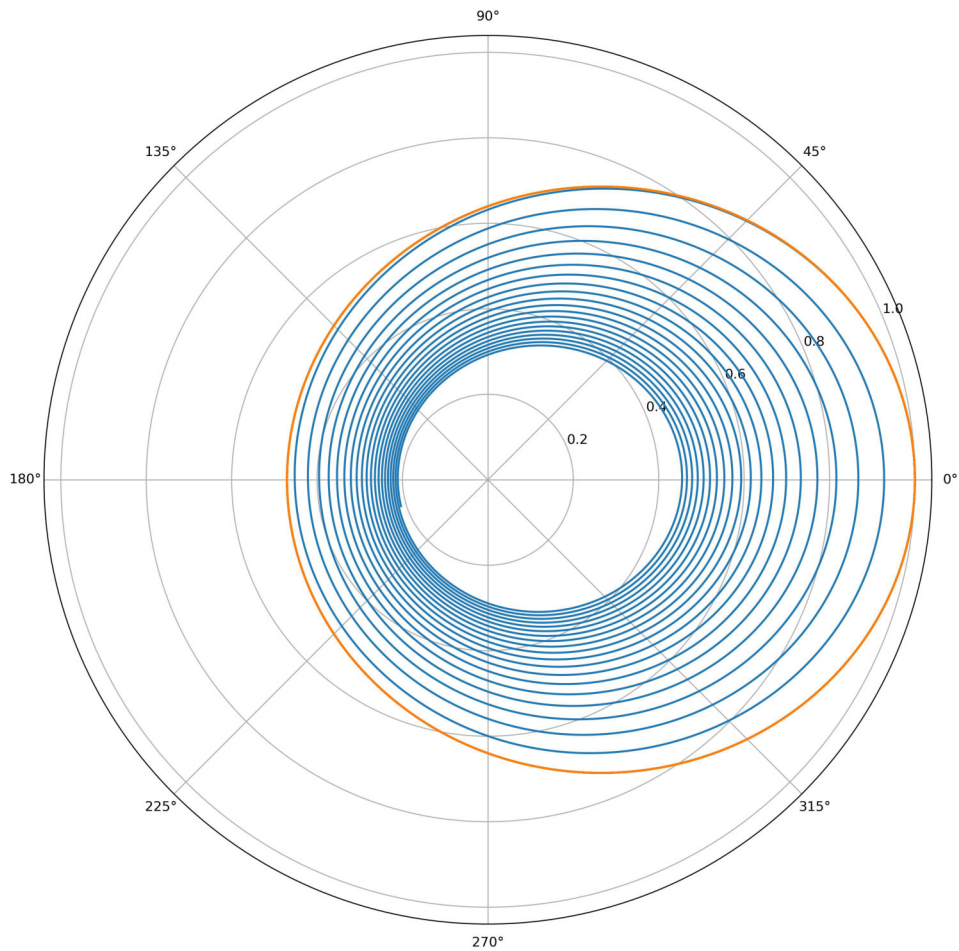


Figura 3 – Órbita planetária na gravitação não-conservativa em azul. Para comparação, em laranja temos a órbita planetária na gravitação de Newton.

4.2 Uma gravitação relativística não-conservativa

Em um trabalho recente [10], os autores propuseram uma teoria de gravitação não-conservativa a partir de uma formulação lagrangiana utilizando a generalização da ação de Herglotz (3.13). Segundo os autores, em qualquer teoria física, a lagrangiana definindo a ação é construída com os escalares da teoria. Portanto, a própria ação é um escalar. Então pode-se questionar: o que aconteceria se a própria lagrangiana fosse uma função da ação? Como vimos no capítulo anterior, uma resposta para esta questão é dada pelo problema variacional de Herglotz. Com este formalismo, em [10] os autores

propuseram uma teoria de gravitação não-conservativa que mostrou grande potencial na descrição do fenômeno da expansão acelerada do universo.

Nesta teoria surge um quadrvetor cosmológico constante associado à dissipação geométrica (o espaço-tempo se comporta como um elástico imperfeito). Quando este quadrvetor cosmológico tem componente não nula na direção temporal, os autores mostraram que a teoria de gravitação não-conservativa concorda qualitativa e quantitativamente com dados observacionais sobre a expansão do universo sem a necessidade de energia escura [10]. Este resultado motiva o aprofundamento dos estudos sobre esta nova formulação do princípio da mínima ação e sobre a teoria de gravitação associada. Nesta seção iremos revisar a formulação da gravitação não conservativa proposta em [10].

Vamos considerar uma ação do tipo (3.13) temos como campo a métrica $g_{\mu\nu}$ do espaço-tempo. Então, esta métrica deve extremizar a ação $S(\delta\Omega)$ definida por:

$$\begin{aligned} \nabla_\nu s^\nu &= \mathcal{L}(x^\mu, g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta,\mu}, s^\mu), \quad x^\mu \in \Omega \\ S(\delta\Omega) &= \int_{\delta\Omega} n_\nu s^\nu \sqrt{|h|} d^{d-1}x, \quad g_{\alpha\beta}(\delta\Omega) = g_{\alpha\beta}^{\delta\Omega}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde $g_{\alpha\beta}^{\delta\Omega}$ é fixo, e $\sqrt{|h|}$ é a métrica induzida em $\delta\Omega$. Como discutimos no capítulo anterior, é importante observar que a ação (4.5) se reduz à usual se a lagrangiana é independente de s^μ .

Para obter uma gravitação não-conservativa, os autores em [10] utilizam uma lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{ef}$, onde $\mathcal{L}_m$ é o termo de matéria e

$$\mathcal{L}_{ef}(x^\mu, g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta,\mu}, s^\mu) = L - \lambda_\nu s^\nu, \quad (4.6)$$

onde $L = g^{\mu\nu}(\Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\rho}^\rho - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\sigma)$ é a lagrangiana efetiva discutida em (2.36), e λ_ν é um quadrvetor cosmológico constante.

Como no caso da gravitação clássica de Einstein discutida anteriormente, para obtermos as equações de campo reescrevemos a métrica $g_{\alpha\beta}$ como:

$$g_{\alpha\beta}(x^\mu) = g_{\alpha\beta}^*(x^\mu) + \delta_\epsilon(g_{\alpha\beta})(x^\mu), \quad (4.7)$$

onde $g_{\alpha\beta}^*$ é a métrica que extremiza $S(\delta\Omega)$ (4.5), $\epsilon \in \mathbb{R}$, e $\delta_\epsilon(g_{\alpha\beta})$ as condições de fronteira $\delta_\epsilon(g_{\alpha\beta})(\delta\Omega) = 0$ e $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(g_{\alpha\beta})(x^\mu) = 0$. Procedendo de forma análoga ao que fizemos no capítulo anterior, seguindo a referência [10], como $S(\delta\Omega)$ tem extremo em $g_{\alpha\beta}^*$, obtemos:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_\epsilon(S)(\delta\Omega)}{\epsilon} = \int_{\delta\Omega} n_\nu \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_\epsilon(s^\nu)}{\epsilon} \sqrt{|h|} d^{d-1}x = 0, \quad (4.8)$$

pois a superfície $\delta\Omega$, e consequentemente $\sqrt{|h|}$, é independente de ϵ . Uma condição suficiente para satisfazer (4.8) para fronteira arbitrárias $\delta\Omega$ é:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_\epsilon(s^\nu)(\delta\Omega)}{\epsilon} = 0. \quad (4.9)$$

Retornando à definição da ação (4.5), se integramos sobre Ω ambos os lados da primeira linha da (4.5) obtemos:

$$S(\delta\Omega) = \int_{\Omega} \mathcal{L}(x^\mu, g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta,\mu}, s^\mu) \sqrt{d^d x}, \quad (4.10)$$

e usando (4.10) resulta em:

$$\delta_\epsilon(S) = \int_{\Omega} \delta_\epsilon(\mathcal{L}(x^\mu, g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta,\mu}, s^\mu) \sqrt{d^d x}) = \int_{\Omega} [\delta_\epsilon(L\sqrt{d^d x}) + \delta_\epsilon(\mathcal{L}_m \sqrt{d^d x}) - \lambda_\nu \delta_\epsilon(s^\nu \sqrt{d^d x})] d^d x. \quad (4.11)$$

Da segunda linha da (4.5), usando $\nabla_\nu(\cdot)\sqrt{d^d x} = \partial_\nu(\cdot\sqrt{d^d x})$, obtemos

$$\delta_\epsilon(S) = \delta_\epsilon \int_{\Omega} \nabla_\nu s^\nu \sqrt{d^d x} = \int_{\Omega} \partial_\nu \delta_\epsilon(s^\nu \sqrt{d^d x}) d^d x. \quad (4.12)$$

De (4.11) e (4.12) resulta:

$$\int_{\Omega} [\partial_\nu \delta_\epsilon(s^\nu \sqrt{d^d x}) - \delta_\epsilon((L + \mathcal{L}_m) \sqrt{d^d x}) + \lambda_\nu \delta_\epsilon(s^\nu \sqrt{d^d x})] d^d x = 0. \quad (4.13)$$

Como (4.13) deve ser satisfeita em qualquer domínio Ω , temos:

$$\partial_\nu \zeta^\nu = \delta_\epsilon(L\sqrt{d^d x}) + \delta_\epsilon(\mathcal{L}_m \sqrt{d^d x}) - \lambda_\nu \zeta^\nu, \quad (4.14)$$

onde definimos a nova variável $\zeta^\nu = \delta_\epsilon(s^\nu \sqrt{d^d x})$. Como λ_ν é um vetor constante, a equação (4.14) implica que ζ^ν pode ser escrita como:

$$\zeta^\nu(\epsilon) = A^\nu(x^\mu, g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta,\mu}, s^\mu) e^{-\lambda_\gamma x^\gamma}, \quad (4.15)$$

onde

$$\partial_\nu A^\nu = (\delta_\epsilon(L\sqrt{d^d x}) + \delta_\epsilon(\mathcal{L}_m \sqrt{d^d x})) e^{\lambda_\gamma x^\gamma}. \quad (4.16)$$

Da condição (4.9) devemos ter, já que $\delta_\epsilon(g_{\mu\nu})(\delta\Omega) = 0$,

$$\zeta^\nu(0) = A^\nu|_{\epsilon=0} e^{-\lambda_\gamma x^\gamma} = 0 \quad (4.17)$$

para todo $x^\mu \in \delta\Omega$. Como consequência, A^ν é zero sobre a fronteira $\delta\Omega$. Neste caso, obtemos do teorema de Stokes:

$$\int_{\delta\Omega} n_\nu \frac{A^\nu}{\sqrt{d^d x}} \sqrt{|h|} d^{d-1}x = \int_{\Omega} \partial_\nu A^\nu d^d x = 0. \quad (4.18)$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \delta_{\epsilon}(L\sqrt{} + \mathcal{L}_m\sqrt{}) e^{\lambda_{\gamma}x^{\gamma}} d^d x \\
&= \int_{\Omega} \left[\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \delta_{\epsilon}(g^{\mu\nu}\sqrt{})_{,\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} \delta_{\epsilon}(g^{\mu\nu}\sqrt{})_{,\nu} + (\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}) \delta_{\epsilon}(g^{\mu\nu}\sqrt{}) \right. \\
&\quad \left. + 8\pi G T_{\mu\nu} \delta_{\epsilon}(g^{\mu\nu})\sqrt{} \right] e^{\lambda_{\gamma}x^{\gamma}} d^d x \\
&= - \int_{\Omega} \delta_{\epsilon}(g^{\mu\nu})\sqrt{} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + K_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} K - 8\pi G T_{\mu\nu} \right] e^{\lambda_{\gamma}x^{\gamma}} d^d x \\
&\quad + \int_{\Omega} \left[\left(\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \delta_{\epsilon}(g^{\mu\nu}\sqrt{}) - \Gamma_{\mu\nu}^{\nu} \delta_{\epsilon}(g^{\mu\alpha}\sqrt{}) \right) e^{\lambda_{\gamma}x^{\gamma}} \right]_{,\alpha} d^d x = 0,
\end{aligned} \tag{4.19}$$

onde $K_{\mu\nu} = \lambda_{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \frac{1}{2} (\lambda_{\nu} \Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} + \lambda_{\mu} \Gamma_{\nu\alpha}^{\alpha})$ é um pseudo-tensor simétrico [10], e $\delta_{\epsilon}(\mathcal{L}_m\sqrt{}) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \delta_{\epsilon}(g^{\mu\nu})\sqrt{}$ onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momentum. A última integral em (4.19) é zero pois $\delta_{\epsilon}(g_{\mu\nu})(\delta\Omega) = 0$. Portanto, do teorema fundamental do cálculo das variações obtemos de (4.19) as equações de campo da gravitação não conservativa proposta em [10]:

$$R_{\mu\nu} + K_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R + K) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \tag{4.20}$$

Podemos verificar que a gravitação definida pela equação de campo (4.20) é não conservativa, se $\lambda_{\mu} \neq 0$, à partir do divergente covariante $\nabla_{\mu}(K_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2} g_{\nu}^{\mu} K)$, que é em geral diferente de zero para $\lambda_{\mu} \neq 0$. Como discutido em [10], nesta gravitação o espaço-tempo se comporta como uma superfície elástica não perfeita.

Antes de finalizar o capítulo, vamos analisar o caso de campos fracos assim como fizemos na gravitação de Einstein discutida anteriormente. Para espaços quase planos a métrica é aproximadamente a de Minkowski [5], isto é, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ com $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Em primeira ordem em h , escolhendo o calibre modificado $\eta^{\mu\nu}(h_{\mu\rho,\nu} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu,\rho} + \lambda_{\mu} h_{\nu\rho} - \frac{1}{2} \lambda_{\rho} h_{\mu\nu}) = 0$ [10], obtemos à partir das equações de campo [10]:

$$\square^2 h_{\mu\nu} + \lambda^{\rho} h_{\mu\nu,\rho} = -\frac{16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu} \tag{4.21}$$

onde $S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T^{\lambda}_{\lambda}$. Como mostrado em [10], no caso homogêneo $S_{\mu\nu} = 0$ e com $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, a equação de campo (4.21) descreve ondas gravitacionais amortecidas para $\lambda_0 > 0$.

Finalmente, para valores muito pequenos de λ_0 , os efeitos dissipativos da teoria tornam-se imperceptíveis no sistema solar para escalas de tempo não-cosmológicas, mesmo que os efeitos dissipativos na expansão do Universo sejam perceptíveis [10]. Para intervalos de tempos pequenos em relação à idade do Universo, e para λ_0 muito pequeno (quando

podemos considerar $\lambda_0 = 0$ na (4.21)) obtemos de (4.21) no vácuo, para uma distribuição esférica de massa:

$$\nabla^2 h_{00} = 0, \quad (4.22)$$

que tem como solução (impondo condições de fronteira adequadas [5]) a gravitação newtoniana pois, neste caso, temos:

$$h_{00} = -\frac{2}{c^2} \frac{GM}{r}, \quad (4.23)$$

que resulta no potencial gravitacional Newtoniano [5].

5 O problema da órbita na teoria não-conservativa

Neste capítulo estudamos o problema da órbita planetária na gravitação não conservativa proposta por [10] e apresentada no capítulo anterior. Para isto, foi utilizado a generalização da métrica de Schwarzschild baseado na gravitação não conservativa obtida em [24]. Segundo [24], os autores, obtiveram a métrica para uma distribuição estática e esfericamente simétrica, com teoria não conservativa, não foi feito neste artigo, entretanto, uma análise do problema da órbita planetária. Neste sentido, a análise do problema da órbita que apresentamos neste capítulo é um resultado inédito na literatura e grande valor científico.

5.1 Uma métrica do tipo Schwarzschild para a gravitação não conservativa

Nesta subseção apresentamos uma revisão do trabalho [24] onde os autores obtiveram a generalização da métrica de Schwarzschild para a gravitação não conservativa proposta por [10]. O procedimento para obter esta métrica é semelhante ao desenvolvimento utilizado na gravitação de Einstein. Esta métrica é uma solução das equações de campo da gravitação não conservativa (4.20) para um objeto massivo de massa M condensada em uma esfera de raio R . Neste caso, a métrica do espaço-tempo reflete a simetria esférica da distribuição de massa. Portanto, para obter a solução para o problema de uma distribuição esférica de massa, é conveniente utilizar coordenadas esféricas (conforme composição[1, 5, 6, 18]). A simetria do problema nos permite escrever a métrica em coordenadas esféricas como no caso da gravitação de Einstein, a métrica deve ter a forma [1, 5, 6, 18]:

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad (5.1)$$

onde $d\Omega^2 = r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\psi^2$ é o quadrado do elemento de ângulo sólido, com (θ, ψ) variáveis de ângulo sobre uma superfície esférica de raio r centrada na distribuição esférica de massa. Portanto, o tensor métrico é diagonal:

$$g_{\nu\mu} = \begin{bmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix},$$

e os símbolos de Christoffel não nulos são [1, 5, 6, 18]:

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= \frac{A'(r)}{2A(r)}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r}{A(r)}, \quad \Gamma_{\psi\psi}^r = \frac{-r \sin \theta}{A(r)}, \quad \Gamma_{tt}^r = \frac{B'(r)}{2A(r)}, \\ \Gamma_{\psi\psi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^r = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\psi r}^\psi = \Gamma_{r\psi}^r = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{\psi\theta}^\psi &= \Gamma_{\theta\psi}^\psi = \cot \theta, \quad \Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = \frac{B'(r)}{2B(r)}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Substituindo (5.2) nas equações de campo (4.20) no vácuo ($T_{\mu\nu} = 0$), e procedendo como na Seção 2.2.1, obtemos (veja [24] para mais detalhes):

$$B(r) = 1 - \frac{\tilde{r}_s}{r}, \quad (5.3)$$

e

$$A(r) = \left(\lambda_\theta + 1 - \frac{\tilde{r}_s}{r} \right)^{-1}, \quad (5.4)$$

onde λ_θ é a única componente não identicamente nula do quadri vetor cosmológico λ_μ para a métrica (5.1) na gravitação não conservativa (veja [24] para mais detalhes), e

$$\tilde{r}_s = \frac{2GM - \lambda_\theta c^2 R}{c^2} = \frac{2G\tilde{M}}{c^2} = r_s - \lambda_\theta R \quad (5.5)$$

é o raio de schwarzschild na teoria não-conservativa. Da equação (5.5) observamos que λ_θ tem como efeito diminuir (aumentar) o raio de schwarzschild da gravitação de Einstein quando $\lambda_\theta > 0$ ($\lambda_\theta < 0$). De forma equivalente, podemos interpretar este resultado como se a estrela tivesse uma massa gravitacional efetiva $M_{ef} = M - \frac{\lambda_\theta R}{2G}$ dependente da massa bariônica M e da massa

$$M_\lambda = -\frac{\lambda_\theta R}{2G} \quad (5.6)$$

associada campo λ_θ .

Finalmente, com esses resultados obtemos a generalização da métrica de Schwarzschild, apresentada em [24], para a gravitação não conservativa proposta por [10]:

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{\tilde{r}_s}{(\lambda_\theta + 1)r} \right) dt^2 - \left(\lambda_\theta + 1 - \frac{\tilde{r}_s}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega. \quad (5.7)$$

Para esta métrica, os símbolos de Christoffel não nulos são:

$$\Gamma_{rr}^r = -\frac{\tilde{r}_s}{2r(r(\lambda_\theta + 1) - \tilde{r}_s)} \quad (5.8)$$

$$\Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = \frac{\tilde{r}_s}{2r(r(\lambda_\theta + 1) - \tilde{r}_s)}, \quad (5.9)$$

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{\tilde{r}_s(r(\lambda_\theta + 1) - \tilde{r}_s)}{2r^3(\lambda_\theta + 1)} \quad (5.10)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -(r(\lambda_\theta + 1) - \tilde{r}_s) \quad (5.11)$$

$$\Gamma_{\psi\psi}^r = -\sin^2 \theta (r(\lambda_\theta + 1) - \tilde{r}_s), \quad (5.12)$$

$$\Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\psi r}^\psi = \Gamma_{r\psi}^\psi = \frac{1}{r}, \quad (5.13)$$

$$\Gamma_{\psi\psi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \quad (5.14)$$

$$\Gamma_{\theta\psi}^\psi = \Gamma_{\psi\theta}^\psi = \cot \theta. \quad (5.15)$$

Apresentaremos na sequencia a geodésica relacionada à esta métrica.

5.2 A geodésica para orbitas na teoria não-conservativa

Para obter a equação da geodésica para a métrica (5.7), procede-se como na secção 2.2.2. Vamos analisar a equação da geodésica (2.26) em um espaço com a métrica de Schwarzschild generalizada (5.7). A solução desta equação descreve, por exemplo, o movimento orbital de planetas ao redor de estrelas na gravitação não conservativa proposta em [10]. Fazendo $c = 1$, sem perda de generalidade, e usando a métrica (5.7) e os símbolos de Christoffel da subsecção anterior, obtêm-se da equação da geodésica (2.26) 4 termos não automaticamente nulos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{d\tau^2} - \frac{\tilde{r}_s}{2r(r(\lambda_\theta + 1) - \tilde{r}_s)} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - (r(\lambda_\theta + 1) - \tilde{r}_s) \left[\left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\psi}{d\tau} \right)^2 \right] \\ + \frac{\tilde{r}_s(r(\lambda_\theta + 1) - \tilde{r}_s)}{2r^3(\lambda_\theta + 1)} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0, \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} - \sin\theta \cos\theta \left(\frac{d\psi}{d\tau} \right)^2 = 0, \quad (5.17)$$

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} + 2 \cot\theta \frac{d\psi}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} = 0, \quad (5.18)$$

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} + \frac{\tilde{r}_s}{r(r(\lambda_\theta + 1) - \tilde{r}_s)} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} = 0. \quad (5.19)$$

Dessas 4 equações, as equações (5.17) e (5.18) são idênticas às equações (2.71) e (2.72) do caso da geodésica na gravitação de Einstein. Portanto, assim como no caso da gravitação de Einstein discutido na seção 2.2.2, a equação (5.17) tem como uma solução a função constante $\theta = \frac{\pi}{2}$, o que implica que o movimento orbital resultante ocorrerá em um plano. Isto junto com o fato de que a métrica é independente do ângulo ψ implica na conservação de momento angular $L = cte$. A conservação do momento angular surge como solução da equação (5.18) fazendo $\theta = \frac{\pi}{2}$, de onde obtêm-se novamente a relação (2.74). Da equação (2.73) obtemos a lei de conservação da energia orbital nesta teoria de gravitação. Fazendo a mudança de variável $\tilde{r} = r(\lambda_\theta + 1)$, a (5.19) pode ser reescrita como:

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} + \frac{\tilde{r}_s}{\tilde{r}(\tilde{r} - \tilde{r}_s)} \frac{dt}{d\tau} \frac{d\tilde{r}}{d\tau} = 0, \quad (5.20)$$

que é idêntica à (2.73) pela troca de $\tilde{r}$ e $\tilde{r}_s$ por r e r_s . Portanto, a energia orbital E do sistema é conservada e satisfaz a relação:

$$\frac{dt}{d\tau} \left(1 - \frac{\tilde{r}_s}{\tilde{r}} \right) = \frac{E}{m} = cte. \quad (5.21)$$

É importante observar que, diferente da generalização não conservativa da gravitação newtoniana apresentada no capítulo anterior, a energia é conservada nesta gravitação. Para que a energia fosse não conservada deveríamos ter $\lambda_0 \neq 0$ no quadrivetor cosmológico da gravitação segunda a descrição [10]. Para entender o efeito de λ_θ precisamos analisar com mais detalhes o problema orbital através da equação de movimento restante (5.16). Vimos da equação (5.5) que λ_θ tem como efeito diminuir (aumentar) o raio de schwarzschild da gravitação de Einstein quando $\lambda_\theta > 0$ ($\lambda_\theta < 0$). De forma equivalente, podemos interpretar este resultado como se a estrela tivesse uma massa gravitacional efetiva $M_{ef} = M - \frac{\lambda_\theta R}{2G}$ que depende do valor de λ_θ . Esta interpretação é corroborada pela solução da geodésica ,segunda (5.16), quando calculamos o período orbital para uma órbita circular. Para uma órbita circular temos r constante, portanto, a (5.16) se reduz à:

$$-(r(\lambda_\theta + 1) - \tilde{r}_s) \left(\frac{d\psi}{d\tau} \right)^2 + \frac{\tilde{r}_s(r(\lambda_\theta + 1) - \tilde{r}_s)}{2r^3(\lambda_\theta + 1)} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0, \quad (5.22)$$

onde usamos $\theta = \frac{\pi}{2}$. Reescrevendo $\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{d\psi}{dt} \frac{dt}{d\tau}$ obtêm-se da equação anterior:

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \frac{\tilde{r}_s}{2r^3(\lambda_\theta + 1)}, \quad (5.23)$$

que tem como solução:

$$\psi(t) = \frac{\sqrt{\tilde{r}_s}}{r^{\frac{3}{2}}\sqrt{2(\lambda_\theta + 1)}}t + t_0, \quad (5.24)$$

onde t_0 é uma constante. Portanto, o período orbital $\tilde{T}$ para uma órbita circular na gravitação não conservativa de acordo com [10], e detém-se a equação :

$$\tilde{T} = \frac{2\pi\sqrt{2}r^{\frac{3}{2}}\sqrt{\lambda_\theta + 1}}{\sqrt{\tilde{r}_s}}. \quad (5.25)$$

Este período orbital difere do período $T = \frac{2\pi\sqrt{2}r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{r_s}}$ da gravitação de Einstein pelo fator multiplicativo $\sqrt{\lambda_\theta + 1}$ e por $\tilde{r}_s = r_s - \lambda_\theta R$ no lugar de r_s . Portanto, o efeito de $\lambda_\theta < 0$ é o de reduzir (aumentar no caso $\lambda_\theta > 0$) o período orbital em relação à gravitação de Einstein. Este é um resultado muito importante pois, para $\lambda_\theta < 0$, já vimos da equação (5.6) que o campo λ_θ tem o efeito equivalente a uma massa $M_\lambda = -\frac{\lambda_\theta R}{2G}$.

Para o problema de um planeta orbitando uma estrela, se $|\lambda_\theta| \ll 1$ e $R \ll r$, o efeito da massa M_λ é desprezível. Por outro lado, para uma estrela orbitando o centro de uma galáxia, mesmo que λ_θ seja pequeno, tem-se R muito grande. Portanto, a contribuição do campo λ_θ para o período orbital da estrela será não desprezível. Pode-se então questionar se esta teoria de gravitação alternativa seria uma boa alternativa à teoria da matéria escura para explicar a curva de rotação das galáxias. Em outras palavras, será o campo λ_θ uma alternativa à matéria escura? Será a massa M_λ a responsável pela curva de rotação anômala das galáxias? Este é um tema de interesse para futuros trabalhos em continuidade a esta dissertação.

Finalmente, vamos analisar agora em mais detalhes a órbita de um planeta na gravitação não conservativa segunda há [10]. Logo, a equação de movimento orbital pode ser obtida diretamente da primeira equação da geodésica (5.16). No entanto, o movimento orbital pode ser obtido de forma alternativa à partir da métrica (5.7) usando $\theta = \frac{\pi}{2}$ e as equações (2.74) e (5.21) (veja [1]). Escolhendo o parâmetro τ de forma que $ds^2 = d\tau^2$, obtém-se a (5.7):

$$1 = \left(1 - \frac{\tilde{r}_s}{(\lambda_\theta + 1)r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(\lambda_\theta + 1 - \frac{\tilde{r}_s}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\psi}{d\tau}\right)^2. \quad (5.26)$$

Usando $\tilde{r} = r(\lambda_\theta + 1)$ e as equações (2.74) e (5.21), obtêm-se após simplificações:

$$\left(\frac{d\tilde{r}}{d\tau}\right)^2 - (\lambda_\theta + 1)^3 E^2 + \frac{(\tilde{r} - \tilde{r}_s)(\lambda_\theta + 1)^5}{\tilde{r}^3} L^2 = -\frac{(\tilde{r} - \tilde{r}_s)}{\tilde{r}} (\lambda_\theta + 1)^3, \quad (5.27)$$

onde escolher, sem perda de generalidade, $m = 1$. Da regra da cadeia e da equação (2.74) temos:

$$\frac{d\tilde{r}}{d\tau} = \frac{d\tilde{r}}{d\psi} \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{d\tilde{r}}{d\psi} \frac{L(\lambda_\theta + 1)^2}{\tilde{r}^2}. \quad (5.28)$$

Substituindo esta última equação na (5.27) resulta em:

$$\left(\frac{d\tilde{r}}{d\psi}\right)^2 + \frac{\tilde{r}^4}{\lambda_\theta + 1} \frac{1}{L^2} - \frac{\tilde{r}^3 \tilde{r}_s}{\lambda_\theta + 1} \frac{1}{L^2} + \tilde{r}^2 (\lambda_\theta + 1) - \tilde{r} \tilde{r}_s (\lambda_\theta + 1) = \frac{\tilde{r}^4}{\lambda_\theta + 1} \frac{E^2}{L^2}. \quad (5.29)$$

Fazendo a mudança de variável:

$$x = \frac{2L^2}{\tilde{r} \tilde{r}_s}, \quad (5.30)$$

podemos reescrever a (5.29) como:

$$\left(\frac{dx}{d\psi}\right)^2 + \frac{4}{\tilde{r}_s^2 (\lambda_\theta + 1)} L^2 - \frac{2}{\lambda_\theta + 1} x + (\lambda_\theta + 1) x^2 - \frac{\tilde{r}_s^2 (\lambda_\theta + 1)}{2L^2} x^3 = \frac{4L^4}{\tilde{r}_s^2 (\lambda_\theta + 1)} E^2, \quad (5.31)$$

após algumas manipulações algébricas. Finalmente, derivando esta última equação em relação à ψ obtemos:

$$\frac{d^2 x}{d\psi^2} - \frac{1}{\lambda_\theta + 1} + (\lambda_\theta + 1)x = \frac{3\tilde{r}_s^2 (\lambda_\theta + 1)}{4L^2} x^2, \quad (5.32)$$

que representa a equação de movimento orbital na gravitação não conservativa de [10]. Logo, esta equação de movimento difere da equação de movimento orbital (2.77) da gravitação de Einstein pela presença dos fatores $\lambda_\theta + 1$ e pela substituição de r_s por $\tilde{r}_s$. Para $\lambda_\theta = 0$, a (5.32) se reduz à (2.77). Além disso, é importante salientar que no limite $\tilde{r}_s \rightarrow 0$ e $\lambda_\theta = 0$ a (5.32) se reduz a equação de movimento orbital da gravitação Newtoniana. Na próxima seção apresentamos a solução numérica desta equação de movimento orbital e investigamos o problema da precessão orbital nesta teoria.

5.3 Solução numérica para a equação de movimento orbital na gravitação não conservativa

Para estudar o efeito do campo λ_θ em órbitas não circulares na gravitação gravitação não conservativa como descrito no [10], onde obteve-se a solução numérica da equação

(5.32) para valores positivos e negativos de λ_θ , e para diversos valores do raio da estrela R . O código numérico utilizado para obter essas soluções foi implementado em Python e está disponível no Apêndice A.

Primeiro vamos analisar o comportamento da órbita em função de λ_θ quando o raio de estrela é muito menor do que o periélio da órbita. Neste caso, podemos aproximar $R = 0$ o que resulta em $\tilde{r}_s = r_s$. Na Figura 4 apresentamos a solução numérica da equação (5.32) com as condições iniciais $r(0) = 1$ e $\frac{dr(0)}{d\psi} = 0$, e com os valores $r_s = 0.01$ e $L = 0.05$ (o que resulta na condição inicial $x(0) = \frac{0.5}{\lambda_\theta + 1}$ e $\frac{dx(0)}{d\psi} = 0$). Neste gráfico, em azul temos a órbita na gravitação não conservativa de [10] para os valores $\lambda = -0.01, -0.1, -0.2$. Para comparação, em laranja temos a órbita planetária na gravitação de Einstein. Além de reduzir o período orbital, como discutido na seção anterior, vemos nos gráficos da Figura 4 que $\lambda_\theta < 0$ tem ainda dois outros efeitos principais na dinâmica orbital. Quanto maior $|\lambda_\theta|$, maior é a precessão da órbita na teoria não conservativa em relação à precessão na gravitação de Einstein. Além disso, o aumento de $|\lambda_\theta|$ também reduz a distância do periélio orbital. Esses resultados são importantes pois eles permitem estabelecer um limite no sistema solar para $|\lambda_\theta|$, comparando os resultados da teoria da gravitação não conservativa com dados observacionais para a precessão do periélio de Mercúrio. Pretendemos fazer esta comparação no futuro.

Vimos na seção anterior que quando $\lambda_\theta > 0$ o período orbital aumenta em relação à gravitação de Einstein. Além disso, da Figura 5 vemos que para $0 < \lambda_\theta < \lambda_\theta^c$, onde $\lambda_\theta^c \approx 0.0585$, o campo λ_θ reduz a precessão orbital em relação à precessão da gravitação de Einstein. Já para $\lambda_\theta > \lambda_\theta^c$, a precessão orbital ocorre em sentido inverso ao esperado pela gravitação de Einstein. Quando temos $\lambda_\theta = \lambda_\theta^c \approx 0.0585$, a órbita não processa. Neste caso, foi comparado a órbita da gravitação não conservativa [10] quando $\lambda_\theta = \lambda_\theta^c$ com a órbita na mecânica newtoniana na Figura 6. Nesta figura vemos que, além do período orbital, o principal efeito do campo $\lambda_\theta = \lambda_\theta^c$ é aumentar a distância do periélio planetário em relação à mecânica newtoniana, como se λ_θ atuasse reduzindo a massa da estrela (reduzindo então o período orbital e aumentando a distância do periélio).

O efeito da densidade da estrela ($R > 0$) para $\lambda_\theta < 0$ pode ser visto na Figura 7. Neste caso, para $R \neq 0$ o período orbital aumenta ainda mais do que no caso $R = 0$, e além dos efeitos discutidos na análise da Figura 4, o campo produz o efeito equivalente a uma massa $M_\lambda = -\frac{\lambda_\theta R}{2G}$ que resulta em uma precessão orbital que cresce com R e em uma distância de periélio que diminui com o aumento de R .

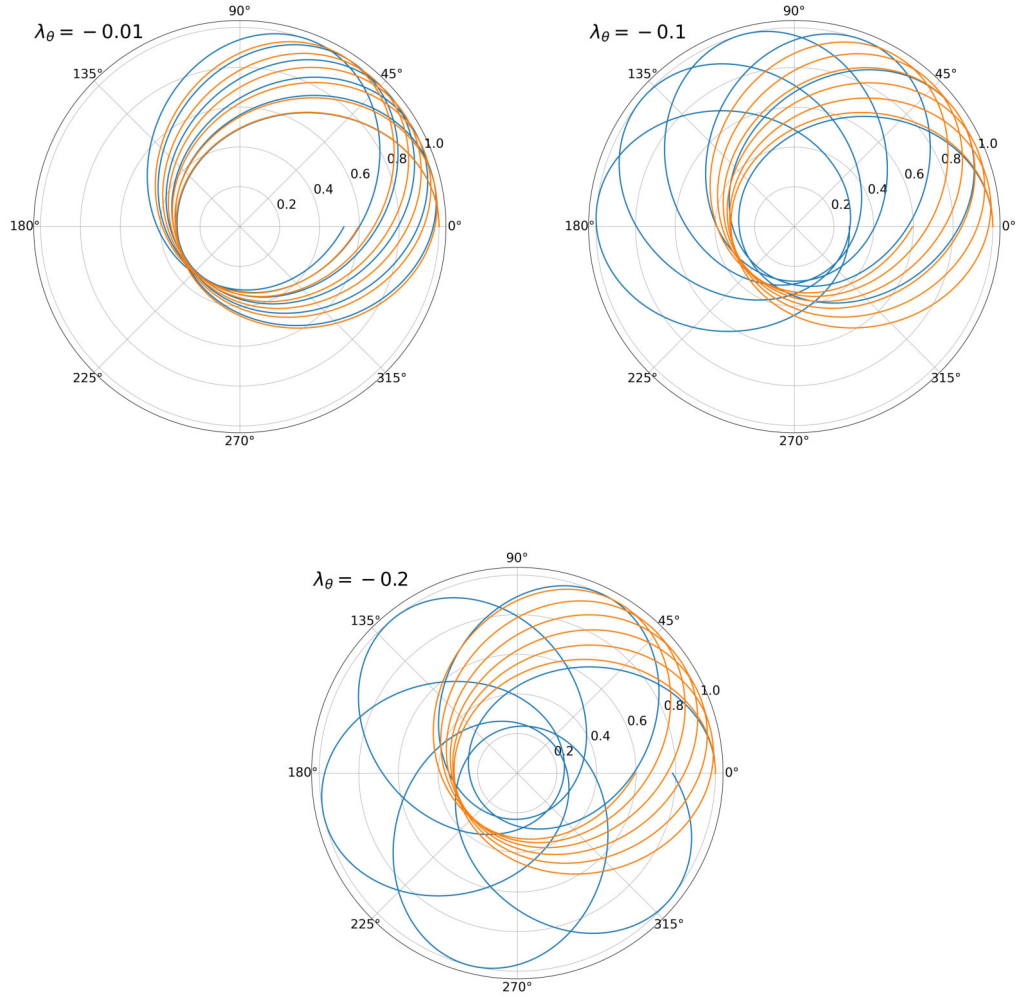


Figura 4 – Solução numérica em azul da equação orbital da gravitação não conservativa para $\lambda_\theta = -0.01$ (figura superior esquerda), $\lambda_\theta = -0.1$ (figura superior direita) e $\lambda_\theta = -0.2$ (figura inferior). Para comparação, em laranja temos a órbita planetária na gravitação de Einstein.

Para $\lambda_\theta > 0$ vemos na Figura 8 que a precessão orbital é reduzida, e a distância do periélio é aumentada, com o aumento de $0 \leq R < R^c$ (onde $R^c \approx 0.5$). Para $R = R^c \approx 0.5$ a órbita torna-se circular. Estes resultados estão de acordo com a interpretação de $M_\lambda = -\frac{\lambda_\theta R}{2G}$ como sendo equivalente à uma massa negativa, reduzindo portanto o efeito da massa bariônica M da estrela na dinâmica orbital.

Finalmente, no caso extremo de densidade muito baixa do corpo central $R^c < R < 1$ (para $R \geq 1$ a solução de vácuo da equação de campo deixa de valer), o que era o afélio orbital para $R < R^c$ torna-se agora o novo periélio, como pode ser visto na Figura B. Quanto maior o valor de R , maior será a distância do afélio. Estes resultados também

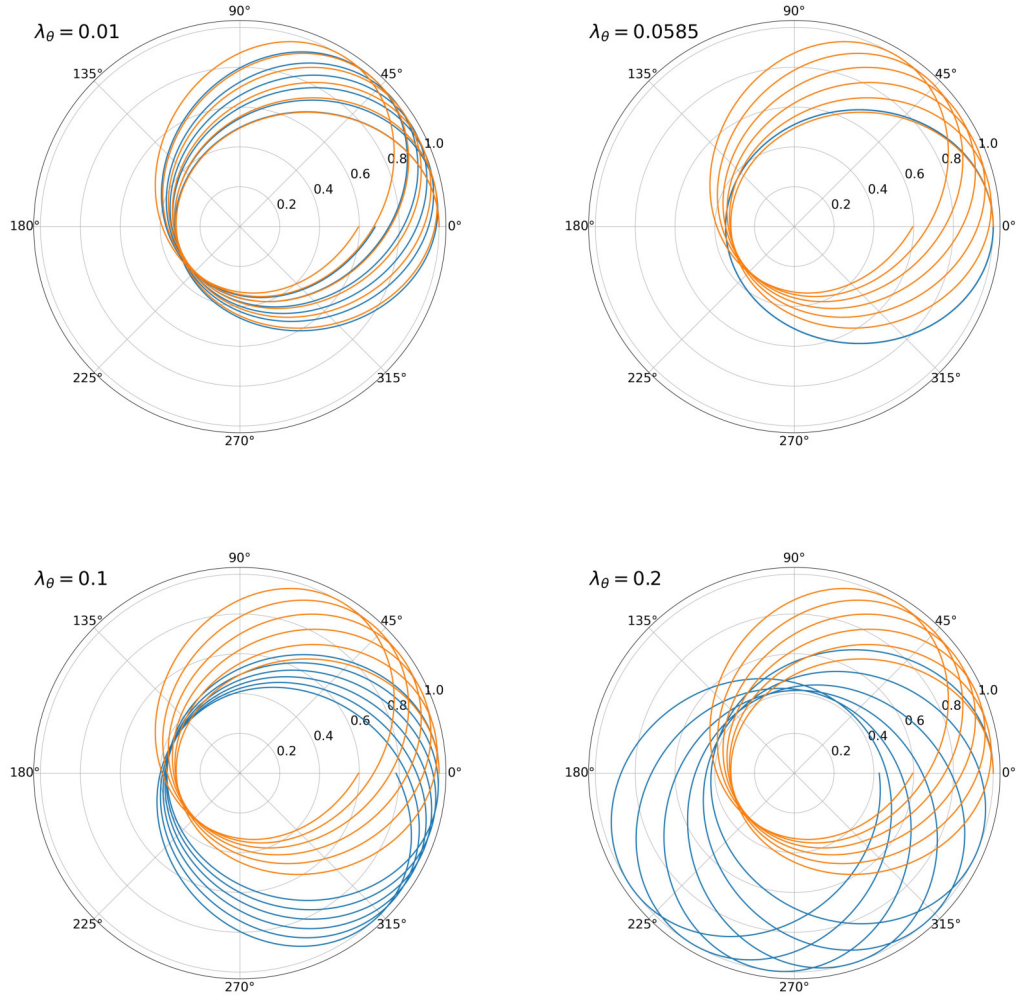


Figura 5 – Solução numérica em azul da equação orbital da gravitação não conservativa para $\lambda_\theta = 0.01$ (figura superior esquerda), $\lambda_\theta = 0.0585$ (figura superior direita), $\lambda_\theta = 0.1$ (figura inferior esquerda) e $\lambda_\theta = 0.2$ (figura inferior direita). Para comparação, em laranja temos a órbita planetária na gravitação de Einstein.

estão de acordo com a interpretação de $M_\lambda = -\frac{\lambda_\theta R}{2G}$ como sendo equivalente à uma massa negativa, reduzindo portanto o efeito da massa bariônica M da estrela na dinâmica orbital. É importante salientar ainda que, para que o raio de Schwarzschild $\tilde{r}_s = r_s - \lambda_\theta R$ seja positivo e não nulo, devemos ter para o caso considerado nesta análise ($r_s = 0.01$ e $\lambda_\theta = 0.01$) $0 \leq R < 1$. Para $R = 1$ o raio de Schwarzschild torna-se nulo, o que equivale a uma massa efetiva $M + M_\lambda = 0$ para o corpo central, e para $R > 1$ a teoria apresenta uma massa efetiva negativa (repulsiva). Em ambos casos não existem órbitas limitadas.

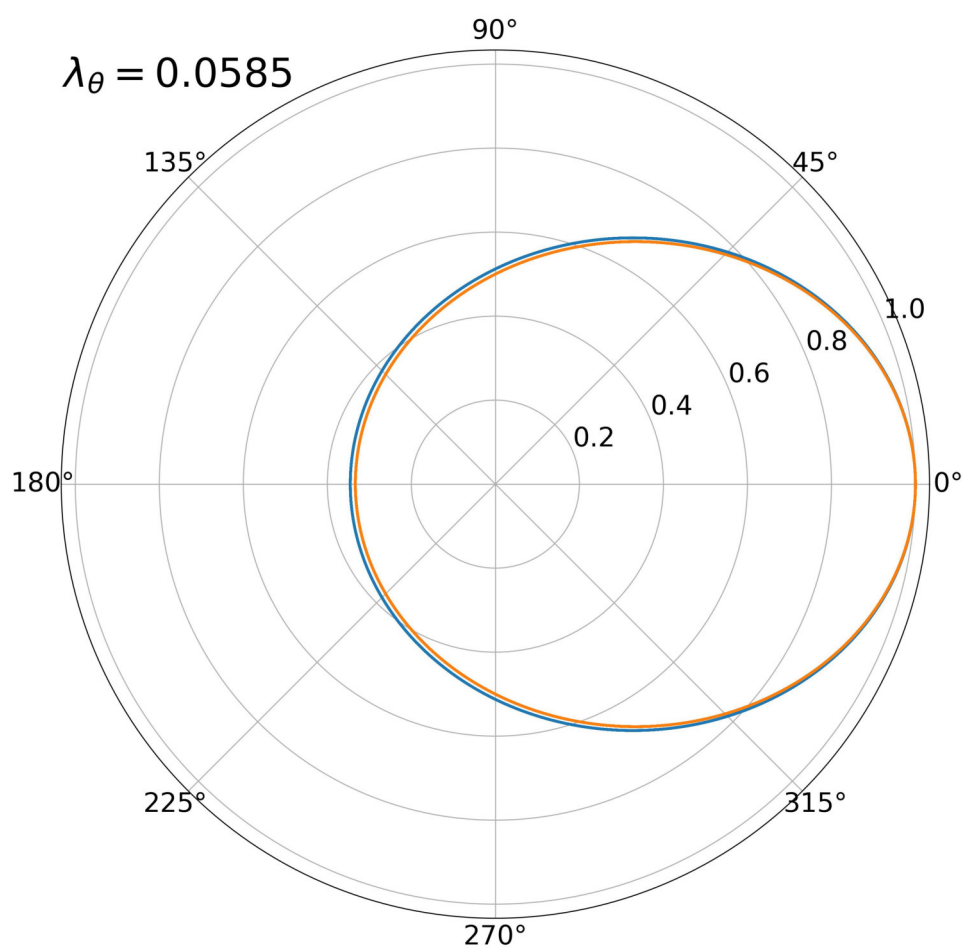


Figura 6 – Solução numérica em azul da equação orbital da gravitação não conservativa para $\lambda_\theta = 0.0585$. Para comparação, em laranja temos a órbita planetária na gravitação de Newton.

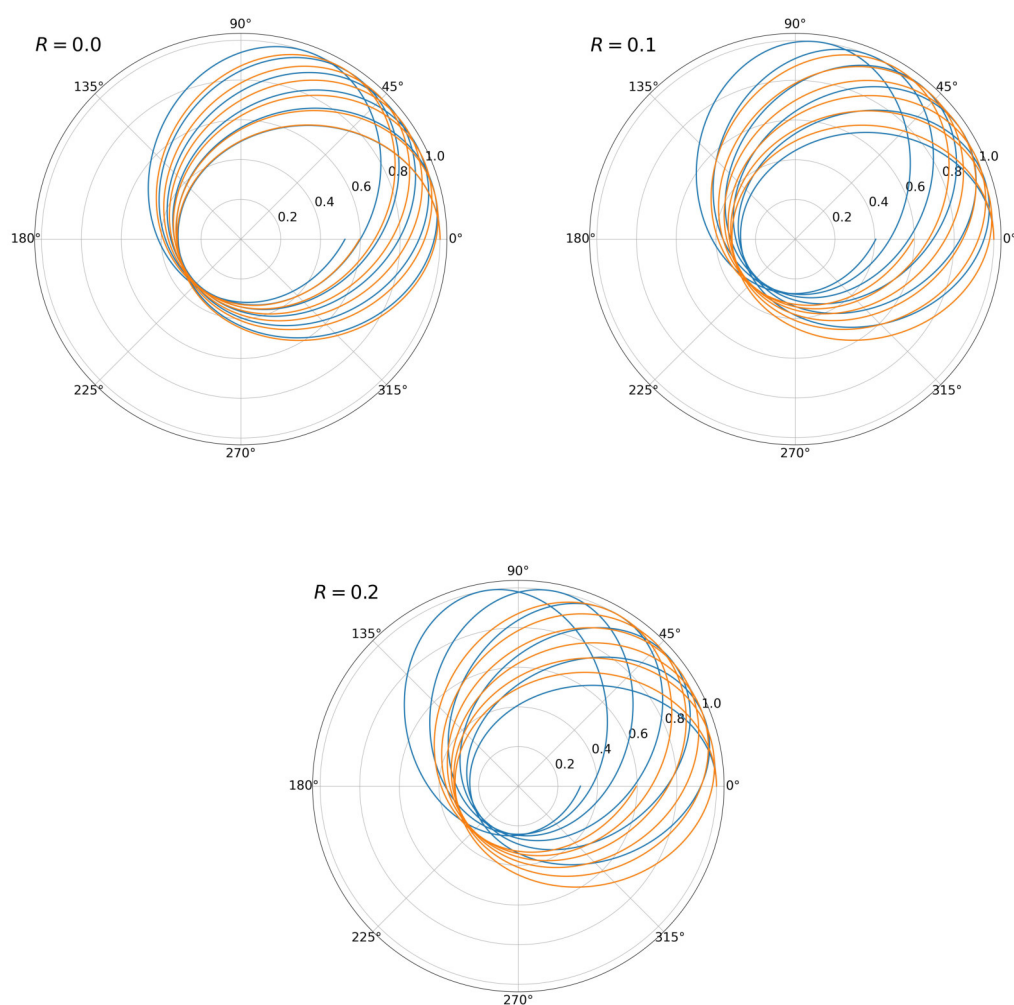


Figura 7 – Solução numérica em azul da equação orbital da gravitação não conservativa com $\lambda_\theta = -0.01$ para $R = 0$ (figura superior esquerda), $R = 0.1$ (figura superior direita) e $R = 0.2$ (figura inferior). Para comparação, em laranja temos a órbita planetária na gravitação de Einstein.

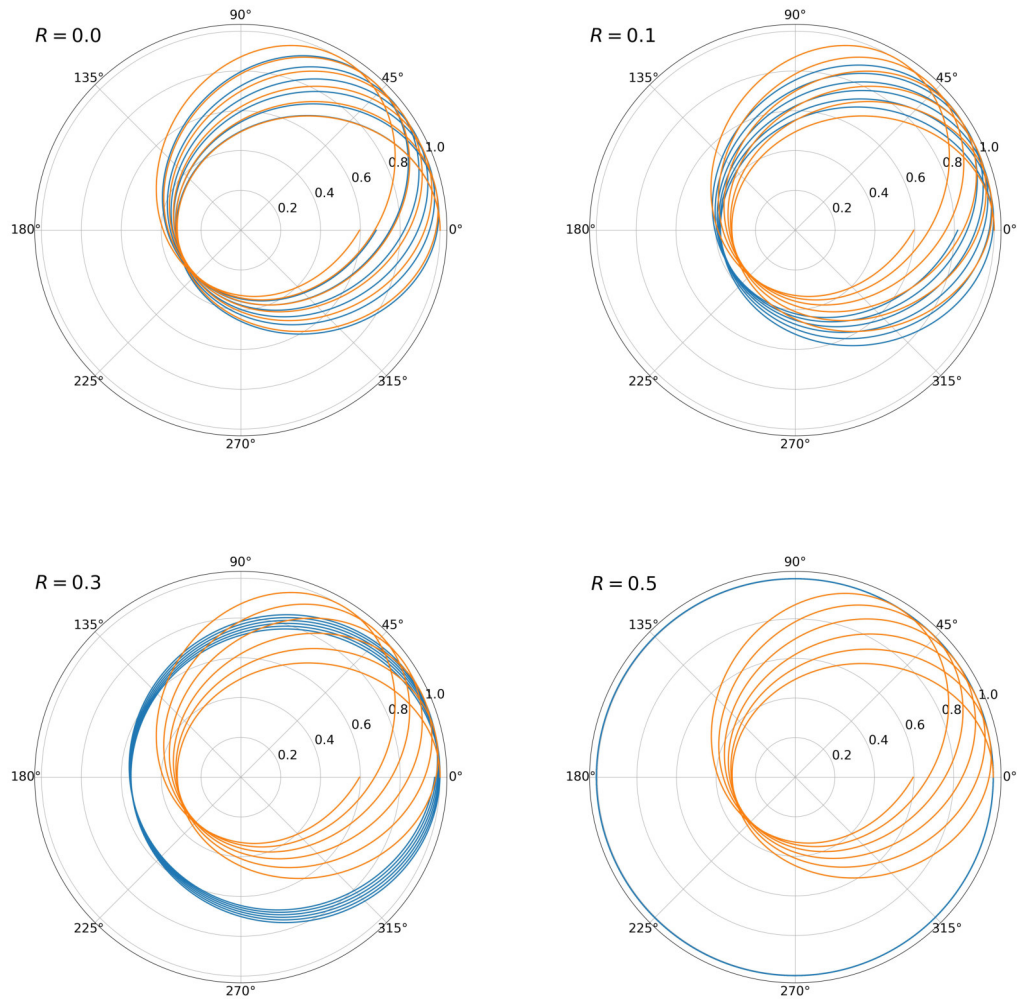


Figura 8 – Solução numérica em azul da equação orbital da gravitação não conservativa com $\lambda_\theta = 0.01$ para $R = 0.0$ (figura superior esquerda), $R = 0.1$ (figura superior direita), $R = 0.3$ (figura inferior esquerda) e $R = 0.5$ (figura inferior direita). Para comparação, em laranja temos a órbita planetária na gravitação de Einstein.

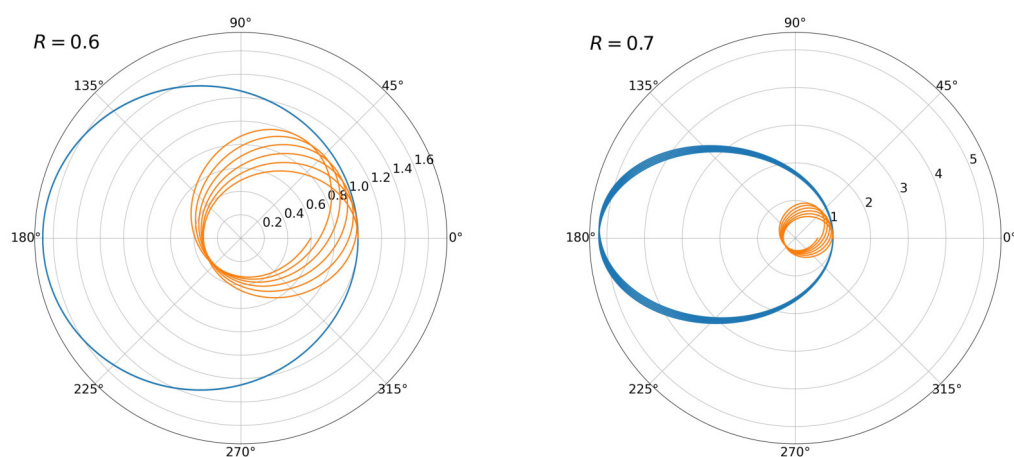


Figura 9 – Solução numérica em azul da equação orbital da gravitação não conservativa com $\lambda_\theta = 0.01$ para $R = 0.6$ (figura à esquerda) e $R = 0.7$ (figura à direita). Para comparação, em laranja temos a órbita planetária na gravitação de Einstein.

6 Conclusão

Nesta dissertação de mestrado, estuda-se um princípio da mínima ação para sistemas não conservativos, baseado no problema variacional de Herglotz, e estuda-se a formulação de teorias de gravitação relativísticas e não relativísticas para sistemas não conservativos. Este trabalho teve também como objetivo iniciar o estudo de efeitos dissipativos destas teorias na órbita planetária e analisar de modo mais profundo as soluções da equação de campo de Einstein para uma métrica não conservativa. Neste caso, como resultado inédito, estuda-se a órbita planetária nessas teorias de gravitação relativísticas e não relativísticas não conservativas.

Na teoria não relativística, estudam-se os efeitos da dissipação de energia orbital em uma teoria não conservativa do tipo newtoniano. Vê-se neste caso que a presença de forças dissipativas resulta em uma órbita espiralada com o planeta caindo lentamente em direção à estrela. Este tipo de problema pode ser utilizado para modelar, por exemplo, um planeta que perde energia e momentum angular através da emissão de matéria (ou de energia, por exemplo térmica) para o espaço.

Na teoria relativística, estuda-se o problema da órbita planetária na gravitação não conservativa proposta recentemente por Lazo et al. [10]. Neste caso, a métrica do espaço-tempo para uma distribuição esférica de matéria generaliza a métrica de Schwarzschild como demonstrado recentemente em [24]. Entretanto, a equação da geodésica, que descreve o problema da órbita planetária, ainda não tinha sido investigada. Desse modo, como um dos resultados principais desta dissertação, estuda-se o problema da órbita planetária nesta teoria não conservativa. Dos resultados que se obtêm nesta teoria, é importante destacar que, diferente da generalização não conservativa da gravitação newtoniana, a energia é conservada nesta gravitação, pois para uma métrica do tipo Schwarzschild deve-se ter $\lambda_0 = 0$ no quadrivetor cosmológico da gravitação proposta em [10]. O termo não nulo deste quadrivetor é a componente λ_θ , que se descobre que tem como efeitos principais diminuir (aumentar) o período orbital quando $\lambda_\theta < 0$ ($\lambda_\theta > 0$), aumentar (diminuir) a precessão do periélio e diminuir (aumentar) a distância do periélio. Vê-se que estes efeitos podem ser interpretados como se o campo λ_θ contribuísse para a dinâmica como se tivesse uma massa $M_\lambda = -\lambda_\theta R$, onde R é o raio da estrela. Para o problema de um planeta orbitando

uma estrela, se $|\lambda_\theta| \ll 1$ e $R \ll r$, o efeito da massa M_λ é desprezível. Por outro lado, para uma estrela orbitando o centro de uma galáxia, mesmo que λ_θ seja pequeno, teremos R muito grande. Portanto, a contribuição do campo λ_θ para o período orbital da estrela será não desprezível. Pode-se então questionar se esta teoria de gravitação alternativa seria uma boa alternativa à teoria da matéria escura para explicar a curva de rotação das galáxias. Em outras palavras, será o campo λ_θ uma alternativa à matéria escura? Será a massa M_λ a responsável pela curva de rotação anômala das galáxias?

O problema da curva de rotação das galáxias é um tema de interesse para futuros trabalhos em continuidade a esta dissertação, onde pretende-se fazer comparações com dados reais de diversas galáxias e também comparações com a teoria MOND [8]. Outros temas de pesquisa para o futuro incluem uma comparação dos resultados obtidos pelas teorias não conservativas com dados observacionais para a precessão do periélio de Mercúrio e com a órbita de pulsares.

A Código numérico em Python usado para o problema da órbita na gravitação de Einstein e na gravitação não conservativa

```

import numpy as np
from pylab import * #carrega as funções e números básicos (pi, sin, cos, etc..)
from scipy.special import gamma
from matplotlib import pyplot as plt
import timeit

start = time.time()

a = 0.0 #ângulo inicial
b = 12*3.1415 #ângulo final
ds = 0.00001 #passo do ângulo
s = arange(a, b, ds) #s é o ângulo
n = int(ceil((b-a)/ds))
r = np.zeros((n),float) #raio
x = np.zeros((n),float) #variável auxiliar
y = np.zeros((n),float) #derivada de x
r1 = np.zeros((n),float) #raio
x1 = np.zeros((n),float) #variável auxiliar
y1 = np.zeros((n),float) #derivada de x1

lambda0=0.01
R=0.6

#raio de Schwarzschild
rs=0.01 #raio de Schwarzschild em Einstein
rsh=rs-lambda0*R #raio de Schwarzschild na gravitação não conservativa
#momento angular
L=5.0*rs

# Condições iniciais
r0 = 1.0 #posição inicial
x0 = 2.0*L**2/(rsh*r0*(lambda0+1)) #condição inicial na variável x
y0=0.0 # valor inicial de dx/dpsi
r[0] = r0
x[0] = x0
y[0] = y0
r1[0] = r0
x1[0] = 2.0*L**2/(rs*r0)
y1[0] = y0

#Solução da geodésica para a gravitação de Herglotz
for j in range(n-1):
    x[j+1]=x[j]+y[j]*ds
    y[j+1] = y[j] + (1/(lambda0+1)-(lambda0+1)*x[j]+3*(rsh*x[j])**2*(lambda0+1)/(4*L,
    r[j+1]=2.0*L**2/(rsh*x[j+1]*(lambda0+1))

# #Solução da geodésica para a gravitação de Newton
# for j in range(n-1):
#     x1[j+1]=x1[j]+y1[j]*ds
#     y1[j+1] = y1[j] + (1-x1[j])*ds
#     r1[j+1]=2.0*L**2/(rs*x1[j+1])

```

```
#Solução da geodésica para a gravitação de Einstein
for j in range(n-1):
    x1[j+1]=x1[j]+y1[j]*ds
    y1[j+1] = y1[j] + (1-x1[j]+3*(rs*x1[j])**2/(4*L**2))*ds
    r1[j+1]=2.0*L**2/(rs*x1[j+1])

#Gráfico
width = 12
height = width / 1
fig = plt.figure(figsize=(width, height))

plt.polar(s,r,linewidth=2)
plt.polar(s,r1,linewidth=2)
plt.text(2.4,2.40,'$R=0.6$', fontsize=30)
plt.tick_params(axis='both', which='major', labelsize=20)
plt.tick_params(axis='both', which='minor', labelsize=20)
plt.savefig('orbitash16.jpg', dpi=300, format='jpg')
plt.show()

end = time.time()
print('time=', end - start)
```

B Código numérico em Python usado para o problema da órbita na gravitação não conservativa do tipo newtoniana

```

import numpy as np
from pylab import * #carrega as funções e números básicos (pi, sin, cos, etc..)
from scipy.special import gamma
from matplotlib import pyplot as plt
import timeit

start = time.time()

a = 0.0 #tempo inicial
b = 40.0 #tempo final
dt = 0.00001 #passo de tempo
t = arange(a, b, dt)
n = int(ceil((b-a)/dt))
r = np.zeros((n),float) #raio
s = np.zeros((n),float) #ângulo
u = np.zeros((n),float) #derivada do raio
v = np.zeros((n),float) #derivada do ângulo
r1 = np.zeros((n),float) #raio
s1 = np.zeros((n),float) #ângulo
u1 = np.zeros((n),float) #derivada do raio
v1 = np.zeros((n),float) #derivada do ângulo

# Condições iniciais
r0 = 1.0 #posição inicial
s0 = 0 #ângulo inicial
u0=0 #velocidade radial inicial
v0=0.8 # velocidade angular inicial
r[0] = r0
s[0] = s0
u[0] = u0
v[0] = v0
r1[0] = r0
s1[0] = s0
u1[0] = u0
v1[0] = v0

#Solução da geodésica para a gravitação não-conservativa
for j in range(n-1):
    r[j+1]=r[j]+u[j]*dt
    u[j+1] = u[j] + (r[j]*v[j]**2-1/(r[j]**2)-0.01*u[j])*dt
    s[j+1]=s[j]+v[j]*dt
    v[j+1] = v[j] - (2*u[j]*v[j]/r[j]+0.01*v[j])*dt

#Solução da geodésica para a gravitação de Newton
for j in range(n-1):
    r1[j+1]=r1[j]+u1[j]*dt
    u1[j+1] = u1[j] + (r1[j]*v1[j]**2-1/(r1[j]**2))*dt
    s1[j+1]=s1[j]+v1[j]*dt
    v1[j+1] = v1[j] - (2*u1[j]*v1[j]/r1[j])*dt

#Gráfico
width = 12

```

```
height = width / 1
fig = plt.figure(figsize=(width, height))

plt.polar(s,r)
plt.polar(s1,r1)
plt.savefig('orbitas.jpg', dpi=300, format='jpg')
plt.show()

end = time.time()
print('time=', end - start)
```

Referências

- [1] Sean M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison-Wesley Professional, 2003.
- [2] H. Moysés Nussenzveing, *Curso de Física Básica: ótica, Relatividade, Física Quântica*, vol. 4, Blucher; 2^a edição, 2014.
- [3] R. M. Eisberg, *Fundamentos da física moderna*, Rio de Janeiro, Editora Guanabara Dois, 1979.
- [4] Albert Einstein, *Volume 6: The Berlin Years: Writings, 1914-1917 (English translation supplement) Page 115*
- [5] Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, Inc., primeira edição 1972.
- [6] Robert M. Wald *General relativity*, University of Chicago Press, 1984.
- [7] P. A. M. Dirac *Genral Theory o Relativity*, John Wiley & Sons, Inc., 1975.
- [8] B. Famaey and S. S. McGaugh, *Modified Newtonian Dynamics (MOND): Observational Phenomenology and Relativistic Extensions*, *Living Reviews in Relativity*, vol. 15:10 (2012).
- [9] <https://science.nasa.gov/astrophysics/focus-areas/what-is-dark-energy>
- [10] M. J. Lazo, J. Paiva, J. T. S. Amaral and G. S. F. Frederico, *Action principle for action-dependent Lagrangians toward nonconservative gravity: Accelerating universe without dark energy*, *Physical Review D* **95**, 101501(R) (2017).
- [11] M. J. Lazo, J. A. P. P. Pereira, J. T. S. Amaral e G. S. F. Frederico *An action principle for action-dependent Lagrangians: Toward an action principle to non-conservative systems*. JOURNAL OF MATHEMATICAL PHYSICS, v. 59, p. 032902, 2018.
- [12] G. Herglotz, *Berührungstransformationen*, Lectures at the University of Göttingen, *G. Herglotz, Berührungstransformationen, Lectures at the University of Göttingen, Göttingen, 1930*.

-
- [13] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical mechanics*, 3rd. ed., San Francisco : Addison Wesley, 2002.
- [14] Nivaldo A. Lemos, *Mecânica analítica*, Livraria da Física, 2004.
- [15] L. D. Landau, *The classical theory of fields*, Elsevier, 2013.
- [16] Rodney J. Biezuner, Notas de aulas Geometria Riemanniana, Departamento de matemática instituto de ciências exatas UFMG 26/06/2016.
- [17] Manfredo P. do Carmo, *Geometria riemanniana*, IMPA, 2015.
- [18] Bernard F. Schutz *A First Course in General Relativity*. 2 edição Max Planck Institute for Gravitational Physics (Albert Einstein Institute) and Cardiff University & B. Schutz 2009.
- [19] William E. Boyce e Richard C. DiPrima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, LTC, 2015.
- [20] Julio C Fabris, Hermano Velten, Aneta Wojnar, *On the existence of static spherically-symmetric objects in action-dependent Lagrangian theories*, Phys. Rev. D 99, 124031 (2019).
- [21] J. M. Weisberg¹, D. J. Nice², and J. H. Taylor , *TIMING MEASUREMENTS OF THE RELATIVISTIC BINARY PULSAR PSR B1913+16, 722:1030–1034, 2010 October 20*.
- [22] J. M. Weisberg and Y. Huang *RELATIVISTIC MEASUREMENTS FROM TIMING THE BINARY PULSAR PSR B1913+16; Department of Physics and Astronomy, Carleton College, Northfield, MN 55057, USA; jweisber@carleton.edu Received 2016 January 19; revised 2016 April 20; accepted 2016 June 1; published 2016 September 21*.
- [23] Aneta Wojnar, Hermano Velten, *Equilibrium and stability of relativistic stars in extended theories of gravity*, Eur. Phys. J. C (2016) 76:697 (2016).
- [24] Julio C Fabris, Hermano Velten, Aneta Wojnar, *On the existence of static spherically-symmetric objects in action-dependent Lagrangian theories*, Phys. Rev. D 99, 124031 (2019).

[BORGES et al., 2014] Luiz Eduardo Borges, Python para Desenvolvedores, 2014.

[CUNHA et al., 2010] M. Cristina C. Cunha, Métodos Numéricos, Editora da Unicamp; 2ª edição, 2010.

