

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

MODELOS COMPARTIMENTAIS DO TIPO SIRC

por

Ana Carla Ferreira Nicola Gomes

Tese para obtenção do Título de
Doutora em Modelagem Computacional

Rio Grande, setembro , 2023.

Ana Carla Ferreira Nicola Gomes

“MODELOS COMPARTIMENTAIS DO TIPO SIRC”

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande - FURG, como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutora. Área de concentração: Modelagem Computacional.

Aprovada em: 01 de Agosto de 2023

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 **ADRIANO DE CEZARO**
Data: 02/09/2023 10:06:26-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Adriano de Cezaro (Orientador – FURG)

Documento assinado digitalmente
 **MATHEUS JATKOSKE LAZO**
Data: 02/10/2023 20:24:49-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Matheus Jatkoske Lazo (FURG)

Documento assinado digitalmente
 **JOICE CHAVES MARQUES**
Data: 05/09/2023 10:58:27-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Joice Chaves Marques (FURG)

Documento assinado digitalmente
 **DANIELA BUSKE**
Data: 02/09/2023 21:05:02-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Daniela Buske (UFPel)

Documento assinado digitalmente
 **DIOMAR CRISTINA MISTRO**
Data: 03/09/2023 12:16:20-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Diomar Cristina Mistro (UFSM)

Rio Grande - RS
2023

Ficha Catalográfica

G633m Gomes, Ana Carla Ferreira Nicola.
Modelos compartimentais do tipo SIRC / Ana Carla Ferreira
Nicola Gomes. – 2023.
136 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande –
FURG, Programa de Pós-Graduação em Modelagem
Computacional, Rio Grande/RS, 2023.
Orientador: Dr. Adriano de Cezaro.

1. Modelo SIRC 2. Modelo Compartimental 3. Múltiplas ordens
de derivada 4. População espacialmente distribuída 5. Modelo
Compartimental Fracionário 6. Influenza 7. COVID-19 I. Cezaro,
Adriano de II. Título.

CDU 004

Catálogo na Fonte: Bibliotecário José Paulo dos Santos CRB 10/2344

Foram anos difíceis esses últimos,
à aqueles que tiveram do meu lado
dedico este trabalho ao meu amor,
companheiro dessa jornada louca,
a minha amada família.

DAS UTOPIAS

Se as coisas são inatingíveis... ora!
Não é motivo para não querê-las...
Que tristes os caminhos, se não fora
A presença distante das estrelas!
Mario Quintana, 1951.

AGRADECIMENTOS

Gratidão eterna:

Ao professor Adriano De Cezaro pela orientação, por todo o apoio e pelo incentivo durante o desenvolvimento deste trabalho, mas principalmente por lá no início da minha caminhada na pós-graduação ter me aceitado e me apresentado a área de pesquisa que eu iria me apaixonar

À professora Joice Chaves Marques que teve uma contribuição importante na realização deste trabalho, com as suas orientações.

Ao meu companheiro Luis Guilherme, que de fato me acompanhou nos dias bons e ruins dessa jornada, assim como meus pais e irmã e demais familiares.

Aos meus amigos, que por vezes foram parceiros de estudo e confidentes dos ataques de ansiedade, obrigada pela parceria.

A FURG, por ser essa instituição pública, de qualidade e muito organizada que me proporcionou bons professores junto ao PPGMC e a possibilidades de viajar para conhecer outras realidade e fazer contatos.

Enfim, a todos que, de uma forma ou de outra, contribuíram com a realização deste trabalho.

RESUMO

Doenças causadas por microrganismos surgem e ressurgem no ambiente, afetando populações humanas, animais e vegetais. Desta forma, os modelos matemáticos precisam estar em constante adaptação para que consigam modelar de maneira mais abrangente a dispersão dessas doenças e contribuir para a tomada de decisão em gestão pública. Neste trabalho, estudamos variações do modelo compartimental do tipo SIRC com populações espacialmente distribuídas, onde cada uma das subpopulações da rede bi-dimensional se divide em compartimentos criados conforme a característica do grupo populacional, sendo esses suscetíveis (S), infectados (I), recuperados (R) e imunidade cruzada (C). O modelo ainda admite que existe interações entre as diferentes populações espacialmente distribuídas, mas que não exista migração. Por fim, o modelo contempla "memórias" distintas em cada um dos compartimentos existentes nas populações, a qual é modelada pelas derivadas de ordem fracionária de Caputo.

Do ponto de vista teórico, mostramos resultados de existência, unicidade e dependência contínuas dos dados iniciais, dos parâmetros do modelo e das ordens das derivadas para a solução do sistema de equações diferenciais com diferentes ordens fracionárias, que modela o problema em sua forma geral. Também estabelecemos a existência de pontos estacionários em termos da topologia de interação entre as populações e os parâmetros do modelo. Demonstramos a estabilidade local (global) para alguns casos particulares para a escolha das ordens das derivadas.

Para o caso particular em que há uma única população, estudamos o modelo SIRC com múltiplas ordens aplicado a Influenza. Para esse caso particular, de maneira mais detalhada analisamos a estabilidade local. Ainda, a partir de algumas simulações mostramos que a existência de distintas ordens para a dinâmica de cada compartimento descreve de maneira mais fidedigna dados reais de Influenza.

Outra variante do modelo proposto consiste no estudo do modelo SIRD (o compartimento (C), foi transformado no compartimento (D) para representar o distanciamento social) com a população dividida em faixas etárias que interagem, o qual foi pensado para descrever o comportamento dos efeitos do distanciamento social e reabertura de escolas durante a pandemia de Covid-19. Mostramos os resultados de boa colocação (os quais são ligeiramente diferentes do caso do modelo SIRC), resultados de existência de pontos de equilíbrio e respectiva estabilidade, conjuntamente com alguns resultados teóricos e cenários numéricos que simulam o efeito na dinâmica da infecção com o retorno escalonado das crianças à escola.

Palavras-chave: Modelo SIRC. Modelo Compartimental. Múltiplas ordens de derivada. População espacialmente distribuída. Modelo Compartimental Fracionário. Influenza. COVID-19.

ABSTRACT

Diseases caused by microorganisms emerge and reemerge in the environment, affecting human, animal, and plant populations. In this way, mathematical models need to be constantly adapted to comprehensively model the spread of these diseases and contribute to decision-making in public management. In this work, we study variations of the compartmental model of the SIRC type with spatially distributed populations, where each subpopulation of the two-dimensional network is divided into compartments created according to the characteristic of the population group, namely susceptible (S), infected (I), recovered (R), and cross-immunity (C). The model also assumes interactions between different spatially distributed populations but no migration. Finally, the model incorporates distinct "memories" in each of the compartments existing in populations, which are modeled by Caputo fractional-order derivatives.

From a theoretical perspective, we show results of existence, uniqueness, and continuous dependence on initial data, model parameters, and orders of derivatives for the solution of the system of differential equations with different fractional orders that models the problem in its general form. We also establish the existence of stationary points in terms of the interaction topology between populations and model parameters. We demonstrate local (global) stability for some particular cases for the choice of derivative orders.

For the particular case where there is a single population, we study the SIRC model with multiple orders applied to Influenza. For this specific case, we analyze local stability in more detail. Additionally, through simulations, we show that the existence of distinct orders for the dynamics of each compartment more accurately describes real Influenza data.

Another variant of the proposed model consists of studying the SIRD model (where the compartment (C) has been transformed into the compartment (D) to represent social distancing) with the population divided into age groups that interact. This was designed to describe the effects of social distancing and school reopening during the Covid-19 pandemic. We present results of good placement (slightly different from the SIRC model), existence of equilibrium points, and their stability, along with some theoretical results and numerical scenarios simulating the effect on infection dynamics with the staggered return of children to school.

Palavras-chaves: SIRC Model. Compartmental Model. Multiple orders of derivative. Spatially distributed population.. Fractional Compartmental Model. Influenza. COVID-19..

ÍNDICE

1	Introdução	13
1.1	Vigilância Epidemiológica no Brasil	14
1.2	Modelos Compartmentais em Epidemiologia e seus enfoques	16
1.3	Justificativa e Objetivos	18
2	Modelo Compartmental Fracionário com Populações Distribuídas Espacialmente - (MF)-SIRC-DE	23
2.1	Descrição dos resultados obtidos para o modelo (MF)-SIRC-ED proposto nesta tese. .	25
2.2	Resultados de Boa Colocação para o modelo (MF)-SIRC-ED	26
2.3	Existência de pontos estacionários para o modelo (MF)-SIRC-ED	29
2.4	Resultados de estabilidade para o Modelo (MF)-SIRC-ED	35
2.4.1	Estabilidade dos pontos de equilíbrio para populações isoladas	35
2.4.2	Estabilidade do ponto de equilíbrio no caso em que as derivadas são de ordem inteira.	37
2.4.3	Estabilidade global do ponto de equilíbrio no caso em que as derivadas são de ordem inteira.	43
2.5	Resultados numéricos para o modelo (MF)-SIRC-ED	48
3	Modelo Compartmental Fracionário Aplicado à Influenza	55
3.1	Uma breve contextualização a respeito da influenza	55
3.1.1	Um breve apanhado sobre a memória advinda das derivadas de ordem fracionária	57
3.2	Resultados teóricos para o modelo (MF)-SIRC com pulso de vacinação	57
3.3	Estabilidade dos pontos de equilíbrio para o modelo (MF)-SIRC com pulso de vacinação	59
3.4	Resultados numéricos para o modelo (MF)-SIRC	64
3.5	Considerações Finais do Capítulo	72
4	Modelo SIRD com faixas etárias diferentes que interagem: Aplicação a COVID-19	73
4.1	Uma breve contextualização a respeito da COVID-19:	73
4.2	Modelo SIRD proposto	75
4.3	Boa colocação e algumas considerações sobre modelo proposto	76
4.4	Existência de pontos de equilíbrio para SIRD com faixas etárias interagindo.	77
4.5	Resultados numéricos: casos simulados	78
4.6	Considerações Finais do Capítulo	82

5	Conclusões e trabalhos futuros	84
6	APÊNDICES	96
6.1	Aporte teórico do Cálculo Fracionário	96
6.2	Derivadas Fracionárias Segundo Riemann-Liouville	98
6.3	Derivadas Fracionárias Segundo Caputo	103
6.4	Boa Colocação para PVI's com Derivadas de Ordem Fracionária	106
6.4.1	Existência	107
6.4.2	Unicidade	111
6.4.3	Dependência Contínua dos PVI's com Derivadas de Ordem Fracionária	112
6.5	Uma Comparação entre Riemann-Liouville e Caputo	117
6.6	Uma Breve Consideração sobre o Efeito de Memória	119
6.7	Boa Colocação para PVI's com múltiplas Derivadas de Ordem Fracionária	120
6.8	Conceitos de Estabilidade para Sistemas de Ordem Fracionária	122
6.9	Considerações sobre os Métodos Numéricos	123

LISTA DE FIGURAS

1.1	Diagrama Compartmental SIRC.	17
2.1	Diagrama Compartmental SIRC para 8 vizinhanças.	23
2.2	Valores de $\beta_{i,j}$ e as correspondentes densidades $N_{i,j}$ na rede	49
2.3	A distribuição espacial de pessoas infectadas na rede no momento $t = 0$	49
2.4	O comportamento da população infectada e que tem imunidade cruzada ao longo do tempo na rede.	50
2.5	Populações infectadas em $t = 7$ meses. A concentração maior está no sítio central da rede.	50
2.6	A relação entre as curvas infectadas e de imunidade cruzada em alguns trechos da rede.	51
2.7	Disseminação da doença em populações infectadas e com imunidade cruzada.	53
2.8	Dinâmica de Infectados e Imunidade Cruzada dada pelo modelo SIRC- MULTI no cenário com e sem reinfecção.	54
3.1	Simulações analisando diferentes esquemas para as ordens das derivadas.	65
3.2	Efeitos de memória na imunidade cruzada $C(t)$ na população simulada com o (MF)-SIRC para escolhas das ordens de derivada apresentados na Tabela 3.3	67
3.3	Efeitos de memória na imunidade cruzada $C(t)$ de longo prazo em uma população simulada com o (MF)-SIRC para as ordens de derivada listadas na Tabela 3.3	68
3.4	Simulações do comportamento da população infectada do (MF)-SIRC para as ordens de derivada listadas na Tabela 3.3 em comparação aos dados reais.	69
3.5	Simulações do comportamento da população infectada do (MF)-SIRC para as ordens de derivada listadas na Tabela 3.4 em comparação aos dados reais.	70
3.6	Efeitos de imunidade cruzada na população simulada com o (MF)-SIRC ordens de derivada apresentadas na Tabela 3.4.	71
3.7	Efeitos de imunidade cruzada de longo prazo em uma população simulada com o (MF)-SIRC para ordens de derivada listadas na Tabela 3.4	71
4.1	Linha do tempo sobre a COVID-19[65].	74
4.2	(a) Todas as faixas etárias antes da retomada das aulas, comparada com dados reais em rosa.. (b) Todas as faixas etárias após a retomada das aulas. Fonte: do autor.	80

4.3	Compartimento de infectado $I_i(t)$ em cada caso de retomada das aulas. Fonte: do autor.	80
4.4	Faixas etárias pertencentes aos níveis da educação básica cumprindo o distanciamento social. Fonte: do autor.	81
4.5	Faixas etárias pertencentes aos níveis da educação básica com a retomada da educação infantil. Fonte:do autor.	82
4.6	Retorno do ensino presencial. Fonte: do autor.	82
4.7	(a) População idosa antes da retomada das aulas. (b) População idosa após a retomada das aulas. Fonte: do autor.	83

LISTA DE TABELAS

3.1	Lista de parâmetros para estudo de caso	64
3.2	Parâmetros do modelo	66
3.3	Cenários simulados θ_1 θ_2 θ_3 θ_4	66
3.4	Cenários simulados θ_1 θ_2 θ_3 θ_4	69

LISTA DE SÍMBOLOS

S	Compartimento Suscetível.
I	Compartimento Infectado.
R	Compartimento Recuperado.
C	Compartimento Imunidade Cruzada.
R_0	Taxa básica de reprodução.
μ	Taxa de mortalidade e natalidade.
α	Inverso do tempo em que os indivíduos ficam no compartimentos I.
δ	Inverso do tempo em que os indivíduos ficam no compartimentos R.
γ	Inverso do tempo em que os indivíduos ficam no compartimentos C.
σ	Probabilidade média de reinfecção do indivíduo no compartimento C.
β	Taxa de contato entre indivíduos dos compartimentos S e I.
θ	Ordem da derivada.
R_e	Taxa de reprodução efetiva.
ρ	Proporção imunizada da população.
ξ	Estratégia de vacinação.

LISTA DE ABREVIATURAS

SIR	Suscetível Infectado Recuperado
SIRC	Suscetível Infectado Recuperado Imunidade Cruzada
PVI	Problema de Valor Inicial
EDO	Equações Diferenciais Ordinárias
SINAN	Sistema Nacional de Agravos notificáveis
DATASUS-TABNET	Departamento de Informática do Sistema Único de Saúde

1 INTRODUÇÃO

Desde os primórdios, a chave para os estudos em Epidemiologia é a observação. O primeiro sucesso que se tem conhecimento no combate de uma doença infecciosa foi feito por Hipócrates (458-377 a.C.) [130], o qual percebeu que pessoas que se mantinham próximas ao fogo não eram acometidas pela chamada Peste de Atenas. A intervenção de Hipócrates ajudou a findar a contaminação com o acendimento de fogueiras.

Surtos, epidemias, endemias e pandemias fazem parte do passado, presente e certamente estarão presentes no futuro da humanidade. Podemos afirmar que a história das epidemias se funde com a história dos seres vivos [63] e o risco de surgimento de novas enfermidades ou o convívio com surtos parece ser eminente devido às atuais condições climáticas e ambientais [15].

Mesmo pequenos surtos são preocupantes quando ocorrem, não só com seres humanos, mas também com animais [23] e vegetais [16]. Em todos os casos afetam a situação econômica e social [63] e também são alarmantes pelo número de mortos que doenças infecciosas podem ocasionar, esses que são superiores aos de uma guerra [10, 12]. Pelo o que se viveu nos últimos anos, como consequência da pandemia da nova cepa de Coronavírus em 2019/2020 [112], não existe dúvidas de que este tipo de evento fará parte do nosso cotidiano.

Por esse motivo, estudiosos de várias áreas unem forças de forma interdisciplinar no que chama-se Epidemiologia. Esta que dedica-se a entender as diferenças existentes nos surtos/epidemias/ pandemias/ endemias devido às características biológicas, sociais, temporais e geográficas da população envolvida, tanto do hospedeiro quanto do patógeno. Tendo como função principal descrever a distribuição da doença, ou seja, descobrir como, onde e quando padecem os indivíduos [112]. Esses estudos também devem se deter a identificar as causas ou fatores de risco para as doenças, com o objetivo de descobrir porque é que nem todos têm a mesma doença de maneira uniforme [135], de forma a planejar, construir, testar e implementar estratégias para o controle e prevenção [20] de doenças infecciosas. Nesta última parte mais prática da Epidemiologia, é que as ciências exatas podem contribuir significativamente, em especial a matemática, através da modelagem e simulações, permitindo avaliar os distintos cenários da evolução da doença, em termos das estratégias de prevenção e controle adotadas, bem como, propor outros caminhos a serem seguidos.

Antes de adentrarmos em outros tópicos, vamos definir de forma mais clara alguns termos já citados que são importantes na Epidemiologia. Traremos também referências de acontecimentos no Brasil, visando mostrar fatos reais próximos, já que um dos enfoques dessa tese é poder aproximar esse estudo para a realidade brasileira.

Epidemia: elevação do número de casos de uma doença, em um determinado lugar e período de tempo, caracterizando um excesso em relação à frequência esperada [123]. Podendo ocorrer em nível municipal quando diversos bairros apresentam certa doença. Um exemplo recente foi a epidemia de Dengue no ano de 2013 em Goiânia-GO [86]. Também pode ser a nível estadual, quando ocorre em diversas cidades de um mesmo estado, como a epidemia do

vírus Zika em 2015-2016 no Piauí-BR [98]. Por fim, esta pode ser a nível nacional, quando a doença ocorre em diferentes regiões do país, como a de Aids no Brasil [96].

Surto: tipo de elevação de número de casos restrito a uma área geográfica pequena e bem delimitada ou a uma população institucionalizada, como por exemplo em escolas, quartéis, empresas e hospitais [123]. Como ocorreu no ano de 2008, na comunidade rural de Campo Alegre, pertencente ao município de Ibiracatu-MG, que a falta de tratamento de esgoto gerou um surto de hepatite A, tendo maior incidência da doença em crianças de até 10 anos de idade, os quais, em sua maioria, estavam matriculados em uma escola pública local [90].

Endemia: esta não está relacionada a uma questão quantitativa, e sim a uma questão de recorrência. É uma doença que se manifesta com frequência e somente em determinada região, de causa local [123]. A Tuberculose, por exemplo, é considerada uma doença endêmica em algumas regiões do Brasil, como por exemplo no Pará [87].

Pandemia: em uma escala de gravidade, é o pior dos cenários. Ela acontece quando uma epidemia se estende a níveis mundiais, ou seja, se espalha por diversos países e continentes[123]. Em 2009, passamos por uma pandemia disseminada por influenza A H1N1 [115]. E em março de 2020 a COVID-19 também passou de epidemia para uma pandemia [112].

Já que trataremos de aplicações no Brasil e para ajudar a justificar a importância de estudos em Epidemiologia, na seção 1.1 vamos entender um pouco da constituição do sistema de saúde vigente, mas principalmente do setor mais envolvido na questão epidemiológica, a vigilância epidemiológica.

1.1 Vigilância Epidemiológica no Brasil

A saúde no Brasil é constitucionalmente direito público e subjetivo de todos e sua garantia é dever do Estado [19]. Assim, para tentar alcançar o acesso universal e igualitário foi criado o Sistema Único de Saúde (SUS). Com a criação do SUS saímos da indigência em saúde pública, para oferecer inúmeros cuidados de saúde individual e coletiva [27]. Abrangendo desde o simples atendimento por meio da atenção primária via estratégia de saúde da família até a prevenção e a promoção da saúde como as estratégias de vigilância, sendo financiado e gerido em regime de coparticipação entre os três entes federados: a União, os Estados e os Municípios. A rede que compõe o SUS é ampla e abrange tanto as ações quanto os serviços de saúde, englobando setores desde a urgência e emergência, a atenção hospitalar, as ações e serviços das vigilâncias (epidemiológica, sanitária e ambiental) até a assistência farmacêutica.

Podemos então dizer que a epidemiologia é um dos pilares da Saúde Pública. Ainda, segundo a Lei 8.080 de 1990 [18], que trata das condições para a promoção, proteção e recuperação da saúde e do funcionamento dos serviços, percebemos que os estudos em epidemiologia contribuem diretamente para o cumprimento dos objetivos do SUS, sendo um tipo de ação da vigilância epidemiológica.

Esse movimento de entender as epidemias como um problema de saúde pública, iniciou ainda

na década de 60 no Brasil em alguns programas de controle de doenças transmissíveis, como a Campanha de Erradicação da Varíola [124], por exemplo. Ao perceber que informação era a base para o controle de doenças o Ministério da Saúde através da Secretaria de Vigilância em Saúde implementou boletins epidemiológicos, esses que até hoje existem, podendo ser emitido por qualquer ente federado [4]. A Secretaria de Vigilância em Saúde também publica e mantém atualizado o Guia de Vigilância Epidemiológica, que norteia os profissionais de saúde, sendo responsável pela recomendação, promoção e avaliação das ações de prevenção e controle das medidas tomadas para as situações de agravos à saúde.

No campo da saúde, a vigilância está relacionada às práticas de atenção e promoção da saúde dos cidadãos e aos mecanismos adotados para prevenção de doenças. Nos deteremos em entender melhor o sistema de vigilância epidemiológica, em que essa tese se embasa, para buscar informações sobre as doenças que estão acometendo a população brasileira e assim utilizando modelos matemáticos contribuir disparando alertas quando for necessário.

O Sistema Nacional de vigilância epidemiológica foi criado em 1976 [106], e é responsável pela coleta, processamento, análise e interpretação de dados sobre agravos à saúde. Os dados são repassados pelos médicos através do Sistema Nacional de Agravos Notificáveis (SINAN) e ficam disponíveis para todos através do Departamento de Informática do Sistema Único de Saúde (DATASUS-TABNET). A vigilância fornece suporte de como os dados devem ser inseridos no sistema e como podem ser acessados, além de analisá-los cuidando qualquer elevação inesperada no número de casos e publicá-los através dos boletins epidemiológicos. Outra importante função da vigilância epidemiológica foi a concepção, estruturação e desenvolvimento do Plano nacional de Imunização e constantemente acompanhar e guiar os profissionais sobre os eventos adversos pós-vacinação, assim como organizar as campanhas de vacinação.

Nesse sentido, todos ganham quando o SUS está em pleno funcionamento. Quando uma pequena unidade básica de saúde da família percebe um aumento de casos de uma doença, podendo significar um surto, já manda um alerta para a vigilância que inicia uma investigação conforme indica o Guia de Vigilância Epidemiológica [123]. Assim, um surto, como o relatado em [90], que teve as medidas adequadas realizadas consegue em um curto período de tempo uma queda considerável na incidência da doença, não evoluindo para uma epidemia.

A modelagem matemática em epidemiologia muito tem a contribuir com a vigilância epidemiológica. Haja vista que esta consegue simular cenários, antecipando aspectos fundamentais de uma doença [130], seja utilizando simulações numéricas ou através de resultados teóricos. Tornando-se assim um mecanismo indispensável para a tomada de decisão dos governantes, trazendo economia aos cofres públicos e salvando vidas [63]. Na seção 1.2 contextuaremos historicamente esse tipo de modelagem.

1.2 Modelos Compartmentais em Epidemiologia e seus enfoques

Modelos matemáticos em epidemiologia estão em constante aprimoramento [130, 22]. Tendo como principal objetivo fornecer representações da realidade da forma mais fidedigna possível mantendo a simplicidade suficiente para que o tratamento teórico do mesmo seja possível. Desta forma, tais modelos possibilitam a simulação de cenários da dinâmica e mecanismos de disseminação das doenças de uma maneira simplificada, com o intuito de fornecer subsídios para as tomadas de decisões das autoridades.

Dentro da história da epidemiologia matemática, um trabalho pioneiro foi o realizado por Daniel Bernoulli (1700-1782)[41]. Neste trabalho, a junção de modelagem matemática com outras ciências, como medicina e biologia possibilitou a comprovação da eficácia de uma inoculação preventiva contra a varíola, junto aos governantes da época.

Os chamados modelos compartimentais são ferramentas úteis em diversas áreas como ecologia, economia, biologia celular, mas são os mais comuns na epidemiologia[10]. De um modo geral, descrevem a dinâmica entre distintas subpopulações, estando estas divididas em compartimentos, e.g. [63, 11, 130] e referências. Em cada modelo epidemiológico, os compartimentos abrigam a população em estágios diferentes da doença, sendo estes dependentes das características da mesma, e a dinâmica entre os compartimentos é geralmente modelada usando equações diferenciais que descrevem as taxas de transmissão, recuperação, e, se aplicável morte.

Muitos modelos matemáticos foram propostos para descrever a dinâmica da gripe e suas mutações em uma população (ver [38] para uma revisão). Uma abordagem típica usa vários modelos SIR (suscetíveis-infecciosos-recuperados originalmente propostos por Kermack e McKendrick [63]), conectados por meio de alguns parâmetros de imunidade cruzada, para modelar as interações entre indivíduos que são (ou foram) infectados por diferentes cepas virais [13]. A análise desses modelos mostrou que múltiplas cepas de Influenza podem persistir nas populações humanas e que sua prevalência pode apresentar oscilações autossustentadas ao longo do tempo.

Em [92], o autor sugeriu a introdução no modelo de perda de imunidade do hospedeiro, como alternativa para incorporar o surgimento de novas cepas virais. Em [58], os autores propuseram "imunidade parcial temporária" para os indivíduos no compartimento R para explicar a mutação do vírus influenza. Em [28], um compartimento chamado imunidade cruzada (C) foi incorporado ao modelo SIR, para projetar um estado intermediário entre o estado totalmente suscetível (S) e o totalmente protegido (R). Tal extensão para o modelo SIR (agora chamado de SIRC) permite explicar a exposição a cepas mutantes e as suas respostas imunes pré-existentes. Em [36], os autores propõem uma dinâmica de ordem fracionária para o modelo SIRC (aqui chamado de (F) -SIRC). A introdução de tal dinâmica é para dar conta da memória imunológica, que pode ser interpretada como uma escala de tempo distinta. Para entender como a dinâmica entre os compartimentos funciona, apresentamos o Diagrama do modelo SIRC na Figura 1.1.

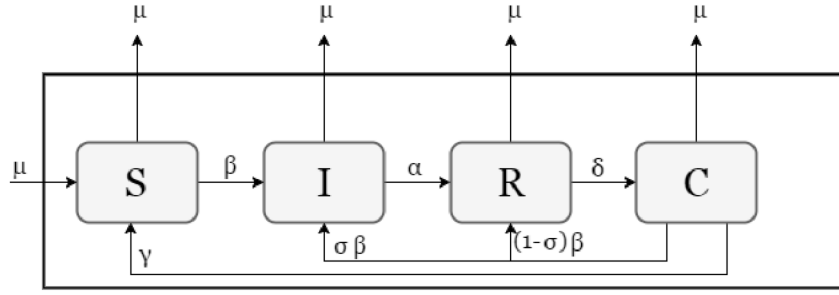


Figura 1.1: Diagrama Compartmental SIRC.

Nesse modelo $\mu > 0$ representa a taxa de mortalidade e natalidade, o qual pode ser obtido da média do tempo de vida da população μ^{-1} . Os parâmetros α , δ e γ são os inversos do tempo em que os indivíduos ficam, respectivamente, nos compartimentos I , R e C , os quais devem ser estimados através de observações clínicas. σ , por sua vez, pode ser interpretado como a probabilidade média de reinfecção do indivíduo que esteja no compartimento C . Por fim, β é a taxa de contato entre indivíduos dos compartimentos S e I . A calibragem dos parâmetros β e σ são mais difíceis e faz-se necessário um tempo maior de observação. Apresentando cada um dos compartimentos, temos que a população total N está subdividida em:

- Suscetível (S), onde fica a população que não possui anticorpos para o combate da doença e está apta a contraí-la quando exposta ao agente infeccioso;
- Infectado ou Infecciosos (I), fica o indivíduo que já esteja infectado com a doença. Neste estado está infectado pelo agente patogênico e é capaz de transmitir a doença;
- Recuperado ou Removidos (R), onde fica a população após o final do período de infecção. Esse estado inclui os casos, nos quais o indivíduo recuperou-se da infecção e adquire imunidade a doença através de anticorpos e não poderá mais contraí-la ou adquire imunidade temporária à infecção;
- Imunidade Cruzada (C), é o novo compartimento que foi incluído para considerar doenças que sofram mutações através do tempo. Nele ficam os indivíduos que já foram infectados e após um tempo recuperados, com imunidade, passam a ser suscetíveis não à doença original, mas a uma mutação dela;

Em forma de equação, o modelo apresentado acima pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 D_*^\theta S(t) &= \mu^\theta(N(t) - S(t)) - \beta^\theta S(t)I(t) + \gamma^\theta C(t) \\
 D_*^\theta I(t) &= \beta^\theta S(t)I(t) + \sigma^\theta \beta^\theta C(t)I(t) - (\mu^\theta + \alpha^\theta)I(t) \\
 D_*^\theta R(t) &= (1 - \sigma^\theta)\beta^\theta C(t)I(t) + \alpha^\theta I(t) - (\mu^\theta + \delta^\theta)R(t) \\
 D_*^\theta C(t) &= \delta^\theta R(t) - \beta^\theta C(t)I(t) - (\mu^\theta + \gamma^\theta)C(t),
 \end{aligned}$$

Com condições iniciais

$$S(0) = S_0 > 0, I(0) = I_0 \geq 0, R(0) = R_0 \geq 0 \text{ e } C(0) = C_0 \geq 0. \quad (1.2.1)$$

onde D_*^θ é o operador de Caputo, que será descrito de forma precisa no Capítulo 6.1.

Observação 1.2.1. *É importante salientar que o modelo SIRC proposto em [28] equivale ao modelo (1.2.1), com $\theta_j = 1$. Neste caso, o sistema de equações (1.2.1) possui os parâmetros e a dinâmica que correspondem a dimensão (tempo) $^{-1}$. Já o modelo (1.2.1), com o operador diferencial fracionário de Caputo, opera em uma dimensão (tempo) $^{-\theta}$, e.g., [14, 7]. Para manter as dimensões temporais compatíveis, algumas alterações tem que ser feitas nos modelos fracionários, o que resulta nos parâmetros dimensionalizados elevados a potências θ_j .*

Recentemente, o cálculo fracionário tem sido aplicado para modelar uma vastidão de fenômenos físicos e biológicos que vão desde difusão anômala [126, 111], finanças [127], viscoelasticidade linear e osciladores harmônicos [101]. Como as derivadas fracionárias são operadores não-locais (veja Capítulo 6.1), esta tem se mostrado uma ferramenta interessante para modelar sistemas físicos e biológicos que possuam propriedades de hereditariedade e memória, e.g. [93, 134]. Em particular, nosso sistema imunológico possui a capacidade de se adaptar e reconhecer estímulos anteriores, de forma a combatê-los e até barrá-los inicialmente [93]. Neste trabalho, concentramos nossa atenção na proposição, análise e discussão sobre algumas generalizações no modelo compartimental SIRC.

1.3 Justificativa e Objetivos

Doenças infecciosas e seus surtos / epidemias / pandemias / endemias são recorrentes na história da humanidade. O surgimento recente da COVID-19 [112], a prevalência da Dengue [88] e H1N1 [13], bem como o ressurgimento de algumas doenças infecciosas como a febre amarela [113], sarampo [66], entre outras, mostram que se faz necessário o desenvolvimento e a manutenção de mecanismos que possam descrever o comportamento destas doenças. Da mesma forma, um trabalho constante na previsão de cenários, bem como o estudo de métodos eficazes de bloqueio da transmissão até determinação de ações preventivas, como as campanhas de imunização, quando existentes.

Em adição ao exposto acima, é importante salientar que o corpo humano possui um sistema imunológico complexo, composto por barreiras formadas por milhões de células de diferentes tipos e funções, sendo responsáveis por reagir diariamente aos ataques de bactérias, vírus e outros micro-organismos. O sistema imunológico tem a imunidade dividida em adaptativa e inata [33]. Ambas possuem poder de reconhecimento, de memória. A adaptativa, estabelece a memória imunológica de uma pessoa durante sua vida, dependendo de sua exposição a patógenos, vacinas ou outros estímulos imunológicos [136]. Desta forma, o sistema imunológico adaptativo se torna específico a cada doença. Enquanto que, a imunidade inata, mesmo que não proteja

totalmente a uma doença, cria barreiras que dificultam seu espalhamento ou proporcionam resposta imune parcial pré-existente e.g. [93, 134, 17].

Em uma pesquisa sobre o vírus Influenza H1N1 de 1918, uma das pandemias mais graves da era moderna [134], por exemplo, conseguiu-se perceber claramente que os sobreviventes tinham anticorpos neutralizantes, que dificultam a infecção por novas cepas quase 90 anos após a pandemia. Outra questão interessante sobre a memória imunológica é o fato de 30% da população mundial abrigar a bactéria *Mycobacterium tuberculosis* da tuberculose e a maioria dos indivíduos infectados ($> 90\%$) desenvolverem uma infecção assintomática crônica [72]. Ou ainda, um outro exemplo é o reconhecimento que não é benéfico para saúde que acontece com a Dengue [73], quando os anticorpos gerados por uma exposição anterior por um dos 4 sorotipos existentes, facilitam a replicação dentro do hospedeiro de uma segunda linhagem invasora causando uma doença mais grave. E até para o SARS-CoV-2, causador da COVID-19, por ser um coronavírus, evidências sugerem que pela sua semelhança com outros como o SARS-CoV e MERS-CoV [67], apresentaram características semelhantes a da memória inata no seu espalhamento [59].

Como as derivadas de ordem fracionária possuem propriedades que podem ser interpretadas como efeitos de memória (veja Subseção 6.6 para uma introdução ao assunto), a incorporação de tais propriedades dinâmicas na modelagem de doenças infecciosas podem descrever características, como uma resposta imune pré-existente, não capturadas pelas modelagens utilizadas na literatura e, em particular, serem mais fidedignas aos dados reais. Alguns exemplos desta abordagem podem ser consultadas no que segue para Influenza [49, 50, 42, 70], para Dengue [40, 94], para Tuberculose [120, 119, 31], para a COVID-19 [2, 6, 43] e outras doenças.

Outra questão que afeta a constituição da memória adaptativa dos indivíduos, mas muito além disso, pode ser útil para orientar medidas de controle e prevenção, como isolamento de áreas afetadas, campanhas de vacinação direcionadas ou restrições de viagem é a implementação de vizinhanças em modelos compartimentais. Para doenças que podem ser transmitidas por vetores, como a Malária [104] ou a Dengue [86, 62], a consideração das vizinhanças é crucial, os vetores como mosquitos, podem se deslocar em uma área geográfica limitada e, portanto, a propagação da doença é fortemente influenciada pela proximidade espacial das populações afetadas [132]. Em epidemias que se propagam por contato direto entre indivíduos, o benefício dessa modelagem não é menor, para a gripe, a tuberculose ou a COVID-19 [74, 81, 31], a proximidade física entre as pessoas desempenha um papel importante na transmissão da doença. Modelar as interações entre indivíduos em vizinhanças próximas permite capturar estes efeitos de propagação.

Ao considerar a estrutura espacial da população, podemos obter uma representação mais precisa da transmissão da doença e avaliar o impacto de intervenções específicas, identificando áreas com maior risco de propagação da doença, sendo possível direcionar recursos, como equipes médicas e suprimentos, para essas regiões, a fim de controlar a disseminação e minimizar os impactos.

Como é sabido, quanto mais se conhece a respeito de uma doença e o modo como ela se

propaga, mais eficaz será o método para impedir sua disseminação e facilitar o seu controle. Além disso, percebemos no ano de 2019/2020 com o novo coronavírus SARS-CoV-2 [117] que não estamos distantes da realidade do enfrentamento de uma nova pandemia, por isso, é certo afirmar que doenças emergentes e reemergentes configuram hoje, um dos maiores problemas em saúde pública.

Da tese esboçada acima, justifica-se a necessidade de estudos e modelos que incorporem dinâmica espacial e memória imunológica em sua dinâmica. Para a incorporação da memória uma das alternativas que se apresenta é a utilização de derivadas de ordem fracionária [39], já para a implementação da dinâmica espacial, a proposta desse trabalho terá como base a teoria de Redes de Mapas Acoplados [80], mas trabalharemos na distribuição da população em rede bidimensional de um modelo contínuo após a sua discretização pelo método de Euler. Uma vantagem de trabalhar com a população distribuída em uma rede para a implementação da dinâmica espacial é a redução dos recursos computacionais necessários em comparação com sistemas que envolvem equações diferenciais parciais, por exemplo. Assim o espaço é dividido em elementos discretos, como células ou nós, e para o nosso trabalho, nas simulações estaremos sempre discretizando o nosso modelo, assim o tempo que era contínuo também passa a ser discreto.

Objetivo geral: Propor uma generalização para o modelo compartimental SIRC que considere dinâmica espacial e diferentes ordens fracionárias para suas derivadas.

Propomos o Modelo Compartimental fracionário com populações espacialmente distribuídas, que será intitulado (MF)-SIRC-ED. Para este, faremos as simplificações necessárias e estudaremos os casos de interesse neste trabalho. Para as aplicações daremos ênfase particular à modelagem da Influenza e COVID-19, que são doenças em foco no Brasil.

Objetivos específicos:

- Apresentar resultados de existência, unicidade e dependência contínua para o modelo SIRC generalizado e para alguns casos particulares;
- Apresentar resultados de estabilidade local e global para o modelo SIRC generalizado e para alguns casos particulares;
- Apresentar resultados numéricos e simulações para o modelo com múltiplas populações;
- Apresentar resultados numéricos e simulações para o modelo com derivadas fracionárias com diferentes ordens aplicado a Influenza para o modelo com pulso de vacinação;
- Analisar um modelo com faixas etárias interagindo aplicado a COVID-19;

Como forma de auxílio ao leitor, faremos uma apresentação geral do trabalho:

No Capítulo 2 apresentamos o modelo SIRC para populações espacialmente distribuídas em

uma rede, onde a dinâmica é dada por derivadas de ordens fracionárias distintas e as subpopulações interagem, sem que haja migração, o qual chamamos de (MF)-SIRC-ED. Na Seção 2.1 descrevemos de forma sucinta os resultados obtidos para este modelo geral e as publicações decorrentes da análise de alguns casos que se tornam casos particulares do modelo proposto. Na seção 2.2, mostramos resultados de existência, unicidade e dependência contínua dos dados iniciais, dos parâmetros do modelo e da ordem das derivadas, bem como resultados de permanência das soluções no semi plano positivo ao longo do tempo (o que é importante para as aplicações que temos em mente). Na Seção 2.3 apresentamos os resultados para a existência de pontos de equilíbrio para o modelo proposto, em termos da topologia da interação entre as distintas populações. Na Seção 2.4 estudamos alguns resultados particulares com relação à estabilidade local e global dos pontos estacionários. Em particular, na Subseção 2.4.1 analisamos a estabilidade para populações isoladas (quando não há interação entre as subpopulações). Nas subseções 2.4.2 e 2.4.3 estudamos a estabilidade local e global dos pontos de equilíbrio do modelo, quando as derivadas de ordem fracionária são todas identicamente 1. Na seção 2.5, apresentamos alguns resultados numéricos preliminares da dinâmica de propagação da doença, seguindo o modelo proposto. Alguns resultados sobre esse modelo já foram publicados em [83, 84].

No Capítulo 3 estudamos um caso particular do modelo (MF)-SIRC-ED, quando há uma só população com um pulso de vacinação. Além de apresentar os resultados teóricos gerais de boa colocação, estabilidade de pontos críticos, fazemos uma comparação dos resultados simulados com dados reais de Influenza. Através de estudo de alguns casos (para a ordem das derivadas fracionárias), mostramos que o modelo com derivadas de ordens distintas (MF)-SIRC aproxima os dados reais de maneira mais fidedigna que o modelo SIRC com ordens inteiras. Alguns resultados já foram publicados pela autora e colaboradores e podem ser observados em [50, 36] quando a ordem das derivadas fracionárias são consideradas as mesmas para todas as linhas do sistema ou em [55, 52, 51, 53] onde as ordens fracionárias das derivadas de cada uma das linhas do sistema são consideradas distintas. E as discussões sobre os efeitos da imunidade cruzada a longo prazo e uma análise de vários cenários foi aceita e aguarda publicação em [57].

No Capítulo 4, propomos outra variante do modelo estudado nesta tese que corresponde a inclusão de distanciamento social e reabertura das escolas durante a pandemia de Covid-19, onde a estrutura espacial é considerada unidimensional, a qual caracteriza a estrutura das faixas etária da população, que por óbvio interagem (neste caso o compartimento C é chamado de D para caracterizar o distanciamento). A boa colocação para o modelo é construída na Seção 4.3 e a existência de pontos estacionários para o modelo é estudada na Seção 4.4, para o caso em que as derivadas possuem ordem 1. Diferentes cenários numéricos são explorados na seção 4.5 explicitando o impacto da reabertura gradual das escolas durante a pandemia de Covid-19. Trabalhos com a utilização desse modelo foram publicado em [54, 56].

No Capítulo 5, fizemos uma retomada do exposto nesse trabalho, concluímos nossas dis-

cussões e deixamos algumas ideias para o futuro.

No apêndice 6.1, apresentamos um material complementar sobre o cálculo de ordem fracionária que serve de base para esta tese. cremos que esse material pode servir de apoio para o leitor não familiarizado com essa teoria e apresentar as referências necessárias a este trabalho, bem como para deixar essa tese o mais auto-contida possível.

Para finalizar no apêndice 6.9 apresentaremos um Script dos códigos utilizados assim como, descrições das máquinas utilizadas e tempos de simulação.

2 MODELO COMPARTIMENTAL FRACIONÁRIO COM POPULAÇÕES DISTRIBUÍDAS ESPACIALMENTE - (MF)-SIRC-DE

Neste capítulo, apresentamos o modelo generalizado, assim como os resultados de boa colocação. A partir destes resultados é que continuaremos a desenhar essa tese.

Nesta proposta de modelagem, após a utilização do método de Euler para a discretização do modelo, assumimos que existem $n \times m$ subpopulações, cada uma delas com $N_{i,j}$ indivíduos, para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$, distribuídos em uma rede. Assim, temos um modelo contínuo para uma população espacialmente distribuída [34, 80], em cada região da rede, os sítios (nomenclatura associada a cada célula ou pixel) $= (x_i, x_j)$ é representada por coordenadas inteiras (com $x_i = is$, $x_j = js$, onde s é o tamanho do sítio).

A expectativa aqui é de simular situações hipotéticas como fechamento de fronteiras e início do surto em um determinado sítio; Contextos nos quais mostra-se a influência da interação na disseminação de uma doença, como por exemplo: a abertura de escolas e comércios em uma pandemia e a interação entre casas vizinhas, bairros, cidades, estados e países.

Além disso, a dinâmica está sendo regida por derivadas fracionária de Caputo [39] $D_*^{\theta_k}$, com ordens distintas θ_k para cada uma das linhas do sistema.

Para a visualização de como funcionam as interações dos principais parâmetros e compreensão de como se relacionam as diferentes populações, apresentamos o seguinte Diagrama do modelo compartimental SIRC elaborado para 8 vizinhanças 2.1, em que mostramos como a população central se relaciona com as populações vizinhas considerando o principal parâmetro $(\beta_{i,\hat{j}})$,

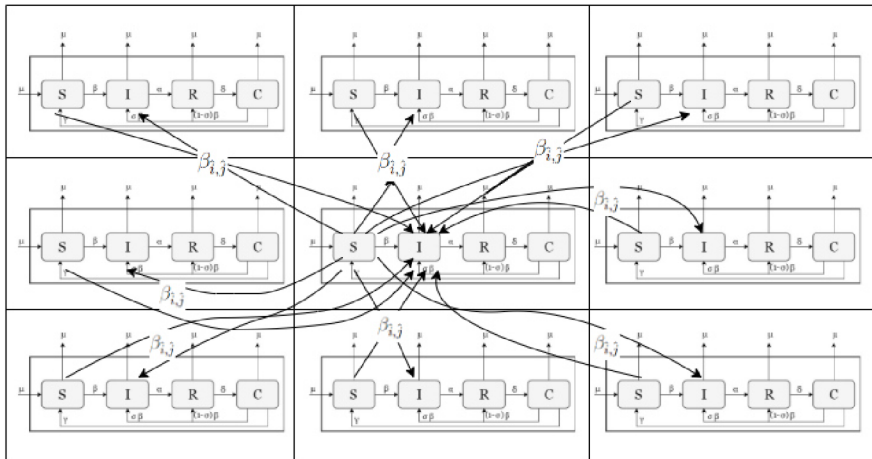


Figura 2.1: Diagrama Compartmental SIRC para 8 vizinhanças.

Os parâmetros $\beta_{i,\hat{j}} > 0$ representam as taxas de contato entre indivíduos suscetíveis do sítio (i, j) e indivíduos infectados $I_{i,\hat{j}}(t)$ em uma vizinhança $V_{i,j}$.

Assumimos ainda que, em cada sítio, a população total $N_{i,j}$ é subdividida, a cada instante de

tempo t , em compartimentos de Suscetível ($S_{i,j}$), Infectado ou Infeccioso ($I_{i,j}$), Recuperado ou Removido ($R_{i,j}$) e a Imunidade Cruzada ($C_{i,j}$), conforme a dinâmica do seguinte acoplamento equações diferenciais:

$$\begin{aligned} D_*^{\theta_{S_{i,j}}} S_{i,j}(t) &= \mu_{i,j} - \mu_{i,j} S_{i,j}(t) - S_{i,j}(t) (\beta_{i,j} I_{i,j}(t) + II(t)) + \gamma_{i,j} C_{i,j}(t) - \xi_{i,j} \rho_{i,j} S_{i,j}(t) \\ D_*^{\theta_{I_{i,j}}} I_{i,j}(t) &= S_{i,j}(t) (\beta_{i,j} I_{i,j}(t) + II(t)) + \sigma_{i,j} \beta_{i,j} C_{i,j}(t) I_{i,j}(t) - (\mu_{i,j} + \alpha_{i,j}) I_{i,j}(t) \\ D_*^{\theta_{R_{i,j}}} R_{i,j}(t) &= (1 - \sigma_{i,j}) \beta_{i,j} C_{i,j}(t) I_{i,j}(t) + \alpha_{i,j} I_{i,j}(t) - (\mu_{i,j} + \delta_{i,j}) R_{i,j}(t) + \xi_{i,j} \rho_{i,j} S_{i,j}(t) \\ D_*^{\theta_{C_{i,j}}} C_{i,j}(t) &= \delta_{i,j} R_{i,j}(t) - \beta_{i,j} C_{i,j}(t) I_{i,j}(t) - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j}) C_{i,j}(t), \end{aligned} \quad (2.0.1)$$

os parâmetros no geral são os mesmos apresentados anteriormente (ver seção 1.2). As variáveis $\xi_{i,j} \in \{0, 1\}$ e $\rho_{i,j}$, ainda não tinham sido mencionadas, elas implementam vacinação por pulso no modelo. Assim, $\xi_{i,j} \in \{0, 1\}$ representa a existência de uma estratégia de vacinação em pulso ($\xi_{i,j} = 1$) ou não (caso em que $\xi_{i,j} = 0$), com uma eficácia $\rho_{i,j}$ em curso na população do sítio (i, j) . $D_*^{\theta_{Z_{i,j}}}$ é o operador de Caputo de ordem $\theta_{Z_{i,j}} \in]0, 1]$, para $Z_{i,j} \in \{S_{i,j}, I_{i,j}, R_{i,j}, C_{i,j}\}$ e $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Observe que o modelo SIRC original proposto em [28] é equivalente ao modelo (2.0.1) com $\theta_{Z_{i,j}} = 1$, para $i = j = 1$ e $\xi_j = 0$, ou seja, uma única população. No caso em que $\theta_{Z_{i,j}} = 1$ e $\xi_j = 0$ e $C_{i,j}(t) = 0$, modelo (2.0.1) corresponde ao modelo SIR com múltiplas populações que interagem, estudados recentemente em [82, 74]. Quando não temos imunidade cruzada, isto é, quando $\sigma_{i,j} \rightarrow 1$ para todas as populações da rede, o modelo (2.0.1) equivale a um modelo do tipo SIRS multi-fracionário e com múltiplas populações que interagem.

Assim como para uma única ordem fracionária (ver seção 1.2), para manter a dimensão temporal compatível é necessário considerar que todos os parâmetros do modelo estejam elevados as respectivas potências $\theta_{Z_{i,j}}$, como por exemplo $\beta_{i,j} := \hat{\beta}_{i,j}^{\theta_{Z_{i,j}}}$, o que faria a notação ficar extremamente carregada. Isso será feito oportunamente nesta tese, principalmente quando o modelo será comparado com dados reais, ou quando os resultados obtidos dependerem de tais parâmetros.

O termo

$$II(t) := \sum_{\hat{i}, \hat{j} \in V_{i,j}} \beta_{\hat{i}, \hat{j}} I_{\hat{i}, \hat{j}}(t), \quad (2.0.2)$$

no modelo (MF)-SIRC-ED (2.0.2) representa a interação entre indivíduos suscetíveis do sítio (i, j) ($S_{i,j}$) e indivíduos infectados $I_{\hat{i}, \hat{j}}(t)$ da vizinhança $V_{i,j}$, conforme esquema da figura 2.1. Desta forma, $S_{i,j} II$ representa a probabilidade de indivíduos suscetíveis do sítio (i, j) serem infectados como resultado da interação com indivíduos de sítios vizinhos, a qual depende da topologia da vizinhança $V_{i,j}$ e da respectiva taxa de contágio $\beta_{\hat{i}, \hat{j}} > 0$.

Vale ressaltar que, no modelo (2.0.1) assumimos que a interação ocorre por meio do contato com indivíduos de diferentes localidades, mas sem migração. Em outras palavras, em cada sítio (i, j) , a população total $N_{i,j}$ permanece constante para todo tempo $t \geq 0$. Sem perda de generalidade, assumiremos que a população total em toda a rede satisfaça $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n N_{i,j} = 1$.

O modelo SIRC-MULTI (2.0.1) é considerado com as seguintes condições iniciais $X(0)$, formado pelo vetor de $4nm$ coordenadas, cujas entradas são $S_{i,j}(0) \geq 0, I_{i,j}(0) \geq 0, R_{i,j}(0) \geq 0, C_{i,j}(0) \geq 0$ para $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$.

2.1 Descrição dos resultados obtidos para o modelo (MF)-SIRC-ED proposto nesta tese.

Nesta seção, detalharemos os resultados que conseguimos provar para diferentes variantes do modelo (2.0.1), conforme segue abaixo.

1. Neste Capítulo, estamos apresentando e estudando o modelo mais geral, chamado de (MF)-SIRC-ED.
 - Na Seção 2.2, serão construídos os resultados de boa colocação para o modelo (MF)-SIRC-ED, que será base para os demais modelos estudados nesta proposta.
 - Na Seção 2.3, estudaremos a existência de pontos estacionários X^* , com coordenadas $(S_{i,j}^*, I_{i,j}^*, R_{i,j}^*, C_{i,j}^*)$, para o modelo (2.0.1).
 - Na Seção 2.5 examinamos numericamente o efeito que a interação entre múltiplas populações tem na dinâmica da doença.
2. No Capítulo 3 será considerado uma subpopulação isolada, chamaremos esse modelo de (MF)-SIRC e tomaremos por base os resultados de boa colocação construídos na Seção 2.2 para o modelo (2.0.1), mas com $i = j = 1$ e quando $II(t) = 0$.
 - Na Seção 3.2, complementaremos os resultados teóricos para o modelo 3.1.1.
 - Na Seção 3.3, analisaremos a estabilidade dos pontos de equilíbrio para o modelo (MF)-SIRC com Pulso de Vacinação 3.1.1.
 - Na Seção 3.4, apresentaremos algumas simulações interessantes do modelo (MF)-SIRC com Pulso de Vacinação para Influenza.
3. No Capítulo 4, estudaremos uma modificação do modelo SIRC, feita para a modelagem da COVID-19. O Modelo SIRD 4.2.1 com faixas etárias que interagem.
 - Na Seção 4.3, complementaremos os resultados teóricos para o modelo 4.2.1.
 - Na Seção 4.4, analisaremos a estabilidade para SIRD com faixas etárias interagindo 4.3.
 - Na Seção 4.5, apresentaremos algumas simulações para a COVID-19 que analise mais de uma faixa etária interagindo em um estudo de caso local para o estado do Rio Grande do Sul(RS). Nesse estado, durante a pandemia de COVID-19, o governo implementou um modelo de distanciamento controlado e nosso modelo elucida uma retomada à normalidade.

O modelo apresentado neste capítulo vai embasar esse trabalho, traremos resultados sobre ele que serão utilizados para os demais modelos, tendo em vista que se em todas as subpopulações nos sítios (i, j) estiverem isoladas para cada uma das subpopulações (quando $II(t) = 0$ em (2.0.1)) temos o modelo SIRC com múltiplas ordens fracionárias apresentado pelos autores no Capítulo 3 com resultados publicados em [55, 52]. Se nessa simplificação considerarmos as ordens do operador derivada de Caputo θ_k todos com o mesmo valor, temos os resultados publicados em [50, 36]. Quando $\theta_k = 1$ temos que o modelo é o originalmente proposto por [28].

2.2 Resultados de Boa Colocação para o modelo (MF)-SIRC-ED

Nesta seção, apresentaremos os resultados de existência de uma única solução contínua $X(t)$ (um vetor com $4mn$, cujas coordenadas correspondem a $(S_{i,j}(t), I_{i,j}(t), R_{i,j}(t), C_{i,j}(t))$, para todo, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$,) e $t \in [0, +\infty[$. Mostraremos ainda que tal solução depende continuamente dos dados iniciais, dos parâmetros do modelo e da ordem das derivadas $\theta_{Z_{i,j}} \in]0, 1]$. Ainda, provaremos a permanência da solução no conjunto em que todas as coordenadas sejam não negativas, mostrando assim que o modelo proposto é uma generalização condizente para o modelo SIRC proposto anteriormente pelos autores em [28].

Iniciaremos provando alguns resultados preliminares. Para tal, chamaremos de $F(t, X(t))$ a função que representa o lado direito do modelo (2.0.1).

Lema 2.2.1. *Considere o modelo (2.0.1) e $F(t, U(t))$ a função que representa respectivo lado direito do modelo. Então $F(t, U(t))$ é contínua com relação a t e Lipschitz contínua com relação a $X(t)$, para qualquer $t \in [0, T]$, qualquer que seja $T > 0$ dado.*

Demonstração. A continuidade segue do fato que cada linha do modelo (2.0.1) é composto de somas e produtos de funções contínuas.

Note que, $\frac{\partial S_{i,j}}{\partial S_{i,j}} = \frac{\partial I_{i,j}}{\partial S_{i,j}} + \mu_{i,j} = (\beta_{i,j}I_{i,j} + II) - \mu_{i,j}$ se $(\hat{i}, \hat{j}) = (i, j)$ e 0 caso contrário, $\frac{\partial S_{i,j}}{\partial I_{i,j}} = -\beta_{i,j}S_{i,j}$ e $\frac{\partial I_{i,j}}{\partial I_{i,j}} = \beta_{i,j}S_{i,j} + \sigma_{i,j}\beta_{i,j}C_{i,j} - (\mu_{i,j} + \alpha_{i,j})$ se $(\hat{i}, \hat{j}) = (i, j)$, $\frac{\partial S_{i,j}}{\partial I_{i,j}} = -\frac{\partial I_{i,j}}{\partial I_{i,j}} = -\beta_{i,j}S_{i,j}$ se $(\hat{i}, \hat{j}) \in V_{i,j}$ e $\frac{\partial S_{i,j}}{\partial I_{i,j}} = 0$ caso contrário, $\frac{\partial S_{i,j}}{\partial R_{i,j}} = \frac{\partial I_{i,j}}{\partial R_{i,j}} = \frac{\partial R_{i,j}}{\partial S_{i,j}} = 0$, qualquer que seja $(\hat{i}, \hat{j})$, $\frac{\partial S_{i,j}}{\partial C_{i,j}} = \gamma_{i,j}$ e $\frac{\partial I_{i,j}}{\partial C_{i,j}} = \sigma_{i,j}\beta_{i,j}I_{i,j}$ se $(\hat{i}, \hat{j}) = (i, j)$ e 0 caso contrário, $\frac{\partial R_{i,j}}{\partial I_{i,j}} = (1 - \sigma_{i,j})\beta_{i,j}C_{i,j} + \alpha_{i,j}$ se $(\hat{i}, \hat{j}) = (i, j)$ e 0 caso contrário, $\frac{\partial R_{i,j}}{\partial R_{i,j}} = -(\mu_{i,j} + \delta_{i,j})$ se $(\hat{i}, \hat{j}) = (i, j)$ e 0 caso contrário, $\frac{\partial R_{i,j}}{\partial C_{i,j}} = (1 - \sigma_{i,j})\beta_{i,j}I_{i,j}$ se $(\hat{i}, \hat{j}) = (i, j)$ e 0 caso contrário, $\frac{\partial C_{i,j}}{\partial I_{i,j}} = -\beta_{i,j}C_{i,j}$ se $(\hat{i}, \hat{j}) = (i, j)$ e 0 caso contrário, $\frac{\partial I_{i,j}}{\partial I_{i,j}} = \beta_{i,j}S_{i,j} + \sigma_{i,j}\beta_{i,j}C_{i,j} - (\mu_{i,j} + \alpha_{i,j})$ se $(\hat{i}, \hat{j}) = (i, j)$, $\frac{\partial S_{i,j}}{\partial I_{i,j}} = -\frac{\partial I_{i,j}}{\partial I_{i,j}} = -\beta_{i,j}S_{i,j}$ se $(\hat{i}, \hat{j}) \in V_{i,j}$ e $\frac{\partial S_{i,j}}{\partial I_{i,j}} = 0$ caso contrário, $\frac{\partial S_{i,j}}{\partial R_{i,j}} = \frac{\partial I_{i,j}}{\partial R_{i,j}} = \frac{\partial R_{i,j}}{\partial S_{i,j}} = 0$, qualquer que seja $(\hat{i}, \hat{j})$, $\frac{\partial S_{i,j}}{\partial C_{i,j}} = \gamma_{i,j}$ e $\frac{\partial I_{i,j}}{\partial C_{i,j}} = \sigma_{i,j}\beta_{i,j}I_{i,j}$ se $(\hat{i}, \hat{j}) = (i, j)$ e 0 caso contrário, $\frac{\partial R_{i,j}}{\partial I_{i,j}} = (1 - \sigma_{i,j})\beta_{i,j}C_{i,j} + \alpha_{i,j}$ se $(\hat{i}, \hat{j}) = (i, j)$ e 0 caso contrário, $\frac{\partial R_{i,j}}{\partial R_{i,j}} = -(\mu_{i,j} + \delta_{i,j})$ se $(\hat{i}, \hat{j}) = (i, j)$ e 0 caso contrário,

$\frac{\partial R_{i,j}}{\partial C_{i,j}} = (1 - \sigma_{i,j})\beta_{i,j}I_{i,j}$ se $(\hat{i}, \hat{j}) = (i, j)$ e 0 caso contrário, $\frac{\partial C_{i,j}}{\partial I_{i,j}} = -\beta_{i,j}C_{i,j}$ se $(\hat{i}, \hat{j}) = (i, j)$ e 0 caso contrário, $\frac{\partial C_{i,j}}{\partial R_{i,j}} = \delta_{i,j}$ se $(\hat{i}, \hat{j}) = (i, j)$ e 0 caso contrário, $\frac{\partial C_{i,j}}{\partial C_{i,j}} = -\beta_{i,j}I_{i,j} - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j})$ se $(\hat{i}, \hat{j}) = (i, j)$ e 0 caso contrário.

Portanto, todas as entradas da matriz Jacobiana $J(t, X(t))$ de $F(t, X(t))$ são compostas por funções contínuas em $[0, T]$. Portanto, uniformemente limitadas. Assim, existe uma constante $L > 0$, tal que $\|J(t, X(t))\| \leq L$. Agora, o Teorema do Valor Intermediário implica a Lipschitz continuidade de $F(t, X(t))$, com relação à segunda variável. $\square$

Agora, podemos estabelecer a boa colocação do problema no intervalo $[0, T]$, qualquer que seja $T > 0$ dado.

Teorema 2.2.2. *Assuma que as hipóteses do Lema 2.2.1 sejam satisfeitas. Então existe uma única solução $X(t)$ (um vetor com $4mn$ coordenadas correspondentes a $S_{i,j}(t), I_{i,j}(t), R_{i,j}(t), C_{i,j}(t)$ para $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$) contínua em $[0, T]$ e que depende continuamente das condições iniciais $X(0)$, dos parâmetros e da ordem das derivadas $\theta_{Z_{i,j}} \in]0, 1]$, para o modelo (2.0.1).*

Demonstração. Segue do Lema 2.2.1 que $F(t, X(t))$ satisfaz as hipóteses do Teorema 6.7.1 e 6.7.2. Assim, as afirmativas do teorema ficam provadas. $\square$

Por fim, mostraremos a permanência da solução $X(t)$ garantida no Teorema 2.2.2 no subconjunto de funções que possuem todas as coordenadas não negativas Ω_+ , desde que as condições iniciais $X(0)$ possuam todas as coordenadas não negativas. A demonstração segue argumentos similares aos apresentados anteriormente em [110, 109].

Proposição 2.2.3. *Assuma as hipóteses do Teorema 2.2.2 satisfeitas. Então a região Ω_+ é um conjunto invariante para a solução $X(t)$ do modelo (2.0.1).*

Demonstração. Primeiramente, note que basta fazer a demonstração para o caso em que $i = j = 1$. Para as demais coordenadas a demonstração é análoga. Para facilitar a notação, usaremos $S_{1,1}(t) = S(t), I_{1,1}(t) = I(t), R_{1,1}(t) = R(t), C_{1,1}(t) = C(t), \theta_{Z_{1,1}} = \theta_k$ e os respectivos parâmetros usaremos sem índice.

Seja $H_+^1 := \{(S(t), 0, 0, 0) : S(t) \geq 0\}, \dots, H_+^4 := \{(0, 0, 0, C(t)) : C(t) \geq 0\}$, subconjuntos de Ω_+ .

Note que o campo de vetores do modelo (2.0.1) confinado a H_+^l , para $l = 1, \dots, 4$ é tal que

$$\begin{aligned} f_1(S(t), I(t), R(t), C(t)) &= (\mu^{\theta_1}(1 - S(t)), 0, 0, 0) \\ f_2(S(t), I(t), R(t), C(t)) &= (0, -(\mu^{\theta_2} + \alpha^{\theta_2})I(t), 0, 0) \\ f_3(S(t), I(t), R(t), C(t)) &= (0, 0, -(\mu^{\theta_3} + \delta^{\theta_3})R(t), 0) \\ f_4(S(t), I(t), R(t), C(t)) &= (0, 0, 0, -(\mu^{\theta_4} + \gamma^{\theta_4})C(t)), \end{aligned}$$

respectivamente.

Usando as propriedades da transformada de Laplace aplicadas ao cálculo fracionário e a definição da função de Mittag-Leffler, e.g., [39, 110, 109], obtemos que a solução $X(t)$, confinada a H_+^l é tal que

$$(S(t), 0, 0, 0) = (t^{\theta_1} E_{\theta_1, \theta_1+1}(-\mu_1 t^{\theta_1}) \mu^{\theta_1} + E_{\theta_1, 1}(-\mu_1 t^{\theta_1}) S(0), 0, 0, 0) \quad (2.2.1)$$

$$(0, I(t), 0, 0) = (0, E_{\theta_2, 1}(-(\mu^{\theta_2} + \alpha^{\theta_2}) t^{\theta_2}) I(0), 0, 0) \quad (2.2.2)$$

$$(0, 0, R(t), 0) = (0, 0, E_{\theta_3, 1}(-(\mu^{\theta_3} + \alpha^{\theta_3}) t^{\theta_3}) R(0), 0) \quad (2.2.3)$$

$$(0, 0, 0, C(t)) = (0, 0, 0, E_{\theta_4, 1}(-(\mu^{\theta_4} + \alpha^{\theta_4}) t^{\theta_4}) C(0)), \quad (2.2.4)$$

e portanto permanece em H_+^l , sempre que as condições iniciais pertençam a H_+^l , para $l = 1 \dots, 4$, respectivamente. Portanto, podemos concluir que H_+^l são conjuntos invariantes para a solução $X(t)$.

Suponha por contradição que a solução $X(t) = (S(t), I(t), R(t), C(t))^T$ não pertença a Ω_+ , para algum $t_* \in [0, T]$. Como pelo Teorema 2.2.2 $X(t)$ é contínua em $[0, T]$, então deve existir um pequeno intervalo em torno de t_* tal que, pelo menos uma das coordenadas de $X(t)$ não esteja em Ω_+ . Note que há quatro possibilidades:

- i) A solução $X(t)$ escapa de Ω_+ por que $S(t) < 0$. Neste caso, como $S(t)$ é contínua (veja Teorema 2.2.2), existe um $t_0 > 0$ tal que $S(t_0) = 0$, enquanto $R(t_0) \geq 0$, $I(t_0) \geq 0$ e $C(t_0) \geq 0$. Ainda, deve acontecer que $S(t) < 0$ para t suficientemente próximo de t_0 . Por outro lado, $D^{\theta_1} S(t)|_{t=t_0} = \mu_1^{\theta_1} + \gamma^{\theta_1} C(t_0) \geq 0$. Assim, segue to Teorema do Valor Médio para derivadas fracionárias (veja [89]) que $S(t) \geq S(t_0) \geq 0$, para t suficientemente próximo a t_0 . Um absurdo.
- ii) Se a $X(t)$ escapar de Ω_+ por que $I(t) < 0$, então argumentando como no item i), deve existir $t_0 > 0$, tal que $I(t_0) = 0$ enquanto $S(t_0) \geq 0$, $R(t_0) \geq 0$ e $C(t_0) \geq 0$. Ainda $I(t) < 0$ para t suficientemente próximo de t_0 . Por outro lado, $D^{\theta_2} I(t)|_{t=t_0} = 0$. Agora, o teorema do valor médio para derivadas fracionárias implica que $I(t) = I(t_0) = 0$, para t suficientemente próximo a t_0 . Outro absurdo.
- iii) Se a $X(t)$ escapar de Ω_+ por que $R(t) < 0$, então, argumentando como no item i) chegamos a conclusão de que deve existir um $t_0 > 0$, para o qual $R(t_0) = 0$ enquanto $S(t_0) \geq 0$, $I(t_0) \geq 0$ e $C(t_0) \geq 0$. Ainda $R(t) < 0$ para t suficientemente próximo a t_0 . Como $D^{\theta_3} R(t)|_{t=t_0} = (1 - \sigma)^{\theta_3} \beta^{\theta_3} C(t_0) I(t_0) + \alpha^{\theta_3} I(t_0) \geq 0$, o teorema do valor médio para derivadas fracionárias implica que $R(t) \geq R(t_0) \geq 0$, para t suficientemente próximo a t_0 . Um outro absurdo.
- iv) Resta verificar se $X(t)$ escapa de Ω_+ por que $C(t) < 0$. Novamente, argumentando como no item i) chegamos a conclusão de que deve existir um $t_0 > 0$, para o qual $C(t_0) = 0$ e $S(t_0) \geq 0$, $I(t_0) \geq 0$, $R(t_0) \geq 0$. Aina, $C(t) < 0$ para t próximo a t_0 . De maneira análoga $D^{\theta_4} C(t)|_{t=t_0} = \delta^{\theta_4} R(t_0) \geq 0$. Isso conjuntamente com o teorema do valor médio

para derivadas de ordem fracionária nos leva a concluir que $C(t) \geq C(t_0) \geq 0$, para tais t suficientemente próximos a t_0 . Absurdo.

Então, não resta alternativa a não ser que $X(t) \in \Omega_+$, para todo $t \in [0, T]$. $\square$

2.3 Existência de pontos estacionários para o modelo (MF)-SIRC-ED

Nesta seção, estudaremos a existência de pontos estacionários X^* , que é o vetor de dimensão $1 \times 4mn$ cujas coordenadas são dadas $(S_{i,j}^*, I_{i,j}^*, R_{i,j}^*, C_{i,j}^*)$, para o modelo (2.0.1), no caso em que $\xi_j = 0$, por simplicidade. Um caso particular, onde $i = j = 1$, e $\xi_j \neq 0$ é estudado de maneira detalhada no Capítulo 3.

Segue da definição da derivada de ordem fracionária de Caputo (veja Apêndice) que, qualquer que seja um tal ponto, este deve satisfazer

$$D_*^{\theta_{S_{i,j}}} S_{i,j}^* = D_*^{\theta_{I_{i,j}}} I_{i,j}^* = D_*^{\theta_{R_{i,j}}} R_{i,j}^* = D_*^{\theta_{C_{i,j}}} C_{i,j}^* = 0.$$

Portanto, resulta do modelo (2.0.1) que qualquer que seja o ponto estacionário deve satisfazer o seguinte sistema de equações algébricas

$$\mu_{i,j} - \mu_{i,j} S_{i,j}^* - S_{i,j}^* \left(\beta_{i,j} I_{i,j}^* + \sum_{\hat{i}, \hat{j} \in V_{i,j}} \beta_{\hat{i}, \hat{j}} I_{\hat{i}, \hat{j}}^* \right) + \gamma_{i,j} C_{i,j}^* = 0 \quad (2.3.1)$$

$$S_{i,j}^* \left(\beta_{i,j} I_{i,j}^* + \sum_{\hat{i}, \hat{j} \in V_{i,j}} \beta_{\hat{i}, \hat{j}} I_{\hat{i}, \hat{j}}^* \right) + \sigma_{i,j} \beta_{i,j} C_{i,j}^* I_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \alpha_{i,j}) I_{i,j}^* = 0 \quad (2.3.2)$$

$$(1 - \sigma_{i,j}) \beta_{i,j} C_{i,j}^* I_{i,j}^* + \alpha_{i,j} I_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \delta_{i,j}) R_{i,j}^* = 0 \quad (2.3.3)$$

$$\delta_{i,j} R_{i,j}^* - \beta_{i,j} C_{i,j}^* I_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j}) C_{i,j}^* = 0, \quad (2.3.4)$$

No que segue apresentaremos alguns resultados auxiliares que nos ajudarão a determinar os pontos de equilíbrio do modelo (2.0.1).

Lema 2.3.1. *Assuma as hipóteses gerais sobre o modelo (2.0.1). Então, qualquer que seja o ponto de equilíbrio X^* para o modelo (2.0.1), este possui coordenadas que satisfazem*

$$S_{i,j}^* = \frac{\mu_{i,j} + \gamma_{i,j} C_{i,j}^*}{\beta_{i,j} I_{i,j}^* + \sum_{\hat{i}, \hat{j} \in V_{i,j}} \beta_{\hat{i}, \hat{j}} I_{\hat{i}, \hat{j}}^* + \mu_i}, \quad (2.3.5)$$

$$R_{i,j}^* = \frac{\beta_{i,j}C_{i,j}I_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j})C_{i,j}^*}{\delta_{i,j}}, \quad (2.3.6)$$

com

$$C_{i,j}^* = \frac{\alpha_{i,j}I_{i,j}^*\delta_{i,j}}{\sigma_{i,j}\beta_{i,j}I_{i,j}^*\delta_{i,j} + \mu_{i,j}\beta_{i,j}I_{i,j}^* + \mu_{i,j}^2 + \mu_{i,j}\gamma_{i,j} + \delta_{i,j}\mu_{i,j} + \delta_{i,j}\gamma_{i,j}}. \quad (2.3.7)$$

Por fim, $I_{i,j}^*$ é obtido por qualquer que seja a raiz real e positiva do polinômio

$$\begin{aligned} (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j}C_{i,j}^*)(\beta_{i,j}I_{i,j}^* + II^*) + \sigma_{i,j}\beta_{i,j}C_{i,j}^*I_{i,j}^*(\beta_{i,j}I_{i,j}^* + II^* + \mu_{i,j}) \\ - (\mu_{i,j} + \alpha_{i,j})I_{i,j}^*(\beta_{i,j}I_{i,j}^* + II^* + \mu_{i,j}) = 0. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Em que II^* é dado por base de (2.0.2).

Demonstração. Isolando $R_{i,j}^*$ em (2.3.4), resulta em (2.3.6). Substituindo (2.3.6) em (2.3.3), obtemos

$$(1 - \sigma_{i,j})\beta_{i,j}C_{i,j}^*I_{i,j} + \alpha_{i,j}I_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \delta_{i,j})\left(\frac{\beta_{i,j}C_{i,j}^*I_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j})C_{i,j}^*}{\delta_{i,j}}\right) = 0. \quad (2.3.9)$$

Isolando $C_{i,j}^*$ em (2.3.9), obtemos (2.3.7). Da mesma forma, isolando $S_{i,j}^*$ em (2.3.1), obtemos (2.3.5).

Substituindo (2.3.5) em (2.3.2) obtemos

$$\left(\frac{\mu_{i,j} + \gamma_{i,j}C_{i,j}^*}{\beta_{i,j}I_{i,j}^* + \sum_{\hat{i}, \hat{j} \in V_{i,j}} \beta_{\hat{i}, \hat{j}}I_{\hat{i}, \hat{j}}^* + \mu_{i,j}}\right) \left(\beta_{i,j}I_{i,j}^* + \sum_{\hat{i}, \hat{j} \in V_{i,j}} \beta_{\hat{i}, \hat{j}}I_{\hat{i}, \hat{j}}^*\right) + \sigma_{i,j}\beta_{i,j}C_{i,j}^*I_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \alpha_{i,j})I_{i,j}^* = 0,$$

o que é equivalente a (2.3.8).

□

Lema 2.3.2. *Sob as mesmas hipóteses do Lema 2.3.1, $I_{i,j}^* := I$ raiz do polinômio (2.3.8) é equivalente ao seguinte polinômio de grau 3*

$$A_1I^3 + A_2I^2 + A_3I + A_4 = 0 \quad (2.3.10)$$

onde os coeficientes são

$$A_1 = -\mu_{i,j}\beta_{i,j}^2(\alpha_{i,j} + \mu_{i,j} + \sigma_{i,j}\delta_{i,j})$$

$$A_2 = b_1II^* + b_2,$$

onde

$$b_1 = -\mu_{i,j}\beta_{i,j}(\delta_{i,j}\sigma_{i,j} + \mu_{i,j} + \alpha_{i,j})$$

e

$$b_2 = -\mu_{i,j}\beta_{i,j}((\mu_{i,j} + \delta_{i,j} + \gamma_{i,j})(\mu_{i,j} + \alpha_{i,j}) + (\alpha_{i,j} - \beta_{i,j})(\mu_{i,j} + \sigma_{i,j}\delta_{i,j}) + (\delta_{i,j}\gamma_{i,j} + \mu_{i,j}\sigma_{i,j}\delta_{i,j} + \mu_{i,j}))$$

$$A_3 = c_1 II^* + c_2$$

onde $c_1 = \mu_{i,j}((\mu_{i,j} + \sigma_{i,j}\delta_{i,j})\beta_{i,j} - ((\alpha_{i,j} + \mu_{i,j})(\mu_{i,j} + \gamma_{i,j} + \delta_{i,j}) + \gamma_{i,j}\delta_{i,j}))$ e

$$c_2 = \mu_{i,j}^2((\beta_{i,j} - \alpha_{i,j})(\mu_{i,j} + \gamma_{i,j} + \delta_{i,j} + \gamma_{i,j}\delta_{i,j}) + (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j})(-\mu_{i,j} - \delta_{i,j}))$$

e

$$A_4 = \mu_{i,j} II^* (\mu_{i,j}^2 + \mu_{i,j}\gamma_{i,j} + \mu_{i,j}\delta_{i,j} + \delta_{i,j}\gamma_{i,j}) .$$

Ainda, o sinal dos coeficientes é tal que

i) $A_1 < 0$,

ii) $A_2 \leq 0$, qualquer que seja o valor de II^* enquanto

$$\beta_{i,j} \leq \frac{(\mu_{i,j} + \delta_{i,j} + \gamma_{i,j})(\mu_{i,j} + \alpha_{i,j}) + \alpha_{i,j}(\mu_{i,j} + \sigma_{i,j}\delta_{i,j}) + (\delta_{i,j}\gamma_{i,j} + \mu_{i,j}\sigma_{i,j}\delta_{i,j} + \mu_{i,j})}{(\delta_{i,j}\sigma_{i,j} + \mu_{i,j})}.$$

Caso tenhamos

$$\beta_{i,j} \geq \frac{(\mu_{i,j} + \delta_{i,j} + \gamma_{i,j})(\mu_{i,j} + \alpha_{i,j}) + \alpha_{i,j}(\mu_{i,j} + \sigma_{i,j}\delta_{i,j}) + (\delta_{i,j}\gamma_{i,j} + \mu_{i,j}\sigma_{i,j}\delta_{i,j} + \mu_{i,j})}{(\delta_{i,j}\sigma_{i,j} + \mu_{i,j})},$$

então $A_2 > 0$ enquanto $0 \leq II^* < -b_1/b_2$ (que é positivo, haja visto que $b_1 < 0$ e $b_2 > 0$, neste caso).

iii) $A_3 \leq 0$, qualquer que seja o valor de II^* enquanto $\beta_{i,j} < \alpha_{i,j}$ e

$$\beta_{i,j} \leq \frac{((\alpha_{i,j} + \mu_{i,j})(\mu_{i,j} + \gamma_{i,j} + \delta_{i,j}) + \gamma_{i,j}\delta_{i,j})}{(\mu_{i,j} + \sigma_{i,j}\delta_{i,j})}$$

(pois $c_1 < 0$ $c_2 < 0$). $A_3 > 0$, enquanto $II^* > -c_1/c_2$, quando $\beta_{i,j} < \alpha_{i,j}$ e

$$\beta_{i,j} > \frac{((\alpha_{i,j} + \mu_{i,j})(\mu_{i,j} + \gamma_{i,j} + \delta_{i,j}) + \gamma_{i,j}\delta_{i,j})}{(\mu_{i,j} + \sigma_{i,j}\delta_{i,j})}$$

(pois $c_1 > 0$ $c_2 < 0$). Caso $\beta_{i,j} > \alpha_{i,j}$ e

$$\beta_{i,j} < \frac{((\alpha_{i,j} + \mu_{i,j})(\mu_{i,j} + \gamma_{i,j} + \delta_{i,j}) + \gamma_{i,j}\delta_{i,j})}{(\mu_{i,j} + \sigma_{i,j}\delta_{i,j})}$$

, então $A_3 > 0$ enquanto $0 < II^* < -c_1/c_2$, e $A_3 < 0$ caso contrário (pois $c_1 < 0$ $c_2 > 0$).

Por fim, $A_3 > 0$, qualquer que seja o valor de II^* , caso $\beta_{i,j} > \alpha_{i,j}$ e

$$\beta_{i,j} \leq \frac{((\alpha_{i,j} + \mu_{i,j})(\mu_{i,j} + \gamma_{i,j} + \delta_{i,j}) + \gamma_{i,j}\delta_{i,j})}{(\mu_{i,j} + \sigma_{i,j}\delta_{i,j})}$$

(pois $c_1 > 0$ $c_2 > 0$).

vi) $A_4 > 0$ se $II^* \neq 0$ e $A_4 = 0$ se $II^* = 0$.

Demonstração. O polinômio em (2.3.10) segue diretamente da substituição de (2.3.7) em (2.3.8) e rearranjando os termos.

Como todos os coeficientes são não negativos, segue $A_1 < 0$. Além disso, como $II^* \geq 0$, segue que o sinal de A_4 satisfaz as conclusões do lema. Assim os itens i) e vi) são satisfeitos.

Como A_2 e A_3 são uma função de primeiro grau em II^* , segue que o sinal de A_2 e A_3 dependem dos sinais dos coeficientes, como enunciado nos itens ii) e iii), respectivamente.

Proposição 2.3.3. *Assuma as mesmas hipóteses do Lema 2.3.2 satisfeitas e que $II^* = 0$ (não há vizinho infectado no ponto de equilíbrio da população (i, j)). Sejam $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3, \tilde{A}_4$ os coeficientes A_1, A_2, A_3, A_4 definidos no Lema 2.3.2, para $II^* = 0$. Então o polinômio $p(I) = \tilde{A}_1 I^3 + \tilde{A}_2 I^2 + \tilde{A}_3 I + \tilde{A}_4$ possui raízes reais não negativas que correspondem aos seguintes pontos de equilíbrio para o modelo (2.0.1):*

- i) *Ponto de equilíbrio livre de doença $S_{i,j}^* = 1, I_{i,j}^* = 0, R_{i,j}^* = 0$ e $C_{i,j}^* = 0$, para qualquer que sejam $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.*
- ii) *A única raiz real positiva é a $II^* = 0$ caso $b_2 < 0$ e $c_2 < 0$.*
- iii) *$I_{i,j}^* = \frac{-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4Ac_2}}{2A}$, no caso em que $b_2 > 0$ e $c_2 > 0$ (vide itens i) e ii) no Lema 2.3.2.*
- iv) *$I_{i,j}^* = \frac{-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4Ac_2}}{2A}$, no caso em que $b_2 < 0$ e $c_2 > 0$ (vide itens i) e ii) no Lema 2.3.2.*
- v) *$I_{i,j}^* = \frac{-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4Ac_2}}{2A}$, no caso em que $b_2 > 0$ e $c_2 < 0$ (vide itens i) e ii) no Lema 2.3.2.*

Demonstração. Por simplicidade de notação, vamos escrever $I = I_{i,j}^*$.

Segue do Lema 2.3.2 que se $II^* = 0$, então $A_4 = 0$. Neste caso o polinômio $p(I) = Iq(I)$, onde $q(I) = (A_1 I^2 + b_2 I + c_2)$.

Assim, $I = I_{i,j}^* = 0$ é uma das raízes, a qual é o ponto livre de doenças. Como $I_{i,j}^* = 0$ temos de (2.3.7) que $C_{i,j}^* = 0$, e assim, de (2.3.6), obtemos $R_{i,j}^* = 0$. Juntando os resultados acima combinados com (2.3.5), obtemos $S_{i,j}^* = 1$. Portanto o item i) está provado.

Resta obter quais são as raízes positivas do polinômio $q(I)$, que é uma parábola voltada para baixo, haja visto que $A_1 < 0$ (vide Lema 2.3.2). Como o vértice desta parábola tem primeira coordenada em $-b_2/2A_1$, só pode existir uma raiz positiva caso $b_2 < 0$ e até duas raízes positivas caso $b_2 > 0$, o que corresponde as restrições em $\beta_{i,j}$ enunciadas no Lema 2.3.2 item ii). Portanto:

- Se $b_2 < 0$ e $c_2 < 0$ a parábola que é voltada para baixo tem coordenada do vértice negativa e corta o eixo das ordenadas em um ponto negativo, assim não há raízes reais positivas, concluindo o item ii).

- Caso $b_2 > 0$ e $c_2 > 0$, segue que $b_2^2 - 4A_1c_2 > 0$, haja visto que $A_1 < 0$, Portanto $q(I)$ tem duas raízes reais. Como a parábola corta o eixo das ordenadas em $c_2 > 0$ e é voltada para baixo ($A_1 < 0$), resta que existe uma única raiz real positiva. Como $b_2^2 - 4A_1c_2 > b_2^2$ (pois $A_1 < 0$ e $c_2 > 0$), segue que tal raiz positiva é dada em item iii).
- Caso $b_2 < 0$ e $c_2 > 0$, segue que $b_2^2 - 4A_1c_2 > 0$, haja visto que $A_1 < 0$, Portanto $q(I)$ tem duas raízes reais. Como, neste caso o vértice desta parábola tem primeira coordenada em $-b_2/2A_1 < 0$ (pois $A_1 < 0$ e $b_2 < 0$), segue que existe uma a única raiz positiva, dada como em iv).
- Caso $b_2 > 0$ e $c_2 < 0$, podem acontecer dois casos distintos. Ou $b_2^2 < 4A_1c_2$, neste caso não há raízes reais, ou $b_2^2 \geq 4A_1c_2$, e neste caso há duas raízes reais (distintas se não á igualdade).
- Em função de $\beta_{i,j}$, temos que $b_2^2 \geq 4A_1c_2$ quando

$$\beta_{i,j} \leq \frac{\alpha_{i,j}(\mu_{i,j} + \sigma_{i,j}\delta_{i,j}) + 2(\delta_{i,j}\gamma_{i,j} + \mu_{i,j}\delta_{i,j} + \mu_{i,j})}{(\mu_{i,j} + \sigma_{i,j}\delta_{i,j})} + \frac{2(\mu_{i,j} + \delta_{i,j} + \gamma_{i,j})(\mu_{i,j} + \alpha_{i,j}) + 4(\alpha_{i,j} + \mu_{i,j} + \sigma_{i,j}\delta_{i,j})(\mu_{i,j} + \gamma_{i,j} + \delta_{i,j} + \gamma\delta)}{(\mu_{i,j} + \sigma_{i,j}\delta_{i,j})^2}$$

□

Lema 2.3.4. *Seja $II^* > 0$. Então o polinômio $p(I) = A_1I^3 + A_2I^2 + A_3I + A_4$, onde os coeficientes A_1, A_2, A_3, A_4 são dados no Lema 2.3.2 possui uma raiz real positiva.*

Demonstração. Como $p(I)$ é um polinômio de grau 3, sabemos que existe pelo menos uma raiz real. Como $p(0) = A_3 > 0$ e $\lim_{I \rightarrow \infty} p(I) = -\infty$, pois $A_1 < 0$ (veja Lema 2.3.2), segue da continuidade de $p(I)$, que existe uma raiz real positiva. □

Teorema 2.3.5. *Assuma as mesmas hipóteses do Lema 2.3.4. Então o polinômio $p(I) = A_1I^3 + A_2I^2 + A_3I + A_4$, onde os coeficientes são dados como no Lema 2.3.2 é tal que:*

i) *Possui uma única raiz real positiva, caso $A_3 \geq 0$ ou $A_3 < \frac{-A_2^2}{-3A_1}$ (note que neste caso $A_3 < 0$, pois $A_1 < 0$).*

ii) *Caso $\frac{-A_2^2}{-3A_1} \leq A_3 < 0$, o polinômio pode ter até três raízes reais positivas.*

Demonstração. A existência de uma raiz real positiva está garantida pelo Lema 2.3.4.

Para demonstrar o item i), vamos mostrar que não existe outra raiz real positiva.

Note que a derivada de $p(I)$ é a seguinte função do segundo grau $p'(I) = 3A_1I^2 + 2A_2I + A_3$ (cuja concavidade é voltada para baixo, pois $A_1 < 0$).

a) Caso $A_3 < \frac{-A_2^2}{-3A_1}$, segue que a equação $p'(I) = 0$ possui discriminante dado por $\Delta := 4(A_2^2 - 3A_1A_3) < 0$. Assim, $p'(I) < 0$. Logo $p(I)$ é decrescente para todo I .

- b) Caso $A_3 > 0$, então o discriminante $\Delta > 0$, haja visto que $A_1 < 0$. Portanto, $p'(I)$ possui duas raízes reais dadas por

$$\hat{I}_1 = (-2A_2 + \sqrt{\Delta})/6A_1$$

e

$$\hat{I}_2 = (-2A_2 - \sqrt{\Delta})/6A_1.$$

Como $A_1 < 0$ e $\Delta > 4A_2^2$, segue que $\hat{I}_1 < 0$ e $\hat{I}_2 > 0$, Assim, o sinal de $p'(I)$ é tal que

$$p'(I) < 0 \text{ se } I < \hat{I}_1 \text{ ou } I > \hat{I}_2$$

e portanto $p(I)$ é decrescente se $I < \hat{I}_1$ ou $I > \hat{I}_2$ e

$$p'(I) > 0 \text{ se } \hat{I}_1 < I < \hat{I}_2$$

e portanto $p(I)$ é crescente se $\hat{I}_1 < I < \hat{I}_2$. Assim, $\hat{I}_1$ e $\hat{I}_2$ são os pontos de mínimo e o máximo relativos de $p(I)$. Logo $0 < p(0) = D \leq p(\hat{I}_2)$. Segue que, $p(I)$ não possui raízes positivas entre no intervalo $[0, \hat{I}_2]$.

- c) Caso $A_3 = 0$, segue que $p'(I) = I(3A_1I + 2A_2)$. Portanto, as raízes de $p'(I)$ são $\tilde{I}_1 = 0$ e $\tilde{I}_2 = -2A_2/3A_1$.

Caso $A_2 < 0$, então $\tilde{I}_2 < 0$. Assim, seguindo os mesmos argumentos do item b), temos que $\tilde{I}_1 = 0$ é o ponto de máximo relativo, com $p(\tilde{I}_1) = A_4 > 0$ e $\tilde{I}_2 < 0$ é o mínimo relativo. Neste caso, $p(I)$ é decrescente para $I > 0$.

Caso $A_2 > 0$, então $\tilde{I}_2 > 0$. Como $p(\tilde{I}_2) = (A_2/3)^3(2/A_1)^2 + A_4 > A_4 > 0$. Segue que $p(I)$ é crescente no intervalo $[0, \tilde{I}_2]$ e decrescente para $I > \tilde{I}_2$.

Em todos os casos dos itens a) até c), temos que $p(I)$ só possui uma raiz real positiva, como provado no Lema 2.3.4. Logo o item i) está provado.

Caso A_3 satisfaça as restrições do item ii) então o polinômio $p'(I)$ possui as duas raízes reais positivas, dadas respectivamente por $\hat{I}_1$ e $\hat{I}_2$, como no item b) acima. Ainda, vale observar que $\hat{I}_1 < \hat{I}_2$. Assim, como argumentado acima, $p(I)$ decresce entre no intervalo $[0, \hat{I}_1]$, cresce entre $[\hat{I}_1, \hat{I}_2]$ e decresce para $I > \hat{I}_2$.

Note que, nos resta saber se $p(\hat{I}_1) \leq 0$ ou $p(\hat{I}_1) > 0$. Caso $p(\hat{I}_1) > 0$, não terá outra raiz real positiva do polinômio. Caso $p(\hat{I}_1) < 0$ teremos mais 2 raízes reais positivas. Caso $p(\hat{I}_1) = 0$, então teremos $\hat{I}_1$ como a segunda raiz positiva.

□

2.4 Resultados de estabilidade para o Modelo (MF)-SIRC-ED

Nesta seção estudaremos a estabilidade dos pontos de equilíbrio do modelo (2.0.1) para alguns casos, pois, até o momento não conseguimos determinar a estabilidade para o caso geral. Faremos isso em trabalhos futuros.

2.4.1 Estabilidade dos pontos de equilíbrio para populações isoladas

Iniciaremos estudando a estabilidade do modelo (2.0.1) quando as populações estão isoladas. Esse é o caso particular em que $II = 0$, onde II é dado por (2.0.2). Neste caso, o modelo (2.0.1) fica

$$\begin{aligned}
 D_*^{\theta_{S_{i,j}}} S_{i,j}(t) &= \mu_{i,j} - \mu_{i,j} S_{i,j}(t) - S_{i,j}(t) \beta_{i,j} I_{i,j}(t) + \gamma_{i,j} C_{i,j}(t) \\
 D_*^{\theta_{I_{i,j}}} I_{i,j}(t) &= S_{i,j}(t) \beta_{i,j} I_{i,j}(t) + \sigma_{i,j} \beta_{i,j} C_{i,j}(t) I_{i,j}(t) - (\mu_{i,j} + \alpha_{i,j}) I_{i,j}(t) \\
 D_*^{\theta_{R_{i,j}}} R_{i,j}(t) &= (1 - \sigma_{i,j}) \beta_{i,j} C_{i,j}(t) I_{i,j}(t) + \alpha_{i,j} I_{i,j}(t) - (\mu_{i,j} + \delta_{i,j}) R_{i,j}(t) \\
 D_*^{\theta_{C_{i,j}}} C_{i,j}(t) &= \delta_{i,j} R_{i,j}(t) - \beta_{i,j} C_{i,j}(t) I_{i,j}(t) - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j}) C_{i,j}(t),
 \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

cujas condições iniciais são dadas por $X(0)$, como descrito na introdução do Capítulo 2 seção.

Vale relembrar que, como $II = 0$, a interação acontece somente na população do sítio (i, j) e independe dos demais sítios da rede.

Segue da Proposição 2.3.3 que a existência do ponto de equilíbrio livre de doença dado por

$P_{i,j} = [1, 0, 0, 0]$, para qualquer subpopulação (i, j) , uma vez que cada uma das populações estão isoladas.

Lema 2.4.1. *Assuma que $II = 0$ (populações estão isoladas). Os autovalores da matriz jacobiana do modelo (2.4.1) associados ao ponto de equilíbrio livre de doenças $P_{i,j} = [1, 0, 0, 0]$ são dados por*

$$\lambda_1 = -\mu_{i,j}, \lambda_2 = -(\alpha_{i,j} + \mu_{i,j}) + \beta_{i,j}, \lambda_3 = -(\gamma_{i,j} + \mu_{i,j}) \quad e \quad \lambda_4 = -(\delta_{i,j} + \mu_{i,j}). \tag{2.4.2}$$

Demonstração. Lembre que a ideia da matriz jacobiana do sistema foi formalmente construída no Lema 2.3.1. Como as populações estão isoladas só nos interessa as entradas da matriz composta pelas derivadas parciais que envolvem a mesma população.

Aplicando $P_{i,j}$ na matriz jacobiana do modelo SIRC fracionário com populações isoladas (2.4.1), concluímos que

$$J(P_{i,j}) = \begin{bmatrix} -\mu_{i,j} & -\beta_{i,j} & 0 & \gamma_{i,j} \\ 0 & \beta_{i,j} - (\mu_{i,j} + \alpha_{i,j}) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{i,j} & -(\mu_{i,j} + \delta_{i,j}) & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_{i,j} & -(\mu_{i,j} + \gamma_{i,j}) \end{bmatrix}.$$

Como a matriz $J(P_{i,j})$ é uma triangular superior, segue que os autovalores são dados pelo produto da diagonal principal diagonal principal, ou seja, são as raízes da equação

$$(\mu_{i,j} + \lambda)((-\beta_{i,j} + (\mu_{i,j} + \alpha_{i,j}) + \lambda)((\mu_{i,j} + \delta_{i,j}) + \lambda)((\mu_{i,j} + \gamma_{i,j}) + \lambda)) = 0.$$

Isso corresponde ao afirmado no Lema. $\square$

Observação 2.4.1. *Podemos então encontrar a taxa de reprodutividade basal, R_0 , sabendo que $P_{i,j}$ é um ponto livre de doença, logo tem que ser assintoticamente estável, assim todos os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}^-$.*

Disso:

$$\begin{aligned} -\alpha_{i,j} + \beta_{i,j} - \mu_{i,j} &< 0 \Rightarrow \\ \frac{\beta_{i,j}}{\mu_{i,j} + \alpha_{i,j}} &< \frac{\mu_{i,j} + \alpha_{i,j}}{\mu_{i,j} + \alpha_{i,j}} \Rightarrow \frac{\beta_{i,j}}{\mu_{i,j} + \alpha_{i,j}} < 1 \Rightarrow \\ R_0 &= \frac{\beta_{i,j}}{\mu_{i,j} + \alpha_{i,j}} < 1. \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Agora podemos provar o seguinte resultado de estabilidade assintótica com relação ao ponto de equilíbrio livre de doenças $P_{i,j} = [1, 0, 0, 0]$.

Teorema 2.4.2. *Assuma as hipóteses do Lema 2.4.1. Então o ponto de equilíbrio livre de doenças $P_{i,j} = [1, 0, 0, 0]$ é assintoticamente estável qualquer que sejam as ordens das derivadas $\theta_{S_{i,j}}, \theta_{I_{i,j}}, \theta_{R_{i,j}}, \theta_{C_{i,j}} \in [0, 1]$, sempre que $\frac{\beta_{i,j}}{\alpha_{i,j} + \mu_{i,j}} < 1$, para qualquer que seja a população do sítio (i, j) .*

Demonstração. Com a hipótese de que $\frac{\beta_{i,j}}{\alpha_{i,j} + \mu_{i,j}} < 1$, segue que todos os autovalores da matriz jacobiana associados ao ponto de equilíbrio livre de doenças são negativos (veja equação (2.4.2) no Lema 2.4.1). Caso todas as derivadas fracionárias tem ordem 1, isto é, $\theta_{S_{i,j}} = \theta_{I_{i,j}} = \theta_{R_{i,j}} = \theta_{C_{i,j}} = 1$, segue da teoria clássica de EDO's [116] que $P_{i,j}$ é assintoticamente estável.

Caso contrário, defina $\hat{\theta} = \max\{\theta_{S_{i,j}}, \theta_{I_{i,j}}, \theta_{R_{i,j}}, \theta_{C_{i,j}}\} \in [0, 1]$. Segue do Teorema 7.20 e da Observação 7.21 em [39] que a estabilidade assintótica dos pontos de equilíbrio pode ser melhorada reduzindo-se a ordem das derivadas. Assim o resultado está provado. $\square$

Vale ressaltar que a influência da ordem das derivadas na estabilidade assintótica aparece no quociente $\frac{\beta_{i,j}}{\alpha_{i,j} + \mu_{i,j}} < 1$, haja visto que os parâmetros do modelo 2.0.1 estão elevados as potências das ordens das derivadas fracionárias. Para fixar as ideias, consideraremos o caso em

que $\hat{\theta} = \theta_{S_{i,j}} = \theta_{I_{i,j}} = \theta_{R_{i,j}} = \theta_{C_{i,j}} \in]0, 1[$. Ou seja, todas as ordens das derivadas são iguais. Segue da definição dos coeficientes que

$$\lim_{\theta \rightarrow 1} \frac{\beta_{i,j}}{\alpha_{i,j} + \mu_{i,j}} \rightarrow \frac{\hat{\beta}_{i,j}}{\hat{\alpha}_{i,j} + \hat{\mu}_{i,j}}$$

onde $\frac{\hat{\beta}_{i,j}}{\hat{\alpha}_{i,j} + \hat{\mu}_{i,j}}$ são os coeficientes do modelo (2.0.1) quando todas as derivadas são de ordem 1.

A estabilidade dos pontos de equilíbrio para o caso geral ainda está em andamento, haja vista a quantidade enorme de parâmetros do modelo. Abaixo apresentaremos os resultados de estabilidade de forma numérica, para os parâmetros que serão usados nas simulações ao final deste capítulo na Seção 2.5.

Teorema 2.4.3 (Estabilidade numérica dos pontos de equilíbrio). *Considere que os parâmetros sejam $\alpha_{i,j} = 52,14$, $\delta_{i,j} = 0,75$, $\mu_{i,j} = 0,00001$, $\gamma_{i,j} = 0,35$ e $\sigma_{i,j} = 0,12$, e $\beta_{i,j} = 2,35$ como os utilizados nas simulações da Seção 2.5. Então, o modelo (2.0.1) com populações isoladas (isto é, com $II = 0$) possui um único ponto de equilíbrio endêmico que corresponde ao item ii) da Proposição 2.3.3.*

Demonstração. Substituindo os valores dos parâmetros do modelo nos pontos de equilíbrio encontramos $b_2 = -0,001459318068202$ e $c_2 = -6,81 \times 10^{-9}$, para os quais é fácil verificar que satisfazem o item ii) da Proposição 2.3.3. Os autovalores associados para esse caso são: $\lambda_1 = -10^5$, $\lambda_2 = -0,53365$, $\lambda_3 = -0,81792$ e $\lambda_4 = -17,50558$, como todos têm parte real negativa podemos dizer que o equilíbrio endêmico é assintoticamente estável. $\square$

2.4.2 Estabilidade do ponto de equilíbrio no caso em que as derivadas são de ordem inteira.

Nesta seção estudaremos a estabilidade do ponto de equilíbrio endêmico $(S_{i,j}^*, I_{i,j}^*, R_{i,j}^*, C_{i,j}^*)$, no caso em que todas as derivadas de ordem fracionária são iguais a 1. O caso particular em que $m = n = 1$ (somente uma população) foi estudada em [76]. No que segue apresentaremos os resultados de estabilidade para o caso mais geral do modelo (2.0.1), com todas as derivadas de ordem inteira.

A novidade aqui é que a estabilidade será estudada em termos dos parâmetros do modelo e de II , dado por (2.0.2) (a topologia da vizinhança).

No caso em que as derivadas são todas de ordem 1, temos que $N_{i,j}(t) = S_{i,j}(t) + I_{i,j}(t) + R_{i,j}(t) + C_{i,j}(t)$. Para tal, basta somar todas as equações em (2.0.1).

Assim, podemos escrever

$$R_{i,j}(t) = N_{i,j}(t) - (S_{i,j}(t) + I_{i,j}(t) + C_{i,j}(t)). \quad (2.4.4)$$

Disto, segue que

$$\dot{N}_{i,j}(t) = \mu_{i,j}(1 - N_{i,j}(t)). \quad (2.4.5)$$

De (2.4.4) e (2.4.5) substituído em (2.0.1), segue que

$$\begin{aligned} \dot{N}_{i,j}(t) &= \mu_{i,j}(1 - N_{i,j}(t)) \\ \dot{S}_{i,j}(t) &= \mu_{i,j}(1 - S_{i,j}(t)) - S_{i,j}(t)(\beta_{i,j}I_{i,j}(t) + II) + \gamma_{i,j}C_{i,j}(t) \\ \dot{I}_{i,j}(t) &= S_{i,j}(t)(\beta_{i,j}I_{i,j}(t) + II) + \sigma_{i,j}\beta_{i,j}C_{i,j}(t)I_{i,j}(t) - (\mu_{i,j} + \alpha_{i,j})I_{i,j}(t) \\ \dot{C}_{i,j}(t) &= \delta_{i,j}(N_{i,j}(t) - S_{i,j}(t) - I_{i,j}(t) - C_{i,j}(t)) - \beta_{i,j}C_{i,j}(t)I_{i,j}(t) - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j})C_{i,j}(t). \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Temos de forma direta, que a matriz jacobiana do sistema (2.4.6) é dado por

$$J(N_{i,j}^*, S_{i,j}^*, I_{i,j}^*, C_{i,j}^*) = \begin{bmatrix} -\mu_{i,j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_{i,j} - (\beta_{i,j}I_{i,j}^* + II) & -\beta_{i,j}S_{i,j}^* & \gamma_{i,j} \\ 0 & \beta_{i,j}I_{i,j}^* + II & \beta_{i,j}S_{i,j}^* + \sigma_{i,j}\beta_{i,j}C_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \alpha_{i,j}) & \sigma_{i,j}\beta_{i,j}I_{i,j}^* \\ \delta_{i,j} & -\delta_{i,j} & -\delta_{i,j} - \beta_{i,j}C_{i,j}^* & -\delta_{i,j} - \beta_{i,j}I_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j}) \end{bmatrix}$$

Lema 2.4.4. *Sejam $(N_{i,j}^*, S_{i,j}^*, I_{i,j}^*, C_{i,j}^*)$ os pontos de equilíbrio endêmicos para o modelo (2.0.1), onde todas as derivadas são de ordem 1, assim o polinômio característico associado a ele é dado por*

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= -(\mu + \lambda)[(-\mu_{i,j} - (\beta_{i,j}I_{i,j}^* + II) - \lambda) \left(\frac{S_{i,j}^*}{I_{i,j}^*} - \lambda \right) (-\delta_{i,j} - \beta_{i,j}I_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j} - \lambda) \\ &\quad + \gamma_{i,j}\beta_{i,j}^2\sigma_{i,j}S_{i,j}^*I_{i,j}^* - \gamma_{i,j}(\beta_{i,j}I_{i,j}^* + II)(\delta_{i,j} + \beta_{i,j}C_{i,j}^*) + \delta_{i,j}\gamma_{i,j} \left(\frac{-S_{i,j}^*}{I_{i,j}^*} - \lambda \right) \\ &\quad + (-\mu_{i,j} - (\beta_{i,j} + II) - \lambda)\sigma_{i,j}\beta_{i,j}I_{i,j}^*(\delta_{i,j} + \beta_{i,j}C_{i,j}^*) \\ &\quad + (-\delta_{i,j} - \beta_{i,j}I_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j} - \lambda) (\beta_{i,j}I_{i,j}^* + II)\beta_{i,j}S_{i,j}^*]. \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Demonstração. Segue da terceira equação de (2.4.6) que, no equilíbrio endêmico ($I_{i,j}^* \neq 0$), temos que

$$\beta_{i,j}S_{i,j}^* + \sigma_{i,j}\beta_{i,j}C_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \delta_{i,j}) = \frac{-S_{i,j}^*II}{I_{i,j}^*}. \quad (2.4.8)$$

Substituindo (2.4.8) e o ponto de equilíbrio na matriz jacobiana, obtemos de forma direta o polinômio característico (2.4.7). $\square$

Segue de (2.4.7) $P(\lambda) = -(\mu_{i,j} - \lambda)Q(\lambda)$ e assim, um dos autovalores é $\lambda = -\mu_{i,j}$ e, portanto, negativo. Resta estudar o que acontece com os demais que estão relacionados com as raízes de $Q(\lambda)$.

Como queremos que $Q(\lambda) = 0$ para $I_{i,j}^* > 0$, segue que $\tilde{Q}(\lambda) := I_{i,j}Q(\lambda) = 0 \Leftrightarrow Q(\lambda) = 0$.

Multiplicando $Q(\lambda)$ em (2.4.7) por $I_{i,j}^*$ e organizando os termos, chegamos a

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}(\lambda) = & (-I_{i,j}^* \lambda^3 + [(-\mu_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^* - II - \delta_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j})) I_{i,j}^* - S_{i,j}^* I_{i,j}^*] \lambda^2 \\
& + [-((- \mu_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^* - II)(- \delta_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j})) + \delta_{i,j} \gamma_{i,j}) I_{i,j}^* \\
& + (-\mu_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^* - II - \delta_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j}) - \beta_{i,j} I_{i,j}^*) S_{i,j}^* II \\
& - (\beta_{i,j}^2 S_{i,j}^* + \sigma_{i,j} \beta_{i,j} (\delta_{i,j} + \beta_{i,j} C_{i,j}^*)) I_{i,j}^{*2}] \lambda \\
& + [-((- \mu_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^* - II)(- \delta_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j})) + \delta_{i,j} \gamma_{i,j}) S_{i,j}^* II \\
& + (-\delta_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j}) \beta_{i,j} S_{i,j}^* - \gamma_{i,j} (\delta_{i,j} + \beta_{i,j} C_{i,j}^*)) I_{i,j}^* II] \\
& + [(\sigma_{i,j} \delta_{i,j} - \delta_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j})) \beta_{i,j}^2 S_{i,j}^* - \gamma_{i,j} \beta_{i,j} (\delta_{i,j} + \beta_{i,j} C_{i,j}^*) \\
& - \mu_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^* - II (\delta_{i,j} + \beta_{i,j} C_{i,j}^*)] I_{i,j}^{*2}.
\end{aligned} \tag{2.4.9}$$

Lema 2.4.5. *Sob as mesmas hipóteses do Lema 2.4.4 e ainda que $\sigma_{i,j}^* \beta_{i,j}^* > 1$. Então, todas as raízes do polinômio $Q(\lambda)$ são positivas.*

Demonstração. Note que

$$\tilde{Q}(\lambda) = d_0 \lambda^3 + d_1 \lambda^2 + d_2 \lambda + d_3,$$

onde

$$\begin{aligned}
d_0 = & -I_{i,j}^* \\
d_1 = & (-\mu_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^* - II - \delta_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j})) I_{i,j}^* - S_{i,j}^* I_{i,j}^* \\
d_2 = & -((- \mu_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^* - II)(- \delta_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j})) + \delta_{i,j} \gamma_{i,j}) I_{i,j}^* + \\
& + (-\mu_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^* - II - \delta_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^*) \\
& - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j}) - \beta_{i,j} I_{i,j}^*) S_{i,j}^* II - (\beta_{i,j}^2 S_{i,j}^* + \sigma_{i,j} \beta_{i,j} (\delta_{i,j} + \beta_{i,j} C_{i,j}^*)) I_{i,j}^{*2} \\
d_3 = & [-((- \mu_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^* - II)(- \delta_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j})) + \delta_{i,j} \gamma_{i,j}) S_{i,j}^* II \\
& + (-\delta_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j}) \beta_{i,j} S_{i,j}^* - \gamma_{i,j} (\delta_{i,j} + \beta_{i,j} C_{i,j}^*)) I_{i,j}^* II] \\
& + [(\sigma_{i,j} \delta_{i,j} - \delta_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j})) \beta_{i,j}^2 S_{i,j}^* - \gamma_{i,j} \beta_{i,j} (\delta_{i,j} + \beta_{i,j} C_{i,j}^*) \\
& - \mu_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^* - II (\delta_{i,j} + \beta_{i,j} C_{i,j}^*)] I_{i,j}^{*2},
\end{aligned} \tag{2.4.10}$$

Segue diretamente da análise dos sinais nas expressões em (2.4.10) que $d_0 < 0$, $d_1 < 0$, $d_2 < 0$ e $d_3 < 0$.

Nosso próximo passo é mostrar que $d_1 d_2 - d_0 d_3 > 0$. Para tanto, note que segue de (2.4.10)

que

$$\begin{aligned}
d_1 d_2 - d_0 d_3 = & [(-\mu_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^* - II - \delta_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j})) I_{i,j}^* - S_{i,j}^* I_{i,j}^*] \\
& [- ((-\mu_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^* - II)(-\delta_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j})) + \delta_{i,j} \gamma_{i,j}) I_{i,j}^* \\
& + (-\mu_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^* - II - \delta_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j}) - \beta_{i,j} I_{i,j}) S_{i,j}^* II \\
& - (\beta_{i,j}^2 S_{i,j}^* + \sigma_{i,j} \beta_{i,j} (\delta_{i,j} + \beta_{i,j} C_{i,j}^*)) I_{i,j}^{*2}] \\
& - I_{i,j}^* [- ((-\mu_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^* - II)(-\delta_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j})) + \delta_{i,j} \gamma_{i,j}) S_{i,j}^* II \\
& + (-\delta_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j}) \beta_{i,j} S_{i,j}^* - \gamma_{i,j} (\delta_{i,j} + \beta_{i,j} C_{i,j}^*)) I_{i,j}^* II] \\
& + [(\sigma_{i,j} \delta_{i,j} - \delta_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j})) \beta_{i,j}^2 S_{i,j}^* - \gamma_{i,j} \beta_{i,j} (\delta_{i,j} + \beta_{i,j} C_{i,j}^*) \\
& - \mu_{i,j} - \beta_{i,j} I_{i,j}^* - II (\delta_{i,j} + \beta_{i,j} C_{i,j}^*)] I_{i,j}^{*2}].
\end{aligned} \tag{2.4.11}$$

Para analisarmos o sinal da expressão em (2.4.11), primeiramente definimos

$$e := -(\mu_{i,j} + \beta_{i,j} I_{i,j}^* + II) < 0$$

e

$$f := -(\delta_{i,j} + \beta_{i,j} I_{i,j}^* + (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j})) < 0.$$

Assim, (2.4.11) pode ser dividida em seus termos positivos, dados por

$$-(e + f)(e \cdot f + \delta_{i,j} \gamma_{i,j}) I_{i,j}^{*2} \tag{2.4.12}$$

$$-(e + f)(\beta_{i,j} I_{i,j}^* - (e + f)) I_{i,j}^* S_{i,j}^* II \tag{2.4.13}$$

$$-(e + f) \beta_{i,j}^2 I_{i,j}^* S_{i,j}^* \tag{2.4.14}$$

$$-(e + f) \sigma_{i,j} \beta_{i,j} (\delta_{i,j} + \beta_{i,j} C_{i,j}^*) I_{i,j}^{*3} \tag{2.4.15}$$

$$+(e \cdot f + \delta_{i,j} \gamma_{i,j}) I_{i,j}^* S_{i,j}^* II \tag{2.4.16}$$

$$+(\beta_{i,j} I_{i,j}^* - (e + f))(S_{i,j}^* II)^2 + \beta_{i,j}^2 S_{i,j}^{*2} II \tag{2.4.17}$$

$$\sigma_{i,j} \beta_{i,j} (\delta_{i,j} + \beta_{i,j} C_{i,j}^*) I_{i,j}^{*2} S_{i,j}^* II \tag{2.4.18}$$

e seus termos negativos, dados por

$$+(e \cdot f + \delta_{i,j} \gamma_{i,j}) I_{i,j}^* S_{i,j}^* II \tag{2.4.19}$$

$$-(\gamma_{i,j} (\delta_{i,j} + \beta_{i,j} C_{i,j}^*) - f \beta_{i,j} S_{i,j}^*) I_{i,j}^{*2} II \tag{2.4.20}$$

$$+(\sigma_{i,j} \delta_{i,j} + f \beta_{i,j}^2 S_{i,j}^* + (e - \gamma_{i,j} \beta_{i,j}) (\delta_{i,j} + \beta_{i,j} C_{i,j}^*)) I_{i,j}^{*3} \tag{2.4.21}$$

Somando as expressões em (2.4.16) com as em (2.4.19), obtemos zero.

Vamos reescrever (2.4.13) e (2.4.20) como

$$-(e+f)\beta_{i,j}S_{i,j}^*I_{i,j}^{*2}II \quad (2.4.22)$$

$$+(e+f)^2I_{i,j}^*S_{i,j}^*II \quad (2.4.23)$$

$$-(\gamma_{i,j}(\delta_{i,j} + \beta_{i,j}C_{i,j}^*)I_{i,j}^{*2}II \quad (2.4.24)$$

$$+f\beta_{i,j}S_{i,j}^*)I_{i,j}^{*2}II \quad (2.4.25)$$

Adicionando (2.4.22) com (2.4.25), ficamos com

$$z_1 = -e\beta_{i,j}S_{i,j}^*I_{i,j}^{*2}II. \quad (2.4.26)$$

Agora reescreveremos (2.4.24) e (2.4.12) da seguinte forma

$$-\gamma_{i,j}\delta_{i,j}I_{i,j}^{*2}II \quad (2.4.27)$$

$$+\beta_{i,j}C_{i,j}^*I_{i,j}^{*2}II \quad (2.4.28)$$

$$(-(e+f) - II + II)(e.f + \delta_{i,j}\gamma_{i,j})I_{i,j}^{*2} = \quad (2.4.29)$$

$$(-(e+f) - II)(e.f + \delta_{i,j}\gamma_{i,j})I_{i,j}^{*2} + efI_{i,j}^{*2}II + \delta_{i,j}\gamma_{i,j}I_{i,j}^{*2}II \quad (2.4.30)$$

Adicionando (2.4.27) com (2.4.30), ficamos com:

$$z_2 = (-(e+f) - II)(ef + \delta_{i,j}\gamma_{i,j})I_{i,j}^{*2} + efI_{i,j}^{*2}II \quad (2.4.31)$$

Adicionado (2.4.26) a (2.4.28) e substituindo na segunda linha do sistema (2.4.6) a expressão

$$\gamma_{i,j}\beta_{i,j}C_{i,j}^* = -\mu_{i,j}\beta_{i,j} + \mu_{i,j}\beta_{i,j}S_{i,j}^* + \beta_{i,j}^2S_{i,j}^*I_{i,j}^* + \beta_{i,j}S_{i,j}^*II$$

e para a expressão de e , temos que

$$\begin{aligned} &(-e\beta_{i,j}S_{i,j}^* - \gamma_{i,j}\beta_{i,j}C_{i,j}^*)I_{i,j}^{*2}II = \\ &[(\mu_{i,j} + \beta_{i,j}I_{i,j}^* + II)\beta_{i,j}S_{i,j}^* + \mu_{i,j}\beta_{i,j} - \mu_{i,j}\beta_{i,j}S_{i,j}^* - \beta_{i,j}^2S_{i,j}^*I_{i,j}^* - \beta_{i,j}S_{i,j}^*II]I_{i,j}^{*2}II = \\ &I_{i,j}^{*2}II[\mu_{i,j}\beta_{i,j}S_{i,j}^* + \beta_{i,j}^2I_{i,j}^*S_{i,j}^* + \beta_{i,j}S_{i,j}^*II + \mu_{i,j}\beta_{i,j} - \mu_{i,j}\beta_{i,j}S_{i,j}^* - \beta_{i,j}^2S_{i,j}^*I_{i,j}^* - \beta_{i,j}S_{i,j}^*II] = \\ &I_{i,j}^{*2}II\mu_{i,j}\beta_{i,j} > 0. \end{aligned}$$

Agora reescreveremos (2.4.21) e (2.4.15) da seguinte forma:

$$(\sigma_{i,j}\delta_{i,j} + f\beta_{i,j}^2S_{i,j}^* - \gamma_{i,j}\beta_{i,j}(\delta_{i,j} + \beta_{i,j}C_{i,j}^*))I_{i,j}^{*3} \quad (2.4.32)$$

$$+e(\delta_{i,j} + \beta_{i,j}C_{i,j}^*)I_{i,j}^{*3} \quad (2.4.33)$$

$$-e\sigma_{i,j}\beta_{i,j}(\delta_{i,j} + \beta_{i,j}C_{i,j}^*)I_{i,j}^{*3} \quad (2.4.34)$$

$$-f\sigma_{i,j}\beta_{i,j}(\delta_{i,j} + \beta_{i,j}C_{i,j}^*)I_{i,j}^{*3} \quad (2.4.35)$$

Note que $(2.4.33)+(2.4.34)>0$, sempre que $\sigma_{i,j}\beta_{i,j} > 1$.

Portanto, nos resta estimar (2.4.32), para isso chamaremos

$$z_3 = (f\beta_{i,j}^2 S_{i,j}^* - \gamma_{i,j}\beta_{i,j}(\delta_{i,j} + \beta_{i,j}C_{i,j}^*))I_{i,j}^{*3}. \quad (2.4.36)$$

Note que $z_3 < 0$.

Como $I_{i,j}^* \leq 1 \Rightarrow I_{i,j}^{*2} \leq I_{i,j}^* \Rightarrow I_{i,j}^{*3} \leq I_{i,j}^{*2}$. E assim,

$$z_3 I_{i,j}^{*3} \geq z_3 I_{i,j}^{*2}, \quad (2.4.37)$$

Utilizando a inequação (2.4.37), em (2.4.11), conseguimos comparar os termos da ordem de, $I_{i,j}^*$, $I_{i,j}^{*2}$ e $I_{i,j}^{*3}$. Como $I_{i,j}^{*2} \leq I_{i,j}^*$ e usando a expressão em (2.4.13) segue que

$$-(e+f)\beta_{i,j}^2 S_{i,j}^* I_{i,j}^* \geq -(e+f)\beta_{i,j}^2 S_{i,j}^* I_{i,j}^{*2} \quad (2.4.38)$$

Juntando o lado direito da desigualdade (2.4.38) e utilizando a inequação 2.4.37 em (2.4.11), obtemos uma comparação para a expressão em (2.4.32) dada por

$$\begin{aligned} & -(e+f)\beta_{i,j}^2 S_{i,j}^* I_{i,j}^* + (\sigma_{i,j}\delta_{i,j} + f\beta_{i,j}^2 S_{i,j}^* - \gamma_{i,j}\beta_{i,j}(\delta_{i,j} + \beta_{i,j}C_{i,j}^*))I_{i,j}^{*3} \geq \\ & -(e+f)\beta_{i,j}^2 S_{i,j}^* I_{i,j}^{*2} + (f\beta_{i,j}^2 S_{i,j}^* - \gamma_{i,j}\beta_{i,j}(\delta_{i,j} + \beta_{i,j}C_{i,j}^*))I_{i,j}^{*2} = \\ & -e\beta_{i,j}^2 S_{i,j}^* I_{i,j}^{*2} - \gamma_{i,j}\beta_{i,j}(\delta_{i,j} + \beta_{i,j}C_{i,j}^*)I_{i,j}^{*2} = \\ & -e\beta_{i,j}^2 S_{i,j}^* I_{i,j}^{*2} - (\gamma_{i,j}\beta_{i,j}\delta_{i,j}I_{i,j}^* + \gamma_{i,j}\beta_{i,j}^2 C_{i,j}^* I_{i,j}^*)I_{i,j}^* \geq \\ & -e\beta_{i,j}^2 S_{i,j}^* I_{i,j}^{*2} - (\gamma_{i,j}\beta_{i,j}\delta_{i,j}I_{i,j} + \gamma_{i,j}\beta_{i,j}^2 C_{i,j}^* I_{i,j}^*) \end{aligned} \quad (2.4.39)$$

Pois, como já discutimos $I_{i,j}^* \leq 1$.

Agora temos que nos preocupar com os termos $-\gamma_{i,j}\beta_{i,j}\delta_{i,j}I_{i,j}^*$ e $-\gamma_{i,j}\beta_{i,j}^2 C_{i,j}^* I_{i,j}^*$, em (2.4.39) pois o outro termo são positivos, já que $e < 0$.

Note que o termo $-\gamma_{i,j}\beta_{i,j}\delta_{i,j}I_{i,j}^*$ é absorvido pela expressão em (2.4.31).

E da última linha do sistema (2.4.6), temos que

$$-(\delta_{i,j} + \beta_{i,j}C_{i,j}^*)I_{i,j}^* + \delta_{i,j}(N_{i,j}^* - (S_{i,j}^* + C_{i,j}^*)) - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j})C_{i,j}^* = 0. \quad (2.4.40)$$

Multiplicando os dois lados da igualdade em (2.4.40) por $-\gamma_{i,j}\beta_{i,j}I_{i,j}^*$ e reorganizando os termos, chegamos a

$$-\gamma_{i,j}\beta_{i,j}(\delta_{i,j} + \beta_{i,j}C_{i,j}^*)I_{i,j}^{*2} = -\gamma_{i,j}\beta_{i,j}\delta_{i,j}N_{i,j}^* I_{i,j}^* + \gamma_{i,j}\beta_{i,j}(S_{i,j}^* + C_{i,j}^*)I_{i,j}^* + \gamma_{i,j}\beta_{i,j}(\mu_{i,j} + \gamma_{i,j})C_{i,j}^* I_{i,j}^*. \quad (2.4.41)$$

Lembrando que $N_{i,j}^* = 1$, segue de (2.4.41) e das comparações feitas anteriormente que

$$\begin{aligned} -\gamma_{i,j}\beta_{i,j}\delta_{i,j}I_{i,j}^{*2} - \gamma_{i,j}\beta_{i,j}^2C_{i,j}^*I_{i,j}^{*2} &\geq -\gamma_{i,j}\beta_{i,j}\delta_{i,j}I_{i,j}^* - \gamma_{i,j}\beta_{i,j}^2C_{i,j}^*I_{i,j}^* = \\ &= -\gamma_{i,j}\beta_{i,j}\delta_{i,j}I_{i,j}^* + \gamma_{i,j}\beta_{i,j}(S_{i,j}^* + C_{i,j}^*)I_{i,j}^* + \gamma_{i,j}\beta_{i,j}(\mu_{i,j} + \gamma_{i,j})C_{i,j}^*I_{i,j}^*. \end{aligned} \quad (2.4.42)$$

Como anteriormente, notamos que o termo $-\gamma_{i,j}\beta_{i,j}\delta_{i,j}I_{i,j}^*$ em (2.4.42) é absorvido por (2.4.31).

Isso conclui que $d_1d_2 - d_0d_3 > 0$.

Aplicando os critérios de Routh-Hurwitz (veja por exemplo [3]), podemos concluir que as raízes de $Q(\lambda)$ são positivas. $\square$

Do que concluímos acima, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 2.4.6. *Assuma que todas as derivadas de ordem fracionária do modelo (2.0.1) sejam iguais a 1 e que $(S_{i,j}^*, I_{i,j}^*, R_{i,j}^*, C_{i,j}^*)$ sejam os pontos de equilíbrio, correspondendo ao caso endêmico, ou seja, que $I_{i,j}^* \neq 0$ como dado pelo Teorema (2.3.5). Então $(N_{i,j}^*, S_{i,j}^*, I_{i,j}^*, C_{i,j}^*)$ é localmente assintoticamente estável.*

Demonstração. Segue do Lema (2.4.5) e do Lema 2.4.4 que o polinômio característico $P(\lambda)$ possui todas as raízes negativas. Portanto, segue da teoria clássica de EDO's, e.g. [116] que o ponto de equilíbrio é localmente assintoticamente estável. $\square$

É interessante notar que se todas as derivadas fracionárias são idênticas, digamos, com ordem θ , então o modelo (2.0.1) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} D^\theta N_{i,j}(t) &= \mu_{i,j}^\theta(1 - N_{i,j}(t)) \\ D^\theta S_{i,j}(t) &= \mu_{i,j}^\theta(1 - S_{i,j}(t)) - S_{i,j}(t)(\beta_{i,j}^\theta I_{i,j}(t) + II) + \gamma_{i,j}^\theta C_{i,j}(t) \\ D^\theta I_{i,j}(t) &= S_{i,j}(t)(\beta_{i,j}^\theta I_{i,j}(t) + II) + \sigma_{i,j}^\theta \beta_{i,j}^\theta C_{i,j}(t)I_{i,j}(t) - (\mu_{i,j}^\theta + \alpha_{i,j}^\theta)I_{i,j}(t) \\ D^\theta C_{i,j}(t) &= \delta_{i,j}^\theta(N_{i,j}(t) - S_{i,j}(t) - I_{i,j}(t) - C_{i,j}(t)) - \beta_{i,j}^\theta C_{i,j}(t)I_{i,j}(t) - (\mu_{i,j}^\theta + \gamma_{i,j}^\theta)C_{i,j}(t), \end{aligned} \quad (2.4.43)$$

e os resultados apresentados acima podem ser adaptados de maneira análoga para o modelo (2.4.43). Para o caso em que as derivadas são distintas, a equação (2.4.5) fica fundamentalmente diferente. Por isso, a análise apresentada acima não funciona neste caso. Esse caso será estudado em contribuições futuras utilizando a teoria de Liapunov [116].

2.4.3 Estabilidade global do ponto de equilíbrio no caso em que as derivadas são de ordem inteira.

Continuando a análise da estabilidade do ponto de equilíbrio endêmico $(S_{i,j}^*, I_{i,j}^*, R_{i,j}^*, C_{i,j}^*)$, no caso em que todas as derivadas de ordem fracionária são iguais a 1, analisaremos a estabilidade assintótica global. Esta foi estudada para o modelo SIRC no caso particular em que $m = n = 1$ (somente uma população) em [76]. Em [76], os autores mostraram a estabilidade

global utilizando o critério de Bendixson (veja [76] e referências), o qual será adaptado para o modelo (2.0.1) com derivadas de ordem inteira no que segue abaixo.

Para isso é importante definir a quantidade $\bar{q}_2$ dada por

$$\bar{q}_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \nu(B(s, x_0)) ds, \quad (2.4.44)$$

onde $B = P_f P^{-1} + P J^{[2]} P^{-1}$ e $J^{[2]}$ é chamada de matriz de segunda componente aditiva, construída a partir da jacobiana do sistema como em [76]. A quantidade $\nu(B)$, é chamada de medida de Lozinski, esta tem sido usada para estimar autovalores de matrizes para análise de estabilidade de sistemas de equações diferenciais quando certas normas vetoriais de soluções são usadas como função de Lyapunov. A medida de Lozinski, com respeito a uma norma vetorial qualquer $\|\cdot\|$, é uma aplicação $\nu : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada matriz com um número real $\nu(B)$ que é definido por

$$\nu(B) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|I + hB| - 1}{h}$$

Resumidamente, o critério de Bendixson garante que um ponto de equilíbrio é globalmente assintoticamente estável quando $\bar{q}_2 < 0$, veja [76] e referências.

No que segue, provaremos o teorema de estabilidade global para o modelo (2.0.1), onde todas as derivadas têm ordem 1, utilizando o critério de Bendixson.

Teorema 2.4.7. *Assuma que todas as derivadas de ordem fracionária do modelo (2.0.1) sejam iguais a 1. Seja $P_{i,j}^* := (S_{i,j}^*, I_{i,j}^*, R_{i,j}^*, C_{i,j}^*)$ os pontos de equilíbrio, correspondendo ao caso endêmico, ou seja, que $I_{i,j}^* \neq 0$ como dado pelo Teorema (2.3.5).*

Demonstração. Segue que do sistema (2.4.6), que $\lim_{t \rightarrow \infty} N_{i,j}(t) = 1$. Assim, o sistema (2.4.6) se reduz a

$$\begin{aligned} \dot{S}_{i,j}(t) &= \mu_{i,j}(1 - S_{i,j}(t)) - S_{i,j}(t)(\beta_{i,j}I_{i,j}(t) + II) + \gamma_{i,j}C_{i,j}(t) \\ \dot{I}_{i,j}(t) &= S_{i,j}(t)(\beta_{i,j}I_{i,j}(t) + II) + \sigma_{i,j}\beta_{i,j}C_{i,j}(t)I_{i,j}(t) - (\mu_{i,j} + \alpha_{i,j})I_{i,j}(t) \\ \dot{C}_{i,j}(t) &= \delta_{i,j}(1 - S_{i,j}(t) - I_{i,j}(t) - C_{i,j}(t)) - \beta_{i,j}C_{i,j}(t)I_{i,j}(t) - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j})C_{i,j}(t). \end{aligned} \quad (2.4.45)$$

Temos de forma direta, que a matriz jacobiana do sistema (2.4.45) é dado por

$$J(S_{i,j}^*, I_{i,j}^*, C_{i,j}^*) = \begin{bmatrix} -\mu_{i,j} - (\beta_{i,j}I_{i,j}^* + II) & -\beta_{i,j}S_{i,j}^* & \gamma_{i,j} \\ \beta_{i,j}I_{i,j}^* + II & \beta_{i,j}S_{i,j}^* + \sigma_{i,j}\beta_{i,j}C_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \alpha_{i,j}) & \sigma_{i,j}\beta_{i,j}I_{i,j}^* \\ -\delta_{i,j} & -\delta_{i,j} - \beta_{i,j}C_{i,j}^* & -\delta_{i,j} - \beta_{i,j}I_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j}) \end{bmatrix}$$

A matriz de segunda componente aditiva formada a partir de $J(S_{i,j}^*, I_{i,j}^*, C_{i,j}^*) = J^{[2]}$ é dada por

$$J^{[2]} = \begin{bmatrix} g_{11} & \sigma_{i,j}\beta_{i,j}I_{i,j}^* & -\gamma_{i,j} \\ -\delta_{i,j} - \beta_{i,j}C_{i,j}^* & g_{22} & -\beta_{i,j}S_{i,j}^* \\ -\delta_{i,j} & \beta_{i,j}I_{i,j}^* + II & g_{33} \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} g_{11} &= -\mu_{i,j} - \beta_{i,j}I_{i,j}^* - II + \beta_{i,j}S_{i,j}^* + \sigma_{i,j}\beta_{i,j}C_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \alpha_{i,j}) \\ g_{22} &= -\mu_{i,j} - \beta_{i,j}I_{i,j}^* - II - \delta_{i,j} - \beta_{i,j}I_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j}) \\ g_{33} &= \beta_{i,j}S_{i,j}^* + \sigma_{i,j}\beta_{i,j}C_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \alpha_{i,j}) - \delta_{i,j} - \beta_{i,j}I_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \gamma_{i,j}). \end{aligned}$$

Agora definimos,

$$P = \text{diag} \left(\frac{S_{i,j}^*}{I_{i,j}^*}, \frac{S_{i,j}^*}{I_{i,j}^*}, \frac{S_{i,j}^*}{I_{i,j}^*} \right),$$

e

$$P_f P^{-1} = \text{diag} \left(\frac{\dot{S}_{i,j}^*}{S_{i,j}^*} - \frac{\dot{I}_{i,j}^*}{I_{i,j}^*}, \frac{\dot{S}_{i,j}^*}{S_{i,j}^*} - \frac{\dot{I}_{i,j}^*}{I_{i,j}^*}, \frac{\dot{S}_{i,j}^*}{S_{i,j}^*} - \frac{\dot{I}_{i,j}^*}{I_{i,j}^*} \right).$$

Assim, consideraremos

$$B = P_f P^{-1} + P J^{[2]} P^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.4.46)$$

onde

$$B_{11} = g_{11} + \frac{\dot{S}_{i,j}^*}{S_{i,j}^*} - \frac{\dot{I}_{i,j}^*}{I_{i,j}^*}, B_{12} = \sigma_{i,j}\beta_{i,j}C_{i,j}^*, -\gamma_{i,j}, \quad (2.4.47)$$

$$B_{21} = (-\delta_{i,j} - \beta_{i,j}C_{i,j}^*, \delta_{i,j})^T, B_{22} = \begin{bmatrix} g_{22} + \frac{\dot{S}_{i,j}^*}{S_{i,j}^*} - \frac{\dot{I}_{i,j}^*}{I_{i,j}^*} & -\beta_{i,j}S_{i,j}^* \\ \beta_{i,j}I_{i,j}^* + II & g_{33} + \frac{\dot{S}_{i,j}^*}{S_{i,j}^*} - \frac{\dot{I}_{i,j}^*}{I_{i,j}^*} \end{bmatrix} \quad (2.4.48)$$

Seja (u, v, w) um vetor em R^3 , consideremos a seguinte norma, $|(u, v, w)| = \max\{|u|, |v| + |w|\}$. Seja ν medida de Lozinski [76] com respeito essa norma e $\nu_1(B) \leq \sup\{g_1, g_2\}$, onde $g_1 = \nu_1(B_{11}) + |B_{12}|$, $g_2 = \nu_1(B_{22}) + |B_{21}|$ e $|B_{12}|, |B_{21}|$ são normas de matriz com relação à norma do vetor L^1 e ν_1 denota a medida Lozinski com relação à norma L^1 .

Da segunda equação em (2.4.45), temos que

$$\frac{\dot{I}_{i,j}^*}{I_{i,j}^*} = \beta_{i,j}S_{i,j}^* + \sigma_{i,j}\beta_{i,j}C_{i,j}^* - (\mu_{i,j} + \alpha_{i,j}) + \frac{S_{i,j}^* II}{I_{i,j}^*}. \quad (2.4.49)$$

Portanto

$$\begin{aligned}\nu_1(B_{11}) &= g_{11} + \frac{\dot{S}_{i,j}^*}{S_{i,j}^*} - \frac{\dot{I}_{i,j}^*}{I_{i,j}^*} = \frac{\dot{S}_{i,j}^*}{S_{i,j}^*} - \mu_{i,j} - \beta_{i,j}I_{i,j}^* - II - \frac{S_{i,j}^*II}{I_{i,j}^*} \\ B_{12} &= \max\{\sigma_{i,j}\beta_{i,j}I_{i,j}^*, -\gamma_{i,j}\} \\ B_{21} &= (-\delta_{i,j} - \beta_{i,j}C_{i,j}^*, \delta_{i,j})^T.\end{aligned}$$

Ainda, segue de (2.4.49) que

$$\begin{aligned}\nu(B_{22}) &= \max\{g_{22} + \frac{\dot{S}_{i,j}^*}{S_{i,j}^*} - \frac{\dot{I}_{i,j}^*}{I_{i,j}^*} + \beta_{i,j}I_{i,j}^* + II, g_{33} + \frac{\dot{S}_{i,j}^*}{S_{i,j}^*} - \frac{\dot{I}_{i,j}^*}{I_{i,j}^*} + \beta_{i,j}S_{i,j}^*\} \\ &= \frac{\dot{S}_{i,j}^*}{S_{i,j}^*} - \mu_{i,j} - \frac{S_{i,j}^*II}{I_{i,j}^*} + \max\{-\delta_{i,j} - \beta_{i,j}I_{i,j}^* - \beta_{i,j}S_{i,j}^* - \sigma_{i,j}\beta_{i,j}C_{i,j}^* \\ &\quad + \alpha_{i,j}, \beta_{i,j}S_{i,j}^* - \delta_{i,j} - \beta_{i,j}I_{i,j}^* - \mu_{i,j} - \gamma_{i,j}\}.\end{aligned}\tag{2.4.50}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}g_1 &= \mu_{i,j}(B_{11}) + |B_{12}| \\ &= \frac{\dot{S}_{i,j}^*}{S_{i,j}^*} - \mu_{i,j} - \beta_{i,j}I_{i,j}^* - II - \frac{S_{i,j}^*II}{I_{i,j}^*} + \max\{\sigma_{i,j}\beta_{i,j}I_{i,j}^*, \gamma_{i,j}\} \\ &= \frac{\dot{S}_{i,j}^*}{S_{i,j}^*} - \mu_{i,j} - II - \frac{S_{i,j}^*II}{I_{i,j}^*} + \max\{(\sigma_{i,j} - 1)\beta_{i,j}I_{i,j}^*, \gamma_{i,j} - \beta_{i,j}I_{i,j}^*\} \\ &< \frac{\dot{S}_{i,j}^*}{S_{i,j}^*} - \mu_{i,j} - II - \frac{S_{i,j}^*II}{I_{i,j}^*} + \gamma_{i,j},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}g_2 &= \frac{\dot{S}_{i,j}^*}{S_{i,j}^*} - \mu_{i,j} - \frac{S_{i,j}^*II}{I_{i,j}^*} + \max\{-\delta_{i,j} - \beta_{i,j}I_{i,j}^* - \gamma_{i,j} - \beta_{i,j}S_{i,j}^* - \sigma_{i,j}\beta_{i,j}C_{i,j}^* \\ &\quad + \alpha_{i,j}, \beta_{i,j}S_{i,j}^* - \delta_{i,j} - \beta_{i,j}I_{i,j}^* - \mu_{i,j} - \gamma_{i,j}\} \\ &< \frac{\dot{S}_{i,j}^*}{S_{i,j}^*} - \mu_{i,j} + \delta_{i,j} - \gamma_{i,j} - \frac{S_{i,j}^*II}{I_{i,j}^*} + \max\{\beta_{i,j}C_{i,j}^* + \alpha_{i,j}, \beta_{i,j}S_{i,j}^* + \beta_{i,j}C_{i,j}^*\}.\end{aligned}\tag{2.4.51}$$

Como $S_{i,j}^* + I_{i,j}^* + R_{i,j}^* + C_{i,j}^* = N_{i,j}^* = 1$ e todos são maiores não negativos, temos que para $\alpha_{i,j} + \beta_{i,j}C_{i,j}^* < 1$ e $\beta_{i,j}(S_{i,j}^* + C_{i,j}^*) < 1$

$$\max\{\alpha_{i,j} + \beta_{i,j}C_{i,j}^*, \beta_{i,j}(S_{i,j}^* + C_{i,j}^*)\} < \max\{\alpha_{i,j} + \beta_{i,j}, \beta_{i,j}\} = \alpha_{i,j} + \beta_{i,j}$$

Portanto,

$$g_2 < \frac{\dot{S}_{i,j}^*}{S_{i,j}^*} - \mu_{i,j} + \delta_{i,j} - \gamma_{i,j} + (\alpha_{i,j} + \beta_{i,j}) - \frac{S_{i,j}^*II}{I_{i,j}^*}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mu_1(B) &= \max\{g_1, g_2\} \\
&= \max\left\{\frac{\dot{S}_{i,j}^*}{S_{i,j}^*} - \mu_{i,j} + \gamma_{i,j} - II - \frac{S_{i,j}^* II}{I_{i,j}^*}, \frac{\dot{S}_{i,j}^*}{S_{i,j}^*} - \mu_{i,j} + \delta_{i,j} - \gamma_{i,j} + (\alpha_{i,j} + \beta_{i,j}) - \frac{S_{i,j}^* II}{I_{i,j}^*}\right\} \\
&= \frac{\dot{S}_{i,j}^*}{S_{i,j}^*} - \mu_{i,j} - \frac{S_{i,j}^* II}{I_{i,j}^*} + \max\{\gamma_{i,j} + II, \delta_{i,j} - \gamma_{i,j} + \alpha_{i,j} + \beta_{i,j}\} \\
&\leq \frac{\dot{S}_{i,j}^*}{S_{i,j}^*} - \mu_{i,j} - \frac{S_{i,j}^* II}{I_{i,j}^*} + \max\{\gamma_{i,j}, \delta_{i,j} + \alpha_{i,j} + \beta_{i,j}\}.
\end{aligned}$$

Defina $w := \max\{\gamma_{i,j}, \delta_{i,j} + \alpha_{i,j} + \beta_{i,j}\}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\bar{q}_2 &= \frac{1}{t} \int_0^t u(B) ds \leq \frac{1}{t} \int_0^t \left[\left(\frac{\dot{S}_{i,j}^*}{S_{i,j}^*} - \frac{S_{i,j}^* II}{I_{i,j}^*} \right) - (\mu - w) \right] ds \\
&\leq \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\dot{S}_{i,j}^*}{S_{i,j}^*} ds - \frac{1}{t} \int_0^t \frac{S_{i,j}^* II}{I_{i,j}^*} ds - \frac{1}{t} \int_0^t (\mu - w) ds \\
&\leq \frac{1}{t} \ln \left(\frac{S_{i,j}^*(t)}{S_{i,j}^*(0)} \right) - (\mu - w) \frac{1}{t} t < 0.
\end{aligned}$$

Segue do critério de Bendixson (veja [76] e referências) que o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável. $\square$

Não sabemos se o critério de Bendixson (veja [76] e referências) se estende para problemas com derivadas de ordem fracionária. Portanto, a generalização do teorema acima para o modelo (2.0.1) geral ainda está em aberto e será fruto de nossa investigação futura.

2.5 Resultados numéricos para o modelo (MF)-SIRC-ED

Nesta seção, examinamos numericamente o efeito que a interação entre populações distribuídas espacialmente tem na dinâmica da doença seguindo o modelo (2.0.1) com ordens inteiras para as derivadas. Os resultados apresentados aqui foram publicados no seguinte artigo [83] da autora e colaboradores. As simulações para o caso geral serão elaboradas em trabalhos futuros. Simulações numéricas para alguns casos particulares do modelo (2.0.1) são apresentadas no Capítulo 3 na Seção 3.4 para $m = n = 1$ (somente uma população) e as derivadas são de ordem fracionária e distintas, já na Seção 4.5 do Capítulo 4 onde se discute uma pequena variação do modelo SIRC, em que há 6 populações distribuídas em uma rede (caso em que $m = 6$ e $n = 1$) e as derivadas são de ordem inteira.

Em todos os cenários simulados que apresentaremos nesta seção, a solução $X(t)$ do modelo SIRC-MULTI (2.0.1) é obtida numericamente pelo método de Euler com um passo de tamanho $h = 10^{-3}$ para evitar os efeitos do tipo stiff (veja [114]). A rede tem 17×17 sítios, significando que $n = k = 17$. A vizinhança $V_{i,j}$ é considerada do tipo Neumann como em [80]. Os parâmetros utilizados em todos os cenários simulados são dados por $\alpha_{i,j} = 52,14$, $\delta_{i,j} = 0,75$, $\mu_{i,j} = 0,00001$, $\gamma_{i,j} = 0,35$ e $\sigma_{i,j} = 0,12$ obtidos de [28] com algumas modificações. Ou seja, o tempo gasto pelos indivíduos em cada um dos compartimentos $I_{i,j}$, $R_{i,j}$ e $C_{i,j}$, a probabilidade média de reinfecção de um indivíduo $\sigma_{i,j}$, e as taxas de natalidade e mortalidade $\mu_{i,j}$ são consideradas as mesmas em qualquer subpopulação da rede. A taxa de infecção da doença devido à interação populacional $\beta_{i,\hat{j}}$ na vizinhança $V_{i,j}$, assumimos ser dada por $\beta_{i,\hat{j}} = \beta_{i,j}/150$ em $V_{i,j}$ e $\beta_{i,\hat{j}} = 0$, caso contrário.

Cenário 1: O modelo sem um segundo surto

Nesta subseção, consideramos o seguinte cenário hipotético: Cada sítio da rede representa uma população e/ou cidade para a qual a taxa de infecciosidade da doença é maior em locais de baixa densidade populacional, satisfazendo a seguinte relação

$$\beta_{i,j} = 50 * 2.35 / (1 + (\sqrt{(i - io)^2 + (j - jo)^2})^2),$$

onde (io, jo) é o sítio central na rede. Portanto, o valor de $\beta_{i,j}$ são tais que $\beta_{i,j} < 1$ ou $\beta_{i,j} > 1$, depende da localização na rede, conforme Fig. 2.2.

Os valores de $\beta_{i,j}$ e as correspondentes densidades $N_{i,j}$ na rede são apresentados na Fig. 2.2. Além disso, o cenário correspondente pode ser interpretado como o caso de cidades com maior população tendo interação mais intensa entre seus indivíduos, em contraste com locais de menor densidade que possuem menor interação entre seus indivíduos.

As condições iniciais para o cenário simulado correspondem a:

- 1) A densidade é variável e dada pela seguinte relação $N_{i,j} = \frac{100}{1 + \sqrt{(i - io)^2 + (j - jo)^2}}$, onde $(io, jo) =$

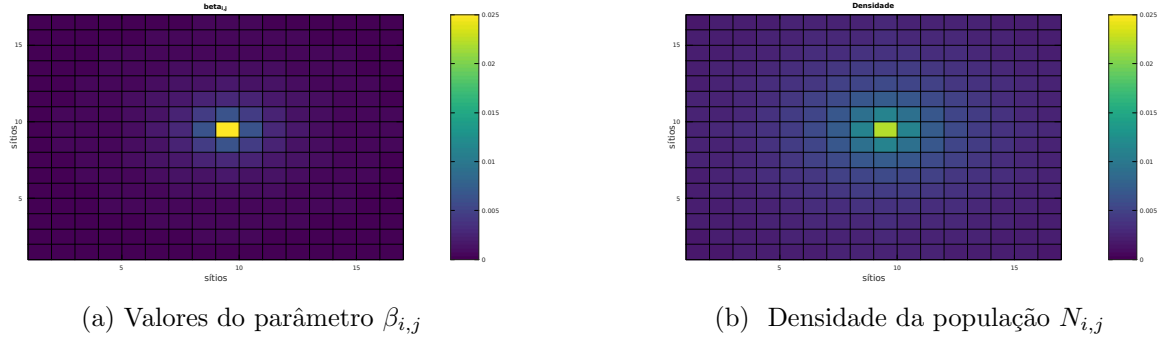


Figura 2.2: Valores de $\beta_{i,j}$ e as correspondentes densidades $N_{i,j}$ na rede

(9, 9) e o sítio central;

- 2) A infecção começa em dois sítios em $t = 0$, correspondente às posições (5, 13) e (12, 5) como retratado em Fig. 2.3. Em tais sítios, o total de indivíduos infectados é $I_{5,13}(0) = I_{12,5}(0) = 20$;

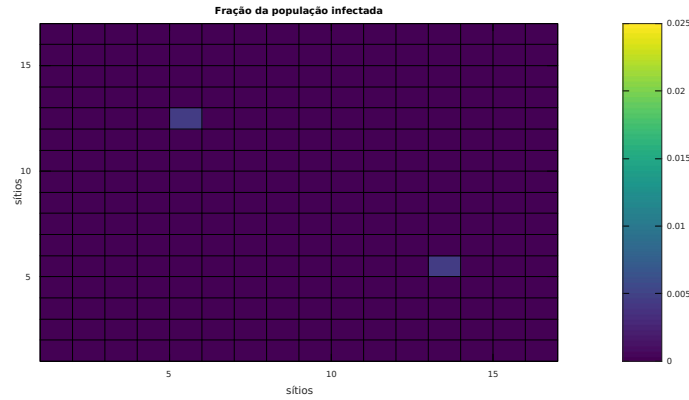


Figura 2.3: A distribuição espacial de pessoas infectadas na rede no momento $t = 0$.

- 3) No sítio (5, 13) e (12, 5), $S_{i,j}(0) = N_{i,j} - I_{i,j}(0)$
- 4) Se $(i, j) \neq (5, 13)$ e $(i, j) \neq (12, 5)$, então $S_{i,j}(0) = N_{i,j}$ e $I_{i,j}(0) = 0$;
- 5) Em todos os sítios $R_{i,j}(0) = C_{i,j}(0) = 0$.

O número total de pessoas infectadas e com imunidade cruzada na rede é mostrado na Fig. 2.4. Vale a pena notar que a proporção total de infectados da população diminui rapidamente no início da doença e que um pico epidêmico aparece em torno de $t = 7$ meses. Esse tempo corresponde ao necessário para que a doença se espalhe desde os sítios iniciais infectados até os locais mais densamente povoados do centro. Por outro lado, a curva da população que tem imunidade cruzada apresenta crescimento aproximadamente linear, com uma pequena perturbação após o pico, e depois tende a se estabilizar. Isso se deve à interação entre as populações que resulta na disseminação da doença na rede. Este fenômeno foi observado anteriormente em [82, 81, 74].

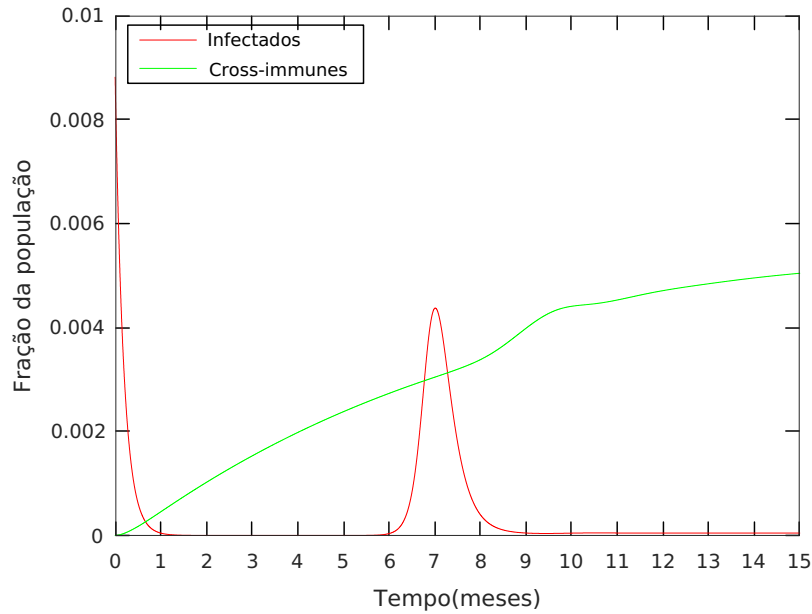


Figura 2.4: O comportamento da população infectada e que tem imunidade cruzada ao longo do tempo na rede.

Um efeito interessante do cenário simulado é que a população de indivíduos infectados começa a crescer no centro (local de maior densidade) da rede próximo ao tempo $t = 7$ meses como mostrado na Fig. 2.5. Como consequência, a partir daí, a epidemia ganha força, pois nessas localidades existe uma maior população suscetível, tendo assim um maior índice de contágio, resultando no pico epidêmico pouco tempo depois.

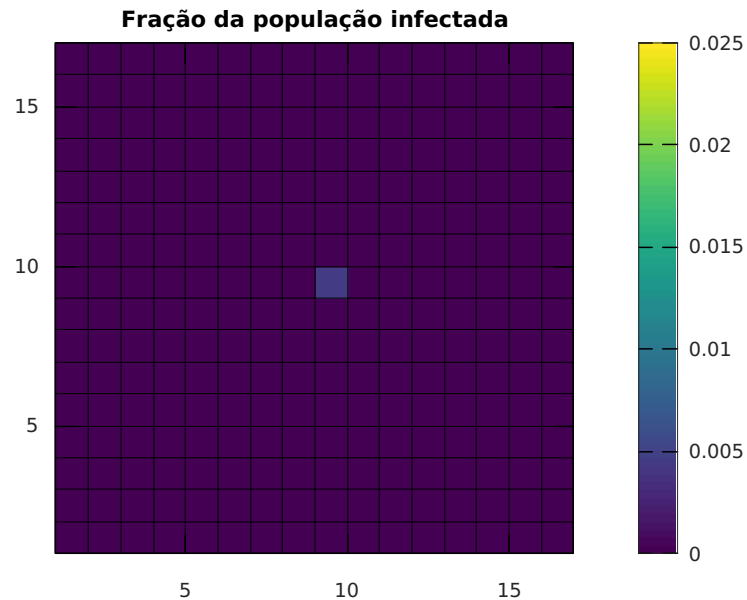


Figura 2.5: Populações infectadas em $t = 7$ meses. A concentração maior está no sítio central da rede.

A dinâmica de infecção e imunidade cruzada em sítios específicos da rede é descrita na Fig. 2.6. A Fig. 2.6 (a) mostra que, no sítio central, o pico de infecção ocorre por volta de $t = 7$

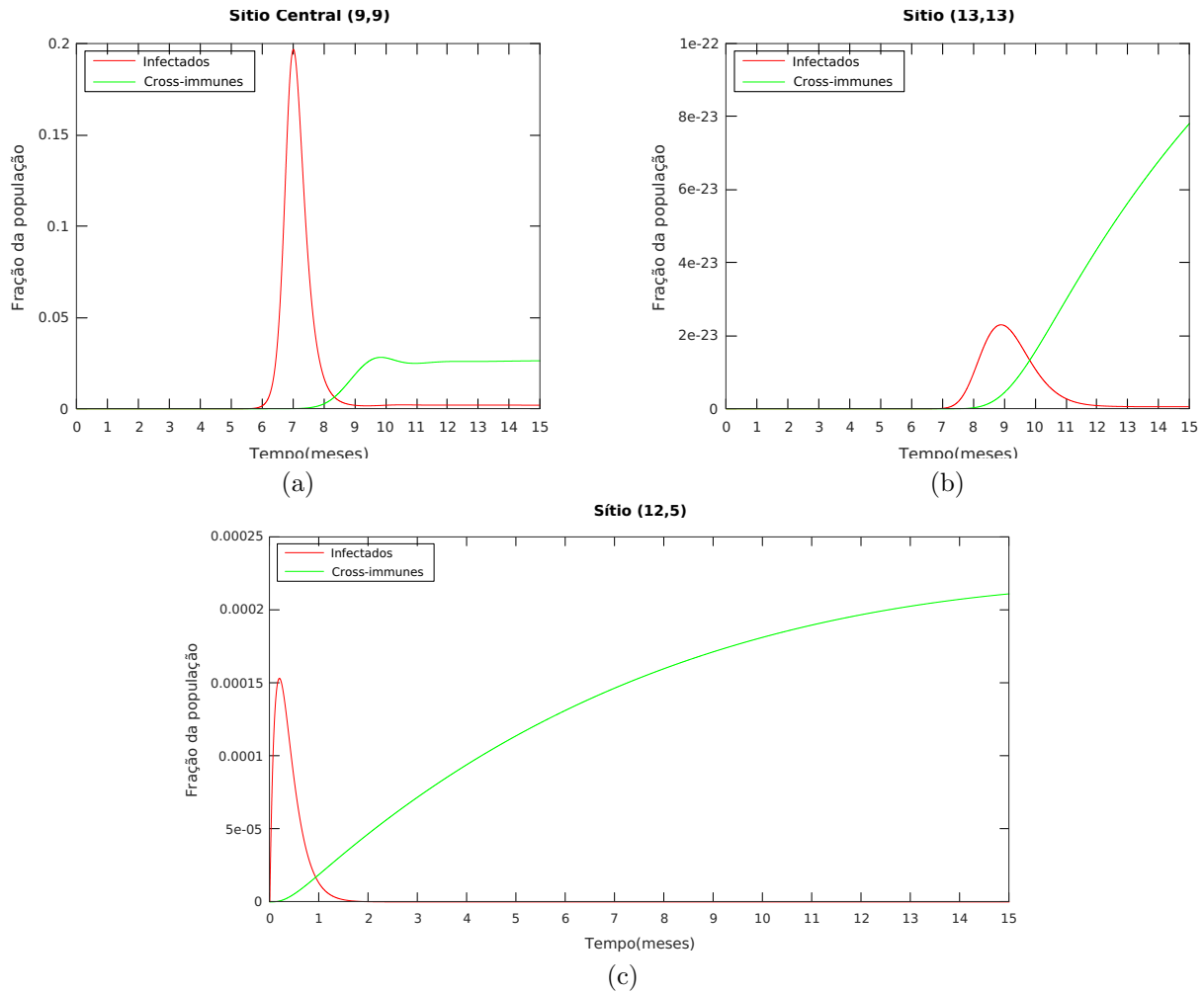


Figura 2.6: A relação entre as curvas infectadas e de imunidade cruzada em alguns trechos da rede.

meses. Enquanto isso, no local (13,13), o pico de infecção ocorre em $t = 9$ meses e é menos intenso, ver Fig. 2.6 (b). A dinâmica da imunidade cruzada nos locais mencionados acima mostra um comportamento completamente distinto. Enquanto no sítio central a população de imunidade cruzada se estabiliza, nos demais locais da rede ela continua aumentando. O comportamento da dinâmica da população infectada e a imunidade cruzada é representado na Fig. 2.6 (c), como era de se esperar biologicamente.

Cenário 2: Modelo com um segundo surto

No segundo cenário, consideramos uma situação hipotética em que haverá uma segunda infecção. Todas as populações são consideradas vulneráveis, como se fosse uma segunda cepa (sabemos que para isso ser mais fidedigno novos parâmetros deveriam ser incorporados, mas por não haver parâmetros confiáveis optamos por manter os mesmos). Neste cenário simulado, as condições iniciais correspondem ao caso onde a população infectada em $t = T^*$ está localizada apenas no centro da rede, onde T^* é o tempo para o aparecimento de um sítio com nova infecção por uma mutação. Observe que faz sentido considerar o surgimento de uma nova cepa no centro

da rede, pois é onde a população tem maior densidade e, conseqüentemente, maiores interações, possibilitando reinfecções.

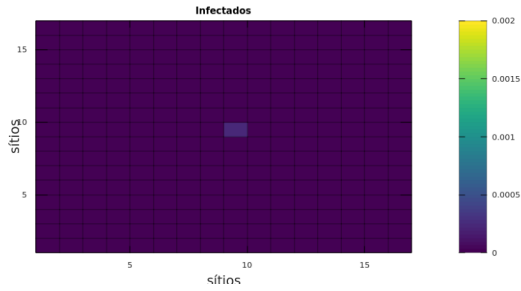
Assumimos que $T^* = 5$ meses. Portanto, a condição inicial para este cenário em $t = T^*$ é dada por

- 1) No sítio central, nós temos que $S_{io,jo}(5) = S_{9,9}(5) = N(9,9) - I_{9,9}(5) - R_{9,9}(4) + S_{9,9}(4)$. Ou seja, a população suscetível no mês $T^* = 5$ corresponde à população total deste local menos aqueles que já foram infectados pela doença e possuem a infecção ou imunidade temporária. Aqui, assumimos que $I_{io,jo}(5) = I_{9,9}(5) = 0,05 + I_{9,9}(4)$. Portanto, a população infectada no mês $T^* = 5$, é a população infectada no mês $t = 4$ mais um aumento na população infectada causado por uma nova cepa. No contexto de uma doença, esse aumento de 0.05 na simulação pode ser interpretado como se a cada 100 pessoas suscetíveis 5 se tornassem infectadas por essa nova cepa; a condição da população recuperada e com imunidade cruzada é tal que $R_{io,jo}(5) = R_{9,9}(5) = R_{9,9}(4)$, e $C_{io,jo}(5) = C_{9,9}(5) = C_{9,9}(4)$, respectivamente. Em outras palavras, mantém a população recuperada do mês $t = 4$.
- 2) Nos demais sítios da rede, assumimos que $S_{i,j}(5) = N(i,j) - I_{i,j}(5) - R_{i,j}(4) + S_{i,j}(4)$, por exemplo, em cada sítio, os suscetíveis no mês $T^* = 5$ corresponde à população total da população suscetível do mês anterior menos aqueles que já foram infectados pela doença e têm a infecção ou imunidade temporária do mês anterior; Pela condição sobre a população infectada, recuperada e com imunidade cruzada em $T^* = 5$ permanece a do mês anterior $t = 4$, que corresponde a $I_{i,j}(5) = I_{i,j}(4)$, $R_{i,j}(5) = R_{i,j}(4)$, e $C_{i,j}(5) = C_{i,j}(4)$.
- 3) Os parâmetros do modelo permaneceram como definidos anteriormente.

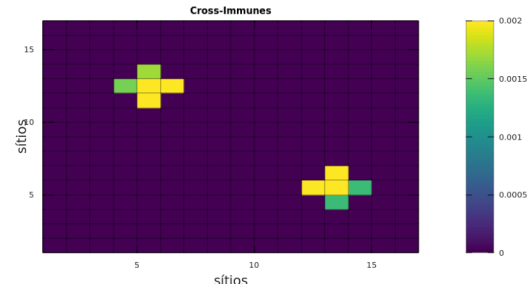
Pode ser visto na Fig. 2.7 e na Fig. 6(e) que a dinâmica da doença após a reinfecção em $T^* = 5$ se espalhou pela rede afetando principalmente os quatro sítios vizinhos mais próximos, e o contágio por interação $\beta_{i,j}$ diminui conforme aumenta a distância do centro (ver Fig. 2.2).

Como consequência, o pico de infectados ocorre logo após o início da reinfecção (veja a curva vermelha tracejada em Fig. 2.8).

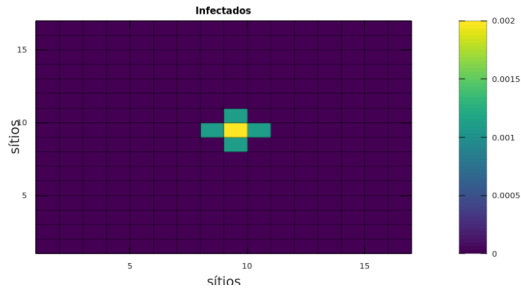
A população com imunidade cruzada apresenta valores mais elevados nos dois locais onde a infecção começou $t < 5$. Para os tempos $t > T^*$ o padrão espacial é semelhante ao da população infectada (ver Fig. 6(b), 6(d) e 6(f)).



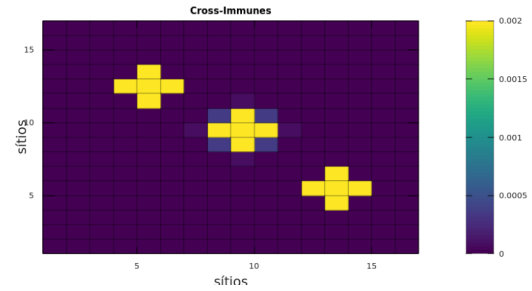
(a) O comportamento da população infectada em $t = T^* = 5$ meses.



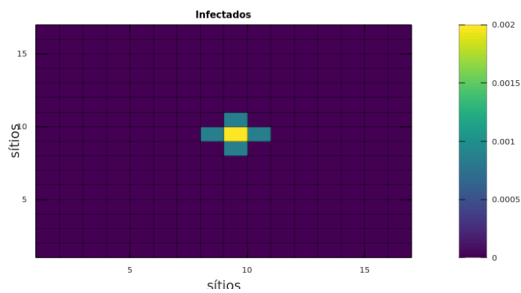
(b) O comportamento da população com imunidade cruzada em $t = T^* = 5$ meses.



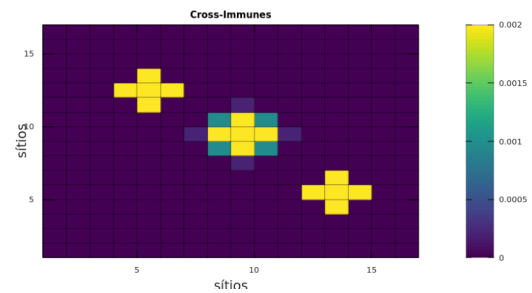
(c) O comportamento da população infectada em $t = T^* = 10$ meses.



(d) O comportamento da população com imunidade cruzada em $t = T^* = 10$ meses.



(e) O comportamento da população infectada em $t = T^* = 15$ meses.



(f) O comportamento da população com imunidade cruzada em $t = T^* = 15$ meses.

Figura 2.7: Disseminação da doença em populações infectadas e com imunidade cruzada.

Na Fig.2.8, mostramos a dinâmica dos dois cenários discutidos anteriormente (cenários 1 e 2) e comparamos suas soluções numéricas. Observe que a principal diferença é a porcentagem da população que é infectada pela doença devido à introdução da nova cepa. Os picos ocorrem em momentos diferentes enfatizando o efeito da interação entre as populações (curva vermelha Fig. 2.8).

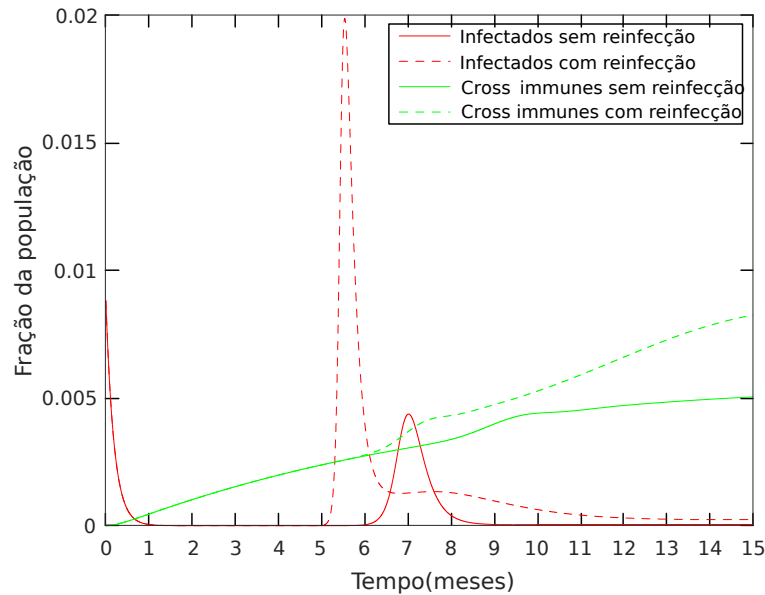


Figura 2.8: Dinâmica de Infectados e Imunidade Cruzada dada pelo modelo SIRC-MULTI no cenário com e sem reinfecção.

Analizamos cenários simulados com e sem reinfecção por cepas mutantes, assumindo que uma proporção da população em cada um dos sítios (localizações) da rede ganha apenas imunidade parcial (imunidade cruzada). O efeito da interação entre as diferentes populações pode ser observado em ambos os cenários, onde observamos que o pico de infectados ocorre em torno de 5 meses após o surgimento dos primeiros casos (cenário sem reinfecção) e se intensifica em caso de reinfecção. A população com imunidade cruzada em toda a rede apresenta o maior crescimento, como esperado, no caso de reinfecção, que corresponde a indivíduos que adquiriram imunidade à nova cepa introduzida. Além disso, a interação promove o crescimento da imunidade cruzada (ver linha pontilhada verde na Fig. 2.8) devido ao contato com outras populações, possibilitando o surgimento contínuo de novas cepas com esse aumento.

3 MODELO COMPARTIMENTAL FRACIONÁRIO APLICADO À INFLUENZA

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados relacionados ao modelo (2.0.1) onde há somente uma população. Isso corresponde ao caso em que $II(t) = 0$ no modelo (2.0.1). Alguns resultados já foram publicados pela autora e colaboradores e podem ser observados em [50, 36] quando a ordem das derivadas fracionárias são consideradas as mesmas para todas as linhas do sistema ou em [55, 52], mas com ordens fracionárias das derivadas distintas.

Os principais resultados deste capítulo podem ser resumidos da seguinte forma: O modelo que estudaremos é um caso particular do modelo (2.0.1), o qual será chamado de (MF)-SIRC. Mesmo sabendo que alguns resultados teóricos que serão apresentados neste capítulo são casos particulares dos apresentados no Capítulo 2, repetiremos aqui alguns dos argumentos, pois cremos que no modelo simplificado, alguns dos resultados ficarão mais claros. Esse é o caso dos resultados de boa-colocação apresentados na Seção 3.2, quando comparados com os resultados para o modelo mais geral apresentados na Seção 2.2. Alguns resultados que serão apresentados de forma mais clara para o modelo simplificado (MF)-SIRC são os resultados de estabilidade em termos das ordens das derivadas além de incluírem ainda uma estratégia de vacinação, as quais não foram consideradas no Capítulo 2.

Do ponto de vista numérico, apresentamos uma escolha particular para os parâmetros do modelo (e derivadas fracionárias) que mostram, uma melhor concordância do (MF)-SIRC em comparação com (F)-SIRC (modelo onde todas as ordens das derivadas são as mesmas) e SIRC (quando todas as ordens das derivadas são 1) quando comparados com dados reais de Influenza. Além disso, os achados numéricos sugerem que a memória imunológica pré-existente (dada, por exemplo, pela vacinação e modelada pelo (MF)-SIRC) ajuda a diminuir a suscetibilidade a novas cepas ao diminuir a imunidade cruzada após algum tempo.

3.1 Uma breve contextualização a respeito da influenza

Influenza é uma síndrome gripal ou uma doença respiratória infecciosa de origem viral sazonal com sintomas dos mais variados, que podem ser leves ou moderados. No entanto, em alguns casos o seu agravamento pode levar ao óbito, especialmente nos indivíduos que apresentam fatores ou condições de risco para as complicações da infecção, que incluem gestantes, idosos, imunossuprimidos e pessoas portadoras de doenças respiratórias, cardíacas, renais, hepáticas e neurológicas crônicas [44]. A influenza é de fácil transmissão, que se dá principalmente por pequenas partículas produzidas por pessoas infectadas, disseminadas no ambiente pela tosse, espirro ou durante a fala, além do contato das mãos com superfícies contaminadas. Pela facilidade de propagação, a influenza se destaca como uma importante causa de morbidade, frequentemente necessitando de hospitalização, bem como uma das principais causas de mortalidade [45].

O agente etiológico das síndromes gripais é o *Myxovirus influenzae*, o qual chamaremos por influenza, por simplicidade. Este agente está subdividido nos tipos A, B e C, sendo que, apenas os do tipo A e B apresentam relevância clínica em humanos [44]. O vírus influenza apresenta altas taxas de mutação [13], o que resulta, frequentemente, na inserção de novas variantes virais na comunidade, para as quais a população apresenta imunidade parcial. Essas variações antigênicas maiores são responsáveis pelas grandes pandemias de influenza da história, que por sua vez contabilizaram milhões de mortes. Se enquadram neste cenário os episódio da Gripe Espanhola (1918-1919) pertencente à variedade antigênica do subtipo A H1N1 [95], a Gripe Asiática (1957) [13], com o surgimento do subtipo A H2N2 e a Gripe de Hong Kong (1968) [97] em que apareceu o subtipo A H3N2 provocando uma pandemia moderadamente grave. Em 1977, ressurgiu um subtipo A H1N1, causando a pandemia da Gripe Russa [97]. Neste caso, não era uma variação antigênica e assim, afetou uma faixa etária sem imunidade. Mais recentemente, em 2009, ocorreu uma nova pandemia do vírus A H1N1 anti-geneticamente distinto do vírus sazonal A com maior replicação e agressividade nos casos fatais [75].

Por se sazonal e ter caudado várias pandemias na história, a influenza é uma das doenças acompanhadas de perto pela vigilância epidemiológica. Em particular, a Síndrome Gripal (SG) conta com a vigilância sentinela, que se constitui de uma rede de unidades distribuídas em todas as regiões do país [99]. O principal objetivo desta rede é identificar os vírus respiratórios circulantes, permitindo um monitoramento das taxas de hospitalização e óbitos. Desta forma, orientar na tomada de decisão em situações que requeiram novos posicionamentos do Ministério da Saúde e Secretarias de Saúde Estaduais e Municipais.

O modelo (MF)-SIRC que estudaremos nesse capítulo é dado pela seguinte dinâmica

$$D_*^{\theta_k} U(t) = F(t, U(t)) + \xi V(U(t)), \quad (3.1.1)$$

onde $U(t) = (S_{1,1}(t), I_{1,1}(t), R_{1,1}(t), C_{1,1}(t))$ correspondem aos compartimentos do modelo (2.0.1) e $F(t, U(t))$ corresponde a função do lado direito de (2.0.1), para $m = n = 1$ e $II(t) = 0$ (e por isso o subscrito será desconsiderado no que segue). A ordem das derivadas $\theta_k \in [0, 1]$ é distinta para cada um dos compartimentos, com $k = 1, \dots, 4$.

Além disso,

$$V(U(t)) = \begin{bmatrix} -\rho S(t) \\ 0 \\ +\rho S(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.1.2)$$

é o pulso de vacinação e $\xi = 1$ ou $\xi = 0$, controla a existência da campanha.

As condições iniciais e os parâmetros seguem as mesmas já apresentadas no Capítulo 2.

Diante do exposto acima, ainda assumiremos a seguinte hipótese:

H1) A função $U(t) \in C([0, T]; R^4)$, qualquer que seja $T > 0$.

Integrando cada linha do modelo (3.1.1) com ordem θ_k para $k = 1, \dots, 4$, o modelo (3.1.1) resulta em um sistema de equações de Volterra do tipo

$$u_j(t) = \sum_{l=1}^4 u_j(0) \frac{t^l}{l!} + \frac{1}{\Gamma(\theta_j)} \int_0^t (t-s)^{\theta_j-1} f_j(s, u_1(s), \dots, u_4(s)) ds. \quad (3.1.3)$$

onde f_j e $u_j(t)$ representa j -coordenada de $F(t, U(t))$, correspondente ao lado direito de (3.1.1).

Tomando $\theta := \min_{k=1, \dots, 4} \theta_k$ então a equação (3.1.3) pode ser reescrita como

$$u_j(t) = \sum_{l=1}^4 u_j(0) \frac{t^l}{l!} + \frac{1}{\Gamma(\theta_j)} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} \widehat{f}_j(s, u_1(s), \dots, u_4(s)) ds. \quad (3.1.4)$$

para $j = 1, \dots, 4$, onde, $\widehat{f}_j(s, u_1, \dots, u_4) := \frac{\Gamma(\theta)}{\Gamma(\theta_j)} (t-s)^{\theta_j-\theta} f_j(s, u_1, \dots, u_4)$.

3.1.1 Um breve apanhado sobre a memória advinda das derivadas de ordem fracionária

De acordo com (6.7.6), qualquer uma das coordenadas $u_j(t)$ da solução do modelo $U(t)$ é tal que, para algum tempo $t_1 \leq t_2$,

$$\begin{aligned} u_j(t_2) - u_j(t_1) &= \frac{1}{\Gamma(\theta_j)} \int_0^{t_1} [(t_2-s)^{\theta-1} - (t_1-s)^{\theta-1}] \widehat{f}_j(s, u_1(s), \dots, u_4(s)) ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\theta_j)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\theta-1} \widehat{f}_j(s, u_1(s), \dots, u_4(s)) ds. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Note que, se $\theta_k = 1$, para todo $k = 1, \dots, 4$, o termo entre parênteses em (3.1.5) é zero, e a primeira integral em (3.1.5) desaparece. Assim, para calcular a solução $U(t)$ em t_2 , depende somente do valor em $U(t_1)$ e a função f_j correspondente ao lado direito de (3.1.1). No entanto, se acontecer de $\theta_k \neq 1$, então a primeira integral geralmente não desaparece. Como resultado, a história da dinâmica de 0 até t_2 deve ser considerada para a construção da solução final, $U(t_2)$. Esse fenômeno nós chamamos de "memória".

3.2 Resultados teóricos para o modelo (MF)-SIRC com pulso de vacinação

Nesta subseção, estudaremos alguns resultados acerca da boa colocação do PVI (3.1.1). O primeiro resultado neste sentido é o Lema auxiliar a seguir, que diz respeito à matriz Jacobiana do sistema (3.1.1).

Lema 3.2.1. *Assuma que a hipótese H1) satisfeita. Seja $f(t) := F(U(t)) + \xi V(U(t))$ o lado*

direito do sistema (3.1.1). Então, a matriz Jacobiana associada é dada por

$$J(f)(t) = A + B \quad (3.2.1)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} -\mu^{\theta_1} - \beta^{\theta_1} I(t) - \xi \rho^{\theta_1} & -\beta^{\theta_1} S(t) & 0 & 0 \\ \beta^{\theta_2} I(t) & \beta^{\theta_2} S(t) + \sigma^{\theta_2} \beta^{\theta_2} C(t) - (\mu^{\theta_2} + \alpha^{\theta_2}) & 0 & 0 \\ \xi \rho^{\theta_3} & (1 - \sigma^{\theta_3}) \beta^{\theta_3} C(t) + \alpha^{\theta_3} & 0 & 0 \\ 0 & -\beta^{\theta_4} C(t) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \gamma^{\theta_1} \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^{\theta_2} \beta^{\theta_2} I(t) \\ 0 & 0 & (1 - \sigma^{\theta_3}) \beta^{\theta_3} I(t) & \\ 0 & 0 & -\beta^{\theta_4} I(t) - (\mu^{\theta_4} + \gamma^{\theta_4}) & \end{bmatrix}.$$

Além disso, existe uma constante M , independente de S, I, R, C tal que $\|J(f)(t)\| \leq M$, para qualquer $t \in [0, T]$.

Demonstração. O cálculo de $J(f)$ segue diretamente das derivadas parciais de cada coordenada de f com relação a S, I, R, C , respectivamente. Segue da hipótese H1) e do fato de cada coordenada de $J(f)$ é formada por funções contínuas, definidas em um compacto $[0, T]$ e do Teorema de Weierstrass [116], que existe M independente de S, I, R, C tal que $\|J(f)\| \leq M$. $\square$

Definição 3.2.1. Definimos um conjunto G^* da seguinte forma:

$$G^* = \{(t, U(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4; |U(t) - U_0| \leq r \mid t - t_0| \leq \varrho; r, \varrho > 0\},$$

onde $t_0 \geq 0$, $r := r(T, M)$ e $\varrho < T$, para $T > 0$ e M a constante dada pelo Lema 3.2.1.

Lema 3.2.2. O conjunto G^* apresentado na Definição 3.2.1, é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^4$.

Demonstração. Segue diretamente da Definição 3.2.1. $\square$

Proposição 3.2.3. Assuma a hipótese H1) satisfeita. Então a função $f(t, U(t)) = F(t, U(t)) + \xi V(U(t))$, é contínua e Lipschitz contínua no conjunto G^* apresentado na Definição 3.2.1.

Demonstração. A continuidade segue do fato que todas as coordenadas de $f(t, U(t))$ são somas e produtos de funções, que são contínuas pela hipótese H1). Por fim, segue do Lema 3.2.1 e do Teorema do Valor Médio que $f(t, U(t))$ é Lipschitz contínua. $\square$

Os resultados auxiliares acima são preliminares para a demonstração de boa colocação do modelo (3.1.1).

É importante notar, para o caso em que $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4$, a boa colocação já foi discutida pela autora em [49, 50]. Portanto, dedicaremos o próximo resultado para demonstrar a boa colocação do modelo (3.1.1) para $0 < \theta_j \leq 1$ para $j = 1, \dots, 4$ de forma mais detalhada do que o apresentado no Capítulo 2.0.1.

Teorema 3.2.4. *Seja a Hipótese H1) satisfeita. Então existe uma única solução $U \in C([0, h], \mathbb{R}^4)$ do problema de valor inicial, que depende continuamente dos parâmetros e da ordem das derivadas fracionárias $\theta_k \in]0, 1]$, para $k = 1, \dots, 4$.*

Demonstração. Primeiramente, defina $\theta = \min_{k=1, \dots, 4} \theta_k$. Então, qualquer solução de (3.1.1)-(1.2.1) satisfaz a seguinte equação de Volterra na forma vetorial

$$U(t) = \sum_{l=0}^{\max_j [\theta_j]-1} U_0^l \frac{t^l}{l!} + \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} \widehat{f}_j(s, U(s)) ds. \quad (3.2.2)$$

onde

$$\widehat{f}_j(s, U(s)) := \frac{\Gamma(\theta)}{\Gamma(\theta_j)} (t-s)^{\theta_j-\theta} f_j(s, U(s)) \quad (3.2.3)$$

e $f_j(t, U(t))$ representa cada uma das $j \in \{1, \dots, 4\}$ coordenadas da função $f(t, U(t))$ definida em (3.1.1).

Como pela Proposição 3.2.3, temos que $f(t, U(t))$ é contínua e Lipschitz contínua em G^* ; Portanto, cada coordenada $\widehat{f}_j(t, U(t))$ também são contínuas e Lipschitz contínuas.

Assim, todas as hipóteses necessárias para a os resultados de existência e unicidade de uma solução apresentadas na Seção 6.4 são satisfeitas para o modelo (3.1.1). Portanto, parte da afirmação deste teorema está provado.

A demonstração de dependência contínua dos dados iniciais, dos parâmetros e da ordem das derivadas segue os passos do Teorema 6.7.2. $\square$

Teorema 3.2.5. *Assuma as hipóteses do Teorema 3.2.4 e $\xi = 0$. Então, a região Ω_+ é um conjunto positivo invariante para a solução do sistema (3.1.1).*

Demonstração. A demonstração é exatamente a feita no Capítulo 2. $\square$

3.3 Estabilidade dos pontos de equilíbrio para o modelo (MF)-SIRC com pulso de vacinação

Nesta seção, estudaremos a estabilidade dos pontos de equilíbrio (S^*, I^*, R^*, C^*) do modelo (3.1.1) linearizado. Como a derivada de ordem fracionária utilizada é a segundo Caputo

(veja Capítulo 6.1 para detalhes), segue que, a existência de pontos de equilíbrio devem satisfazer

$$D_*^{\theta_1}(S(t)) = D_*^{\theta_2}(I(t)) = D_*^{\theta_3}(R(t)) = D_*^{\theta_4}(C(t)) = 0,$$

o que resulta em obter as soluções do sistema de equações algébricas

$$0 = \mu^{\theta_1}(N - S^*) - \beta^{\theta_1}S^*I^* + \gamma^{\theta_1}C^* - \xi\rho^{\theta_1}S^* \quad (3.3.1)$$

$$0 = \beta^{\theta_2}S^*I^* + \sigma^{\theta_2}\beta^{\theta_2}C^*I^* - (\mu^{\theta_2} + \alpha^{\theta_2})I^* \quad (3.3.2)$$

$$0 = (1 - \sigma^{\theta_3})\beta^{\theta_3}C^*I^* + \alpha^{\theta_3}I^* - (\mu^{\theta_3} + \delta^{\theta_3})R^* + \xi\rho^{\theta_3}S^* \quad (3.3.3)$$

$$0 = \delta^{\theta_4}R^* - \beta^{\theta_4}C^*I^* - (\mu^{\theta_4} + \gamma^{\theta_4})C^*. \quad (3.3.4)$$

Da equação (3.3.2), segue que

$$I^* \cdot (\beta^{\theta_2}S^* + \sigma^{\theta_2}\beta^{\theta_2}C^* - (\mu^{\theta_2} + \alpha^{\theta_2})) = 0 \quad (3.3.5)$$

Da equação (3.3.5), temos que $I^* = 0$ ou $I^* \neq 0$.

Quando $I^* = 0$, temos o que chamamos de ponto de equilíbrio livre de doença, o qual denotaremos por $P_0 = (S_0^*, 0, R_0^*, C_0^*)$.

Lema 3.3.1. *O ponto de equilíbrio livre de doença $P_0 = (S_0^*, 0, R_0^*, C_0^*)$ é dado por*

$$S_0^* = \frac{-\mu^{\theta_1}N(\mu^{\theta_4} + \gamma^{\theta_4})(\mu^{\theta_3} + \delta^{\theta_3})}{-(\mu^{\theta_1} + \xi\rho^{\theta_1})(\mu^{\theta_4} + \gamma^{\theta_4})(\mu^{\theta_3} + \delta^{\theta_3}) + \gamma^{\theta_1}\delta^{\theta_4}\xi\rho^{\theta_3}}, \quad (3.3.6)$$

$$R_0^* = \frac{-\xi\rho^{\theta_3}\mu^{\theta_1}N(\mu^{\theta_4} + \gamma^{\theta_4})}{-(\mu^{\theta_1} + \xi\rho^{\theta_1})(\mu^{\theta_4} + \gamma^{\theta_4})(\mu^{\theta_3} + \delta^{\theta_3}) + \gamma^{\theta_1}\delta^{\theta_4}\xi\rho^{\theta_3}}, \quad (3.3.7)$$

e

$$C_0^* = \frac{-\mu^{\theta_1}N\delta^{\theta_4}\xi\rho^{\theta_3}}{-(\mu^{\theta_1} + \xi\rho^{\theta_1})(\mu^{\theta_4} + \gamma^{\theta_4})(\mu^{\theta_3} + \delta^{\theta_3}) + \gamma^{\theta_1}\delta^{\theta_4}\xi\rho^{\theta_3}}. \quad (3.3.8)$$

Demonstração. Das equações (3.3.1)-(3.3.4), temos que P_0 deve satisfazer

$$\mu^{\theta_1}N - (\mu^{\theta_1} + \xi\rho^{\theta_1})S_0^* + \gamma^{\theta_1}C_0^* = 0 \quad (3.3.9)$$

$$-(\mu^{\theta_3} + \delta^{\theta_3})R_0^* + \xi\rho^{\theta_3}S_0^* = 0 \quad (3.3.10)$$

$$\delta^{\theta_4}R_0^* - (\mu^{\theta_4} + \gamma^{\theta_4})C_0^* = 0 \quad (3.3.11)$$

Da equação (3.3.10), concluimos que

$$-(\mu^{\theta_3} + \delta^{\theta_3})R_0^* + \xi\rho^{\theta_3}S_0^* = 0 \Rightarrow R_0^* = \frac{\xi\rho^{\theta_3}S_0^*}{\mu^{\theta_3} + \delta^{\theta_3}}. \quad (3.3.12)$$

Substituindo a equação (3.3.12) na equação (3.3.11), obtemos que

$$C_0^* = \frac{\delta^{\theta_4}R_0^*}{\mu^{\theta_4} + \gamma^{\theta_4}} = \frac{\delta^{\theta_4}\xi\rho^{\theta_3}S_0^*}{(\mu^{\theta_4} + \gamma^{\theta_4})(\mu^{\theta_3} + \delta^{\theta_3})}. \quad (3.3.13)$$

Da substituição de equação (3.3.13) na equação (3.3.9) obtemos que

$$\mu^{\theta_1}N - (\mu^{\theta_1} + \xi\rho^{\theta_1})S_0^* + \gamma^{\theta_1}\frac{\delta^{\theta_4}\xi\rho^{\theta_3}S_0^*}{(\mu^{\theta_4} + \gamma^{\theta_4})(\mu^{\theta_3} + \delta^{\theta_3})} = 0, \quad (3.3.14)$$

de onde é possível concluir que S_0^* satisfaz (3.3.6). Assim, a afirmativa do lema segue ao substituirmos (3.3.6) em (3.3.12) e (3.3.13), respectivamente. $\square$

A seguir, estabeleceremos a estabilidade para o ponto de equilíbrio livre de doença P_0 , calculado no Lema 3.3.1. Antes de estabelecermos o resultado principal, enunciaremos mais um Lema auxiliar.

Lema 3.3.2. *Considere o equilíbrio livre de doença P_0 , calculado no Lema 3.3.1. Então, os autovalores da matriz Jacobiana do modelo (3.1.1), calculada no Lema 3.2.1, aplicado ao ponto P_0 , são reais e dados por*

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\mu^{\theta_1} - \rho^{\theta_1} \\ \lambda_2 &= -\gamma^{\theta_4} - \mu^{\theta_4} \\ \lambda_3 &= -\delta^{\theta_3} - \mu^{\theta_3} \\ \lambda_4 &= (\alpha^{\theta_2} + \mu^{\theta_2}) \left[\mu^{\theta_1} \frac{\beta^{\theta_2}N}{(\alpha^{\theta_2} + \mu^{\theta_2})} \left(\frac{(\delta^{\theta_3} + \mu^{\theta_3})(\gamma^{\theta_4} + \mu^{\theta_4}) - \xi\rho^{\theta_3}\delta^{\theta_4}\sigma^{\theta_2}}{(\delta^{\theta_3} + \mu^{\theta_3})(\gamma^{\theta_4} + \mu^{\theta_4})(\mu^{\theta_1} + \xi\rho^{\theta_1}) - \xi\rho^{\theta_3}\delta^{\theta_4}\gamma^{\theta_1}} \right) - 1 \right]. \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Demonstração. Segue diretamente do cálculo do determinante da Jacobiana aplicado ao ponto P_0 que a equação característica associada é dada pela expressão

$$(-\mu^{\theta_1} - \xi\rho^{\theta_1} - \lambda)(\beta^{\theta_2}S_0^* + \sigma^{\theta_2}\beta^{\theta_2}C_0^* - (\mu^{\theta_2} + \alpha^{\theta_2}) - \lambda)(-(\mu^{\theta_3} + \delta^{\theta_3}) - \lambda)(-(\mu^{\theta_4} + \gamma^{\theta_4}) - \lambda) = 0. \quad (3.3.16)$$

Agora o resultado segue da obtenção das raízes da equação característica (3.3.16). $\square$

Nosso próximo passo é estudar a estabilidade dos pontos de equilíbrio. Para tal, vamos introduzir a taxa de reprodutividade basal para o modelo (3.1.1) sem vacinação, isto é, quando

$\xi = 0$. Neste caso, temos que

$$R_0^{(\xi=0)} = \frac{\beta^{\theta_2} N}{\mu^{\theta_2} + \alpha^{\theta_2}} \quad (3.3.17)$$

Do exposto acima segue que:

Teorema 3.3.3. *Assuma o modelo (3.1.1) sem uma estratégia de vacinação, isto é, $\xi = 0$. Considere o equilíbrio livre de doença P_0 para o modelo (3.1.1) como calculado no Lema 3.3.1, neste caso. Então P_0 é assintoticamente estável se $R_0^{(\xi=0)} < 1$ e instável, caso contrário.*

Demonstração. O único autovalor para o qual temos que tomar as devidas precauções no estudo da estabilidade é dado por λ_4 , no Lema 3.3.2. Observe que, quando $\xi = 0$, então

$$\lambda_4 = (\sigma^{\theta_2} + \mu^{\theta_2}) \left(\frac{\beta^{\theta_2} N}{(\sigma^{\theta_2} + \mu^{\theta_2})} - 1 \right) = (\sigma^{\theta_2} + \mu^{\theta_2}) (R_0^{(\xi=0)} - 1).$$

Assim, a afirmativa segue do fato de ser o único autovalor que pode ser não negativo [131].

Uma vez que o ponto de equilíbrio livre de doença P_0 dado no Lema 3.3.2 pode não ser assintótico estável, a questão que resta é: Existe uma estratégia de vacinação ($\xi = 1$) de forma que a doença esteja controlada? Se sim, qual será a proporção da população a ser vacinada (estratégia para escolher ρ) ?

Observe que, diferentemente do caso em que as derivadas fracionárias são iguais ($\theta_k = 1$ para $k = 1, \dots, 4$), conforme já discutido em [36, 50], a proporção crítica da população a ser vacinada deve satisfazer $\rho \geq 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{\xi=0}}$. Tal escolha não parece atender ao resultado desejado de manter $\lambda_4 < 0$ no Lema 3.3.2.

Por outro lado, desde

$$\left(\frac{(\delta^{\theta_3} + \mu^{\theta_3})(\gamma^{\theta_4} + \mu^{\theta_4}) - \xi \rho^{\theta_3} \delta^{\theta_4} \sigma^{\theta_2}}{(\delta^{\theta_3} + \mu^{\theta_3})(\gamma^{\theta_4} + \mu^{\theta_4})(\mu^{\theta_1} + \xi \rho^{\theta_1}) - \xi \rho^{\theta_3} \delta^{\theta_4} \gamma^{\theta_1}} \right) \leq \left(\frac{(\delta^{\theta_3} + \mu^{\theta_3})(\gamma^{\theta_4} + \mu^{\theta_4})}{(\delta^{\theta_3} + \mu^{\theta_3})(\gamma^{\theta_4} + \mu^{\theta_4})(\mu^{\theta_1} + \xi \rho^{\theta_1}) - \xi \rho^{\theta_3} \delta^{\theta_4} \gamma^{\theta_1}} \right)$$

segue-se que a seguinte estratégia não linear para escolher ρ

$$\mathcal{R}_0^{\xi=0} + \frac{\rho^{\theta_3} \delta^{\theta_4} \gamma^{\theta_1}}{\mu^{\theta_1} (\delta^{\theta_3} + \mu^{\theta_3})(\gamma^{\theta_4} + \mu^{\theta_4})} < 1 + (\rho/\mu)^{\theta_1}, \quad (3.3.18)$$

é o suficiente para manter P_0 assintoticamente estável. Em particular, para as escolhas de parâmetros nas simulações numéricas na Tabela 3.2, para que ρ satisfaça (3.3.18) é necessário ser maior que 20%, enquanto, no caso padrão onde $\theta_k = 1$ para $k = 1, \dots, 4$, teria necessidade de $\rho > 30\%$. $\square$

Lema 3.3.4. *O ponto de equilíbrio endêmico é dado por $P_1 = (S_1^*, I_1^*, R_1^*, C_1^*)$, em que*

$$S_1^* = \frac{\mu^{\theta_2} + \alpha^{\theta_2}}{\beta^{\theta_2}} - \sigma^{\theta_2} \frac{\beta^{\theta_1} \beta^{\theta_2} \mu^{\theta_2} I_1^* + \alpha^{\theta_2} \beta^{\theta_1} I_1^* + \alpha^{\theta_2} \mu^{\theta_1} + \beta^{\theta_2} \mu^{\theta_1} \mu^{\theta_2} - \mu^{\theta_1} \beta^{\theta_2} N + \beta^{\theta_2} \xi \rho^{\theta_1} \sigma^{\theta_2}}{\beta^{\theta_2} (\gamma^{\theta_1} + \beta^{\theta_1} I_1^* \sigma^{\theta_2} + \mu^{\theta_1} \sigma^{\theta_2})},$$

$$C_1^* = \frac{\beta^{\theta_1} \beta^{\theta_2} \mu^{\theta_2} I_1^* + \alpha^{\theta_2} \beta^{\theta_1} I_1^* + \alpha^{\theta_2} \mu^{\theta_1} + \beta^{\theta_2} \mu^{\theta_1} \mu^{\theta_2} - \mu^{\theta_1} \beta^{\theta_2} N + \beta^{\theta_2} \xi \rho^{\theta_1} \sigma^{\theta_2}}{\beta^{\theta_2} (\gamma^{\theta_1} + \beta^{\theta_1} I_1^* \sigma^{\theta_2} + \mu^{\theta_1} \sigma^{\theta_2})}$$

e

$$R_1^* = \frac{((\gamma^{\theta_4} + \beta^{\theta_4} I_1^* + \mu^{\theta_4})(\alpha^{\theta_2} (\beta^{\theta_1} I_1^* + \mu^{\theta_1} + \xi \rho^{\theta_1}) + \beta^{\theta_2} (\beta^{\theta_1} I_1^* \mu^{\theta_2} + \mu^{\theta_1} \mu^{\theta_2} - \mu^{\theta_1} N + \mu^{\theta_2} \xi \rho^{\theta_1})))}{(\beta^{\theta_2} \delta^{\theta_4} (\gamma^{\theta_1} + (\beta^{\theta_1} I_1^* + \mu^{\theta_1} + \xi \rho^{\theta_1}) \sigma^{\theta_2}))}$$

e I_1^* é dado pela raiz positiva do seguinte polinômio de segundo grau

$$a(I_1^*)^2 + bI_1^* + c, \quad (3.3.19)$$

onde

$$\begin{aligned} a &= (-\beta^{\theta_1} (\beta^{\theta_2} (\beta^{\theta_4} \mu^{\theta_2} (\delta^{\theta_3} + \mu^{\theta_3}) + \delta^{\theta_4} (-\alpha^{\theta_3} \sigma^{\theta_2} + \beta^{\theta_3} \mu^{\theta_2} (-1 + \sigma^{\theta_3}))) \\ &\quad + \alpha^{\theta_2} (\beta^{\theta_4} (\delta^{\theta_3} + \mu^{\theta_3}) + \beta^{\theta_3} \delta^{\theta_4} (-1 + \sigma^{\theta_3})))) \\ b &= (\alpha^{\theta_3} \beta^{\theta_2} \delta^{\theta_4} (\gamma^{\theta_1} + (\mu^{\theta_1} + \xi \rho^{\theta_1}) \sigma^{\theta_2}) - \alpha^{\theta_2} (\beta^{\theta_1} (\delta^{\theta_3} + \mu^{\theta_3}) (\gamma^{\theta_4} + \mu^{\theta_4}) \\ &\quad + (\mu^{\theta_1} + \xi \rho^{\theta_1}) (\beta^{\theta_4} (\delta^{\theta_3} + \mu^{\theta_3}) + \beta^{\theta_3} \delta^{\theta_4} (-1 + \sigma^{\theta_3}))) \\ &\quad - \beta^{\theta_2} (\beta^{\theta_1} (\gamma^{\theta_4} \mu^{\theta_2} \mu^{\theta_3} + \mu^{\theta_2} \mu^{\theta_3} \mu^{\theta_4} + \delta^{\theta_3} \mu^{\theta_2} (\gamma^{\theta_4} + \mu^{\theta_4}) - \delta^{\theta_4} \rho^{\theta_3} \sigma^{\theta_2}) \\ &\quad + (\mu^{\theta_1} (\mu^{\theta_2} - N) + \mu^{\theta_2} \xi \rho^{\theta_1}) (\beta^{\theta_4} (\delta^{\theta_3} + \mu^{\theta_3}) + \beta^{\theta_3} \delta^{\theta_4} (-1 + \sigma^{\theta_3})))) \\ c &= -\alpha^{\theta_2} (\delta^{\theta_3} + \mu^{\theta_3}) (\gamma^{\theta_4} + \mu^{\theta_4}) (\mu^{\theta_1} + \xi \rho^{\theta_1}) \\ &\quad - \beta^{\theta_2} (\mu^{\theta_1} \mu^{\theta_2} \mu^{\theta_3} \mu^{\theta_4} - \mu^{\theta_1} \mu^{\theta_3} \mu^{\theta_4} N + \mu^{\theta_2} \mu^{\theta_3} \mu^{\theta_4} \xi \rho^{\theta_1} + r \delta^{\theta_3} (\gamma^{\theta_4} + \mu^{\theta_4}) (\mu^{\theta_4} (\mu^{\theta_2} - N) + \mu^{\theta_2} \xi \rho^{\theta_1}) \\ &\quad + \gamma^{\theta_4} \mu^{\theta_3} (\mu^{\theta_1} \mu^{\theta_2} - \mu^{\theta_1} N + \mu^{\theta_2} \xi \rho^{\theta_1}) - \delta^{\theta_4} \gamma^{\theta_1} \xi \rho^{\theta_3} - \delta^{\theta_4} \mu^{\theta_1} \xi \rho^{\theta_3} \sigma^{\theta_2} - \delta^{\theta_4} \xi \rho^{\theta_1} \xi \rho^{\theta_3} \sigma^{\theta_2}), \end{aligned}$$

se for real e positiva.

Demonstração. De $I_1^* \neq 0$ e (3.3.2) obtemos

$$S_1^* = \frac{\mu^{\theta_2} + \alpha^{\theta_2}}{\beta^{\theta_2}} - \sigma^{\theta_2} C_1^* \quad (3.3.20)$$

Substituindo (3.3.20) em (3.3.2), segue que (3.3.19) é satisfeita. Consequentemente, substituindo (3.3.19) em (3.3.20), concluímos que é satisfeita.

Agora, (3.3.19) segue da substituição da equação (3.3.19) na equação (3.3.4).

Substituindo (3.3.19), (3.3) e (3.3.19) em (3.3.3) encontramos que I_1^* é dado pela raiz positiva da equação (3.3.19). $\square$

Dado o número de parâmetros, a análise da existência de uma raiz positiva para o polinômio (3.3.19) e assim do ponto de equilíbrio endêmico $I^* \neq 0$, bem como a análise de estabilidade será feita numericamente, utilizando os parâmetros numéricos da Tabela 3.2.

As opções de parâmetros propostas em [28] foram ajustados de acordo com os valores dados na Tabela 3.2 para representar os dados observados, vale ressaltar que não foram dedicados esforços para obter os valores ótimos para esse ajuste.

Tabela 3.1: Lista de parâmetros para estudo de caso

Parâmetros	Valore
μ	0,02
α	5,14
δ	0,75
γ	0,35
σ	0,12
β	1,355

Teorema 3.3.5 (Estabilidade numérica para o ponto de equilíbrio endêmico). *Assuma as hipóteses do Lema 3.3.4 com $\rho = 0,4$ e $\xi = 1$. Em seguida, analisamos três casos numéricos: i) O modelo SIRC com $\theta_k = 1$, para $j = 1, \dots, 4$; ii) o modelo (F)-SIRC com $\theta_k = 0,9$, para $j = 1, \dots, 4$ e iii) o modelo (MF)-SIRC com $\theta_1 = 0,95$, $\theta_2 = 0,75$, $\theta_3 = 0,7$ e $\theta_4 = 0,6$. Em todos os três casos temos a existência de um único ponto de equilíbrio positivo como no Lema 3.3.4 dado por*

- i) *Modelo SIRC - nós temos $a = -0,194217$, $b = 1,16642$ e $c = 0,155526$, implicando em $P_1 = (0,980805; 6,13627; 275,694; 23,5609)^T$. Os autovalores da matriz jacobiana associados ao ponto de equilíbrio são $\lambda_1 = -9,56518 - 5,31304i$, $\lambda_2 = -9,56518 + 5,31304i$, $\lambda_3 = -1,81193$ e $\lambda_4 = 2,793$.*
- ii) *Modelo (F)-SIRC - nós temos $a = -0,231198$, $b = 1,00734$ e $c = 0,210719$, implicando em $P_1 = (1,00471; 4,55706; 133,164; 15,7586)^T$. Os autovalores associados são $\lambda_1 = -7,20051 - 4,42999i$, $\lambda_2 = -7,20051 + 4,42999i$, $\lambda_3 = -1,61275$, e $\lambda_4 = 2,40509$.*
- iii) *Modelo (MF)-SIRC - nós temos $a = -0,274299$, $b = 0,144672$ e $c = 0,280341$ implicando em $P_1 = (1,37268; 1,3085; 19,3361; 6,80666)^T$. Os autovalores associados são $\lambda_1 = -2,734 - 2,48699i$, $\lambda_2 = -2,734 + 2,48699i$, $\lambda_3 = -1,11869$, e $\lambda_4 = 1,40562$.*

Portanto, para os parâmetros numéricos analisados, o ponto de equilíbrio endêmico P_1 é instável em todos os cenários numéricos.

Demonstração. Segue diretamente dos cálculos. □

3.4 Resultados numéricos para o modelo (MF)-SIRC

O modelo (MF)-SIRC tem destaque nessa proposta, pois desde suas primeiras simulações aplicadas a influenza tem se mostrado uma boa ferramenta comparado aos dados reais. Conforme veremos nas simulações numéricas a seguir, o modelo gera uma previsão mais próxima aos

dados, coletados pelo DATASUS, quando utilizado ordens diferentes para cada um dos compartimentos. Neste caso, podemos inferir que há forças diferentes para a resposta imunológica em cada compartimento. Isto é justificado pelos resultados numéricos observados na Figuras 3.1a-3.1b-3.1c. Em todos os casos, mantivemos todos os parâmetros do modelo SIRC constantes e mudamos as ordens das derivadas fracionárias. As simulações apresentadas na Figura 3.1a são para $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 1$ e neste caso "não há memória imunológica". Na Figura 3.1b consideramos $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 0,7$ e, neste caso, todos os compartimentos possuem a "mesma memória imunológica". Finalmente, na Figura 3.1c consideramos $\theta_1 = 0,9, \theta_2 = 0,8, \theta_3 = 0,75$ e $\theta_4 = 0,7$ para o qual, a "memória imunológica" de cada compartimento é distinta.

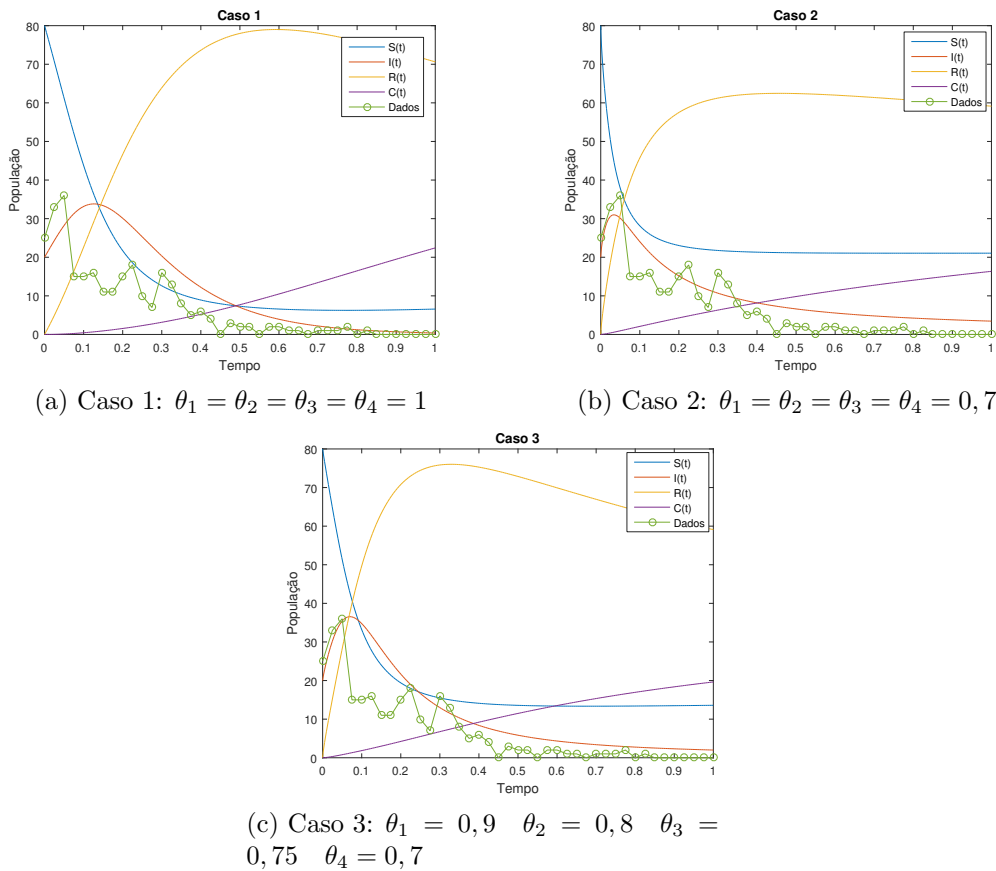


Figura 3.1: Simulações analisando diferentes esquemas para as ordens das derivadas.

Biologicamente, o fato do uso de múltiplas memórias implicar em uma descrição dos dados de maneira mais fidedigna, como conseguimos ver na Figura 3.1c (onde $\theta_1 = 0,9, \theta_2 = 0,8, \theta_3 = 0,75$ e $\theta_4 = 0,7$), pode ser justificado como uma consequência de uma pequena parcela de memória imunológica mesmo dos indivíduos no compartimento dos suscetíveis. Na literatura, há relatos de uma longa duração de tal memória, como a reportada considerando-se os sobreviventes da influenza H1N1 de 1918 [134]. Assim como, é plausível supor que indivíduos que passaram recentemente por algum tipo de influenza apresentam uma memória imunológica ativa.

Como dito, o vírus influenza está em constante mutação, o que torna a gripe uma doença de difícil controle [137]. Sendo assim, a melhor estratégia para retardar seu espalhamento é

a imunização [121]. A imunização pode ocorrer de forma passiva, em que são administrados diretamente os anticorpos na pessoa, o que proporciona proteção, apenas até que o corpo elimine os anticorpos injetados[85]. E no caso da Gripe, a imunização ocorre de forma ativa[107], onde são desenvolvidas vacinas com tecnologias diferenciadas, que fazem com que o corpo produza automaticamente esses anticorpos e outras substâncias para prevenir ou atenuar a doença, só que dessa forma, as células da memória adaptativa são ativadas[136, 129], logo a imunidade é persistente.

Em todas as simulações, usamos um método do tipo trapezoidal para o operador de convolução (ver equação (3.1.3)), inspirado nas ideias de [47], com tamanho de malha $h = 10^{-4}$, para calcular a solução numérica do modelo (MF)-SIRC.

Os parâmetros utilizados nos cenários simulados são apresentados na Tabela 3.2.

Tabela 3.2: Parâmetros do modelo

Parâmetros	Descrição	Valor
μ	Taxa de natalidade e mortalidade	0,02
α	Taxa de recuperação dos infectados	7,8
δ	O tempo médio de aparecimento de uma nova cepa dominante	0,55
γ	Período de Imunidade cruzada	0,85
σ	A probabilidade média de reinfeção de $C(t)$	0,12
β	Taxa de contato (transmissão) de susceptíveis serem infectados	1,355

O objetivo aqui é demonstrar o efeito dos diferentes valores para as escolhas de θ_k apresentados na Tabela 3.3 sobre a dinâmica populacional, usando simulações do modelo (MF)-SIRC (3.1.1). Para as próximas simulações não foi considerado o pulso de vacinação, logo $\rho = 0$.

A interpretação dos cenários pode ser a seguinte: **Cenário 1** significa que a população não possui memória imunológica. Apenas o indivíduo em $C(t)$ desenvolve memória imunológica no **Cenário 2** e **Cenário 3**, sendo a intensidade maior no **Cenário 3**; No **Cenário 4**, **Cenário 4*** e **Cenário 4****, a proporção da população que se recuperou das doenças possui memória imunológica, com os menores valores de memória no **Cenário 4*** e o maior no **Cenário 4****; No **Cenário 5** a população tem a mesma memória imunológica; No **Cenário 6** cada proporção da população tem uma memória imunológica distinta.

Tabela 3.3: Cenários simulados

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
Cenário 1:	1	1	1	1
Cenário 2:	1	1	1	0,9
Cenário 3:	1	1	1	0,8
Cenário 4:	1	1	0,8	0,8
Cenário 4*:	1	1	0,9	0,9
Cenário 4**:	1	1	0,7	0,7
Cenário 5:	0,8	0,8	0,8	0,8
Cenário 6:	0,9	0,85	0,8	0,75

Na Fig. 3.2, apresentamos os Cenários simulados da Tabela 3.3 e o impacto da imunidade cruzada $C(t)$.

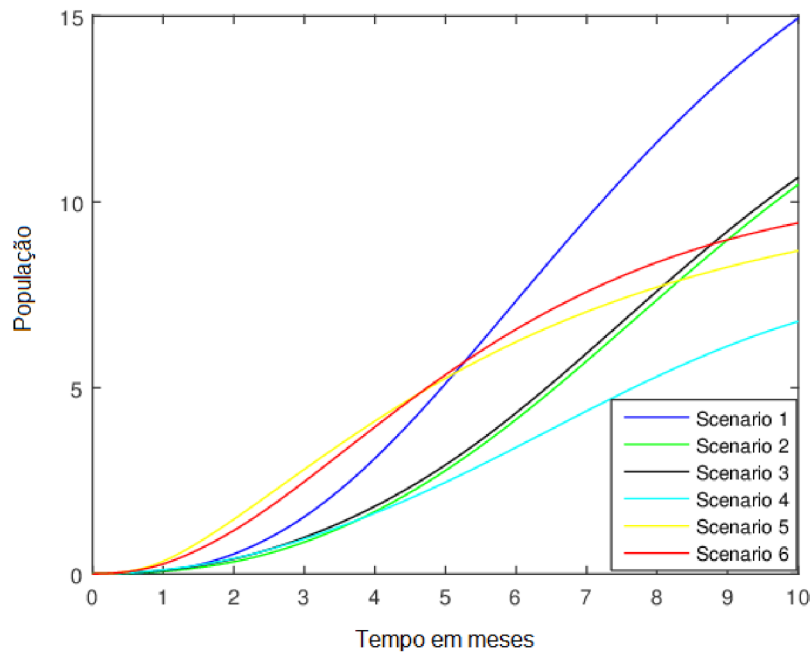


Figura 3.2: Efeitos de memória na imunidade cruzada $C(t)$ na população simulada com o (MF)-SIRC para escolhas das ordens de derivada apresentados na Tabela 3.3

Pode-se observar que o **Cenário 4** é o que apresenta os menores valores de imunidade cruzada, indicando que em uma população sem contato prévio com nenhum subtipo da doença, levará mais tempo para uma reinfecção. As simulações de longa duração, incluindo **Cenários 4*** e **4****, são representadas na Fig. 3.3. As simulações mostram que os melhores cenários (que apresentam menor imunidade cruzada) são aqueles com memória apenas na proporção da população já recuperada (nos compartimentos $R(t)$ e $C(t)$) e são monótonas com a ordem fracionária - verifica-se a dependência contínua da solução com relação às derivadas fracionárias apresentadas no Teorema 3.2.4.

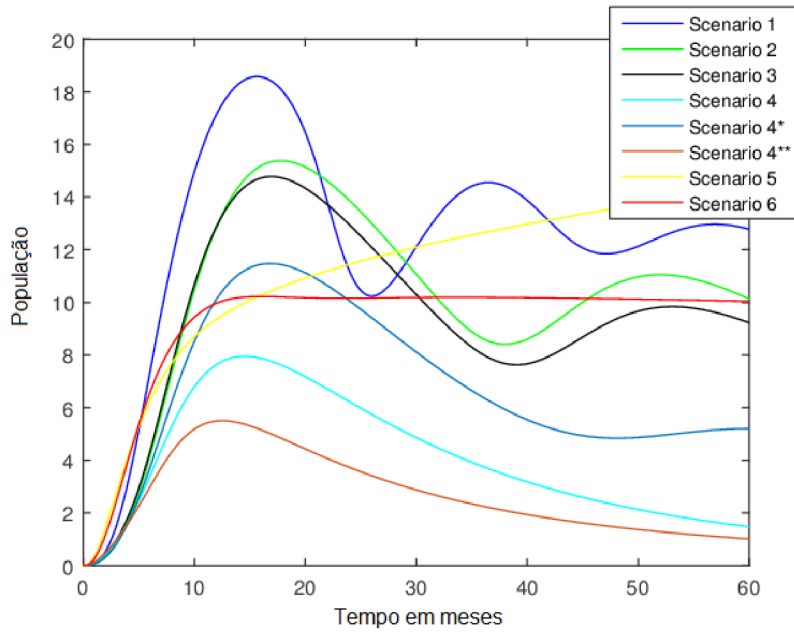


Figura 3.3: Efeitos de memória na imunidade cruzada $C(t)$ de longo prazo em uma população simulada com o (MF)-SIRC para as ordens de derivada listadas na Tabela 3.3

Enquanto isso, o **Cenário 5** e **Cenário 6** são comparáveis no curto prazo (veja Fig. 3.2), e **Cenário 5** apresenta um comportamento monotonicamente crescente no longo prazo da simulação (veja Fig. 3.3). Em particular, **Cenários 5, 6** apresenta uma grande imunidade cruzada ao longo dos 5 primeiros meses (veja Fig. 3.2) - ainda maior que o **Cenário 1** - mas o **Cenário 6** atinge a estabilidade da imunidade cruzada após 1 ano (veja Fig. 3.3). **Cenários 1,2,3** mostram um pico na imunidade cruzada em torno de 12 meses e, em seguida, comportamento oscilante por um período de tempo mais longo (see Fig. 3.3).

Em todas as simulações em que apresentamos os cenários simulados comparados com os dados reportados para Influenza H1N1 (plotados como $\circ$), estaremos nos referindo aos dados reais do Datasus já citados.

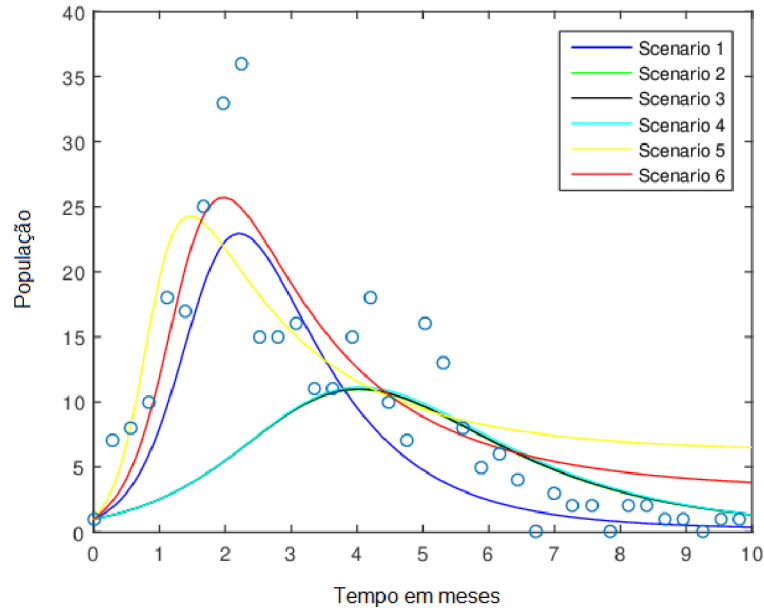


Figura 3.4: Simulações do comportamento da população infectada do (MF)-SIRC para as ordens de derivada listadas na Tabela 3.3 em comparação aos dados reais.

Os resultados simulados mostram que o comportamento das doenças Influenza H1N1 é mais compatível com os Cenários onde todas as sub-populações têm alguma memória (**Cenários 5, 6**) ou não há memória imunológica (**Cenário 1**). A seguir, investigamos as escolhas para θ_k com mais detalhes.

A Fig. 3.5 compara dados relatados de Influenza H1N1 com Cenários simulados do modelo (MF)-SIRC com θ_k conforme mostrado na Tabela 3.4, agora trazendo variações para as ordens da derivada.

Tabela 3.4: Cenários simulados	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
Cenário 7:	0,95	0,83	0,8	0,7
Cenário 8:	0,95	0,85	0,8	0,7
Cenário 9:	0,8	0,83	0,85	0,7
Cenário 10:	0,95	0,83	0,85	0,6

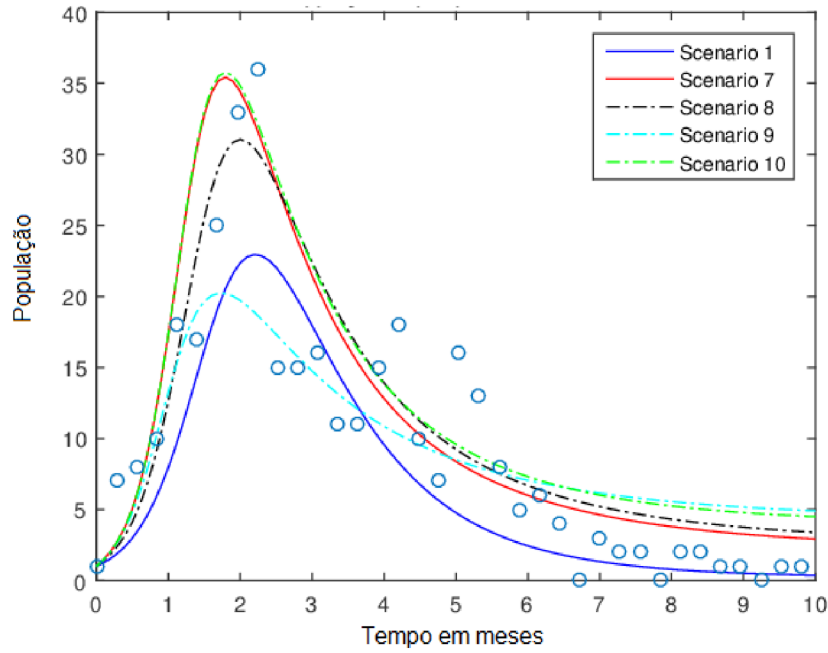


Figura 3.5: Simulações do comportamento da população infectada do (MF)-SIRC para as ordens de derivada listadas na Tabela 3.4 em comparação aos dados reais.

Os resultados mostrados na Fig. 3.5 indicam que o modelo (MF)-SIRC tem melhor concordância com os casos reportados de infectados de Influenza H1N1 semanalmente para valores θ_k usados em **Cenário 7** e **Cenário 10**.

Sobre a dinâmica de imunidade cruzada apresentada na Fig. 3.6-3.7, podemos concluir que uma população com memória em todos os seus compartimentos, conforme Tabela 3.4, é mais suscetível a novas cepas em um curto período de tempo (primeiros seis meses - ver Fig. 3.6) e depois se estabiliza em níveis mais baixos em comparação com uma população sem memória (**Cenário 1**), como apresentado na Fig. 3.7.

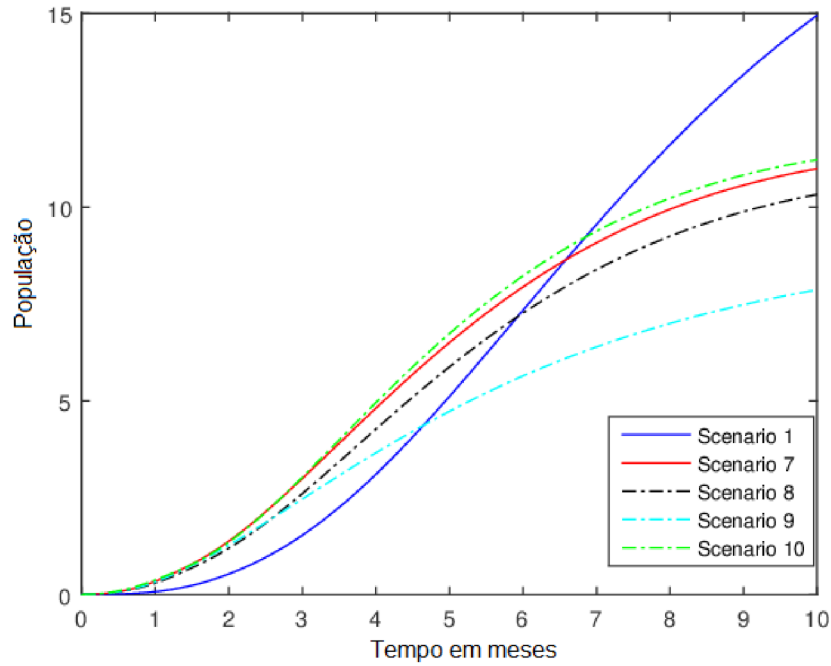


Figura 3.6: Efeitos de imunidade cruzada na população simulada com o (MF)-SIRC ordens de derivada apresentadas na Tabela 3.4.

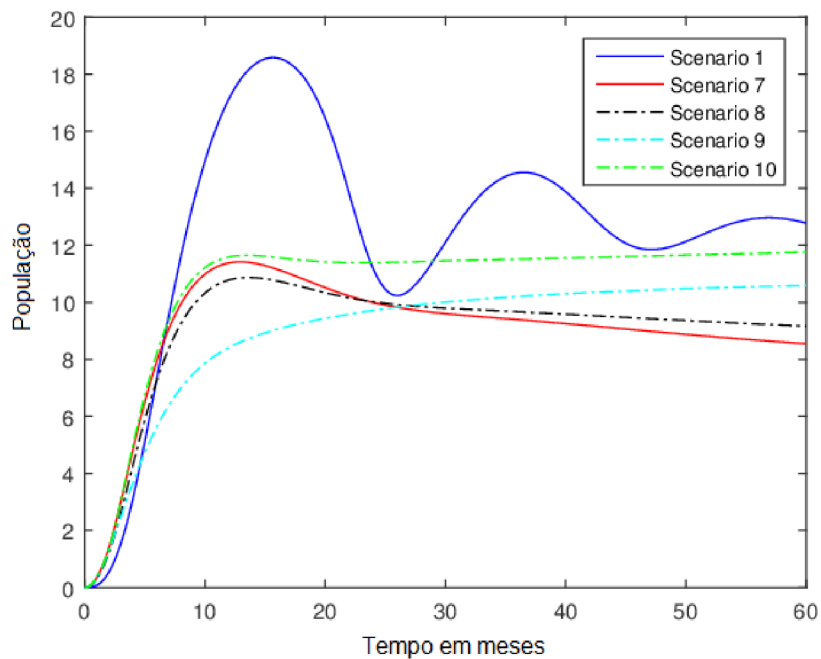


Figura 3.7: Efeitos de imunidade cruzada de longo prazo em uma população simulada com o (MF)-SIRC para ordens de derivada listadas na Tabela 3.4

A fig. figuraC2-long indica que a estratégia de imunização deve ser dada o mais precocemente possível para que a população ganhe memória imunológica antes que a cepa seja capaz de sofrer mutações. É senso comum entre os especialistas mostrar que o modelo (MF)-SIRC proposto é capaz de capturar características importantes das doenças.

3.5 Considerações Finais do Capítulo

Aqui nesse capítulo apresentamos e discutimos em especial o modelo (MF)-SIRC com pulso de vacinação, já que este pode ter seus resultados simplificados para alguns outros modelos de interesse. Nós mostramos a sua formulação, boa-colocação e exaltamos a sua relação com a Influenza.

Superamos limitações previamente encontradas, como por exemplo, saber se a solução do sistema se manteria dentro de uma região delimitada. Discutimos a estabilidade dos pontos de equilíbrio para o modelo (MF)-SIRC com Pulso de Vacinação. Exibimos os dois pontos de equilíbrio. Para o ponto livre de doença é interessante salientar que mostramos uma estratégia não linear para escolher ρ de forma a manter P_0 assintoticamente estável. E que existe diferença na proporção de vacinação se considerarmos o caso padrão $\theta_k = 1$ para $j = 1, \dots, 4$ ou os que estamos discutindo aqui nesse trabalho. Para o ponto de equilíbrio endêmico, devido a grande quantidade de parâmetros a análise foi feita de forma numérica, em que P_1 é instável em todos os cenários.

Para as simulações numéricas utilizamos o (MF)-SIRC sem pulso de vacinação para simular os efeitos da memória imunológica na população frente à mutação de cepas de uma doença. Os Cenários simulados apresentados são baseados em dados semanais de infectados por Influenza H1N1 no estado do Rio Grande do Sul, em 2010.

Os cenários simulados mostram que para uma doença onde a população não tem contato prévio (sem memória imunológica), os melhores cenários para se proteger da mutação da doença são aqueles em que a população adquire memória antes da infecção (simulados **Cenários 4, 4*, 4****). Por outro lado, tais Cenários não se enquadram nos dados do Influenza H1N1.

Os cenários simulados onde a população não ganha memória imunológica (**Cenário 1** ou ganha memória apenas antes de se recuperar **Cenários 2, 3**) apresentam um comportamento oscilatório e maior imunidade cruzada no longo prazo (ver Fig. 3.3) o que não é interessante.

Os cenários simulados com múltiplas ordens para as derivadas (que corresponde à situação em que todos os compartimentos têm níveis distintos de memória imunológica) mostram o melhor ajuste para os dados relatados do Influenza H1N1 (ver **Cenário 7, 10** na Fig. 3.5) com menor imunidade cruzada de longa duração (ver **Cenário 7** na Fig. 3.7), embora apresente maior probabilidade de reinfecção por mutação após 6 meses (ver Fig. 3.6).

Este estudo sugere que o melhor cenário que tem uma prevenção a longo prazo da reinfecção por cepas mutantes de uma doença circulante é aquele em que a população do compartimento tem um nível distinto de memória imunológica. Indica que a estratégia de imunização deve ser dada o mais precocemente possível para que a população ganhe memória imunológica antes que a cepa seja capaz de sofrer mutações.

4 MODELO SIRD COM FAIXAS ETÁRIAS DIFERENTES QUE INTERAGEM: APLICAÇÃO A COVID-19

Com a pandemia de COVID-19, vivemos uma verdadeira explosão de modelos matemáticos para simular a dinâmica evolutiva da pandemia. Nesta seção, contribuiremos nesta empreitada, modelando a dinâmica de distanciamento social em um cenário de populações etárias que interagem. Para tal, utilizaremos um modelo compartimental tipo SIR [69] com distintas populações que interagem de acordo com uma topologia. O modelo apresentado neste capítulo é um caso especial do modelo (2.0.1).

Gostaríamos de observar que a utilização de um modelo do tipo SIRC, como exposto nas seções anteriores, implicaria na hipótese de altas taxas de reinfecção pelo SARS-CoV-2, o que, pelo que se sabe, não é o caso [5]. Outra possibilidade seria a imunidade cruzada adquirida de outros vírus do tipo SARS-CoV, [133, 9]. No entanto, estes estudos ainda são muito preliminares e necessitam de maior experimentação. Por fim, a modelagem da COVID-19 com derivadas fracionárias pode ser encontrada em [118, 2, 6, 43]. Os resultados que seguem foram publicados pela autora e colaboradores no trabalho [56]. Os resultados apresentados aqui utilizando derivadas de ordem fracionária serão frutos de investigações futuras.

Antes de seguirmos com a modelagem, faremos uma breve contextualização do leitor com relação ao que conhecemos da COVID-19, sua dinâmica e as suas implicações no nosso cotidiano. Tal contextualização serve de motivação para a escolha da modelagem.

4.1 Uma breve contextualização a respeito da COVID-19:

Os *Coronavírus* (CoVs) são um grupo diversificado de vírus que afetam muitos animais [48], tendo seu nome derivado da sua morfologia distinta em forma de "coroa" [21]. São conhecidos por causar grandes perdas econômicas, muitas vezes associadas à mortalidade em neonatos de algumas espécies como galinhas e porcos por exemplo [30].

Existem muitos coronavírus, e esses estão agrupados em quatro categorias denominadas pelas letras gregas: α , β , γ e δ [79]. Os vírus *alfa*-coronavírus e *beta*-coronavírus infectam principalmente mamíferos, incluindo humanos, enquanto *gama*-coronavírus e *delta*-coronavírus infectam aves [128].

Sendo descoberto na década de 60, com a primeira evidência em humanos na Inglaterra em 1962 [68], os coronavírus atraíam pouco interesse, mesmo que já fossem relatados sintomas que variam de um resfriado a uma infecção grave do trato respiratório inferior [79]. Isso mudou drasticamente depois dos episódios em 2002 e 2012, respectivamente. Nestes, dois coronavírus altamente patogênicos de origem zoonótica, o da síndrome respiratória aguda grave (SARS-

CoV) e o da síndrome respiratória do oriente médio (MERS-CoV), surgiram em humanos e causaram doença respiratória fatal, tornando os coronavírus um problema de saúde pública no século XXI [65]. A infecção por SARS-CoV surgiu na China, durante o período de novembro de 2002 a julho de 2003 e se espalhou para 29 países, com uma taxa de letalidade de 9,6%. Já o MERS-CoV, desconhecido até então, foi identificado pela primeira vez na Arábia Saudita, em 2012. Este vírus espalhou-se para 27 países, cuja taxa de letalidade é estimada em 34,4% [79]. Para ambos os β -coronavírus SARS-CoV e MERS, os morcegos são os hospedeiros naturais [78, 60]. No entanto, constatou-se que o SARS possui os civetas e o MERS possui os dromedários com hospedeiros intermediários [32].

Com o surgimento do novo coronavírus SARS-CoV-2 causador da COVID-19, todas as atenções se voltaram para este patógeno. Iniciou em Wuhan (Hubei, China), ainda no ano de 2019 espalhou-se rapidamente tornando-se uma pandemia global [125]. Esta situação sem precedente na história recente da humanidade, fez com que grande parte da comunidade científica tenha voltado seus esforços para coletar informações, gerar e testar evidências que nos permitam planejar e executar estratégias de prevenção, controle e tratamento para o vírus, devido aos efeitos econômicos e sociais da pandemia [71].

A COVID-19 tem seus sintomas majoritariamente envolvendo o sistema respiratório. No entanto, pelo que se sabe até agora, os sintomas variam muito, podendo levar de uma infecção assintomática até uma pneumonia grave, causando insuficiência respiratória aguda e levando o paciente a internação hospitalar e até morte. É uma doença sistêmica, que vai muito além, afetando vários órgãos incluindo os vasos sanguíneos, trato gastrointestinal, coração, fígado, rim, músculos, sistema nervoso e baço [79].

A Figura 4.1 apresenta um levantamento dos fatos ocorridos envolvendo a COVID-19 desde dezembro de 2019 até o momento.

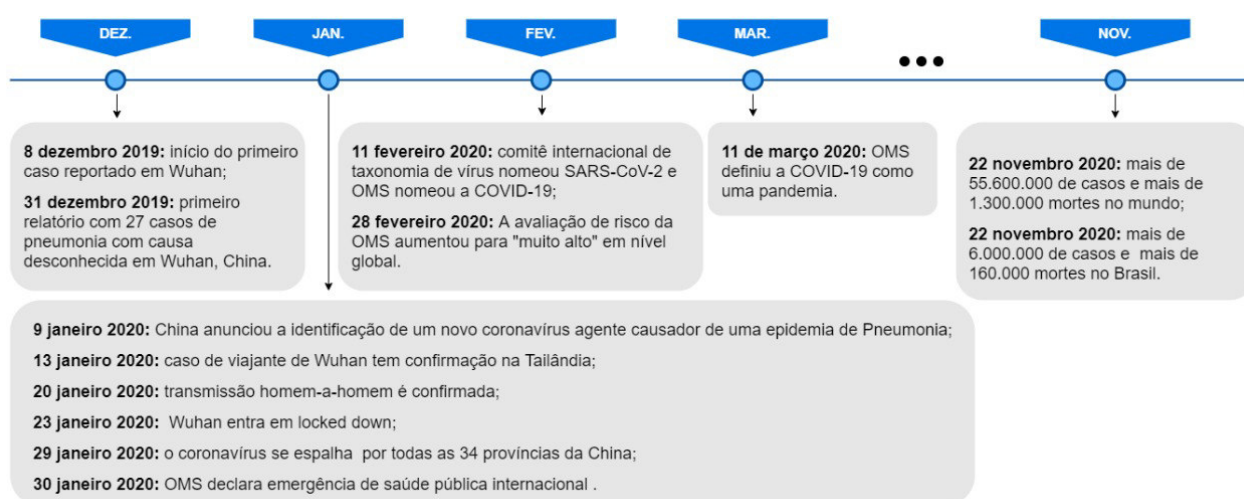


Figura 4.1: Linha do tempo sobre a COVID-19[65].

Note que em um curto período de tempo, o avanço da Covid-19 tem se mostrado alarmante. Nesta proposta, temos a intenção de contribuir para o estudo de um dos fatores que envolvem

a COVID-19, com a modelagem que segue.

4.2 Modelo SIRD proposto

Nesta proposta, estudaremos uma variação do modelo compartimental SIR¹, com a inclusão de um compartimento para o distanciamento social controlado (D). Além disso, o modelo é proposto de forma que as populações em cada compartimento interajam. Em outras palavras, estamos propondo um modelo estruturado como se fosse uma rede unidimensional. Nosso intuito é analisar a dinâmica da doença considerando a estrutura de interação como distintas faixas etárias, haja vista que a COVID-19 possui comportamentos adversos distintos em faixas etárias distintas [35].

Nesta contribuição, partiremos da hipótese que a população total N_T , está dividida em n subpopulações etárias, de forma que $N_T = \sum_{i=1}^n N_i$, em que N_i é o número de indivíduos da população com faixa etária i .

Consideraremos que a dinâmica de interação entre as distintas faixas etárias é regida pelo (PVI),

$$D_*^{\theta_i} X_i(t) = F(t, X_i(t)), \quad \text{para } i = 1, \dots, m. \quad (4.2.1)$$

onde $D_*^{\theta_i}$ é o operador de Caputo de ordem $\theta_i = 1$, para todo $i = 1, \dots, n$, como definido no Capítulo 6.1. Portanto, não estamos considerando um modelo com derivadas de ordem fracionária (aqui a ordem é 1). Além disso,

$$X_i(t) = \begin{bmatrix} S_i(t) \\ I_i(t) \\ R_i(t) \\ D_i(t) \end{bmatrix}$$

e

$$F(t, X_i(t)) = \begin{bmatrix} \mu_i N_i - \mu_i S_i(t) - S_i(t) \sum_{j=1}^n \beta_{ij} I_j(t) - \gamma_i S_i(t) \\ S_i(t) \sum_{j=1}^n \beta_{ij} I_j(t) - (\mu_i + \alpha_i) I_i(t) \\ \alpha_i I_i(t) - \mu_i R_i(t) \\ \gamma_i S_i(t) - \mu_i D_i(t), \end{bmatrix}$$

com condições iniciais

$$(S_i(0), I_i(0), R_i(0), D_i(0))^T \in \mathbb{R}_+^4 := \{(S_i, I_i, R_i, D_i)^T \in \mathbb{R} : S_i \geq 0, I_i \geq 0, R_i \geq 0, D_i \geq 0\}, \quad (4.2.2)$$

para $i \in \{1, \dots, n\}$. Os parâmetros $\alpha_i > 0$ e $\gamma_i > 0$ são respectivamente o inverso do tempo em que os indivíduos ficam no compartimento I_i , ou seja taxa de recuperação, e a taxa de passagem para o distanciamento social. $\beta_{ij} \geq 0$, é a taxa de contato entre indivíduos dos compartimentos

¹Proposto em [69]

S_i e I_j para todas as populações $j \in \{1, \dots, m\}$. Já, $\mu_i > 0$ representa a taxa de mortalidade e natalidade (iguais), mantendo assim cada população N_i constante, sempre que $\theta_j = 1$ para todo $j = 1, \dots, m$.

4.3 Boa colocação e algumas considerações sobre modelo proposto

Nesta subseção abordaremos alguns resultados teóricos interessantes a respeito do modelo proposto.

Teorema 4.3.1. *[Boa colocação e consistência] Assuma que o sistema (4.2.1) é tal que as condições iniciais estão em R_+^4 , para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Então, este possui uma única solução $C^1([0, \infty], R_+^4)$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, que depende continuamente dos dados iniciais e dos parâmetros.*

Demonstração. A demonstração segue as linhas gerais da teoria clássica de sistemas de EDO's, e.g., [116]. Outra forma de ver este resultado é considerar os resultados de boa colocação para o modelo (2.0.1) apresentados no Capítulo 2, com todas as ordens das derivadas iguais a 1 e $C(t) = D(t)$. $\square$

Nos próximos parágrafos, assumiremos que $\mu_i = 0$ por facilidade. Segue do Teorema 4.3.1 que $S_i(t)$ e $I_i(t)$, soluções de (4.2.1), são não-negativas, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Segue da primeira equação em (4.2.1) que $S_i(t)$ é decrescente. Somando as duas primeiras equações em (4.2.1), obtemos a seguinte lei de contração

$$S_i(t) + I_i(t) + \gamma_i \int_0^t S_i(s) ds + \alpha_i \int_0^t I_i(s) ds = S_i(0) + I_i(0). \quad (4.3.1)$$

Da hipótese de termos somente parâmetros positivos, segue da equação (4.3.1), que $I_i(t) < \infty$, e $\int_0^\infty I_i(t) dt \leq \infty$, para todo $t \geq 0$. Ainda, de $S_i(t)$ decrescente, (4.3.1) implica ainda que $S_i^\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} S_i(t) > 0$. Finalmente, (4.3.1) também implica em $\lim_{t \rightarrow \infty} I_i(t) = 0$.

Como $S_i(t)$ decresce, resta que $I_i(t)$ começa crescendo e depois de um certo tempo, passa a decrescer. Dada a suavidade da solução do modelo (4.2.1), concluímos que existe um ponto t_p^i em que $I_i(t)$ atinge o seu máximo. Assuma que neste ponto de máximo $I_i(t_p^i) \neq 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Segue da segunda equação em (4.2.1) que $\dot{I}_i(t_p^i) = 0$. Portanto,

$$S_i(t_p^i) = \frac{(\mu_i + \alpha_i)}{\beta_{ii}} \left(\frac{1}{1 + \sum_{j \neq i}^n \frac{\beta_{ij} I_j(t_p^i)}{\beta_{ii} I_i(t_p^i)}} \right), \quad \text{for } i \in \{1, \dots, n\}. \quad (4.3.2)$$

Da equação (4.3.2) tiramos algumas lições que valem a pena serem exploradas:

- i) Se não há contato cruzado entre as distintas faixas etárias, isto é, se $\beta_{ij} = 0$ para todo $j \neq i$, então temos que o número de suscetíveis no momento t_p^i é dado por $S_i(t_p^i) = \frac{(\mu_i + \alpha_i)}{\beta_{ii}}$.
- ii) Na medida em que temos $\beta_{ij} \neq 0$ para $j \neq i$, $S_i(t_p^i)$ diminui (já que o denominador em (4.3.2) aumenta) e, portanto, o número de infectados $I(t_p^i)$ aumenta.
- iii) Segue de i) e ii) que a única maneira de manter $S_i(t_p^i)$ no seu maior valor possível é que não exista interação entre populações de faixas etárias diferentes. Portanto, qualquer que seja a reabertura econômica, onde haja interação entre as populações, implicará no aumento do número de casos infectados.
- iv) Assuma que a retomada das aulas seja dada de maneira escalonada, isto é, alguns dias por semana, uma proporção dos alunos retornem às salas de aula e fique em casa nos demais dias da semana. Nesta situação, podemos esperar que o β_{ii} da população específica aumente (haja vista a maior probabilidade de contato com algum infectado). Por outro lado, o fato de permanecer em casa alguns dias da semana, faz com que a interação com familiares (em geral mais idosos) também aumente, de forma proporcional. Desta forma, o termo no denominador de (4.3.2) é maior que 1. Como consequência, o número de infectados aumenta.
- v) É razoável estabelecer que o número de pessoas que permanecem em distanciamento social durante a evolução da epidemia tenha diminuído com o tempo. Segue da última equação em (4.2.1) que $D_i(t) \leq \frac{\gamma_i}{\mu_i} S_i(t)$. De (4.3.2) temos que $D_i(t_p^i)$ também diminui com relação ao número de iterações com outras populações $j \neq i$ (isto é, com $\beta_{ij} \neq 0$).

4.4 Existência de pontos de equilíbrio para SIRD com faixas etárias interagindo.

Nesta subseção, faremos um breve apanhado a respeito da existência de pontos de equilíbrio para o modelo (4.2.1). Primeiramente, note que das duas últimas equações em (4.2.1) temos que

$$\begin{aligned} R_i(t) &= R_i(0) + \alpha_i \int_0^t e^{\mu(s-t)} I_i(s) ds \\ D_i(t) &= D_i(0) + \alpha_i \int_0^t e^{\mu(s-t)} S_i(s) ds. \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

Portanto, basta analisar os pontos de equilíbrio (S_i^*, I_i^*) do modelo reduzido.

Desta forma, vamos considerar $\dot{S}_i = 0 = \dot{I}_i$ nas duas primeiras equações de (1.2.1). Da primeira equação em (4.2.1) obtemos

$$S_i^* = \frac{\mu_i N_i}{(\mu_i + \gamma_i) + \sum_{j=1}^n \beta_{ij} I_j^*}. \quad (4.4.2)$$

Substituindo na segunda equação de (4.2.1), obtemos que I_i^* é dado pelas raízes do polinômio de segundo grau

$$(I_i^*)^2 + \underbrace{\left[\frac{(\mu_i + \gamma_i)}{\beta_{ii}} - \frac{\mu_i N_i}{(\alpha_i + \mu_i)} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{\beta_{ij}}{\beta_{ii}} I_j^* \right]}_b I_i^* - \underbrace{\frac{\mu_i N_i}{(\alpha_i + \mu_i)} \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{\beta_{ij}}{\beta_{ii}} I_j^*}_c = 0. \quad (4.4.3)$$

Haja vista que, para a aplicação de interesse não pode existir quantidades negativas, os pontos de equilíbrio de interesse são as possíveis raízes positivas de (4.4.3). Neste sentido temos,

Teorema 4.4.1. *Existem exatamente quatro possíveis raízes positivas para (4.4.3). São elas:*

- i) Pontos livre de doenças $I_i^* = 0$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.
- ii) $I_i^* = \frac{\mu_i N_i}{(\alpha_i + \mu_i)} - \frac{(\gamma_i + \mu_i)}{\beta_{ii}}$, no caso em que $\beta_{ij} = 0$ para $j \neq i$ e $b > 0$.
- iii) Caso $c \neq 0$. Temos que $I_i^* = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$ com $b > 0$.
- iv) Caso $c \neq 0$. Temos que $I_i^* = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$ com $b < 0$.

Demonstração. Como $c \leq 0$, segue que $b^2 - 4c \geq 0$. Implicando a existência de raízes positivas para (4.4.3).

Assuma que $\beta_{ij} = 0$ para todo $j \neq i$, isto é, $c = 0$. De (4.4.3) segue que $I_i^* = 0$ e a afirmação i) está provada, ou $I_i^* = \frac{\mu_i N_i}{(\alpha_i + \mu_i)} - \frac{(\gamma_i + \mu_i)}{\beta_{ii}}$, e a afirmação ii) segue.

Os casos iii) e iv) seguem diretamente de $c \neq 0$ e o sinal de b . □

Observação: Note que, pela afirmação iii) e iv) do teorema 4.4.1 a quantidade de populações sendo consideradas no modelo (4.2.1), influencia no ponto de equilíbrio que deve ser considerado.

4.5 Resultados numéricos: casos simulados

Para fazer simulações para a COVID-19 que considere mais de uma faixa etária, consideramos fazer um estudo de caso local para o estado do Rio Grande do Sul (RS). Nesse estado o governo implementou no ano de 2020 um modelo de distanciamento controlado, onde o mesmo fica dividido em macrorregiões categorizadas por bandeiras nas cores amarela, laranja, vermelha ou preta, sendo a amarela o melhor cenário e a preta o pior. O monitoramento da evolução da epidemia é feito com base na avaliação de alguns indicadores destinados a mensurar a propagação da COVID-19 e a capacidade de atendimento do sistema de saúde, sendo alguns deles: a capacidade de atendimento, casos ativos, casos recuperados, população idosa, leitos de UTI, número de óbitos entre outros.

Nosso estudo de caso elucidar a trajetória da possível abertura das escolas no estado. Um processo que já iniciou no mês de setembro de 2020, com a publicação do decreto nº 55.465, que

autorizou a retomada do ensino presencial. Pelas normativas estaduais a reabertura das escolas estavam autorizadas desde que, o município não fizesse oposição e que houvesse a observância de algumas medidas como o estabelecimento de um plano de contingência para prevenção, monitoramento e controle, a indicação do serviço de saúde de referência, centro de operações de emergência local, medidas sanitárias permanentes, limite de cinquenta por cento da capacidade de alunos entre outros.

Para descrever os cenários de retomada, tendo em vista que será uma retomada gradual, dividimos as populações em faixas etárias de forma a representar as etapas da educação básica e as outras populações (adultos e idosos). Para representar nas simulações e parâmetros usamos os seguintes índices: educação infantil (1) de 0 a 5 anos, ensino fundamental I(2) de 6 a 10 anos e ensino fundamental II(3) de 11 a 14 anos e ensino médio(4) de 15 a 17 anos. Fora da idade regular da educação básica temos população em idade ativa (5) dos 18 aos 64 anos e idosos (6) dos 65 anos em diante.

Para iniciarmos as discussões, apresentamos na tabela 4.5 a seguir, os valores dos parâmetros que foram utilizados nas simulações.

Parâmetro	Valor	Referência
N_i	$N_1 = 0,04, N_2 = 0,04, N_3 = 0,06, N_4 = 0,2, N_5 = 0,48$ e $N_6 = 0,18$	IBGE
μ_i	$\mu_1 = 0,012, \mu_2 = 0,0135, \mu_3 = 0,014, \mu_4 = 0,015, \mu_5 = 0,016$, e $\mu_6 = 0,06$	IBGE
α_i	$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0,007$	[79]
γ_i	$\gamma_1 = 0,1, \gamma_2 = 0,1, \gamma_3 = 0,1, \gamma_4 = 0,1, \gamma_5 = 0,001$ e $\gamma_6 = 0,1$.	Estimado
β_{1j}	$\beta_{11} = 0,2542, \beta_{22} = 0,2573, \beta_{33} = 0,2604, \beta_{44} = 0,2635, \beta_{55} = 0,2666$	Calculado [117]

As taxas de contato são diferentes para cada relação entre as faixas etárias, as que não estão explicitamente expostas na Tabela 4.5 são encontradas através da média aritmética entre os β_{ij} das faixas etárias envolvidas.

Para as condições iniciais assumimos como simplificação que a faixa etária que têm uma maior população suscetível é a população em idade ativa, e por ser a que trabalha e menos cumpre o distanciamento social é a que possui infectados, as outras populações por estarem reclusas são totalmente suscetíveis, como apresentado em (4.5.1) e não iniciamos com populações no compartimento recuperado nem no distanciamento social controlado.

$$\begin{aligned}
 (S_1(0), S_2(0), S_3(0), S_4(0), S_5(0), S_6(0))^T &= (0.15, 0.15, 0.15, 0.15, 0.249, 0.15)^T \\
 (I_1(0), I_2(0), I_3(0), I_4(0), I_5(0), I_6(0))^T &= (0, 0, 0, 0, 0.001, 0)^T \\
 (R_1(0), R_2(0), R_3(0), R_4(0), R_5(0), R_6(0))^T &= (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T \\
 (D_1(0), D_2(0), D_3(0), D_4(0), D_5(0), D_6(0))^T &= (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T
 \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

Na Figura 4.2 vemos a comparação da dinâmica com quarentena ($\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 = 0.1$) de todas as faixas etárias, na Figura 4.2(a) com os dados reais dos infectados no RS antes da retomada das aulas, e na Figura 4.2(b) com a dinâmica de todas as faixas etárias com quarentena ao fim do processo de volta as aulas ($\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 = 0$).

Podemos perceber que na figura 4.2(a), o início da dinâmica é bem fitado pelos dados, já no fim, está em um intervalo esperado, mas não sobre os dados. Isso é um fenômeno esperado, já

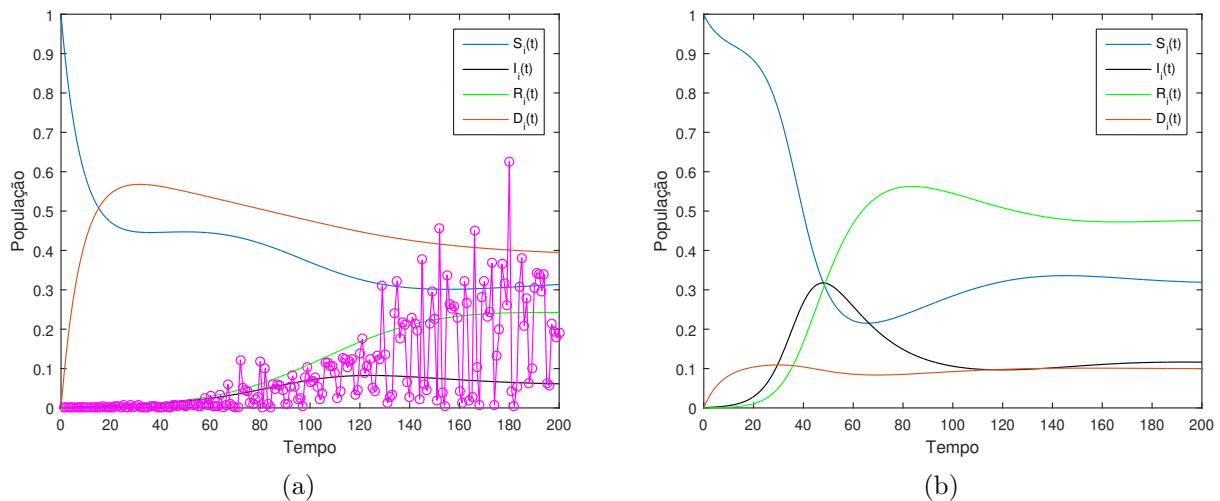


Figura 4.2:

(a) Todas as faixas etárias antes da retomada das aulas, comparada com dados reais em rosa.. (b) Todas as faixas etárias após a retomada das aulas.

Fonte: do autor.

que temos somente seis faixas etárias, para melhorar teríamos de aumentar as subpopulações. É fácil identificar as diferenças na dinâmica em todos os compartimentos, mesmo que o único parâmetro modificado de uma simulação para outra tenha sido o do distanciamento social, e nem tenha sido em todas as populações. Queremos destacar que na Fig. 4.2(a) que a queda da reclusão com o passar do tempo é um processo que estamos percebendo no nosso cotidiano e na Fig. 4.2(b) o aumento que ocorreu no número de infectados. Para observarmos o crescimento gradativo dos infectados no processo de retomada das aulas presenciais apresentamos a Figura 4.3 em que temos somente as curvas $I_i(t)$ que é a soma de todas as faixas etárias em cada caso.

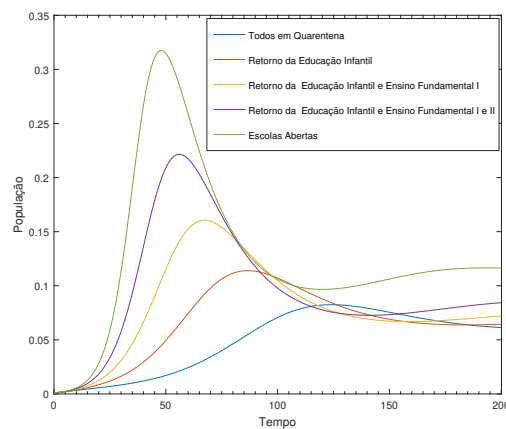


Figura 4.3:

Compartimento de infectado $I_i(t)$ em cada caso de retomada das aulas.

Fonte: do autor.

Podemos ver, como esperado, o quanto essa retomada aumenta o número de infectados. Conforme as aulas são reestabelecidas, maior é o pico de infectados.

Agora, para entendermos esse retorno dentro do ambiente escolar, temos a seguinte sequência de simulações: na Figura 4.4, mostramos as faixas etárias pertencentes aos níveis da educação básica antes de qualquer retomada; na Figura 4.5, mostramos as faixas etárias pertencentes aos níveis da educação básica com a retomada da educação infantil; e um momento mais futuro, Figura 4.6, mostramos a retomada das aulas de todas as faixas etárias pertencentes aos níveis da educação básica.

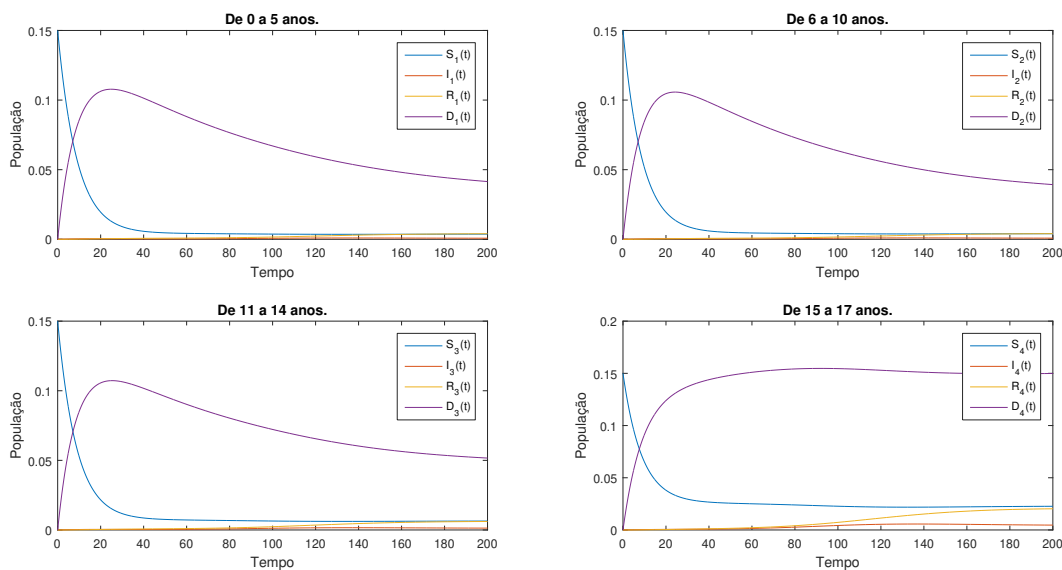


Figura 4.4:

Faixas etárias pertencentes aos níveis da educação básica cumprindo o distanciamento social.

Fonte: do autor.

Para todas as simulações, a cada vez que a quarentena é retirada, é perceptível um crescimento protuberante no compartimento dos infectados. É interessante salientar na Figura 4.5, que mesmo sem haver nenhuma modificação nos parâmetros da população "De 15 a 17 anos", há um aumento visível nos infectados, indicando a relação entre as populações. Para chamar mais a atenção para esse quesito optamos por exibir, na Figura (4.7) o efeito causado na população idosa, a mais distante de idade das faixas etárias que frequentam a escola. Na Figura 4.7(a) temos a população idosa antes da retomada das aulas comparada com a Figura 4.7(b) que é a população idosa após a retomada das aulas. Podemos ver um aumento considerável nos casos de infecção pela COVID-19, mesmo nessa faixa etária em que não houve interferência nos parâmetros. O efeito que vemos na simulação, ocorre devido à retomada das aulas presenciais o que aumenta a circulação do vírus. Todo esse cenário é condizente com os resultados teóricos discutidos anteriormente.

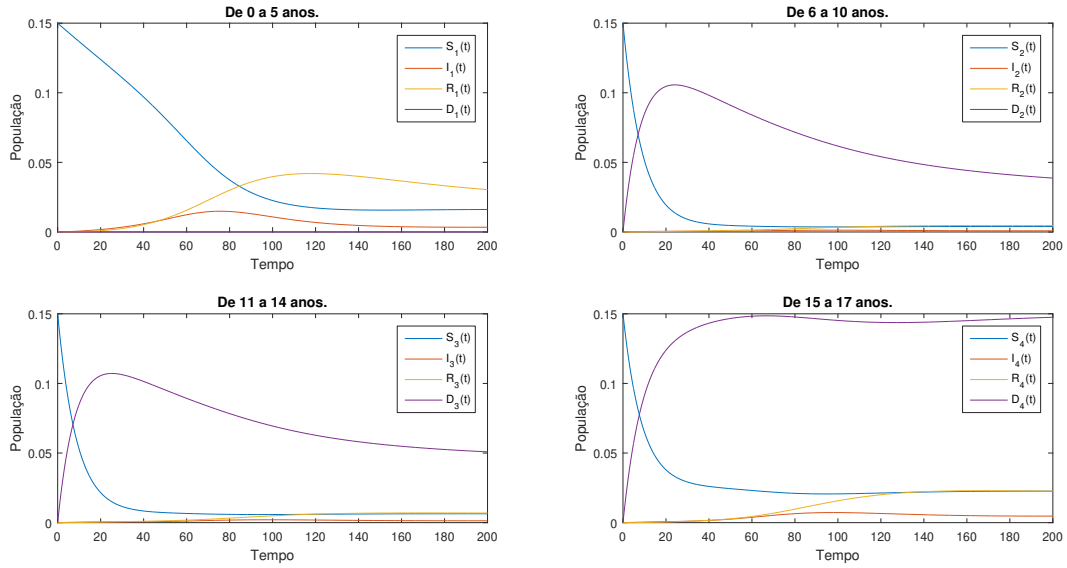


Figura 4.5:
Faixas etárias pertencentes aos níveis da educação básica com a retomada da educação infantil.
Fonte: do autor.

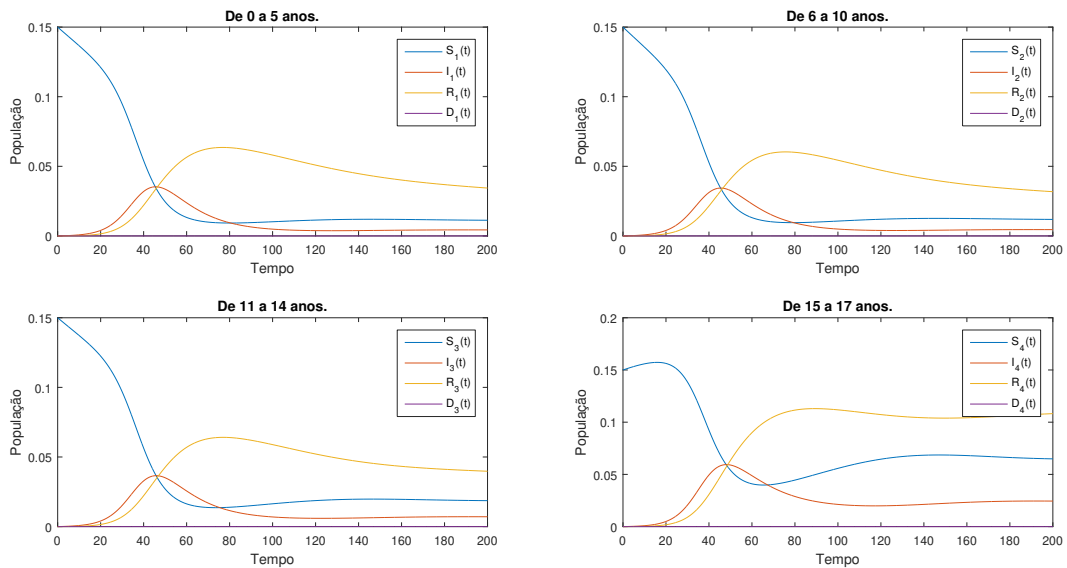


Figura 4.6:
Retorno do ensino presencial.
Fonte: do autor.

4.6 Considerações Finais do Capítulo

Neste estudo de caso conseguimos discutir as consequências da reabertura das escolas na disseminação da COVID-19 com dados do estado do RS, mas o modelo (4.2.1) proposto é importante para muitas outras análises. Nossos achados mostram que uma importante intervenção não farmacêutica, como o fechamento de escolas, em momentos de crise, pode aumentar

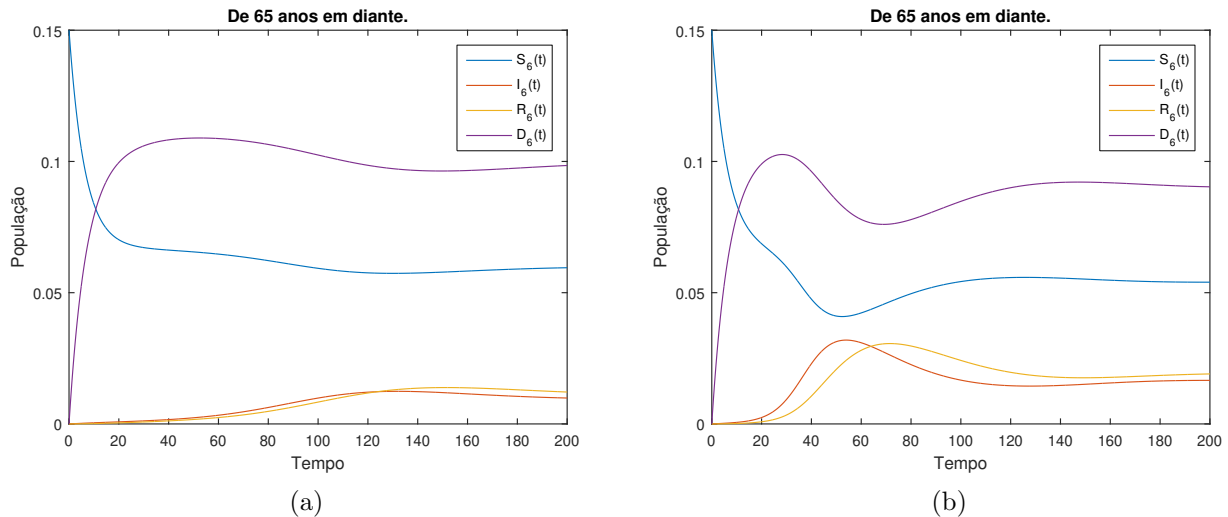


Figura 4.7:

(a) População idosa antes da retomada das aulas. (b) População idosa após a retomada das aulas.

Fonte: do autor.

consideravelmente o número proporcional de pessoas infectadas.

Também mostra que uma estratégia de distanciamento social vertical defendida por algumas autoridades governamentais pode ter um impacto devastador nos grupos de risco, dada a interação social entre idades, que ocorre principalmente nas famílias socialmente vulneráveis.

Além disso, os cenários simulados mostram que, em um país como o Brasil, onde as relações intergeracionais é muito grande, mesmo a liberação da faixa etária mais distante dos idosos acarreta em um aumento na curva de infecção dos idosos. Uma vez que os idosos são, neste momento, os mais vulneráveis em relação aos efeitos que o COVID-19 tem, esse retorno escolar pode implicar em um aumento da taxa de mortalidade entre eles. Portanto, a reabertura das escolas deve ser considerada com cuidado.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Esta tese traz contribuições na modelagem da propagação de doenças infecciosas em populações que interagem, sob o efeito de memória e sem migração, para as quais, cada subpopulação segue uma dinâmica do tipo SIRC.

Do ponto de vista teórico, esta tese apresenta resultados de existência, unicidade e dependência contínuas dos dados iniciais, dos parâmetros do modelo e das ordens das derivadas para a solução do sistema de equações diferenciais multi-fracionárias, que modela o problema em sua forma geral. Também estabelecemos a existência de pontos estacionários em termos da topologia de interação entre as populações e os parâmetros do modelo. A estabilidade local (global) é obtida para alguns casos particulares para a escolha das ordens das derivadas.

Modificações do modelo proposto são estudadas, contemplando algumas aplicações à influenza, ao distanciamento social e reabertura gradual de escolas durante a pandemia de Covid-19, conjuntamente com simulações numéricas.

Resultados em andamento: Ainda não temos um resultado conclusivo a respeito da estabilidade local dos pontos de equilíbrio para o modelo geral apresentado nesta tese. Ou seja, o modelo que envolve a topologia de interação entre as distintas populações e as derivadas de ordem distintas. Por se tratar de um modelo com muitas equações, a estabilidade local linearizada (através da análise dos autovalores) se torna praticamente impossível. Estamos estudando como aplicar métodos tipo Lyapunov para derivadas fracionárias para a estabilidade local.

Ainda há vários cenários numéricos a serem explorados que não apareceram nesta tese.

Interesses futuros:

- Adaptar o modelo SIRC para Tuberculose, por ser uma doença emergente na cidade de Rio Grande. Para tanto, é preciso encontrar uma função $V(U(t))$ no modelo (3.1.1) que descreva o abandono do tratamento, este que pode ser observado nos dados reais. Além disso em parceria com o Hospital Universidade Dr. Miguel Riet Corrêa Jr. analisar a implementação de novas estratégias de controle.
- Adaptar o modelo SIRC para Dengue, por ser uma doença emergente no Brasil e em especial ter apresentado um número expressivo de focos no estado do Rio Grande do Sul. A relação interessante que a Dengue tem entre seus subtipos, nos faz imaginar que o modelo SIRC seja um bom candidato para a sua modelagem. E também analisar os efeitos que a vacinação tem para o controle do alto número de surtos de Dengue, afim de estimular que ela entre para o calendário nacional de vacinação.

Referências Bibliográficas

- [1] ABEL, N. Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies. **Oeuvres**, v.1, p.11–27, 1881.
- [2] AHMAD, S.; ULLAH, A.; AL-MDALLAL, Q. M.; KHAN, H.; SHAH, K.; KHAN, A. Fractional order mathematical modeling of COVID-19 transmission. **Chaos, Solitons & Fractals**, v.139, p.110256, 2020.
- [3] AHMED, E.; EL-SAYED, A.; EL-SAKA, H. A. On some Routh-Hurwitz conditions for fractional order differential equations and their applications in Lorenz, Rössler, Chua and Chen systems. **Physics Letters A**, v.358, n.1, p.1–4, 2006.
- [4] ALBUQUERQUE, M. I. N.; CARVALHO, E. M.; LIMA, L. P. Vigilância epidemiológica: conceitos e institucionalização. **Revista Brasileira de Saúde Materno Infantil**, v.2, n.1, p.7–14, 2002.
- [5] ALIZARGAR, J. Risk of reactivation or reinfection of novel coronavirus (COVID-19). **Journal of the Formosan Medical Association**, 2020.
- [6] ALKAHTANI, B. S. T.; ALZAID, S. S. A novel mathematics model of covid-19 with fractional derivative. Stability and numerical analysis. **Chaos, Solitons & Fractals**, v.138, p.110006, 2020.
- [7] ALMEIDA, R.; CRUZ, A. M. B. da; MARTINS, N.; MONTEIRO, M. T. T. An epidemiological MSEIR model described by the Caputo fractional derivative. **International Journal of Dynamics and Control**, v.7, n.2, p.776–784, 2019.
- [8] ALMEIDA, W. F. de; PIMENTA, M. T. D. O. O teorema de Arzela-Ascoli e sua aplicacao em equacoes diferenciais ordinarias. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v.6, n.2, 2018.
- [9] ANDERSON, D. E.; TAN, C. W.; CHIA, W. N.; YOUNG, B. E.; LINSTER, M.; LOW, J. H.; TAN, Y.-J.; CHEN, M. I.-C.; SMITH, G. J.; LEO, Y. S. et al. Lack of cross-neutralization by SARS patient sera towards SARS-CoV-2. **Emerging microbes & infections**, v.9, n.1, p.900–902, 2020.
- [10] ANDERSON, D. H. **Compartmental modeling and tracer kinetics**. Springer Science & Business Media, 2013. v.50.
- [11] ANDERSON, R. M.; ANDERSON, B.; MAY, R. M. **Infectious diseases of humans: dynamics and control**. Oxford university press, 1992.
- [12] ANDERSON, R.; MAY, R. Vaccination against rubella and measles: quantitative investigations of different policies. **Epidemiology & Infection**, v.90, n.2, p.259–325, 1983.

- [13] ANDREASEN, V.; GOG, J. R. Pease (1987): The evolutionary epidemiology of influenza A. **Theoretical Population Biology**, 2020.
- [14] BALEANU, D.; MOHAMMADI, H.; REZAPOUR, S. Analysis of the model of HIV-1 infection of $CD4^+$ $CD4\{+\}$ T-cell with a new approach of fractional derivative. **Advances in Difference Equations**, n.1, p.1–17, 2020.
- [15] BARCELLOS, C. C.; MONTEIRO, A. M. V.; CORVALÁN, C.; GURGEL et al. Mudanças climáticas e ambientais e as doenças infecciosas: cenários e incertezas para o Brasil. **Epidemiol. Serv. Saúde**, v.18, n.3, p.285–304, 2009.
- [16] BERGAMIN FILHO, A.; HAU, B.; AMORIM, L.; LARANJEIRA, F. Análise espacial e temporal de epidemias de patógenos de solo. **Embrapa Mandioca e Fruticultura-Capítulo em livro científico (ALICE)**, 2007.
- [17] BERTOTTI, G.; MAYERGOYZ, I. D. **The Science of Hysteresis**. Elsevier, 2005.
- [18] BRASIL. Lei 8080, de 19 de Setembro de 1990. **Dispõe Sobre as Condições Para a Promoção, Proteção E Recuperação Da Saúde, a Organização EO Funcionamento Dos Serviços Correspondentes E Dá Outras Providências**. Brasília-DF, Brasil, 1990.
- [19] BRASIL, C. F. do. Constituição da República Federativa do Brasil de 1988. , 2010.
- [20] BRITTON, N. F. **Essential mathematical biology**. Springer Science & Business Media, 2012.
- [21] BURRELL, C. J.; HOWARD, C. R.; MURPHY, F. A. **Fenner and White's Medical Virology**. Academic Press, 2016.
- [22] CAI, Y.; YUAN, Y.; LIAN, X.; WANG, W. Extinction in a Feline Panleukopenia virus model incorporating direct and indirect transmissions. **Applied Mathematics and Computation**, v.258, p.358–366, 2015.
- [23] CAMARGO, M. M.; CAETANO, A. R.; MIRANDA SANTOS, I. K. F. de. Evolutionary pressures rendered by animal husbandry practices for avian influenza viruses to adapt to humans. **Iscience**, 2022.
- [24] CAMARGO, R. **Cálculo Fracionário e Aplicações**. 2009. Tese — Universidade Estadual de Campinas.
- [25] CAMARGO, R.; OLIVEIRA, E. de. **Cálculo fracionário**, Editora Livraria da Física. 2015.
- [26] CAPUTO, M. **Lectures on seismology and rheological tectonics**. 1992.

- [27] CARVALHO, G. A saúde pública no Brasil. **Estudos avançados**, v.27, n.78, p.7–26, 2013.
- [28] CASAGRANDE, R.; BOLZONI, L.; LEVIN, S. A.; ANDREASEN, V. The SIRC model and influenza A. **Mathematical biosciences**, v.200, n.2, p.152–169, 2006.
- [29] CASTRO JÚNIOR, A. A. de. Curso de equações diferenciais ordinárias. **Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)**, 2009.
- [30] CAVANAGH, D.; BRITTON, P. Coronaviruses: general features. **Encyclopedia of virology**, p.549, 2008.
- [31] CHINNATHAMBI, R.; RIHAN, F. A.; ALSAKAJI, H. J. A fractional-order model with time delay for tuberculosis with endogenous reactivation and exogenous reinfections. **Mathematical Methods in the Applied Sciences**, 2019.
- [32] COLEMAN, C. M.; FRIEMAN, M. B. Coronaviruses: important emerging human pathogens. **Journal of virology**, v.88, n.10, p.5209–5212, 2014.
- [33] CRUVINEL, W. d. M. et al. Sistema imunitário: Parte I. Fundamentos da imunidade inata com ênfase nos mecanismos moleculares e celulares da resposta inflamatória. **Revista Brasileira de Reumatologia**, 2010.
- [34] DA CAS, J. V. **Redes de mapas acoplados em sistemas biológicos de reação-difusão**. 2006. Dissertação — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada.
- [35] DAVIES, N. G.; KLEPAC, P.; LIU, Y. et al. Age-dependent effects in the transmission and control of COVID-19 epidemics. **MedRxiv**, 2020.
- [36] DE CEZARO ADRIANO ANDGOMES, A. C. F. N. Um estudo sobre a memória epidemiológica: modelo SIRC fracionário. **C.Q.D.— Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v.10, 2017.
- [37] DEBNATH, L.; BHATTA, D. **Integral transforms and their applications**. CRC press, 2014.
- [38] DIEKMANN, O.; HEESTERBEEK, J. A. P.; METZ, J. A. The legacy of Kermack and McKendrick. **Epidemic models: their structure and relation to data**, v.5, p.95, 1995.
- [39] DIETHELM, K. **The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type**. Springer, 2010.
- [40] DIETHELM, K. A fractional calculus based model for the simulation of an outbreak of dengue fever. **Nonlinear Dynamics**, v.71, n.4, p.613–619, 2013.
- [41] DIETZ, K.; HEESTERBEEK, J. Daniel Bernoulli's epidemiological model revisited. **Mathematical biosciences**, v.180, n.1-2, p.1–21, 2002.

- [42] EL-SHAHED, M.; ALSAEDI, A. The fractional SIRC model and influenza A. **Mathematical Problems in Engineering**, v.2011, 2011.
- [43] ERTURK, V. S.; KUMAR, P. Solution of a COVID-19 model via new generalized Caputo-type fractional derivatives. **Chaos, Solitons & Fractals**, v.139, p.110280, 2020.
- [44] FORLEO-NETO, E.; HALKER, E.; SANTOS, V. A. J.; PAIVA, T. M.; TONIOLO-NETO, J. A. Influenza. **Revista da Sociedade Brasileira de Medicina Tropical**, v.36, p.267 – 274, 04 2003.
- [45] FRANCISCO, P. M. S. B.; DONALISIO, M. R. d. C.; LATTORRE, M. d. R. D. d. O. Tendência da mortalidade por doenças respiratórias em idosos do Estado de São Paulo, 1980 a 1998. **Revista de saúde pública**, v.37, p.191–196, 2003.
- [46] GARRAPPA, R. Trapezoidal methods for fractional differential equations: Theoretical and computational aspects. **Mathematics and Computers in Simulation**, v.110, p.96–112, 2015.
- [47] GARRAPPA, R. Numerical solution of fractional differential equations: A survey and a software tutorial. **Mathematics**, v.6, n.2, p.16, 2018.
- [48] GAURAV, A.; AL-NEMA, M. Polymerases of Coronaviruses: Structure, Function, and Inhibitors. In: **Viral Polymerases**. Elsevier, 2019. p.271–300.
- [49] GOMES, A. C. F. N. **Modelo comportamental sirc fracionário**. Dissertação — Universidade Federal do Rio Grande.
- [50] GOMES, A. C. F. N.; DE CEZARO, A. Estudo da Estabilidade do Modelo Compartimental SIRC Fracionário. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v.6, n.2, 2018.
- [51] GOMES, A. C. F. N.; DE CEZARO, A. Modelo SIRC Fracionario Com Multiplas Ordens Para Influenza. In: CONFERÊNCIA SUL EM MODELAGEM COMPUTACIONAL E SEMINÁRIO E WORKSHOP EM ENGENHARIA OCEÂNICA - FURG, 2018, Rio Grande(RS). **Anais...** 2018.
- [52] GOMES, A. C. F. N.; DE CEZARO, A. Modelo SIRC fracionário com múltiplas ordens para influenza. **Scientia Plena**, v.15, n.4, 2019.
- [53] GOMES, A. C. F. N.; DE CEZARO, A. Modelo SIRC Fracionario: comparação com dados reais. In: I ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL DO VALE DO ITAJAÍ, 2019, Blumenau (SC). **Anais...** 2019.

- [54] GOMES, A. C. F. N.; DE CEZARO, A. Modelo SIRQ para o Sars-Cov-2: uma proposta para populações de diferentes faixas etárias. In: X ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL DO RIO GRANDE DO SUL – ERMAC-RS, 2020, Evento online. **Anais...** 2020.
- [55] GOMES, A. C. F. N.; DE CEZARO, A. On a multi-order fractional SIRC model for Influenza. **CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, p.11–26, 2022.
- [56] GOMES, A. C. F. N.; DE CEZARO, A. A Model of Social Distancing for Interacting Age-Distributed Multi-Populations: An Analysis of Students' In-Person Return to Schools. **Trends in Computational and Applied Mathematics**, v.23, p.655–671, 2022.
- [57] GOMES ANA CARLA FERREIRA NICOLA; MARQUES, J. C. D. C. A. Immunological memory improves long-term cross-immunity: an influenza case study. **Ciência e Natura**, Aceito para publicação.
- [58] GOMES, M. G. M.; WHITE, L. J.; MEDLEY, G. F. Infection, reinfection, and vaccination under suboptimal immune protection: epidemiological perspectives. **Journal of theoretical biology**, v.228, n.4, p.539–549, 2004.
- [59] GRIFONI, A.; WEISKOPF, D.; RAMIREZ, S. I.; MATEUS, J.; DAN, J. M.; MODERBACHER, C. R.; RAWLINGS, S. A.; SUTHERLAND, A.; PREMKUMAR, L.; JADI, R. S. et al. Targets of T cell responses to SARS-CoV-2 coronavirus in humans with COVID-19 disease and unexposed individuals. **Cell**, 2020.
- [60] GROOT, R. J. de; BAKER, S. C.; BARIC, R. S.; BROWN, C. S.; DROSTEN, C.; ENJUANES, L.; FOUCHIER, R. A.; GALIANO, M.; GORBALENYA, A. E.; MEMISH, Z. A. et al. Commentary: Middle east respiratory syndrome coronavirus (mers-cov): announcement of the coronavirus study group. **Journal of virology**, v.87, n.14, p.7790–7792, 2013.
- [61] GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo, vol. 1** . Grupo Gen-LTC, 2012.
- [62] GUZMÁN, M. G.; KOURI, G. Dengue: an update. **The Lancet infectious diseases**, v.2, n.1, p.33–42, 2002.
- [63] HETHCOTE, H. W. The mathematics of infectious diseases. **SIAM review**, v.42, n.4, p.599–653, 2000.
- [64] HINDERER, K.; RIEDER, U.; STIRGLITZ, M. **Dynamic Optimization: Deterministic and Stochastic Models**. Springer, 2017.
- [65] HU, B.; GUO, H.; ZHOU, P.; SHI, Z.-L. Characteristics of SARS-CoV-2 and COVID-19. **Nature Reviews Microbiology**, p.1–14, 2020.

- [66] JESUS, H. S. d.; NASCIMENTO, G. L.; ROSA, F. M.; SANTOS, D. A. d. Investigação de surto de sarampo no Estado do Pará na era da eliminação da doença no Brasil. **Cadernos de Saúde Pública**, v.31, p.2241–2246, 2015.
- [67] JEYANATHAN, M.; AFKHAM, S.; SMAIL, F.; MILLER, M. S.; LICHTY, B. D.; XING, Z. Immunological considerations for COVID-19 vaccine strategies. **Nature Reviews Immunology**, p.1–18, 2020.
- [68] KENDALL, E.; BYNOE, M.; TYRRELL, D. Virus isolations from common colds occurring in a residential school. **British medical journal**, v.2, n.5297, p.82, 1962.
- [69] KERMACK, W.; MCKENDRICK, A. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing papers of a Mathematical and Physical Character**, v.115, n.772, p.700–721, 1927.
- [70] KHADER, M.; BABATIN, M. M. Numerical treatment for solving fractional SIRC model and influenza A. **Computational and Applied Mathematics**, v.33, n.3, p.543–556, 2014.
- [71] KHAN, Z.; KARATAŞ, Y.; RAHMAN, H. Anti COVID-19 Drugs: Need for More Clinical Evidence and Global Action. **Advances in therapy**, p.1, 2020.
- [72] KIRMAN, J. R.; HENAO-TAMAYO, M. I.; AGGER, E. M. The memory immune response to tuberculosis. **Tuberculosis and the Tubercle Bacillus**, p.95–115, 2017.
- [73] KOOL, B. W.; AGUIAR, M.; STOLLENWERK, N. Analysis of an asymmetric two-strain dengue model. **Mathematical biosciences**, v.248, p.128–139, 2014.
- [74] LAZO, M. J.; DE CEZARO, A. Why can we observe a plateau even in an out of control epidemic outbreak? A SEIR model with the interaction of n distinct populations for Covid-19 in Brazil. **Trends in Computational and Applied Mathematics**, v.22, n.1, p.109–121, 2021.
- [75] LENZI, L.; MELLO, Â. M. d.; SILVA, L. R. d.; GROCHOCKI, M. H. C.; PONTAROLO, R. Influenza pandêmica A (H1N1) 2009: fatores de risco para o internamento. **Jornal Brasileiro de Pneumologia**, v.38, n.1, p.57–65, 2012.
- [76] LI, H.; GUO, S. Dynamics of a SIRC epidemiological model. **Electronic Journal of Differential Equations**, v.2017, p.1–18, 2017.
- [77] LIOUVILLE, J. Mémoire sur le théorème des fonctions complémentaires. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, v.1834, n.11, p.1–19, 1834.
- [78] LUK, H. K.; LI, X.; FUNG, J.; LAU, S. K.; WOO, P. C. Molecular epidemiology, evolution and phylogeny of SARS coronavirus. **Infection, Genetics and Evolution**, v.71, p.21–30, 2019.

- [79] MACHHI, J.; HERSKOVITZ, J.; SENAN, A. M.; DUTTA, D.; NATH, B.; OLEYNIKOV, M. D.; BLOMBERG, W. R.; MEIGS, D. D.; HASAN, M.; PATEL, M. et al. The natural history, pathobiology, and clinical manifestations of SARS-CoV-2 infections. **Journal of Neuroimmune Pharmacology**, p.1–28, 2020.
- [80] MARQUES, J. C. **Modelos para dispersão de javalis (*Sus scrofa*)**. 2019. Tese — Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- [81] MARQUES, J. C.; DE CEZARO, A.; LAZO, M. J. A SIR Model with Spatially Distributed Multiple Populations Interactions for Disease Dissemination. **Trends in Computational and Applied Mathematics**, v.23, n.1, p.143–154, 2022.
- [82] MARQUES, J. C.; DE CEZARO, A.; LAZO, M. J. On an emerging plateau in a multi-population SIR model. **preprint**, n.1, p.1–21, 2023.
- [83] MARQUES, J. C.; GOMES, A. C. F. N.; DE CEZARO, A. A NUMERICAL STUDY OF THE EFFECT OF POPULATIONS INTERACTION ON DISEASE DISSEMINATION AND IN THE CROSS IMMUNITY. **Revista Mundi Engenharia, Tecnologia e Gestão**, v.Aceito para publicação, 2023.
- [84] MARQUES, J. C.; GOMES; NICOLA, A. C. F.; DE CEZARO, A. A numerical study of the effect of population interaction on disease dissemination and cross immunity. In: ENCONTRO NACIONAL DE MODELAGEM COMPUTACIONAL, ENCONTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE MATERIAIS, CONFERÊNCIA SUL EM MODELAGEM COMPUTACIONAL E SEMINÁRIO E WORKSHOP EM ENGENHARIA OCEÂNICA. UFPEL / FURG / UNIPAMPA, 2022, Pelotas(RS). **Anais...** 2022.
- [85] MESQUITA JÚNIOR, D.; ARAÚJO, J. A. P.; CATELAN, T. T. T.; SOUZA, A. W. S. d.; CRUVINEL, W. d. M.; ANDRADE, L. E. C.; SILVA, N. P. d. Sistema imunitário-parte II: fundamentos da resposta imunológica mediada por linfócitos T e B. **Revista Brasileira de Reumatologia**, 2010.
- [86] NASCIMENTO, L. B. d.; OLIVEIRA, P. d. S.; MAGALHÃES, D. d. P.; FRANÇA, D. D. d. S.; MAGALHÃES, A. L. Á.; SILVA, J. B.; SILVA, F. P. A. d.; LIMA, D. M. Caracterização dos casos suspeitos de dengue internados na capital do estado de Goiás em 2013: período de grande epidemia. **Epidemiologia e Serviços de Saúde**, v.24, p.475–484, 2015.
- [87] NEVES, D. C. d. O.; LOUREIRO, L. d. O.; PAIVA, N. P.; OHNISHI, M. D. d. O.; RIBEIRO, C. D. T. Análise do Programa de Controle da Tuberculose no estado do Pará, Brasil, de 2005 a 2014. **Revista Pan-Amazônica de Saúde**, v.9, n.4, p.47–56, 2018.
- [88] NISHIURA, H. et al. Mathematical and statistical analyses of the spread of Dengue. , 2006.

- [89] ODIBAT, Z. M.; SHAWAGFEH, N. T. Generalized Taylor's formula. **Applied Mathematics and Computation**, v.186, n.1, p.286–293, 2007.
- [90] OLIVEIRA, A. F. C. d. S.; OLIVEIRA, A. S. d.; GOMES, A. P.; SIQUEIRA-BATISTA, R.; HONDA, E. R.; SILVA, C. C. d.; OLIVEIRA, L. L. d.; SILVA, E. d. A. M. d.; PAULA, S. O. d. Investigação de surto de hepatite A no Município de Ibiracatu, Estado de Minas Gerais, Brasil, 2008. **Epidemiologia e Serviços de Saúde**, v.21, n.4, p.627–634, 2012.
- [91] ORTIGUEIRA, M. D.; MACHADO, J. T. What is a fractional derivative? **Journal of computational Physics**, v.293, p.4–13, 2015.
- [92] PEASE, C. M. An evolutionary epidemiological mechanism, with applications to type A influenza. **Theoretical population biology**, v.31, n.3, p.422–452, 1987.
- [93] PIMENOV, A.; KELLY, T. C.; KOROBENNIKOV, A.; OCALLAGHAN, M. J.; POKROVSKII, A. V.; RACHINSKII, D. Memory effects in population dynamics: spread of infectious disease as a case study. **Mathematical Modelling of Natural Phenomena**, v.7, n.3, p.204–226, 2012.
- [94] POOSEH, S.; RODRIGUES, H. S.; TORRES, D. F. Fractional derivatives in dengue epidemics. In: AIP CONFERENCE PROCEEDINGS, 2011. **Anais...** 2011. v.1389, n.1, p.739–742.
- [95] REID, A. H.; TAUBENBERGER, J. K.; FANNING, T. G. The 1918 Spanish influenza: integrating history and biology. **Microbes and infection**, v.3, n.1, p.81–87, 2001.
- [96] REIS, A. C.; SANTOS, E. M. d.; CRUZ, M. M. d. A mortalidade por aids no Brasil: um estudo exploratório de sua evolução temporal. **Epidemiologia e Serviços de Saúde**, v.16, n.3, p.195–205, 2007.
- [97] RIBEIRO, A. F. Influenza: trajetória no século XX. **BEPA. Boletim Epidemiológico Paulista (Online)**, v.4, n.41, p.13–20, 2007.
- [98] RIBEIRO, I. G.; ANDRADE, M. R. d.; SILVA, J. d. M.; SILVA, Z. M.; COSTA, M. A. d. O.; VIEIRA, M. A. d. C.; BATISTA, F. M. d. A.; GUIMARÃES, H.; WADA, M. Y.; SAAD, E. et al. Microcefalia no Piauí, Brasil: estudo descritivo durante a epidemia do vírus Zika, 2015-2016. **Epidemiologia e Serviços de Saúde**, v.27, p.e20163692, 2018.
- [99] RIBEIRO, I. G.; SANCHEZ, M. N. Avaliação do sistema de vigilância da síndrome respiratória aguda grave (SRAG) com ênfase em influenza, no Brasil, 2014 a 2016. **Epidemiologia e Serviços de Saúde**, v.29, p.e2020066, 2020.
- [100] RICHARD, H. **Fractional calculus: an introduction for physicists**. World Scientific, 2014.

- [101] RODRIGUES, F. G.; OLIVEIRA, E. de. Introdução às técnicas do cálculo fracionário para estudar modelos da física matemática. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v.37, n.3, p.3305–1, 2015.
- [102] ROSS, B. The development of fractional calculus 1695–1900. **Historia Mathematica**, v.4, n.1, p.75–89, 1977.
- [103] ROSS, B. **Fractional calculus and its applications**: proceedings of the international conference held at the University of New Haven, June 1974. Springer, 2006. v.457.
- [104] ROSS, R. **Report on the Prevention of Malaria in Mauritius**. Waterlow, 1908.
- [105] ROSSATO, R. **Extensões da Equação de Difusão: Soluções**. 2011. Tese — Universidade Estadual de Maringá.
- [106] ROUQUAYROL, M. Z. Epidemiologia & Saúde. M. Zélia. **Cad. Saúde Públ**, v.11, n.1, p.149–157, 1995.
- [107] ROY, M.; SON, A.; MAY, R. M. Directly transmitted infectious diseases: control by vaccination. **Science**, v.215, n.26, p.492, 1982.
- [108] RUDIN, W. et al. **Principles of mathematical analysis**. McGraw–hill New York, 1964. v.3.
- [109] SANTOS, J. P. C. dos et al. Cálculo de Ordem Fracionária e Aplicações. **Sigmae**, v.1, n.1, p.18–32, 2012.
- [110] SANTOS, J. P. C. dos; MONTEIRO, E.; VIEIRA, G. B. Global stability of fractional SIR epidemic model. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v.5, n.1, 2017.
- [111] SANTOS, M. A. dos. Fractional Prabhakar derivative in diffusion equation with non-static stochastic resetting. **Physics**, v.1, n.1, p.40–58, 2019.
- [112] SHEREEN, M. A.; KHAN, S.; KAZMI, A.; BASHIR, N.; SIDDIQUE, R. COVID-19 infection: origin, transmission, and characteristics of human coronaviruses. **Journal of Advanced Research**, 2020.
- [113] SILVA, C. P. da; MACEDO QUININO, L. R. de; REGO, C. P. do; FREIRE-SILVA, J. Um estudo bibliográfico acerca dos surtos de Febre Amarela no Brasil. **Revista Brasileira de Meio Ambiente**, v.2, n.1, 2018.
- [114] SILVA, M. I. da; MARQUES, J. C.; CONZA, A. O.; DE CEZARO, A.; GOMES, A. C. F. N. The Stiffness Phenomena for the Epidemiological SIR Model: a Numerical Approach. **Latin-American Journal of Computing**, v.10, n.2, p.32–445, 2023.

- [115] SOARES, S. C. d. S.; JANAÚ, L. T. d. A. O suporte ventilatório no tratamento da Influenza A H1N1 em Unidade de Terapia Intensiva. **Revista Pan-Amazônica de Saúde**, v.2, n.1, p.79–84, 2011.
- [116] SOTOMAYOR, J. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979. v.11.
- [117] SOUZA, W. M. de; BUSS, L. F.; SILVA CANDIDO, D. da; CARRERA, J. P.; LI, S.; ZAREBSKI, A.; VINCENTI-GONZALEZ, M.; MESSINA, J.; SILVA SALES, F. C. da; SANTOS ANDRADE, P. dos et al. Epidemiological and clinical characteristics of the early phase of the COVID-19 epidemic in Brazil. **medRxiv**, 2020.
- [118] STARR, T. N.; GREANEY, A. J.; HILTON, S. K.; ELLIS, D.; CRAWFORD, K. H.; DINGENS, A. S.; NAVARRO, M. J.; BOWEN, J. E.; TORTORICI, M. A.; WALLS, A. C. et al. Deep mutational scanning of SARS-CoV-2 receptor binding domain reveals constraints on folding and ACE2 binding. **Cell**, v.182, n.5, p.1295–1310, 2020.
- [119] SWEILAM, N.; AL-MEKHLAFI, S. Comparative study for multi-strain tuberculosis (TB) model of fractional order. **Journal of Applied Mathematics and Information Sciences**, v.10, n.4, p.1403–1413, 2016.
- [120] SWEILAM, N.; AL-MEKHLAFI, S.; BALEANU, D. Optimal control for a fractional tuberculosis infection model including the impact of diabetes and resistant strains. , 2019.
- [121] TCHUENCHE, J.; KHAMIS, S.; AGUSTO, F.; MPESHE, S. Optimal control and sensitivity analysis of an influenza model with treatment and vaccination. **Acta biotheoretica**, v.59, n.1, p.1–28, 2011.
- [122] TEODORO, G.; OLIVEIRA, D.; OLIVEIRA, E. Sobre derivadas fracionárias. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v.40, n.2, 2018.
- [123] VIGILÂNCIA EPIDEMIOLÓGICA, G. de; FILARIOSE LINFÁTICA, E. da. Ministério da Saúde. **Secretaria de Vigilância em Saúde. Série A normas e manuais técnicos. 6ª ed. Brasília (DF): Editora MS**, 2005.
- [124] WALDMAN, E. A. Vigilância como prática de saúde pública. **Campos GWS et al, org. Tratado de saúde coletiva. Rio de Janeiro: Fiocruz**, p.487–528, 2006.
- [125] WANG, D.; HU, B.; HU, C.; ZHU, F.; LIU, X.; ZHANG, J.; WANG, B.; XIANG, H.; CHENG, Z.; XIONG, Y. et al. Clinical characteristics of 138 hospitalized patients with 2019 novel coronavirus-infected pneumonia in Wuhan, China. **Jama**, v.323, n.11, p.1061–1069, 2020.
- [126] WANG, S.; XU, M.; LI, X. Green's function of time fractional diffusion equation and its applications in fractional quantum mechanics. **Nonlinear Analysis: Real World Applications**, v.10, n.2, p.1081–1086, 2009.

- [127] WANG, Z.; HUANG, X.; SHI, G. Analysis of nonlinear dynamics and chaos in a fractional order financial system with time delay. **Computers & Mathematics with Applications**, v.62, n.3, p.1531–1539, 2011.
- [128] WERTHEIM, J. O.; CHU, D. K.; PEIRIS, J. S.; POND, S. L. K.; POON, L. L. A case for the ancient origin of coronaviruses. **Journal of Virology**, v.87, n.12, p.7039–7045, 2013.
- [129] YAN, A. W.; ZALOUMIS, S. G.; SIMPSON, J. A.; MCCAWE, J. M. Sequential infection experiments for quantifying innate and adaptive immunity during influenza infection. **PLoS computational biology**, v.15, n.1, p.e1006568, 2019.
- [130] YANG, H. M. Epidemiologia matemática: estudos dos efeitos da vacinação em doenças de transmissão direta. In: **Epidemiologia matemática: estudos dos efeitos da vacinação em doenças de transmissão direta**. 2001.
- [131] YANG, H. M. **Epidemiologia matemática: Estudos dos efeitos da vacinação em doenças de transmissão direta**. Editora da UNICAMP, 2001.
- [132] YANG, H. M.; FERREIRA, C. P. Assessing the effects of vector control on dengue transmission. **Applied Mathematics and Computation**, v.198, n.1, p.401–413, 2008.
- [133] YAQINUDDIN, A. Cross-immunity between respiratory coronaviruses may limit COVID-19 fatalities. **Medical Hypotheses**, v.144, p.110049, 2020.
- [134] YU, X.; TSIBANE, T.; MCGRAW, P. A.; HOUSE, F. S.; KEEFER, C. J.; HICAR, M. D.; TUMPEY, T. M.; PAPPAS, C.; PERRONE, L. A.; MARTINEZ, O. et al. Neutralizing antibodies derived from the B cells of 1918 influenza pandemic survivors. **Nature**, v.455, n.7212, p.532–536, 2008.
- [135] YUKI, K.; FUJIOGI, M.; KOUTSOGIANNAKI, S. COVID-19 pathophysiology: A review. **Clinical Immunology**, p.108427, 2020.
- [136] ZANETTI, M.; FRANCHINI, G. T cell memory and protective immunity by vaccination: is more better? **Trends in immunology**, v.27, n.11, p.511–517, 2006.
- [137] ZHANG, X.-S.; PEBODY, R.; DE ANGELIS, D.; WHITE, P. J.; CHARLETT, A.; MCCAULEY, J. W. The Possible Impact of Vaccination for Seasonal Influenza on Emergence of Pandemic Influenza via Reassortment. **PloS one**, v.9, n.12, p.e114637, 2014.

6 APÊNDICES

6.1 Aporte teórico do Cálculo Fracionário

A história do Cálculo de Ordem Arbitrária, popularmente conhecido como Cálculo Fracionário, se funde com a história do Cálculo Diferencial e Integral clássico. Segundo [25, 102], sua primeira aparição é em uma carta escrita por L'Hospital ao seu amigo Leibniz, em 1695, na qual o significado de uma derivada de ordem $\frac{1}{2}$ é proposto e discutido. Anos depois da resposta de Leibniz, alguns matemáticos como Euler, Laplace, Lacroix e Fourier [105], iniciaram as primeiras discussões teóricas sobre o Cálculo Fracionário. Contudo, como a maioria das construções matemáticas, seus desenvolvimentos iniciais limitavam-se ao campo da matemática pura, sem grandes aplicações em outras áreas [24]. Só em 1823 Niels Henri Abel [1] fez a primeira aplicação utilizando o Cálculo Fracionário à solução de uma equação integral advinda do problema da tautócrona. Posteriormente, Joseph Liouville [77], provavelmente atraído pelos estudos de Abel, propôs uma das primeiras definições de uma derivada de ordem arbitrária [77]. Além disso, Liouville foi uma das primeiras pessoas a tentar resolver equações diferenciais por meio da operação fracionárias, mas sua definição tinha limitações para tanto.

A partir daí os avanços passaram a ser significativos. Destaca-se a unificação da definição de derivadas fracionárias abordadas por Riemann e Liouville, por Grünwald, no ano de 1867 [104], e que podem ser consideradas como uma generalização do cálculo clássico as quais serão discutidas em mais detalhes na Seção 6.2. Em 1969, Michele Caputo propôs uma nova definição para derivada de ordem arbitrária, a fim de resolver um problema de viscoelasticidade, e.g., [122], veremos em detalhes na Seção 6.3. Posteriormente, em 1992, Caputo fez outras contribuições relevantes com relação a soluções de equações diferenciais fracionárias com condições iniciais aplicadas a problemas de sismologia [26].

Existem muitas definições de operadores fracionários na literatura. Podemos citar: Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov, Hilfer, Weyl, Hadamard, Caputo-Hadamard e Caputo-Fabrizio entre outras [122], porém nem todas serão enunciadas nessa proposta. Abordamos mais profundamente neste trabalho as derivadas fracionárias no sentido de Riemann-Liouville. Esta que por uma questão histórica, é a mais difundida na literatura. E abordaremos a definição no sentido de Caputo, haja vista que essa abordagem é mais conveniente para um problema físico contendo condições iniciais e/ou de contorno, ambas definidas em termos da integral fracionária.

Mesmo no cálculo clássico, temos uma relação muito estreita entre o operador diferencial e o operador integral. É um dos objetivos do cálculo fracionário manter essa relação em um sentido adequadamente generalizado. Inicialmente será feito a formalização da integral fracionária segundo Riemann-Liouville. Em seguida, a definição de derivada fracionária será feita a partir das ideias de Riemann-Liouville e também de Caputo.

Definição 6.1.1. *Denotamos por D o operador que mapeia uma função diferenciável em sua derivada, de forma que*

$$Df(t) = f'(t).$$

Definiremos o operador J_a para funções integráveis definidas em conjuntos compactos e sua primitiva centrada em a , de forma que

$$J_a f(t) = \int_a^t f(s) ds,$$

para $a \leq t \leq b$. Para $\theta \in \mathbb{N}$, usaremos o símbolo D^θ e J_a^θ para denotar a θ -ésima iterada de D e J_a , respectivamente. Assim, $D^\theta := DD^{\theta-1}$, com $D^1 = D$ e $J_a^\theta = J_a J_a^{\theta-1}$, com $J_a^1 = J_a$.

Alguns resultados que seguem diretamente da definição do operador de derivação e de integração, por isso não será demonstrado, são os seguintes:

Lema 6.1.1. *Seja f uma função integrável em $[a, b]$. Então, para qualquer $a \leq t \leq b$ temos*

$$J_a^\theta f(t) = \frac{1}{(\theta-1)!} \int_a^t (t-s)^{\theta-1} f(s) ds. \quad (6.1.1)$$

Sejam $\eta > \theta$, com $\eta, \theta \in \mathbb{N}$. Para qualquer função f que possui θ -ésima derivadas contínua em $[a, b]$ vale

$$D^\theta f = D^\eta J_a^{\eta-\theta} f. \quad (6.1.2)$$

O cálculo de ordem fracionária busca a generalização do resultado acima, para $\theta \notin \mathbb{N}$. Para isso, partiremos do Lema 6.1.1, notando a necessidade de generalizar a noção de fatorial. Isso é feito com a função Gamma de Euler definida como a seguir:

Definição 6.1.2. *A função $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, conhecida como função Gamma de Euler, é definida por:*

$$\Gamma(t) := \int_0^\infty s^{t-1} e^{-s} ds. \quad (6.1.3)$$

Maiores resultados e discussões sobre a função Gamma de Euler podem ser encontrados em [25, 39, 100].

Definição 6.1.3 (Função de Mittag-Leffler). *Considere a definição da função Gamma de Euler definida em 6.1.2. Então, a função*

$$E_\theta(z) := \sum_{j=0}^{\infty} z^j (\Gamma(j\theta + 1))^{-1} \quad (6.1.4)$$

é conhecida como a função de Mittag-Leffler de ordem θ .

Seja $\theta_1, \theta_2 > 0$, a função E_{θ_1, θ_2} definida por

$$E_{\theta_1, \theta_2}(z) := \sum_{j=0}^{\infty} z^j (\Gamma(j\theta_1 + \theta_2))^{-1} \quad (6.1.5)$$

é conhecida como a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros pode ser escrita
 E a chamada função de Mittag-Leffler com multi parâmetros

$$E_{(\theta_{11}, \theta_{12}, \dots, \theta_{1k}), (\theta_{21}, \theta_{22}, \dots, \theta_{2k})}(z) := \sum_{j=0}^{\infty} z^j \prod_{n=1}^k (\Gamma(j\theta_{1n} + \theta_{2n}))^{-1} \quad (6.1.6)$$

Uma propriedade importante da função de Mittag-Leffler $E_{\theta}(z)$ é o seu comportamento assintótico, discutido no lema a seguir.

Lema 6.1.2. [39, Teorema 4.4] *Seja $\theta \in \mathbf{R}_+$. Então, a função de Mittag-Leffler (6.1.4) satisfaz:*

- i) A função $E_{\theta}(re^{i\phi}) \Rightarrow 0$ para $r \Rightarrow \infty$ se $|\phi| > \frac{\theta\pi}{2}$;
- ii) A função $E_{\theta}(re^{i\phi})$ permanece limitada para $r \Rightarrow \infty$, if $|\phi| = \frac{\theta\pi}{2}$;
- iii) A função $|E_{\theta}(re^{i\phi})| \Rightarrow \infty$ para $r \Rightarrow \infty$ if $|\phi| < \frac{\theta\pi}{2}$.

Com o passar dos anos muitas definições de operadores de derivada de ordem arbitrária surgiram, assim, os pesquisadores da área decidiram que estes deveriam cumprir alguns critérios. O primeiro a formular foi Ross, em 1975 [103], definindo cinco itens os quais um operador de derivada deveria cumprir e quarenta anos depois, em 2015, [91] propuseram uma reformulação desse critério, também, composto por cinco itens:

- 1) A derivada de uma função analítica é analítica;
- 2) Quando a ordem é inteira, a derivada fracionária (D) dá o mesmo resultado que a derivada comum.
- 3) A derivada de ordem zero de uma função retorna a própria função.
- 4) O operador deve ser linear.
- 5) A lei do índice é válida (onde α e β são a ordem da derivada), ou seja,

$$D^{\theta_1} D^{\theta_2} f(t) = D^{\theta_1 + \theta_2} f(t) \quad \text{para } \theta_1 > 0 \text{ e } \theta_2 > 0. \quad (6.1.7)$$

Nas próximas seções 6.2 e 6.3 respectivamente, definiremos as derivadas de ordem fracionária segundo Riemann-Liouville e Caputo.

6.2 Derivadas Fracionárias Segundo Riemann-Liouville

A definição, segundo Riemann-Liouville, para derivadas de ordem fracionária é usada na resolução de diversos problemas físicos [39], como os apresentados em [100]. Porém a definição permeia a ideia da primitização, ou seja, no fato que a derivada é a operação inversa da integral, como sugere o Teorema Fundamental do Cálculo [61]. Em resumo, podemos considerar que a

derivada de ordem fracionária segundo Riemann-Liouville, nada mais é que a derivada de ordem inteira de uma determinada integral de ordem fracionária [39]. Primeiramente apresentaremos a definição de funções integráveis segundo Lebesgue, interessantes para essa proposta.

Definição 6.2.1. *Seja $1 \leq q < \infty$. Denotaremos por $L_q[a, b]$ o espaço das funções q integráveis segundo Lebesgue: $L_q[a, b] := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ é mensurável em } [a, b] \text{ e } \int_a^b |f(s)|^q ds < \infty\}$.*

Passaremos à motivação da definição da integral fracionária, que surgiu através do seguinte conceito: Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua por partes no intervalo $I := [0, \infty)$ e integrável em I . Denotamos por $Jf(t)$ o seguinte operador integral.

$$Jf(t) = \int_0^t f(s)ds, \quad (6.2.1)$$

e por

$$J^k f(t) = J(J^{k-1} f(t)),$$

a composição do operador J , k vezes, para $k \in \mathbb{N}$.

Observamos que:

$$J^2 f(t) = JJf(t) = \int_0^t Jf(s)ds = \int_0^t \int_0^s f(v)dvds.$$

Pelo Teorema de Fubini [109], temos:

$$J^2 f = \int_0^t \int_0^s f(v)dvds = \int_0^t \left(\int_v^t f(v)ds \right) dv = \int_0^t f(v)(t-v)dv.$$

Analogamente,

$$J^3 f = \int_0^t \int_0^s f(m)(s-m)dm ds = \int_0^t \int_m^t f(m)(s-m)ds dm = \int_0^t f(m) \frac{(t-m)^2}{2} dm.$$

Usando esse procedimento sucessivamente, obtemos a seguinte expressão para integral com o operador $J^\theta f$:

$$J^\theta f = \int_0^t \frac{(t-s)^{\theta-1}}{(\theta-1)!} f(s)ds. \quad (6.2.2)$$

Agora, utilizando a definição da função $\Gamma(\theta)$ e suas propriedades, podemos escrever a integral (6.2.2) como:

$$J^\theta f = \int_0^t \frac{(t-s)^{\theta-1}}{\Gamma(\theta)} f(s)ds = \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} f(s)ds. \quad (6.2.3)$$

Sabendo que (6.2.3) é contínua e está bem definida para $\theta \in \mathbb{R}_+$. Assim, surgiu a integral fracionária segundo Riemann-Liouville.

Definição 6.2.2. (*Integral de ordem fracionária segundo Riemann- Liouville*) Dado $\theta \in \mathbb{R}_+$ e $f(t) \in L_1[a, b]$, o operador da integral fracionária segundo Riemann-Liouville, denotado por J_a^θ , é dado por,

$$J_a^\theta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_a^t (t-s)^{(\theta-1)} f(s) ds \quad (6.2.4)$$

onde $a \leq t \leq b$.

Definindo a função $\Phi_\theta = \frac{t^{\theta-1}}{\Gamma(\theta)}$, para $t > 0$ e fazendo o produto de convolução entre as funções f e ϕ , temos:

$$(\phi_\theta * f)(t) = \int_0^t \phi_\theta(t-s) f(s) ds = \int_0^t \frac{(t-s)^{\theta-1}}{\Gamma(\theta)} f(s) ds = J^\theta f(t). \quad (6.2.5)$$

Portanto, a definição da integral pode ser interpretada como o produto de convolução entre as funções ϕ_θ e f .

Teorema 6.2.1. *Sejam $\theta, \eta \geq 0$, então temos que $J^\theta J^\eta = J^{(\theta+\eta)}$. Em particular vale propriedade comutativa $J^\theta J^\eta = J^\eta J^\theta$.*

Demonstração. Seja f uma função suficientemente suave. Pela relação (6.2.5) temos:

$$(J^\theta f)(t) = \phi_\theta(t) * f(t). \quad (6.2.6)$$

Vamos verificar que:

$$\phi_\theta(t) * \phi_\eta(t) = \phi_{\theta+\eta}(t).$$

De fato,

$$\phi_\theta(t) * \phi_\eta(t) = \int_0^t \frac{(t-y)^{(\theta-1)}}{\Gamma(\theta)} \frac{y^{\eta-1}}{\Gamma(\eta)} dy = \int_0^t \frac{t^{\theta-1} \left(1 - \frac{y}{t}\right)^{(\theta-1)}}{\Gamma(\theta)} \frac{y^{\eta-1}}{\Gamma(\eta)} dy. \quad (6.2.7)$$

Seja $u = \frac{y}{t}$, temos:

$$\begin{aligned} \phi_\theta(t) * \phi_\eta(t) &= \frac{t^{\theta-1}}{\Gamma(\theta)\Gamma(\eta)} \int_0^1 (1-u)^{\theta-1} (ut)^{\eta-1} t du \\ &= \frac{t^{\theta-1}}{\Gamma(\theta)\Gamma(\eta)} \int_1^0 (1-u)^{\theta-1} u^{\eta-1} t^\eta du \\ &= \frac{t^{\theta+\eta-1}}{\Gamma(\theta)\Gamma(\eta)} \int_0^1 (1-u)^{\theta-1} u^{\eta-1} du. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $f = 1 - u$, obtemos:

$$\phi_\theta(t) * \phi_\eta(t) = \frac{t^{\theta+\eta-1}}{\Gamma(\theta)\Gamma(\eta)} \int_0^1 f^{(\theta-1)} (1-f)^{\eta-1} df.$$

Multiplicando e dividindo por $\Gamma(\theta + \eta)$, obtemos:

$$\phi_\theta(t) * \phi_\eta(t) = \frac{t(\theta + \eta - 1)\Gamma(\theta + \eta)}{\Gamma(\theta + \eta)\Gamma(\theta)\Gamma(\eta)} \int_0^1 f^{(\theta-1)}(1-f)^{\eta-1} df. \quad (6.2.8)$$

Considerando a função β definida como $\beta(\theta, \eta) = \frac{\Gamma(\theta)\Gamma(\eta)}{\Gamma(\theta+\eta)} = \int_0^1 f^{(\theta-1)}(1-f)^{\eta-1} df$ e relacionando as funções β e Γ , substituindo em (6.2.8) (Para as relações entre β e Γ consulte [24]), temos:

$$\phi_\theta(t) * \phi_\eta(t) = \frac{t^{(\theta+\eta-1)}}{\Gamma(\theta + \eta)\beta(\theta, \eta)} \beta(\theta, \eta) = \frac{t^{(\theta+\eta-1)}}{\Gamma(\theta + \eta)} = \phi_{\theta+\eta}(t) \quad (6.2.9)$$

Portanto, juntando (6.2.6) e (6.2.9), obtemos:

$$(J^\theta J^\eta f)(t) = \phi_\theta(t) * J^\eta f(t) = \phi_\theta(t) * \phi_\eta(t) * f(t) = \phi_{\theta+\eta}(t) * f(t) = (J^{\theta+\eta} f)(t).$$

□

Após mostrarmos como se comporta o operador integral de ordem fracionária, passaremos à definição da derivada de ordem fracionária segundo Riemann-Liouville. Como veremos, há uma grande diferença para o caso clássico, onde tanto η como θ são inteiros. A principal delas é que agora o operador integral fracionário, definido em (6.1.1) depende da escolha do ponto a , e por conseguinte, a derivada também dependerá desse ponto. Nós, portanto, chegamos à seguinte definição se escolhermos o valor de $\eta = \lceil \theta \rceil$, notação do menor inteiro maior que θ .

Definição 6.2.3. *Seja $\theta \in \mathbb{R}_+$, $f \in C^1[a, b]$ e $\eta = \lceil \theta \rceil$. Definimos o operador derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de ordem $\theta \in \mathbb{R}_+$, denotado por D_a^θ , como*

$$D_a^\theta f(t) = D^\eta J_a^{\eta-\theta} f(t). \quad (6.2.10)$$

O próximo resultado garante sob quais condições a derivada de ordem fracionária segundo Riemann-Liouville está bem definida.

Lema 6.2.2. *Seja $f \in C^1[a, b]$ e $0 < \theta < 1$, então $D_a^\theta f$ existe em quase toda parte em $[a, b]$. Além disso $D_a^\theta f \in L_q[a, b]$ para $1 \leq q \leq \frac{1}{\theta}$ e*

$$D_a^\theta f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\theta)} \left(\frac{f(a)}{(t-a)^\theta} + \int_a^t f'(s)(s-t)^{-\theta} dt \right).$$

Demonstração. Usando a definição da derivada fracionária segundo Riemann-Liouville e $f \in$

C^1 temos

$$\begin{aligned}
 D_a^\theta f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\theta)} \frac{d}{dt} \int_a^t f(s)(s-t)^{-\theta} ds \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1-\theta)} \frac{d}{dt} \int_a^s \left(f(a) + \int_a^t (f'(u)du) \right) (s-t)^{-\theta} dt \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1-\theta)} \frac{d}{ds} \left(f(a) \int_a^s \frac{dt}{(s-t)^\theta} + \int_a^s \int_a^s f'(u)(u-t)^{-\theta} dudt \right) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1-\theta)} \left(\frac{f(a)}{(s-a)^\theta} + \frac{d}{ds} \int_a^s \int_a^s f'(u)(s-t)^{-\theta} dudt \right).
 \end{aligned}$$

Utilizando o teorema de Fubini [109] chegamos no seguinte resultado

$$D_a^\theta f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\theta)} \left(\frac{f(a)}{(s-a)^\theta} + \frac{d}{ds} \int_a^s f'(u) \frac{(s-u)^{1-\theta}}{1-\theta} du \right).$$

□

A declaração de integrabilidade é uma consequência imediata dessa representação utilizando os resultados clássicos da teoria da integração de Lebesgue [108].

Teorema 6.2.3. *Sejam $\theta_1, \theta_2 \geq 0, \varphi \in L_1[a, b]$ e $f = J_a^{\theta_1+\theta_2} \varphi$. Então, temos*

$$D_a^{\theta_1} D_a^{\theta_2} f = D_a^{\theta_1+\theta_2} f. \quad (6.2.11)$$

Demonstração. Primeiramente,

$$D_a^{\theta_1} D_a^{\theta_2} f = D_a^{\theta_1} D_a^{\theta_2} J_a^{\theta_1+\theta_2} \varphi = D^{[\theta_1]} J_a^{[\theta_1]-\theta_1} D^{[\theta_2]} J_a^{[\theta_2]-\theta_2} J_a^{\theta_1+\theta_2} \varphi.$$

Considerando as propriedades do operador integral, obtidas no Teorema 6.2.1, temos que

$$D_a^{\theta_1} D_a^{\theta_2} f = D^{[\theta_1]} J_a^{[\theta_1]-\theta_1} D^{[\theta_2]} J_a^{[\theta_2]+\theta_1} \varphi = D^{[\theta_1]} J_a^{[\theta_1]-\theta_1} D^{[\theta_2]} J_a^{[\theta_2]-\theta_2} J_a^{\theta_1} \varphi.$$

Segundo [39] esse resultado é equivalente a:

$$D_a^{\theta_1} D_a^{\theta_2} f = D^{[\theta_1]} J_a^{[\theta_1]-\theta_1} J_a^{\theta_1} \varphi = D^{[\theta_1]} J_a^{[\theta_1]} \varphi.$$

Utilizando as propriedades do operador integral, temos

$$D_a^{\theta_1} D_a^{\theta_2} f = \varphi,$$

o que implica na demonstração de que $D_a^{\theta_1+\theta_2} f = \varphi$. □

O próximo resultado mostra que a derivada de ordem fracionária é o operador inverso à esquerda do operador integral de ordem fracionária.

Teorema 6.2.4. *Seja $\theta \geq 0$. Para cada $f \in L_1[a, b]$, temos*

$$D_a^\theta J_a^\theta f = f.$$

Demonstração. Usando propriedades de integração e o Teorema 6.2.1, temos:

$$D_a^\theta J_a^\theta f(t) = D^n J^{n-\theta} J_a^\theta f(t) = D^n J_a^n f(t) = f(t).$$

□

Apesar da complexidade da definição, o operador de ordem fracionária compartilha de algumas propriedades importantes dos operadores de derivação de ordem inteira.

Teorema 6.2.5. *O operador de diferenciação fracionária é linear. Em outras palavras, sejam f_1 e f_2 funções em $C^1[a, b]$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ então*

$$D_a^\theta(c_1 f_1 + c_2 f_2) = (c_1 D_a^\theta f_1 + c_2 D_a^\theta f_2).$$

Demonstração. Segue imediata consequência da definição de D_a^θ . □

Exemplo 6.2.6. *Seja $h(t) = 1$ (função constante), então a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de ordem $\frac{1}{2}$ é:*

$$D_t^{\frac{1}{2}}(1) = D^1[J^{\frac{1}{2}}(1)] = D^1 \left[\frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(0-\frac{1}{2}+1)} t^{-\frac{1}{2}+0} \right].$$

Como, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ e $\Gamma(1) = 1$, temos:

$$D_t^{\frac{1}{2}}(1) = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{1}{2})} t^{-\frac{1}{2}} = \frac{(1)t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} = \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \neq 0.$$

Observação 6.2.1. *Podemos observar que a derivada de ordem fracionária segundo Riemann-Liouville de uma constante não é nula, isso implica que essa derivada não pode ser considerada como uma taxa de variação, no sentido usual.*

6.3 Derivadas Fracionárias Segundo Caputo

Na seção anterior, apresentamos a definição da derivada de ordem fracionária segundo Riemann-Liouville, que como já salientado, podemos considerar que nada mais é que, a derivada de ordem inteira de uma integral de ordem fracionária. Nesta seção apresentaremos a definição da derivada de ordem fracionária segundo Caputo. Esta é similar à de Riemann-Liouville, porém invertendo a ordem de integração e derivação, como será mostrado a seguir, em uma definição preliminar:

Definição 6.3.1. *Seja $\theta \in \mathbb{R}_+$, $f \in C^1[a, b]$ e $\eta = \lceil \theta \rceil$. O operador $\hat{D}_a^\theta$, é definido por*

$$\hat{D}_a^\theta f = J_a^{\eta-\theta} D^\eta f, \quad (6.3.1)$$

para qualquer $D^\eta f \in L_1[a, b]$

Os próximos resultados garantem sob quais condições o operador fracionário segundo Caputo está bem definido.

Teorema 6.3.1. *Sejam $\theta \geq 0$, $\eta = \lceil \theta \rceil$ e $f \in C^\eta[b, c]$. Então*

$$\hat{D}_a^\theta f = D_a^\theta (f - T_{\eta-1}[f; a]),$$

onde $T_{\eta-1}[f; a]$ é o polinômio de Taylor de grau $(\eta - 1)$ para f .

Observe que a expressão no lado direito da equação existe se, $D_a^\theta f$ existe e f possui $\eta - 1$ derivadas em a , esta última condição assegura que o polinômio de Taylor existe.

Definição 6.3.2. *(Operador Diferencial de Caputo de Ordem Fracionária) Sejam $\theta \geq 0$ e f seja tal que $D_a^\theta (f - T_{\eta-1}[f; a])$ exista, onde $\eta = \lceil \theta \rceil$. Então,*

$$D_{*a}^\theta f = D_a^\theta (f - T_{\eta-1}[f; a]). \quad (6.3.2)$$

O operador D_{*a}^θ é chamado de operador diferencial de Caputo de ordem θ .

Demonstração. Observe que, para o caso de $\theta \in \mathbb{N}$ a afirmação é trivial. Logo temos que analisar o caso $\theta \notin \mathbb{N}$. Neste caso, consideramos η como o primeiro inteiro tal que $\eta > \theta$. Assim, temos

$$\begin{aligned} D_a^\theta (f - T_{\eta-1}[f; a]) &= D^\eta J_a^{\eta-\theta} (f - T_{\eta-1}[f; a])(t) \\ &= \frac{d^\eta}{ds^\eta} \int_a^s \frac{(s-t)^{\eta-\theta-1}}{\Gamma(\eta-\theta)} (f(t) - T_{\eta-1}[f; a](t)) dt. \end{aligned}$$

Primeiramente, faremos a integração, a qual resulta em

$$\begin{aligned} &\int_a^t \frac{1}{\Gamma(\eta-\theta)} (f(s) - T_{\eta-1}[f; a](s)) (t-s)^{\eta-\theta-1} ds \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\eta-\theta+1)} [(f(s) - T_{\eta-1}[f; a](s)) (t-s)^{\eta-\theta}]_{x=a}^{x=t} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\eta-\theta+1)} \int_a^t (D(f(s)) - D(T_{\eta-1}[f; a](s))) (t-s)^{\eta-\theta} ds. \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

Note que o termo fora da integral é zero (o primeiro fator desaparece no limite inferior, o segundo desaparece no limite superior). Portanto, Equação 6.3.3 é zero. Assim,

$$J_a^{\eta-\theta} (f - T_{\eta-1}[f; a]) = J_a^{\eta-\theta+1} D(f - T_{\eta-1}[f; a])$$

Repetindo este processo um número total de η vezes resulta em

$$J_a^{\eta-\theta} (f - T_{\eta-1}[f; a]) = J_a^{2\eta-\theta} D^\eta (f - T_{\eta-1}[f; a]) = J_a^\eta J_a^{\eta-\theta} D^\eta (f - T_{\eta-1}[f; a]).$$

Observe que $D^\eta T_{\eta-1}[f; a] \equiv 0$ porque $T_{\eta-1}[f; a]$ é um polinômio de grau $\eta - 1$. Logo

$$J_a^{\eta-\theta} (f - T_{\eta-1}[f; a]) = J_a^\eta J_a^{\eta-\theta} D^\eta f.$$

Segue do Teorema 6.3.1 que

$$D_a^\theta (f - T_{\eta-1}[f; a]) = D^\eta J_a^\eta J_a^{\eta-\theta} D^\eta f = J_a^{\eta-\theta} D f = \hat{D}_a^\theta f.$$

□

Os próximos resultados estabelecem relações entre as derivadas de ordem fracionária de Riemann-Liouville e Caputo.

Lema 6.3.2. *Sejam $\theta \geq 0$ e $\eta = \lceil \theta \rceil$. Supondo que f seja uma função de tal modo que ambos $D_{*a}^\theta f$ e $D_a^\theta f$ existam. Então,*

$$D_{*a}^\theta f(t) = D_a^\theta f - \sum_{k=0}^{\eta-1} \frac{D^k f(a)}{\Gamma(k - \theta + 1)} (t - a)^{k-\theta}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} D_{*a}^\theta f(t) &= D_a^\theta f - \sum_{k=0}^{\eta-1} \frac{D^k f(a)}{k!} D_a^\theta ((\cdot - a)^k)(t) \\ &= D_a^\theta f(t) - \sum_{k=0}^{\eta-1} \frac{D^k f(a)}{\Gamma(k - \theta + 1)(t - a)^{k-\theta}}. \end{aligned}$$

□

Lema 6.3.3. *Assumindo as mesmas hipóteses do lema anterior, temos:*

$$D_a^\theta f = D_{*a}^\theta f$$

se e somente se f possui η derivadas nulas em um dado ponto a e $D^k f(a) = f(0)$ se $k = 0, 1, \dots, \eta - 1$.

Demonstração. Segue de uma adaptação simples das contas feitas no Lema 6.3.2. □

O próximo resultado mostra que o operador derivada de ordem fracionária de Caputo é a inversa a esquerda do operador de integração de ordem fracionária.

Teorema 6.3.4. *Se f for contínua em $\theta \geq 0$, então*

$$D_{*a}^\theta J_a^\theta f = f.$$

Demonstração. Assumindo que $\varphi = J_a^\theta f$ e utilizando o Teorema 6.2.1, temos $D^k \varphi(a) = 0$ para $k = 0, 1, \dots, \eta - 1$. Considerando agora o lema anterior e o Teorema 6.2.3, temos que,

$$D_{*a}^\theta J_a^\theta f = D_{*a}^\theta \varphi = D_a^\theta \varphi = D_a^\theta J_a^\theta f = f.$$

□

Lema 6.3.5. *Seja $f \in C^k[a, b]$, $a < b$ e $k \in \mathbb{N}$. Sejam $\theta, \varepsilon > 0$ tal que existe $l \in \mathbb{N}$ com $l \leq k$ e $\theta, \theta + \varepsilon \in [l - 1, l]$, então*

$$D_{*a}^\varepsilon D_{*a}^\theta f = D_{*a}^{\theta+\varepsilon} f.$$

Demonstração. Para detalhes da demonstração veja [37, Lema 3.13, pág 57]. □

A seguir provaremos que, como a derivada de ordem fracionária de Riemann-Liouville, a derivada de ordem fracionária segundo Caputo é um operador linear.

Teorema 6.3.6. *Sejam as funções $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, onde $D_{*a}^\theta f_1$ e $D_{*a}^\theta f_2$ existem em quase toda parte e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, então*

$$D_{*a}^\theta (c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 D_{*a}^\theta f_1 + c_2 D_{*a}^\theta f_2.$$

Demonstração. Tal propriedade e a linearidade do operador diferencial fracionário são consequências imediatas da definição de D_{*a}^θ . □

Apresentaremos a seguir um exemplo de como calcular derivadas de ordem fracionária segundo Caputo.

Exemplo 6.3.7. *Seja $h(t) = 1$ (função constante), então a derivada fracionária segundo Caputo de ordem $\frac{1}{2}$ é:*

$$D_{*a}^{\frac{1}{2}}(1) = J^{\frac{1}{2}}(D^1(1)) = J^{\frac{1}{2}}(0) = 0.$$

Observação 6.3.1. *A derivada de ordem fracionária segundo Caputo de uma constante é nula.*

6.4 Boa Colocação para PVI's com Derivadas de Ordem Fracionária

Agora apresentaremos as condições necessárias e suficientes para obter resultados de boa colocação para sistemas de equações com derivadas de ordem fracionárias segundo Caputo. Ou seja, mostrar existência, unicidade e dependência contínua da solução do Problema de Valor Inicial (PVI) (6.4.1).

6.4.1 Existência

Definição 6.4.1. *O PVI com derivadas de ordem fracionária segundo Caputo é escrito da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} D_{*0}^\theta u(t) &= f(t, u(t)), \\ D^k u(0) &= u_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \eta - 1 \end{aligned} \quad (6.4.1)$$

como condições iniciais, onde operador diferencial de ordem fracionária segundo Caputo é D_{*0}^θ como definido na Seção 6.3.1.

Teorema 6.4.1. *Sejam $0 < \theta$ e $\eta = \lceil \theta \rceil$, $(u_0^0, \dots, u_0^{\eta-1}) \in \mathbb{R}^n$, $k > 0$ e $h^* > 0$. Seja $G := \left\{ (t, u) : t \in [0, h^*], \left| u - \sum_{k=0}^{\eta-1} \frac{t^k u_0^k}{k!} \right| \leq k \right\}$. a função $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, $M := \sup_{(t,z) \in G} |f(t, z)|$ e*

$$h := \begin{cases} h^* & , \quad \text{se } M = 0, \\ \min \left\{ h^*, \frac{(k\Gamma(\theta+1))^{\frac{1}{\theta}}}{M} \right\} & , \quad \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6.4.2)$$

Então, existe uma função $u \in C[0, h]$ solução do problema de valor inicial definido em (6.4.1).

Demonstração. No caso em que $M = 0$, temos que $f(t, u) = 0$ para todos $(t, u) \in G$. Portanto, a função $u : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $u(t) = \sum_{k=0}^{\eta-1} \frac{u_0^{(k)} t^{(k)}}{k!}$ é solução do PVI (6.4.1).

Assim, apresentamos o polinômio T que satisfaz as condições iniciais, tal que

$$T(t) := \sum_{k=0}^{\eta-1} \frac{t^k}{k!} u_0^{(k)}, \quad (6.4.3)$$

e o conjunto $U := \{u \in C[0, h] : \|u - T\|_\infty \leq K\}$. É evidente que U é um subconjunto fechado e convexo do espaço de Banach de todas as funções contínuas em $[0, h]$, com a norma de Chebyshev. Portanto, U também é um espaço de Banach [39]. Como o polinômio T é um elemento de U , vemos também que U é não vazio. Sobre este conjunto U , definimos o operador A por

$$(Au)(t) := T(t) + \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} f(s, u(s)) ds \quad (6.4.4)$$

Usando esse operador, a equação cuja solvabilidade precisamos provar pode ser reescrita como $u = Au$. E assim, a fim de provar o nosso resultado desejado de existência, temos de mostrar que o operador A possui um ponto fixo. Portanto, o próximo passo é investigar as propriedades do operador A mais de perto.

Afirmação 1: $Au \in U$ para qualquer $u \in U$. De fato, seja $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq u$, então:

$$\begin{aligned}
 |Au(t_1) - Au(t_2)| &= \frac{1}{\Gamma(\theta)} \left| \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\theta-1} f(s, u(s)) ds - \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\theta-1} f(s, u(s)) ds \right| \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\theta)} \left| \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\theta-1} - (t_2 - s)^{\theta-1} f(s, u(s)) ds \right. \\
 &\quad \left. + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\theta-1} f(s, u(s)) ds \right| \\
 &\leq \frac{M}{\Gamma(\theta)} \left(\int_0^{t_1} |(t_1 - s)^{\theta-1} - (t_2 - s)^{\theta-1}| ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\theta-1} ds \right).
 \end{aligned}$$

Note que a segunda integral no lado direito da equação acima tem o valor $\frac{(t_2 - t_1)^\theta}{\theta}$. Para a primeira integral, olhamos para os três casos $\theta = 1$, $\theta < 1$ e $\theta > 1$, separadamente. Para $\theta = 1$, o integrando é identicamente nulo, e, portanto, a integral tem o valor zero. Para $\theta < 1$, temos $\theta - 1 < 0$ e, portanto, $(t_1 - s)^{\theta-1} \geq (t_2 - s)^{\theta-1}$. Assim,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{t_1} |(t_1 - s)^{\theta-1} - (t_2 - s)^{\theta-1}| ds &= \int_0^{t_1} ((t_1 - s)^{\theta-1} - (t_2 - s)^{\theta-1}) ds \\
 &= \frac{1}{\theta} (t_1^\theta - t_2^\theta + (t_2 - t_1)^\theta) \\
 &\leq \frac{1}{\theta} (t_2 - t_1)^\theta.
 \end{aligned}$$

Finalmente, se $\theta > 1$ então $(t_1 - s)^{\theta-1} \leq (t_2 - s)^{\theta-1}$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{t_1} |(t_1 - s)^{\theta-1} - (t_2 - s)^{\theta-1}| ds &= \int_0^{t_1} ((t_2 - s)^{\theta-1} - (t_1 - s)^{\theta-1}) ds \\
 &= \frac{1}{\theta} (-t_1^\theta + t_2^\theta - (t_2 - t_1)^\theta) \\
 &\leq \frac{1}{\theta} (t_2^\theta - t_1^\theta).
 \end{aligned}$$

Da combinação destes resultados, obtemos:

$$|Au(t_1) - Au(t_2)| \leq \begin{cases} \frac{2M}{\Gamma(\theta+1)} (t_2 - t_1)^\theta & \text{se } \theta \leq 1, \\ \frac{2M}{\Gamma(\theta+1)} ((t_2 - t_1)^\theta + t_2^\theta - t_1^\theta), & \text{se } \theta > 1. \end{cases} \quad (6.4.5)$$

Em ambos os casos, a expressão do lado direito da equação (6.4.5) converge para 0 quando $t_2 \rightarrow t_1$. Isso é suficiente para provar que Au é uma função contínua. Além disso, para $u \in U$ e

$t \in [0, h]$ vale que

$$\begin{aligned}
 |(Au)(t) - T(t)| &= \frac{1}{\Gamma(\theta)} \left| \int_0^t (t-s)^{\theta-1} f(s, u(s)) ds \right| \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\theta+1)} M t^\theta \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\theta+1)} M h^\theta \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\theta+1)} M \frac{k\Gamma(\theta+1)}{M} \\
 &= K.
 \end{aligned}$$

Assim, acabamos de mostrar que $Au \in U$ para todo $u \in U$.

A principal intenção é aplicar o teorema do ponto fixo de Schauder, [49], o que resta agora é mostrar que $A(U) := \{Au : u \in U\}$ é um conjunto relativamente compacto. Isto pode ser feito por meio do Teorema de Arzela-Ascoli [8]. Agora vamos a demonstração deste fato. Para cada $z \in A(U)$, descobrimos que, para todos $t \in [0, h]$,

$$\begin{aligned}
 |z(t)| &= |(Au)(t)| \\
 &\leq \|T\|_\infty + \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} |f(s, u(s))| ds \\
 &\leq \|T\|_\infty + \frac{1}{\Gamma(\theta+1)} M h^\theta \\
 &\leq \|T\|_\infty + K,
 \end{aligned}$$

desta forma esta provado a limitação do conjunto $A(U)$.

Para provar a equicontinuidade do conjunto $A(U)$, vamos considerar novamente os três casos. Claro que para $\theta \in \mathbb{N}$, o resultado segue diretamente pelo Teorema de Existência para EDO's clássico [116].

Especificando, $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq h$, encontramos, para o caso $\theta \leq 1$ que

$$|(Au)(t_1) - (Au)(t_2)| \leq \frac{2M}{\Gamma(\theta+1)} (t_2 - t_1)^\theta.$$

Assim, para $|t_2 - t_1| < \Delta$, temos

$$|(Au)(t_1) - (Au)(t_2)| \leq 2 \frac{M}{\Gamma(\theta+1)} \Delta^\theta.$$

Observando que a expressão sobre o lado direito é independente de u, t_1 e t_2 , vemos que o conjunto $A(U)$ é equicontínuo.

Para o caso em que $\theta > 1$, podemos usar o teorema do valor médio expandido [61], para

obter que

$$\begin{aligned}
 |(Au)(t_1) - (Au)(t_2)| &\leq \frac{M}{\Gamma(\theta + 1)} ((t_2 - t_1)^\theta + t_2^\theta - t_1^\theta) \\
 &= \frac{M}{\Gamma(\theta + 1)} ((t_2 - t_1)^\theta + \theta(t_2 - t_1)\xi^{\theta+1}) \\
 &= \frac{M}{\Gamma(\theta + 1)} ((t_2 - t_1)^\theta + \theta(t_2 - t_1)h^{\theta+1}),
 \end{aligned}$$

para algum $\xi \in [t_1, t_2] \subseteq [0, h]$. Portanto, mais uma vez, se $|t_2 - t_1| < \Delta$, então

$$|(Au)(t_1) - (Au)(t_2)| \leq \frac{M}{\Gamma(\theta + 1)} (\Delta^\theta + \theta \delta h^{\theta-1}). \quad (6.4.6)$$

Novamente, o lado direito é independente de u, t_1 e t_2 , provando assim a equicontinuidade do conjunto $A(U)$. Usando o Teorema de Ascoli-Arzelá [8], em qualquer um dos casos, concluimos que $A(U)$ é relativamente compacto. Portanto, pelo Teorema de Ponto Fixo de Schauder [39], obtemos que o operador A tem um ponto fixo. Por construção, um ponto fixo de A é uma solução de nosso problema do valor inicial (6.4.1). $\square$

Definição 6.4.2. *Qualquer função u para a qual está bem definida a derivada de ordem fracionária D_{*0}^θ , isto é, que satisfaz as hipóteses do Teorema 6.4.1 e também satisfaz o PVI (6.4.1) é dita uma solução do PVI.*

Lema 6.4.2. *Nas mesmas hipóteses do Teorema 6.4.1, $u \in C[0, h]$ é uma solução do problema de valor inicial equação (6.4.1) se, e somente se, é uma solução da equação integral de Volterra não linear do segundo tipo*

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\eta-1} \frac{t^k}{k!} u_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} f(s, u(s)) ds \quad (6.4.7)$$

onde $\eta = [\theta]$.

Demonstração. Primeiramente definimos $z(t) := f(t, u(t))$. Notamos que dadas as hipóteses sobre u e f temos que $z \in C[0, h]$. Em seguida, usamos a definição do operador diferencial do Caputo para reescrever a equação (6.4.1) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 z(t) &= f(t, u(t)) = D_{*0}^\theta u(t) = D_0^\theta (u - T_{\eta-1}[u; 0])(t) \\
 &= D^\eta J_0^{\eta-\theta} (u - T_{\eta-1}[u; 0])(t).
 \end{aligned}$$

Uma vez que estamos trabalhando com funções contínuas, podemos aplicar o operador J_0^η em ambos os lados e encontrar

$$J_0^\eta z(t) = J_0^{\eta-\theta} (u - T_{\eta-1}[u; 0])(t) + q(t)$$

com q um polinômio de grau não superior a $(\eta - 1)$. Como z é contínua, a função $J_0^\eta z$ no lado esquerdo da equação acima tem um zero de ordem, pelo menos, η na origem. Além disso, a diferença $u - T_{\eta-1}[u; 0]$ tem a mesma propriedade por construção e, portanto, a função $J_0^{\eta-\theta}(u - T_{\eta-1}[u; 0])$ no lado direito da nossa equação tem a mesma ordem η na origem. Assim, resta que o polinômio q tem a mesma propriedade e pode-se então deduzir imediatamente (desde que seu grau não seja superior $\eta - 1$) que:

$$J_0^\eta z(t) = J_0^{\eta-\theta}(u - T_{\eta-1}[u; 0])(t)$$

Agora aplicando o operador de Riemann-Liouville $D_0^{\eta-\theta}$ para esta equação observa-se que

$$\begin{aligned} u(t) - T_{\eta-1}[u; 0](t) &= D_0^{\eta-\theta} J_0^\eta z(t) \\ &= D^1 J_0^{1+\theta-\eta} J_0^\theta z(t) \\ &= D J_0^{1+\theta} z(t) = J_0^\theta z(t). \end{aligned} \tag{6.4.8}$$

Recordando as definições em que $T_{\eta-1}$ é o polinômio de Taylor em $[u; 0]$, obtemos que é uma condição necessária para u solução do problema (6.4.1) satisfazer a equação integral de Volterra.

□

6.4.2 Unicidade

Agora com o próximo resultado garantiremos unicidade de solução para PVI (6.4.1). A demonstração é muito parecida com a demonstração do caso de derivadas de ordem inteiras.

Teorema 6.4.3. (*Unicidade*) *Seja $0 < \theta$ e $\eta = [\theta]$, $u_0^{(0)}, \dots, u_0^{(\eta-1)} \in \mathbb{R}^n$, $k > 0$ e $h^* > 0$. Definido G como no Teorema 6.4.1 e a função $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo a condição de Lipschitz em relação à segunda variável, ou seja, existe uma constante $L > 0$ tal que, para todo $(t, u_1), (t, u_2) \in G$, temos*

$$|f(t, u_1(t)) - f(t, u_2(t))| < L |u_1(t) - u_2(t)|. \tag{6.4.9}$$

com a constante $L > 0$ independente de t, u_1 e u_2 . Para u como no Teorema 6.4.1, existe uma única função $u \in C[0, h]$ solução do problema de valor inicial (6.4.1).

Demonstração. Considere o polinômio T definido na equação (6.4.3) e o operador A definido em (6.4.4). Ainda, recordamos que o conjunto $U = \{u \in C[0, h] : \|u - T\|_\infty \leq K\}$ é não vazio, convexo e fechado. Agora temos que provar que A tem um único ponto fixo. A fim de fazermos isso, primeiramente provaremos que para cada $j \in N_0$, para todo $t \in [0, h]$ e para todo $u, \tilde{u} \in U$, vale que

$$\|A^j u - A^j \tilde{u}\|_{L_\infty[0, t]} \leq \frac{(Lt^\theta)^j}{\Gamma(1 + \theta j)} \|u - \tilde{u}\|_{L_\infty[0, t]}. \tag{6.4.10}$$

Agora usaremos o método de indução para obter o resultado. No caso $j = 0$, a afirmação é trivialmente verdadeira. Se utilizarmos esse método para $(j - 1) \rightarrow j$, obtemos

$$\begin{aligned} \|A^j u - A^j \tilde{u}\|_{L_\infty[0,t]} &= \|A(A^{j-1}u) - A(A^{j-1}\tilde{u})\|_{L_\infty[0,t]} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\theta)} \sup_{0 \leq \omega \leq t} \left| \int_0^\omega (\omega - s)^{\theta-1} [f(s, A^{j-1}u(s)) - f(s, A^{j-1}\tilde{u}(s))] ds \right|. \end{aligned}$$

Usando agora que f é Lipschitz contínua com relação a segunda variável e a hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} \|A^j u - A^j \tilde{u}\|_{L_\infty[0,t]} &\leq \frac{L}{\Gamma(\theta)} \sup_{0 \leq \omega \leq t} \int_0^\omega (\omega - s)^{\theta-1} |A^{j-1}u(s) - A^{j-1}\tilde{u}(s)| ds \\ &\leq \frac{L}{\Gamma(\theta)} \int_0^t (t - s)^{\theta-1} \sup_{0 \leq \omega \leq s} |A^{j-1}u(\omega) - A^{j-1}\tilde{u}(\omega)| ds. \\ &\leq \frac{L^j}{\Gamma(\theta)\Gamma(1 + \theta(j-1))} \int_0^t (t - s)^{\theta-1} s^{\theta(j-1)} \sup_{0 \leq \omega \leq s} \|u(\omega) - \tilde{u}(\omega)\| ds. \\ &\leq \frac{L^j}{\Gamma(\theta)\Gamma(1 + \theta(j-1))} \sup_{0 \leq \omega \leq t} |u(\omega) - \tilde{u}(\omega)| \int_0^s (t - s)^{\theta-1} s^{\theta(j-1)} ds \\ &= \frac{L^j}{\Gamma(\theta)\Gamma(1 + \theta(j-1))} \|u - \tilde{u}\|_{L_\infty[0,t]} \frac{\Gamma(\theta)\Gamma(1 + \theta(j-1))}{\Gamma(1 + \theta j)} t^{\theta j}. \end{aligned}$$

Como $t \in [0, h]$, podemos reformular a estimativa acima em todo o intervalo $[0, h]$, obtendo

$$\|A^j u - A^j \tilde{u}\|_\infty \leq \frac{(Lh^\theta)^j}{\Gamma(1 + \theta j)} \|u - \tilde{u}\|_\infty.$$

Definindo $\varsigma_j = \frac{(Lh^\theta)^j}{\Gamma(1 + \theta j)}$ temos que a série $\sum_{j=0}^\infty \varsigma_j$ é a representação em série de potências da função de Mittag-Leffler $E_\theta(Lh^\theta)$ (ver o Apêndice ?? para maiores detalhes). Portanto, converge uniformemente. Assim, o operador A satisfaz as hipóteses do Teorema de Ponto Fixo de Weisinger's [64] com ς_j definido acima. Logo, existe uma única solução do PVI (6.4.1). $\square$

6.4.3 Dependência Contínua dos PVI's com Derivadas de Ordem Fracionária

Apresentaremos a seguir o estudo da dependência contínua dos dados iniciais para o PVI com derivadas de ordem fracionária. Para tal, assumiremos durante toda esta seção que u é a única solução do PVI 6.4.1.

Lema 6.4.4. *Sejam $\theta, T, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_+$ e $\Delta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz a seguinte desigualdade*

$$|\Delta(t)| \leq \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{\Gamma(\theta)} \int_0^t (t - s)^{\theta-1} |\Delta(s)| ds,$$

para todo $t \in [0, T]$. Então

$$|\Delta(t)| \leq \varepsilon_1 E_\theta(\varepsilon_2 t^\theta),$$

para $t \in [0, T]$. Onde, E_θ denotada como a função Mittag-Leffler de ordem θ (ver o Apêndice ?? na definição).

Demonstração. Sejam $\varepsilon > 0$ e a função $\Phi(t) := (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)E_\theta(\varepsilon_2 t^\theta)$, obtida aplicando o Teorema (Apêndice ??) e usando a linearidade do problema de valor inicial considerando a função Φ a solução do problema de valor inicial

$$D_{*0}^\theta \Phi(t) = \varepsilon_2 \Phi(t),$$

onde $\Phi(0) = \varepsilon_1 + \varepsilon_3$ e $D^k \Phi(0) = 0$ para $k = 1, 2, \dots, [\theta] - 1$. Considerando o Lema 6.4.2 podemos deduzir que Φ satisfaz a equação

$$\Phi(t) = \varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \frac{\varepsilon_2}{\Gamma(\theta)} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} \Phi(s) ds.$$

Pela suposição sobre a função Δ , descobrimos que $|\Delta(0)| \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_1 + \varepsilon_3 = \Phi(0)$.

Pela continuidade das funções envolvidas podemos deduzir que $|\Delta(t)| < \Phi(t)$ para todo $t \in [0, \Theta]$ com $\Theta > 0$. Para provar que a desigualdade se mantém ao longo de todo o intervalo $[0, T]$, denotamos t_0 como o menor número positivo com a propriedade que $|\Delta(t_0)| = \Phi(t_0)$. Então, para $0 \leq t \leq t_0$ temos $|\Delta(t)| \leq \Phi(t)$ e portanto,

$$\begin{aligned} |\Delta(t_0)| &\leq \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{\Gamma(\theta)} \int_0^{t_0} (t_0 - s)^{\theta-1} |\Delta(s)| ds \\ &\leq \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{\Gamma(\theta)} \int_0^{t_0} (t_0 - s)^{\theta-1} \Phi(s) ds \\ &< \varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \frac{\varepsilon_2}{\Gamma(\theta)} \int_0^{t_0} (t_0 - s)^{\theta-1} |\Phi(s)| ds \\ &= \Phi(t_0). \end{aligned}$$

Note que a igualdade não pode ser verdade, tendo em conta a escolha de t_0 . Assim, a suposição deve ser falsa. Portanto, descobrimos que na verdade

$$|\Delta(t)| < \Phi(t) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)E_\theta(\varepsilon_2 t^\theta),$$

para $t \in [0, T]$ e $\varepsilon_3 > 0$, o que chega no resultado desejado. $\square$

Mostramos agora o resultado que garante a dependência contínua em relação as condições iniciais.

Teorema 6.4.5. *Seja u a solução do PVI (6.4.1) e z a solução do seguinte PVI,*

$$\begin{aligned} D_{*0}^\theta z(t) &= f(t, z(t)), \\ D^k z(0) &= z_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \eta - 1 \end{aligned} \quad (6.4.11)$$

Se $\varepsilon := \max_{k=0,1,\dots,\eta-1} |u_0^{(k)} - z_0^{(k)}|$ é suficientemente pequeno, então existe algum $h > 0$ tal que tanto as funções u e z estão bem definidas no intervalo $[0, h]$, e

$$\sup_{0 \leq t \leq h} |u(t) - z(t)| = O \left(\max_{\{k=0,1,\dots,\eta-1\}} |u_0^{(k)} - z_0^{(k)}| \right). \quad (6.4.12)$$

Demonstração. Definindo $\Delta(t) := u(t) - z(t)$, deduzimos que Δ é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} D_{*0}^\theta \Delta(t) = f(t, u(t)) - f(t, z(t)), \\ D^k \Delta(0) = u_0^{(k)} - z_0^{(k)}, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, \eta - 1. \quad (6.4.13)$$

pois o PVI acima satisfaz as hipóteses do Teorema 6.4.1.

Considerando o Lema 6.4.2, o problema de valor inicial é equivalente à equação

$$\Delta(t) = \sum_{k=0}^{\eta-1} \frac{t^k}{k!} \left(u_0^{(k)} - z_0^{(k)} \right) + \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} (f(s, u(s)) - f(s, z(s))) ds.$$

Usando desigualdade de Hölder e a condição de Lipchitz de f , encontramos que:

$$\Delta(t) \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{\eta-1} \frac{h^k}{k!} + \frac{L}{\Gamma(\theta)} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} |\Delta(s)| ds,$$

onde L é a constante de Lipschitz. Pelo Lema 6.4.4, obtemos:

$$|\Delta(t)| \leq O(\varepsilon) E_\theta(Lh^\theta) = O(\varepsilon)$$

como o desejado. □

Agora, mostraremos o teorema que garante dependência contínua em relação aos parâmetros do modelo estudado.

Teorema 6.4.6. *Seja u a solução do PVI (6.4.1) e z a solução do seguinte PVI*

$$\begin{aligned} D_{*0}^\theta z(t) &= \tilde{f}(t, z(t)), \\ D^k z(0) &= z_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \eta - 1 \end{aligned} \quad (6.4.14)$$

onde $\tilde{f}$ deve satisfazer as mesmas hipóteses de f e

$$\varepsilon := \max_{(t_1, t_2) \in G} \left| f(t_1, t_2) - \tilde{f}(t, t_2) \right|.$$

Se ε é suficientemente pequeno, então existe $h > 0$ tal que tanto as funções u e z estão bem definidas em $[0, h]$ e

$$\sup_{0 \leq t \leq h} |u(t) - z(t)| = O \left(\max_{(t_1, t_2) \in G} \left| f(t_1, t_2) - \tilde{f}(t_1, t_2) \right| \right). \quad (6.4.15)$$

Demonstração. Definindo primeiramente $\Delta(t) := u(t) - z(t)$, onde Δ é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} D_{*0}^\theta \Delta(t) = f(t, u(t)) - \tilde{f}(t, z(t)), \\ D^k \Delta(0) = 0, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, \eta - 1. \quad (6.4.16)$$

Isso é equivalente à equação

$$\Delta(t) = \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} \left(f(s, u(s)) - \tilde{f}(s, z(s)) \right) ds.$$

Usando a hipótese de Lipschitz continuidade de f e $\tilde{f}$, podemos deduzir que

$$\begin{aligned} \Delta(t) &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\theta-1}}{\Gamma(\theta)} \left(|f(s, u(s)) - f(s, z(s))| f(s, z(s)) - \tilde{f}(s, z(s)) \right) ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} |\Delta(s)| ds + \varepsilon \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} ds \\ &\leq \frac{L}{\Gamma(\theta)} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} |\Delta(s)| ds + \varepsilon \frac{h^\theta}{\Gamma(\theta+1)}. \end{aligned}$$

Podemos agora aplicar o Lema 6.4.4 para encontrarmos novamente

$$|\Delta(t)| \leq O(\varepsilon) E_\theta(Lh^\theta) = O(\varepsilon).$$

□

Os outros resultados para dependência contínua, são parecidos com os resultados de ordem inteira, para maiores informações consulte [116]. Porém para trabalhar com operadores fracionários é necessário um resultado que garanta a dependência contínua em relação à ordem das derivadas, que apresentaremos a seguir.

Teorema 6.4.7. *Seja u a solução do PVI (6.4.1) e z a solução do seguinte PVI,*

$$\begin{aligned} D_{*0}^{\tilde{\theta}} z(t) &= f(t, z(t)), \\ D^k z(0) &= u_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \tilde{\eta} - 1 \end{aligned} \quad (6.4.17)$$

onde $\tilde{\theta} > \theta$, $\tilde{\eta} := [\tilde{\theta}]$, $\varepsilon := \tilde{\theta} - \theta$ e

$$\varepsilon^* := \begin{cases} 0, & \text{se } \eta = \tilde{\eta}, \\ \max \{ |u_0^k| : \eta \leq k \leq \tilde{\eta} - 1 \} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se ε e ε^* são suficientemente pequenos, então existe $h > 0$ tal que, tanto z como u são funções definidas em $[0, h]$ e

$$\sup_{0 \leq t \leq h} |u(t) - z(t)| = O(\tilde{\theta} - \theta) + O \left\{ \max \left[0, \max \left(|u_0^{(k)}| : \eta \leq k \leq \tilde{\eta} - 1 \right) \right] \right\}. \quad (6.4.18)$$

Demonstração. Seja

$$\begin{aligned} \Delta(t) &:= u(t) - z(t) \\ &= - \sum_{k=\eta}^{\tilde{\eta}-1} \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} f(s, u(s)) ds \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\tilde{\theta})} \int_0^t (t-s)^{\tilde{\theta}-1} f(s, z(s)) ds \\ &= - \sum_{k=\eta}^{\tilde{\eta}-1} \frac{t^k}{k!} u_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} (f(s, u(s)) - f(s, z(s))) ds \\ &\quad + \int_0^t \left(\frac{(t-s)^{\theta-1}}{\Gamma(\theta)} - \frac{(t-s)^{\tilde{\theta}-1}}{\Gamma(\tilde{\theta})} \right) f(s, z(s)) ds. \end{aligned}$$

Usando a hipótese de Lipschitz continuidade de f , podemos deduzir que

$$\begin{aligned} |\Delta(t)| &\leq \sum_{k=\eta}^{\tilde{\eta}-1} \frac{h^k}{k!} + \frac{L}{\Gamma(\theta)} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} |\Delta(s)| ds \\ &\quad + \max_{(t_1, t_2) \in G} |f(t_1, t_2) - \tilde{f}(t_1, t_2)| \int_0^t \left| \frac{(t-s)^{\theta-1}}{\Gamma(\theta)} - \frac{(t-s)^{\tilde{\theta}-1}}{\Gamma(\tilde{\theta})} \right| ds \end{aligned} \quad (6.4.19)$$

Obviamente a soma é $O(\varepsilon^*)$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^t \left| \frac{(t-s)^{\theta-1}}{\Gamma(\theta)} - \frac{(t-s)^{\tilde{\theta}-1}}{\Gamma(\tilde{\theta})} \right| ds &= \int_0^t \left| \frac{v^{\theta-1}}{\Gamma(\theta)} - \frac{v^{\tilde{\theta}-1}}{\Gamma(\tilde{\theta})} \right| ds \\ &\leq \int_0^h \left| \frac{v^{\theta-1}}{\Gamma(\theta)} - \frac{v^{\tilde{\theta}-1}}{\Gamma(\tilde{\theta})} \right| ds \\ &= O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Podemos calcular a integral explicitamente, entretanto, primeiro temos que achar o zero da integração que está localizado em $\left(\frac{\Gamma(\tilde{\theta})}{\Gamma(\theta)} \right)^{\frac{1}{\tilde{\theta}-\theta}}$ (uma quantidade que converge para $\exp(\psi(\theta))$ e $\tilde{\theta} \rightarrow \theta$ onde $\psi = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$). Se h é menor do que esse valor, então o integrando não tem nenhuma

mudança de sinal. Caso contrário devemos dividir o intervalo de integração neste ponto. Em qualquer caso, podemos dizer que a expressão resultante é delimitada por $O(\tilde{\theta} - \theta) = O(\varepsilon)$. Então

$$|\Delta(t)| \leq O(\varepsilon) + O(\varepsilon^*) + \frac{L}{\Gamma(\theta)} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} |\Delta(s)| ds,$$

se utilizarmos o Lema 6.4.4 produzindo o resultado desejado. $\square$

Corolário 6.4.8. *Assumindo as hipóteses do Teorema 6.4.7 e $\tilde{\eta} = \eta$, então*

$$\sup_{0 \leq t \leq h} |u(t) - z(t)| = O(\tilde{\theta} - \theta)$$

Corolário 6.4.9. *Assumindo as hipóteses do Teorema 6.4.7 e sejam $\tilde{\eta} > \eta$ e $u_0^{(k)} = 0$ para $k = \eta, \eta + 1, \dots, \tilde{\eta} - 1$ então*

$$\sup_{0 \leq t \leq h} |u(t) - z(t)| = O(\tilde{\eta} - \eta).$$

6.5 Uma Comparação entre Riemann-Liouville e Caputo

Aqui verificaremos qual definição de derivada de ordem fracionária melhor se aplica no nosso sistema, através da análise do problema de valor inicial com derivadas arbitrárias segundo Riemann-Liouville e Caputo. Nesta seção não apresentaremos as demonstrações dos resultados segundo Riemann-Liouville que podem ser encontrados em [39], porém os resultados segundo Caputo já foram mostrados na Seção 6.4, tendo em vista que usaremos essa definição nesta proposta. Tal análise se inicia com os seguintes resultados:

Teorema 6.5.1. *Sejam $\theta > 0, \theta \notin \mathbb{N}, \eta = [\theta], k > 0, h^* > 0$ e $c_1, \dots, c_\eta \in \mathbb{R}$. E*

$$G := \left\{ (t, u) \in \mathbb{R}^{s+1} : 0 \leq t \leq h^*, u \in \mathbb{R}^s, \quad t = 0 \quad e \quad \left| t^{\eta-\theta} u - \sum_{k=1}^{\eta} \frac{c_k t^{\eta-k}}{\Gamma(\theta - k + 1)} \right| < k, s \right\}.$$

Supondo que a função $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, limitada e Lipschitziana em relação a segunda variável, satisfazendo a desigualdade 6.4.9. Então a equação diferencial

$$D_0^\theta u(t) = f(t, u(t)), \tag{6.5.1}$$

com condições iniciais

$$D_0^{\theta-k} u(0) = c_k \quad (k = 1, 2, \dots, \eta - 1), \quad \lim_{z \rightarrow 0_+} J_0^{\eta-\theta} u(z) = c_\eta, \tag{6.5.2}$$

possui uma única solução f que é uma função contínua definida em $(0, h]$ com

$$h := \min \left\{ h^*, \tilde{h}, \left(\frac{\Gamma(\theta + 1)k}{M} \right)^{\frac{1}{\eta}} \right\},$$

onde $M := \sup_{(t,z) \in G} |f(t, z)|$ e $\tilde{h}$ é um número positivo arbitrário que satisfaz a seguinte restrição

$$\tilde{h} < \left(\frac{\Gamma(2\theta - \eta + 1)}{\Gamma(\theta - \eta + 1)L} \right)^{\frac{1}{\theta}}. \quad (6.5.3)$$

A prova desse teorema é similar a demonstração para EDO's de ordem inteira. Para detalhes veja ([39], Capítulo 5). Tal demonstração passa por transformar problema (6.5.1)-(6.5.2) na forma integral, assim como acontece no caso clássico, e usar o teorema de ponto fixo de Banach para estabelecer o resultado. A equação integral equivalente será enunciado no lema (6.5.2), cujos detalhes da demonstração podem ser obtidos em [39].

Lema 6.5.2. *Suponha $h > 0$ e as hipóteses enunciadas no Teorema 6.5.1. Então $u \in C(0, h]$ é uma solução das equações diferenciais (6.5.1) e (6.5.2) se, e somente se, é uma solução da equação integral de Volterra*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\eta} \frac{c_k t^{\theta-k}}{\Gamma(\theta - k + 1)} + \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} f(s, u(s)) ds. \quad (6.5.4)$$

Observação 6.5.1. *De fato, ao observar a equação integral (6.5.4) percebemos porque a solução u é contínua no intervalo semi-aberto $(0, h]$ e não no intervalo fechado $[0, h]$. Se u fosse contínuo ao longo de $[0, h]$, então, como f é contínuo, o lado direito da equação (6.5.4) também deveria ser contínuo em $[0, h]$. Tendo em consideração a definição de η , podemos facilmente ver que as somas são de fato contínuas em $[0, h]$ para $k = 1, 2, \dots, \eta - 1$. No entanto, o termo ($k = \eta$) é limitado quando $f \rightarrow 0$, haja vista que $\eta > \theta$, com $\theta \notin \mathbb{N}$ a menos que $c_\eta = 0$.*

Na seção 6.4 apresentamos uma adaptação do clássico Teorema de Peano [29] para sistemas de EDO's de ordem fracionária. Seguimos os passos apresentados em [39, Teorema 6.1 pág.86] e mostramos que existe uma função $u \in C[0, h]$ que resolve o problema de valor inicial definido no PVI (6.4.1).

O Lema (6.4.2), já demonstrado na seção 6.4 garante que se existe uma solução para o PVI (6.4.1), então esta mesma solução deve satisfazer uma equação integral, a qual é base para alguns dos métodos numéricos para resolver PVI's fracionários.

Através da observação a seguir, faremos uma comparação do problema de valor inicial com derivadas arbitrárias segundo Riemann-Liouville e Caputo.

Observação 6.5.2. *Usando a observação (6.5.1) e usando os Lemas (6.5.2) e (6.4.2), podemos comparar o comportamento das soluções de equação diferenciais fracionárias segundo Caputo com as de Riemann-Liouville. Ao fazer isso descobrimos que o problema de continuidade na*

origem encontrado para Riemann-Liouville não ocorre para Caputo. Pelo contrário, verificamos que a continuidade da função f implica na continuidade da solução u durante todo intervalo fechado $[0, h]$.

Quando analisamos o problema de valor inicial com derivadas de ordem fracionária percebe-se que o método de Caputo é mais adequado para aplicação em sistemas biológicos que o método de Riemann-Liouville, visto que para o primeiro a derivada de uma constante é nula. Além disso, as condições iniciais em sistemas de EDO's fracionárias segundo Caputo dependem de condições que são fisicamente interpretáveis. Mesmo que o PVI definido em (6.5.1), usando derivadas de ordem fracionária segundo Riemann-Liouville, seja um problema bem posto, a sua dependência das condições iniciais, não necessariamente possuem uma interpretação do ponto de vista biológico [39]. Portanto, para a modelagem que apresentaremos neste trabalho, usaremos derivadas de ordem fracionária segundo Caputo com o objetivo de obter uma modelagem fiel ao nosso objetivo.

6.6 Uma Breve Consideração sobre o Efeito de Memória

Na próxima observação, mostraremos de que maneira as derivadas de ordem fracionária introduzem naturalmente o efeito de memória em um problema de valor inicial.

Observação 6.6.1. *Olhando para a equação (6.4.7) para algum $\theta \in (0, 1]$ e para dois valores diferentes de t , digamos t_1 e t_2 com $t_1 < t_2$, se subtrairmos a segunda destas equações pela primeira, obtemos que:*

$$\begin{aligned} u(t_2) - u(t_1) &= \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\theta-1} f(s, u(s)) ds \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\theta-1} f(s, u(s)) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_0^{t_1} [(t_2 - s)^{\theta-1} - (t_1 - s)^{\theta-1}] f(s, u(s)) ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\theta-1} f(s, u(s)) ds. \end{aligned} \tag{6.6.1}$$

Considerando primeiramente o caso (não fracionário), isto é $\theta = 1$. Analisando o lado direito da equação (6.6.1) vemos que a primeira integral é nula. Então esta equação implica que $u(t_1)$ é a solução do problema de valor inicial dado equação (6.4.1) no ponto $u(t_1)$ e, em seguida, pode-se calcular a solução em t_2 com $t_2 > t_1$, exclusivamente com base em $u(t_1)$ e a função f . Não será preciso usar qualquer informação em $u(t)$ para $t \in [0, t_1)$. Esta observação é apenas outra maneira de expressar a localidade do operador diferencial de ordem inteira. Esta é a base de quase todos os métodos numéricos clássicos da solução de equações diferenciais de primeira ordem. Também é fundamental para a modelagem matemática de muitos sistemas da física,

engenharia e outras ciências [39], porque ele afirma que isso é suficiente para analisar o estado de um sistema em um ponto arbitrário na hora de calcular o seu comportamento no futuro.

Quando for analisado o caso fracionário $0 < \theta < 1$ a situação é fundamentalmente diferente. Nesse caso, a primeira integral do lado direito da equação (6.6.1) não desaparece. Logo, sempre que se quer calcular a solução $u(t_2)$, em algum momento t_2 , é necessário considerar o que acontece no ponto inicial 0 e levar em conta toda a informação até o ponto de interesse t_2 . Isso reflete a não localidade dos operadores diferenciais segundo Caputo. Obviamente, essa observação tem uma influência substancial sobre a construção de métodos numéricos para tais equações. Além disso, para a modelagem de fenômenos reais com um sistema de ordem fracionária, podemos interpretar o termo que não se anula como um termo que descreve sistemas com memória.

Observação 6.6.2. Como foi afirmado na observação anterior, a equação (6.6.1) tem grande impacto sobre a base teórica dos métodos numéricos para equações diferenciais fracionárias. O método padrão geralmente funciona corretamente mas, muitas vezes, não faz uso de todo o poder desta equação, pois o mesmo termo entre parênteses no lado direito da equação (6.6.1) não é nulo, ele vai ser muito pequeno em magnitude para determinadas situações, por exemplo, se t_1 e t_2 são suficientemente grandes em comparação com $(t_2 - t_1)$.

6.7 Boa Colocação para PVI's com múltiplas Derivadas de Ordem Fracionária

Ao modelarmos problemas biológicos, surgiu outra hipótese importante a ser considerada. Como seria o sistema se pudéssemos usar para cada equação do sistema uma ordem distinta da derivada. Porém para que se possa considerar essa hipótese, é necessário olhar para boa colocação de um sistema desse tipo.

Usaremos um sistema de equações diferenciais fracionárias onde, θ_j , ($j = 1, 2, \dots, k$) podem ou não coincidir. Para colocá-lo de forma mais formal, isso leva a um modelo do tipo

$$\begin{aligned} D_*^{\theta_1}(u_1(t)) &= f_1(t, u_1(t), \dots, u_k(t)) \\ &\vdots \\ D_*^{\theta_j}(u_k(t)) &= f_k(t, u_1(t), \dots, u_k(t)) \\ u_j(0) &= u_{j,0} \quad (j = 1, 2, \dots, k) \end{aligned} \tag{6.7.1}$$

Para atingirmos nossos objetivos, basta assumirmos que $0 < \theta_j \leq 1$ para todos j .

Teorema 6.7.1. Considere $\theta_j > 0$ para $j = 1, 2, \dots, k$ e considere o problema do valor inicial

dado pelo sistema diferencial fracionário multi-ordem, que é equivalente a (6.7.1).

$$\begin{aligned} D_*^{\theta_j}(u_j(t)) &= f_j(t, u_1(t), \dots, u_k(t)), (j = 1, 2, \dots, k), \\ u_j^l(0) &= u_{j,0}^l (l = 0, 1, \dots, [\theta_j] - 1) (j = 1, 2, \dots, k) \end{aligned} \quad (6.7.2)$$

Suponha que as funções $f_j : [0, T] \times \mathbb{R}^k \Rightarrow \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots, k$, sejam contínuas e satisfaçam as condições de Lipschitz em relação a todos os seus argumentos, exceto o primeiro. Então, o problema do valor inicial tem uma solução única que é continuamente dependente das condições iniciais, dos parâmetros e da ordem da derivada.

Demonstração. O problema de valor inicial (6.7.2), é equivalente ao sistema de equações de Volterra

$$u_j(t) = \sum_{l=0}^{[\theta_j]-1} u_j^l \frac{t^l}{l!} + \frac{1}{\Gamma(\theta_j)} \int_0^t (t-s)^{\theta_j-1} f_j(s, u_1(s), \dots, u_k(s)) ds. \quad (6.7.3)$$

$j = 1, 2, \dots, k$.

Em seguida, definimos $\theta = \min_j \theta_j$ e reescrevemos (6.7.3) na forma

$$u_j(t) = \sum_{l=0}^{[\theta_j]-1} u_j^l \frac{t^l}{l!} + \frac{1}{\Gamma(\theta_j)} \int_0^t (t-s)^{\theta_j-1} \hat{f}_j(s, u_1(s), \dots, u_k(s)) ds. \quad (6.7.4)$$

para $j = 1, 2, \dots, k$, onde,

$$\hat{f}_j(s, u_1, \dots, u_k) := \frac{\Gamma(\theta)}{\Gamma(\theta_j)} (t-s)^{\theta_j-\theta} f_j(s, u_1, \dots, u_k) \quad (6.7.5)$$

Apresentando a notação vetorial $U := (u_1, \dots, u_k)^T, \hat{F} := (\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_k)^T$ e uma expressão correspondente para os valores iniciais, podemos combinar essas k equações escalares em uma equação vetorial, da forma

$$U(t) = \sum_{l=0}^{\max_j [\theta_j]-1} U_0^l \frac{t^l}{l!} + \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} \hat{F}_j(s, U(s)) ds. \quad (6.7.6)$$

Como $f_j : [0, T] \times \mathbb{R}^k \Rightarrow \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots, k$ e o fato de que $\theta_j \geq \theta$ para todos j , concluímos que todas as funções $\hat{f}_j$ são contínuas e satisfazem as condições de Lipschitz com respeito a $u_1, \dots, u_k$. Assim, $\hat{F}_j$ é contínua e satisfaz uma condição de Lipschitz em relação a $U = (u_1, \dots, u_k)^T$. $\square$

Apresentaremos a seguir o estudo da dependência contínua para o PVI com múltiplas ordens 6.7.2. A dependência contínua quanto aos dados iniciais e aos parâmetros ainda é garantida pelos resultados apresentados na Seção 6.4. Agora garantiremos os resultados de dependência contínua em relação às múltiplas ordens das derivadas.

Teorema 6.7.2. *Seja u a solução do PVI (6.7.2) e z a solução do seguinte PVI, com $\tilde{\theta}_j > \theta_j$*

$$\begin{aligned} D_*^{\tilde{\theta}_j} z_j(t) &= f_j(t, z_1(t), \dots, z_k(t)), (j = 1, 2, \dots, k), \\ z_j^l(0) &= z_{j,0}^l (l = 0, 1, \dots, [\tilde{\theta}_j] - 1) (j = 1, 2, \dots, k) \end{aligned} \quad (6.7.7)$$

onde $\tilde{\theta}_j > \theta_j$, $\tilde{\eta} := [\tilde{\theta}]$, $\varepsilon_j := \tilde{\theta}_j - \theta_j$ e

$$\varepsilon_j^* := \begin{cases} 0, & \text{se } \eta = \tilde{\eta}, \\ \max \{ |u_0^k| : \eta \leq k \leq \tilde{\eta} - 1 \} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se ε_j e ε_j^* são suficientemente pequenos, então existe $h > 0$ tal que, tanto z como u são funções definidas em $[0, h]$, $\theta = \min\{\theta_j, \tilde{\theta}_j\}$ e

$$\sup_{0 \leq t \leq h} |u(t) - z(t)| = O(\tilde{\theta} - \theta) + O \left\{ \max \left[0, \max \left(|u_0^{(k)}| : \eta \leq k \leq \tilde{\eta} - 1 \right) \right] \right\}. \quad (6.7.8)$$

Demonstração. Segue os passos da demonstração do Teorema 6.4.7. □

6.8 Conceitos de Estabilidade para Sistemas de Ordem Fracionária

A essência da noção de estabilidade é a extensão da ideia de dependência contínua, a solução de uma equação diferencial fracionária não muda muito sobre um intervalo finito se perturbarmos os valores iniciais por uma pequena magnitude.

Para intervalos não limitados a solução trivial é estável se uma pequena alteração no valor inicial conduzir a uma pequena mudança na solução ao longo do sistema. Obviamente, isso é muito mais forte do que a dependência. A estabilidade assintótica é ainda mais forte, pois exige a solução do problema perturbado não só para permanecer perto da solução original, mas converja para o ponto anterior.

Teorema 6.8.1. *Considere um sistema de equações diferenciais fracionárias n -dimensional*

$$D_*^\theta(u(t)) = \Lambda u(t) \quad (6.8.1)$$

onde Λ é uma matriz $n \times n$ constante arbitrária.

- I) A solução $u(t) = 0$ do sistema é assintoticamente estável se, e somente se, todos autovalores λ_j com $(j = 1, 2, \dots, n)$ de Λ satisfaz em $|\arg(\lambda_j)| > \frac{\theta\pi}{2}$.
- II) A solução $u(t) = 0$ do sistema é estável se, e somente se, os autovalores satisfizerem $|\arg(\lambda_j)| \geq \frac{\theta\pi}{2}$ e todos os autovalores com $|\arg(\lambda_j)| = \frac{\theta\pi}{2}$ têm uma multiplicidade geométrica que coincide com a sua multiplicidade algébrica (ou seja, os autovalores com l -duplas raízes do polinômio característico, têm l autovetores linearmente independentes).

Demonstração. Primeiramente olharemos para as informações sobre a forma precisa de todas as soluções da equação diferencial em consideração.

Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_j$ os autovalores de Λ e $y^{(1)}, \dots, y^{(j)}$ seus autovetores correspondentes. Então, a solução geral da equação diferencial (6.8.1) tem a forma

$$u(t) = \sum_{l=1}^j c_l y^{(l)} E_{\theta}(\lambda_l t^{\theta}) \quad (6.8.2)$$

com certas constantes $c_l \in \mathbb{C}$. A única solução de (6.8.2) sujeita à condição inicial $u(0) = u_0$ é caracterizada pelo sistema linear

$$u_0 = (u^{(1)}, \dots, u^{(j)})(c_1, \dots, c_j)^T.$$

Para obter c_l da solução do problema do valor inicial é preciso fazer $t = 0$ na solução geral. O fato de o sistema linear ter uma solução única segue por causa da independência linear acima mencionada dos autovetores que formam a matriz de coeficientes deste sistema.

Agora, para cada k – *duplo* autovalor da matriz Λ , temos k soluções linearmente da equação diferencial linear homogênea (6.8.1) que pode ser representado na forma

$$u_l(t) = \Pi^{(l)}(t), \text{ com } l = 1, 2, \dots, k,$$

onde o $\Pi^{(l)}(t)$ são vetores n -dimensionais cujos componentes das funções $\Pi_j^{(l)}$, $j = 1, 2, \dots, n$, são da forma

$$\Pi_j^{(l)}(t) = \sum_{p=0}^{l-1} C_j^{(l,p)} t^{(p\theta)} D^p E_{\theta}(\lambda_l t^{\theta})$$

A combinação dessas soluções para todos os autovalores leva a n soluções linearmente independentes do sistema (6.8.1), isto é, a base do espaço de todas as soluções deste sistema.

Explicitando as possíveis formas para a solução de (6.8.1), e usando os resultados do Teorema 6.1.2, que analisa o comportamento da função de Mittag-Leffler, o resultado fica provado. $\square$

Observação 6.8.1. *Esses resultados podem ser utilizados para sistemas de equações diferenciais fracionárias como os dessa proposta, basta que se trabalhe com a linearização destes, ou seja, que as considerações acima, sejam feitas sobre a matriz jacobiana do modelo em estudo.*

6.9 Considerações sobre os Métodos Numéricos

Utilizou-se dois computadores pessoais para gerar as simulações representadas nesse trabalho. Que serão descritos abaixo:

- Processador Intel core i5 de 220 MHz, 8 Megabytes de memória RAM, disco rígido com capacidade de armazenamento de 200 Gigabytes e sistema operacional Microsoft Windows 7 ultimate.

- Processador Intel core i7 de 270 MHz, 7,6 Megabytes de memória RAM, disco rígido com capacidade de armazenamento de 2,0 Terabytes e sistema operacional Ubuntu 20.04.1 LTS.

Em princípio, qualquer simulação pode ser replicada em qualquer computador, pois não exigem muita capacidade computacional. É necessário a instalação do Octave, programa de uma linguagem computacional desenvolvida para computação matemática e uma ótima ferramenta para esse tipo de análises aqui executadas.

Para o modelo com diferentes populações espacialmente distribuídas, temos em média o tempo de simulação mais demorada é de 4 horas e 19 minutos, para essas simulações foram utilizadas uma adaptação do método de Euler.

```
%#####variaveis#####
na=11;
nv=2;
mc=nc=nv+1;
mf=nf=na-nv;
io=jo=((na-1)/2)+1; %ponto de liberacao
ti=1; %tempo inicial
tf=1000; %tempo final
h=0.001;
%h=(mf-mc)./(mf-mc)*(mf-mc);
%dt=0.5;
%h=int(ceil((tf-ti)/dt))%tamanho do passo;
%n = int(ceil((b-a)/dt))
%#####Cond. iniciais#####
for i=1:na
for j=1:na
N1(i,j)=100;
%/(1+(sqrt((i-io)^2+(j-io)^2)));
%N1(mc-1,2:mf)=1000000/P(mc-1,2:mf);
%N1(2:mf,mc-1)=1000000/P(2:mf,mc-1);
%N1(mf+1,2:mf)=1000000/P(mf+1,2:mf);
%N1(2:mf,mf+1)=1000000/P(2:mf,mf+1);
if ((i==io && j==jo));
%|| (i==30 && j==30))
%(i==io && j==jo)
%(i==15 && j==15) || (i==30 && j==30)
I1(i,j,1)=20.;
S1(i,j,1)=100.-I1(i,j,1);
R1(i,j,1)=0;
```

```

C1(i , j , 1)=0.;
else
S1(i , j , 1)=N1(i , j );
I1(i , j , 1)=0;
R1(i , j , 1)=0;
C1(i , j , 1)=0;
endif

if (i>mf || j>mf || i<(nv+1) || j<(nv+1))
S1(i , j , 1)=I1(i , j , 1)=0;
endif
end
end

for t=ti:tf
t
Aux1=I1;
Aux2=R1;
Aux3=C1;
d=0.02;
d1=0.04;
d2=0.03;
rand("state","reset")
#####moviemnto#####
%maxval=max(max(N1(:,:))); % escolher a posicao de maior densidade e
%menos infectados ou condicoes excludentes

for i=mc:mf
for j=nc:nf

%variavel ser o n mero de infectados na posi o
%quem ser a m dia
for m=i-nv:i+nv
for n=j-nv:j+nv
lambda(m,n,t)=0.1;
%abs(I1(m,n,t+1)-I1(m,n,t));
Poisson(m,n,t)=(exp(-lambda(m,n,t))*(lambda(m,n,t)^(I1(m,n,t))))/
(gamma(I1(m,n,t)+1));
end
end
end

```

```

somaPoisson=sum(sum(Poisson(i-nv:i+nv,j-nv:j+nv)));
if(somaPoisson~=0)
ks=Poisson(i-nv:i+nv,j-nv:j+nv)./somaPoisson;
%ks(i-nv:i+nv,j-nv:j+nv)=funce(i-nv:i+nv,j-nv:j+nv).
*Normalizada(i-nv:i+nv,j-nv:j+nv).*fi(i-nv:i+nv,j-nv:j+nv);
else
ks=Poisson(i-nv:i+nv,j-nv:j+nv)
endif
minval=min(min(ks(:,:)));
if(minval~=0)
[vi,vj]=find(ks(:,:)==minval);
s=rows([vi,vj]);
w=randperm(s,1);

endif

VI(i,j,t)=beta2(i,j,t)*S1(i,j,t)*I1(i+1,j,t)/N1(i+1,j)
+beta2(i,j,t)*S1(i,j,t)*I1(i-1,j,t)/N1(i-1,j)
+beta2(i,j,t)*S1(i,j,t)*I1(i,j+1,t)/N1(i,j+1)
+beta2(i,j,t)*S1(i,j,t)*I1(i,j-1,t)/N1(i,j-1);
%sum(sum(S1(i,j,t).*ks.*I1(i,j,t)./N1(i-nv:i+nv,j-nv:j+nv)));
II2(i,j,t)=beta(i,j,t)*S1(i,j,t)*I1(i,j,t)/N1(i,j)+VI(i,j,t);
S1(i,j,t+1)=(-II2(i,j,t)+mu(i,j,t)*(N1(i,j)-S1(i,j,t))
+gama(i,j,t)*C1(i,j,t))*h+S1(i,j,t);
I1(i,j,t+1)=(II2(i,j,t)+sigma(i,j,t)*beta(i,j,t)*C1(i,j,t)*I1(i,j,t)
-(alfa(i,j,t)
+mu(i,j,t))*I1(i,j,t))*h+I1(i,j,t);
R1(i,j,t+1)=((1-sigma(i,j,t))*beta(i,j,t)*C1(i,j,t)*I1(i,j,t)
+alfa(i,j,t)*I1(i,j,t)-(mu(i,j,t)+delta(i,j,t))*R1(i,j,t))*h+R1(i,j,t);
C1(i,j,t+1)=((delta(i,j,t)*R1(i,j,t))-beta(i,j,t)*C1(i,j,t)*I1(i,j,t)
-(mu(i,j,t)+gama(i,j,t)*C1(i,j,t))*h+C1(i,j,t);
end
end
%AUXVI=VI;
%#####Soma individuos de cada classe #####
S241=sum(sum(S1(:,:,:))./sum(sum(N1(mc:mf,mc:mf))));
%./(na-2*nv)^2;
S341=sum(sum(I1(:,:,:))./sum(sum(N1(mc:mf,mc:mf))));
%./(na-2*nv)^2;

```

```

S441=sum(sum(R1(:,:,:)'))./sum(sum(N1(mc:mf,mc:mf)));
%./(na-2*nv)^2;
S541=sum(sum(C1(:,:,:)'))./sum(sum(N1(mc:mf,mc:mf)));
%graphics_toolkit
end

```

Para o modelo fracionário é necessário um modelo adequado, que considere esse efeito de operador não local. Para tanto, aprendemos a fazer simulações desse tipo com [47, 46].

As simulações utilizando esse modelo, utilizam a ideia de um método do tipo preditor/corretor para o operador de convolução e o tempo de simulação não tem demora máxima de 5 minutos.

```

%#####parametros#####
mu = 0.02; beta = 25; a =7; delta = 0.75; rho = 1; gamma= 0.35;
sigma = 0.12; P = 1;
%#####ordens das derivadas #####
theta=1; theta1=0.95; theta2=0.95; theta3=0.85; theta4=0.8;
theta5=0.8; theta6=0.8; theta7=0.8; theta8=0.8;
%#####modelo#####
f_fun=@(t,x)
[(mu^theta1)*P+(gamma^theta1)*(x(4))-((beta^theta1)*(x(2))
+(mu^theta1))*(x(1))-(rho^theta1)*(x(1)));
(beta^theta2)*(x(1))*(x(2))+(sigma^theta1)*(beta^theta2)*(x(4))*(x(2))
-((a^theta2)+(mu^theta2))*(x(2)));
(1-(sigma^theta3))*(beta^theta3)*(x(4))*(x(2))+(a^theta3)*(x(2))
-((mu^theta3)+(delta^theta3))*(x(3))+((rho^theta3)*(x(1))));
(delta^theta4)*(x(3))-(beta^theta4)*(x(4))*(x(2))
-(gamma^theta4+(mu^theta4))*(x(4))];
%#metodo do tipo preditor corretor
baseado em Garrapa#

% Armazenamento das condi es iniciais
ic.t0 = t0 ;
ic.y0 = y0 ;
ic.m_alpha = ceil(alpha) ;
for i = 1 : alpha_length
    for j = 0 : ic.m_alpha(i)-1
        ic.m_alpha_factorial(i,j+1) = factorial(j) ;
    end
end
end

```

```

% Armazenamento das informacoes do problema
Probl.ic = ic ;
Probl.f_fun = f_fun ;
Probl.problem_size = problem_size ;
Probl.param = param ;
Probl.alpha = alpha ;
Probl.alpha_length = alpha_length ;

% Numero de solucoes
r = 16 ;
N = ceil((T-t0)/h) ;
Nr = ceil((N+1)/r)*r ;
Qr = ceil(log2(Nr/r)) - 1 ;
NNr = 2^(Qr+1)*r ;

% variaveis
y = zeros(Probl.problem_size,N+1) ;
fy = zeros(Probl.problem_size,N+1) ;
zn_pred = zeros(Probl.problem_size,NNr+1) ;
if mu > 0
    zn_corr = zeros(Probl.problem_size,NNr+1) ;
else
    zn_corr = 0 ;
end

% Avalia o dos coeficientes do m todo PECE
nvett = 0 : NNr+1 ;
bn = zeros(Probl.alpha_length,NNr+1) ; an = bn ; a0 = bn ;
for i_alpha = 1 : Probl.alpha_length
    find_alpha = find(alpha(i_alpha)==alpha(1:i_alpha-1)) ;
    if ~isempty(find_alpha)
        bn(i_alpha,:) = bn(find_alpha(1),:) ;
        an(i_alpha,:) = an(find_alpha(1),:) ;
        a0(i_alpha,:) = a0(find_alpha(1),:) ;
    else
        nalpha = nvett.^alpha(i_alpha) ;
        nalpha1 = nalpha.*nvett ;
        bn(i_alpha,:) = nalpha(2:end) - nalpha(1:end-1) ;
        an(i_alpha,:) = [ 1 , (nalpha1(1:end-2) - 2*nalpha1(2:end-1)
+ nalpha1(3:end)) ] ;
    end
end

```

```

        a0(i_alpha,:) = [ 0 , nalpha1(1:end-2)-nalpha(2:end-1).*(nvett(2:end-1)-alpha(i_alpha)-1)] ;
    end
end
METH.bn = bn ; METH.an = an ; METH.a0 = a0 ;
METH.halpha1 = h.^alpha./gamma(alpha+1) ;
METH.halpha2 = h.^alpha./gamma(alpha+2) ;
METH.mu = mu ; METH.mu_tol = mu_tol ;

% Evaluation of FFT of coefficients of the PECE method
METH.r = r ;
if Qr >= 0
    index_fft = zeros(2,Qr+1) ;
    for l = 1 : Qr+1 % log2(NNr/r)
        if l == 1
            index_fft(1,l) = 1 ; index_fft(2,l) = r*2 ;
        else
            index_fft(1,l) = index_fft(2,l-1)+1 ; index_fft(2,l) =
            index_fft(2,l-1)+2^l*r ;
        end
    end
end

bn_fft = zeros(Probl.alpha_length,index_fft(2,Qr+1)) ;
an_fft = bn_fft ;
for l = 1 : Qr+1 % log2(NNr/r)
    coef_end = 2^l*r ;
    for i_alpha = 1 : Probl.alpha_length
        find_alpha = find(alpha(i_alpha)==alpha(1:i_alpha-1)) ;
        if ~isempty(find_alpha)
            bn_fft(i_alpha,index_fft(1,l):index_fft(2,l)) =
            bn_fft(find_alpha(1),index_fft(1,l):index_fft(2,l)) ;
            an_fft(i_alpha,index_fft(1,l):index_fft(2,l)) =
            an_fft(find_alpha(1),index_fft(1,l):index_fft(2,l)) ;
        else
            bn_fft(i_alpha,index_fft(1,l):index_fft(2,l)) =
            fft(METH.bn(i_alpha,1:coef_end),coef_end) ;
            an_fft(i_alpha,index_fft(1,l):index_fft(2,l)) =
            fft(METH.an(i_alpha,1:coef_end),coef_end) ;
        end
    end
end
end

```

```

    end
    METH.bn_fft = bn_fft ; METH.an_fft = an_fft ;
    METH.index_fft = index_fft ;
end

% solu o
t = t0 + (0 : N)*h ;
y(:,1) = y0(:,1) ;
fy(:,1) = f_temp ;
[y, fy] = Triangolo(1, r-1, t, y, fy, zn_pred, zn_corr, N, METH, Probl ) ;

ff = zeros(1,2.^(Qr+2)) ; ff(1:2) = [0 2] ; card_ff = 2 ;
nx0 = 0 ; ny0 = 0 ;
for qr = 0 : Qr
    L = 2^qr ;
    [y, fy] = DisegnaBlocchi(L, ff, r, Nr, nx0+L*r, ny0, t, y, fy, ...
        zn_pred, zn_corr, N, METH, Probl ) ;
    ff(1:2*card_ff) = [ff(1:card_ff) ff(1:card_ff)] ;
    card_ff = 2*card_ff ;
    ff(card_ff) = 4*L ;
end

if T < t(N+1)
    c = (T - t(N))/h ;
    t(N+1) = T ;
    y(:,N+1) = (1-c)*y(:,N) + c*y(:,N+1) ;
end

t = t(1:N+1) ; y = y(:,1:N+1) ;

end

% =====
% =====
% r : dimens o do quadrado ou tri ngulo b sico
% L : fator de redimensionamento dos quadrados
function [y, fy] = DisegnaBlocchi(L, ff, r, Nr, nx0, ny0, t, y, fy, ...
    zn_pred, zn_corr, N, METH, Probl)

```

```

nxi = nx0 ; nxf = nx0 + L*r - 1 ;
nyi = ny0 ; nyf = ny0 + L*r - 1 ;
is = 1 ;
s_nxi(is) = nxi ; s_nxf(is) = nxf ; s_nyi(is) = nyi ; s_nyf(is) = nyf ;

i_triangolo = 0 ; stop = 0 ;
while ~stop

    stop = nxi+r-1 == nx0+L*r-1 | (nxi+r-1>=Nr-1) ;

    [zn_pred, zn_corr] =
    Quadrato(nxi, nxf, nyi, nyf, fy, zn_pred, zn_corr, N, METH, Probl) ;

    [y, fy] = Triangolo(nxi, nxi+r-1, t, y, fy, zn_pred, zn_corr,
    N, METH, Probl) ;
    i_triangolo = i_triangolo + 1 ;

    if ~stop
        if nxi+r-1 == nxf % Il triangolo finisce dove finisce il quadrato -
            i_Delta = ff(i_triangolo) ;
            Delta = i_Delta*r ;
            nxi = s_nxf(is)+1 ; nxf = s_nxf(is) + Delta ;
            nyi = s_nxf(is) - Delta +1; nyf = s_nxf(is) ;
            s_nxi(is) = nxi ; s_nxf(is) = nxf ; s_nyi(is) =
            nyi ; s_nyf(is) = nyf ;
        else
            nxi = nxi + r ; nxf = nxi + r - 1 ; nyi = nyf + 1 ;
            nyf = nyf + r ;
            is = is + 1 ;
            s_nxi(is) = nxi ; s_nxf(is) = nxf ; s_nyi(is) = nyi ;
            s_nyf(is) = nyf ;
        end
    end

end

end

end

```

```

% =====

```

```

% =====
function [zn_pred, zn_corr] = Quadrato(nxi, nxf, nyi, nyf, fy, zn_pred, zn_corr)

%coef_beg = nxi-nyf ;
coef_end = nxf-nyi+1 ;
i_fft = log2(coef_end/METH.r) ;
funz_beg = nyi+1 ; funz_end = nyf+1 ;
Nnxf = min(N, nxf) ;

% Avalia o do segmento de convolu o para o preditor
vett_funz = fy(:,funz_beg:funz_end) ;
vett_funz_fft = fft(vett_funz,coef_end,2) ;
zzn_pred = zeros(Probl.problem_size,coef_end) ;
for i = 1 : Probl.problem_size
    i_alpha = min(Probl.alpha_length,i) ;
    Z = METH.bn_fft(i_alpha,METH.index_fft(1,i_fft):
    METH.index_fft(2,i_fft)).*vett_funz_fft(i,:) ;
    zzn_pred(i,:) = real(ifft(Z,coef_end)) ;
end
zzn_pred = zzn_pred(:,nxf-nyf+1-1:end-1) ;
zn_pred(:,nxi+1:Nnxf+1) = zn_pred(:,nxi+1:Nnxf+1) +
zzn_pred(:,1:Nnxf-nxi+1) ;

% Avaliacao do segmento de convolucao para o corretor
if METH.mu > 0
    if nyi == 0 % Evaluation of the lowest square
        vett_funz = [zeros(Probl.problem_size,1) ,
        fy(:,funz_beg+1:funz_end) ] ;
        vett_funz_fft = fft(vett_funz,coef_end,2) ;
    end
    zzn_corr = zeros(Probl.problem_size,coef_end) ;
    for i = 1 : Probl.problem_size
        i_alpha = min(Probl.alpha_length,i) ;
        Z = METH.an_fft(i_alpha,METH.index_fft(1,i_fft):
        METH.index_fft(2,i_fft)).*vett_funz_fft(i,:) ;
        zzn_corr(i,:) = real(ifft(Z,coef_end)) ;
    end
    zzn_corr = zzn_corr(:,nxf-nyf+1:end) ;
    zn_corr(:,nxi+1:Nnxf+1) = zn_corr(:,nxi+1:Nnxf+1) +
    zzn_corr(:,1:Nnxf-nxi+1) ;
end

```

```

else
    zn_corr = 0 ;
end

end

% =====
% =====
function [y, fy] = Triangolo(nxi, nxf, t, y, fy, zn_pred,
    zn_corr, N, METH, Probl)

for n = nxi : min(N,nxf)

    % Avalia o do preditor
    Phi = zeros(Probl.problem_size,1) ;
    if nxi == 1 % Case of the first triangle
        j_beg = 0 ;
    else % Case of any triangle but not the first
        j_beg = nxi ;
    end
    for j = j_beg : n-1
        Phi = Phi + METH.bn(1:Probl.alpha_length,n-j).*fy(:,j+1) ;
    end
    St = StartingTerm(t(n+1),Probl.ic) ;
    y_pred = St + METH.halpha1.*(zn_pred(:,n+1) + Phi) ;
    f_pred = f_vectorfield(t(n+1),y_pred,Probl) ;

    % Avalia o do corretor
    if METH.mu == 0
        y(:,n+1) = y_pred ;
        fy(:,n+1) = f_pred ;
    else
        j_beg = nxi ;
        Phi = zeros(Probl.problem_size,1) ;
        for j = j_beg : n-1
            Phi = Phi + METH.an(1:Probl.alpha_length,n-j+1).*fy(:,j+1) ;
        end
        Phi_n = St + ...

```

```

        METH.halpha2.*(METH.a0(1:Probl.alpha_length,n+1).*fy(:,1)
        + zn_corr(:,n+1) + Phi) ;
    yn0 = y_pred ; fn0 = f_pred ;
    stop = 0 ; mu_it = 0 ;
    while ~stop
        yn1 = Phi_n + METH.halpha2.*fn0 ;
        mu_it = mu_it + 1 ;
        if METH.mu == Inf
            stop = norm(yn1-yn0,inf) < METH.mu_tol ;
            if mu_it > 100 && ~stop
                warning('N o converge ',...
                    strcat('Foi solicitado executar
                    iteracoes corretivas
                    at a convergencia, mas ', ...
                    'o processo nao converge para
                    a toleranciae % em 100 iteration '),
                    METH.mu_tol) ;
                stop = 1 ;
            end
        else
            stop = mu_it == METH.mu ;
        end
        fn1 = f_vectorfield(t(n+1),yn1,Probl) ;
        yn0 = yn1 ; fn0 = fn1 ;
    end
    y(:,n+1) = yn1 ;
    fy(:,n+1) = fn1 ;
end
end

end

% =====
% =====
function f = f_vectorfield(t,y,Probl)

if isempty(Probl.param)
    f = feval(Probl.f_fun,t,y) ;
else

```

```

        f = feval(Probl.f_fun,t,y,Probl.param) ;
end

end

% =====
% =====
function ys = StartingTerm(t,ic)

ys = zeros(size(ic.y0,1),1) ;
for k = 1 : max(ic.m_alpha)
    if length(ic.m_alpha) == 1
        ys = ys + (t-ic.t0)^(k-1)/ic.m_alpha_factorial(k)*ic.y0(:,k) ;
    else
        i_alpha = find(k<=ic.m_alpha) ;
        ys(i_alpha,1) = ys(i_alpha,1) + (t-ic.t0)^(k-1)*ic.y0(i_alpha,k)./ic.m_alpha_factorial(k) ;
    end
end

end

```