MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

Avaliação computacional da influência do erro de modelo da resistência na confiabilidade estrutural de lajes de concreto armado submetidas à punção

por

Carla Simone de Albuquerque

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de
Doutora em Modelagem Computacional

Rio Grande – RS, 2026

Carla Simone de Albuquerque

"Avaliação computacional da influência do erro de modelo da resistência na confiabilidade estrutural de lajes de concreto armado submetidas à punção"

Tese apresentada ao Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande - FURG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora. Área concentração: Modelagem Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br MAURO DE VASCONCELLOS REAL
Data: 08/04/2026 10:03:15-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Mauro de Vasconcellos Real
Orientador – FURG

Documento assinado digitalmente
gov.br VIVIANE LEITE DIAS DE MATTOS
Data: 08/04/2026 10:22:59-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Viviane Leite Dias de Mattos
Coorientadora – FURG

Documento assinado digitalmente
gov.br LIERCIO ANDRE ISOLDI
Data: 08/04/2026 17:05:15-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Liércio André Isoldi
FURG

Documento assinado digitalmente
gov.br CHARLEI MARCELO PALIGA
Data: 08/04/2026 16:36:49-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Charlei Marcelo Paliga
UFPEL

Documento assinado digitalmente
gov.br JORGE MANUEL VIEIRA BORGES LOURENCO RO
Data: 08/04/2026 14:33:03-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Jorge Manuel Vieira Borges Lourenço Rodrigues
UFPEL

A345a

Albuquerque, Carla Simone de
Avaliação computacional da influência do erro de modelo da resistência na confiabilidade estrutural de lajes de concreto armado submetidas à punção / Carla Simone de Albuquerque -- 2026.
216f.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, 2026.

Orientador: Dr..Mauro de Vasconcellos Real
Coorientadora: Dra. Viviane Leite Dias de Mattos

1.Modelagem Computacional. 2. Erro de modelo. 3. Confiabilidade estrutural. 4.Índice de confiabilidade. 5. Resistência à punção. 6. Resistência experimental. I. Real, .Mauro de Vasconcellos. II. Mattos, Viviane Leite Dias de. III. Título.

CDU 004.414.23

Catalogação na fonte: Bibliotecária Brenda Sequeira CRB10/1979

Dedico esta Tese ao meu esposo, Tadeu, meu companheiro de vida e porto seguro, e aos meus médicos, Karennine Nogueira e Flávio Ximenes, cuja dedicação e cuidado foram essenciais para que eu chegasse até aqui.

AGRADECIMENTOS

A Deus, fonte de força, fé e foco, que me sustentou para nunca desistir.

Aos meus familiares, pelo apoio, incentivo, admiração e amor, que foram a base desta etapa da minha vida, em especial aos meus pais (Fátima e Josias) e às minhas irmãs (Telma, Adriana, Ana Cristina e Patrícia).

Aos meus filhos (Jardel e Josias Neto), pela compreensão nos momentos de ausência e por serem minha maior fonte de motivação.

Ao meu esposo (Tadeu), pelo companheirismo incondicional, presente ao longo de toda essa trajetória, fortalecendo-me com amor, carinho, força e fé para seguir em frente.

Aos meus médicos, Karennine Nogueira e Flávio Ximenes, pelo profissionalismo, competência e acompanhamento ao longo deste período.

Aos meus orientadores, Dr. Mauro de Vasconcellos Real e Dra. Viviane Leite Dias Mattos, pela orientação, disponibilidade, colaboração, ensinamentos e paciência.

Aos membros da banca examinadora (Dr. Liércio, Dr. Charlei e Dr. Jorge), pela inestimável contribuição para o aperfeiçoamento deste trabalho.

À Universidade Federal do Rio Grande (FURG) e ao PPGMC, por proporcionarem as condições necessárias para a conclusão deste curso.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo suporte financeiro que viabilizou a realização deste trabalho.

.

“Quando tudo parece estar contra você, lembre-se de que o avião decola contra o vento, não a favor dele.”

RESUMO

Esta Tese de Doutorado analisou a influência da variável aleatória erro de modelo na avaliação da confiabilidade estrutural de lajes lisas de concreto armado submetidas à punção, sem armadura de cisalhamento. Foram analisados os modelos de resistência à punção prescritos pelas normas ABNT NBR6118 (2014), ABNT NBR6118 (2023), ACI318 (2025), EUROCODE2 (2023) e FIB MC2020 (2024). O erro de modelo foi definido a partir da comparação entre as resistências experimentais e aquelas previstas pelos critérios normativos. A análise estatística é fundamentada em um banco de dados composto por 288 resultados experimentais disponíveis na literatura. A partir desses dados, foram avaliados os desempenhos dos modelos normativos e a caracterização estatística do erro de modelo, com ajuste de distribuições de probabilidade. Os cálculos das resistências à punção e erro de modelo foram realizados em Python, enquanto a análise estatística na linguagem R. A formulação da FIB MC2020 apresentou o melhor ajuste estatístico, sendo adotada como referência para o erro de modelo utilizado nas análises de confiabilidade. A caracterização estatística evidenciou coeficientes de variação significativos, confirmando a relevância da incerteza de modelagem. As análises de confiabilidade estrutural foram realizadas pelo método FORM, com validação pelos métodos SORM e de simulação de Monte Carlo com Amostragem por Importância Adaptativa, considerando 96 casos representativos de lajes lisas. Foram avaliados cenários com e sem a inclusão do erro de modelo, considerando combinações simultâneas da resistência do concreto, da espessura das lajes e das razões de carregamento. Os resultados mostraram que a consideração do erro de modelo reduz de 15% a 35% os índices de confiabilidade. Entre as normas analisadas, a ACI318 apresentou o maior erro de modelo médio, seguida pela NBR6118 e EUROCODE2, enquanto a FIB MC2020 apresentou comportamento mais próximo dos resultados experimentais. A análise de sensibilidade evidenciou o erro de modelo como a variável dominante na composição do índice de confiabilidade, com cerca de 37,5% da sensibilidade média total, reforçando a importância de sua incorporação em avaliações probabilísticas de estruturas submetidas à punção. A norma EUROCODE2 apresenta os maiores índices de confiabilidade, seguido pela FIB MC2020, enquanto a ACI318 apresenta os menores valores.

Palavras-chave: Erro de modelo, Confiabilidade estrutural, Índice de confiabilidade, Resistência à punção, Resistência experimental.

ABSTRACT

This doctoral thesis analyzes the influence of the random variable model error on the structural reliability assessment of flat reinforced concrete slabs subjected to punching shear, without shear reinforcement. The punching shear resistance models prescribed by the ABNT NBR6118 (2014), ABNT NBR6118 (2023), ACI318 (2025), EUROCODE2 (2023) and FIB MC2020 (2024) standards are analyzed. The model error is defined by comparing experimental resistances with those predicted by normative criteria. The statistical analysis is based on a database composed of 288 experimental results available in the literature. Based on these data, the performance of the normative models and the statistical characterization of the model error were evaluated, with adjustment of probability distributions. The punching resistance and model error calculations were performed in Python, while the statistical analysis was performed in the R language. The FIB MC2020 formulation showed the best statistical fit and was adopted as the reference for the model error used in reliability analyses. Statistical characterization revealed significant coefficients of variation, confirming the relevance of modeling uncertainty. Structural reliability analyses were performed using the FORM method, with validation by SORM and Monte Carlo simulation methods with Adaptive Importance Sampling, considering 96 representative cases of flat slabs. Scenarios with and without the inclusion of model error were evaluated, considering simultaneous combinations of concrete strength, slab thickness, and load ratios. The results showed that considering model error reduces reliability indices by 15% to 35%. Among the standards analyzed, ACI318 presented the highest mean model error, followed by NBR6118 and EUROCODE2, while FIB MC2020 showed behavior closest to the experimental results. Sensitivity analysis revealed model error as the dominant variable in the reliability index, accounting for approximately 37.5% of the total average sensitivity, reinforcing the importance of its incorporation in probabilistic evaluations of structures subjected to punching shear. The EUROCODE2 standard has the highest reliability indices, followed by FIB MC2020, while ACI318 has the lowest values.

Keywords: Model error, Structural Reliability, Reliability index, Punching resistance, Experimental resistance.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO 22
1.1. Motivação 24
1.2. Justificativa 29
1.3. Limitações 30
1.4. Objetivos 30
1.4.1. Objetivo geral 30
1.4.2. Objetivos específicos 30
1.5. Metodologia 31
1.6. Organização do trabalho 35
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 36
2.1. Estado da arte 36
2.2. Considerações sobre ineditismo 41
3. RESISTÊNCIA À PUNÇÃO DE LAJES LISAS DE CONCRETO ARMADO 43
3.1. Lajes lisas de concreto armado 43
3.2. Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento 45
3.3. Prescrições normativas 47
3.3.1. ABNT NBR6118 (2023) 47
3.3.2. FIB MC2020 (2024) 50
3.3.3. ACI318 (2025) 54
3.3.4. EUROCODE2 (2023) 55
4. QUANTIFICAÇÃO DE INCERTEZAS E ERRO DE MODELO NA ENGENHARIA 58
4.1. Classificação de incertezas 58
4.2. Fontes de incertezas 60
4.3. Erro de modelo 62
5. CONFIABILIDADE ESTRUTURAL 64
5.1. Conceitos de Estatística e Probabilidade 64
5.1.1. Variáveis aleatórias 65
5.1.2. Distribuição de probabilidade 65
5.1.3. Distribuições teóricas de probabilidade 67
Distribuição Normal 67
Distribuição Lognormal 69

Distribuição de Gumbel 71
Distribuição de Weibull 73
Distribuição Gama 75
5.2. Função estado limite 77
6. MÉTODOS DE CONFIABILIDADE 82
6.1. Simulação de Monte Carlo 82
6.1.1. Amostragem por importância 84
6.1.2. Amostragem por importância adaptativa 87
6.2. Métodos de transformação 87
6.2.1. FORM 88
6.2.2. SORM 95
7. AVALIAÇÃO ESTATÍSTICA DO ERRO DE MODELO DE RESISTÊNCIA À PUNÇÃO 99
7.1. Banco de dados experimental estudado 99
7.2. Caracterização das variáveis de entrada 103
7.3. Caracterização das variáveis de saída 108
7.4. Erro de modelo para previsão de resistência à punção de lajes lisas conforme a NBR6118 113
7.5. Erro de modelo para previsão de resistência à punção de lajes lisas conforme a ACI318 119
7.6. Erro de modelo para previsão de resistência à punção de lajes lisas conforme a FIB MC2020 122
7.7. Erro de modelo para previsão de resistência à punção de lajes lisas conforme a EUROCODE2 127
7.8. Síntese comparativa das distribuições ajustadas aos erros de modelo 131
7.9. Análise comparativa dos critérios normativos e erros de modelo 132
7.9.1. Desempenho dos modelos normativos: análise dos erros de modelo 133
7.9.2. Validação 138
8. ANÁLISE DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL DE LAJES LISAS SUBMETIDAS À PUNÇÃO 140
8.1. Caracterização das lajes lisas analisadas 140
8.2. Função estado limite 142
8.3. Caracterização das variáveis aleatórias do estudo 143
8.3.1. Carga permanente ($\boldsymbol{g}$) 143

8.3.2. Carga variável ($\boldsymbol{q}$) 144
8.3.3. Altura útil da laje ($\boldsymbol{d}$) 144
8.3.4. Altura da laje ($\boldsymbol{h}$) 144
8.3.5. Resistência ao escoamento do aço ($\boldsymbol{fyk}$) 144
8.3.6. Resistência do concreto ($\boldsymbol{fck}$) 144
8.3.7. Erro de modelo da solicitação ($\boldsymbol{Em, S}$) 145
8.3.8. Erro de modelo de resistência ($\boldsymbol{Em, R}$) 145
8.3.9. Síntese dos parâmetros adotados 146
8.4. Dimensionamento à punção das lajes lisas analisadas 147
8.5. Análise dos resultados 148
8.5.1. Índice de confiabilidade com erro de modelo 148
8.5.2. Índice de confiabilidade sem o erro de modelo 154
8.5.3. Análise de sensibilidade 158
8.5.4. Comparação dos resultados 160
9. CONCLUSÃO 163
9.1. Principais contribuições desta Tese 165
9.2. Sugestões de trabalhos futuros 165
REFERÊNCIAS 167
APÊNDICE 1 – Banco de dados das 288 lajes lisas estudadas 178
APÊNDICE 2 – Resultado das cargas de ruptura e erros de modelo das normas analisadas 189
APÊNDICE 3 – Dimensionamento à punção das 96 lajes lisas analisadas 201
APÊNDICE 4 – Índice de confiabilidade com e sem o erro de modelo pelo método FORM 213

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Lajes lisa de concreto armado 24
Figura 1.2 – Edifício 2000 Commonwealth Avenue após o colapso 25
Figura 1.3 – Edifício Skyline Plaza após o colapso 26
Figura 1.4 – Edifício Harbour Cay Condominium após o colapso 27
Figura 1.5 – Edifício Pipers Row Car Park após o colapso..... 28
Figura 1.6 – Edifício Tropicana Casino parking garage após o colapso 28
Figura 1.7 – Fluxograma das etapas metodológicas adotadas na pesquisa 34
Figura 3.1 – Laje lisa de concreto armado..... 43
Figura 3.2 – Modo de falha por punção em lajes lisas 44
Figura 3.3 – Ruptura por punção em laje lisa sem armadura de cisalhamento 45
Figura 3.4 – Teoria da Fissura crítica ao cisalhamento 45
Figura 3.5 – Perímetros críticos em pilares internos 48
Figura 3.6 – Perímetros básicos de controle..... 50
Figura 3.7 – Altura efetiva da laje (dv) e altura útil (d) 51
Figura 3.8 – Rotação (ψ) da laje..... 52
Figura 3.9 – Perímetro efetivo conforme a ACI318 (2025) 54
Figura 3.10 – Perímetros de controle típicos (b0,5) e perímetros (b0) em torno das áreas de apoio..... 56
Figura 4.1- Tipos de incertezas..... 59
Figura 4.2 - Esquema geral da quantificação de incertezas em Engenharia de estruturas 60
Figura 5.1 – Distribuição Normal – Função de Densidade de Probabilidade 68
Figura 5.2 – Distribuição Normal – Função de Distribuição de Probabilidade 68
Figura 5.3 – Distribuição Lognormal – Função de Densidade de Probabilidade..... 70
Figura 5.4 – Distribuição Lognormal – Função de Distribuição de Probabilidade..... 70
Figura 5.5 – Distribuição Gumbel – Função de Densidade de Probabilidade..... 71
Figura 5.6 – Distribuição Gumbel – Função de Distribuição de Probabilidade..... 72
Figura 5.7 – Distribuição Weibull – Função de Densidade de Probabilidade..... 73
Figura 5.8 – Distribuição Weibull – Função de Distribuição de Probabilidade..... 74
Figura 5.9 – Distribuição Gama – Função de Densidade de Probabilidade..... 76
Figura 5.10 – Distribuição Gama – Função de Distribuição de Probabilidade 76
Figura 5.11 – Probabilidade de falha em função do índice de confiabilidade..... 80

Figura 5.12 – Representação do índice de confiabilidade. 81
Figura 6.1 – Geração de números aleatórios com distribuição prescrita 83
Figura 6.2 – Método de Monte Carlo com Amostragem por Importância 85
Figura 6.3 – Amostragem por importância usando o ponto de projeto. 86
Figura 6.4 – Aproximação de primeira e segunda ordem (FORM e SORM) 88
Figura 6.5 – Transformação do espaço normal para o normal equivalente 89
Figura 6.6 – Transformação das variáveis $X1$ e $X2$ em variáveis normais padrão independentes 94
Figura 7.1 – Histogramas das variáveis b e d 105
Figura 7.2 – Histogramas das variáveis fc e fy 105
Figura 7.3 – Histogramas das variáveis ρ e rs 105
Figura 7.4 – Boxplots das variáveis b e d 106
Figura 7.5 - Boxplots das variáveis fc e fy 107
Figura 7.6 - Boxplots das variáveis ρ e rs 107
Figura 7.7 – *Boxplots* dos erros de modelo segundo os critérios normativos 111
Figura 7.8 – Comparação das distribuições dos dados conforme a seção dos pilares .. 112
Figura 7.9 – Comparação entre Em e as cargas $Vexp$ e Vm (NBR14 e NBR23) 114
Figura 7.10 – Correlação entre variáveis de entrada e saída (NBR14 e NBR23) 115
Figura 7.11 – Q-Q plot das melhores distribuições da NBR14 e NBR23 118
Figura 7.12 – Comparação entre Em e as cargas $Vexp$ e Vm (ACI318) 119
Figura 7.13 – Correlação entre variáveis de entrada e saída (ACI318) 120
Figura 7.14 – Q-Q plot das melhores distribuições da ACI318 121
Figura 7.15 – Comparação entre Em e as cargas $Vexp$ e Vm (FMCI) 122
Figura 7.16 – Comparação entre Em e as cargas $Vexp$ e Vm (FMCII) 123
Figura 7.17 – Correlação entre variáveis de entrada e saída (FMCI e FMCII) 124
Figura 7.18 – Q-Q plot das melhores distribuições da FMCI 127
Figura 7.19 – Q-Q plot das melhores distribuições da FMCII 127
Figura 7.20 – Comparação entre Em e as cargas $Vexp$ e Vm (EC2) 128
Figura 7.21 – Correlação entre variáveis de entrada e saída (EC2) 129
Figura 7.22 – Q-Q plot das melhores distribuições da EC2 131
Figura 7.23 – Modelos de cálculo das normas estudadas 135
Figura 7.24 – Histogramas dos erros de modelo de cada norma. 137
Figura 8.1 – Modelo estrutural 141

Figura 8.2 – Comparação dos índices de confiabilidade da FMCII obtidos pelos métodos FORM, SORM e MCAIA 149
Figura 8.3 – Faixa de variação dos índices de confiabilidade em função da resistência do concreto para as normas analisadas 150
Figura 8.4 – Variação do índice de confiabilidade β em função da razão de carregamento para diferentes valores de fck 152
Figura 8.5 – Influência da espessura da laje (h) no índice de confiabilidade β segundo diferentes normas 153
Figura 8.6 – Variação dos índices de confiabilidade em função da resistência do concreto para as normas analisadas, desconsiderando o erro de modelo 155
Figura 8.7 – Variação do índice de confiabilidade β em função da razão de carregamento para diferentes valores de fck, sem considerar o erro de modelo 156
Figura 8.8 – Influência da espessura da laje (h) no índice de confiabilidade β segundo diferentes normas, desconsiderando o erro de modelo 157
Figura 8.9 – Sensibilidade com erro de modelo 158
Figura 8.10 – Sensibilidade sem erro de modelo 159
Figura 8.11 – Índice de confiabilidade em função da resistência à compressão do concreto para as normas analisadas 161

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Valores de k 49
Tabela 5.1– Tipos de Estado Limite 77
Tabela 7.1– Descrição do banco de dados 100
Tabela 7.2 – Variáveis de entrada do banco de dados 103
Tabela 7.3 – Medidas resumo das variáveis de entrada 104
Tabela 7.4 – Equações para determinação da resistência à punção das lajes lisas sem armadura de cisalhamento de acordo com os critérios normativos 109
Tabela 7.5 – Medidas resumo das variáveis de saída 110
Tabela 7.6 – Resultados dos testes de aderência para NBR14 116
Tabela 7.7 – Resultados dos testes de aderência para NBR23 117
Tabela 7.8 – Comparativo dos critérios de informação (AIC e BIC) das distribuições ajustadas às normas NBR14 e NBR23 117
Tabela 7.9 – Resultados dos testes de aderência para ACI318 120
Tabela 7.10 – Critérios de informação (AIC e BIC) das distribuições ajustadas para a norma ACI318 121
Tabela 7.11 – Resultados dos testes de aderência para FMCI 125
Tabela 7.12 – Resultados dos testes de aderência para FMCII 125
Tabela 7.13 – Comparativo dos critérios de informação (AIC e BIC) das distribuições ajustadas às normas FMCI e FMCII 126
Tabela 7.14 – Resultados dos testes de aderência para EC2 130
Tabela 7.15– Critérios de informação (AIC e BIC) das distribuições ajustadas para a norma EC2 130
Tabela 7.16 – Síntese comparativa das melhores distribuições ajustadas 132
Tabela 7.17– Regressão linear e indicadores estatísticos dos modelos normativos 134
Tabela 7.18 – Resultado dos erros de modelo das normas NBR6118 e ACI318 139
Tabela 8.1 – Característica das lajes analisadas 142
Tabela 8.2 – Parâmetros estatísticos para diferentes classes de resistência do concreto 145
Tabela 8.3 – Parâmetros estatísticos dos erros de modelo 146
Tabela 8.4 – Valores estatísticos e característicos da análise de confiabilidade 147

LISTA DE SÍMBOLOS

A	matriz ortogonal, área [cm²], armadura [cm²/m]
a	vão de cisalhamento [mm]
b	largura, perímetro da seção crítica, dimensão do pilar, perímetro de punção [cm]
B	matriz da derivada de segunda ordem
c	parâmetro de penalidade
C	matriz de correlação, superfície crítica
d	distância, direção de busca, distância da face inferior do concreto em relação ao eixo das barras de aço, diâmetro do agregado, altura útil [cm]
D	matriz diagonal, diâmetro máximo do agregado, diâmetro do pilar
e	excentricidade da força de cisalhamento
exp	exponencial
E	módulo de elasticidade do aço [GPa]
$E\,[g(\,)]$	valor médio da função estado limite
f	tensão, resistência. [MPa]
F	força, reação concentrada de cálculo
$f(\,)$	função densidade de probabilidade
$F(\,)$	função de distribuição acumulada
g	coeficientes de assimetria e curtose, carga permanente [kN/m²]
$g(\,)$	função estado limite
$h(\,)$	função de amostragem
h	altura, altura da laje [cm]
H	matriz ortogonal
$I(\,)$	função indicadora
J	matrizes Jacobianas

k	parâmetro da distribuição Weibull, fator que representa o efeito de tamanho da laje na resistência à punção
K	coeficiente associado à influência do diâmetro, parâmetro que considera a influência da esbeltez da ligação laje–pilar
l	comprimento útil da laje [cm]
L	vão efetivo [cm]
M	momento fletor, momento resistente, solicitante, característico e de cálculo [kN.m/m]
p	carregamento característico e total
P	probabilidade
q	carga variável [kN/m²]
r	posição em relação ao eixo do pilar [mm], razão entre as cargas variável e permanente, taxa de armadura
R	variável aleatória da força resistente, matriz de correlação
S	variável aleatória da força solicitante, biela
t	resistência última à punção, resistência máxima limitada por norma
u	parâmetro da distribuição Gumbel, perímetro
V	vetor de médias, variável de resultados reais, força cortante característica e de cálculo [kN]
$Var\,[g(\,)]$	variância da função estado limite
w	parâmetro da distribuição Gama
W	módulo da resistência plástica
x^*	ponto de falha
x	direção x
X	variável aleatória, eixo X
y^*	ponto de falha
y	direção y
Y	variável aleatória, variável reduzida, eixo Y, resposta do modelo

Z variável aleatória, eixo Z

Símbolos gregos

α cosseno diretor, parâmetro de forma das distribuições Gumbel e Gama

β índice de confiabilidade, parâmetro de forma da distribuição Gama, razão entre a maior dimensão do pilar e a maior largura, coeficiente da excentricidade

Γ função Gama

δ coeficiente de variação

γ coeficiente de ponderação das ações, constante de Euler

θ erro de modelo

μ média

λ parâmetro da distribuição Lognormal, fator de modificação do efeito escala

ξ fator de escala para punção

ζ parâmetro da distribuição Lognormal

$\prod$ produto

ρ correlação, taxa de armadura longitudinal

σ desvio padrão

σ^2 variância

ϕ função densidade de probabilidade, fator redutor da resistência do concreto

Φ função de distribuição normal padronizada acumulada

Ψ rotação da laje

$\sum$ somatório

τ tensão de cálculo

∂ derivada

$\int$ integral

∇ gradiente

Ω espaço amostral

Sub índices

c	concreto
Em	erro de modelo
exp	experimental
f	falha
$flex$	flexão da laje
g	carga permanente
m	modelo
p	perímetro critico
R	resistência
S	solicitação
s	segurança, armadura de aço
x	valor assumido pela variável aleatória de X.
y	escoamento do aço, valor assumido pela variável aleatória de Y.
z	valor assumido pela variável aleatória de Z.

LISTA DE ABREVIATURAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ACI	*American Concrete Institute*
AISC	*American Institute of Steel Construction*
AIC	Critério de Informação de *Akaike*
ASNZS	*Australian Standards and New Zealand Standards*
BIC	Critério de Informação *Bayesiano*
CC	Consequence Class
CSA	*Canadian Standards Association*
CSCT	*Critical Shear Crack Theory*
EC	*Eurocode*
FIB	*Fédération Internationale du Béton*
FMC	*Fedération Internationale du Betón Model Code*
FORM	*First Order Reliability Method*
FRP	*Fiber Reinforced Polymer*
GAMLSS	*Generalized Additive Models for Location*, *Scale and Shape*
GBRT	*Gradient Boosted Regression Tree*
GFRP	*Glass Fiber Reinforced Polymer*
GLM	*Generalized Linear Model*
JCSS	*Joint Committee on Structural Safety*
LoA	*Levels-of-Approximation*
MAE	*Mean Absolute Error*
MC	*Model Code*
MCAIA	Monte Carlo com Amostragem por Importância Adaptativa
MCMC	Markov Chain Monte Carlo
ML	*Maximum Likelihood*

NBR	Norma Brasileira
NRMSE	*Normalized Root Mean Squared Error*
OLS	*Ordinary Least Square*
RLM	*Regression Linear Model*
RMSE	*Root Mean Squared Error*
SORM	*Second Order Reliability Method*
TFCC	Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento

1. INTRODUÇÃO

Para Albuquerque e Real (2020), assegurar níveis adequados de segurança nas estruturas, garantindo um bom desempenho, é um dos principais desafios da Engenharia. As normas de projeto utilizam modelos baseados em estados limites, que definem uma série de critérios de segurança durante o dimensionamento das estruturas. O impacto das incertezas na segurança pode ser avaliado por meio da análise da probabilidade de falha de um estado limite.

De acordo com Albuquerque (2021), a confiabilidade é uma ferramenta em ascensão na Engenharia, pois possibilita a quantificação das incertezas nas variáveis de projeto, ajudando assim na tomada de decisões mais importantes em relação à segurança de uma estrutura. A confiabilidade de um projeto é a medida probabilística da segurança de que um determinado estado limite não será atingido (VERMA *et al.*, 2016; HALDAR e MAHADEVAN, 2000). Conforme Araújo (2014), uma estrutura não deve atingir nem um estado limite último, que corresponderia à ruína ou ao colapso; nem um estado limite de serviço, que tornaria inviável a sua utilização.

Conforme Staciarini (2020), a confiabilidade é uma ferramenta que permite considerar as incertezas relacionadas aos projetos estruturais de Engenharia, e a análise de confiabilidade pode ser utilizada para verificar e comparar o nível de segurança entre diversas soluções estruturais.

Para Martins (2014), as estruturas são submetidas a inúmeras solicitações durante sua vida útil e as incertezas geradas pela aleatoriedade de alguns parâmetros envolvidos devem ser estimadas quando se deseja quantificar as probabilidades de falha do sistema. De acordo com Veiga (2008), os métodos de confiabilidade estrutural são instrumentos indispensáveis na avaliação da integridade das estruturas e no desenvolvimento de novos formatos de segurança estrutural.

Para Shen *et al.* (2022), a incerteza é inevitável no mundo físico real, e é necessário levar em conta seus efeitos no projeto estrutural. Segundo Justino (2018), a quantificação de incertezas tem sido alvo de constantes pesquisas devido a sua importância em diversas áreas na Engenharia. Este interesse decorre do fato de que incertezas são inevitáveis em projetos de Engenharia e o que se procura é quantificá-las para que seja possível tomar melhores decisões com níveis conhecidos de confiança.

Conforme Beck (2024), as incertezas de modelo têm sua origem na representação do comportamento estrutural por meio de modelos simplificados. A incerteza de modelo

pode ser representada através da variável aleatória erro de modelo, onde sua distribuição de probabilidade pode ser determinada através de uma caracterização estatística, e é definida realizando comparações entre ensaios experimentais e a resistência determinada via modelo. Parte da literatura menciona que os parâmetros estatísticos do erro de modelo são determinados diretamente desta comparação (MIRZA e SKRABECK, 1991; MIRZA e SKRABECK, 1992; BECK *et al*., 2009; NOWAK *et al*., 2012; SYKORA *et al*., 2013).

De acordo com Furst (2020), a incorporação das incertezas de modelo nos projetos estruturais é um tema bastante atual e abordado pela literatura. Contudo, detalhes a respeito da determinação do erro de modelo são escassos, não havendo consenso sobre como este deve ser medido e qual seu verdadeiro impacto nas aplicações em problemas de Engenharia.

Nesse contexto, torna-se fundamental não apenas caracterizar estatisticamente o erro de modelo associado à resistência à punção, mas também avaliar de forma objetiva o impacto de sua incorporação nas análises de segurança estrutural. A comparação entre avaliações realizadas com e sem a consideração explícita dessa incerteza permite quantificar sua influência nos níveis de confiabilidade estimados e verificar em que medida a omissão do erro de modelo pode conduzir a interpretações não realistas da segurança de lajes lisas de concreto armado.

Assim sendo, esta Tese investiga o efeito da incorporação da variável aleatória erro de modelo associada à resistência à punção de lajes lisas de concreto armado, com base nos modelos teóricos previstos nas normas ABNT NBR6118 (2014) e ABNT NBR6118 (2023), ACI318 (2025), EUROCODE2 (2023) e FIB MC2020 (2024). Avaliando de que forma a consideração explícita dessa variável influencia as estimativas de segurança estrutural e os níveis de confiabilidade obtidos.

Galdino (2022) explica que as lajes lisas recebem esse nome pela ausência de vigas no sistema estrutural, o que faz com que as lajes se apoiem diretamente sobre os pilares, como mostrado na Fig. 1.1. Esse sistema oferece várias vantagens, como facilidade nas instalações prediais, versatilidade geométrica, menores alturas de pé-direito e, consequentemente, a possibilidade de construir mais andares, entre outras.



Figura 1.1 – Lajes lisa de concreto armado

Fonte: Carvalho (2022)

Araújo (2014) afirma que devido ao fato de as lajes lisas se apoiarem diretamente sobre os pilares, ocorre uma grande concentração de tensões cisalhantes nas regiões de conexão entre a laje e os pilares. A principal consequência dessas tensões elevadas é a ruptura, que se caracteriza pela falha sem escoamento da armadura, resultando em uma ruptura frágil. Esse fenômeno de altas tensões cisalhantes é denominado punção, representando um estado limite último por cisalhamento nas áreas próximas às forças concentradas.

A teoria mais recente para determinar a resistência à punção é a Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (TFCC), proposta por Muttoni (2008). Ela se baseia na ideia de que a resistência à punção diminui à medida que aumenta a rotação da laje. Essa teoria integra as formulações de dimensionamento da FIB MC2020 (2024).

1.1. Motivação

A incorporação das incertezas nos projetos estruturais de concreto armado é de fundamental importância para a segurança e durabilidade destas estruturas. Diversos acidentes ao longo das últimas décadas demonstram que a ruptura por punção em lajes lisas de concreto armado pode ser o mecanismo inicial de colapsos progressivos de grande

magnitude, com sérias consequências humanas e econômicas. Entre os casos registrados, destacam-se episódios emblemáticos apresentados a seguir, os quais evidenciam a necessidade de compreender melhor os efeitos da punção e de incorporar as incertezas dos modelos de cálculo nas avaliações de segurança.

O edifício 2000 Commonwealth Avenue (Fig. 1.2), em Boston (EUA), colapsou em 1971 durante a fase de construção, após a ruptura por punção de uma laje superior. O colapso se propagou progressivamente pelos pavimentos inferiores, resultando no empilhamento das lajes. Investigações técnicas apontaram a falha na ligação laje–pilar como o mecanismo inicial do colapso (KING e DELATTE, 2004).



Figura 1.2 – Edifício 2000 Commonwealth Avenue após o colapso

Fonte: King e Delatte (2004)

O edifício Skyline Plaza (Fig. 1.3) na Virginia (EUA), colapsou em 1973 durante a construção. Os dois fatores que contribuíram para isso foram a remoção prematura dos escoramentos abaixo da laje do 23º andar e a baixa resistência do concreto na área que suportava o peso da laje do 24º andar, criaram condições para uma falha por punção, que desencadeou colapso progressivo (LEYENDECKER e FATTAL, 1977).

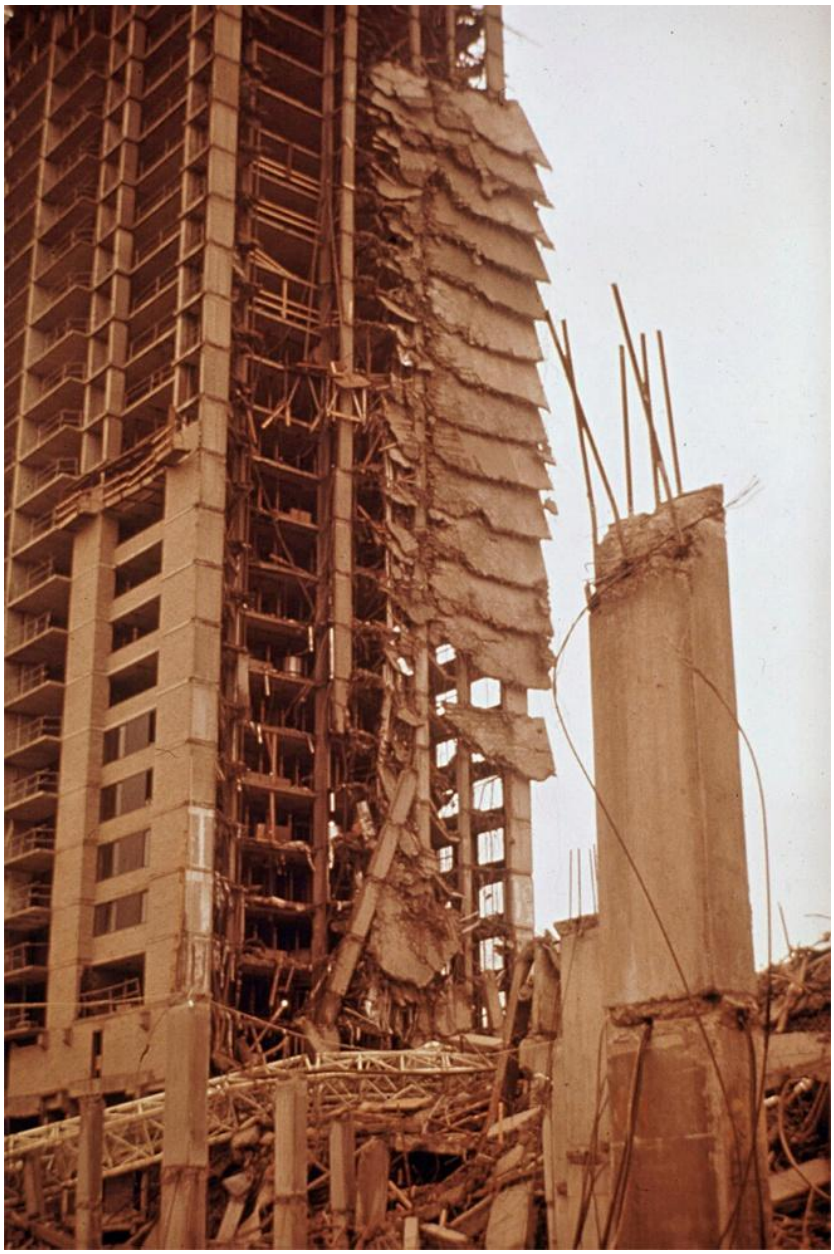


Figura 1.3 – Edifício Skyline Plaza após o colapso

Fonte: Leyendecker e Fattal (2004)

O edifício Harbour Cay Condominium (Fig. 1.4) na Florida (EUA), colapsou em 1981 enquanto se concretava a laje de cobertura. Foi identificado que a capacidade de punção da laje do 5º pavimento foi insuficiente (espessura menor que o necessário, problemas na execução e no controle da qualidade do concreto), levando à ruptura por punção em torno do pilar e colapso progressivo, vitimando 11 pessoas (LEW *et al*., 1982).



Figura 1.4 – Edifício Harbour Cay Condominium após o colapso

Fonte: Lew *et al*. (1982)

O edifício Pipers Row Car Park (Fig. 1.5) em Wolverhampton (Reino Unido), colapsou parcialmente em 1997. Uma investigação mostrou que a deterioração, reparos inadequados e fatores de projeto/construção reduziram a segurança. Uma ruptura por punção num pilar originou a progressão do colapso sobre áreas adjacentes. Este caso tornou-se referência sobre vulnerabilidade de lajes planas a colapsos por punção (WOOD, 2003).



Figura 1.5 – Edifício Pipers Row Car Park após o colapso

Fonte: Wood (2003)

O edifício Tropicana Casino parking garage (Fig. 1.6) em Atlantic City (EUA), colapsou em 2003 durante uma concretagem. Investigação apontou problemas de escoramento, conexões deficientes e práticas de construção que permitiram sobrecargas temporárias e falhas locais que incluem mecanismos de punção, tendo vitimado quatro trabalhadores (AYUB, 2004).



Figura 1.6 – Edifício Tropicana Casino parking garage após o colapso

Fonte: Ayub (2004)

Esses acidentes evidenciam que, apesar da evolução dos critérios normativos, ainda existem incertezas significativas associadas aos modelos de cálculo da resistência à punção em lajes lisas de concreto armado. Logo, a motivação desta Tese é analisar o nível de segurança dos modelos de cálculo de lajes lisas de concreto armado, incorporando as incertezas dos modelos de resistência na análise de confiabilidade, através da variável aleatória erro de modelo.

1.2. Justificativa

Na última década, houve um aumento significativo na demanda científica pela quantificação de incertezas. Essa demanda é sustentada por duas situações principais de acordo com Ang e Tang (2007): (a) uma percepção crescente de que tudo está sujeito a incertezas; (b) se houver incertezas nas variáveis de entrada de um problema de Engenharia, também haverá incertezas nos seus resultados. Assim, na análise da segurança de estruturas, diferentes modelos podem ser usados para representar o comportamento de um sistema estrutural. Esses modelos são aproximações, pois envolvem simplificações que impossibilitam uma representação exata da resposta da estrutura. Dessa forma, os modelos utilizados em problemas de engenharia estão sujeitos as incertezas de modelo.

Existem diversas normas que orientam os critérios e parâmetros de cálculo para estruturas de concreto armado. Porém, cada modelo inclui suas especificações, e assim, para uma mesma estrutura, podem apresentar resultados distintos. Para avaliar os diferentes modelos de cálculo é necessário analisar a presença das incertezas em cada modelo, comparando os resultados de testes experimentais existentes na literatura, com os resultados determinados dos critérios normativos, através da variável erro de modelo. Então, surge a necessidade de utilização de análise estatística da variável erro de modelo, avaliando as distribuições de probabilidade que melhor se ajustam e representam esta variável, para que dessa forma seja incorporado na análise de confiabilidade. E para assim, identificar a influência desta variável na confiabilidade das estruturas, esperando-se então que o resultado represente melhor o nível de segurança de uma estrutura real.

1.3. Limitações

Apesar dos avanços apresentados, esta pesquisa apresenta limitações que devem ser consideradas na interpretação dos resultados. O banco de dados utilizado contempla exclusivamente lajes lisas sem armadura de punção e sob condições de carregamento centrado, não abrangendo situações com elevados momentos transferidos, tampouco outros sistemas estruturais, geometrias mais complexas ou efeitos construtivos específicos.

1.4. Objetivos

Os objetivos desta pesquisa são classificados em geral e específicos.

1.4.1. Objetivo geral

Esta Tese tem como objetivo analisar a influência da variável aleatória erro de modelo da resistência à punção na confiabilidade estrutural de lajes lisas de concreto armado, por meio da aplicação de métodos de confiabilidade estrutural, considerando os modelos teóricos de cálculo prescritos por diferentes normas técnicas.

1.4.2. Objetivos específicos

Este trabalho tem como objetivos específicos:

● Avaliar o desempenho dos modelos normativos de previsão da resistência à punção, prescritos pelas normas NBR6118, ACI318, EUROCODE2 e FIB MC2020, por meio da comparação entre resistências previstas e resultados experimentais;

● Quantificar a variável aleatória erro de modelo da resistência à punção associada a cada modelo normativo analisado;

● Analisar a relação entre os valores experimentais e os valores previstos, identificando tendências de subestimação ou superestimação dos modelos;

● Determinar a distribuição de probabilidade que melhor se ajusta a variável erro de modelo, considerando lajes lisas submetidas à punção;

● Avaliar estatisticamente o desempenho dos modelos normativos, utilizando métricas de erro, com vistas à comparação de sua precisão e variabilidade;

● Validar a determinação do erro de modelo da resistência à punção, por meio da comparação das médias e dos valores inversos dos erros obtidos com resultados de estudos consolidados da literatura;
● Realizar análises de confiabilidade estrutural de lajes lisas de concreto armado, considerando cenários com e sem a incorporação do erro de modelo na função estado limite;
● Analisar a influência de diferentes modelos normativos de cálculo nos índices de confiabilidade estrutural através de suas comparações;
● Avaliar a importância relativa das variáveis aleatórias na composição do índice de confiabilidade, por meio da análise de sensibilidade obtida a partir do método FORM, considerando a presença e a ausência do erro de modelo;
● Comparar os índices de confiabilidade estrutural obtidos a partir das diferentes normas de projeto (NBR6118, ACI318, EUROCODE2 e FIB MC2020), em função da resistência característica do concreto, considerando a inclusão do erro de modelo, de modo a avaliar o desempenho relativo de cada abordagem normativa.

1.5. Metodologia

A metodologia adotada nesta Tese inicia-se com a coleta de dados experimentais, por meio de um banco de dados composto por 288 resultados disponíveis na literatura, referentes à resistência à punção de lajes lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento. Esses dados experimentais servem de base para a avaliação do desempenho dos modelos normativos de previsão da resistência à punção.

Na sequência, os modelos de cálculo de resistência à punção prescritos pelas normas ABNT NBR6118 (2014), ABNT NBR6118 (2023), ACI318 (2025), EUROCODE2 (2023) e FIB MC2020 (2024) são avaliados por meio da comparação entre as resistências previstas e aquelas observadas experimentalmente. A partir dessa comparação, foram determinados os parâmetros estatísticos associados à variável aleatória erro de modelo da resistência.

Com base nos resultados obtidos, foram ajustadas as distribuições de probabilidade que melhor representam o erro de modelo, bem como analisadas possíveis correlações entre os parâmetros envolvidos. Para a avaliação da qualidade do ajuste, foram empregados testes de aderência, a análise dos critérios de informação Akaike (AIC)

e Bayesiano (BIC), bem como a verificação gráfica por meio de diagramas Quantil-Quantil (Q-Q plot).

Essas análises foram implementadas por meio de scripts desenvolvidos na linguagem de programação R (R CORE TEAM, 2023), devido à sua ampla aplicação em análises estatísticas, flexibilidade e eficiência na manipulação e visualização de dados.

De forma complementar à caracterização probabilística do erro de modelo, foi realizada a avaliação comparativa do desempenho dos modelos normativos por meio da análise de regressão linear entre as resistências experimentais e as resistências previstas, bem como pela aplicação de métricas estatísticas de erro. Nessa etapa, a inclinação e o intercepto das retas de regressão permitiram identificar tendências sistemáticas de subestimação ou superestimação, enquanto os indicadores MAE, RMSE, R^2 e NRMSE forneceram medidas quantitativas da precisão e da capacidade explicativa de cada modelo.

A análise conjunta dessas métricas, associada à inspeção gráfica dos diagramas comparativos e dos histogramas do erro de modelo, possibilitou identificar os modelos com comportamento mais consistentes e menores variabilidades. Com base nesses resultados, definiu-se a exclusão da ABNT NBR6118 (2014) e do FIB MC2020 Nível I da etapa de confiabilidade, restringindo as análises de confiabilidade aos modelos que melhor representam o comportamento experimental da resistência à punção.

Adicionalmente, foi realizada a validação da determinação do erro de modelo da resistência à punção, por meio da comparação dos resultados obtidos nesta pesquisa com aqueles apresentados em estudos consolidados da literatura. Para essa finalidade, foram considerados os trabalhos de Silva (2022) e Silva Júnior e Gomes (2023), que analisaram a resistência à punção de lajes lisas sem armadura de cisalhamento com base nas normas ABNT NBR6118 (2014) e ACI318 (2025).

A validação foi conduzida por meio da comparação das médias do erro de modelo e de seus valores inversos, verificando-se a consistência e a coerência dos resultados obtidos neste estudo em relação às referências adotadas. Essa etapa permitiu assegurar a representatividade estatística e a consistência da variável aleatória erro de modelo antes de sua incorporação nas análises de confiabilidade estrutural.

Após a caracterização estatística do erro de modelo, foram realizadas as análises de confiabilidade estrutural, considerando-se duas situações: com e sem a incorporação da variável aleatória erro de modelo na função estado limite das lajes analisadas. Essas análises têm como objetivo avaliar o índice de confiabilidade estrutural e quantificar de

forma objetiva a influência do erro de modelo na segurança das estruturas. Para isso, foram considerados 96 casos de lajes lisas de concreto armado, representativos de diferentes condições geométricas, mecânicas e de carregamento.

A análise de confiabilidade foi conduzida principalmente pelo método FORM (*First Order Reliability Method*), sendo os resultados validados por meio dos métodos SORM (*Second Order Reliability Method*) e do método de simulação de Monte Carlo com Amostragem por Importância Adaptativa (MCAIA), de modo a garantir a consistência e a robustez das estimativas obtidas.

A aplicação do método FORM permite ainda a obtenção dos coeficientes de sensibilidade das variáveis aleatórias, possibilitando identificar a importância relativa de cada parâmetro na composição do índice de confiabilidade. Essa análise foi realizada considerando-se cenários com e sem a inclusão do erro de modelo, permitindo avaliar sua influência direta no comportamento probabilístico da estrutura.

Com base nos índices de confiabilidade obtidos nas análises probabilísticas, foi realizada uma avaliação comparativa do desempenho das diferentes normas, considerando a variação da resistência característica do concreto (f_{ck}) e a inclusão do erro de modelo. Essa etapa permitiu analisar o comportamento relativo dos modelos normativos, identificar diferenças nos níveis de confiabilidade estimados e avaliar o grau de conservadorismo associado a cada abordagem normativa.

A comparação sistemática dos resultados possibilitou estabelecer uma hierarquização entre as normas analisadas, contribuindo para uma compreensão mais abrangente do impacto das formulações normativas na segurança estrutural de lajes lisas submetidas à punção.

As análises de confiabilidade estrutural foram implementadas na linguagem de programação Python (PYTHON SOFTWARE FOUNDATION, 2019), utilizando a biblioteca RealPy (REAL, 2024), a qual adota uma abordagem orientada a objetos para a estruturação das funções estado limite e dos métodos probabilísticos.

A escolha do Python deve-se à sua simplicidade, eficiência computacional, ampla disponibilidade de bibliotecas científicas e ao caráter *open source*, que possibilita flexibilidade e transparência na implementação dos modelos.

Por fim, o fluxograma que sintetiza as principais etapas metodológicas desenvolvidas nesta pesquisa é apresentado na Figura 1.7.

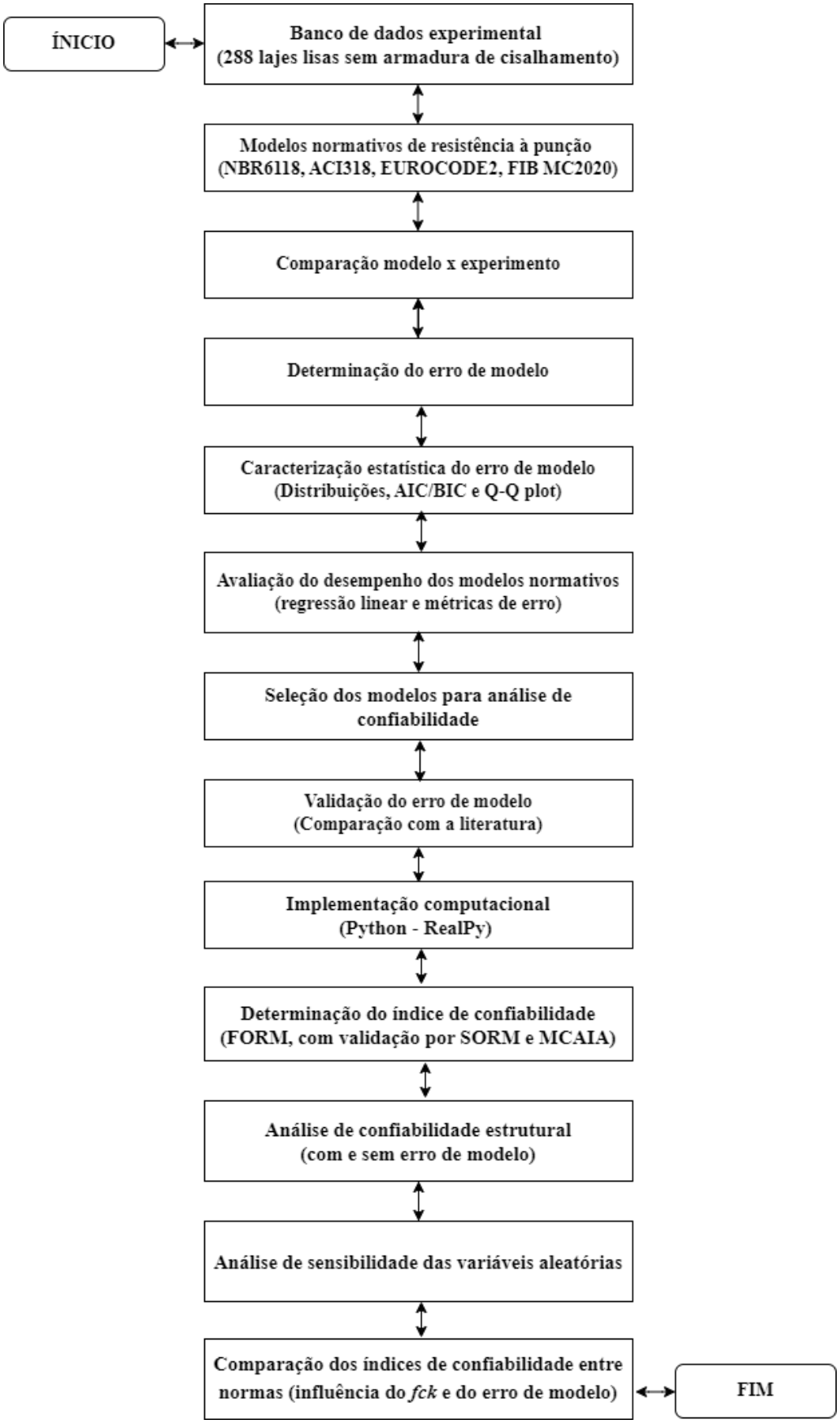


Figura 1.7 – Fluxograma das etapas metodológicas adotadas na pesquisa

Fonte: Autora

1.6. Organização do trabalho

Esta Tese está estruturada em nove capítulos, organizados de forma a estabelecer uma sequência lógica que permita a compreensão progressiva e aprofundada da influência do erro de modelo na confiabilidade estrutural de lajes lisas de concreto armado submetidas à punção.

O Capítulo 1 apresenta as considerações iniciais do estudo, incluindo a contextualização do tema, motivação, justificativa, limitações, objetivos e a metodologia adotada.

O Capítulo 2 contempla a revisão bibliográfica sobre a utilização do erro de modelo em estruturas de concreto, reunindo trabalhos clássicos e recentes que fundamentam o desenvolvimento da pesquisa.

O Capítulo 3 descreve os modelos normativos de cálculo da resistência à punção, conforme prescritos pelas normas NBR6118, ACI318, EUROCODE2 e FIB MC2020.

O Capítulo 4 aborda os conceitos teóricos relacionados à quantificação de incertezas e à definição do erro de modelo no contexto da Engenharia Estrutural.

O Capítulo 5 apresenta os fundamentos da confiabilidade estrutural, incluindo os principais conceitos probabilísticos aplicados à análise da segurança de estruturas.

O Capítulo 6 descreve os métodos de confiabilidade estrutural empregados no trabalho, abrangendo os métodos de simulação de Monte Carlo e os métodos de transformação, como FORM e SORM.

O Capítulo 7 apresenta a análise estatística dos resultados, com ênfase na quantificação, caracterização e validação do erro de modelo associado à previsão da resistência à punção de lajes lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento.

O Capítulo 8 é dedicado às análises de confiabilidade estrutural, nas quais o erro de modelo é incorporado à função estado limite, permitindo a avaliação de sua influência nos índices de confiabilidade das lajes analisadas.

O Capítulo 9 apresenta as conclusões do trabalho, destacando as principais contribuições e sugestões para pesquisas futuras.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Esse capítulo é destinado a sintetizar alguns trabalhos recentes e importantes que apresentam a utilização do erro de modelo em estruturas de concreto, fazendo uma análise estatística e de confiabilidade nos exemplos apresentados nos seus resultados e, também, mostrando a importância do tema para a Engenharia Estrutural.

2.1. Estado da arte

Albuquerque *et al*. (2021**)** realizaram uma análise inferencial dos modelos de bielas e tirantes aplicados a vigas-paredes encontradas em ensaios experimentais da literatura, avaliando as distribuições de probabilidade que melhor se ajustam a variável aleatória erro de modelo. Essa avaliação foi realizada através do teste de aderência Kolmogorov-Smirnov. Os dados empregados neste trabalho foram dimensionados de acordo com o critério de cálculo das normas ABNT NBR6118 (2014) e ACI318 (2019). Nos resultados, os autores observaram, por meio de testes de aderência, que não há evidências para rejeitar que as distribuições Lognormal e Normal não possam representar os dados, embora graficamente a distribuição Lognormal pareça mais adequada, mostrando que representa melhor os dados considerando os modelos teóricos de cálculo de vigas-paredes das normas ACI318 e NBR6118.

Gomes e Beck (2021) propuseram um índice de conservadorismo do modelo que é baseado na teoria da confiabilidade estrutural e visa quantificar o grau de conservadorismo de um modelo estrutural. O cálculo do índice de conservadorismo proposto requer os mesmos dados empregados para calcular estatísticas de erro do modelo. O método pode ser empregado para avaliar modelos usados no projeto estrutural e modelos corrigidos usados na análise de confiabilidade estrutural. O método é aplicado a vários exemplos, envolvendo diferentes tipos de modelos simplificados, e mostrado para classificar com precisão os modelos como conservadores/não conservadores. Os autores também apresentaram um estudo de caso prático, que inclui um modelo não linear de elementos finitos, para demonstrar que o índice proposto pode ser aplicado em situações do mundo real.

Marque e Nogueira (2021) apresentaram resultados do índice de confiabilidade β obtidos para ligações laje-pilar a partir de análises de confiabilidade utilizando o método FORM, segundo o modelo da norma brasileira, e considerando a

variável erro de modelo. Os contornos críticos *C* e *C'* sem armadura de punção foram analisados. Os resultados mostraram que a falha no contorno *C* é muito improvável, enquanto que as probabilidades de ruptura no contorno *C'* quando se considera a influência do erro de modelo são maiores que valores alvo recomendados na literatura para o estado limite último.

Thai *et al*. (2021) analisaram a confiabilidade e a aplicabilidade das equações de projeto atualmente em uso nos códigos AISC 360–16 (2016), EUROCODE4 (2004) e ASNZS2327 (2017) onde foram utilizados para o dimensionamento de pilares. Um banco de dados abrangente com mais de 3200 testes foi coletado para desenvolver as estatísticas dos erros do modelo para diferentes tipos de pilares. Técnicas de simulação de Monte Carlo e subconjuntos foram desenvolvidas com base nos algoritmos de Markov Chain, para prever com precisão e eficiência o índice de confiabilidade de estruturas com baixa probabilidade de falha, levando em conta todas as incertezas nas propriedades materiais e geométricas, cargas e erros de modelo. Os resultados da análise de confiabilidade indicam que o índice de confiabilidade do pilar concêntrico projetado pelos três códigos considerados é muito superior ao do pilar excêntrico (ou seja, viga-pilar). Os resultados do estudo paramétrico sugerem que os três códigos podem ser utilizados com segurança para o projeto de pilares.

Halvonik *et al*. (2022) determinaram o coeficiente parcial de punçoamento e sua comparação com um valor normativo da norma EUROCODE2 (2004). Os autores avaliaram o fator de segurança parcial para propriedades de resistência utilizando a avaliação estatística de um modelo de resistência para a previsão da capacidade de punção, levando em consideração as incertezas do material, do modelo e geométricas. A resistência à punção sem armadura de cisalhamento foi avaliada estatisticamente com base em 550 resultados de ensaios experimentais. O fator de correção do modelo e o coeficiente de variação do erro do modelo foram avaliados. Os parâmetros estatísticos das variáveis básicas nas funções de resistência foram assumidos de acordo com as recomendações do Código do Modelo Probabilístico JCSS (2001). A comparação mostrou que o valor do fator de segurança obtido na análise é superior ao valor normativo definido para cisalhamento e punçoamento.

Liberati *et al*. (2022) apresentaram uma investigação de modelos analíticos de previsão da resistência à punção de lajes lisas de concreto armado, de acordo com quatro especificações de projeto: EUROCODE2 (2004), FIB MC2010 (2013), ABNT NBR6118 (2014) e ACI318 (2019). O estudo utilizou 249 resultados experimentais de carga de

ruptura de lajes lisas com ou sem armaduras de cisalhamento, como também de lajes com ou sem aberturas, sendo que todas foram submetidas a carregamento centrado, de modo que estatísticas da variável aleatória erro de modelo pudessem ser construídas. Os autores concluíram que as prescrições dos códigos EC2 e NBR6118 foram as mais eficazes na previsão da carga de ruptura das lajes analisadas, apresentando resultados mais precisos e menos dispersos.

Teichgraber *et al*. (2022) desenvolveram uma formulação para garantir que os modelos avançados levem ao mesmo nível de segurança dos modelos padrões. A formulação foi aplicada através de exemplos do modelo de carga de vento da norma EUROCODE2 (2004), que é comparado com técnicas mais avançadas de modelagem de carga de vento. Para isso, seguiram alguns passos, como a determinação de um portfólio de situações de projetos, estimativa e determinação da distribuição de probabilidade da variável erro de modelo e cálculo da probabilidade de falha. Os autores discutiram de forma abrangente o papel da segurança oculta no projeto estrutural codificado e seus efeitos na confiabilidade. E ainda, mostraram nos resultados que a estrutura proposta garante que os códigos de projeto semiprobabilísticos sejam calibrados de forma que os modelos avançados e os modelos estabelecidos sejam levados ao mesmo nível de segurança.

Yi *et al*. (2022) coletaram bancos de dados de testes experimentais de cisalhamento de regiões D de concreto armado (regiões de descontinuidade ou perturbação). A maioria dos dados analisados estão concentrados em faixas de parâmetros de alta taxa de armadura principal, pequenas dimensões gerais ou baixa resistência do concreto. Com base na análise de regressão desses bancos de dados, foram estimados erros de modelo em coeficientes de resistência à compressão de bielas para modelo de bielas e tirantes. A fim de simplificar o procedimento de projeto e eliminar a incerteza, uma equação de projeto de cisalhamento unificada baseada no coeficiente de biela é proposta para regiões D, incluindo a variável erro de modelo. A precisão da equação unificada é verificada pelo banco de dados de testes de cisalhamento consistindo de vigas profundas simples e contínuas, consolos, paredes de cisalhamento e vigas de acoplamento curto, mostrando que a equação previu bem a resistência ao cisalhamento e refletiu os efeitos dos principais parâmetros.

Silva Júnior e Gomes (2023) apresentaram modelos baseados em aprendizado de máquina, onde foram desenvolvidos e comparados para prever a resistência à punção de lajes lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento. Os modelos foram baseados em 373

resultados experimentais de lajes apoiadas sobre pilar intermediário. Os algoritmos de rede neural artificial, árvore de decisão, floresta aleatória e *extreme gradient boosting* foram empregados. Os resultados das resistências ao cisalhamento obtidos foram mostrados em cinco códigos de projeto de concreto armado, e comparados com os dados experimentais. Quanto aos modelos de normas de projeto, foram observadas grandes discrepâncias entre eles, com a norma brasileira apresentando maior precisão que as demais na previsão da carga de ruptura das lajes.

Seventekidis e Giagopoulos (2023) mostraram o efeito do erro do modelo para uma identificação experimental de danos em treliças de ponte em escala de laboratório. Um classificador de Rede Neural foi aplicado, treinado por respostas de elementos finitos. A confiabilidade dos classificadores treinados numericamente depende da qualidade dos dados de treinamento em termos do erro do modelo. Cenários de identificação de danos mais e menos distintos foram testados e a confiabilidade dos dados numéricos foram avaliadas em função do erro do modelo e da dificuldade de identificação de danos. Mesmo que os modelos de elementos finitos possam ser atualizados no estado intacto para melhor conformidade com o experimento, algum erro de modelo ainda permanece para estruturas mais complexas. Os resultados mostraram que danos maiores e mais distintos podem ser classificados com maior precisão em relação aos pequenos e menos distintos. A confiabilidade dos dados numéricos reflete-se nos deslocamentos de características experimentais e numéricos do estado intacto.

Li *et al*. (2023) propuseram o método bayesiano-MCMC (Markov Chain Monte Carlo) para estabelecer os modelos probabilísticos para a resistência ao cisalhamento de vigas parede. Os modelos foram baseados em um extenso banco de dados de 645 resultados experimentais e a incerteza para os principais parâmetros foram quantificadas pelo erro de modelo que foi investigado comparando os resultados dos testes experimentais e do modelo de cálculo de normas europeias e americanas. Os autores investigaram o desempenho dos modelos probabilísticos de acordo com os indicadores de avaliação contendo média, coeficiente de variação e erro de modelo, mostrando que esses modelos aprimorados pelo método bayesiano-MCMC apresentaram previsões mais precisas e robustas.

Yu *et al*. (2023) investigaram as características das incertezas do modelo de abordagens baseadas em deformações usando a Teoria Crítica de Fissuras de Cisalhamento (CSCT) para a resistência à punção de membros estruturais de concreto. As incertezas do modelo de diferentes níveis de aproximação (LoA) do CSCT para punçoamento também são comparadas. A relação entre as incertezas do modelo

relacionadas aos diferentes LoAs são investigadas não apenas a partir de um ponto de vista teórico, mas também quantificando as incertezas correspondentes com base na avaliação de dados experimentais aplicando o método de inferência bayesiana. O resultado da quantificação realizada pelos autores confirma que a incerteza do modelo do LoA mais alto do CSCT tem menor variabilidade e também viés menos conservador do que o LoA mais baixo. Dessa forma, usando o modelo CSCT como exemplo, mostraram que os fatores parciais aplicados aos submodelos são mais adequados para LoAs mais elevados, uma vez que podem efetivamente contabilizar a mudança de incerteza do modelo associada à mudança do modo de falha.

Borzovic *et al*. (2023) analisaram a estatística de precisão e confiabilidade do modelo de projeto de vigas e lajes unidirecionais reforçadas com barras de polímero reforçado com fibra de vidro (GRFP) e sem armadura de cisalhamento. A análise foi realizada utilizando um banco de dados de 288 ensaios experimentais. O fator de correção do modelo e o coeficiente de variação do erro do modelo foram avaliados de acordo com a norma EUROCODE2 (2004). As propriedades probabilísticas das variáveis aleatórias na função de resistência foram assumidas de acordo com as recomendações do Código do Modelo Probabilístico JCSS (2001). A segurança do modelo foi confirmada através da comparação dos resultados com o desempenho das disposições de projeto da norma canadense CSA 806-12 (2012) e do código americano ACI 440 (2015). Os autores propuseram um ajuste na disposição de projeto do EC2 com o objetivo de aumentar a confiabilidade do modelo e manter o valor normativo do fator parcial de cisalhamento.

Ponsi *et al.* (2023) apresentam a aplicação de um procedimento de detecção de danos baseado em redes neurais a uma ponte ferroviária e propõem um procedimento para levar em conta o erro do modelo na fase de treinamento. A saída da rede, que depende das características dinâmicas dadas como entrada, permite classificar o estado da estrutura como intacta, levemente danificada ou severamente danificada. O procedimento emprega apenas dados simulados, mas inclui uma série de expedientes para abordar uma situação real, como a modelagem estocástica de erros de medição e o uso de dois modelos diferentes para contabilizar o erro do modelo. O desempenho das redes é analisado em relação aos conjuntos de dados gerados pelos dois modelos diferentes. Os resultados mostram a relevância de contabilizar o erro do modelo na calibração da rede para obter uma identificação robusta dos danos.

Abood *et al*. (2024) desenvolveram modelos de árvore de regressão impulsionada por gradiente (GBRT) para prever com precisão a resistência ao cisalhamento de lajes de

concreto reforçada com polímero reforçado com fibras (FRP). Um banco de dados de 238 resultados experimentais foi compilado da literatura. Diferentes algoritmos de aprendizado de máquina foram considerados, e o desempenho dos modelos GBRT foi avaliado em relação a esses algoritmos. Os resultados indicaram que o modelo GBRT atingiu a maior precisão de predição, de acordo com erro quadrático médio (RMSE), erro absoluto médio (MAE) e coeficiente de determinação (R^2). A análise enfatizou a importância de variáveis como espessura da laje, taxa de reforço de FRP e perímetro crítico da seção. Este estudo evidenciou a eficácia do modelo GBRT na previsão de resistência à punção de lajes de concreto reforçadas com FRP, apresentando alta precisão. Foram realizadas análises de regressão nos conjuntos de dados sobre incertezas do modelo, com o objetivo de determinar a sensibilidade dos parâmetros críticos de projeto da capacidade do cisalhamento.

De acordo com os artigos apresentados nesta sessão, ainda não existe uma metodologia definitiva em relação à determinação da variável aleatória erro de modelo. Sendo assim, não há consenso sobre a forma de medição e o impacto real nas suas aplicações. Com o objetivo de aprimorar a compreensão das metodologias disponíveis para o ajuste de modelos de cálculo e suas limitações, pesquisas recentes visam incorporar a incerteza por meio do erro de modelo, que é fundamental para aprimorar a precisão desses modelos na Engenharia. Muitas vezes, os critérios normativos utilizados em projetos de engenharia não refletem toda a complexidade do sistema real, o que pode levar a diferenças significativas entre as resistências teóricas e os resultados experimentais. Além disso, foi observado também que esses modelos requerem uma avaliação detalhada em relação à confiabilidade estrutural.

2.2. Considerações sobre ineditismo

A contribuição desta Tese consiste em apresentar uma caracterização estatística dos erros de modelo das normas mais recentes (ABNT NBR6118 (2023), ACI318 (2025), FIB MC2020 (2024) e EUROCODE2 (2023)) para a resistência à punção de lajes de concreto armado. Além disso, avalia o efeito da variável aleatória erro de modelo nessas normas atualizadas, por meio de um estudo comparativo da confiabilidade com e sem a consideração do erro de modelo. Somando-se a isto, é também uma importante contribuição a identificação do erro de modelo como variável dominante nas análises de confiabilidade de lajes lisas submetidas à punção. Dessa forma, assegura-se a inovação

das conclusões alcançadas e a relevância da contribuição científica, abrindo caminho para que pesquisas futuras possam continuar investigando o impacto dessa variável na confiabilidade estrutural, levando em consideração modelos de cálculos normativos ou modelos numéricos.

3. RESISTÊNCIA À PUNÇÃO DE LAJES LISAS DE CONCRETO ARMADO

Para Furst (2020), os métodos de dimensionamento de elementos de concreto, principalmente os presentes em critérios normativos, estão em constante desenvolvimento e aperfeiçoamento. O método dos estados limites com a aplicação de coeficientes de ponderação é um processo simplificado bastante utilizado. Segundo Graziano (2005), esse método semi-probabilístico é um procedimento intermediário entre a teoria probabilística pura e a teoria das tensões admissíveis.

Ainda, conforme Furst (2020), faz-se necessário a atualização frequente do conhecimento referente aos modelos de predição de resistência de elementos de concreto armado, assim como, é fundamental avaliar a conformidade das formulações utilizadas nos critérios normativos para representar o comportamento das estruturas submetidas a resistências últimas.

Este capítulo pretende descrever a fundamentação teórica básica referente aos modelos de resistência à punção de lajes lisas de concreto armado apoiadas sobre pilares intermediários sem reforço de cisalhamento, através dos critérios e especificações das normas, ABNT NBR6118 (2023), ACI318 (2025), EUROCODE2 (2023) e FIB MC2020 (2024).

3.1. Lajes lisas de concreto armado

De acordo com a ABNT NBR6118 (2023), lajes lisas de concreto armado são sistemas estruturais apoiados diretamente sobre pilares, eliminando a necessidade de vigas na estrutura, como mostrado na Fig. 3.1.

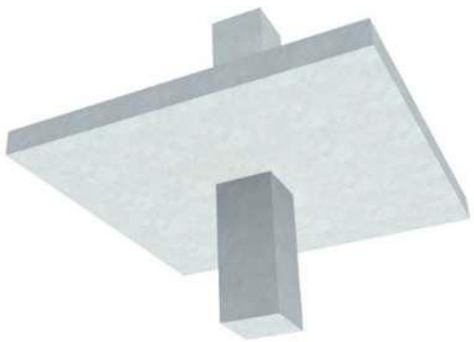


Figura 3.1 – Laje lisa de concreto armado

Fonte: Nicácio (2018)

Silva (2022) explica que em lajes apoiadas em vigas, as tensões máximas de cisalhamento resultantes de carregamentos uniformes se concentram nas seções médias das bordas e raramente geram um estado limite último na estrutura. No entanto, nas lajes que se apoiam diretamente sobre os pilares, a reação do pilar em uma área reduzida da laje pode causar ruptura por punção.

Segundo Mangalathu *et al*. (2021), quando ocorre uma falha por punção, o pilar e a laje se separam fisicamente, o que compromete de forma significativa o equilíbrio da conexão entre a laje e o pilar. A falha ocorre ao longo de um formato de cone truncado na estrutura, como apresentado na Fig. 3.2.

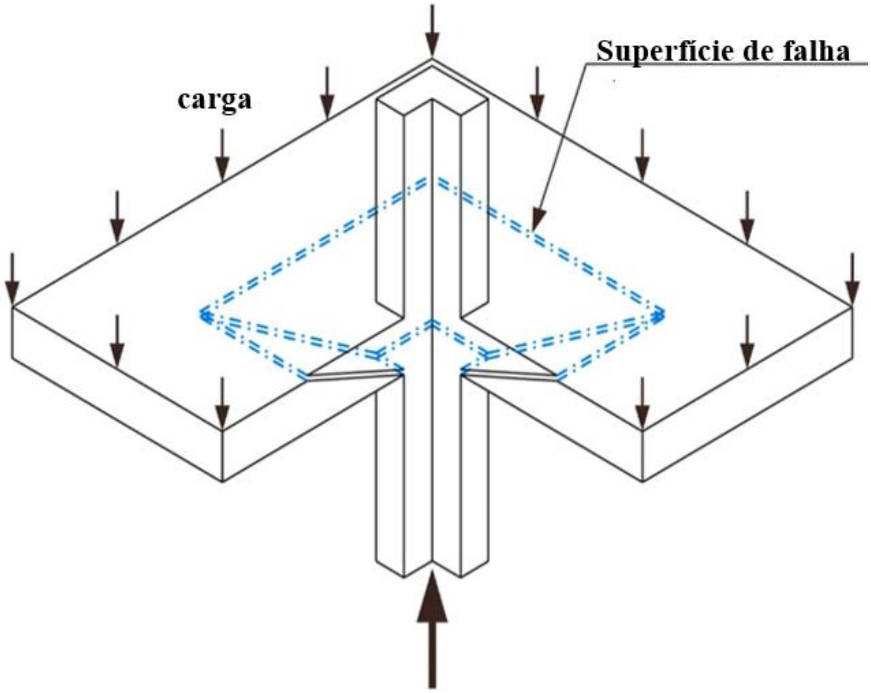


Figura 3.2 – Modo de falha por punção em lajes lisas

Fonte: Mangalathu *et al*. (2021)

Conforme Marque e Nogueira (2021), a punção representa um estado limite último resultante da concentração de tensão em áreas específicas da laje ao redor do pilar. Isso ocorre quando o pilar começa a penetrar na laje, originando um modo de falha frágil (acontecendo de forma inesperada), como mostrado na Figura 3.3. Quando a ruptura está prestes a acontecer, forma-se um cone de punção ao redor do pilar, causado pelas tensões principais de tração geradas pelas forças de cisalhamento na conexão entre a laje e o pilar.

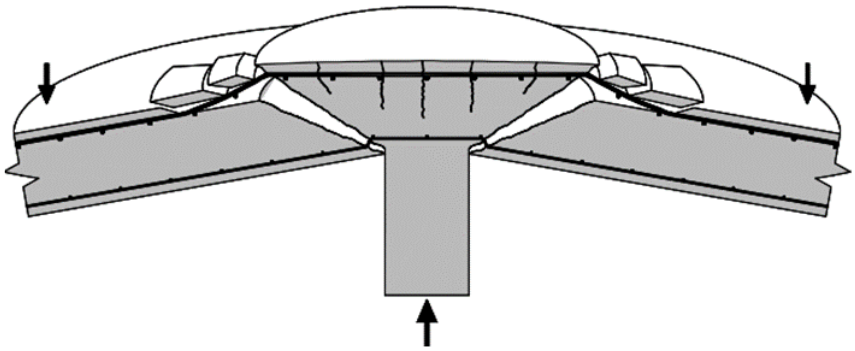


Figura 3.3 – Ruptura por punção em laje lisa sem armadura de cisalhamento

Fonte: Guandalini (2005)

Muttoni (2008) discute que o fenômeno de punção em lajes sem reforço transversal está relacionado à formação de uma fissura crítica de cisalhamento. A partir disso, propõe um novo critério de falha para punção que se baseia na rotação da laje. Esses critérios conseguem descrever especificamente as falhas de punção observadas em experimentos, mesmo em lajes com baixas taxas de armadura.

3.2. Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento

A proposta teórica de Muttoni (2008) fundamenta-se na ideia de que a resistência à punção diminui à medida que a rotação da laje aumenta. Mostrando que a resistência ao cisalhamento diminui com o aparecimento de uma fissura crítica que se propaga pela espessura da laje, atravessando a biela comprimida que transmite a força cortante para o pilar. Esse mecanismo está ilustrado na Fig. 3.4.

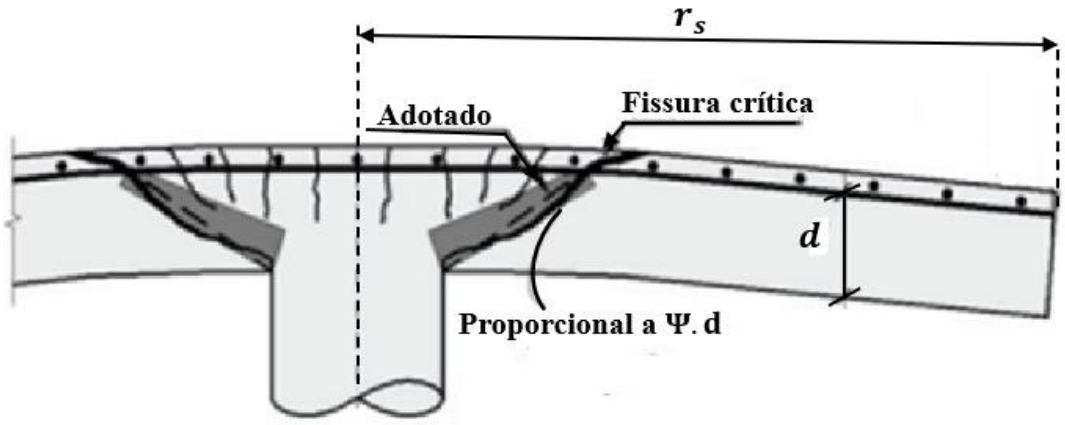


Figura 3.4 – Teoria da Fissura crítica ao cisalhamento

Fonte: Adaptado de Muttoni (2008)

Como mostrado na Fig. 3.4, a abertura da fissura de cisalhamento crítica reduz a resistência da biela de compressão inclinada que suporta o cisalhamento e eventualmente leva à falha por punção. Conforme Muttoni e Schwartz (1991), a largura dessa fissura pode ser assumida como proporcional ao produto $\Psi.\mathrm{d}$, levando à formulação de um critério de falha semi-empírico, através de:

$$\frac{V_R}{b_0 d^3 \sqrt{f_c}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Psi \mathrm{d}}{4}\right)^2}, \tag{3.1}$$

onde: V_R é a força cortante resistente, d é a altura útil em relação a armadura de flexão da laje, b_0 é o perímetro da seção crítica em $\mathrm{d}/2$ da face do pilar, f_c é a resistência à compressão do concreto e Ψ é a rotação da laje.

De acordo com Walraven (1981), a rugosidade da fissura crítica e sua capacidade de resistência às forças de cisalhamento podem ser levadas em consideração ao dividir a largura nominal da fissura, pela soma (d_{g0} + d_g), onde d_g é o tamanho máximo do agregado e $\mathrm{dg_0}$ é um valor de referência igual a 16 mm. Com base nessa abordagem, Muttoni (2003) propôs uma formulação aprimorada para o critério de falha, apresentada em:

$$\frac{V_R}{b_0 \mathrm{d} \sqrt{f_c}} = \frac{3/4}{1 + \frac{15 \Psi \mathrm{d}}{d_{g0} + d_g}}. \tag{3.2}$$

Muttoni (2008) afirma que para determinar a resistência última à punção, é necessário conhecer a relação entre a carga aplicada V e as rotações da laje Ψ. Na maioria dos casos, essa relação pode ser obtida por meio de uma análise não linear do comportamento à flexão da laje. No entanto, é possível utilizar expressões simplificadas com boa precisão, conforme apresentado através de:

$$\Psi = 1{,}5 \, \frac{r_s}{d} \, \frac{f_y}{E_s} \left(\frac{V}{V_{flex}}\right)^{\frac{3}{2}}, \tag{3.3}$$

onde: V_{flex} é a força correspondente a capacidade de flexão da laje, r_s é a distância entre o eixo do pilar e a linha de momentos nulos, f_y é a tensão de escoamento da armadura de flexão tracionada e E_s é o módulo de elasticidade da armadura de flexão tracionada.

3.3. Prescrições normativas

Nesta sessão, são apresentados os modelos de cálculo teóricos de quatro normas vigentes, que levam em consideração a resistência à punção de lajes sem armadura de cisalhamento.

3.3.1. ABNT NBR6118 (2023)

O modelo de verificação da resistência à punção estabelecido pela ABNT NBR6118 (2023) mantém a mesma base conceitual e o mesmo modelo mecânico adotado na ABNT NBR6118 (2014), sendo distintas apenas quanto aos parâmetros associados ao efeito de escala e à taxa de armadura longitudinal. Dessa forma, as expressões apresentadas a seguir são válidas para ambas as versões da norma, as quais são apresentadas ao longo do texto.

O modelo de cálculo da resistência à punção da ABNT NBR6118 (2023) estabelece a verificação das lajes sem armadura de cisalhamento em pelo menos duas superfícies críticas, onde estão localizadas as forças concentradas:

- A primeira superfície crítica, chamada contorno C, está relacionada ao pilar ou às especificações de carga concentrada e permite a avaliação indireta da tensão de compressão diagonal do concreto, utilizando a tensão de cisalhamento.
- Na segunda superfície crítica, conhecida como contorno C’, localizada a 2d do pilar ou carga concentrada, é utilizada para verificar a capacidade da ligação à punção, que está relacionada à resistência à tração diagonal. Essa verificação também se baseia na análise da tensão de cisalhamento, no contorno C'.

Essas verificações exigem que a tensão solicitante de cálculo seja menor ou igual a tensão resistente de cálculo. Para pilares internos, as superfícies críticas C e C' estão ilustradas na Fig. 3.5.

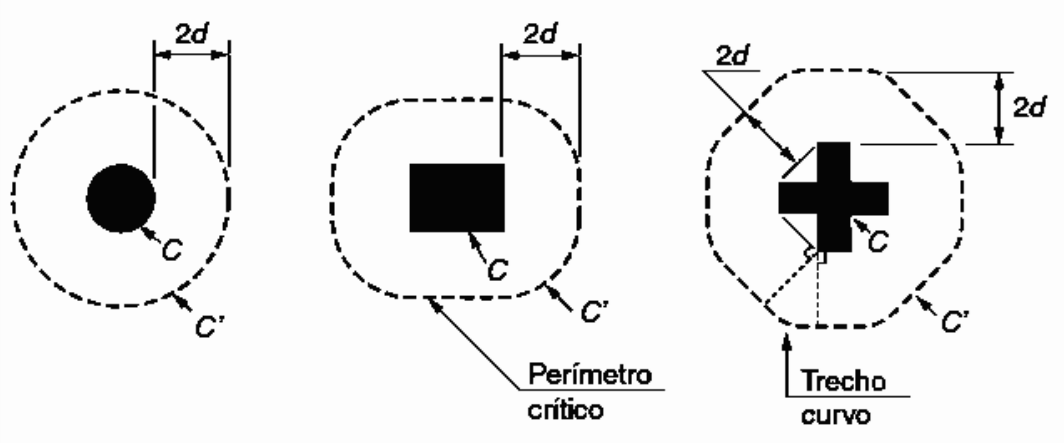


Figura 3.5 – Perímetros críticos em pilares internos

Fonte: ABNT NBR6118 (2023)

Para pilares internos, o efeito do carregamento simétrico na tensão de cisalhamento pode ser considerado como:

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{u\ d}, \tag{3.4}$$

$$d = \frac{\left(d_x + d_y\right)}{2}, \tag{3.5}$$

onde: d é a altura útil da laje ao longo do contorno C', d_x, d_y são as alturas úteis nas duas direções ortogonais, u é o perímetro de C' e F_{Sd} é a força ou reação concentrada de cálculo.

Para pilares internos, com efeito de momento, além da força vertical, ocorre transferência de momento da laje para o pilar. Assim, é necessário considerar o efeito de assimetria do carregamento, de acordo com:

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{u\ d} + \frac{k.M_{Sd}}{W_p\ .d}, \tag{3.6}$$

onde: M_{Sd} é o momento de cálculo transmitido da laje para o pilar, W_p é o módulo de resistência plástica do perímetro crítico e k é o coeficiente que fornece a parcela de M_{Sd}

transmitida ao pilar por cisalhamento, depende da relação C_1/C_2 e assumem valores em função da relação entre as dimensões da seção do pilar, indicados na Tab. 3.1.

Tabela 3.1 – Valores de k

C_1/C_2	0,5	1,0	2,0	3,0
k	0,45	0,60	0,70	0,80

Sendo: C_1 a dimensão do pilar paralela à excentricidade da força;
C_2 a dimensão do pilar perpendicular à excentricidade da força.
Para pilares circulares internos, deve ser adotado o valor $k = 0{,}6$

Fonte: ABNT NBR6118 (2023)

Os valores de W_p devem ser calculados a seguir:

- Para um pilar retangular

$$W_p = \frac{C_1^2}{2} + C_1\, C_2 + 4\, C_2\, d + 16\, d^2 + 2\pi d C_1\,, \tag{3.7}$$

- Para um pilar circular

$$W_p = (D + 4d)^2\,, \tag{3.8}$$

onde: D é o diâmetro do pilar.

W_p pode ser calculado desprezando a curvatura dos cantos do perímetro crítico, através de:

$$W_p = \int_0^u |e|\; d_l\,, \tag{3.9}$$

onde: d_l é o comprimento infinitesimal no perímetro crítico u; e é a distância de d_l ao eixo que passa pelo centro do pilar e sobre o qual atua o momento fletor M_{Sd}.

A tensão resistente na superfície crítica C' é calculada levando em consideração a presença ou não de armadura de punção. A Eq. (3.10) apresenta a estimativa de resistência para lajes sem armadura de cisalhamento, conforme a ABNT NBR6118 (2023), sendo que a diferença em relação à ABNT NBR6118 (2014) está associada a

definição e a limitação dos parâmetros ξ e ρ_l, os quais não possuíam limites explícitos na versão de 2014.

$$V_{NBR} = 0{,}13\xi\sqrt[3]{100\rho_l f_{ck}}\, u.d\,, \tag{3.10}$$

sendo,

$$\xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2\,, \tag{3.11}$$

$$\rho_l = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} \leq 2\%\,, \tag{3.12}$$

onde: ξ é o fator de escala para punção, f_{ck} é a resistência característica à compressão do concreto, d o valor médio da altura efetiva na direção x e y, ρ_l é a taxa de armadura longitudinal em X e ρ_x, ρ_y são as taxas de armadura nas duas direções ortogonais, assim calculadas.

3.3.2. FIB MC2020 (2024)

O modelo de cálculo da resistência à punção da FIB MC2020 (2024) é fundamentado na TFCC proposta por Muttoni (2008). De acordo com essa norma, a avaliação da resistência à punção deve ser realizada em um perímetro de controle (b_0), localizado a uma distância equivalente à metade da altura efetiva ($0{,}5d_v$) da face do pilar conforme mostrado na Fig. 3.6. A profundidade efetiva resistente ao cisalhamento da laje (d_v) é a distância do centroide das camadas de reforço de tração até a área de suporte, como representada através da Fig. 3.7.

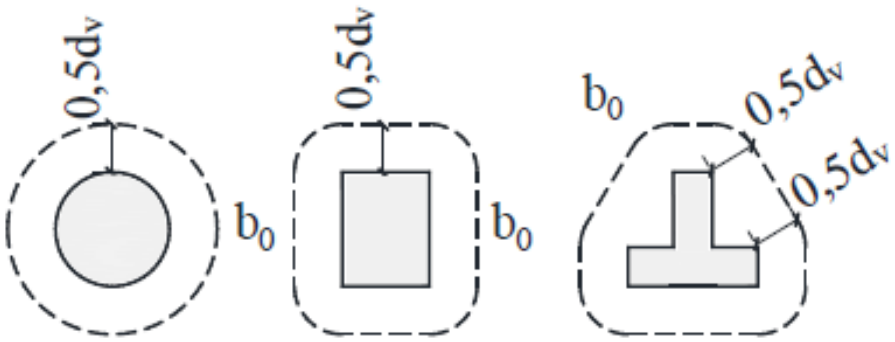


Figura 3.6 – Perímetros básicos de controle

Fonte: Adaptado do FIB MC2020 (2024)

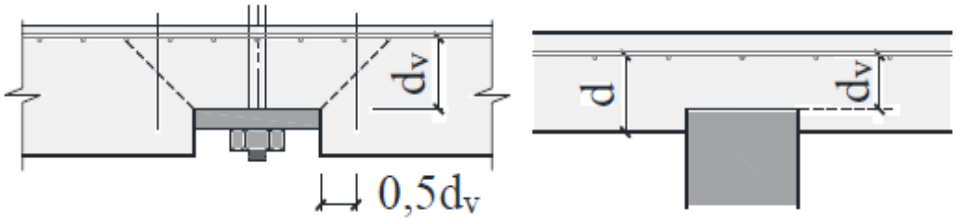


Figura 3.7 – Altura efetiva da laje (d_v) e altura útil (d)

Fonte: FIB MC2020 (2024)

O dimensionamento para punção de lajes lisas, conforme o FIB MC2020 (2024), é realizado através da comparação da força resistente com a força solicitante à punção calculada. A condição de segurança é considerada atendida quando:

$$\mathrm{V}_{Rd} = \mathrm{V}_{Rd,c} + \mathrm{V}_{Rd,s}\,, \tag{3.13}$$

onde: $\mathrm{V}_{\mathrm{Rd,c}}$ é a resistência do concreto à punção e $\mathrm{V}_{\mathrm{Rd,s}}$ é a resistência à punção devido a armadura de cisalhamento.

Considerando $\mathrm{V}_{\mathrm{Rd,c}} = \mathrm{V}_{\mathrm{m,FMC}}$, a resistência última à punção, para uma laje sem armadura de cisalhamento, pode ser definida como:

$$\mathrm{V}_{\mathrm{FMC}} = K_{\Psi} \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c}\, b_0\, d_v, \tag{3.14}$$

onde: γ_c é o coeficiente de minoração da resistência do concreto, b_0 é o perímetro de controle definido por $0{,}5dv$ e d_v é a distância do centroide da armadura de flexão à área de apoio. K_{Ψ} depende da rotação da laje e para seu valor médio, sendo determinada através de:

$$K_{\Psi} = \frac{1}{1{,}5 + 0{,}9\, K_{\mathrm{dg}} \Psi \mathrm{d}}, \tag{3.15}$$

Em que d corresponde à altura útil da laje, considerada nas direções x e y, Ψ representa a aproximação da rotação da laje; e K_{dg} é um parâmetro dependente do diâmetro máximo do agregado (dg). Conforme as recomendações normativas, o diâmetro máximo do agregado não deve ser inferior a 16 mm; dessa forma, pode-se adotar $K_{\mathrm{dg}} = 1$ ou utilizar o valor obtido por meio da equação apresentada:

$$K_{\mathrm{dg}} = \frac{32}{16 + dg} \geq 0{,}75. \tag{3.16}$$

O cálculo da rotação no momento da falha da laje pode ser realizado em quatro níveis de aproximação. Para o nível I de aproximação a rotação da laje pode ser obtida a através da Eq. (3.17) e ilustrada na Fig. 3.8:

$$\Psi = 1{,}5\,\frac{r_s}{d}\,\frac{f_{yd}}{E_s}, \tag{3.17}$$

onde: r_s é a posição em relação ao eixo do pilar onde o momento fletor é igual a zero, f_y é a resistência ao escoamento do aço e E_s é o módulo de elasticidade do aço.

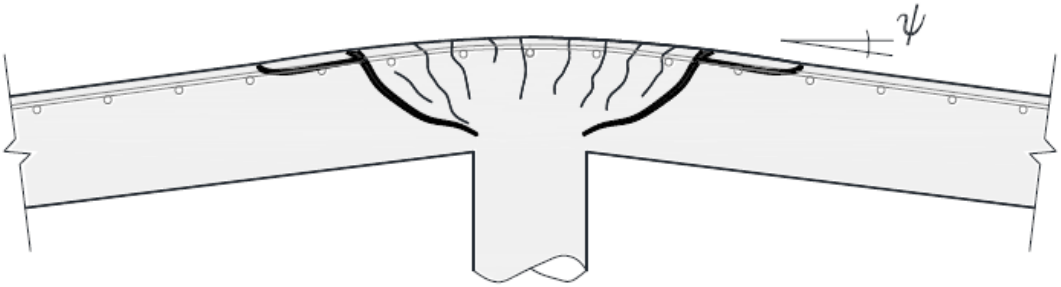


Figura 3.8 – Rotação (ψ) da laje

Fonte: FIB MC2020 (2024)

O nível I é utilizado para lajes analisadas com base na teoria elástica, nas quais não ocorre uma redistribuição significativa das forças internas. O nível II de aproximação mostra uma formulação mais precisa para determinar a rotação da laje, considerando tanto o momento atuante quanto o momento resistente da laje, conforme mostrado em:

$$\Psi = 1{,}5\,\frac{r_s}{d}\,\frac{f_{yd}}{E_s}\left(\frac{M_{Sd}}{M_{Rd}}\right)^{1{,}5}, \tag{3.18}$$

sendo, M_{Sd} o momento médio atuante por unidade de comprimento da armadura de flexão numa faixa (para a direção considerada) e M_{Rd} é a resistência à flexão média do momento

numa faixa de suporte. Os momentos M_{Sd} e M_{Rd} para pilares internos são determinados através das Eqs. (3.19) e (3.20), respectivamente:

$$M_{Rd} = \rho d^2 f_{yd} \left(1 - \frac{\rho \, f_{yd}}{2 \frac{f_{ck}}{\gamma_c}} \right), \tag{3.19}$$

$$M_{Sd} = V_{Ed} \left(\frac{1}{8} + \frac{e_{u,i}}{2 b_s} \right), \tag{3.20}$$

onde: V_{Ed} é a força de cisalhamento do modelo de cálculo, $e_{u,i}$ é a excentricidade da força de cisalhamento resultante com o respectivo perímetro de controle básico na direção pesquisada e b_s é a largura da faixa carregada ou analisada para o cálculo de M_{Sd}:

$$b_s = 1{,}5 \sqrt{r_{S,x} * r_{S,y}} \geq L_{min} \, . \tag{3.21}$$

O nível III de aproximação oferece uma estimativa aprimorada para lajes calculadas com o modelo linear-elástico e utiliza a mesma formulação apresentada no nível II. No entanto, o coeficiente 1,5 da Eq. (3.18) pode ser substituído por 1,2 se as configurações de cálculo forem determinadas por:

- r_s é calculado usando um modelo elástico linear;
- M_{Sd} é calculado como o valor médio do momento de flexão de cálculo em b_s;
- b_s é determinado como no nível II.

O nível IV de aproximação é utilizado com base em análises não lineares da estrutura, considerando os efeitos de fissuração, o escoamento das armaduras e outros efeitos lineares que não são importantes. Essa abordagem leva em consideração todos os efeitos relevantes para uma determinação precisa do valor da rotação.

A resistência à punção fora da zona das armaduras de cisalhamento é dada pela Eq. (3.22), e limitada pela biela de concreto comprimida na área da força concentrada, sendo seu valor calculado através de:

$$\mathrm{V_{FMC}} = K_{\mathrm{sys}} * K_{\Psi} \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} \, b_0 \, d_v \leq \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} \, b_0 \, d_v \, , \tag{3.22}$$

o coeficiente K_{sys} é responsável pelo desempenho dos sistemas de reforço de cisalhamento por punção para controlar fissuras de cisalhamento. O coeficiente K_{sys} é 2,4 para estribos e barras dobradas com comprimento de desenvolvimento suficiente na face de compressão da laje. K_{sys} é 2,8 para conectores (*studs*). K_{sys} é 2 para outros casos.

3.3.3. ACI318 (2025)

O modelo de cálculo da resistência à punção da ACI318 (2025) recomenda a análise de tensões cisalhantes em seções críticas aplicada em um perímetro efetivo (b_0) afastado das faces dos pilares à uma distância igual a $d/2$, como ilustrado na Fig. 3.9. A verificação da resistência à punção em lajes lisas sem armaduras de cisalhamento é realizada com base em uma única superfície de controle.

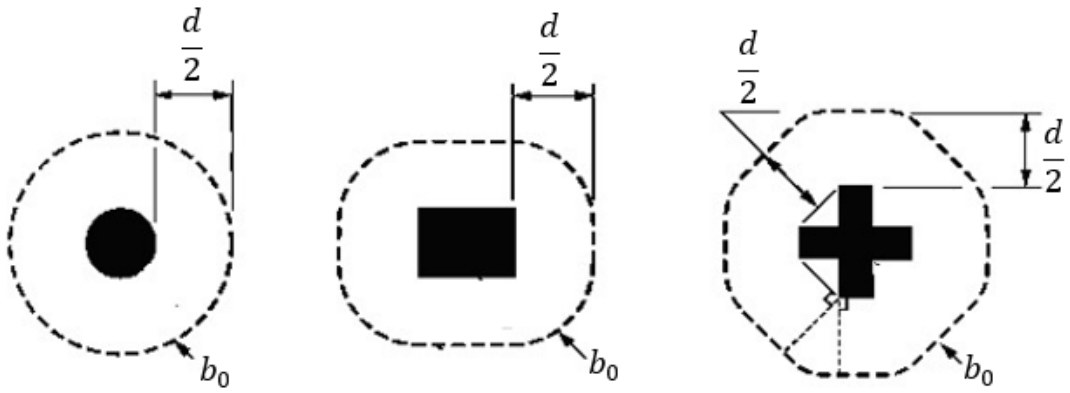


Figura 3.9 – Perímetro efetivo conforme a ACI318 (2025)

Conforme o ACI318 (2025), para determinar a resistência de lajes sujeitas à punção é necessário observar a condição de segurança que é considerada atendida quando:

$$V_n = V_c + V_s\,, \tag{3.23}$$

onde: V_c é a força resistente do concreto e V_s é a força resistente da armadura de punção.

Em se tratando de lajes sem armadura de cisalhamento, a norma recomenda que a carga de ruptura à punção na ligação laje-pilar seja determinada exclusivamente pela resistência do concreto, assumindo o menor valor entre as Eqs. (3.24), (3.25) e (3.26) apresentadas a seguir:

$$V_{ACI} = \frac{1}{3}\lambda_s \lambda \sqrt{f_c'}\, b_0 d, \tag{3.24}$$

$$V_{ACI} = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{2}{\beta}\right)\lambda_s \lambda \sqrt{f_c'}\, b_0 d, \tag{3.25}$$

$$V_{ACI} = \frac{1}{12}\left(2 + \frac{\alpha_s d}{b_0}\right)\lambda_s \lambda \sqrt{f_c'}\, b_0 d, \tag{3.26}$$

onde: f_c' é a resistência especificada à compressão do concreto em MPa adotada na ACI318, limitada ao máximo de 70 MPa, λ é o fator de modificação que leva em consideração a redução das propriedades mecânicas de concretos leves em comparação aos concretos normais de mesmo fc'. b_0 é o perímetro de controle afastado a uma distância de $d/2$ da face do pilar, α_s: constante que depende da posição do pilar, sendo igual a 40 para pilares internos, 30 para pilares de borda e 20 para pilares de canto, d o valor médio da altura efetiva na direção x e y, β: razão entre a maior dimensão do pilar e a maior largura e λ_s é o fator de modificação do efeito escala, como mostrado na Eq. (3.27):

$$\lambda_s = \sqrt{\frac{2}{1 + 0{,}004d}} \leq 1. \tag{3.27}$$

3.3.4. EUROCODE2 (2023)

O modelo de cálculo da resistência à punção da EUROCODE2 (2023) mudou em relação a sua versão anterior EUROCODE2 (2004). A versão de 2023 aprimorou um modelo simplificado e mais geral para a resistência à punção de lajes e elementos de concreto armado, propondo um modelo de projeto mais integrado, que considera uma maior diversidade de condições. As principais alterações observadas dizem respeito aos modelos propostos para a verificação da segurança contra o esforço transversal e o punçoamento, especialmente para elementos sem armaduras transversais.

O dimensionamento para punção de lajes lisas, de acordo com a EUROCODE2 (2023), determina que a tensão máxima de cisalhamento solicitante não deve exceder a tensão máxima resistente. A condição de segurança é considerada atendida quando:

$$\tau_{Ed} \leq \tau_{Rd}\,, \tag{3.28}$$

a tensão de cisalhamento solicitante (τ_{Ed}) de cálculo pode ser calculada diretamente a partir de uma análise da distribuição da tensão de cisalhamento ao longo do perímetro de controle, como:

$$\tau_{Ed} = \frac{V_{Ed}}{d_v} \tag{3.29}$$

sendo, d_v é a profundidade efetiva resistente ao cisalhamento da laje e V_{Ed} é a força de cisalhamento do modelo de cálculo no perímetro de controle por unidade de comprimento ($b_{0,5}$).

Há também alterações significativas em relação ao documento de 2004, especialmente na definição do perímetro de controle para a verificação da segurança contra o punçoamento, onde o valor médio das tensões atuantes agora é definido a uma distância $0{,}5d_v$ do contorno da área de apoio. A distância entre o perímetro de controle ($b_{0,5}$) e a face do pilar deve ser aumentada para que o comprimento do perímetro (b_0) seja minimizado. Na Fig. 3.10 são ilustrados os perímetros de controle de acordo com a EUROCODE2 (2023).

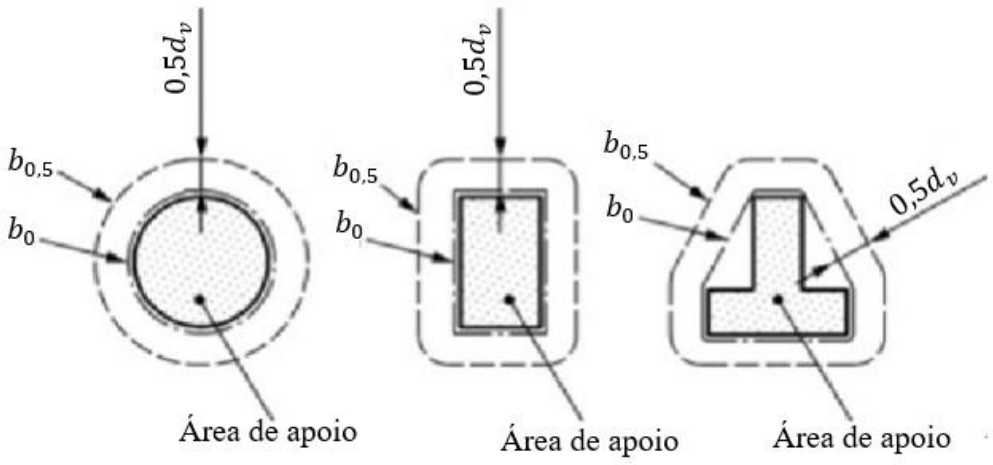


Figura 3.10 – Perímetros de controle típicos ($b_{0,5}$) e perímetros (b_0) em torno das áreas de apoio.

Fonte: Adaptado da EUROCODE2 (2023)

No caso de lajes sem armadura de cisalhamento, a norma recomenda o uso da Eq. (3.30) para cálculo da resistência à punção:

$$V_{EC2} = \frac{0{,}6}{\gamma_v} \cdot k_{pb} \left(100\rho_1 f_{ck} \frac{d_{dg}}{d_v}\right)^{\frac{1}{3}} b_{0,5} \cdot d \leq \frac{0{,}5}{\gamma_v} \sqrt{f_{ck}}\,, \tag{3.30}$$

onde:

$$\rho_1 = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y}\,, \tag{3.31}$$

ρ_x, ρ_y são as taxas de armadura nas duas direções ortogonais, γ_v é o fator parcial para resistência ao cisalhamento e à punção sem reforço de cisalhamento, k_{pb} é o coeficiente de aumento do gradiente de cisalhamento de punção, que pode ser calculado através de:

$$1 \leq k_{pb} = 3{,}6\sqrt{1 - \frac{b_0}{b_{0,5}}} \leq 2{,}5\,, \tag{3.32}$$

d_{dg} é um parâmetro que depende do tipo de concreto e de suas propriedades de agregado, representado por:

$$\begin{cases} 16\,mm + D \leq 40\,mm\; para\; f_{ck} \leq 60\,MPa \\ 16\,mm + D\left(\frac{60}{f_{ck}}\right)^2 \leq 40\,mm\; para\; f_{ck} > 60\,MPa, \end{cases} \tag{3.33}$$

onde D é igual ao diâmetro máximo do agregado.

4. QUANTIFICAÇÃO DE INCERTEZAS E ERRO DE MODELO NA ENGENHARIA

O estudo das incertezas e erro de modelo tem sido alvo de inúmeras pesquisas devido à sua importância na Engenharia Estrutural. Este capítulo é destinado a conceituar as incertezas e o erro de modelo. Para Justino (2018), o termo incerteza é frequentemente utilizado como sinônimo de erro, o que não condiz com a realidade. Estes dois termos têm definições e características distintas.

De acordo com Vandepitte e Moens (2011), o erro é definido como uma deficiência identificável que não resulta da falta de conhecimento. Trata-se da relação entre o valor obtido em um processo de medição ou experimento e o valor real.

Conforme Olalusi e Viljoen (2020), modelos são meios pelos quais representamos e expressamos nossa compreensão da realidade. Por ser praticamente impossível compreender e representar a realidade em sua complexidade absoluta, os modelos são representações parciais que resultam em um estado de incerteza. A incerteza do modelo pode ser entendida como a consideração epistemológica de efeitos omitidos nas formulações do modelo e simplificações nas relações matemáticas.

4.1. Classificação de incertezas

Segundo Kiureghian e Ditlevsen (2009), embora possa haver muitas fontes de incerteza, no contexto da modelagem, é conveniente categorizar o caráter das incertezas como aleatórias ou epistêmicas. Uma incerteza aleatória é aquela que se presume ser a aleatoriedade intrínseca de um fenômeno. Uma incerteza epistêmica é aquela que se pressupõe ser causada pela falta de conhecimento (ou dados).

Para Beck (2024), as incertezas aleatórias são divididas em físicas e de previsão, dessa forma, são ditas objetivas e previsíveis, e estão relacionadas a variáveis e fenômenos observáveis. Já as incertezas epistêmicas são divididas em estatística, de decisão e de modelo, logo, tendem a ser subjetivas, em alguns casos podendo ser observáveis e relacionadas ao nosso conhecimento sobre as variáveis. A maioria dos problemas de Engenharia envolve ambos os tipos de incertezas. A Fig. 4.1 ilustra os tipos de incertezas.

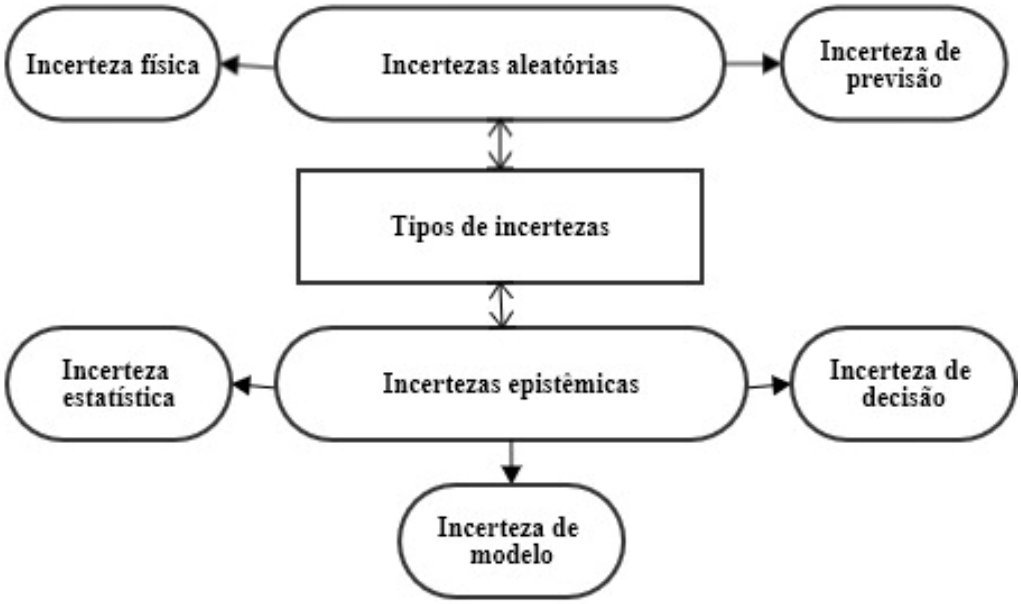


Figura 4.1- Tipos de incertezas

Fonte: Autora

De uma forma geral, a classificação de incertezas em problemas de Engenharia Estrutural podem ser agrupadas da seguinte forma (BECK, 2024):

- Física, corresponde à aleatoriedade natural dos fenômenos físicos, químicos, biológicos, atmosféricos que nos rodeiam, e que afetam o comportamento de sistemas de Engenharia. Incertezas físicas podem ser quantificadas em termos de probabilidades, e representadas através de variáveis aleatórias, processos estocásticos e campos estocásticos.
- Previsão, este tipo de incerteza se refere à previsão de condições futuras de um processo ou sistema. Muitas vezes, a informação disponível sobre determinado processo é limitada a um curto período, mas deve ser extrapolada para o período de vida útil da estrutura.
- Estatística, quando a média, por exemplo, de uma variável é determinada a partir de uma amostra, a variância do resultado corresponde a uma incerteza estatística nesta média. A incerteza de medição, que tem sua origem na imperfeição ou na faixa de erro do instrumento de medição utilizado, também pode ser classificada como uma incerteza estatística.
- Decisão, está relacionada com a definição sobre se determinado evento ocorreu ou não. O conceito de estados limites, por exemplo, implica em escrever uma

função de estado limite que estabelece uma fronteira discreta, tipo entrada/saída, entre os estados de sobrevivência e de falha.

- Modelo, tem sua origem na representação do comportamento estrutural através de modelos simplificados. Ao determinar a resistência de um elemento de concreto armado com base nas resistências do aço, do concreto e nas dimensões do elemento, ocorre a introdução de um erro de modelo. A incerteza de modelo pode ser representada através de uma variável aleatória, e sua distribuição de probabilidades pode ser determinada, por exemplo, realizando comparações entre ensaios experimentais e a resistência determinada via modelo.

Conforme Haldar (2006), as incertezas associadas à previsão da capacidade de carga de uma estrutura, as intensidades das cargas que se espera serem aplicadas e os efeitos dessas cargas podem ser representados por variáveis aleatórias.

4.2. Fontes de incertezas

De acordo com Yu et al. (2023), a quantificação das incertezas associadas aos modelos de resistência está se tornando cada vez mais complexa devido à evolução desses modelos. Entretanto, essa quantificação e sua descrição probabilística são essenciais para garantir uma verificação eficaz da confiabilidade na prática do projeto, conforme ilustrado na Fig. 4.2.

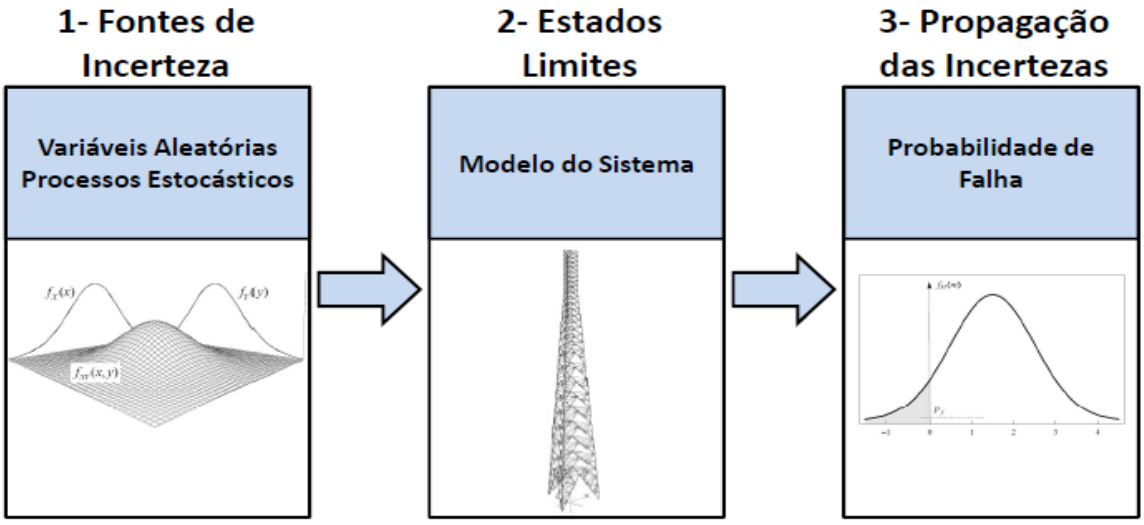


Figura 4.2 - Esquema geral da quantificação de incertezas em Engenharia de estruturas

Fonte: Kroetz (2019)

Kroetz (2019) afirma que a questão da quantificação de incertezas na Engenharia pode ser segmentada em três etapas distintas, como mostrado na Fig. 4.2. Essas etapas são adaptadas para um problema de confiabilidade estrutural. São elas: tratamento e quantificação das fontes de incerteza (1); modelagem do comportamento de interesse do sistema estrutural, por meio dos estados limites (2); e a propagação das incertezas através do sistema, que usualmente resulta na determinação de uma probabilidade de falha (3).

Soares (1997) observa que o objetivo da análise de confiabilidade foi expandido, abrangendo tanto a incerteza fundamental das variáveis quanto a incerteza estatística dos parâmetros. Furst (2020) complementa que a elaboração de projetos estruturais fundamentados na confiabilidade requer a compreensão de que as variáveis físicas envolvidas nos problemas de Engenharia estão sujeitas a incertezas.

Para Beck (2024), incertezas de modelo têm sua origem na representação do comportamento estrutural através de modelos simplificados. Conforme o modelo do JCSS (2001), a resposta de uma estrutura considerando a variabilidade das propriedades dos materiais e das ações pode ser dada por:

$$Y = f(X_i), \tag{4.1}$$

onde: Y é a resposta do modelo, f é a função do modelo e X_i variáveis aleatórias (propriedades dos materiais e as ações). A função do modelo (f) geralmente é incompleta e inexata, de modo que o resultado não pode ser previsto sem erro, mesmo que os valores de todas as variáveis aleatórias sejam conhecidos.

Para Ang e Cornell (1974), as incertezas de modelo podem ser incorporadas na análise de confiabilidade através da consideração da variável multiplicativa erro de modelo, como representada em:

$$V_{exp} = E_m \,.\, V_m, \tag{4.2}$$

onde a variável erro de modelo (E_m) atua na correção da variável obtida através de resultados de modelos normativos (V_m), resultando em uma estimativa aprimorada da variável associada aos resultados reais ou experimentais (V_{exp}).

4.3. Erro de modelo

De acordo com Beck (2024), a incerteza de modelo pode ser representada através de uma variável aleatória, e sua distribuição de probabilidades pode ser determinada realizando comparações entre ensaios experimentais e a resistência determinada via modelo, definindo o erro de modelo. Para Mirza e Skrabeck (1991), a relação entre os resultados experimentais e teóricos é atingida por variações proporcionais. Baseado na Eq. (4.2), as realizações do erro de modelo são dadas pela razão entre resistência real, obtida no ensaio experimental (V_{exp}), e a resistência teórica de cálculo, obtida do modelo (V_m):

$$E_m = \frac{V_{exp}}{V_m}, \tag{4.3}$$

onde E_m é o erro de modelo, V_{exp} é a resistência do ensaio e V_m é a resistência do modelo.

Segundo Beck (2024), um erro de modelo com média maior que 1 indica que o modelo é conservador em média. Isso significa que o modelo prevê mais provavelmente resistências menores que a resistência real. De acordo com a eq. (4.3) pode-se afirmar que:

$$\begin{cases} E_m = 1, \text{se } V_m = V_{exp} \\ E_m < 1, \text{se } V_m > V_{exp} \\ E_m > 1, \text{se } V_m < V_{exp}. \end{cases} \tag{4.4}$$

De acordo com Furst (2020), a média amostral do erro de modelo reflete, teoricamente, o viés conservativo do modelo, e o coeficiente de variação indica a precisão dos resultados. Caso os modelos em análise resultem em valores teóricos de resistência inferiores aos obtidos nos ensaios, o erro de modelo será, em média, superior ao valor ideal unitário, indicando conservadorismo. Para Santos (2012), a variável aleatória E_m representa o caráter de tendenciosidade do modelo.

Conforme Menezes (2020), os valores de capacidade resistente previstos por cada norma, em seus critérios, são comparados a valores experimentais a fim de determinar sua precisão e tendenciosidade. Para avaliar a precisão, a tendenciosidade do erro de modelo quando o resultado da sua média é diferente de 1, faz-se uma correção, dividindo-se os valores estimados (vindos dos critérios normativos) pela média calculada. Com esse

procedimento é obtida uma variável aleatória de média unitária para o erro de modelo, o que permite verificar a influência apenas da dispersão dos dados. A comparação da avaliação do erro de modelo com e sem correção explicita o impacto da tendência do modelo do código normativo no cálculo do índice de confiabilidade.

Beck (2024) afirma que modelos de cálculo aproximam, de forma abstrata, a complexa natureza do comportamento das estruturas, em especial próximo às situações de falha ou colapso, de interesse para a confiabilidade estrutural. Na Engenharia Estrutural estas aproximações são tipicamente conservadoras, e são feitas usualmente no sentido de aumentar as margens de segurança.

Neste trabalho, o erro de modelo é tratado exclusivamente como uma incerteza epistemológica associada à formulação normativa da resistência à punção, sendo incorporado às análises estatísticas e de confiabilidade estrutural desenvolvidas nos capítulos 7 e 8.

5. CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

Beck (2024) afirma que a confiabilidade estrutural é uma medida do grau de confiança em que uma estrutura ou sistema estrutural cumpra aos requisitos técnicos de projeto, como: função, resistência e equilíbrio. Este grau de confiança reflete os modelos estatísticos utilizados na quantificação das incertezas, bem como os modelos físicos, matemáticos e de Engenharia utilizados no cálculo.

Segundo Choi *et al*. (2007), a análise de confiabilidade avalia a probabilidade de falha estrutural determinando se as funções de estado limite são excedidas. Contudo, a análise de confiabilidade não se limita ao cálculo da probabilidade de falha. A avaliação de diversas propriedades estatísticas, como funções de distribuição de probabilidade e intervalos de confiança de respostas estruturais, desempenha um papel importante nesta análise.

Este capítulo pretende abordar os principais tópicos relacionados aos conceitos de probabilidade e estatística, assim como, alguns métodos que caracterizam a confiabilidade estrutural, incluindo os fundamentos da análise de confiabilidade.

5.1. Conceitos de Estatística e Probabilidade

Conforme Ferreira (2015), em um estudo estatístico, tem-se como maior interesse conhecer o comportamento de variáveis. Além disso, os métodos estatísticos são essenciais no estudo de situações em que as variáveis de interesse estão sujeitas a variações aleatórias, fato inerente a qualquer resultado obtido a partir de uma amostra. Neste caso, tornam-se imprescindíveis as distribuições de probabilidade.

Segundo Haldar e Mahadevan (2000), a teoria da probabilidade usa informações sobre um fenômeno aleatório para calcular a probabilidade de eventos específicos a ele associados. Um evento é um subconjunto contido no espaço amostral. Um espaço amostral contém todos os possíveis resultados de um fenômeno, denominados pontos amostrais, que são mutuamente exclusivos. Ang e Tang (2007) salientam a importância destes conceitos para a construção das chamadas distribuições de probabilidade, fundamentais no estudo de fenômenos aleatórios. A seguir, apresentam-se alguns desses conceitos.

5.1.1. Variáveis aleatórias

Chama-se espaço de probabilidade à terna (Ω, $\mathscr{F}$, $\mathcal{P}$), onde Ω representa um espaço amostral, $\mathscr{F}$ representa a família de subconjuntos deste espaço amostral que representam eventos e $\mathcal{P}$ suas probabilidades de ocorrência (BUSSAB e MORETTIN, 2010).

Denomina-se variável aleatória a uma função do espaço amostral Ω em $\mathbb{R}$, que associa cada ponto amostral ou subconjunto pentencente à classe $\mathcal{F}$ a um número real. Isto significa que para cada valor $x \in \Omega$, existe um $f(x) \in I$, sendo $I \subset \mathbb{R}$ (BUSSAB e MORETTIN, 2010; MAGALHÃES, 2006). Isto significa que o domínio da função é o espaço amostral e a sua imagem está contida no conjunto dos números reais.

Beck (2024) evidencia que o domínio da função variável aleatória *X* é o espaço amostral Ω. Quando este domínio é formado por um número enumerável de pontos, a variável aleatória é dita discreta. Quando o domínio é formado por um conjunto de valores não enumerável, a variável aleatória é dita contínua.

5.1.2. Distribuição de probabilidade

Para Magalhães (2006), uma distribuição de probabilidade é uma função que associa cada valor de uma variável aleatória *X* à sua probabilidade de ocorrência. Se esta variável é uma variável aleatória contínua, existe uma função, denominada Função Densidade de Probabilidade (FDP), que faz a caracterização da distribuição de probabilidade e que deve satisfazer às seguintes condições: $f(X) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} f(X)\, dX = 1$. Conforme Haldar e Mahadevan (2000), uma FDP deve ser uma função positiva que, teoricamente, varia de - ∞ a + ∞.

Se $f(X)$ é uma FDP, para qualquer $a \in \mathbb{R}$ e para qualquer $b \in \mathbb{R}$, sendo $a \leq X \leq b$, tem-se:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(X)dX. \tag{5.1}$$

Isto significa que, a probabilidade da variável aleatória X pertencer ao intervalo limitado pelos dois valores, a e b, é dada pela área compreendida entre o intervalo considerado no eixo das abscissas e a curva representativa de $f(X)$, podendo ser encontrada por integração.

Na determinação destes valores de probabilidade, é bastante usual utilizar a função de distribuição acumulada (FDA). Segundo Beck (2024), a FDA de uma variável aleatória

X, $F(X_i)$, corresponde à probabilidade de que essa variável assuma qualquer valor menor que X, e é representada através de:

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} f(x)\, dx. \tag{5.2}$$

Beck (2024) explica que a derivada em relação a x da FDA é chamada de Função de Densidade de Probabilidade (FDP), ou $f_X(x)$, tal que:

$$f(X) = \frac{d\, F(X)}{dx}, \tag{5.3}$$

$$P[x < X \leq x + dx] = f(X)\, dx. \tag{5.4}$$

Segundo Magalhães (2006), as distribuições contínuas de probabilidade podem ser caracterizadas por seus momentos. O primeiro momento centrado na origem é a sua média ou valor esperado, que pode ser encontrado por:

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx. \tag{5.5}$$

Já o segundo momento centrado na média é a variância, que pode ser encontrada por:

$$V(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \right)^2. \tag{5.6}$$

Algumas variáveis aleatórias, independentemente de serem discretas ou continuas, possuem um padrão comum de comportamento, com algumas especificidades definidas por alguns parâmetros. É possível variar algumas características da distribuição, mas sua forma funcional permanece, originando os modelos teóricos de probabilidade. Existem modelos teóricos que descrevem comportamentos de variáveis aleatórias discretas (Bernoulli, Binomial, Poisson, Hipergeométrica) e contínuas (Normal, t de Student, Quiquadrado). A seguir, comentam-se alguns modelos teóricos utilizados no estudo de variáveis contínuas (Magalhães, 2006).

5.1.3. Distribuições teóricas de probabilidade

Existem diversas distribuições de probabilidade, sendo que neste trabalho serão abordadas cinco utilizadas para descrever o comportamento de variáveis aleatórias contínuas, que são as distribuições Normal, Lognormal, Gumbel, Weibull e Gama, usualmente utilizadas neste tipo de estudo.

Distribuição Normal

Verma *et al*. (2016) destacam que a distribuição Normal é amplamente observada em aplicações práticas, pois a soma de um grande número de variáveis aleatórias estatisticamente independentes converge para uma distribuição Normal (Teorema do Limite Central). Segundo Melchers e Beck (2018), essa distribuição constitui um modelo adequado para descrever observações associadas a diversos processos ou propriedades físicas. Além disso, pode surgir como caso particular ou aproximação de outras distribuições de probabilidade.

Se X é uma variável aleatória contínua normalmente distribuída, a sua FDP é apresentada na Eq. (5.7) e sua FDA através da Eq. (5.8):

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}.\sigma}\, exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \qquad -\infty \leq \text{x} \leq \infty, \tag{5.7}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}.\sigma}\, exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx, \tag{5.8}$$

onde: $E(x) = \mu$ e $V(x) = \sigma^2$ representam a média e a variância, respectivamente.

Nos gráficos das Figs. 5.1 e 5.2 foram consideradas três distribuições normais com a mesma média zero, mas diferentes desvios padrões. Observa-se que na Fig. 5.1, a alteração do desvio padrão faz com que a curva fique mais alta e com caudas mais pesadas ou mais achatada e com caudas mais leves, alterando seus valores de probabilidade.

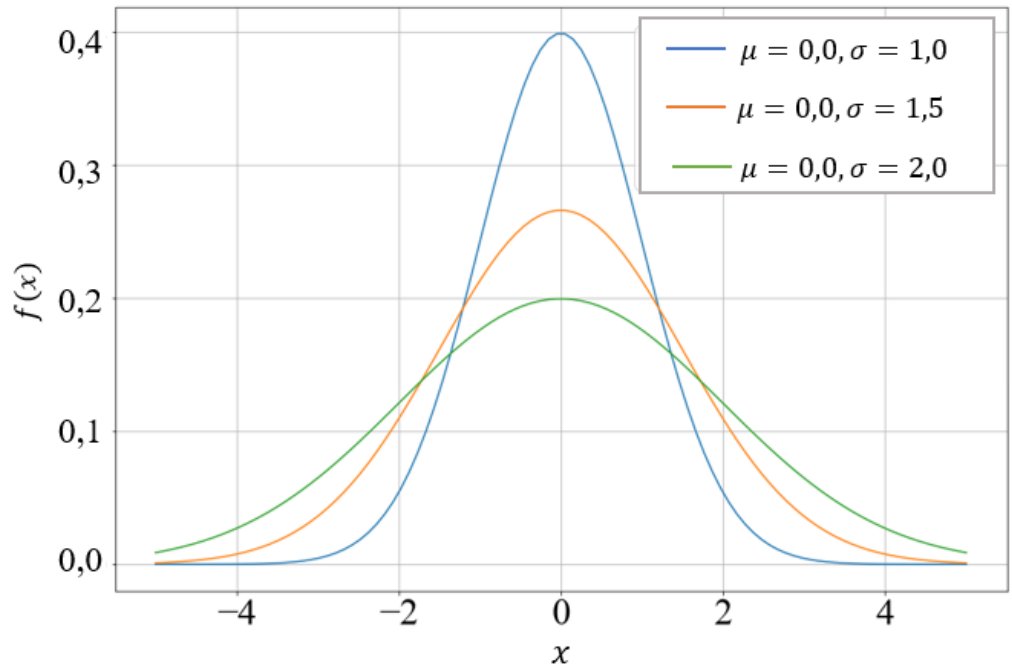


Figura 5.1 – Distribuição Normal – Função de Densidade de Probabilidade

Fonte: Autora

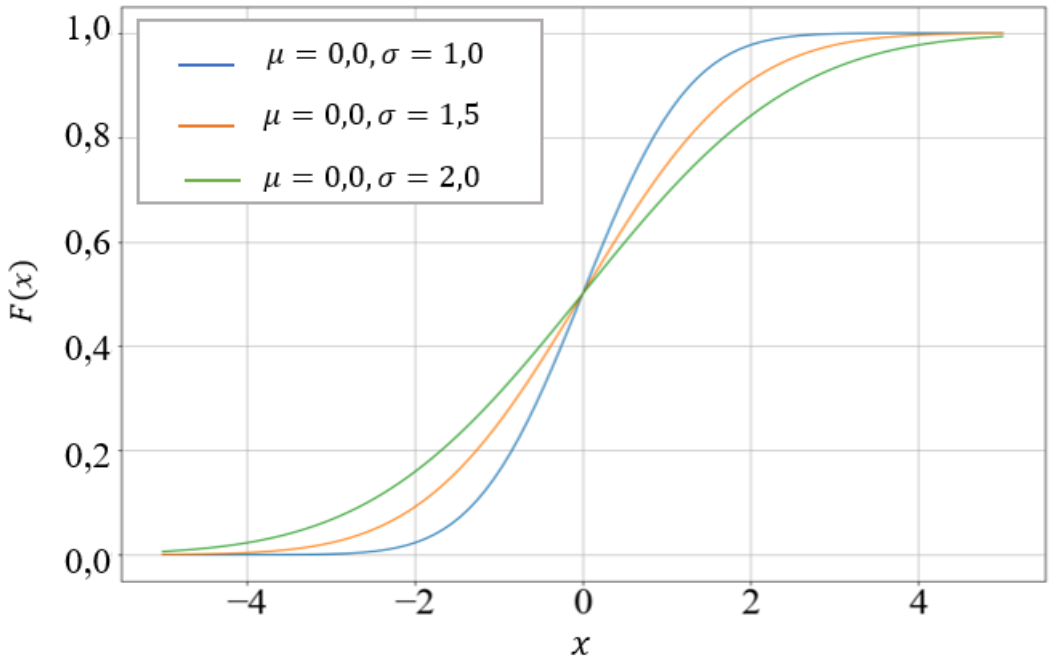


Figura 5.2 – Distribuição Normal – Função de Distribuição de Probabilidade

Fonte: Autora

Haldar e Mahadevan (2000) afirmam que a determinação de probabilidades por meio da integração não é uma tarefa simples. Uma abordagem bastante usual para resolver esse problema consiste em transformar a variável analisada em uma variável normal padrão, conforme Eq. (5.9), simplificando sua função densidade de probabilidade

por apresentar média igual a zero e desvio padrão igual à unidade, e, em seguida, calcular a integral numericamente.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}. \tag{5.9}$$

Distribuição Lognormal

Uma variável aleatória positiva contínua *X* é considerada uma distribuição Lognormal se o seu logaritmo natural é normalmente distribuído (VERMA *et al*., 2016; MELCHERS e BECK, 2018). Haldar e Mahadevan (2000) destacam que, em diversos problemas de Engenharia, uma variável não pode ter valores negativos devido às particularidades físicas do problema, e nesse contexto, modelar a variável como Lognormal pode ser bastante adequado, uma vez que essa distribuição lida exclusivamente com valores positivos.

Se *Y* é uma variável aleatória contínua normalmente distribuída com média μ e desvio padrão σ, e $Y = \ln(x)$, então *x* apresenta distribuição Lognormal. Neste caso, a FDP é expressa pela Eq. (5.10) e sua FDA através da Eq. (5.11):

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\,\zeta\,x}\,exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\zeta}\right)^2\right], \quad 0 \leq \text{x} \leq \infty, \tag{5.10}$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\,\zeta\,x}\,exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\zeta}\right)^2\right] dx. \tag{5.11}$$

Os momentos da variável Lognormal podem ser determinados por:

$$\mu_x = exp\,[\lambda + 0{,}5\zeta^2], \tag{5.12}$$

$$\sigma_x^2 = \mu_x \sqrt{(\exp[\zeta^2] - 1)}, \tag{5.13}$$

e os parâmetros são calculados a partir dos momentos, de tal forma que:

$$\lambda = ln(\mu_x) - 0{,}5\zeta^2, \tag{5.14}$$

$$\zeta = \sqrt{ln(1 + (\sigma_x^2/\mu_x)^2)}\ . \tag{5.15}$$

A representação gráfica de três distribuições deste tipo com parâmetros especificados pode ser vista nas Figs. 5.3 e 5.4.

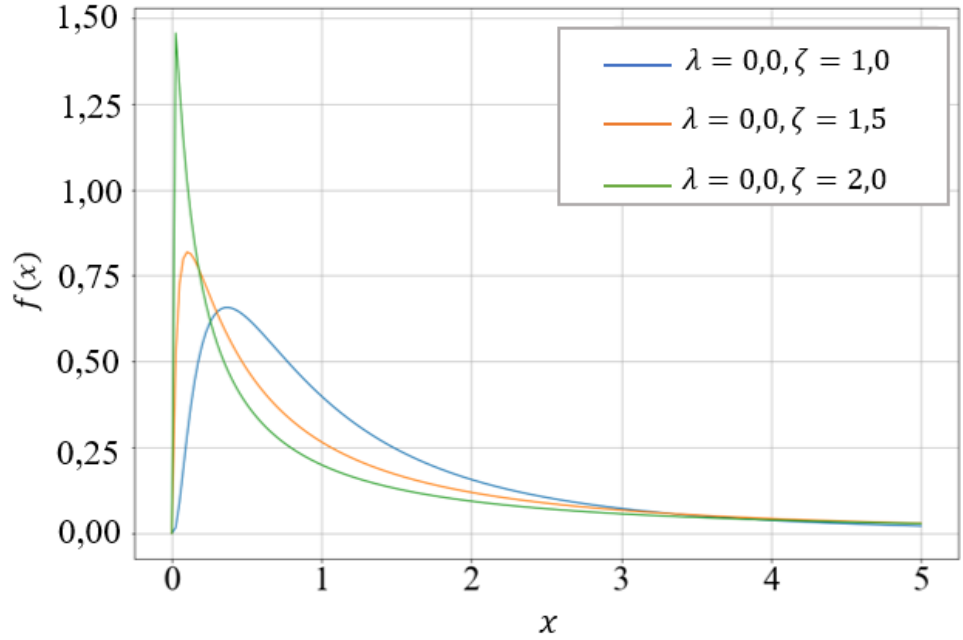


Figura 5.3 – Distribuição Lognormal – Função de Densidade de Probabilidade

Fonte: Autora

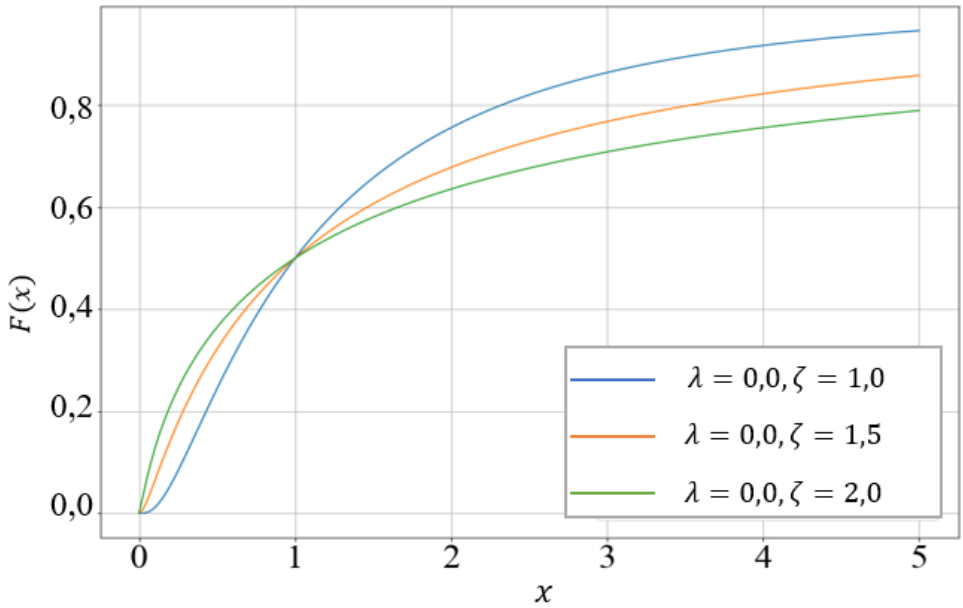


Figura 5.4 – Distribuição Lognormal – Função de Distribuição de Probabilidade

Fonte: Autora

As Figuras 5.3 e 5.4 apresentam o comportamento da distribuição Lognormal, sendo possível observar que as funções de densidade de probabilidades e distribuição de probabilidade acumulada admitem somente valores positivos e não nulos.

Distribuição de Gumbel

Segundo Haldar e Mahadevan (2000), seja *X* uma variável aleatória representada por uma função de distribuição de probabilidade $f(x)$. Se conjuntos de diferentes amostras do mesmo tamanho de *n* forem alcançados para *x,* cada conjunto terá valores distintos para mínimos e máximos. Usando todos esses conjuntos, funções de distribuições para os valores extremos podem ser definidas.

A FDP da distribuição Gumbel é expressa pela Eq. (5.16) e sua FDA através da Eq. (5.17), e graficamente através das Figs. 5.5 e 5.6.

$$f(x) = \alpha \exp[-\alpha\,(x-u) - e^{-\alpha\,(x-u)}] \quad -\infty < x < \infty, \tag{5.16}$$

$$F(x) = exp\,[-e^{-\alpha\,(x-u)}] \quad -\infty < x < \infty. \tag{5.17}$$

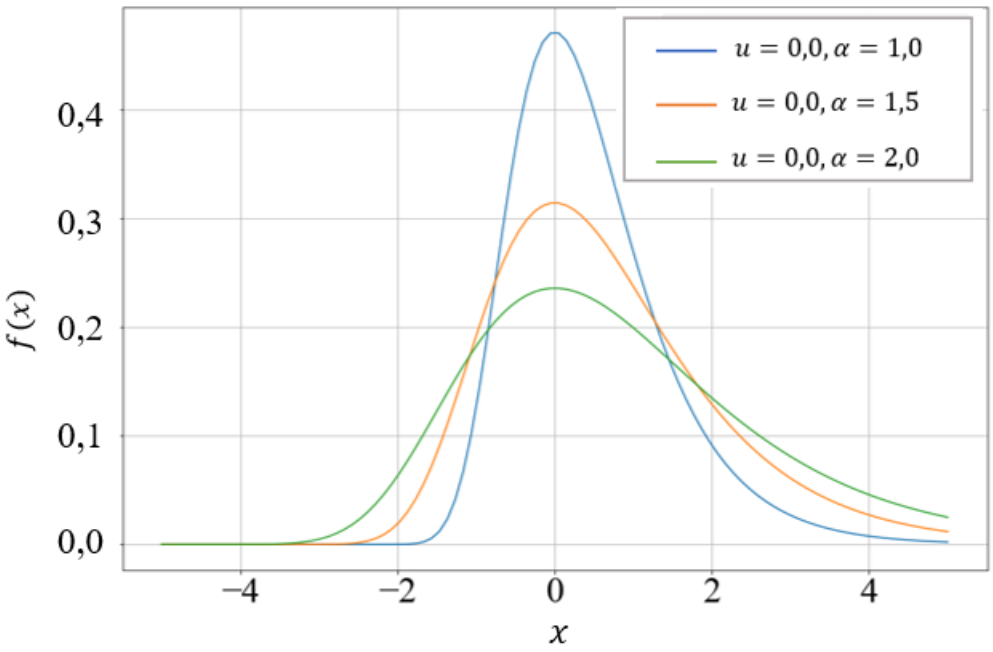


Figura 5.5 – Distribuição Gumbel – Função de Densidade de Probabilidade

Fonte: Autora

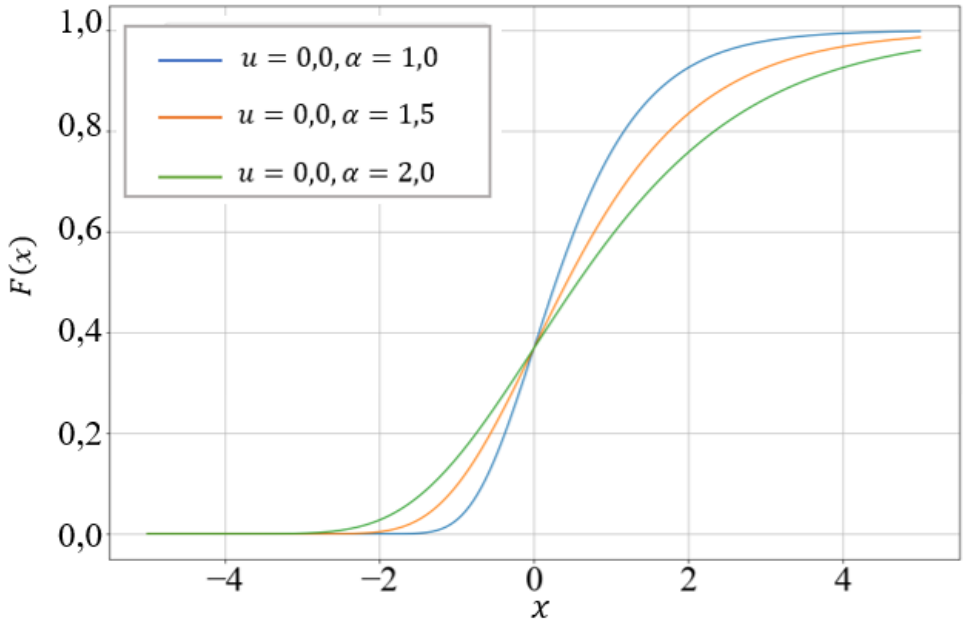


Figura 5.6 – Distribuição Gumbel – Função de Distribuição de Probabilidade

Fonte: Autora

As Figura 5.5 e 5.6 ilustram o comportamento da distribuição de Gumbel para diferentes parâmetros. Na análise de confiabilidade estrutural, essa distribuição é comumente usada para representar cargas acidentais e a ação do vento (EL-REEDY, 2013).

Para Melchers e Beck (2018), os parâmetros dessa distribuição são u, que é a moda da distribuição e α, que é uma medida de sua dispersão. Tanto u quanto α podem ser obtidos, usando os momentos da distribuição, para o ajuste da curva aos dados observados, e representados por:

$$\mu_x = u + \frac{\gamma}{\alpha}, \tag{5.18}$$

$$\sigma_x = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{6}}. \tag{5.19}$$

onde $\gamma = 0{,}577216$ é a constante de Euler. Conhecidos os momentos, os parâmetros são determinados, tal que:

$$u = u_x - \frac{\gamma}{\alpha}, \tag{5.20}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{\sigma_x\sqrt{6}}. \tag{5.21}$$

Distribuição de Weibull

Segundo Verma *et al*. (2016), a distribuição Weibull tem ampla aplicação no cálculo de confiabilidade devido à sua flexibilidade na modelagem, sendo uma das funções de distribuição mais utilizadas na análise de confiabilidade. Conforme Haldar e Mahadevan (2000), a distribuição de Weibull, também denominada distribuição de valores extremos do Tipo III, pode ser obtida pela convergência de diversas distribuições comumente conhecidas que apresentam limite inferior.

Seja X uma variável aleatória continua. Sua distribuição de probabilidade será Weibull se sua FDP é expressa pela Eq. (5.22) e sua FDA através da Eq. (5.23):

$$f(x) = \frac{k}{w}\left(\frac{x}{w}\right)^{k-1} exp\left[-\left(\frac{x}{w}\right)^{k}\right], \quad x > 0, \tag{5.22}$$

$$F(x) = 1 - exp\left[-\left(\frac{x}{w}\right)^{k}\right]. \tag{5.23}$$

onde: k é um parâmetro de forma e w é um parâmetro de escala e ambos devem assumir valores positivos.

Os gráficos das Figs. 5.7 e 5.8 mostram o comportamento de três distribuições de Weibull, evidenciando sua plasticidade em função de k e w.

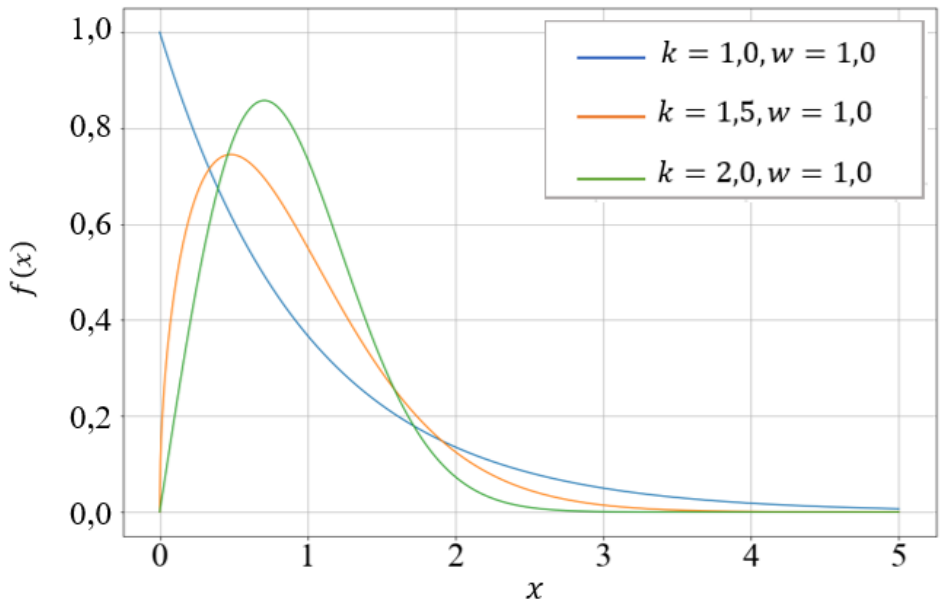


Figura 5.7 – Distribuição Weibull – Função de Densidade de Probabilidade

Fonte: Autora

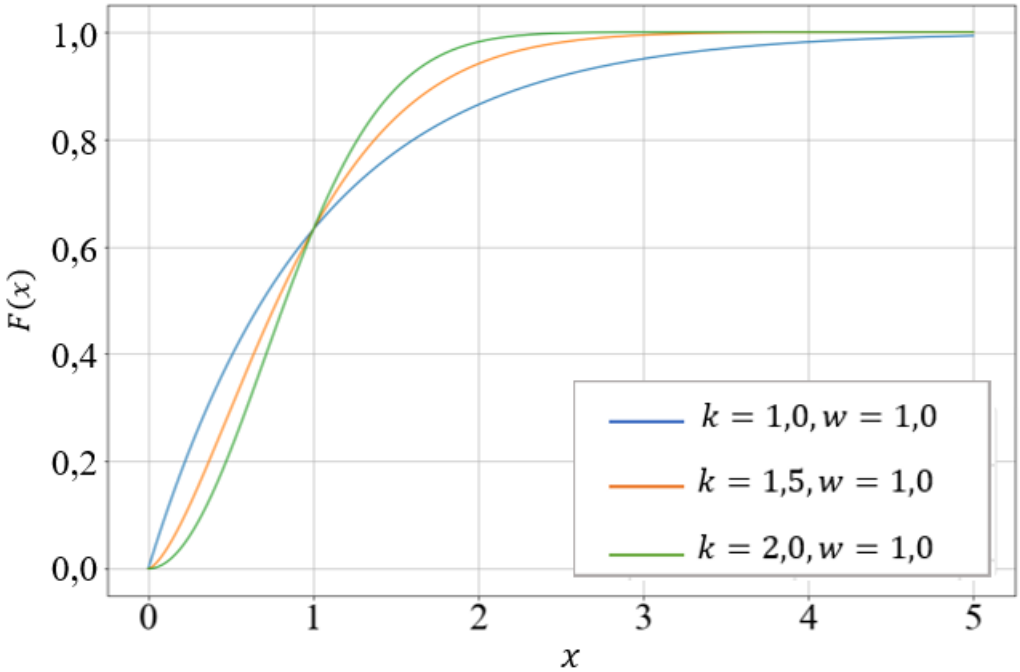


Figura 5.8 – Distribuição Weibull – Função de Distribuição de Probabilidade

Fonte: Autora

Billinton e Allan (1992) afirmam que a distribuição Weibull tem um papel muito importante dentro do campo de análise estatística de dados experimentais, pois, pode assumir um formato que se adeque melhor aos dados, de acordo com os parâmetros definidos.

Para Beck (2024), tanto k quanto w podem ser obtidos, usando os momentos da distribuição, sendo representados por:

$$\mu = w\,\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right), \tag{5.24}$$

$$\delta = \left[\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{k}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{k}\right)} - 1\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{5.25}$$

onde Γ é a função Gama. Se a média e o coeficiente de variação forem conhecidos, a seguinte aproximação pode ser usada para calcular os parâmetros k e w para aplicações práticas:

$$k = \delta^{-1{,}08}, \tag{5.26}$$

$$w = \frac{\mu}{\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)}. \tag{5.27}$$

Distribuição Gama

Conforme Choi *et al*. (2007), a distribuição Gama é importante porque nos permite definir duas famílias de distribuições de variáveis aleatórias, a Exponencial e a Quiquadrado, que são amplamente utilizadas em Engenharia Aplicada e Estatística. De acordo com Bussab e Morettin (2006), esta distribuição é uma extensão da distribuição Exponencial, razão pela qual é comum utilizar o modelo de distribuição de probabilidade Gama para variáveis que assumem valores positivos, e se enquadra na classe dos modelos lineares. De acordo com Kinas e Andrade (2020), a distribuição Quiquadrado é um caso especial desta distribuição.

Seja *X* uma variável aleatória continua, a FDP da distribuição Gama é expressa conforme Eq. (5.28):

$$f(x) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad 0 \leq \text{x} < \infty, \tag{5.28}$$

onde: os parâmetros α e β satisfazem às condições: $\alpha \geq 1$ e $\beta > 0$, e a média e a variância são dadas por, respectivamente, $\mu = \frac{\alpha}{\beta}$ e $\sigma^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}$.

Já a função Gama é determinada de acordo com a Eq. (5.29):

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx, \quad sendo \quad \alpha > 0, \tag{5.29}$$

enquanto a FDA da distribuição Gama é representada pela Eq. (5.30):

$$F(x) = \int_0^{x} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx. \tag{5.30}$$

As Figs. 5.9 e 5.10 mostram o comportamento dessa distribuição para diferentes parâmetros, evidenciando a plasticidade da distribuição que assume diferentes formas de acordo com os valores de α e β.

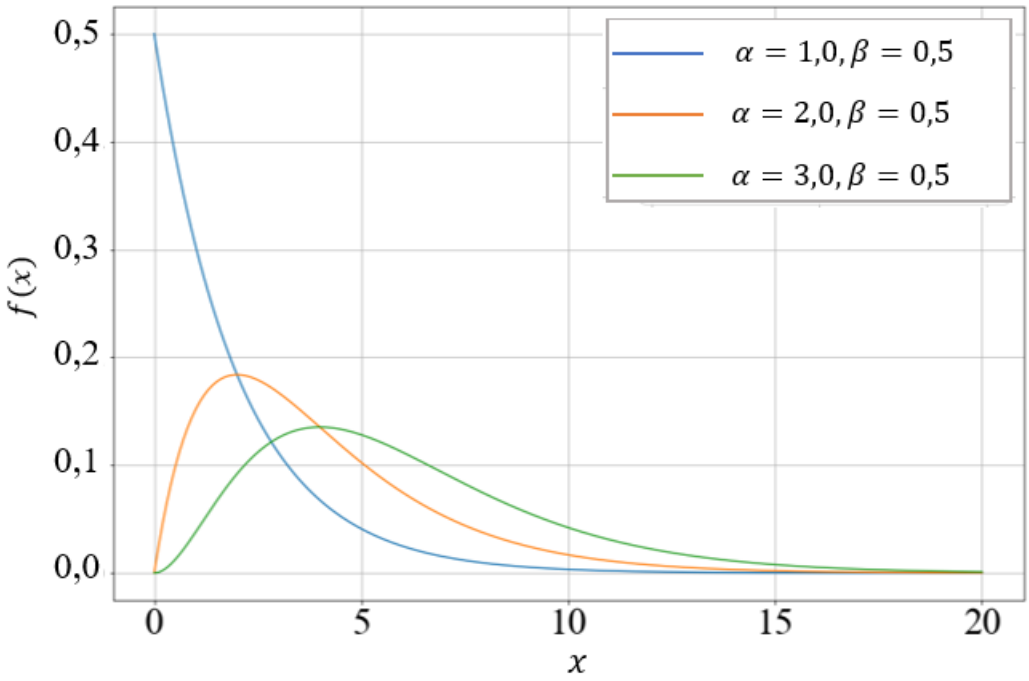


Figura 5.9 – Distribuição Gama – Função de Densidade de Probabilidade

Fonte: Autora

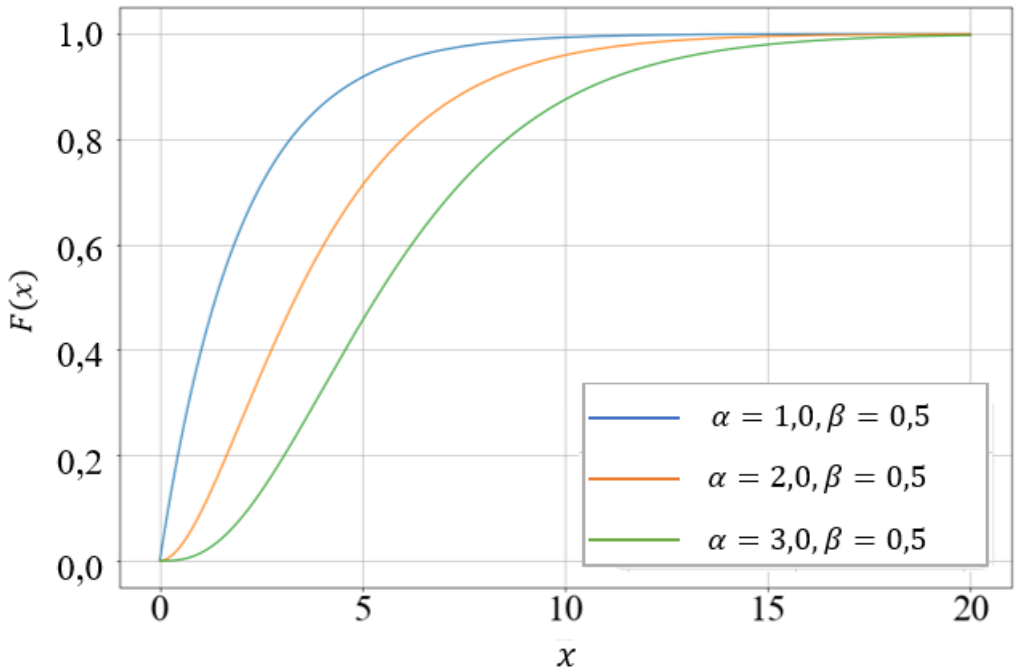


Figura 5.10 – Distribuição Gama – Função de Distribuição de Probabilidade

Fonte: Autora

As Figuras 5.9 e 5.10 ilustram o comportamento da distribuição Gama. Segundo Verma *et al*. (2016), essa distribuição é semelhante à distribuição Weibull e é comumente utilizada para modelar o tempo de vida de sistemas.

5.2. Função estado limite

Segundo Melchers e Beck (2018), a forma como uma estrutura de Engenharia reage ao carregamento é determinada principalmente pela carga aplicada e pela resistência da estrutura. Quando essa resposta é considerada positiva, ela abrange a segurança da estrutura contra colapso, limitações de danos ou outros critérios. Cada um desses requisitos pode ser denominado estado limite. A ultrapassagem de um estado limite pode ser definido como a obtenção de uma condição indesejável para a estrutura.

Beck (2024) explica que os modos de falha e os estados limites são representados estritamente por falhas em estruturas. Os estados limites são basicamente distinguidos por duas categorias principais: último e serviço, como apresentado na Tab. 5.1.

Tabela 5.1– Tipos de Estado Limite

Estado Limite	Descrição	Exemplos
último	são relacionados ao colapso, ou a qualquer outra forma de ruína estrutural, que determine a paralisação do uso da estrutura.	*perda de equilíbrio da estrutura, admitida como corpo rígido; *esgotamento da capacidade resistente da estrutura; *colapso progressivo; *mudança física ou geométrica da estrutura; *ruptura ou instabilidade de peças estruturais.
serviço	são aqueles determinados pelos requisitos de serviços e condições de uso, e estão relacionados à durabilidade, ao conforto do usuário, à aparência e à boa utilização da estrutura	*formação de fissuras ou trincas exageradas; *flechas excessivas em vigas e lajes; *forte vibração da estrutura; *deformação em nível não aceitável.

Fonte: Adaptada da ABNT NBR6118 (2023)

Beck (2024) menciona que cada forma distinta de chegar em um estado indesejável é chamada, genericamente, de um modo de falha. Cada modo de falha resulta

em uma equação de estado limite $g(X)$, que é função do vetor de variáveis aleatórias $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, de tal forma que o estado limite fica determinado pela seguinte igualdade:

$$g(X) = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0. \tag{5.31}$$

Uma equação de estado limite $g(X)$ é escrita de forma a dividir o domínio do problema em domínios de falha Ω_f e de segurança Ω_S, tal que:

$$\Omega_f = \{X | g(X) \leq 0\}, \tag{5.32}$$

$$\Omega_S = \{X | g(X) > 0\}. \tag{5.33}$$

O domínio de falha Ω_f é constituído por todos os pontos do espaço amostral X que levam a falha da estrutura. O domínio seguro Ω_S é o conjunto complementar ao domínio de falha.

De acordo com Melchers e Beck (2018), assim como existem incertezas nos projetos de engenharia, também há riscos de que um sistema estrutural não alcance o desempenho previsto. Isso significa que o desempenho do sistema não pode ser garantido como totalmente seguro. Assim, para Santos (2014), é conveniente definir a função estado limite, considerando uma estrutura com resistência R e solicitação S, sendo possível, então, o que permite avaliar a probabilidade de falha. Em uma análise probabilística, uma função de estado limite pode ser determinada por:

$$g(x) = R(x) - S(x), \tag{5.34}$$

onde x é o vetor de variáveis aleatórias do problema; $R(x)$ é a variável aleatória que representa a resistência da estrutura; $S(x)$ é a variável aleatória que representa a ação ou o esforço solicitante.

Para Beck (2024), a probabilidade de falha (P_f) de uma estrutura é definida quando a resistência é menor que a solicitação, e a probabilidade de segurança (P_S) é quando a resistência é maior ou igual à solicitação, sendo dadas pelas equações:

$$P_f = P[g(x) < 0], \tag{5.35}$$

$$P_S = 1 - P_f. \tag{5.36}$$

Em conformidade com o JCSS (2001), a probabilidade de falha deve ser calculada considerando o tipo de distribuição conjunta das variáveis básicas, bem como o formalismo distributivo padronizado para lidar com a incerteza do modelo e a incerteza estatística.

Segundo Haldar e Mahadevan (2000), calcular a probabilidade de falha com precisão em estruturas práticas e critérios de desempenho é uma tarefa complexa. No entanto, uma estimativa de primeira ordem utiliza uma medida chamada índice de confiabilidade (denotado por β).

Conforme Sakamoto (2016), uma definição amplamente utilizada na prática devido à sua simplicidade é o índice de confiabilidade de Cornell (β_c), onde uma medida quantitativa de confiabilidade com base no valor médio ou valor esperado $E[g(x)]$ e na variância $Var[g(x)]$ da função de estado limite linear $g(x)$, dado por:

$$\beta_c = \frac{E[g(x)]}{\sqrt{Var[g(x)]}}. \tag{5.37}$$

Através da transformação sugerida por Hasofer e Lind (1974), o índice de confiabilidade também pode ser obtido geometricamente como a menor distância da origem à função de estado limite no espaço padronizado. Considerando a Eq. (5.34) com variáveis aleatórias R e S estatisticamente independentes e com distribuição de probabilidade normal, com médias μ_R e μ_S e desvios padrões σ_R e σ_S, pode-se transformar as variáveis R e S em variáveis reduzidas (Y_R e Y_S), com média zero e desvio padrão unitário, utilizando a Eq. (5.9), tem-se as equações:

$$Y_R = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R}, \tag{5.38}$$

$$Y_S = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S}. \tag{5.39}$$

Substituindo as Eqs. (5.38) e (5.39) na Eq. (5.34), a função desempenho no estado limite linear no espaço padronizado pode ser descrita por:

$$g(S_R, S_S) = Y_R\sigma_R - Y_S\sigma_S + (\mu_R - \mu_S). \tag{5.40}$$

Para Beck (2024), o índice de confiabilidade calculado em problemas envolvendo variáveis aleatórias normais estatisticamente independentes e uma função de estado limite linear do tipo $g(x) = R - S$, corresponde à menor distância entre a origem e a função, e é dada através de:

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}. \tag{5.41}$$

Conforme Haldar e Mahadevan (2000), a probabilidade de falha pode ser obtida em função do índice de confiabilidade, se R e S tiverem distribuições normais, como ilustrado na Fig. 5.11 e determinada por:

$$P_f = \Phi\,(-\beta), \tag{5.42}$$

onde Φ é a função de distribuição acumulada da variável normal padrão, definida por:

$$\Phi(\beta) = \int_{-\infty}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy. \tag{5.43}$$

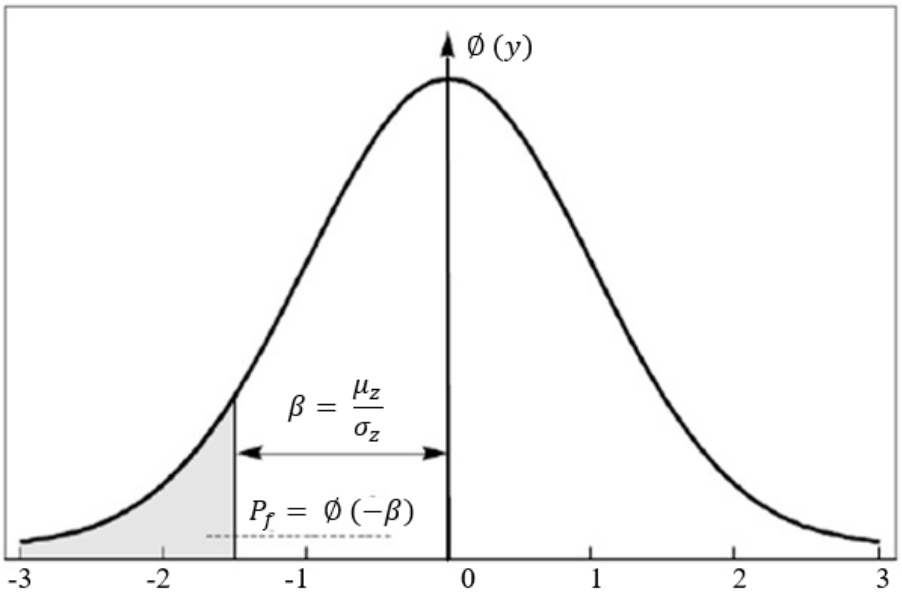


Figura 5.11 – Probabilidade de falha em função do índice de confiabilidade

Fonte: Beck (2024)

De acordo com Melchers e Beck (2018), para funções de estado limite lineares, a probabilidade de falha pode ser obtida diretamente a partir do índice de confiabilidade. Para funções não lineares, embora ainda possa ser definida, isso ocorre apenas em relação a um plano tangente aproximado. Em ambos os casos, β representa a menor distância entre a origem no espaço normal e o plano tangente, como mostra a Fig. 5.12.

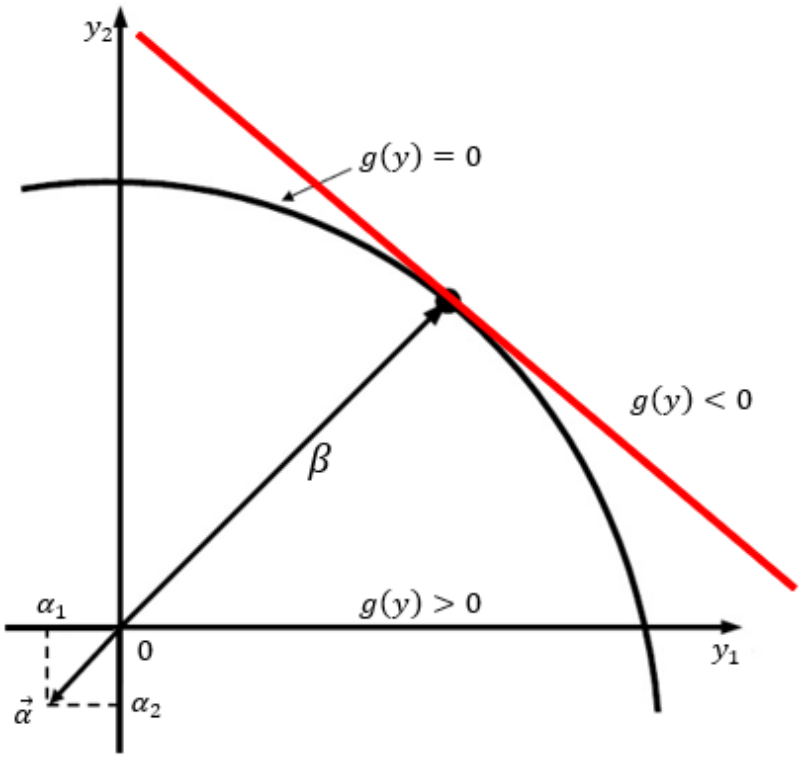


Figura 5.12 – Representação do índice de confiabilidade.

Fonte: Albuquerque (2021)

Observando a Fig. 5.12, e ainda segundo Melchers e Beck (2018), o ponto correspondente no hiperplano é denominado ponto de projeto. Esse ponto é o de maior densidade de probabilidade dentro do espaço abrangido pela região de falha.

Para Haldar e Mahadevan (2000), a função de estado limite é fundamental no desenvolvimento de métodos para a análise de confiabilidade estrutural. O estado limite pode ser uma função explícita ou implícita das variáveis aleatórias básicas. Métodos de análise de confiabilidade foram desenvolvidos correspondendo a estados limites de diferentes tipos e complexidades.

6. MÉTODOS DE CONFIABILIDADE

Para Beck (2024), a solução de problemas de confiabilidade estrutural independentes do tempo, envolve a determinação (ou uma aproximação) da função conjunta de densidade de probabilidades, bem como aproximações do domínio de integração. Diferentes métodos de solução, incluindo métodos de transformação e simulação de Monte Carlo, envolvem diferentes aproximações de $f_x(x)$ e do domínio de integração.

Segundo Haldar e Mahadevan (2000), um projeto de Engenharia envolve a definição de elementos essenciais para que um sistema atenda a diversos critérios, como desempenho, segurança, facilidade de manutenção e durabilidade. No entanto, existem inúmeras fontes de incerteza nos parâmetros relacionados a esses critérios. Os métodos de confiabilidade apresentados nesta pesquisa pretendem identificar e quantificar incertezas em variáveis aleatórias.

6.1. Simulação de Monte Carlo

A simulação de Monte Carlo é um método numérico que se baseia em amostragens aleatórias. Segundo Beck (2024), em Engenharia de Estruturas, esse método se adapta tanto a problemas lineares quanto não lineares, estáticos ou dinâmicos. Em confiabilidade estrutural, a simulação resolve, com a mesma facilidade, problemas envolvendo uma única equação de estado limite, dependente do tempo ou não.

Segundo Santos (2014), em confiabilidade de estruturas, especialmente na simulação de Monte Carlo, um passo fundamental é a geração de amostras de variáveis aleatórias. Considerando que uma variável aleatória pode ser definida por sua função de densidade de probabilidade, a partir da função cumulativa de probabilidade $F_X(x)$, pode-se obter uma amostra aleatória da seguinte forma:

a) Geração de um número aleatório u_1 com distribuição uniforme de probabilidade, que está entre 0 e 1;
b) A partir da inversa da função cumulativa de probabilidade (FDA) se obtém o número aleatório com distribuição prescrita, como mostra:

$$x_i = F_X^{-1}(u_i). \tag{6.1}$$

Esse procedimento pode ser visualizado na Fig. 6.1.

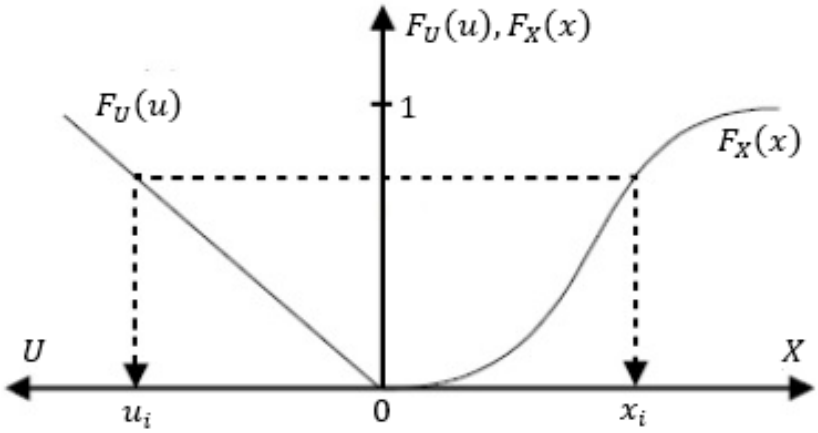


Figura 6.1 – Geração de números aleatórios com distribuição prescrita

Fonte: Adaptado Haldar e Mahadevan (2000)

O procedimento descrito não se adequa para distribuição Normal e consequentemente Lognormal, uma vez que não existe uma solução analítica para a função cumulativa de probabilidade dessas distribuições. Dessa forma, é recomendada a utilização de algoritmos específicos. Pode-se adotar um par de números aleatórios u_1 e u_2, independentes e com distribuição de probabilidade uniforme, no intervalo de [0,1], para gerar um par de números aleatórios y_1 e y_2 de uma variável normal padrão (SOONG e GRIGORIU, 1993). Os números y_1 e y_2 são obtidos por:

$$y_1 = \sqrt{-2\ln(u_1)}\cos(2\pi\, u_2) \tag{6.2}$$

$$y_2 = \sqrt{-2\ln(u_1)}\sin(2\pi\, u_2). \tag{6.3}$$

Transformando os números aleatórios do espaço normal padrão $\mathbb{Y}$ para o espaço $\mathbb{X}$, utiliza-se a transformação de Hasofer-Lind, dessa forma, têm-se:

$$x_i = y_i\,\sigma + \mu \tag{6.4}$$

onde μ e σ são a média e o desvio padrão, respectivamente, da variável X.

Se as variáveis aleatórias do problema são independentes, então a distribuição conjunta de probabilidade pode ser obtida através de:

$$f_X(x) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) \tag{6.5}$$

sendo $f_{X_i}(x_i)$ a função de densidade de probabilidade marginal da variável X_i. Isto significa que utilizando as Eqs. (6.1) e (6.4) os números aleatórios podem ser gerados de forma independente dos demais (BECK, 2024).

De acordo com Albuquerque (2021), o método de simulação Monte Carlo é dito bruto ou força bruta quando este é apresentado em sua forma mais simples. A solução de problemas de confiabilidade através da simulação é realizada utilizando uma função indicadora $I_g(x)$ tal que:

$$\begin{cases} I_g(x) = 1, \text{se } g(x) < 0 \\ I_g(x) = 0, \text{se } g(x) \geq 0 \end{cases} \tag{6.6}$$

sendo, $g(x) < 0$ (domínio de falha) e $g(x) \geq 0$ (domínio de segurança), podem-se estender os limites de integração sobre todo o domínio da função $g(x)$ das variáveis aleatórias para se calcular a probabilidade de falha, como mostrado em:

$$P_f = \int_{g(x)} I_g(x)\, f_X(x)\, dx. \tag{6.7}$$

6.1.1. Amostragem por importância

Uma das técnicas para acelerar a convergência na simulação de Monte Carlo é uma amostragem por importância. Essa técnica visa calcular a probabilidade de falha na região do estado limite. Beck (2024) afirma que a amostragem por importância envolve o uso de uma função de amostragem, com o intuito de evitar a geração de amostras que estejam distantes da região de interesse, ou seja, do domínio de falha. Nesse mesmo contexto, Haldar e Mahadevan (2000) explicam que o objetivo da amostragem por importância é concentrar a distribuição dos pontos de amostragem na região mais

significativa. A Fig. 6.2 ilustra o funcionamento do Método de simulação de Monte Carlo com amostragem por importância, para um caso bidimensional.

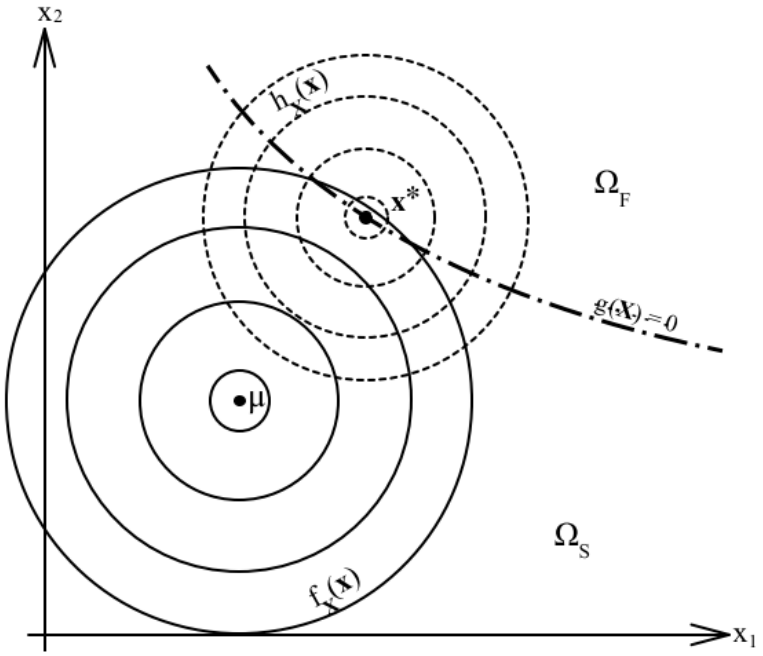


Figura 6.2 – Método de Monte Carlo com Amostragem por Importância

Fonte: TITELLO (2020)

Segundo Beck (2024), as técnicas de amostragem por importância estão entre as mais eficientes. Os pontos são gerados a partir de uma função de amostragem $h_X(x)$. Multiplicando e dividindo a Eq. (6.7) por $h_X(x)$, tem-se:

$$P_f = \int_{\Omega} \left[I_g(x) \frac{f_X(x)}{h_X(x)} \right] h_X(x) dx. \tag{6.8}$$

Ainda conforme Beck (2024), essa expressão corresponde ao valor esperado da função $I_g(x)\frac{f_X(x)}{h_X(x)}$, em relação à função de amostragem, $h_X(x)$. Este valor pode ser estimado com base em amostra de tamanho *N*, e representado através de:

$$P_f \approx \widehat{P_f} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} I_g(x_i) \frac{f_X(x_i)}{h_X(x_i)} \tag{6.9}$$

ao ponto (x_1^*, x_2^*) mostrado na Fig. 6.3 está associado um peso $w_k << 1$, que é representado pela razão entre as funções $f_X(x)$ e $h_X(x)$, conforme Eq. (6.10). A variância da probabilidade de falha é estimada pela Eq. (6.11).

$$w_k = \frac{f_X(x)}{h_X(x)} \tag{6.10}$$

$$Var[\widehat{P_f}] = \frac{1}{(N-1)} \sum_k^N (I_g[x_k] w_k - \widehat{P_f})^2 \tag{6.11}$$

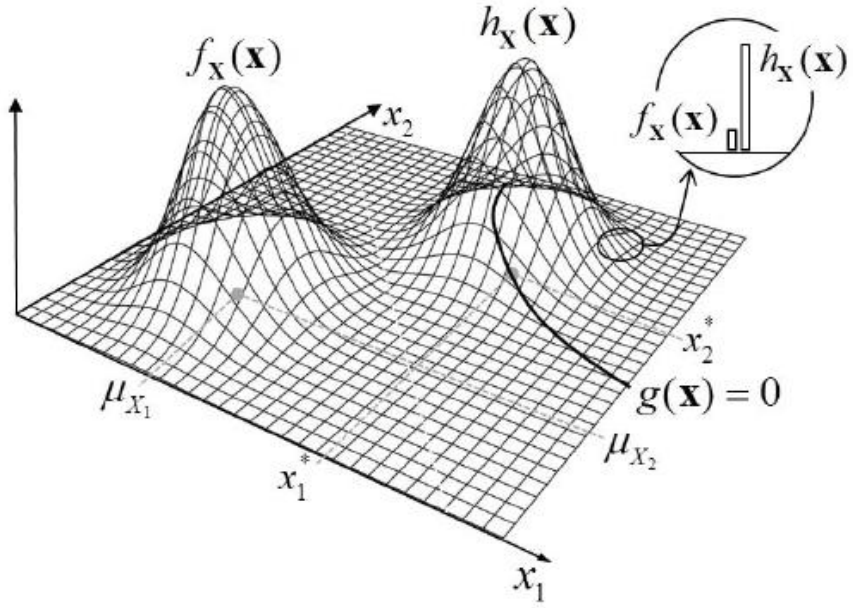


Figura 6.3 – Amostragem por importância usando o ponto de projeto.

Fonte: Beck (2024)

Beck (2024) explica que utilizando amostragem por importância no ponto de projeto, o número de amostras necessárias torna-se praticamente independente da ordem de grandeza da probabilidade de falha procurada. Isto ocorre porque aproximadamente metade das amostras cairá dentro, e metade fora, do domínio de falha.

6.1.2. Amostragem por importância adaptativa

De acordo com Beck (2024), a amostragem por importância adaptativa (MCAIA) está baseada na atualização da função de amostragem $h_X(x)$ de forma adaptativa, à medida que os resultados da simulação vão sendo computados. Considerando a Eq. (6.8), o erro estatístico da amostragem por importância será nulo se:

$$h_X(x) \propto f_X\left(x \middle| x \in \Omega_f\right). \tag{6.12}$$

Ainda segundo o Beck (2024), sendo *H* o vetor de variáveis aleatórias cuja função de densidade conjunta corresponde à função de amostragem $h_X(x)$. Levando em consideração a condição da Eq. (6.12), e aplicando aos dois primeiros momentos de H, tem-se que:

$$\begin{aligned} E[H] &= \mathrm{E}\,[\mathrm{X}|\mathrm{X} \in \Omega_f], \\ Cov[H, H^t] &= Cov[(\mathrm{X}, X^t)|\mathrm{X} \in \Omega_f], \end{aligned} \tag{6.13}$$

onde, a partir de amostras iniciais, calcula-se $E[H]$ e $Cov[H, H^t]$, estes valores são utilizados para construir a nova função de amostragem. Quando a probabilidade de falha é muito pequena, pode ser necessário um número de amostras com muitos elementos para obter os primeiros pontos no domínio da falha. Dessa forma, a amostragem adaptativa deve ser combinada com alguma outra técnica de amostragem, por exemplo, por importância utilizando pontos de projeto.

6.2. Métodos de transformação

Para Beck (2024), os métodos de confiabilidade chamados de métodos de transformação são o FORM e SORM. Esses métodos consistem na transformação de Hasofer-Lind reduzindo um vetor de variáveis aleatórias normais com médias e desvios padrão, a um vetor de variáveis aleatórias normais padrão com média zero e desvio padrão unitário não correlacionados. Segundo Albuquerque (2021), nos métodos de transformação cada variável é interpretada por dois momentos, ou seja, média e desvio padrão, e ainda, pode ser representada por uma distribuição Normal (ou gaussiana).

De acordo com Haldar e Mahadevan (2000), o FORM pode representar uma função de estado limite não linear por meio de uma aproximação de primeira ordem

utilizando variáveis normais equivalentes. Por sua vez, o SORM calcula a probabilidade de falha aproximando-se da função de estado limite não linear com uma representação de segunda ordem. O FORM utiliza um hiperplano para se aproximar da função de estado limite no ponto de projeto, enquanto o SORM por uma hipersuperfície quadrática. A Fig. 6.4 ilustra a aproximação de primeira e segunda ordem.

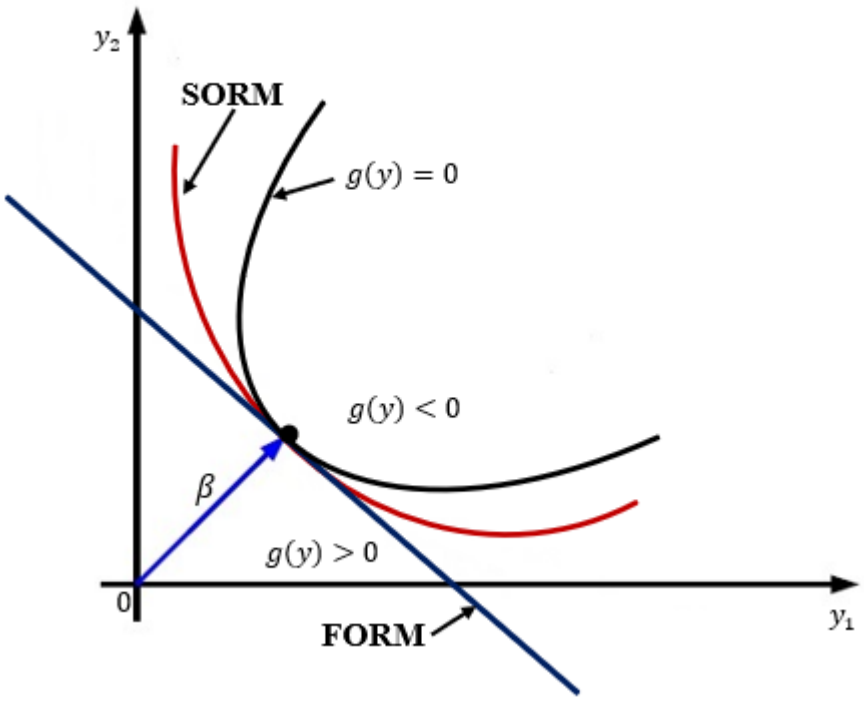


Figura 6.4 – Aproximação de primeira e segunda ordem (FORM e SORM)

Fonte: Albuquerque (2021)

6.2.1. FORM

Para Beck (2024), o método FORM é amplamente utilizado para a obtenção do índice de confiabilidade. No espaço das variáveis normais padronizadas, o índice de confiabilidade β pode ser obtido por meio da interpretação geométrica da função estado limite. Na Fig. 6.5 o índice de confiabilidade representa a menor distância entre a origem e a função de estado limite. O método FORM envolve a construção de uma função conjunta de probabilidades, $f_X(x)$, bem como uma transformação desta para o espaço normal padrão y. Esta transformação envolve a eliminação da correlação entre variáveis aleatórias e o cálculo de variáveis normais equivalentes, representado na Fig. 6.5.

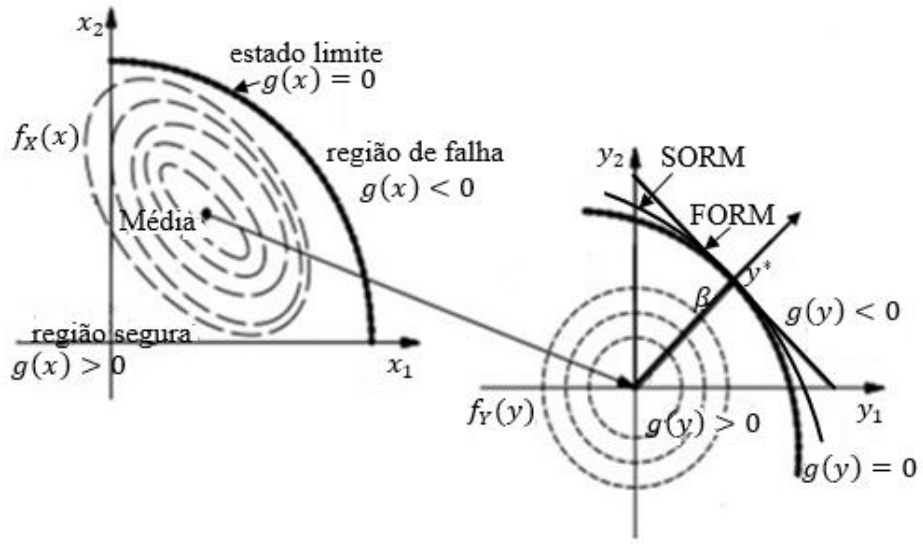


Figura 6.5 – Transformação do espaço normal para o normal equivalente

Fonte: Adaptado Youn *et al*. (2005)

De acordo com Haldar e Mahadevan (2000), o FORM é fundamentado na construção da função de probabilidade $f_X(x)$ e na sua transformação para o espaço normal padrão $f_Y(y)$. Esse processo envolve a eliminação da correlação entre variáveis aleatórias e o cálculo das variáveis normais equivalentes. Essa transformação corresponde a um mapeamento indireto do vetor $X \in \mathbb{X}$ para o espaço $\mathbb{Y}$, como mostrado na Fig. 6.5.

Conforme Beck (2024), na construção da função conjunta de probabilidade no espaço de projeto $\mathbb{X}$, a descrição estatística das variáveis de projeto é realizada através das distribuições de probabilidades marginais:

$$f_{X_i}(x_i), \qquad i = 1, 2, \dots, n, \tag{6.14}$$

e através de uma matriz de correlação R_X entre pares de variáveis, como mostrado em:

$$R_X = \begin{bmatrix} \rho_{X_{11}} & \rho_{X_{12}} & \cdots & \rho_{X_{1n}} \\ \rho_{X_{21}} & \rho_{X_{22}} & \cdots & \rho_{X_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{X_{n1}} & \rho_{X_{n2}} & \cdots & \rho_{X_{n3}} \end{bmatrix}, \tag{6.15}$$

onde *n* é o número de variáveis aleatórias e $\rho_{X_{ii}} = 1$, com $i = 1, 2, \dots, n$.

Segundo Beck (2024), a transformação de $f_X(x)$ para $f_Y(y)$ representa um mapeamento um-a-um que transporta pontos do espaço original para o espaço reduzido. Teoricamente, esse mapeamento pode ser realizado por meio da Transformação de *Rosenblatt*, sendo inapropriada na prática, por envolver integrações multidimensionais e distribuições condicionais que dificilmente são conhecidas.

Conforme Melchers e Beck (2018), a busca pelo ponto de projeto y^* é uma das etapas essenciais para a obtenção da probabilidade de falha pelo método FORM. A transformação de variáveis quaisquer, correlacionadas ou não, em variáveis normais equivalentes estatisticamente independentes é realizada por meio da transformação do modelo de *Nataf*.

De acordo com Ditlevsen e Madsen (2007), a transformação baseada no princípio da aproximação normal consiste no mapeamento realizado de $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$, e esse é dito indireto, pois se utiliza uma transformação da distribuição conjunta de probabilidade das variáveis $X \epsilon \mathbb{X}$ em uma distribuição conjunta de variáveis normais equivalentes $Z \epsilon \mathbb{Z}$, onde $\mathbb{Z}$ é o espaço de probabilidade das variáveis aleatórias normais equivalentes que mantêm possíveis correlações entre pares de variáveis aleatórias. Os parâmetros da distribuição Normal equivalente, média $\mu_{X_i}^{neq}$ e desvio padrão $\sigma_{X_i}^{neq}$, são obtidos impondo duas condições, através de:

$$F_{X_i}^{neq}(x_i^*) = F_X(x_i^*), \tag{6.16}$$

$$f_{X_i}^{neq}(x_i^*) = f_X(x_i^*). \tag{6.17}$$

Ao utilizar a transformação de Hasofer-Lind, conforme a Eq. (5.9), obtém-se um conjunto de variáveis Z = $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$, possivelmente correlacionadas, com distribuição Normal padrão, mostrado em:

$$z_i^* = \frac{x_i^* - \mu_{X_i}^{neq}}{\sigma_{X_i}^{neq}}. \tag{6.18}$$

Reescrevendo as Eqs. (6.16) e (6.17) em função de z_i^*, obtêm-se as equações:

$$F_{X_i}^{neq}(x_i^*) = \Phi\left(\frac{x_i^* - \mu_{X_i}^{neq}}{\sigma_{X_i}^{neq}}\right) = \Phi(z_i^*), \tag{6.19}$$

$$f_{X_i}^{neq}(x_i^*) = \frac{1}{\sigma_{X_i}^{neq}\sqrt{2\pi}}\, exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i^* - \mu_{X_i}^{neq}}{\sigma_{X_i}^{neq}}\right)\right] = \frac{\phi(z_i^*)}{\sigma_{X_i}^{neq}}. \tag{6.20}$$

onde $\Phi(z_i^*)$ e $\phi(z_i^*)$ são, respectivamente, função de distribuição acumulada normal padrão e função densidade de probabilidade normal padrão da variável z_i^*.

Da Equação (6.20) obtém-se uma expressão para o desvio padrão da distribuição Normal equivalente, dada por:

$$\sigma_{X_i}^{neq} = \frac{\emptyset(z_i^*)}{f_X(x_i^*)}, \tag{6.21}$$

e, utilizando a Eq. (6.18) obtém-se uma expressão para a média da distribuição Normal equivalente, dada por:

$$\mu_{X_i}^{neq} = x_i^* - z_i^*\sigma_{X_i}^{neq}. \tag{6.22}$$

Beck (2024) explica que esta transformação é aplicada a cada uma das distribuições marginais e é válida somente no ponto x^*. Assim, à medida que o algoritmo de busca do ponto de projeto avança ($x_k \rightarrow x^*$), a transformação deve ser refeita. Assim como a transformação de Hasofer-Lind, a transformação de $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}$ também pode ser escrita matricialmente a partir de um vetor de médias V^{neq} e de uma matriz diagonal de desvio padrão D^{neq}, contendo os parâmetros das distribuições Normais equivalentes, ou seja,

$$\begin{cases} V^{neq} = (\mu_{X_1}^{neq}, \dots, \mu_{X_n}^{neq})^t \\ D^{neq} = diag(\sigma_{X_1}^{neq}, \dots, \sigma_{X_n}^{neq})' \end{cases} \tag{6.23}$$

sendo, a inversa da matriz diagonal de desvios padrão denotado por $(D^{neq})^{-1}$.

Introduzindo as matrizes jacobianas, utilizando a Eq. (6.18), têm-se:

$$J_{zx} = \left[\frac{\partial z_i}{\partial x_j}\right] = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_{X_i}^{neq}}, & para\ i = j \\ 0, & para\ i \neq j \end{cases}, \tag{6.24}$$

$$J_{xz} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial z_j}\right] = \begin{cases} \sigma_{X_i}^{neq}, & para\ i = j \\ 0, & para\ i \neq j \end{cases}, \tag{6.25}$$

com $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, n$.

As respectivas transformações $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$, são dadas de forma matricial pelas equações.

$$z = J_{zx}\{x - V^{neq}\}, \tag{6.26}$$

$$x = J_{xz}z + V^{neq}. \tag{6.27}$$

Para Santos (2012), é fundamental observar que, caso exista correlação entre as variáveis originais *X*, a transformação dada pela Eq. (6.27) não elimina a correlação entre as variáveis normais padrão *Z*. Beck (2024) explica que a correlação entre pares de variáveis originais deve ser considerada na distribuição conjunta normal padrão $f_Z(z)$, isto é, $f_Z(z) = \emptyset(z, R_z)$ onde R_z é a matriz de correlação equivalente a ser determinada. Essa transformação pode ser feita por meio da transformação de Nataf.

Segundo Liu e Kiureghian (1986), a transformação recomentada por Nataf consiste em construir uma aproximação para a função conjunta de densidade de probabilidade $f_X(x)$ a partir da função de densidade normal padrão com matriz de correlação R_z, como apresentado através de:

$$f_X(x) = \emptyset_n(z, R_z)\frac{f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_n}(x_n)}{\emptyset_{Z_1}(z_1)\emptyset_{Z_2}(z_2) \dots \emptyset_{Z_n}(z_n)}, \tag{6.28}$$

onde $f_{X_i}(x_i)$ é a distribuição marginal de X_i e $\emptyset_{Z_i}(z_i)$ é a função densidade de probabilidade normal padrão, com $i = 1, 2, \dots, n$. Os coeficientes de correlação equivalentes para as distribuições marginais normais podem ser obtidos de forma iterativa por meio de:

$$\rho_{X_{ij}} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} z_i z_j \, \emptyset_2\left(z_i, z_j, \rho_{Z_{ij}}\right) \, dz_i dz_j, \tag{6.29}$$

onde $\emptyset_2(.)$ é a distribuição normal padrão bivariada. A Eq. (6.29) permite calcular $\rho_{Z_{ij}}$ em função do $\rho_{X_{ij}}$, para construir uma matriz de correlação equivalente, porém calcular o termo desconhecido dentro da integral dupla, pode ser bastante trabalhoso.

Liu e Kiureghian (1986) desenvolveram um conjunto de fórmulas analíticas aproximadas que fornecem uma relação R_{ij} entre $\rho_{Z_{ij}}$ e $\rho_{X_{ij}}$ para várias combinações de distribuições, como mostrado por:

$$R_{ij} = \frac{\rho_{Z_{ij}}}{\rho_{X_{ij}}}. \tag{6.30}$$

Elimina-se a correlação entre os pares de variáveis aleatórias levando-as de $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Y}$. Essa eliminação pode ser obtida por meio da decomposição ortogonal ou da decomposição de Cholesky da matriz de covariância. Sendo, C_Y e C_Z, respectivamente, as matrizes de correlação em $\mathbb{Y}$ e $\mathbb{Z}$. Nas Eqs. (6.31) e (6.32) são apresentadas as matrizes jacobianas utilizando a decomposição ortogonal da matriz de correlação:

$$J_{yz} = A^T = \left(\bar{A}\,\Lambda^{-1/2}\right)^t, \tag{6.31}$$

$$J_{zy} = (A^T)^{-1} = \left(\,\Lambda^{1/2}\bar{A}\right)^t. \tag{6.32}$$

onde $\bar{A}$ é uma matriz ortogonal cujas colunas são os autovetores de $C_Z = R_X$, e Λ é a matriz cujos elementos da diagonal principal são as inversas das raízes dos autovalores de C_Z.

O custo computacional da decomposição ortogonal é significativo. Uma alternativa que oferece vantagens para matrizes de correlação não cheias é a decomposição de Cholesky da matriz de correlação C_Z (BECK, 2024). Utilizando a decomposição de Cholesky de C_Z, tem-se:

$$C_Z = L\,L^T, \tag{6.33}$$

assim, as matrizes jacobianas obtidas por meio da decomposição de Cholesky de C_Z são dadas por:

$$J_{yz} = L^{-1}, \tag{6.34}$$

$$J_{zy} = L, \tag{6.35}$$

e as transformações do espaço $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Y}$ e inversa são dadas por:

$$y = J_{yz} \,.\, z, \tag{6.36}$$

$$z = J_{zy} \,.\, y. \tag{6.37}$$

A Figura 6.6 mostra as etapas da transformação composta considerando o caso em que as variáveis aleatórias *X* seguem a distribuição normal bivariada com correlação igual a 0,5.

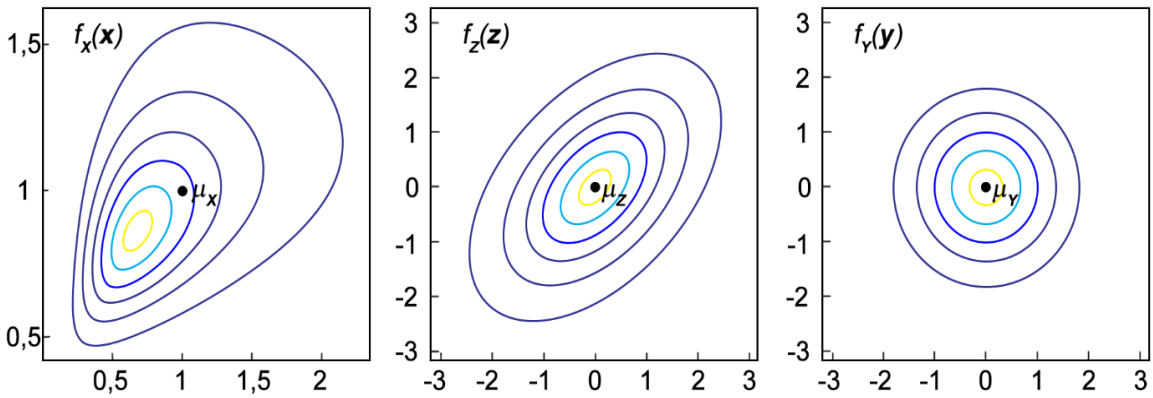


Figura 6.6 – Transformação das variáveis X_1 e X_2 em variáveis normais padrão independentes

Fonte: Adaptado Beck (2024)

De acordo com Beck (2024), a implementação da transformação composta é realizada por meio das matrizes jacobianas, que são obtidas utilizando a regra da cadeia, da seguinte forma:

$$J_{yx} = \left[\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right] = \left[\frac{\partial y_i}{\partial z_j}\ \frac{\partial z_j}{\partial x_k}\right] = J_{yz}\,.J_{zx}\,, \tag{6.38}$$

$$J_{xy} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial y_k}\right] = \left[\frac{\partial x_i}{\partial z_j}\ \frac{\partial z_j}{\partial y_k}\right] = J_{xz}\,.J_{zy}, \tag{6.39}$$

sendo o fato de que $J_{xz} = D^{neq}$ e $J_{zx} = (D^{neq})^{-1}$. As matrizes jacobianas mostradas nas Eqs. (6.34) e (6.35) e utilizando a decomposição de Cholesky, tornam-se as equações:

$$J_{yx} = L^{-1}\,.(D^{neq})^{-1}, \tag{6.40}$$

$$J_{xy} = D^{neq}\,.L, \tag{6.41}$$

as respectivas transformações $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ e $\mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ são dadas de forma matricial por:

$$y = J_{yx}\{x - V^{neq}\}, \tag{6.42}$$

$$x = J_{xy}\,.y + V^{neq}. \tag{6.43}$$

6.2.2. SORM

O SORM aproxima-se da função estado limite no ponto de projeto por meio de uma hipersuperfície quadrática. Beck (2024) afirma que esse método oferece uma boa estimativa da probabilidade de falha quando a função estado limite, no espaço normal padrão, é linear ou levemente não linear na vizinhança do ponto de projeto.

Para Beck (2024), a não linearidade da função de estado limite no espaço normal padrão ocorre quando a transformação para esse espaço também é não linear. Isto acontece quando existe correlação (forte dependência linear) entre as variáveis aleatórias ou quando as distribuições de probabilidade são fortemente não normais. A curvatura da função de estado limite é ajustada por meio da determinação de um sistema de eixos ortogonais.

Conforme Haldar e Mahadevan (2000), para cálculo dessas curvaturas, as variáveis aleatórias Y_i no espaço $\mathbb{Y}$ são rotacionadas em outro conjunto de variáveis denotadas como Y_i^*, tal que as últimas variáveis desta coincidam com o vetor α, sendo

este o vetor gradiente unitário do estado limite no ponto de distância mínima. Nesse caso, trata-se apenas de uma transformação de coordenadas.

Para Haldar e Mahadevan (2000), a transformação do espaço Y para o espaço Y^* é uma transformação ortogonal, dado em:

$$Y^* = HY, \tag{6.44}$$

onde H é a matriz de rotação. Para um caso simples onde só existem duas variáveis aleatórias a matriz H pode ser escrita através de:

$$H = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \tag{6.45}$$

onde θ é o ângulo de rotação. Quando o número de variáveis é maior do que dois a obtenção da matriz H é dada em duas etapas. Primeiro constrói-se uma matriz H_0 da seguinte forma:

$$H_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{y_1} & \alpha_{y_2} & \cdots & \alpha_{y_n} \end{bmatrix}, \tag{6.46}$$

onde α_{y_1}, α_{y_2}, ..., α_{y_n} são os cossenos diretores, isto é, componentes do vetor unitário α. Na segunda etapa realiza-se uma ortogonalização de Gram-Schmidt na matriz H_0 que resultará na matriz H, onde suas linhas são determinadas através de:

$$\begin{cases} h_n = h_{0n} \\ h_k = h_{0k} - \sum_{j=k+1}^{n} \dfrac{h_j \,.\, h_{0k}^T}{h_j \,.\, h_j^T} \,.\, h_j, \end{cases} \tag{6.47}$$

uma vez que a matriz H é obtida, os elementos da matriz A podem ser calculados por:

$$A_{ij} = \frac{(HBH^t)}{|\nabla g(y^*)|} \; i, j = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{6.48}$$

onde B é a matriz da derivada segunda $n\ x\ n$ (matriz hessiana) da superfície de estado limite no espaço normal padrão avaliado no ponto de projeto, como mostra a Eq. (6.49). H é a matriz de rotação e $|\nabla g(y^*)|$ é o comprimento do vetor gradiente no espaço normal padrão.

$$B(y^*) = \left[\frac{\partial^2 g(y)}{\partial y_i \partial y_j}\right]_{i,j=1,2,\ldots,n}. \tag{6.49}$$

Ainda segundo Haldar e Mahadevan (2000), no espaço rotacionado, a última variável, Y_n, coincide com o vetor β calculado pelo método FORM. No próximo passo, a última linha e coluna da matriz A, assim como a última linha do vetor Y' são descartadas para considerar esse fator. Assim, o estado limite pode ser reescrito em termos da aproximação de segunda ordem neste espaço padrão rotacionado, através de:

$$y_n' = \beta + \frac{1}{2} y'^t A y', \tag{6.50}$$

onde a matriz A tem agora dimensão $(n-1)\,.\,(n-1)$.

Segundo Breitung (1984), a determinação da probabilidade de falha usando uma aproximação de segunda ordem é dada através de:

$$P_f = \Phi(-\beta) \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \beta k_j\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{6.51}$$

onde k_j são as curvaturas principais da superfície de falha no ponto y^* e n o número de variáveis aleatórias na análise. A forma matricial da Eq. (6.51) é dada através de:

$$P_f = \Phi(-\beta)\ [det(I + 2\beta A)]^{-\frac{1}{2}}, \tag{6.52}$$

onde I é a matriz identidade com dimensão $n-1$.

Conforme Haldar e Mahadevan (2000), a curvatura de qualquer função está ligada às derivadas de segunda ordem em relação às variáveis aleatórias. Logo, o método de

confiabilidade de segunda ordem (SORM) aprimora o resultado do FORM ao incluir informações adicionais sobre a curvatura do estado limite.

7. AVALIAÇÃO ESTATÍSTICA DO ERRO DE MODELO DE RESISTÊNCIA À PUNÇÃO

Neste Capítulo é realizada uma comparação entre os resultados experimentais das cargas de ruptura à punção de lajes lisas e os estimados pelos critérios normativos descritos no Capítulo 3. Os modelos da ABNT NBR6118 (2014) [NBR14], ABNT NBR6118 (2023) [NBR23], ACI318 (2025), EUROCODE2 (2023) [EC2] e FIB MC2020 (2024) Nível I [FMCI] e Nível II [FMCII] foram analisados. Em todos os cálculos realizados, foram removidos os coeficientes parciais de segurança das normas e adotados valores médios para as propriedades dos materiais, de modo a possibilitar a estimativa da resistência última média das lajes sob punção.

7.1. Banco de dados experimental estudado

O banco de dados adotado nesta pesquisa é proveniente do *dataset* organizado por Ospina *et al*. (2023), com resultados experimentais de 519 lajes lisas ensaiadas por vários autores. Como o objetivo desta pesquisa é identificar a influência da variável erro de modelo através da previsão da carga de ruptura por punção, foram eliminadas 146 lajes que não romperam exclusivamente por este mecanismo ou por terem valores faltantes de f_c e f_y. Ainda foi realizado um ajuste dos dados de acordo com os critérios normativos.

As normas são elaboradas para orientar projetos, e, portanto, não possuem uma abrangência ilimitada. Geralmente, buscam atender de forma segura os casos mais comuns na prática. Os critérios adotados para o ajuste dos dados se referem à altura útil da laje (d), excluindo lajes com espessura inferior a 50 mm ou superior a 300 mm. De acordo com a ABNT NBR6118 (2023), o limite mínimo da resistência característica do concreto (f_{ck}) é de 20 MPa, enquanto o limite máximo, previsto pela ACI 318 (2025), é de 70 MPa. Quanto à taxa de armadura do aço (ρ), a norma brasileira define um valor mínimo de 0,15% e máximo de 2,00%. Considerando esses intervalos para d, f_c e ρ, foram descartadas mais 155 lajes, resultando em um total de 218 ensaios experimentais. Para ampliar o conjunto de dados, foram incorporados mais 70 resultados experimentais obtidos no Brasil por diversos pesquisadores, totalizando 288 ensaios. A Tabela 7.1 apresenta as referências estudadas, o número de ensaios e as lajes analisadas nesta pesquisa.

Tabela 7.1– Descrição do banco de dados

REFERÊNCIA	**NÚMERO DE ENSAIOS**	**LAJES**
Branco (2022)	8	L1A, L1B, L1C, L2A, L2B, L2C, L3B, L3C
Liberati (2019)	3	LR_A, LR_B, LR_C
Marques (2018)	1	LR
Shu *et al*. (2017)	3	PG1, PT32, AM04
Ospina *et al*. (2015)	1	3
Clement *et al*. (2014)	2	PG19, PG20
Costa *et al*. (2012)	6	L1, L2, L3, L4, L6, L7
Lips *et al*. (2012)	4	PL1, PV1, PL3, PL5
Sagaseta *et al*. (2011)	6	PT21, PT22, PT23, PT31, PT32, PT33
Damasceno (2007)	8	L1A, L2A, L3A, L4A, L1B, L2B, L3B, L4B
Carvalho (2006)	3	L1, L2, L3
Ferreira (2006)	12	L1a, L1b, L1c, L2a, L2b, L2c, L3a, L3b, L3c, L4a, L4b, L4c,
Ozden *et al*. (2006)	1	NR1E0F0
Vilhena *et al*. (2006)	6	L1A, L1B, L3A, L3B, L5A, L5B
Guandalini (2005)	5	PG-1, PG-5, PG-6, PG-7, PG-10
Birkle (2004)	3	1, 7, 10
Borges (2004)	8	L42, L42A, L45, L46, L41, L41A, L43A, L44
Timm (2004)	3	Ti-1A, Ti-2A, Ti-3A
Oliveira *et al*. (2003)	15	L1a, L1b, L1c, L2a, L2b, L2c, L3a L3b, L3c, L4a, L4b, L4c, L5a, L5b, L5c
Ospina *et al*. (2003)	2	SR-1, ER1-VS
Li (2000)	4	P100, P150, P200, P300
Matthys e Taerwe (2000)	3	R1', R2, R3
McHarg *et al*. (2000)	1	NU
Ozawa *et al*. (2000)	4	LA1, LA21, LA22, LB1
Ghannoum (1998)	4	S1-U, S1-B, S2-U, S3-U

Continuação da Tabela 7.1

REFERÊNCIA	NÚMERO DE ENSAIOS	LAJES
Sistonen *et al*. (1997)	10	L1, L2, L3, L4, L5, L6, L7, L8, L9, L10
Ramdane (1996)	7	12, 14, 21, 23, 25, 26, 27
Banthia *et al*. (1995)	1	IV
Urban (1994)	3	Pm 1/1-1.5, Pd 1/1-1.5, P 1/2-1.5
Theodorakopoulos e Swamy (1993)	4	FS-1, FS-8, FS-10, FS-19
Tomaszewicz (1993)	2	ND65-1-1, ND65-2-1
Alexander e Simmonds (1992)	6	P11S150, P38S150, P19S150, PI9RE, P19RC, P19RB
Marzouk e Hussein (1991)	10	HS2, HS3, HS5, HS6, HS8, HS13, HS14, HS15, NS1, NS2
Gardner (1990)	7	8, 9, 10, 13, 15, 25, 27
Lovrovich e Mclean (1990)	4	F2, F3, F4, F5
Rankin e Long (1987)	3	2C, 3C, 4C
Regan (1986)	22	I/1, I/2, I/6, II/1, II/2, II/3, II/4, II/5, II/6, III/1, III/3, III/5, III/6, IV/1, IV/2, IV/3, IV/4, V/1, V/2, V/3, V/4, V/5
Regan (1984)	11	1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 15, 17
Schaefers (1984)	1	0
Swamy e Ali (1982)	1	S-1
Pralong *et al*. (1979)	1	P5
Ladner *et al*. (1977)	4	6, 7, 10, 11
Pralong *et al*. (1977)	1	P2
Criswell (1974)	4	S2150-1, S2150-2, S4150-1, S4150-2
Ladner (1973)	1	M
Nylander e Sundquist (1972)	4	B1, B2, C2, C1
Regan (1984)	11	1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 15, 17
Schaefers (1984)	1	0
Swamy e Ali (1982)	1	S-1
Pralong *et al*. (1979)	1	P5

Continuação da Tabela 7.1

REFERÊNCIA	**NÚMERO DE ENSAIOS**	**LAJES**
Ladner *et al*. (1977)	4	6, 7, 10, 11
Pralong *et al*. (1977)	1	P2
Criswell (1974)	4	S2150-1, S2150-2, S4150-1, S4150-2
Ladner (1973)	1	M
Nylander e Sundquist (1972)	4	B1, B2, C2, C1
Hawkins *et al*. (1971)	2	8, 9
Schaeidt *et al*. (1970)	1	P1
Vanderbilt (1972)	11	A1/T2, A2/M2, A2/M3, A2/T1, A2/T2, A3/M3, A4/M1, A4/M2, A4/M3, A4/T1, A4/T2
Manterola (1966)	9	P1-S1, P2-S1, P3-S1, PI-S2, P2-S2, P3-S2, P1-S3, P2-S3, P3-S3
Taylor e Hayes (1965)	2	2S2, 2S3
Moe (1961)	6	S1-60, S1-70, S3-70, S5-60, R1, R2
Kinnunen e Nylander (1960)	10	IAI5a-5, IAI5a-6, IAI5c-11, IAI5c-12, IA30a-24, IA30a-25, IA30d-32, IA30d-33, IA30e-34, IA30e-35
Base (1959)	8	A, B, C, D, E, F, G, H
Rosenthal (1959)	1	II/4
Elstner e Hognestad (1956)	4	A-1b, A-1c, A-1d, A-4
Richart e Kluge (1939)	11	2-in. Disk 1, 2-in. Disk 2, 6-in. Disk 1, 6-in. Disk 2, 6-in. Plaster 1, 6-in. Plaster 2, 14-in. Disk 1, 14-in. Ring 1, 14-in. Ring 2, 6-in. Ring 1, 6-in. Ring 2
TOTAL	288	-

O Apêndice 1 apresenta as cargas de ruptura experimentais e os principais dados das 288 lajes estudadas nesta Tese. Além disso, informações mais detalhadas sobre as lajes analisadas nesta etapa podem ser obtidas diretamente dos trabalhos referenciados.

7.2. Caracterização das variáveis de entrada

As variáveis de entrada desempenham um papel fundamental na qualidade das análises e na previsão e precisão dos resultados obtidos. Elas representam as principais características físicas e mecânicas das lajes e dos materiais, influenciando diretamente o comportamento estrutural e a resposta aos critérios normativos. A escolha adequada e a correta definição dessas variáveis são essenciais para garantir que o modelo estatístico seja capaz de representar as relações significativas entre os parâmetros e o desempenho experimental observado. A partir do banco de dados composto por 288 ensaios experimentais, são apresentadas as variáveis de entrada do problema, listadas na Tab. 7.2.

Tabela 7.2 – Variáveis de entrada do banco de dados

Variável	Descrição
d	altura útil das armaduras em X e Y.
b	largura do pilar
f_c	resistência média à compressão do concreto
f_y	tensão de escoamento média do aço
ρ	taxa de armadura longitudinal média em X e Y
r_s	vão de cisalhamento

Fonte: Autora

Uma análise exploratória do conjunto de dados dos ensaios experimentais foi realizada por meio de *scripts* elaborados na linguagem de programação *R*, com o objetivo de caracterizar estatisticamente as variáveis do estudo. Foram calculados a média ($\bar{X}$), a mediana (*Md*) o desvio-padrão (s), o coeficiente de variação (*CV*), o máximo (*Max*.) e o mínimo (*Min*.) da amostra, assim como, os coeficientes de assimetria (g_1) e curtose (g_2). Esses parâmetros estatísticos permitem compreender a dispersão, a tendência central e a forma de distribuição dos dados, e estão apresentados na Tab. 7.3.

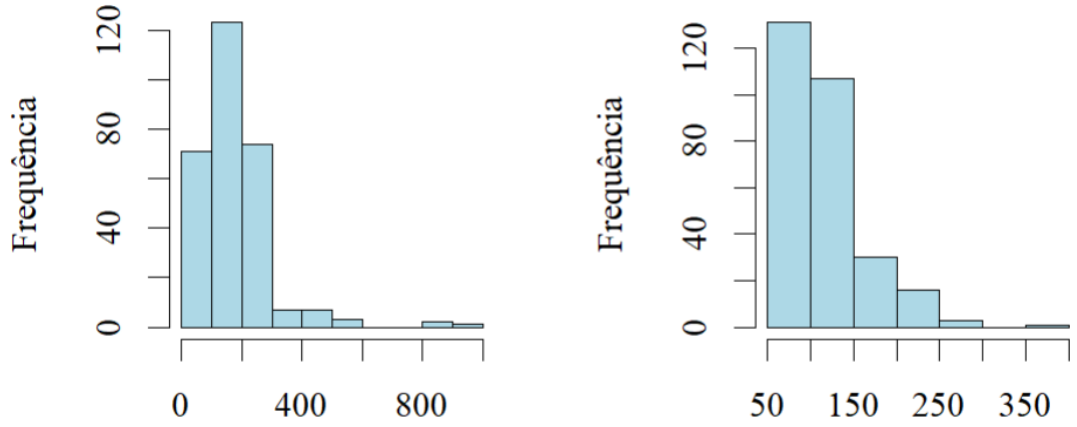
Tabela 7.3 – Medidas resumo das variáveis de entrada

Variáveis	***Min.***	$\bar{X}$	***Md***	***Max.***	s	***CV***	g_1	g_2
b (mm)	51,000	183,300	150,000	901,00	114,450	0,624	3,089	14,821
d (mm)	53,500	116,300	107,000	353,00	44,925	0,386	1,613	3,656
ρ	0,003	0,011	0,011	0,02	0,004	0,344	0,177	-0,529
f_c (MPa)	20,000	35,100	32,160	70,00	11,518	0,328	1,179	0,855
f_y (MPa)	250,000	503,400	490,000	773,00	125,027	0,248	0,076	-0,238
r_s (mm)	75,000	686,900	686,000	1725,00	296,026	0,431	0,329	0,330

Fonte: Autora

A análise exploratória mostrada na Tab. 7.3 serve para resumir, identificar padrões e detectar tendências no conjunto de dados. Os valores mínimos e máximos indicam a amplitude de variação de cada variável. Nota-se que, para todas as variáveis do estudo, com exceção de ρ, a média é superior à mediana, o que indica assimetria positiva, ou seja, os valores em níveis mais baixos estão mais concentrados e os maiores mais dispersos. O coeficiente de variação mostra que todas as variáveis apresentam bastante variabilidade relativa, sendo a variável b a que possui a maior variabilidade. Os coeficientes de assimetria confirmam a predominância de distribuições assimétricas à direita em todas as variáveis, embora as distribuições de ρ, f_y e r_s possam ser consideradas simétricas pelos baixos valores assumidos. Considerando o coeficiente de curtose: b, d, f_c e r_s indicam uma distribuição leptocútica (distribuição com caudas pesadas), e as variáveis ρ e f_y possuem uma distribuição platicúrtica (distribuição com caudas leves).

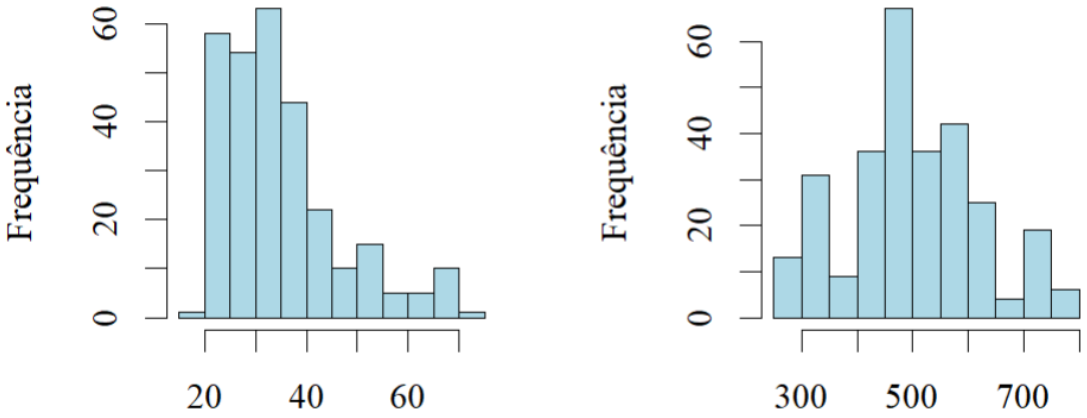
As Figuras. 7.1, 7.2 e 7.3 representam os histogramas das variáveis de entrada do banco de dados, permitindo uma visualização complementar da forma e da dispersão das distribuições.



(a) b (mm) **(b) d (mm)**

Figura 7.1 – Histogramas das variáveis b e d

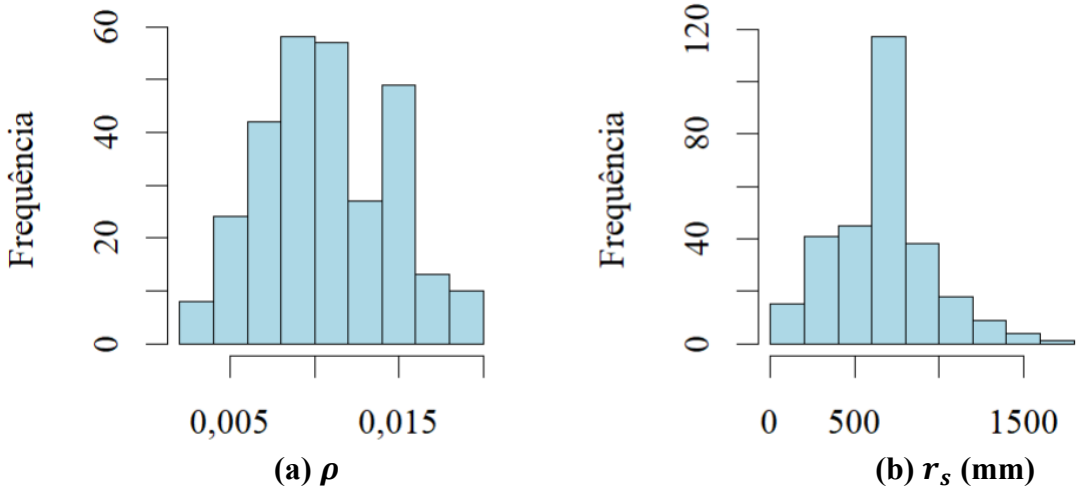
Fonte: Autora



(a) f_c (MPa) **(b) f_y (MPa)**

Figura 7.2 – Histogramas das variáveis f_c e f_y

Fonte: Autora



(a) ρ **(b) r_s (mm)**

Figura 7.3 – Histogramas das variáveis ρ e r_s

Fonte: Autora

O comportamento dos histogramas das variáveis de entrada, obtidos a partir dos 288 ensaios experimentais das lajes lisas, evidencia distribuições com assimetria à direita, o que está de acordo com os valores do coeficiente de assimetria (g_1) da Tab. 7.3. Observa-se que, em geral, há maior concentração de dados próximos aos menores valores de cada variável e caudas alongadas à direita, indicando a presença de poucos valores mais elevados que aumentam a média.

Na Figura 7.1, observa-se que as variáveis b e d apresentam uma forte concentração de frequência nos menores intervalos de valores, com decréscimo acentuado à medida que a variável aumenta. Esse comportamento reforça a existência de distribuições assimétricas à direita, típicas de conjuntos de dados onde predominam dimensões reduzidas de pilares e menores alturas úteis.

Na Figura 7.2, referente às variáveis f_c e f_y, nota-se para f_c, comportamento semelhante, sendo a distribuição de f_c mais acentuadamente assimétrica. Já a distribuição de f_y se mostra diferente, apresentando uma leve assimetria com um pico bem definido.

Na Figura 7.3, as variáveis ρ e r_s também apresentam picos bem definidos, na distribuição de ρ, as classes em torno do valor médio apresentam grande frequência. Já a distribuição de r_s apresenta um único pico bem definido e uma cauda à direita muito levemente mais alongada.

Para complementar a análise das variáveis de entrada e identificar possíveis valores discrepantes (*outliers*), são ilustrados os *boxplots* nas Figs. 7.4, 7.5 e 7.6, que permitem uma visualização mais clara da dispersão e dos limites das amostras.

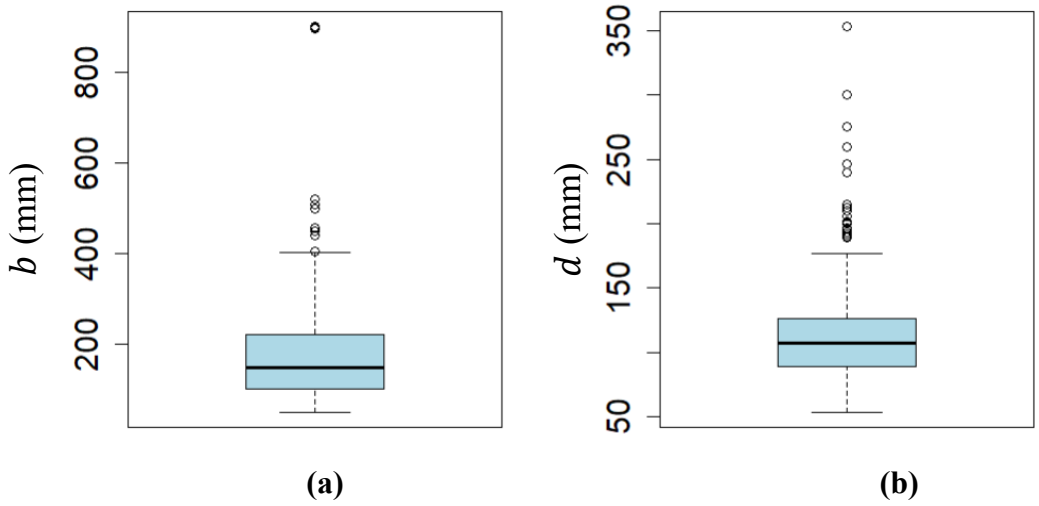
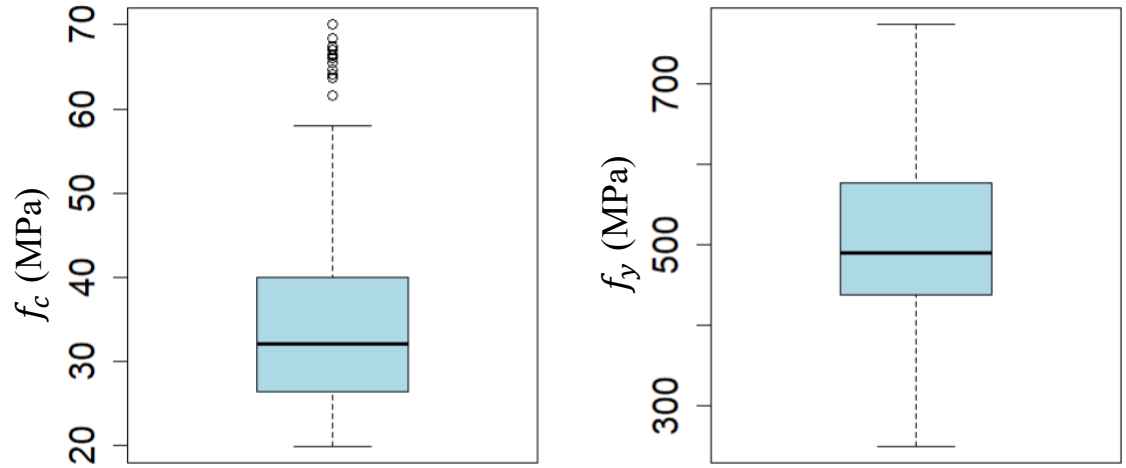


Figura 7.4 – Boxplots das variáveis b e d

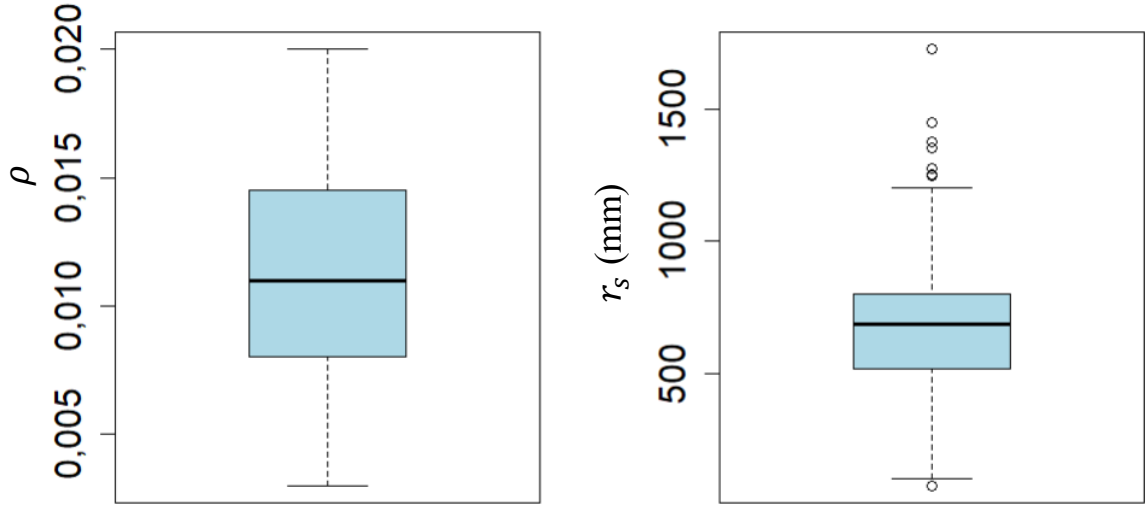
Fonte: Autora



(a) **(b)**

Figura 7.5 - Boxplots das variáveis f_c e f_y

Fonte: Autora



(a) **(b)**

Figura 7.6 - Boxplots das variáveis ρ e r_s

Fonte: Autora

O *boxplot* é uma ferramenta gráfica que facilita a visualização da distribuição dos dados e a identificação de valores discrepantes (*outliers*), oferecendo uma abordagem complementar para a análise estatística descritiva. Observa-se nas Figs. 7.5 (b) e 7.6 (a) que não há valores discrepantes para as duas variáveis correspondentes, indicando que seus valores mínimo e máximo permanecem dentro dos limites esperados.

Por outro lado, as demais variáveis apresentam pontos fora dos limites superiores, que correspondem a *outliers* identificados a partir do intervalo interquartílico, definido pela diferença entre o primeiro e o terceiro quartil. Em particular, as Figs. 7.4 (b) e 7.5 (a) possuem muitos *outliers,* indicando que uma parte significativa dos dados está afastada de maneira considerável do padrão geral da distribuição.

7.3. Caracterização das variáveis de saída

As variáveis de saída representam os resultados estimados pelos diferentes critérios normativos da resistência à punção e servem como referência para avaliar o desempenho preditivo de cada modelo. A variável erro de modelo é expressa pela razão entre a resistência experimental e a resistência teórica prevista, permitindo quantificar o grau de concordância entre os valores observados e os estimados. A análise dessas variáveis possibilita identificar tendências sistemáticas de superestimação ou subestimação das normas. Dessa forma, a caracterização das variáveis de saída é essencial para a validação dos modelos normativos e para a compreensão do comportamento estrutural real das lajes lisas submetidas à punção.

No processo de análise do erro de modelo, os valores dos critérios normativos de resistência são definidos sem a aplicação dos coeficientes parciais de segurança, uma vez que esses coeficientes têm a função de introduzir margens de segurança nas estruturas durante a fase de projeto. Além disso, a capacidade de resistência dos elementos é determinada com base em valores médios de resistência das variáveis empregadas nos experimentos. Assim, a variável aleatória referente ao erro de modelo é expressa através da Eq. (4.3) e os critérios normativos estão resumido na Tab. 7.4.

Tabela 7.4 – Equações para determinação da resistência à punção das lajes lisas sem armadura de cisalhamento de acordo com os critérios normativos

NORMAS	MODELOS DE CÁLCULO
NBR6118	$\mathrm{V}_{m,NBR} = 0{,}18\xi\sqrt[3]{100\rho_l f_c}\, u.d$ Para a versão NBR23 considerar: Fator de escala $\xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{\mathrm{d}}} \leq 2$ Taxa de armadura $\rho_l = \sqrt{\rho_x \,.\, \rho_y} \leq 2\%$
ACI318	$min.\begin{cases} \mathrm{V}_{\mathrm{m,ACI}} = \frac{1}{3}\lambda_s\lambda\sqrt{f_c}\, b_0 d \\ \mathrm{V}_{\mathrm{m,ACI}} = \frac{1}{6}\left(1+\frac{2}{\beta}\right)\lambda_s\lambda\sqrt{f_c}\, b_0 d \\ \mathrm{V}_{\mathrm{m,ACI}} = \frac{1}{12}\left(2+\frac{\alpha_s d}{b_0}\right)\lambda_s\lambda\sqrt{f_c}\, b_0 d \end{cases}$
FIB MC2020	$\mathrm{V}_{m,\mathrm{FMC}} = K_\Psi\sqrt{f_c}\, b_0\, d_v$ onde: K_Ψ para seu valor médio, os coeficientes 1,5 e 0,9, devem ser substituídos por $4/3$ e $15/32$ respectivamente: $K_\Psi = \frac{1}{\frac{4}{3}+\frac{15}{32}K_{\mathrm{dg}}\Psi\mathrm{d}}$ Para o nível I de aproximação a rotação é: $\Psi = 1{,}5\,\frac{r_s}{d}\,\frac{f_y}{E_s}$ Para o nível II de aproximação a rotação é: $\Psi = 1{,}5\,\frac{r_s}{d}\,\frac{f_y}{E_s}\left(\frac{M_S}{M_R}\right)^{1{,}5}$
EUROCODE2	$V_{m,EC2} = 0{,}6\,.\,k_{pb}\left(100\rho_1\, f_c\,\frac{d_{dg}}{d_v}\right)^{\frac{1}{3}} b_{0,5}\,.\,d$

Fonte: Autora

As variáveis de saída do problema são: resistência experimental (V_{exp}), resistência do modelo de cálculo (V_m) e erro de modelo (E_m). Seus resultados são representados no Apêndice 2 e um resumo das estatísticas estão expostas na Tab. 7.5.

Tabela 7.5 – Medidas resumo das variáveis de saída

Variáveis	***Min.***	$\bar{X}$	***Md***	***Max.***	s	***CV***	g_1	g_2
V_{exp} (kN)	60,00	385,40	286,50	2491,00	315,85	0,82	2,73	10,34
$V_{m,NBR14}$ (kN)	69,11	386,62	299,00	2488,28	289,60	0,75	2,77	11,71
$V_{m,NBR23}$ (kN)	47,55	346,39	255,27	2488,28	298,46	0,86	2,80	11,45
$V_{m,FMCI}$ (kN)	62,47	323,57	255,45	2071,96	241,06	0,74	2,51	10,65
$V_{m,FMCII}$ (kN)	71,89	415,41	309,33	3432,01	360,76	0,87	3,25	17,93
$V_{m,EC2}$ (kN)	59,91	366,19	291,25	2291,39	274,94	0,75	2,47	9,65
$V_{m,ACI318}$ (kN)	45,34	295,29	211,16	1919,59	255,43	0,87	2,36	7,48
$E_{m,NBR14}$	0,58	0,98	0,97	2,15	0,19	0,20	1,14	4,96
$E_{m,NBR23}$	0,69	1,17	1,14	2,37	0,26	0,22	1,13	2,97
$E_{m,FMCI}$	0,52	1,21	1,19	2,10	0,31	0,26	0,29	- 0,17
$E_{m,FMCII}$	0,42	0,98	0,97	1,74	0,23	0,23	0,17	0,13
$E_{m,EC2}$	0,58	1,06	1,05	2,17	0,22	0,21	0,68	1,77
$E_{m,ACI318}$	0,66	1,42	1,39	2,69	0,37	0,26	0,45	0,17

Fonte: Autora

Ao analisar os resultados da Tab. 7.5, observa-se que as médias de todas as variáveis de saída são superiores à mediana, o que indica uma distribuição assimétrica à direita, o que também é demonstrado pelos valores positivos do coeficiente de assimetria (g_1). Entretanto, algumas distribuições podem ser consideradas simétricas pelos baixos resultados dos coeficientes amostrais ($E_{m,FMCI}$, , $E_{m,FMCII}$ e $E_{m,ACI318}$). Os valores de desvio padrão (s) e coeficiente de variação (cv) evidenciam elevada dispersão dos dados, especialmente nas resistências normativas.

Em relação aos erros de modelo (E_m), verifica-se que, em média, os modelos das normas ACI318, FMCI, NBR23 apresentam valores médios superiores a unidade, caracterizando comportamento conservador, ou seja, uma subestimação da resistência teórica em relação à experimental. Por outro lado, as normas NBR14, FMCII e EC2 tendem a apresentar resultados médios menos conservadores.

Além disso, os altos valores de curtose (g_2) observados nas variáveis de resistência do modelo normativo indicam distribuições com caudas pesadas, sugerindo a existência de valores extremos que podem influenciar as médias. A Fig. 7.7 apresenta os

boxplots dos erros de modelo para cada critério normativo, permitindo uma análise visual mais detalhada da dispersão dos dados e da presença de *outliers*.

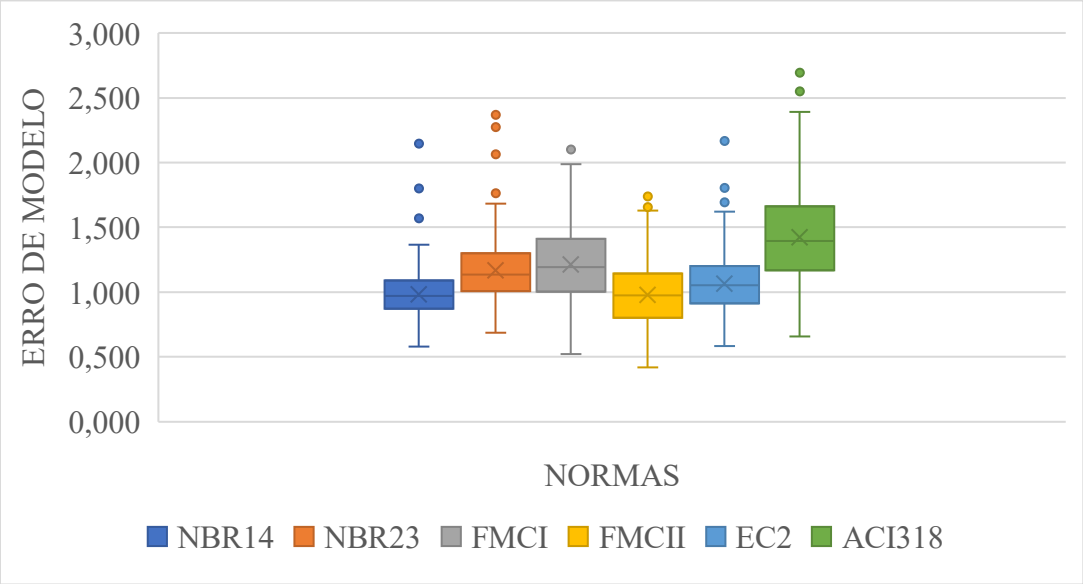


Figura 7.7 – *Boxplots* dos erros de modelo segundo os critérios normativos

Fonte: Autora

Observa-se que os modelos FMCI e ACI318 apresentam maior amplitude interquartílica, indicando maior dispersão dos erros em torno da mediana. Em contrapartida, os modelos NBR14, NBR23 e EC2 concentram um número mais elevado de valores extremos, o que também evidencia maior variabilidade, embora associada principalmente à presença de *outliers*. Já o modelo FMCII tende a apresentar menor dispersão, sugerindo previsões mais consistentes. Nota-se ainda que, para a maioria dos modelos, a mediana se encontra próxima ou ligeiramente abaixo da unidade, reforçando a tendência de comportamento conservador identificada nas análises estatísticas.

Essa análise gráfica complementa as medidas estatísticas apresentadas na Tab. 7.5, reforçando a importância de avaliar não apenas medidas de tendência central, mas também a distribuição e dispersão dos erros de modelo para a validação dos critérios normativos.

Por meio do conjunto de dados analisados nesta pesquisa, foi possível identificar que as lajes lisas são apoiadas em 146 pilares quadrados (S), 91 circulares (C) e 51 retangulares (R) e com modo de ruptura por punção. Para analisar o comportamento do erro de modelo das lajes lisas em função da seção transversal do pilar, foram elaborados *boxplots*, conforme ilustrado na Fig. 7.8.

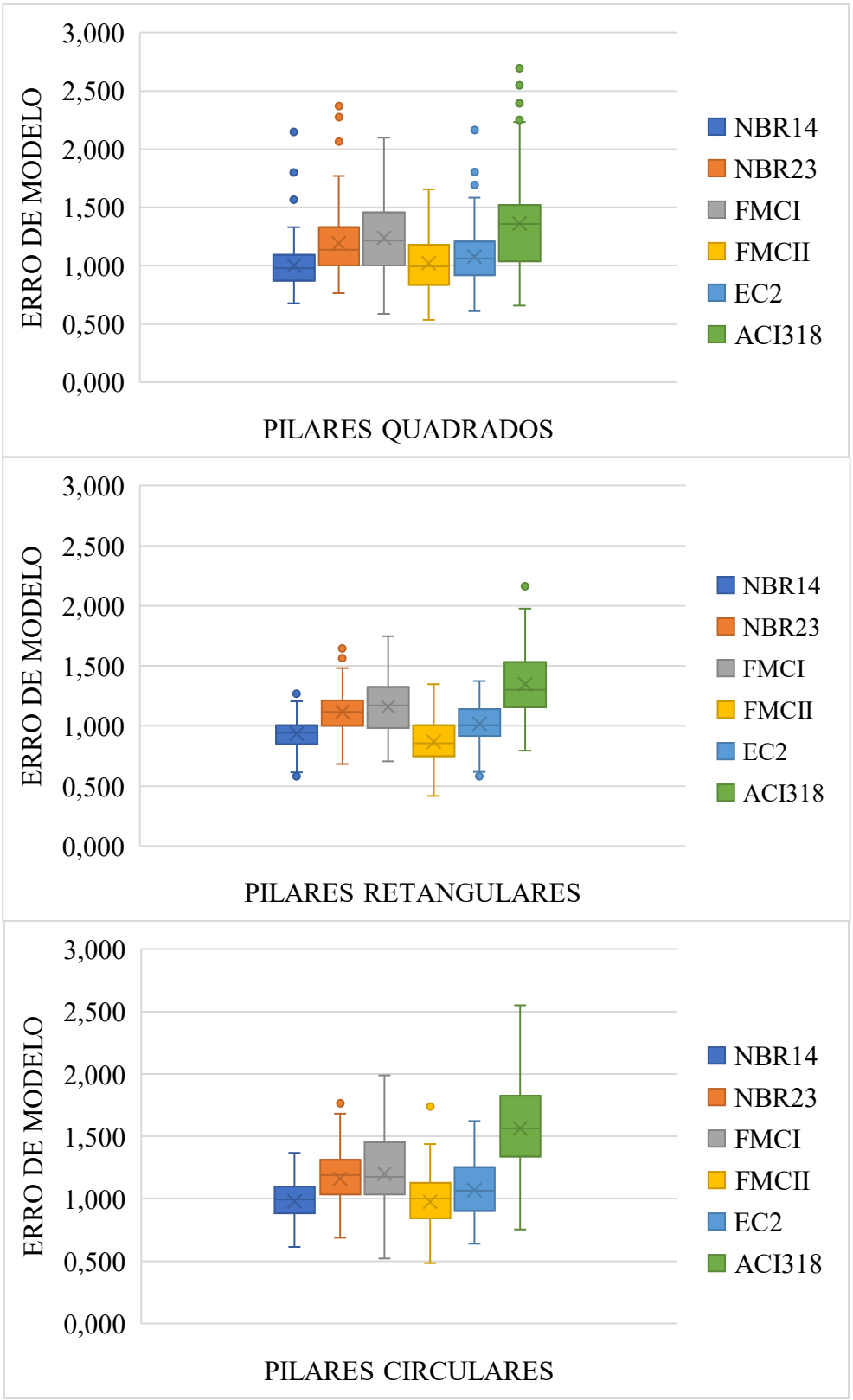


Figura 7.8 – Comparação das distribuições dos dados conforme a seção dos pilares

Fonte: Autora

Com base nos resultados apresentados na Fig. 7.8, percebe-se que os erros de modelo das lajes lisas apoiadas sobre pilares quadrados apresentam maior variabilidade em comparação aos pilares retangulares e circulares, o que é evidenciado pela maior amplitude interquartílica e pela presença mais expressiva de valores discrepantes.

Além disso, em todos os casos, os erros de modelo para os pilares quadrados possuem *outliers* acima do limite superior, indicando que, para esse formato de pilar, algumas lajes apresentaram valores de resistência experimental acima do previsto pelo modelo de cálculo.

Para os modelos FMCI e FMCII, observa-se que a dispersão dos erros se mantém relativamente semelhante entre pilares quadrados, retangulares e circulares. Esse comportamento indica que esses modelos apresentam menor dependência da geometria da seção transversal, sugerindo uma maior estabilidade preditiva em relação à forma do pilar. Nota-se também que o FMCII apresenta dispersão mais reduzida nestes resultados, enquanto o FMCI mantém uma variabilidade um pouco maior.

Quanto aos resultados da NBR14 e NBR23, observa-se que, para pilares retangulares, a dispersão dos dados é menor em comparação às demais geometrias, com medianas, quartis e limites apresentados em intervalos relativamente próximos. Esse comportamento sugere menor variabilidade dos erros de modelo para essa configuração.

7.4. Erro de modelo para previsão de resistência à punção de lajes lisas conforme a NBR6118

Com o objetivo de comparar os critérios de dimensionamento estabelecidos pela ABNT NBR6118 (2014) e pela ABNT NBR6118 (2023), tanto entre si quanto em relação aos resultados experimentais, foi realizada uma análise baseada na razão entre as forças de ruptura obtidas nos ensaios e as forças resistentes calculadas ($V_{exp}/V_{m,NBRI}$). Para efeitos de comparação, as cargas experimentais e previstas foram determinadas e são apresentadas na Fig. 7.9.

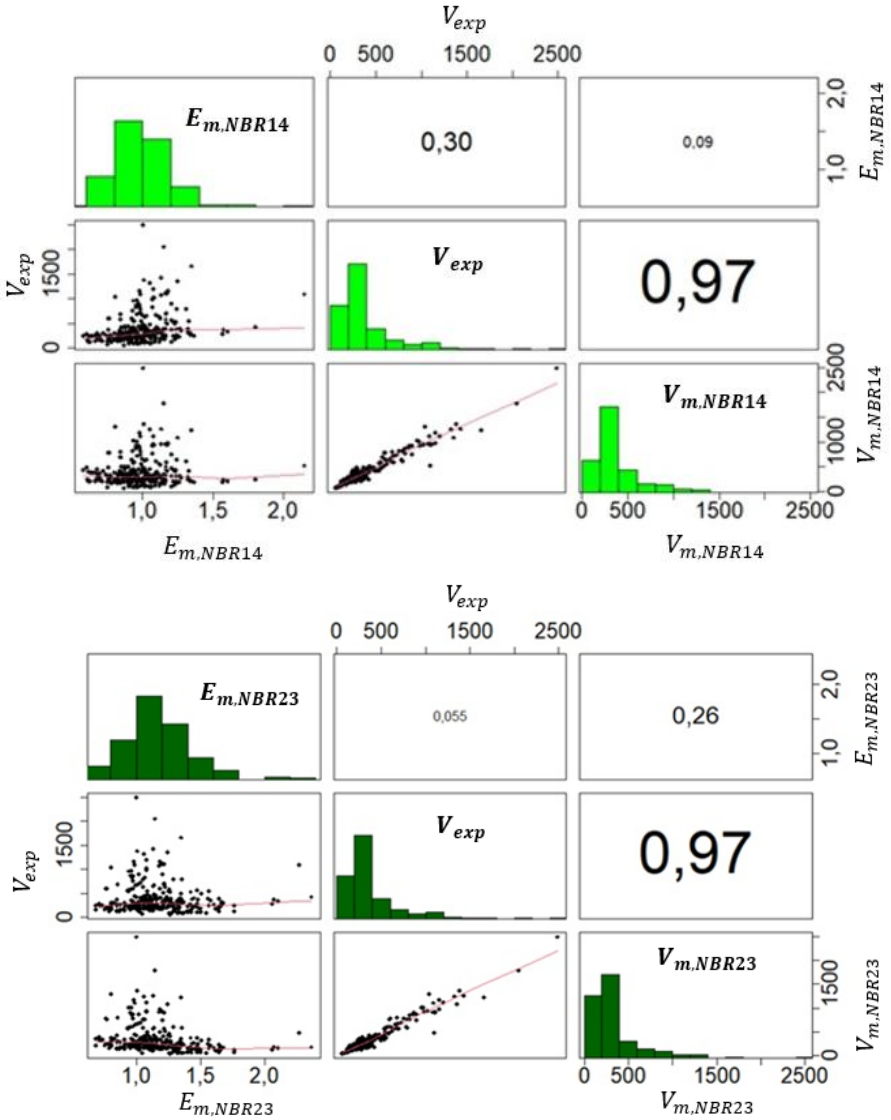


Figura 7.9 – Comparação entre E_m e as cargas V_{exp} e V_m (NBR14 e NBR23)

Fonte: Autora

A Figura 7.9 apresenta um *pairplot*, o qual pode ser interpretado como uma matriz simétrica de gráficos. Na diagonal principal, são exibidos histogramas das variáveis analisadas, enquanto nas demais células são mostradas as correlações de Pearson e os respectivos diagramas de dispersão.

Observa-se, pelos diagramas de dispersão e pelos coeficientes de correlação, que as cargas experimentais (V_{exp}) apresentam forte correlação positiva com os valores normativos ($V_{m,NBR}$) obtidos segundo as versões de 2014 e 2023 da NBR6118, com coeficientes iguais a 0,97 em ambos os casos. Por outro lado, as relações envolvendo o erro de modelo (E_m) apresentam correlações baixas, indicando que sua variabilidade não está diretamente associada às intensidades das cargas experimentais ou teóricas. Dessa forma, ambas as

versões da norma mostram desempenho semelhante no ajuste das cargas resistentes, embora o comportamento do erro de modelo apresente menor correlação.

Na Fig. 7.10 é apresentada uma análise adicional de correlação bivariada entre as variáveis de entrada e de saída. A inferência sobre os coeficientes de correlação foi conduzida considerando um nível de significância de 5%, de modo que valores de p inferiores a 0,05 são considerados estatisticamente significativos.

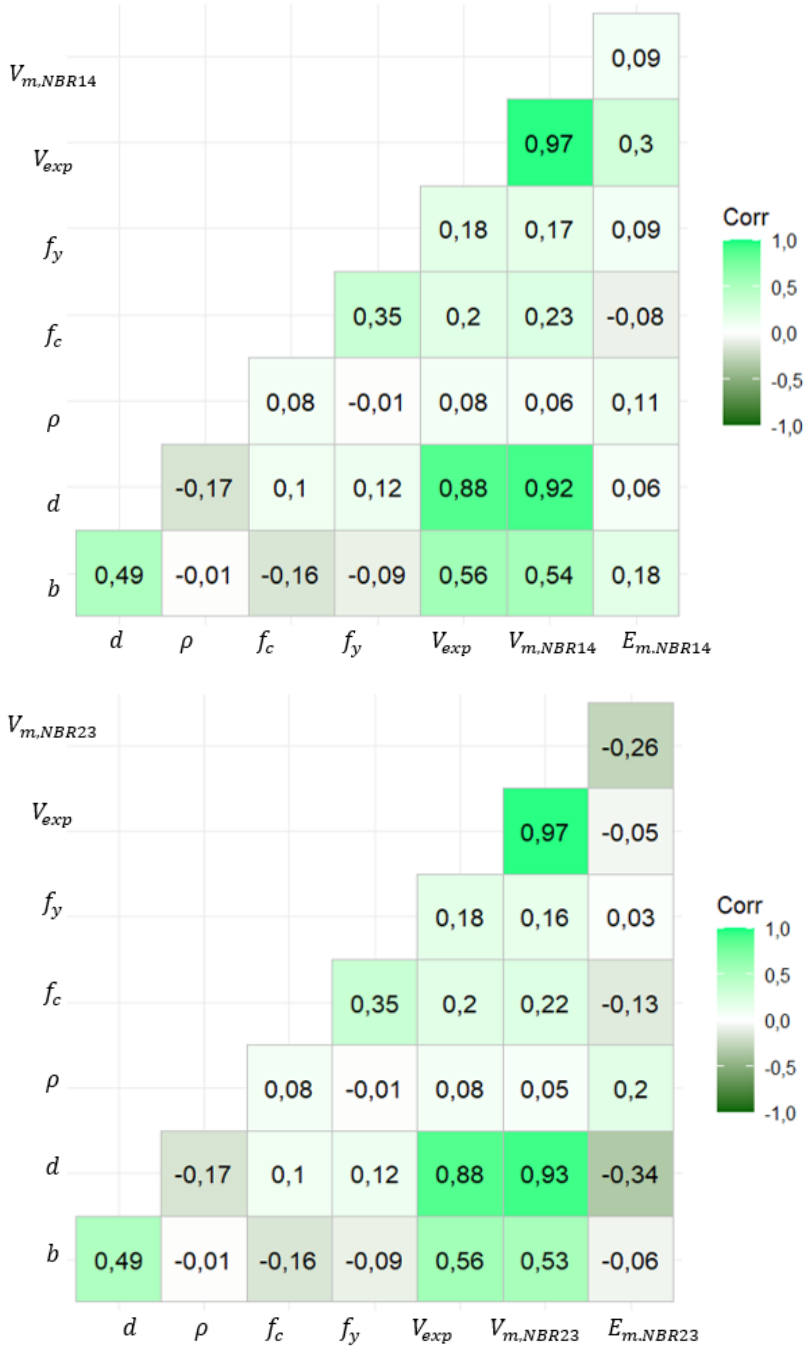


Figura 7.10 – Correlação entre variáveis de entrada e saída (NBR14 e NBR23)

Fonte: Autora

A Figura 7.10 é uma representação gráfica que mostra as correlações entre as variáveis do estudo de forma clara e objetiva. Ao analisar a figura, observa-se uma correlação forte e positiva entre as resistências do modelo $(V_{m,NBR})$ e as resistências experimentais (V_{exp}), o que evidencia uma boa capacidade das equações normativas em representar o comportamento real das lajes submetidas à punção. Além disso, nota-se uma correlação igualmente elevada entre V_{exp}, $V_{m,NBR}$e a altura útil da laje (d), sugerindo que essa variável exerce influência significativa na resistência à punção em ambas as versões da norma.

No caso do erro de modelo $(E_{m,NBR})$, observa-se que, para a versão de 2014 da norma, a variável V_{exp} apresenta correlações moderada e fraca, respectivamente, estatisticamente significativa, com *p-valor* igual a $1{,}31 \times 10^{-7}$. Já na versão de 2023, verifica-se que a correlação entre $E_{m,NBR23}$ e as demais variáveis, indicam uma fraca ou inexistente associação linear. Esse comportamento sugere que a NBR23 apresenta menor dependência às variáveis analisadas, possivelmente em razão das modificações introduzidas nas expressões normativas, que resultaram em um desempenho mais homogêneo entre os parâmetros de entrada.

Com o intuito de complementar a análise estatística dos erros de modelo, as Tabs. 7.6 e 7.7 apresentam os resultados dos testes de aderência aplicados às variáveis $E_{m,NBR14}$ e $E_{m,NBR23}$, respectivamente. Foram avaliadas quatro distribuições de probabilidade: Normal, Lognormal, Gama e Weibull por meio dos testes Kolmogorov–Smirnov, Anderson–Darling e Cramér–von Mises, considerando nível de significância de 5%.

Tabela 7.6 – Resultados dos testes de aderência para NBR14

Distribuições	Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling		Cramer-von Mises	
	Estatística de teste	p-valor	Estatística de teste	p-valor	Estatística de teste	p-valor
Normal	0,0585	0,2770	1,8754	0,1077	0,3011	0,1342
Lognormal	0,0702	0,1169	1,6829	0,1383	0,2756	0,1586
Gama	0,0616	0,2244	1,5671	0,1613	0,2555	0,1815
Weibull	0,0737	0,0873	3,4686	0,0159	0,3243	0,1156

Fonte: Autora

Tabela 7.7 – Resultados dos testes de aderência para NBR23

Distribuições	Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling		Cramer-von Mises	
	Estatística de teste	p-valor	Estatística de teste	p-valor	Estatística de teste	p-valor
Normal	0,0749	0,0793	2,7633	0,0362	0,4544	0,0520
Lognormal	0,0513	0,4341	1,0447	0,3346	0,1655	0,3457
Gama	0,0524	0,4075	1,4050	0,2009	0,2252	0,2235
Weibull	0,1043	0,0038	6,4598	0,0006	0,7349	0,0104

Fonte: Autora

Na Tabela 7.6 (NBR14), os testes indicam que não foram encontradas evidências de que os dados não sigam as distribuições Normal, Lognormal e Gama, que apresentam *p-valores* maiores do que 0,05, enquanto a Weibull é rejeitada pelo Anderson–Darling. Já na Tabela 7.7 (NBR23), observa-se comportamento distinto: não foram encontradas evidências de que os dados não seguem as distribuições Lognormal e Gama, enquanto o ajuste à Weibull é rejeitado por todos os testes e a Normal é rejeitada pelo teste Anderson Darling. Esses resultados evidenciam uma mudança no padrão de distribuição dos erros de modelo entre as versões da norma, possivelmente associada às modificações na expressão de cálculo do modelo adotada em 2023. Na Tab. 7.8 são apresentados os critérios de informação (AIC/BIC) para a NBR14 e NBR23 com o objetivo de identificar a distribuição de probabilidade que melhor se ajusta aos dados.

Tabela 7.8 – Comparativo dos critérios de informação (AIC e BIC) das distribuições ajustadas às normas NBR14 e NBR23

Distribuições	NBR14		NBR23	
	AIC	BIC	AIC	BIC
Normal	-123,5857	-116,2598	40,5113	47,8372
Lognormal	-149,8545	-142,5285	3,7587	11,0846
Gama	-146,4739	-139,1480	10,5431	17,8690

Fonte: Autora

Para ambos os critérios, menores valores indicam melhor ajuste do modelo aos dados. Na Tab. 7.8 observa-se que no caso da NBR14, a distribuição Lognormal apresenta os menores valores de AIC e BIC, confirmando seu melhor desempenho em relação às

demais. Já para a NBR23, embora todas as distribuições apresentem valores positivos, a Lognormal novamente se destaca, exibindo os menores AIC e BIC, seguida pela distribuição Gama. Esses resultados reforçam as conclusões obtidas pelos testes de aderência, evidenciando que, nas duas versões da norma, as distribuições assimétricas em especial a Lognormal descrevem de forma mais adequada o comportamento estatístico dos dados. Para complementar essa análise é mostrado na Fig. 7.11 o Q-Q plot das melhores distribuições analisadas.

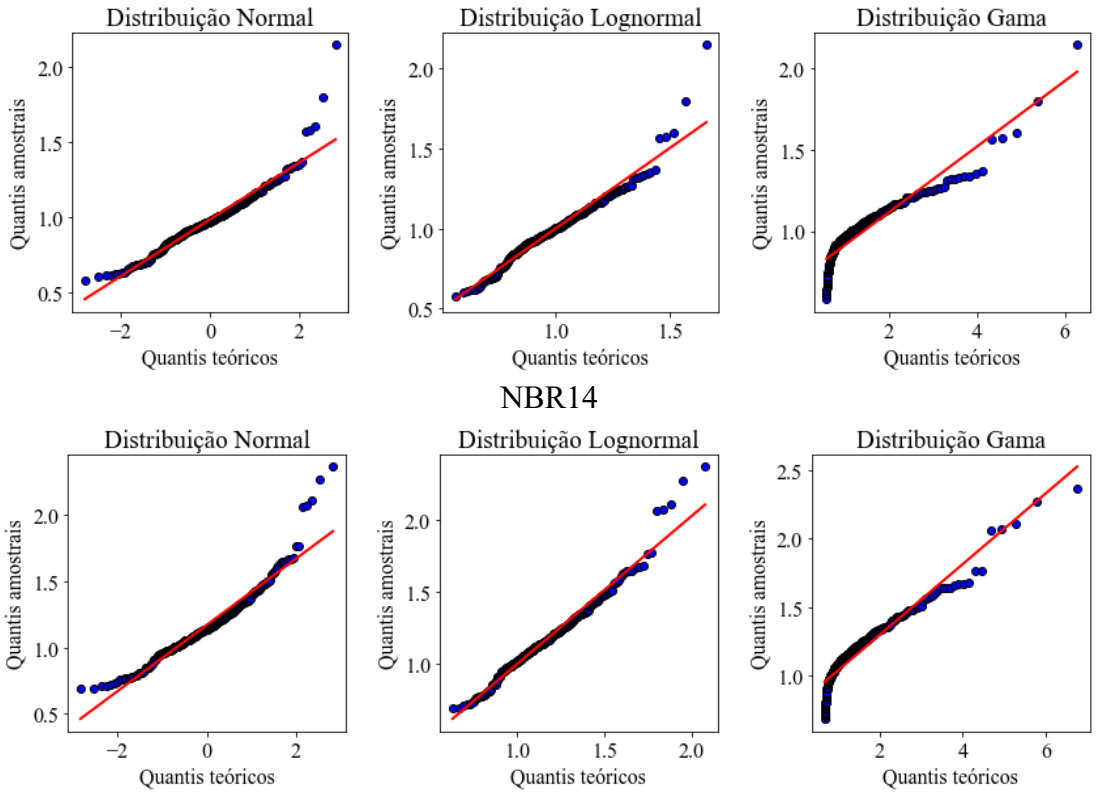


Figura 7.11 – Q-Q plot das melhores distribuições da NBR14 e NBR23

Fonte: Autora

Os gráficos de Q–Q Plots da Figura 7.11 ilustram a aderência visual das distribuições Normal, Lognormal e Gama aos dados dos erros de modelo das normas NBR14 e NBR23. Cada ponto nos gráficos representa um quantil amostral em relação ao quantil teórico da distribuição ajustada, e a linha vermelha indica o ajuste perfeito. Em ambas as normas, os dados se afastam de uma distribuição Normal nos extremos (valores menores e valores maiores), se afastam de uma distribuição Lognormal para valores maiores (na norma NBR23 com menos intensidade) e se afastam de uma distribuição

Gama para valores menores. Esses gráficos reforçam visualmente que as distribuições assimétricas, especialmente a Lognormal, representam de forma mais adequada os erros de modelo para ambas as versões da norma.

7.5. Erro de modelo para previsão de resistência à punção de lajes lisas conforme a ACI318

De acordo com o modelo de previsão de resistência à punção proposto pela ACI318 (2025), foi realizada uma análise baseada na razão entre as forças de ruptura obtidas nos ensaios e as forças resistentes calculadas. Para fins de comparação, as cargas experimentais e previstas foram determinadas e são apresentadas na Fig. 7.12.

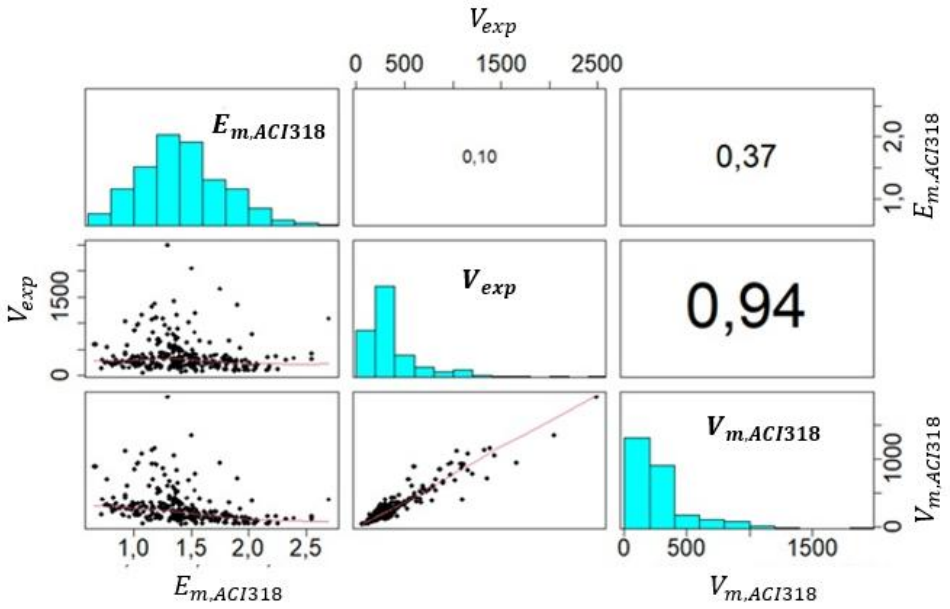


Figura 7.12 – Comparação entre E_m e as cargas V_{exp} e V_m (ACI318)

Fonte: Autora

O resultado do modelo de cálculo da ACI318, apresentado na Fig. 7.12, mostra uma dispersão não muito acentuada ao redor da linha ideal entre as resistências reais e previstas para os conjuntos de dados, dessa forma, é perceptível a forte e significativa correlação (*p-valor* = $2{,}2\ e^{-16}$) existente entre essas variáveis. Além disso, observa-se uma correlação fraca entre o $E_{m,ACI318}$ e o $V_{m,ACI318}$, e estatisticamente significativa, com *p-valor* = $1{,}345\ e^{-10}$. A Fig. 7.13 representa graficamente as correlações em pares entre os parâmetros, cada um associado a um coeficiente de correlação correspondente.

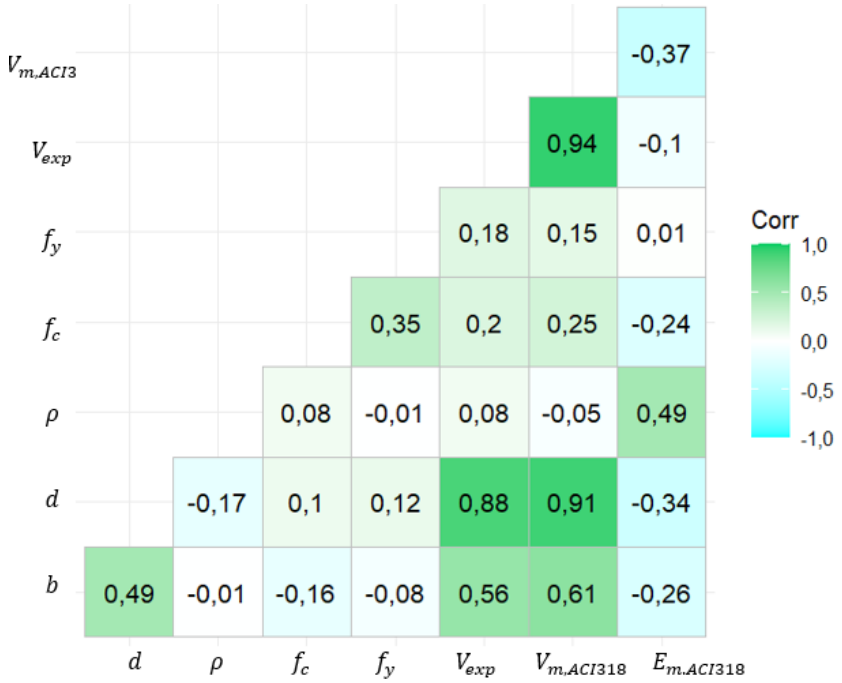


Figura 7.13 – Correlação entre variáveis de entrada e saída (ACI318)

Fonte: Autora

Na Figura 7.13, observa-se uma correlação moderada e significativa (*p-valor* = $2{,}2\,e^{-16}$) entre a taxa de armadura (ρ) e o erro do modelo ($E_{m,ACI318}$). A correlação observada pode ser atribuída à ausência da contribuição da armadura de flexão no modelo de cálculo da norma. Além disso, nota-se uma correlação moderada entre b e as variáveis V_{exp}, d e $V_{m,ACI318}$, e uma correlação forte entre V_{exp}, d e $V_{m,ACI318}$.

Para complementar a análise das correlações observadas na Fig. 7.13, a Tab. 7.9 apresenta os resultados dos testes de aderência aplicados aos erros do modelo da ACI318.

Tabela 7.9 – Resultados dos testes de aderência para ACI318

Distribuições	Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling		Cramer-von Mises	
	Estatística de teste	p-valor	Estatística de teste	p-valor	Estatística de teste	p-valor
Normal	0,0603	0,2461	0,8369	0,4551	0,1361	0,4351
Lognormal	0,0506	0,4521	0,8321	0,4583	0,1142	0,5198
Gama	0,0369	0,8270	0,3084	0,9316	0,0509	0,8713
Weibull	0,0826	0,0393	2,1226	0,0788	0,3272	0,1135

Fonte: Autora

Observa-se na Tab. 7.9 que as distribuições Normal, Lognormal e Gama foram consideradas adequadas para representar os dados, visto que os testes estatísticos não apontaram evidências de não conformidade dessas distribuições. Enquanto a Weibull apresenta rejeição pelo Kolmogorov–Smirnov, evidenciando inadequação para descrever o comportamento dos erros de modelo. Esses resultados reforçam que os erros do modelo da norma ACI318 são influenciados pela não consideração da contribuição da armadura de flexão no cálculo do modelo. Na Tab. 7.10 são apresentados os critérios de informação (AIC/BIC) para a ACI318.

Tabela 7.10 – Critérios de informação (AIC e BIC) das distribuições ajustadas para a norma ACI318

Distribuições	AIC	BIC
Normal	250,1322	257,4581
Lognormal	242,5268	249,8527
Gama	238,8132	246,1391

Fonte: Autora

A Tabela 7.10 apresenta os valores dos critérios de informação AIC e BIC obtidos para as distribuições Normal, Lognormal e Gama ajustadas aos dados referentes à norma ACI318. Observa-se que a distribuição Gama apresenta os menores valores de AIC e BIC, indicando o melhor ajuste aos dados entre as distribuições avaliadas. A distribuição Lognormal ocupa uma posição intermediária. Já a distribuição Normal apresenta os maiores valores de ambos os critérios, evidenciando menor capacidade de representar adequadamente o comportamento dos dados analisados. Como complemento, a Fig. 7.14 apresenta o Q-Q plot das distribuições que apresentaram melhor desempenho.

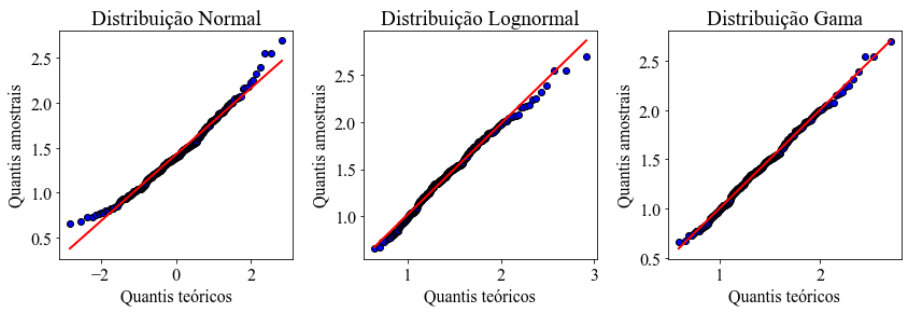


Figura 7.14 – Q-Q plot das melhores distribuições da ACI318

Fonte: Autora

A Figura 7.14 apresenta os Q-Q plots das distribuições Normal, Lognormal e Gama ajustadas aos dados da norma ACI318, permitindo avaliar visualmente a qualidade do ajuste entre os quantis teóricos e amostrais. Observa-se que a distribuição Gama apresenta o melhor alinhamento dos pontos em relação à reta de referência ao longo de toda a faixa de valores, indicando elevada aderência aos dados. A distribuição Lognormal também apresenta bom ajuste, embora com pequenas discrepâncias nos quantis extremos. E a distribuição Normal evidencia desvios mais perceptíveis nas caudas, sugerindo menor capacidade de representar o comportamento dos dados.

7.6. Erro de modelo para previsão de resistência à punção de lajes lisas conforme a FIB MC2020

A resistência à punção segundo o modelo da FIB MC2020 (2024) foi calculada a partir das equações apresentadas na Tab. 7.4. Para o cálculo da rotação das lajes, foram adotados os níveis de aproximação I e II, conforme previsto pela norma. Um resumo das estatísticas obtidas para esta norma e por cada nível pode ser visualizado na Tab. 7.5. As Figs. 7.15 e 7.16 apresentam *pairplots* que ilustram a relação entre as forças experimentais, forças calculadas e o erro de modelo para os níveis I e II da FIB MC2020.

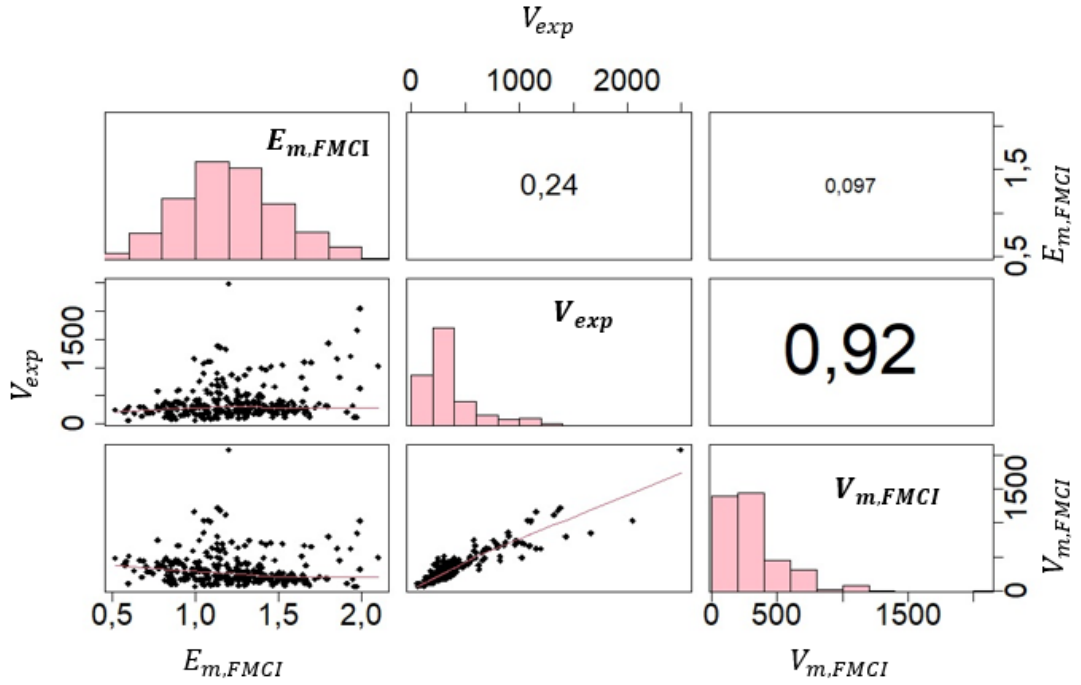


Figura 7.15 – Comparação entre E_m e as cargas V_{exp} e V_m (FMCI)

Fonte: Autora

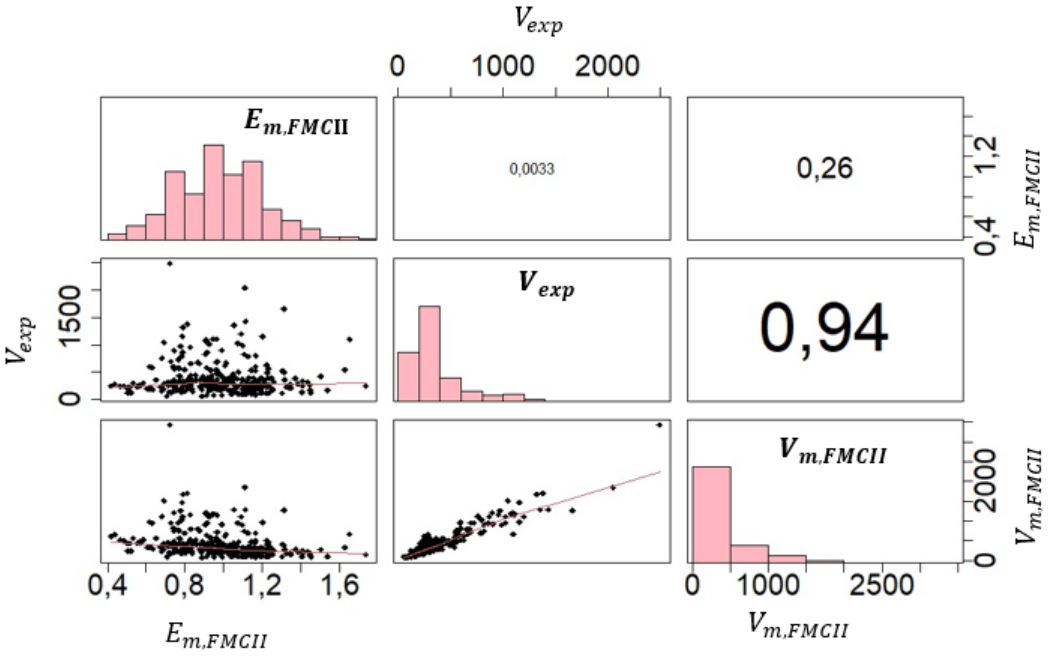


Figura 7.16 – Comparação entre E_m e as cargas V_{exp} e V_m (FMCII)

Fonte: Autora

Nas Figuras 7.15 e 7.16, observa-se para o nível I uma correlação forte entre as cargas experimentais e calculadas (0,92), enquanto a correlação entre o erro do modelo e as variáveis V_{exp} e $V_{m,FMCI}$ é fraca, embora estatisticamente significativa (p-$valor$ < 0,001). No nível II, o modelo apresenta desempenho ligeiramente superior, com correlação de 0,94 entre V_{exp} e $V_{m,FMCII}$, indicando boa aderência entre os valores previstos e experimentais. As correlações fracas entre $E_{m,FMCI}$ e as demais variáveis sugerem que os erros de modelo estão distribuídos de forma independente, o que reforça a consistência e a estabilidade do modelo proposto pela FIB MC2020 nos dois níveis de aproximação. A Fig. 7.17 complementa essa análise ao representar graficamente as correlações entre as variáveis do modelo, permitindo uma visualização mais clara das relações observadas.

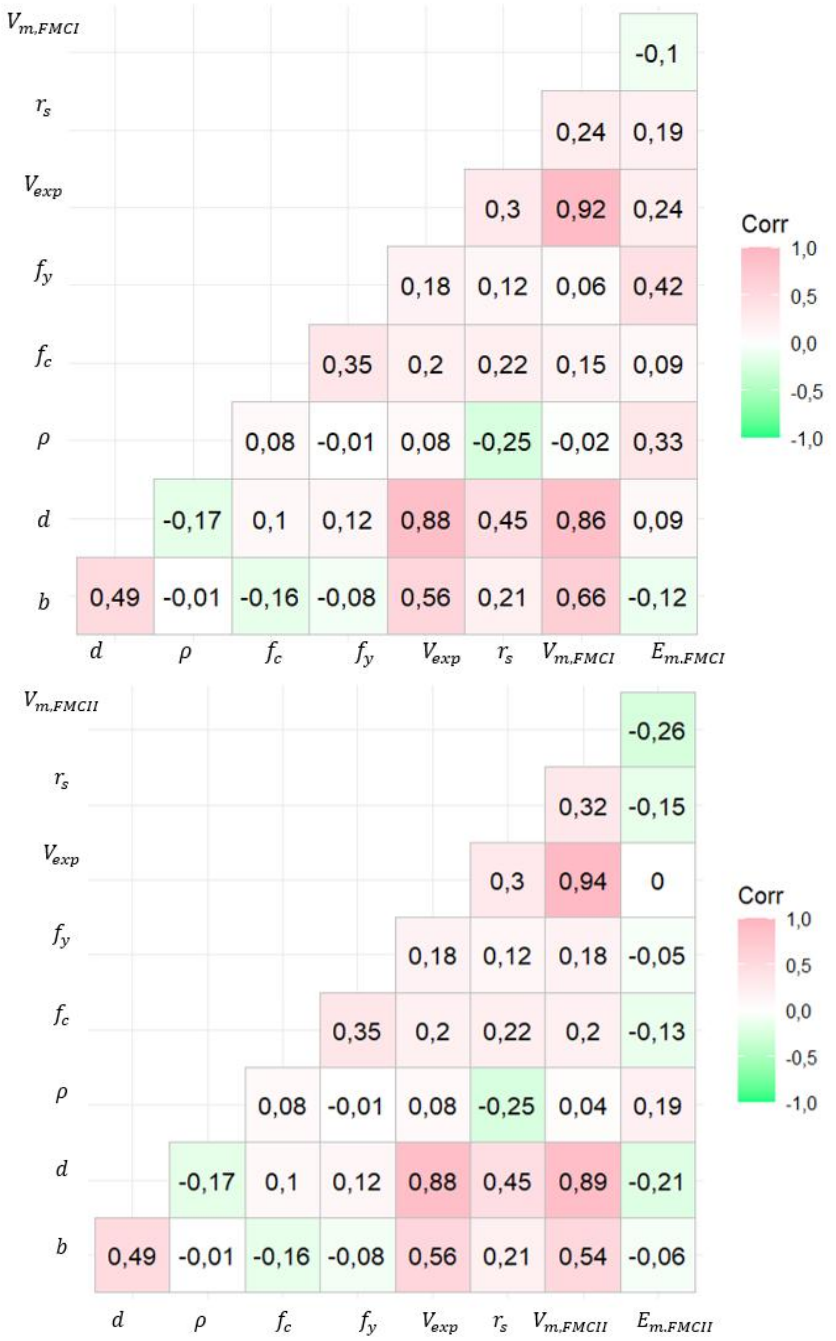


Figura 7.17 – Correlação entre variáveis de entrada e saída (FMCI e FMCII)

Fonte: Autora

Na Figura 7.17 são apresentadas as matrizes de correlação entre as variáveis de entrada e saída do modelo da FIB MC2020, considerando separadamente os níveis de aproximação I (FMCI) e II (FMCII). De modo geral, observa-se comportamento semelhante entre os dois níveis. Observa-se, em ambos os níveis, que existe forte correlação entre as cargas experimentais (V_{exp}) e as calculadas (V_m), com coeficientes próximos de 0,9, confirmando a boa capacidade preditiva do modelo. As variáveis

geométricas, em especial a espessura efetiva da laje (d) e a largura do pilar (b), também exibem correlação significativa com V_m, destacando sua influência direta na resistência à punção estimada pelo modelo. Por outro lado, as propriedades mecânicas do material (f_c e f_y) e a taxa de armadura (ρ) apresentam correlações fracas, indicando menor impacto dessas variáveis na resposta do modelo. O erro do modelo (E_m) mostra baixa correlação com as variáveis de entrada em ambos os níveis, o que sugere ausência de dependência linear significativa e reforça a consistência estatística das previsões tanto para o FMCI quanto para o FMCII.

As Tabelas 7.11 e 7.12 apresentam os resultados dos testes de aderência aplicados aos erros do modelo da FIB MC2020, correspondentes aos níveis de aproximação I e II, respectivamente. Para cada distribuição avaliada (Normal, Lognormal, Gama e Weibull) são apresentados os valores das estatísticas de teste e os respectivos *p-valores*, permitindo avaliar a adequação entre os dados observados e os modelos teóricos assumidos.

Tabela 7.11 – Resultados dos testes de aderência para FMCI

Distribuições	Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling		Cramer-von Mises	
	Estatística de teste	p-valor	Estatística de teste	p-valor	Estatística de teste	p-valor
Normal	0,0426	0,6718	0,4752	0,7721	0,0645	0,7859
Lognormal	0,0420	0,6897	1,0138	0,3501	0,1271	0,4678
Gama	0,0287	0,9717	0,3027	0,9361	0,0395	0,9362
Weibull	0,0583	0,2815	1,4512	0,1886	0,2237	0,2259

Fonte: Autora

Tabela 7.12 – Resultados dos testes de aderência para FMCII

Distribuições	Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling		Cramer-von Mises	
	Estatística de teste	p-valor	Estatística de teste	p-valor	Estatística de teste	p-valor
Normal	0,0357	0,8565	0,3774	0,8708	0,0549	0,8464
Lognormal	0,0687	0,1319	1,8851	0,1064	0,2952	0,1395
Gama	0,0611	0,2317	1,0094	0,3523	0,1729	0,3269
Weibull	0,0553	0,3417	1,7471	0,1271	0,2331	0,2115

Fonte: Autora

No nível de aproximação I (Tab. 7.11), observa-se que as distribuições Gama e Normal apresentaram *p-valores* superiores ao nível de significância adotado nos testes realizados, indicando ausência de evidências para rejeição da hipótese de aderência aos dados do erro de modelo. Já no nível de aproximação II (Tab. 7.12), as distribuições Normal e Gama também apresentaram *p-valores* compatíveis com a hipótese de bom ajuste, demostrando comportamento consistente entre os três testes aplicados. Na Tab. 7.13 são apresentados os critérios de informação (AIC/BIC) para a FMCI e FMCII, os quais permitem complementar a avaliação do desempenho das distribuições ajustadas.

Tabela 7.13 – Comparativo dos critérios de informação (AIC e BIC) das distribuições ajustadas às normas FMCI e FMCII

Distribuições	FMCI		FMCII	
	AIC	BIC	AIC	BIC
Normal	146,7494	154,0754	- 26,29906	- 18,97314
Lognormal	149,2818	156,6077	- 11,91931	- 4,593393
Gama	142,3139	149,6399	- 22,57153	- 15,24561

Fonte: Autora

Observa-se na Tab. 7.13 que, para o FMCI, a distribuição Gama apresenta os menores valores de AIC e BIC, indicando o melhor ajuste aos dados entre as distribuições avaliadas. Já para o FMCII, a distribuição Normal é a que apresenta os menores valores desses critérios, configurando o ajuste mais adequado nesse caso. Em ambas as normas, a distribuição Lognormal apresenta os maiores valores desses critérios, caracterizando o ajuste menos adequado. Esses resultados evidenciam a superioridade da distribuição Gama na representação estatística dos dados analisados. Esses resultados evidenciam que a distribuição mais adequada depende do modelo normativo considerado. Como complemento, as Figs. 7.18 e 7.19 mostram o Q-Q plot das distribuições que apresentaram melhor desempenho em cada caso.

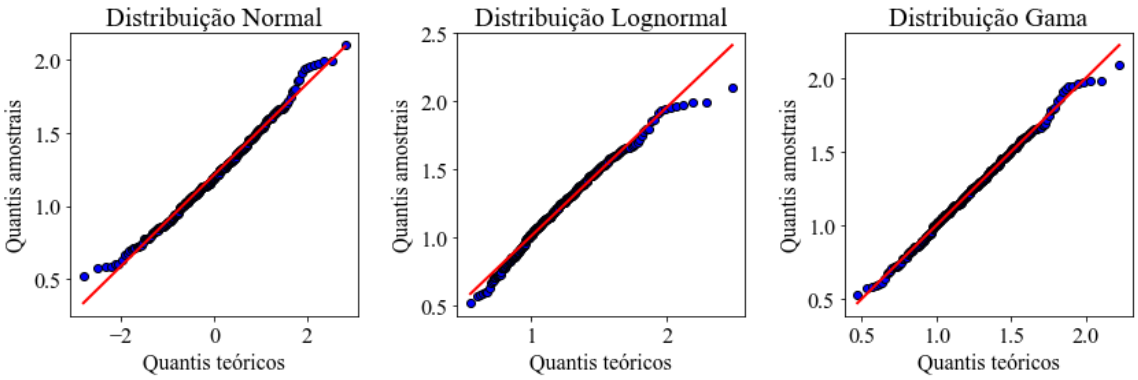


Figura 7.18 – Q-Q plot das melhores distribuições da FMCI

Fonte: Autora

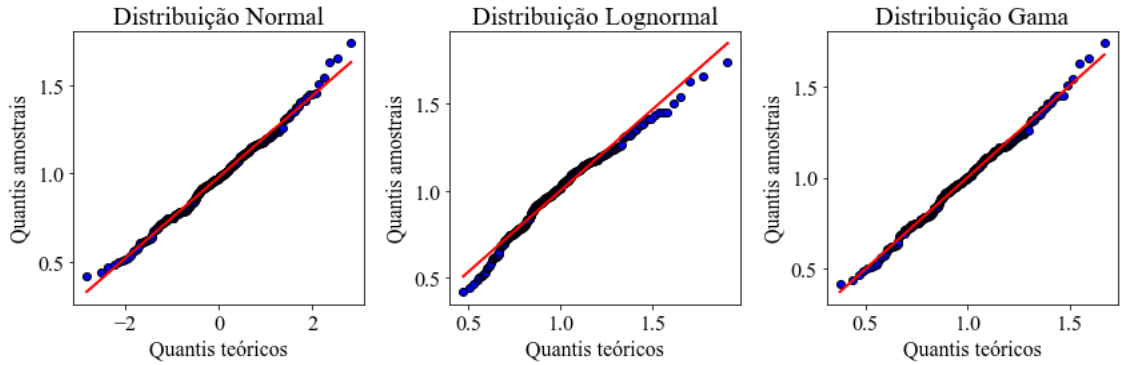


Figura 7.19 – Q-Q plot das melhores distribuições da FMCII

Fonte: Autora

Com base nas Figs. 7.18 e 7.19, observa-se que, para o FMCI, a distribuição Gama apresenta melhor alinhamento entre os quantis amostrais e os quantis teóricos ao longo da faixa de dados, indicando maior aderência. Para o FMCII, a distribuição Normal demonstra desempenho superior, com pontos mais próximos da linha de referência, especialmente na região central. Em ambos os casos, a distribuição Lognormal evidencia maiores discrepâncias, sobretudo nos quantis extremos. Esses resultados são consistentes com os critérios de AIC e BIC apresentados na Tab. 7.13.

7.7. Erro de modelo para previsão de resistência à punção de lajes lisas conforme a EUROCODE2

O modelo de cálculo da EUROCODE2 (2023) para a resistência à punção de lajes lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento é baseado em uma formulação

revisada, que reflete de maneira mais precisa a realidade observada nos experimentos, fornecendo uma previsão mais adequada da capacidade de carga das lajes. Para efeito de comparação, a razão entre as cargas experimentais e previstas são determinadas e apresentadas na Fig. 7.20.

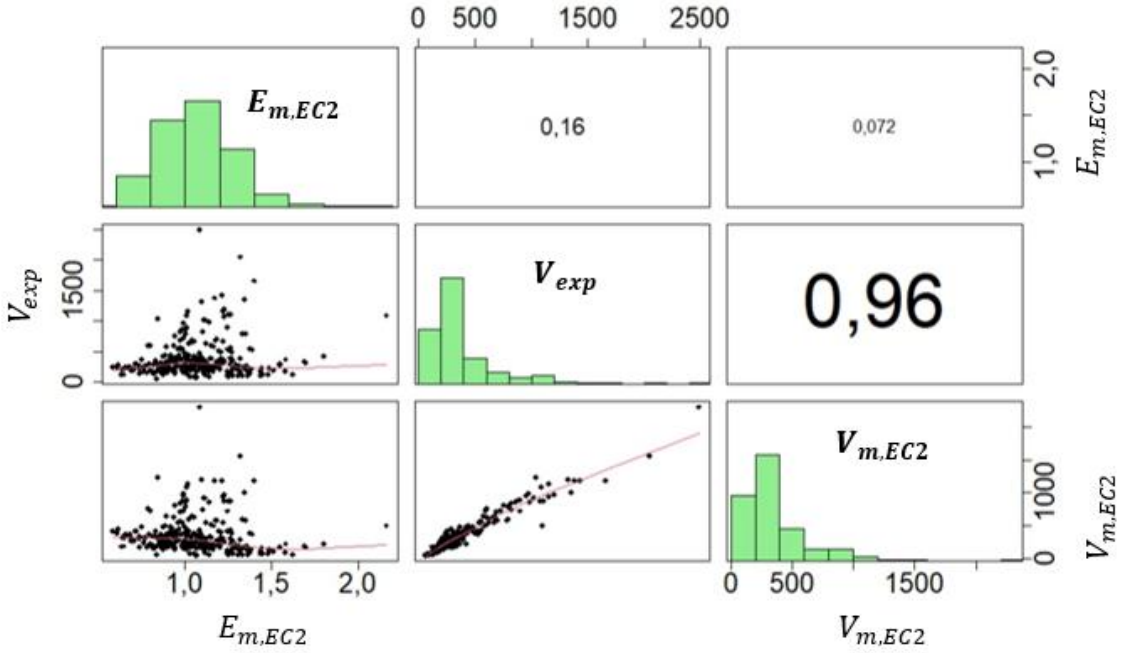


Figura 7.20 – Comparação entre E_m e as cargas V_{exp} e V_m (EC2)

Fonte: Autora

Observa-se na Fig. 7.20 uma forte correlação positiva entre as cargas experimentais (V_{exp}) e as cargas previstas ($V_{m,EC2}$), indicando que o modelo do EC2 reproduz de forma consistente os resultados experimentais. Essa relação evidencia boa capacidade preditiva do modelo em termos de resistência à punção. Por outro lado, o erro de modelo ($E_{m,EC2}$) apresenta correlações baixas com V_{exp} e $V_{m,EC2}$, esses resultados indicam que o modelo do EC2 possui boa precisão, sendo estatisticamente adequado para representar o comportamento observado nos ensaios. A Fig. 7.21 complementa essa análise ao representar graficamente as correlações entre as variáveis do modelo EC2.

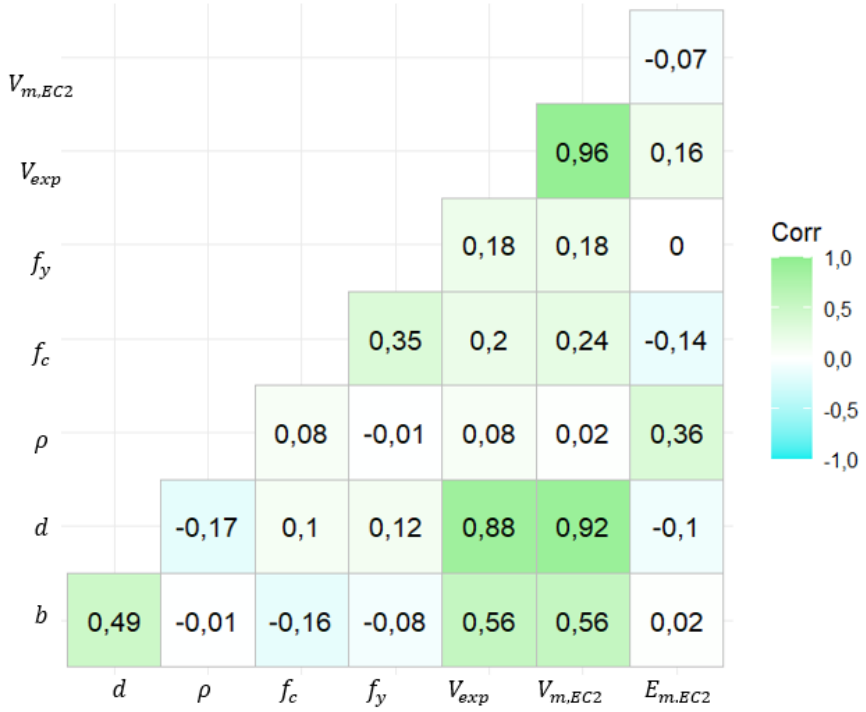


Figura 7.21 – Correlação entre variáveis de entrada e saída (EC2)

Fonte: Autora

Ao analisar o gráfico da Fig. 7.21, observa-se uma forte correlação positiva entre as variáveis geométricas altura útil da laje (d) e a largura do pilar (b) e as cargas experimentais (V_{exp}) e previstas ($V_{m,EC2}$), com coeficientes próximos a 0,9 e 0,6, respectivamente. Isso indica que o aumento das dimensões da laje está fortemente associado ao aumento da capacidade resistente, o que é coerente com o comportamento físico esperado. Também se nota correlação positiva moderada entre a taxa de armadura (ρ) e o erro médio do modelo ($E_{m,EC2}$), com $p\text{-}valor$ = 2,171 e^{-10}, sugerindo que lajes com maiores taxas de armadura tendem a apresentar erros de modelo ligeiramente superiores na previsão.

Por outro lado, as correlações entre o erro de modelo e as variáveis mecânicas do concreto (f_c) e do aço (f_y) são baixas, indicando que a precisão do modelo EC2 é pouco influenciada por essas propriedades. De modo geral, o gráfico evidencia que o desempenho do modelo é mais sensível às características geométricas da laje do que às propriedades dos materiais.

Dando continuidade à análise estatística dos modelos normativos, a Tab. 7.14 apresenta os resultados dos testes de aderência aplicados aos erros do modelo da EC2. Assim como nas avaliações anteriores, foram empregados os testes de Kolmogorov–

Smirnov, Anderson–Darling e Cramér–von Mises, com o intuito de identificar qual distribuição de probabilidade melhor representa o comportamento dos erros de modelo. São apresentadas as estatísticas de teste e os respectivos *p-valores* para as distribuições Normal, Lognormal, Gama e Weibull, permitindo avaliar a adequação entre os dados observados e as distribuições assumidas.

Tabela 7.14 – Resultados dos testes de aderência para EC2

Distribuições	Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling		Cramer-von Mises	
	Estatística de teste	p-valor	Estatística de teste	p-valor	Estatística de teste	p-valor
Normal	0,0539	0,3738	0,8778	0,4281	0,1353	0,4379
Lognormal	0,0365	0,8386	0,6027	0,6453	0,0719	0,7403
Gama	0,0336	0,9013	0,4326	0,8158	0,0567	0,8354
Weibull	0,0782	0,0589	2,5440	0,0470	0,3809	0,0811

Fonte: Autora

Observa-se na Tabela 7.14 que as distribuições Gama e Lognormal atenderam aos critérios dos três testes estatísticos, indicando a não rejeição da hipótese de aderência, sugerindo compatibilidade com os dados. Por outro lado, a distribuição Weibull apresentou *p-valor* inferior a 0,05 no teste de Anderson–Darling, sendo rejeitada por este critério, o que evidencia menor adequação. Na Tab. 7.15 são apresentados os critérios de informação (AIC/BIC) para a EC2.

Tabela 7.15– Critérios de informação (AIC e BIC) das distribuições ajustadas para a norma EC2

Distribuições	AIC	BIC
Normal	- 39,83736	-32,51144
Lognormal	-54,10466	-46,77874
Gama	-54,23618	-46,91026

Fonte: Autora

Na Tabela 7.15, observa-se que as distribuições Lognormal e Gama apresentam valores de AIC e BIC inferiores aos da distribuição Normal, indicando melhor qualidade

de ajuste aos dados. Entre elas, a distribuição Gama apresenta os menores valores desses critérios, sugerindo desempenho estatístico ligeiramente superior. No entanto, a diferença entre Lognormal e Gama é pequena, não sendo expressiva do ponto de vista prático. Como complemento, a Fig. 7.22 apresenta o Q-Q plot das distribuições que demonstraram melhor desempenho.

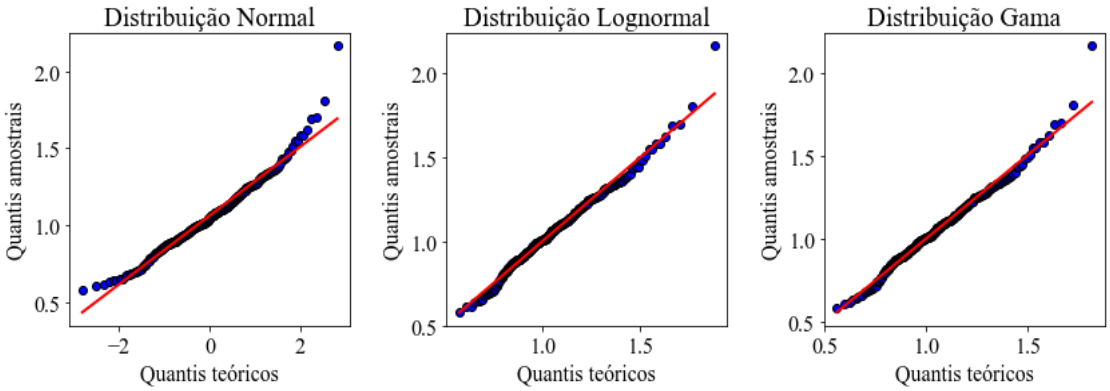


Figura 7.22 – Q-Q plot das melhores distribuições da EC2

Fonte: Autora

Observa-se que as distribuições Lognormal e Gama apresentam melhor alinhamento entre os quantis teóricos e amostrais ao longo da maior parte da faixa de dados, indicando maior aderência aos valores observados. A distribuição Normal, embora represente adequadamente a região central, apresenta desvios mais perceptíveis nas caudas, especialmente para quantis mais elevados. Esses resultados são coerentes com a análise dos critérios AIC e BIC, reforçando a superioridade das distribuições Lognormal e Gama na modelagem estatística dos dados da EC2.

7.8. Síntese comparativa das distribuições ajustadas aos erros de modelo

Com base nos resultados obtidos nos testes de aderência e nos critérios de informação (AIC e BIC) para cada modelo normativo analisado, apresenta-se na Tab. 7.16 uma síntese comparativa das distribuições de probabilidade que mostraram melhor desempenho estatístico na modelagem dos erros de modelo. A classificação está organizada por norma e por posição (1ª e 2ª colocação), considerando separadamente os critérios AIC e BIC, os quais privilegiam modelos com menor valor desses indicadores.

Tabela 7.16 – Síntese comparativa das melhores distribuições ajustadas

Norma	Posição	Critério de informação	
		AIC	BIC
NBR14	1ª	Lognormal	Lognormal
	2ª	Gamma	Gamma
NBR23	1ª	Lognormal	Lognormal
	2ª	Gamma	Gamma
ACI318	1ª	Gamma	Gamma
	2ª	Lognormal	Lognormal
FMCI	1ª	Gamma	Gamma
	2ª	Normal	Normal
FMCII	1ª	Normal	Normal
	2ª	Gamma	Gamma
EC2	1ª	Gamma	Gamma
	2ª	Lognormal	Lognormal

Fonte: Autora

Observa-se na Tab. 7.16 que a distribuição Lognormal apresentou melhor desempenho para as normas NBR14 e NBR23, enquanto a distribuição Gama destacou-se para ACI318, FMCI e EC2. No caso do FMCII, a distribuição Normal apresentou o melhor ajuste segundo ambos os critérios. De modo geral, verifica-se que a distribuição Gama apresenta desempenho consistente entre diferentes modelos normativos, sendo classificada como primeira ou segunda colocada na maioria dos casos analisados.

Considerando essa consistência, bem com sua flexibilidade para representar distribuições assimétricas típicas de erros de modelo em problemas estruturais, optou-se por adotar a distribuição Gama como modelo probabilístico de referência para a análise de confiabilidade desenvolvida nesta pesquisa.

7.9. Análise comparativa dos critérios normativos e erros de modelo

O resultado dos modelos de cálculo das normas ABNT NBR6118 (2014), ABNT NBR6118 (2023), ACI318 (2025), FIB MC2020 (2024) e EUROCODE2 (2023) foram avaliados levando em consideração a validação e a análise dos modelos de resistência à

punção de lajes lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento com os resultados experimentais através da variável aleatória erro do modelo.

7.9.1. Desempenho dos modelos normativos: análise dos erros de modelo

Os resultados obtidos pelos modelos de cálculo das normas ABNT NBR6118 (2014), ABNT NBR6118 (2023), ACI 318 (2025), EUROCODE2 (2023) e FIB MC2020 (2024) foram avaliados a partir da comparação entre as resistências à punção previstas e os resultados experimentais de lajes lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento, utilizando como parâmetro a variável aleatória erro de modelo.

Em continuidade, a análise da reta de regressão permitiu avaliar, no intervalo de dados analisado, o desempenho de cada modelo: a inclinação indica a tendência de subestimação ou superestimação em relação aos valores experimentais, enquanto o intercepto reflete eventuais deslocamentos sistemáticos observados nesse intervalo.

Após o ajuste do modelo de regressão linear, considerando o desempenho dos modelos analíticos, foram utilizadas as seguintes métricas estatísticas de erro: MAE, RMSE, R^2 e NRMSE. O MAE expressa a média das diferenças absolutas entre os valores previstos e observados. O RMSE representa a raiz quadrada da média dos erros quadráticos, sendo que valores menores indicam melhor desempenho do modelo. O coeficiente de determinação R^2 indica o percentual da variação da variável dependente y que é explicado pela variável independente x, de modo que quanto mais próximo de 1 reflete maior capacidade explicativa do modelo. Já o NRMSE corresponde ao RMSE normalizado, possibilitando a comparação dos resultados em termos percentuais.

Com o objetivo de avaliar a correlação entre as cargas experimentais e as cargas previstas por cada modelo normativo, foram ajustadas retas de regressão linear, cujos coeficientes são apresentados na Tab. 7.17. Além disso, as métricas estatísticas (RMSE, MAE, R^2 e NRMSE) fornecem uma medida quantitativa do desempenho de cada modelo, permitindo comparar sua precisão e capacidade de representação do comportamento experimental.

Tabela 7.17– Regressão linear e indicadores estatísticos dos modelos normativos

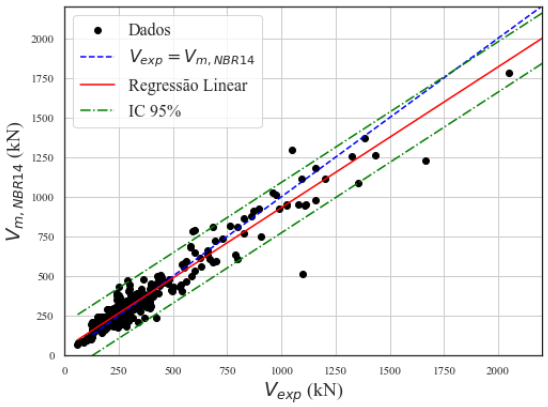
Normas	Regressão	RMSE (kN)	MAE (kN)	R^2	NRMSE (%)
NBR14	$y = 0{,}887x + 44{,}41$	81,09	52,16	0,934	21,03
NBR23	$y = 0{,}915x - 6{,}47$	88,41	60,78	0,921	22,93
FMCI	$y = 0{,}701x + 53{,}36$	147,50	91,03	0,781	38,27
FMCII	$y = 1{,}078x - 0{,}01$	125,35	77,47	0,842	32,52
EC2	$y = 0{,}838x + 43{,}11$	91,92	57,91	0,915	23,85
ACI318	$y = 0{,}758x - 2{,}95$	147,49	105,14	0,781	38,27

Fonte: Autora

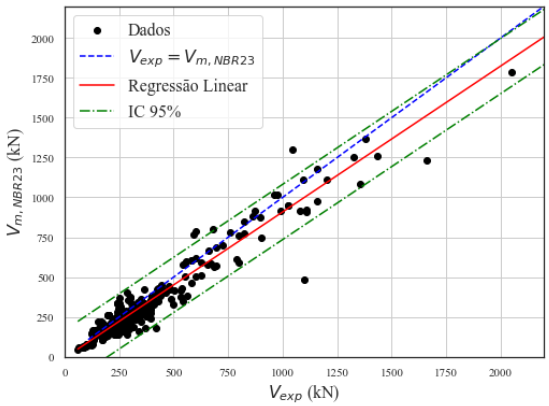
Na equação de regressão linear apresentada na Tab. 7.17, a variável x representa o valor da resistência à punção obtida por meio do modelo de referência, enquanto a variável y corresponde ao valor da resistência à punção estimado pelo respectivo modelo normativo. As retas de regressão apresentadas foram ajustadas para quantificar a relação entre as cargas previstas pelos modelos normativos e as cargas experimentais. Observa-se que o modelo FMCII tem um coeficiente angular próximo de 1, o que indica boa proporcionalidade entre previsto e observado. Por outro lado, FMCI e ACI318 apresentam inclinações consideravelmente menores que 1, sugerindo tendência à subestimação das cargas mais elevadas, além de interceptos que evidenciam comportamento sistematicamente deslocado em relação aos valores experimentais.

A análise das métricas confirma e complementa as observações sobre as retas. Pelo R^2, a NBR14 destaca-se como a que melhor explica a variabilidade dos dados, seguida por NBR23 e EC2. Esses três modelos também apresentam os menores erros absolutos (MAE) e quadráticos (RMSE), o que indica maior precisão e menor dispersão das previsões. Já o FMCII, apesar da inclinação próxima de 1, mostra erros superiores, indicando maior variabilidade nas estimativas. Os modelos obtidos pelas normas FMCI e ACI318 apresentam os piores desempenhos estatísticos, associando inclinações distantes de 1 e altos valores de erro, ou seja, baixa aderência aos resultados experimentais. O NRMSE, que normaliza o RMSE, segue esse mesmo padrão e facilita a comparação relativa entre modelos: valores menores confirmam NBR14, NBR23, FMCII e EC2 como os mais consistentes, enquanto FMCI e ACI318 evidenciam maior discrepância e incerteza nas previsões.

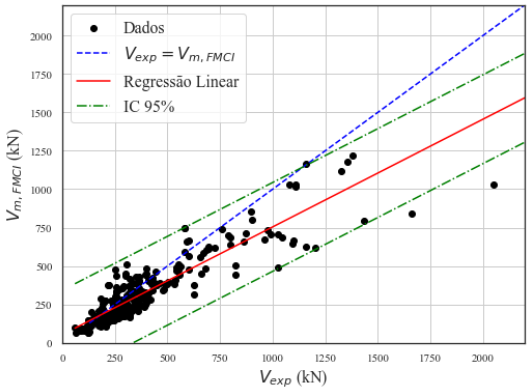
Para complementação dos resultados, a Fig. 7.23 compara os valores de resistência obtidos experimentalmente com os previstos pelos modelos de cálculo das normas analisadas. Cada gráfico mostra os pontos experimentais, a linha de referência ($V_{exp} = V_m$), a reta de regressão linear ajustada aos dados e o intervalo de confiança de 95%.



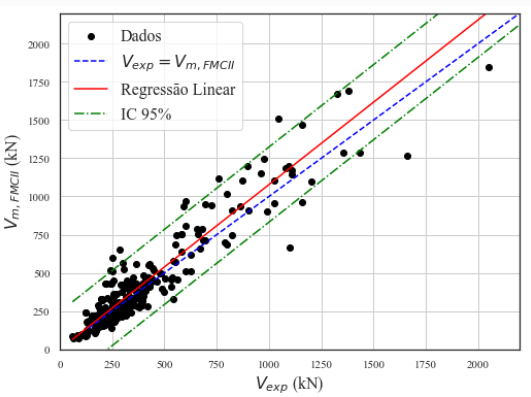
NBR14



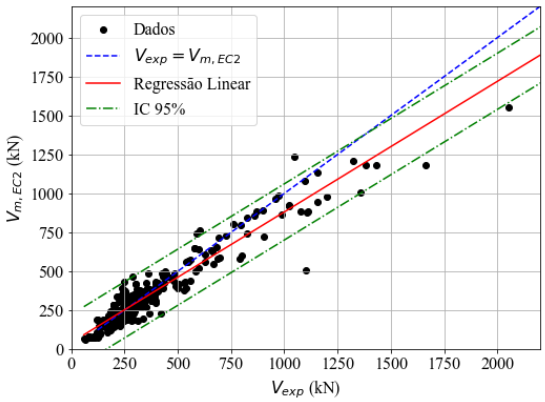
NBR23



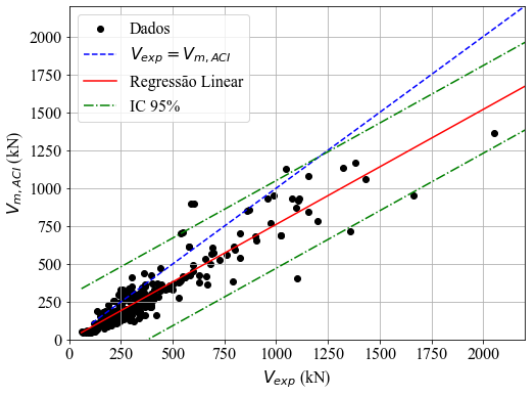
FMCI



FMCII



EC2



ACI318

Figura 7.23 – Modelos de cálculo das normas estudadas

Fonte: Autora

A Figura 7.23 apresenta a comparação entre os valores experimentais de resistência à punção (V_{exp}) e os valores calculados (V_m) segundo os diferentes modelos normativos estudados: NBR14, NBR23, FMCI, FMCII, EC2 e ACI318. Observa-se que a proximidade dos pontos à linha de referência e o alinhamento da regressão linear indicam o grau de concordância de cada modelo com os resultados experimentais. Modelos com a inclinação da reta próxima de 1 e intercepto próximo de zero apresentam tendência menor a subestimar ou superestimar os valores, enquanto a largura do intervalo de confiança evidencia a variabilidade das estimativas fornecidas pelo modelo. Comparando os gráficos, é possível perceber diferenças no desempenho dos modelos, com alguns apresentando dispersão maior ou tendência sistemática de subestimação, especialmente para resistências mais elevadas.

Os gráficos das normas FMCII, NBR14 e EC2 apresentam os pontos experimentais mais próximos da linha de regressão, indicando melhor ajuste do modelo aos dados. Já a NBR23 e o ACI318 mostram maior dispersão, sugerindo que os modelos dessas normas podem subestimar ou superestimar significativamente certos valores. A análise da reta de regressão permite verificar tanto o viés sistemático quanto a precisão de cada norma, sendo evidente que FMCII e NBR14 apresentam desempenho mais consistente em toda a faixa de resistência estudada.

Na Figura 7.24 são apresentados os histogramas do erro de modelo para as normas estudadas, juntamente com as curvas ajustadas pela distribuição Gama. Esses gráficos permitem a análise da forma da distribuição, da variabilidade e da tendência central dos erros em relação à média, complementando a discussão anterior sobre a comparação entre os valores experimentais e os modelos de cálculo.

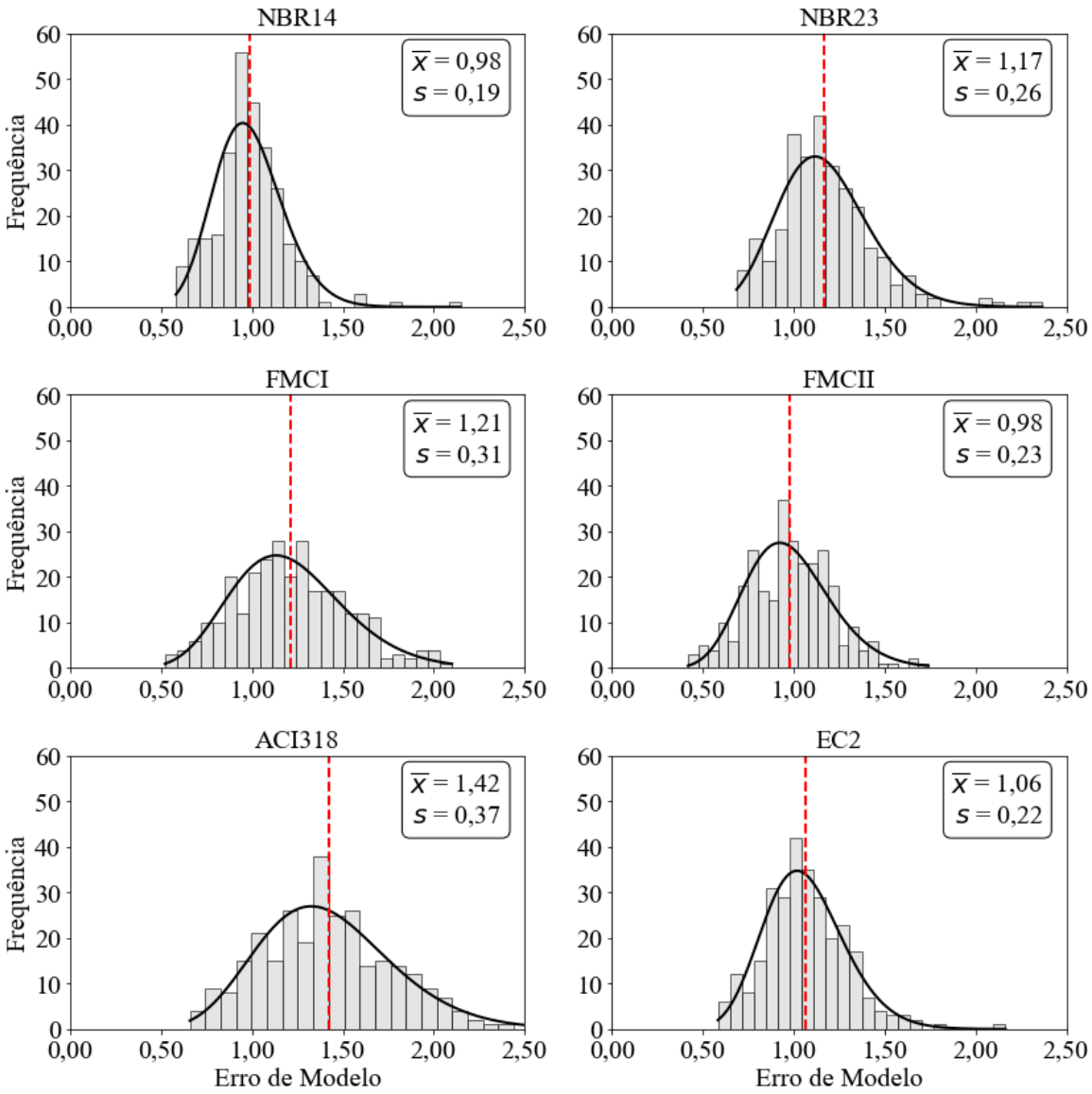


Figura 7.24 – Histogramas dos erros de modelo de cada norma.

Fonte: Autora

Observa-se na Fig. 7.24 que as distribuições dos erros de modelo apresentam diferentes médias ($\bar{x}$) e desvios-padrão (s), indicando variações na precisão e consistência dos modelos. Normas como NBR14 e FMCII apresentam médias próximas de 1, sugerindo boa correspondência com os valores experimentais, enquanto ACI318 apresenta média superior ($\bar{x}$ = 1,42), indicando tendência de subestimação da resistência à punção. Além disso, o desvio-padrão evidencia a variabilidade do erro de modelo: FMCI e ACI318 apresentam maior dispersão, enquanto NBR14 e EC2 apresentam erros de modelos mais concentrados em torno da média. Observa-se ainda que algumas

distribuições apresentam leve assimetria à direita, característica compatível com o ajuste pela distribuição Gama.

A linha vermelha tracejada indica a média do erro de modelo, permitindo visualizar a posição dos dados em relação ao valor central da distribuição. A combinação entre tendência central, dispersão e forma da distribuição possibilita interpretar o comportamento estatístico de cada modelo normativo.

Com base nas análises estatísticas e gráficas dos erros de previsão dos modelos normativos, foi possível compreender o comportamento das discrepâncias entre os valores experimentais e os valores calculados para a resistência à punção. A distribuição dos erros, associada aos indicadores de tendência central e dispersão, evidencia quais modelos apresentam melhor aderência aos resultados experimentais e menor variabilidade. Assim, esta etapa fornece subsídios essenciais para a etapa seguinte da pesquisa, voltada à avaliação da confiabilidade estrutural, uma vez que estabelece, de maneira fundamentada, quais modelos apresentam comportamento mais consistente e representativo da realidade.

Definiu-se que a ABNT NBR 6118 (2014) não será utilizada na análise de confiabilidade. Essa norma foi empregada apenas como referência comparativa em relação ao documento mais recente, a ABNT NBR 6118 (2023), sendo esta última a que representa o estado atual da regulamentação brasileira. Da mesma forma, verificou-se que, no caso do FIB MC2020 (2024), os resultados do Nível I apresentaram desempenho menos satisfatório e maior dispersão quando comparados ao Nível II. Por esse motivo, o Nível I também será excluído da etapa de confiabilidade.

7.9.2. Validação

A validação da determinação do erro de modelo foi realizada por meio da comparação entre os resultados da resistência à punção de lajes lisas sem armadura de cisalhamento, com base nas normas ABNT NBR6118 (2014) e ACI318 (2025), conforme apresentado nos estudos de Silva (2022) e Silva Júnior e Gomes (2023).

Silva (2022) avaliou a confiabilidade no estado limite último à punção de lajes lisas por meio da análise de 65 ensaios experimentais. Para o modelo de resistência, foram analisados quatro normas e dois modelos de elementos finitos. Considerando as normas NBR6118 e ACI318, o autor obteve como média do erro de modelo, 1,00 e 1,41, respectivamente.

Silva Júnior e Gomes (2023) compararam modelos de aprendizagem de máquina para prever a resistência à punção de lajes lisas, com base em 373 ensaios experimentais. A partir de um desses modelos, foi realizada uma filtragem, resultando na utilização de 112 ensaios. Os autores determinaram os resultados pela razão entre a resistência prevista e a experimental (V_m/V_{exp}) . Para realizar a comparação, calcula-se o inverso de cada erro de modelo e, em seguida, a média desses inversos. Os autores determinaram valores médios da razão V_m/V_{exp} para as normas NBR6118 e ACI318 como 1,056 e 0,699, respectivamente.

Com o intuito de comparar e validar os resultados dos erros de modelo apresentados nesta pesquisa, a Tab. 7.18 apresenta os valores médios do erro de modelo E_m, definido como V_{exp}/V_m, bem como a média dos inversos desses erros, referentes às normas ABNT NBR6118 (2014) e ACI318 (2025).

Tabela 7.18 – Resultado dos erros de modelo das normas NBR6118 e ACI318

	NBR6118	ACI318
E_m	0,984	1,423
$\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\frac{1}{E_{m,i}}$	1,054	0,754

Fonte: Autora

Ao observar a Tab. 7.18, verifica-se que os valores dos erros de modelo obtidos apresentaram resultados muito próximos às referências, com uma diferença inferior a 0,5% para a NBR6118, enquanto para a ACI318 a diferença é de aproximadamente 8%. Assim, constata-se que os resultados do erro de modelo obtidos nesta pesquisa apresentam elevada concordância com aqueles apresentados na literatura, indicando que a metodologia adotada para sua determinação é consistente e representativa.

8. ANÁLISE DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL DE LAJES LISAS SUBMETIDAS À PUNÇÃO

Neste Capítulo são apresentadas as análises de confiabilidade estrutural aplicadas às lajes lisas de concreto armado submetidas à punção, sem armadura de cisalhamento. Os métodos de confiabilidade estrutural foram implementados na linguagem de programação Python, por meio da biblioteca *RealPy* (REAL, 2024). As funções estado limite foram incorporadas no método FORM, sendo os resultados validados através dos métodos MCAIA e SORM, de modo a garantir consistência e estabilidade dos resultados obtidos.

A avaliação da confiabilidade foi determinada em duas etapas complementares: (i) considerando o erro de modelo associado a resistência, e (ii) desconsiderando esse erro de modelo, de forma a quantificar sua influência no índice de confiabilidade. Adicionalmente, foi realizada uma análise de sensibilidade, permitindo identificar os parâmetros que exercem maior influência na função estado limite, tais como a resistência característica do concreto, a espessura da laje, as ações aplicadas e os coeficientes associados às incertezas de modelo.

Essa abordagem integrada possibilita compreender não apenas o nível de confiabilidade das lajes nas diferentes condições estruturais avaliadas, mas também o papel relativo de cada variável na segurança do sistema, fornecendo subsídios fundamentais para o dimensionamento e para a incorporação do comportamento à punção em uma abordagem baseada na confiabilidade estrutural.

8.1. Caracterização das lajes lisas analisadas

O estudo da confiabilidade de lajes lisas de concreto armado, sem armadura de cisalhamento e submetidas à punção, baseia-se no modelo estrutural de um edifício de quatro pavimentos, no qual cada nível apresenta uma carga variável distinta, conforme ilustrado na Fig. 8.1. A análise concentra-se na ligação laje-pilar, considerando o pilar destacado em vermelho na figura, por meio de um modelo estrutural adaptado de Silva (2022). A avaliação da confiabilidade é realizada com base no modelo de resistência da FIB MC2020 (2024), selecionado por apresentar a melhor aproximação estatística do erro de modelo quando comparado às demais normas analisadas no capítulo anterior.

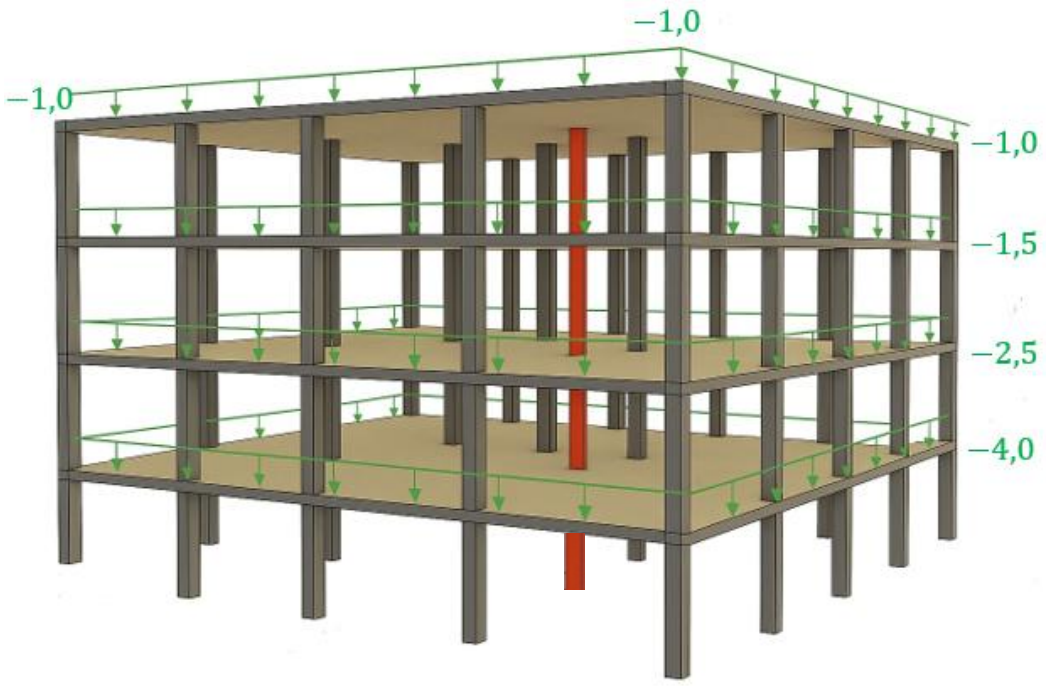


Figura 8.1 – Modelo estrutural

Fonte: Autora

O modelo estrutural analisado consiste em lajes lisas de concreto armado, cujas principais características geométricas e mecânicas são: resistência à compressão do concreto variando de 25 a 50 MPa, vão de 6,0 m e pé-direito de 3,0 m. As lajes possuem comprimento útil de 600 cm, distância entre o pilar e a borda da laje de 132 cm, espessura entre 20 e 27,5 cm e cobrimento de 2,5 cm. As ações consideradas incluem a carga permanente, composta pelo peso próprio da estrutura acrescido do revestimento, totalizando 1 kN/m², e cargas variáveis de 4,0; 2,5; 1,5 e 1,0 kN/m², conforme apresentado na Fig. 8.1. A razão de carregamento adotada nas diferentes condições de análise varia de 0,15 a 0,67. Essas características servem de base para a avaliação da confiabilidade estrutural em relação ao fenômeno de punção.

Para a análise de confiabilidade foram consideradas 96 ligações laje-pilar, conforme apresentadas na Tab. 8.1, abrangendo uma ampla variação de propriedades geométricas e mecânicas do sistema estrutural. As combinações estudadas resultam da variação conjunta da resistência característica do concreto (f_{ck}), da espessura das lajes (h) e das diferentes razões de carregamento aplicadas (δ). Essa faixa de parâmetros permite representar de forma abrangente distintos casos de carregamento e configurações estruturais, possibilitando avaliar o comportamento à punção sob condições variadas de projeto e desempenho.

Tabela 8.1 – Característica das lajes analisadas

Ligação laje-pilar	Modelo de resistência	Verificação da resistência à punção
24	FIB MC2020	FIB MC2020
24		NBR6118
24		ACI318
24		EUROCODE2

Fonte: Autora

A Tabela 8.1 sintetiza a distribuição das 96 ligações laje-pilar avaliadas segundo cada modelo normativo considerado. Cada ligação foi submetida ao cálculo da resistência à punção utilizando o modelo da FIB MC2020 (2024), adotado como referência, e posteriormente verificada conforme as prescrições das normas ABNT NBR6118 (2023), ACI318 (2025) e EUROCODE2 (2023). Essa organização permite comparar, de forma sistemática, o desempenho dos diferentes modelos de resistência sob as mesmas condições estruturais e de carregamento. Além disso, a estruturação das diferentes combinações possibilita identificar eventuais divergências entre as normas e avaliar de maneira consistente seu impacto sobre a confiabilidade estrutural das lajes lisas analisadas.

8.2. Função estado limite

Para avaliar o modo de falha por punção na ligação laje-pilar, adotou-se uma função estado limite que relaciona a resistência efetiva à solicitação atuante, considerando as incertezas aos parâmetros do modelo. Dessa forma, a equação utilizada foi expressa por:

$$g(x) = E_{m,R}\, R - E_{m,S}\, S\, (g + q), \tag{8.1}$$

sendo que, $E_{m,R}$ e $E_{m,S}$ modelam as variáveis associadas à resistência e às ações, respectivamente, R e S representam a resistência à punção e o efeito das ações, g e q correspondem às ações permanentes e variável. A condição de segurança é satisfeita quando $g(x) > 0$, indicando que a capacidade resistente supera as solicitações aplicadas.

Além disso, a formulação adotada para a função estado limite reflete o comportamento probabilístico da falha por punção, na qual tanto a resistência quanto as

ações são tratadas como variáveis aleatórias. A resistência à punção incorpora incertezas relacionadas ao comportamento do concreto, aço, variabilidade geométrica e limitações dos modelos normativos. As ações permanentes e variáveis apresentam dispersões inerentes às variações de carregamento, às combinações e aos modelos de ação. Essa abordagem possibilita uma avaliação mais consistente do desempenho estrutural, especialmente em regiões críticas como a ligação laje-pilar, onde pequenas variações nos parâmetros podem resultar em reduções significativas da segurança contra punção.

O índice de confiabilidade foi determinado por meio do método FORM e, para validação dos resultados obtidos, aplicaram-se os métodos MCAIA e SORM, que permitem avaliar a precisão da aproximação de primeira ordem e verificar a influência da curvatura da superfície de falha no cálculo da probabilidade de ruptura por punção. Assim, assegura-se maior consistência na estimativa da confiabilidade estrutural.

8.3. Caracterização das variáveis aleatórias do estudo

Para a análise de confiabilidade estrutural é necessário a definição detalhada das variáveis aleatórias envolvidas na avaliação da função estado limite. Essa caraterização é fundamental para representar adequadamente as incertezas associadas às propriedades dos materiais, às ações atuantes, às dimensões geométricas e ao modelo de resistência empregado. Neste item são definidos os parâmetros estatísticos, como média, coeficiente de variação e tipo de distribuição de cada variável utilizada no estudo, bem como as fontes e as justificativas adotadas. Essa definição busca refletir tanto a variabilidade inerente às propriedades físicas quanto as incertezas de modelagem, através da variável erro de modelo e também da determinação normativa.

8.3.1. Carga permanente (g)

A ação permanente foi modelada como uma variável aleatória Normal, representado a variabilidade associada aos materiais e à execução ao longo da vida útil do sistema estrutural. Adotou-se média igual a $1{,}06\ g_k$ e coeficiente de variação de $0{,}12$, conforme valores apresentados por Santiago (2019) e Beck (2024).

8.3.2. Carga variável (q)

A carga variável foi representada por distribuição Gumbel, com média igual a $0{,}92\ q_k$ e coeficiente de variação de 0,24, conforme observações de ocupação e uso em edificações relatadas por Stucchi *et al*. (2011).

8.3.3. Altura útil da laje (d)

Dimensões geométricas sujeitas à variabilidade construtiva foram modeladas com distribuição Normal, média igual ao valor nominal e coeficiente de variação de 0,125, de acordo com as recomendações do JCSS (2001). A variabilidade geométrica impacta diretamente a resistência calculada, especialmente em elementos sensíveis ao cobrimento e à espessura útil, justificando sua inclusão na modelagem.

8.3.4. Altura da laje (h)

A altura da laje foi modelada como uma variável aleatória de distribuição Normal. Adotou-se média igual à altura nominal especificada e coeficiente de variação definido por $4 + 0{,}006\ h_n$, conforme as recomendações do JCSS (2001). Essa modelagem é relevante, pois variações na altura da laje influenciam diretamente a resistência a punção, tornando necessária sua consideração na análise de confiabilidade.

8.3.5. Resistência ao escoamento do aço (f_{yk})

A resistência ao escoamento da armadura foi representada por distribuição Normal, com média igual a $1{,}12\ f_{yk}$, valor coerente com os desvios típicos entre resistência característica e resistência média encontrados em aços CA-50 e CA-60, de acordo com as recomendações do JCSS (2001). Utilizou-se um coeficiente de variação de 0,05, correspondente à dispersão usual associada ao processo de produção do aço. A variabilidade de f_{yk} impacta diretamente a capacidade resistente das ligações e, portanto, sua inclusão é essencial para uma avaliação da segurança estrutural.

8.3.6. Resistência do concreto (f_{ck})

A resistência do concreto foi tratada como distribuição Normal, seguindo a abordagem usual da literatura. Os parâmetros estatísticos (Tab. 8.2) foram determinados a partir das bases de dados experimentais disponíveis e dos critérios de conversão entre

resistência característica e resistência média, conforme estabelecidas pelas normas analisadas.

Tabela 8.2 – Parâmetros estatísticos para diferentes classes de resistência do concreto

Classe	Distribuição	$\overline{X}$	cv
C25	Normal	$1{,}25f_{ck}$	0,17
C30		$1{,}22f_{ck}$	0,15
C35		$1{,}19f_{ck}$	0,13
C40		$1{,}16f_{ck}$	0,11
C45		$1{,}13f_{ck}$	0,10
C50		$1{,}11f_{ck}$	0,10

Fonte: Santiago (2019)

8.3.7. Erro de modelo da solicitação ($E_{m,S}$)

O erro de modelo associado à solicitação foi incluído para representar as incertezas das simplificações do modelo estrutural. Esse parâmetro foi modelado como uma variável aleatória multiplicativa aplicada às solicitações calculadas, seguindo as recomendações do JCSS (2001) para a consideração de incertezas de modelagem. Adotou-se distribuição Lognormal, com média igual a 1,00 e coeficiente de variação de 0,10, valores que refletem discrepâncias típicas entre as demandas previstas e as observadas em sistemas estruturais. A inclusão desse erro de modelo indica que as incertezas do processo analítico sejam adequadamente consideradas.

8.3.8. Erro de modelo de resistência ($E_{m,R}$)

Na análise de confiabilidade estrutural, o erro de modelo representa a incerteza associada ao modelo físico de previsão de resistência, e foi incluído nesta pesquisa para representar a discrepância entre as resistências experimental e dos modelos normativos. Após a análise estatística entre as normas estudadas, apresentada no Capítulo 7 e sintetizada na Tab. 8.3, verificou-se que essa incerteza é inerente ao fenômeno mecânico avaliado e não depende da norma utilizada, uma vez que todas as normas analisadas (FMCII, NBR23, ACI318 e EC2) se fundamentam no mesmo mecanismo resistente e utilizam expressões vindas de modelos mecânicos equivalentes. Dessa forma, o erro de modelo deve ser único e comum às normas, pois ele descreve o comportamento físico do

sistema e não as escolhas normativas de coeficientes parciais ou valores de resistência de cálculo.

Adicionalmente, a distribuição Gama foi adotada para representar o erro de modelo nas análises de confiabilidade por ter apresentado desempenho estatístico consistente no Capítulo 7, conforme os resultados dos testes de aderência e da avaliação pelos critérios de informação. Embora o melhor ajuste individual tenha variado entre as normas, a distribuição Gama apresentou-se entre as duas melhores classificações para todos os modelos avaliados. Assim, visando à unificação da modelagem probabilística do erro de modelo, optou-se pela adoção da distribuição Gama como representação única dessa variável aleatória.

Tabela 8.3 – Parâmetros estatísticos dos erros de modelo

Modelos	**Distribuição**	$\bar{X}$	cv
FMCII		0,98	0,23
NBR23	Gama	1,17	0,22
ACI318		1,42	0,26
EC2		1,06	0,21

Fonte: Autora

Entre os modelos analisados, a formulação da FIB MC2020 (2024) apresentou o melhor ajuste estatístico aos resultados experimentais. Dessa forma, o erro de modelo associado à FMCII foi considerado o mais representativo do comportamento real, sendo adotado como referência comum na análise de todas as normas, garantindo uma comparação consistente, evitando dupla contagem de incertezas e permitindo que as diferenças nos índices de confiabilidade sejam atribuídas exclusivamente aos fatores normativos.

8.3.9. Síntese dos parâmetros adotados

Todos os parâmetros probabilísticos utilizados são apresentados na Tab. 8.4, contendo distribuição de probabilidade adotada, unidade, média e coeficiente de variação. Os valores determinados foram obtidos a partir de estudos nacionais, como Stucchi *et al*. (2011) e Santiago (2019), além de recomendações internacionais presentes no JCSS (2001). A definição do erro de modelo para a resistência foi baseada no ajuste estatístico entre valores experimentais e teóricos, sendo adotado o modelo da FIB MC2020 (2024).

Tabela 8.4 – Valores estatísticos e característicos da análise de confiabilidade

Variáveis aleatórias	Distribuições de Probabilidade	Unidade	$\overline{X}$	cv
h	Normal	cm	h_n	$4 + 0{,}006$
d	Normal	cm	d_n	0,125
f_{ck}	Normal	MPa	Tab. 8.2	Tab. 8.2
f_{yk}	Normal	MPa	$1{,}12\ f_{yk}$	0,05
g	Normal	kN/m²	$1{,}06\ g_k$	0,12
q	Gumbel	kN/m²	$0{,}92\ q_k$	0,24
$E_{m,S}$	Lognormal	--	1,00	0,10
$E_{m,R}$	Gama	--	0,98	0,23

8.4. Dimensionamento à punção das lajes lisas analisadas

O dimensionamento à punção das lajes lisas constitui uma etapa fundamental desta pesquisa, pois estabelece os valores de referência para comparação entre as diferentes normas avaliadas. A punção é um fenômeno de ruptura frágil, caracterizado pela formação de uma superfície cônica ao redor do pilar, sendo significativamente influenciada pela resistência do concreto, pela geometria da ligação laje–pilar e pelos esforços atuantes. Assim, os critérios normativos apresentam diferentes formulações destinadas a estimar a resistência última à punção.

O dimensionamento foi realizado utilizando os critérios normativos da FIB MC2020 (2024), NBR6118 (2023), ACI318 (2025) e EUROCODE2 (2023). Cada uma dessas normas fornece expressões específicas para o cálculo da resistência à punção, o que resulta em valores distintos de capacidade resistente. A aplicação dessas expressões permite não apenas verificar os requisitos mínimos de segurança, mas também identificar diferenças específicas nas formulações, como abordagem de tamanho efetivo da ligação, consideração da força de compressão no pilar, variabilidade do perímetro crítico e influência das taxas de armadura.

As combinações de ações apresentadas na Tab. 8.5 evidenciam diferenças relevantes entre os critérios normativos, especialmente quanto às ponderações atribuídas às cargas permanentes e variáveis (p_d). Essa etapa é fundamental, pois define o valor de esforço solicitante a ser comparado às resistências de punção.

Tabela 8.5 – Combinações de ações de cálculo adotadas pelas normas avaliadas

NORMA	COMBINAÇÃO
FIB MC2020 (2024)	$p_d = 1{,}35g_k + 1{,}5q_k$
ABNT NBR6118 (2023)	$p_d = 1{,}4g_k + 1{,}4q_k$
ACI318 (2025)	$p_d = \begin{cases} 1{,}4g_k \\ 1{,}2g_k + 1{,}6q_k \end{cases}$
EUROCODE2 (2023)	$p_d = 1{,}35g_k + 1{,}5q_k$

A verificação à punção das lajes lisas foi conduzida a partir das variáveis geométricas, mecânicas e de carregamento previamente definidas, contemplando os vãos, dimensões da ligação laje–pilar, propriedades dos materiais e combinações de ações. Com esses parâmetros, foram determinados o perímetro crítico, as tensões solicitantes e a resistência de cálculo segundo cada norma analisada. Além disso, foram considerados os fatores relacionados à excentricidade, ao diâmetro máximo do agregado e às taxas de armadura, quando aplicáveis. Esses valores serviram de base para a comparação entre as diferentes formulações normativas e para a análise de confiabilidade, na qual o índice de confiabilidade foi obtido para cada laje avaliada. No Apêndice 3 são apresentados os principais parâmetros adotados por cada critério normativo.

8.5. Análise dos resultados

As análises dos resultados foram realizadas considerando e desconsiderando o erro de modelo, de modo a quantificar sua influência nos índices de confiabilidade e na avaliação da segurança estrutural. Os resultados foram discutidos a partir da comparação entre as normas FIB MC2020 (2024), ABNT NBR6118 (2023), ACI318 (2025) e EUROCODE2 (2023), bem como da sensibilidade às variáveis aleatórias e do impacto dos coeficientes adotados em cada formulação. Os valores detalhados dos índices de confiabilidade obtidos nas análises com e sem a consideração do erro de modelo são apresentados no Apêndice 4.

8.5.1. Índice de confiabilidade com erro de modelo

Quando o erro de modelo é incluído na análise, os índices de confiabilidade passam a representar de forma mais realista a diferença entre as resistências experimentais

e as previstas pelas normas. Esse termo adicional tende a reduzir o índice de confiabilidade (β), pois incorpora incertezas relacionadas à precisão das expressões normativas. Nessa pesquisa, foram verificados que o erro de modelo da FMCII, aplicado uniformemente a todas as normas, evidencia de maneira mais clara as diferenças entre suas previsões resistentes, já que o termo probabilístico reflete diretamente a qualidade do ajuste de cada modelo. Dessa forma, a análise com erro de modelo permite identificar quais normas apresentam melhor desempenho na estimativa da resistência à punção.

Para fins de comparação, o índice de confiabilidade foi inicialmente obtido pelo método FORM. Em seguida, com o objetivo de validar esses resultados e verificar a consistência das estimativas, também foram aplicados os métodos MCAIA e SORM. Esse procedimento foi realizado para a norma FIB MC2020 (2024), cujos resultados são apresentados na Fig. 8.2.

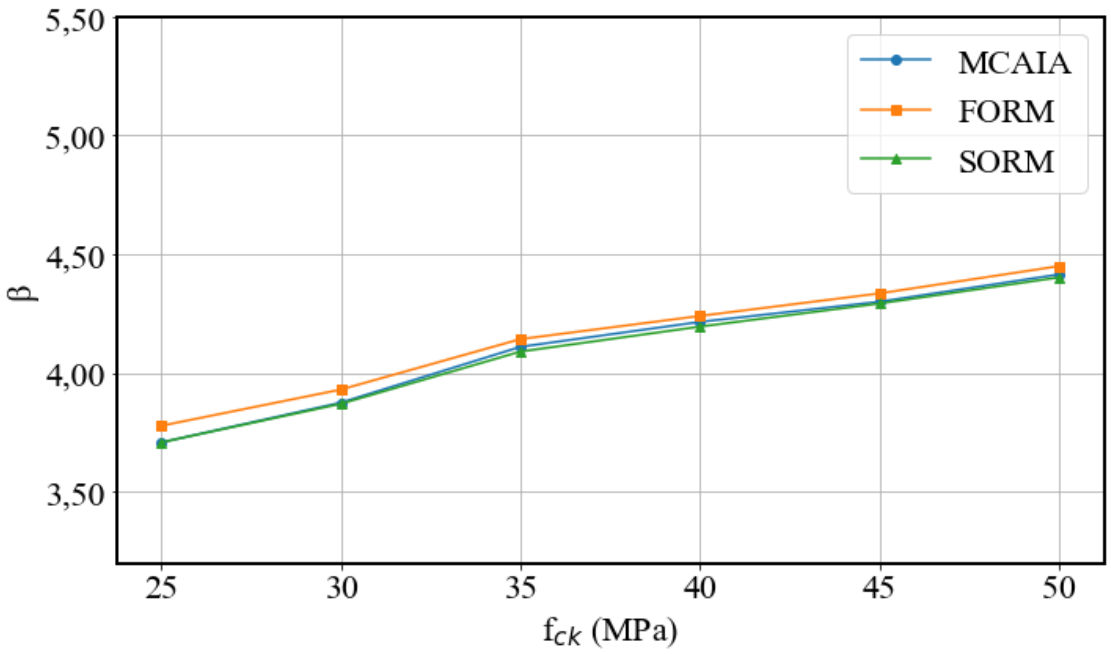


Figura 8.2 – Comparação dos índices de confiabilidade da FMCII obtidos pelos métodos FORM, SORM e MCAIA

Fonte: Autora

O comportamento apresentado na Fig. 8.2 evidencia que os índices de confiabilidade obtidos pelos métodos FORM, SORM e MCAIA apresentam tendência semelhante ao longo dos diferentes valores de resistência característica do concreto. Embora o FORM forneça valores ligeiramente superiores, as curvas mantêm grande

proximidade entre si, indicando boa consistência entre os métodos. Essa convergência reforça a confiabilidade dos resultados e demonstra que a escolha do método não altera significativamente a interpretação geral do desempenho resistente. Assim, considerando a coerência observada e a maior eficiência computacional, optou-se por utilizar o método FORM como base para todas as análises de confiabilidade desenvolvidas neste estudo.

A Figura 8.3 apresenta a variação do índice de confiabilidade (β) em função da resistência característica do concreto (f_{ck}), avaliada para os modelos normativos FMCII, NBR23, ACI318 e EC2. Para cada norma, são ilustrados o valor médio de β, a faixa de dispersão delimitada por β_{min} e β_{max}, além da linha de referência correspondente ao índice alvo $\beta_{\text{alvo}} = 3{,}80$, adotado como critério de segurança para verificação do desempenho estrutural conforme recomendado na norma EUROCODE (2023) para a classe de consequência CC2 e período de referência de 50 anos.

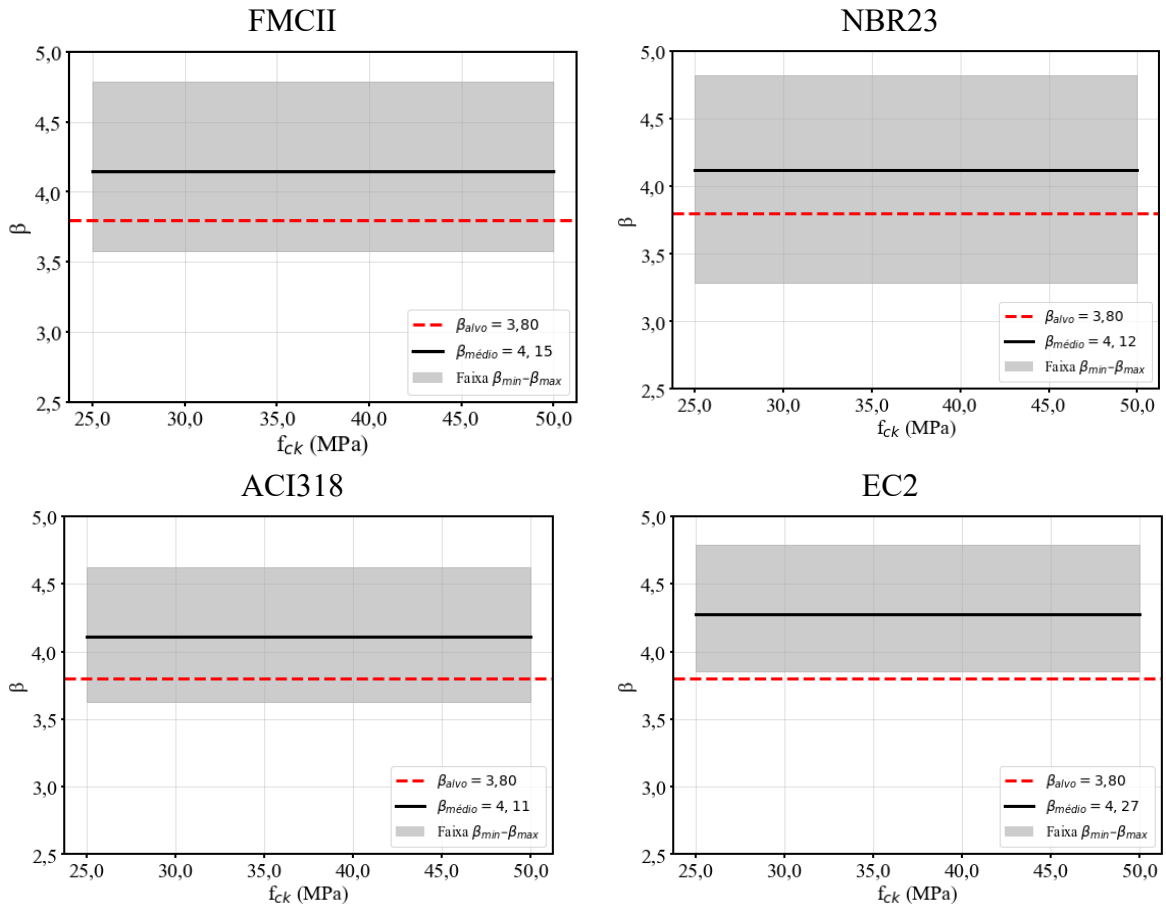


Figura 8.3 – Faixa de variação dos índices de confiabilidade em função da resistência do concreto para as normas analisadas

Fonte: Autora

Cada gráfico da Fig. 8.3 permite comparar o comportamento do índice de confiabilidade dentro do intervalo $25 \leq f_{ck} \leq 50$ MPa, fornecendo uma visão clara da influência da resistência do concreto e das diferenças entre as formulações de punção adotadas por cada critério normativo.

Em todos os casos, o valor médio de β permanece acima do índice alvo $\beta_{\text{alvo}} = 3{,}80$, evidenciando níveis de segurança superiores ao mínimo recomendado. A faixa de variação $\beta_{\text{min}} - \beta_{\text{max}}$ mostra-se igualmente estreita entre as normas, sugerindo baixa sensibilidade às incertezas dos parâmetros de entrada. Comparativamente, as previsões dos códigos FMCII, NBR23 e EC2 tendem a apresentar índices médios ligeiramente superiores ao da ACI318, embora todas as normas mantenham margens adequadas de segurança contra falha por punção.

Observa-se também que a EC2 apresenta os maiores índices de confiabilidade ao longo de toda a faixa de resistência do concreto. Isso ocorre porque, mesmo para pilares internos, a norma adota um fator adicional de segurança ($\beta_e = 1{,}15$), o que eleva a tensão solicitante de cisalhamento considerada no dimensionamento. Como consequência, as verificações tendem a ser mais rigorosas e frequentemente demandam espessuras de laje superiores às exigidas pelas normas. Esse tratamento mais conservador resulta, portanto, nos maiores valores de β identificados na EC2 quando comparado aos códigos FMCII, NBR23 e ACI318.

A Figura 8.4 apresenta a variação do índice de confiabilidade β em função da razão de carregamento δ. Os resultados são comparados entre as formulações de punção dos modelos normativos estudados, permitindo avaliar como a relação entre a carga aplicada e a capacidade resistente influencia a segurança estrutural. Cada gráfico exibe a tendência de β conforme o aumento de δ, evidenciando, para cada norma, o impacto combinado da intensidade do carregamento e da resistência do concreto na confiabilidade frente à falha por punção.

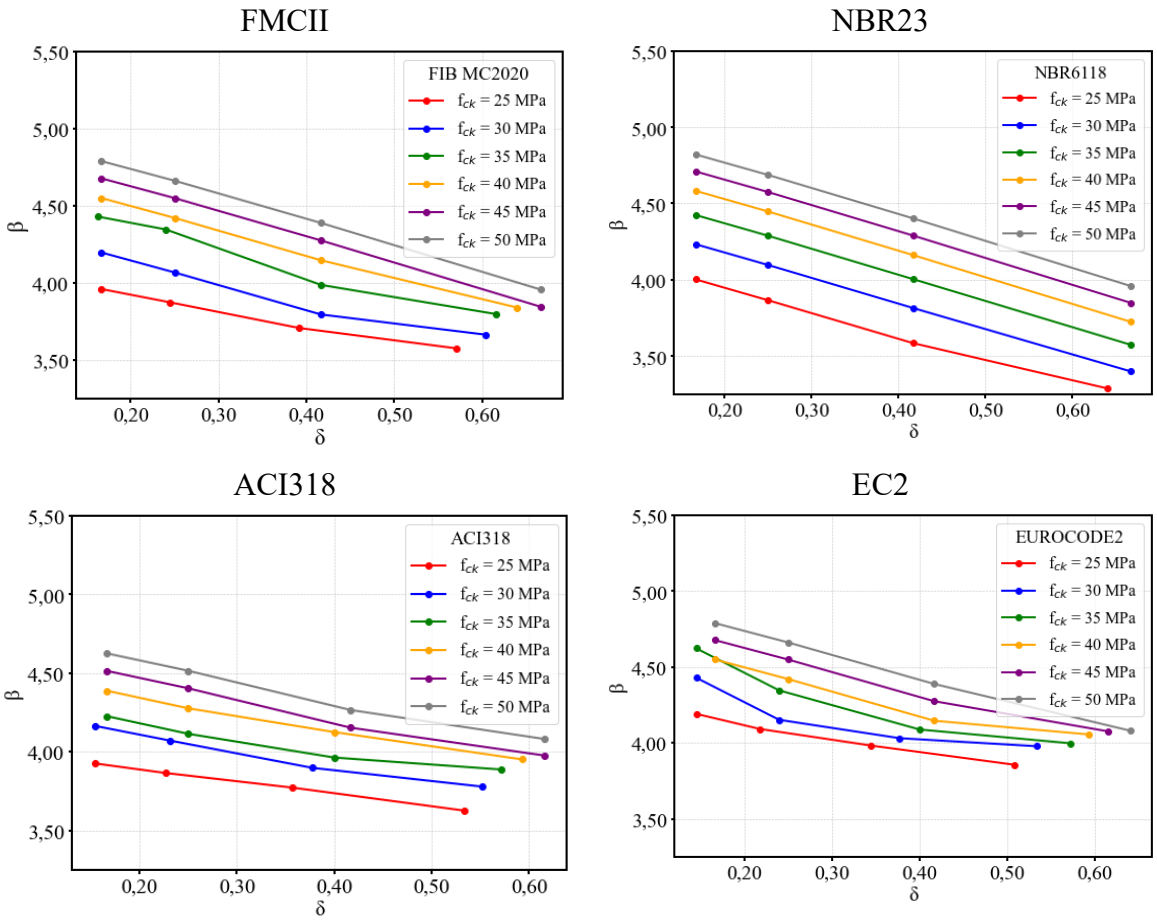


Figura 8.4 – Variação do índice de confiabilidade β em função da razão de carregamento para diferentes valores de f_{ck}

Fonte: Autora

Observa-se que, em todos os modelos normativos, o índice de confiabilidade β decresce à medida que a razão de carregamento δ aumenta, comportamento esperado, já que maiores valores de δ representam situações de solicitação mais próxima da capacidade resistente. Para todos os valores de f_{ck}, valores menores de δ resultam em índices de confiabilidade mais elevados, indicando maior margem de segurança. Nota-se também que concretos com maior resistência característica tendem a apresentar β mais altos, embora a diferença entre os níveis de f_{ck} diminua conforme δ se aproxima dos valores críticos. Entre as normas analisadas, FMCII e EC2 geralmente apresentam os maiores índices de confiabilidade, enquanto a ACI318 tende a fornecer valores mais baixos. De modo geral, a Fig. 8.4 destaca a sensibilidade da confiabilidade estrutural à razão de carregamento, reforçando a importância desse parâmetro na avaliação do risco de punção.

A Figura 8.5 apresenta a variação do índice de confiabilidade β em função da altura da laje h, analisada para as expressões de punção presentes nos modelos normativos FMCII, NBR23, ACI318 e EC2. Cada gráfico exibe o comportamento de β para diferentes valores de altura, evidenciando como modificações no parâmetro geométrico influenciam a resposta probabilística ao mecanismo de punção. As barras representam o valor estimado do índice de confiabilidade, enquanto os intervalos verticais indicam a faixa de variação entre $\beta_{\min}$e $\beta_{\max}$, permitindo avaliar a dispersão dos resultados para cada norma.

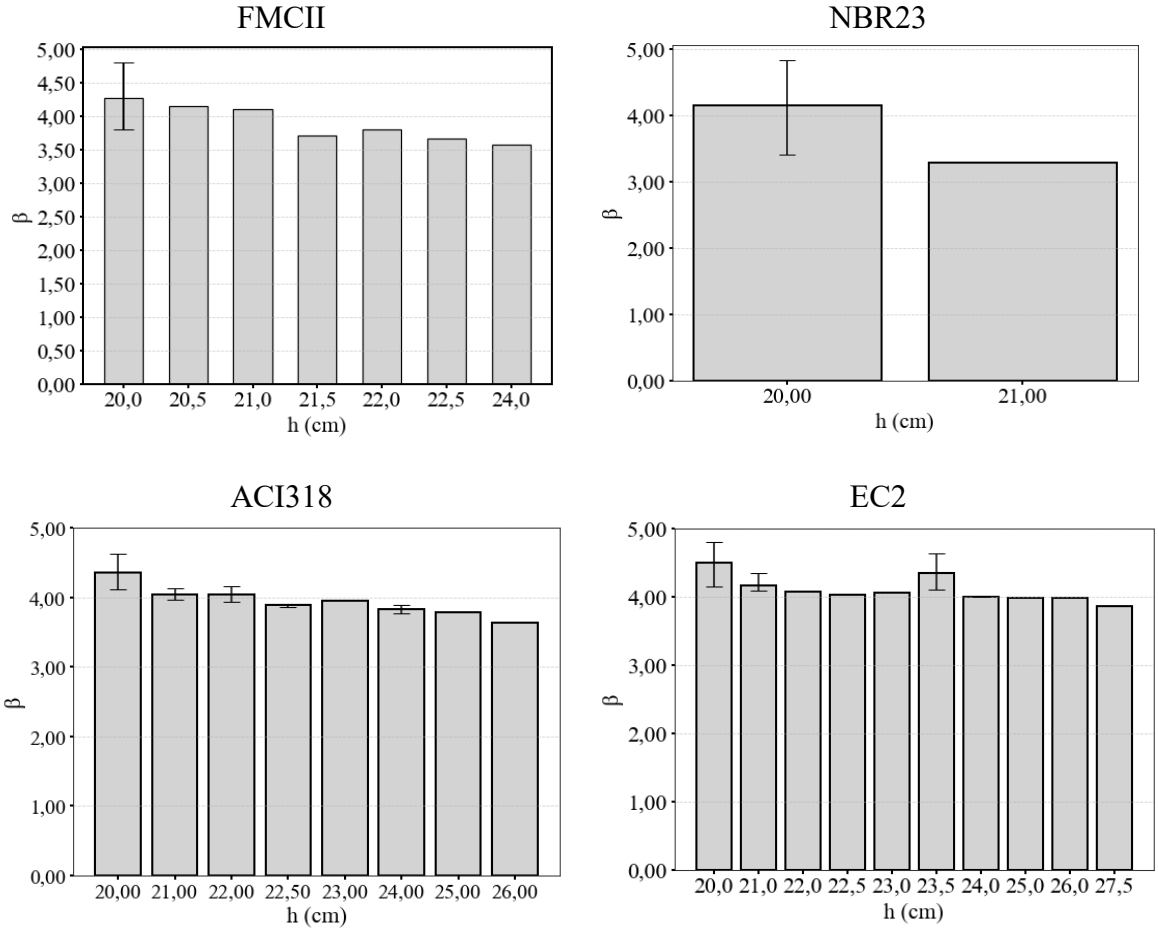


Figura 8.5 – Influência da espessura da laje (h) no índice de confiabilidade β segundo diferentes normas

Fonte: Autora

Para o dimensionamento realizado, adotou-se inicialmente uma espessura mínima de laje igual a 20 cm, como mostrado na Fig. 8.5. Em seguida, para cada norma analisada, avaliou-se a verificação de punção baseada no critério $\tau_{Ed,0.5} \leq \tau_{Rd,c}$. Sempre que a espessura inicial não atendia à verificação de segurança, o valor de h era incrementado progressivamente em passos de 0,5 cm, até que a desigualdade fosse satisfeita. Dessa

forma, cada barra do gráfico representa o índice de confiabilidade β correspondente à menor espessura da laje capaz de atender ao requisito normativo para a situação analisada.

Os intervalos verticais nas barras indicam a faixa de variação do índice de confiabilidade, definida entre $\beta_{\min}$ e $\beta_{\max}$. Assim, a extremidade superior representa o valor máximo observado, enquanto a inferior indica o mínimo obtido, resultante das incertezas das variáveis aleatórias consideradas no modelo probabilístico. Esse intervalo permite visualizar, para cada norma, como essa variabilidade afeta o valor final de β associado à espessura mínima verificada.

É possível observar que em todos os modelos, há uma leve tendência de redução de β conforme h aumenta, indicando influência limitada dessa variável na segurança à punção. Os maiores valores de β são obtidos para $h = 20$ cm, espessura mínima adotada, especialmente nas normas FMCII e NBR23, nas quais também se verifica maior dispersão dos resultados. Já para a ACI318 e EC2, a variação de β é mais suave, com comportamento praticamente constante para espessuras superiores a 21 cm. Esse comportamento ocorre porque, ao se aumentar h além do valor mínimo adotado, o dimensionamento passa a atender à verificação de segurança no limite, resultando em menores margens de segurança e, consequentemente, em valores ligeiramente inferiores de β.

8.5.2. Índice de confiabilidade sem o erro de modelo

Na ausência do erro de modelo, o índice de confiabilidade β passa a ser influenciado exclusivamente pelas variabilidades inerentes às propriedades dos materiais, às ações e às dimensões geométricas. Nessa condição, é possível evidenciar o comportamento próprio de cada norma, já que se desconsidera a diferença entre o modelo teórico e experimental, o que tende a elevar os valores de β e reduzir a distinção entre as normas. Embora essa simplificação seja útil para isolar o efeito das variáveis, ela não representa integralmente o desempenho estrutural real, pois ignora imperfeições sistemáticas associadas às expressões de resistência. Ainda assim, constitui etapa essencial para compreender a contribuição individual das incertezas físicas no comportamento probabilístico.

A Figura 8.6 apresenta os resultados do índice de confiabilidade obtidos para as diferentes normas analisadas nesta pesquisa, agora considerando a análise sem a inclusão do erro de modelo. Nessa configuração, o índice β é determinado diretamente a partir da função estado limite e dos parâmetros probabilísticos adotados, permitindo avaliar

exclusivamente o efeito das propriedades dos materiais e das variáveis geométricas sobre o desempenho estrutural.

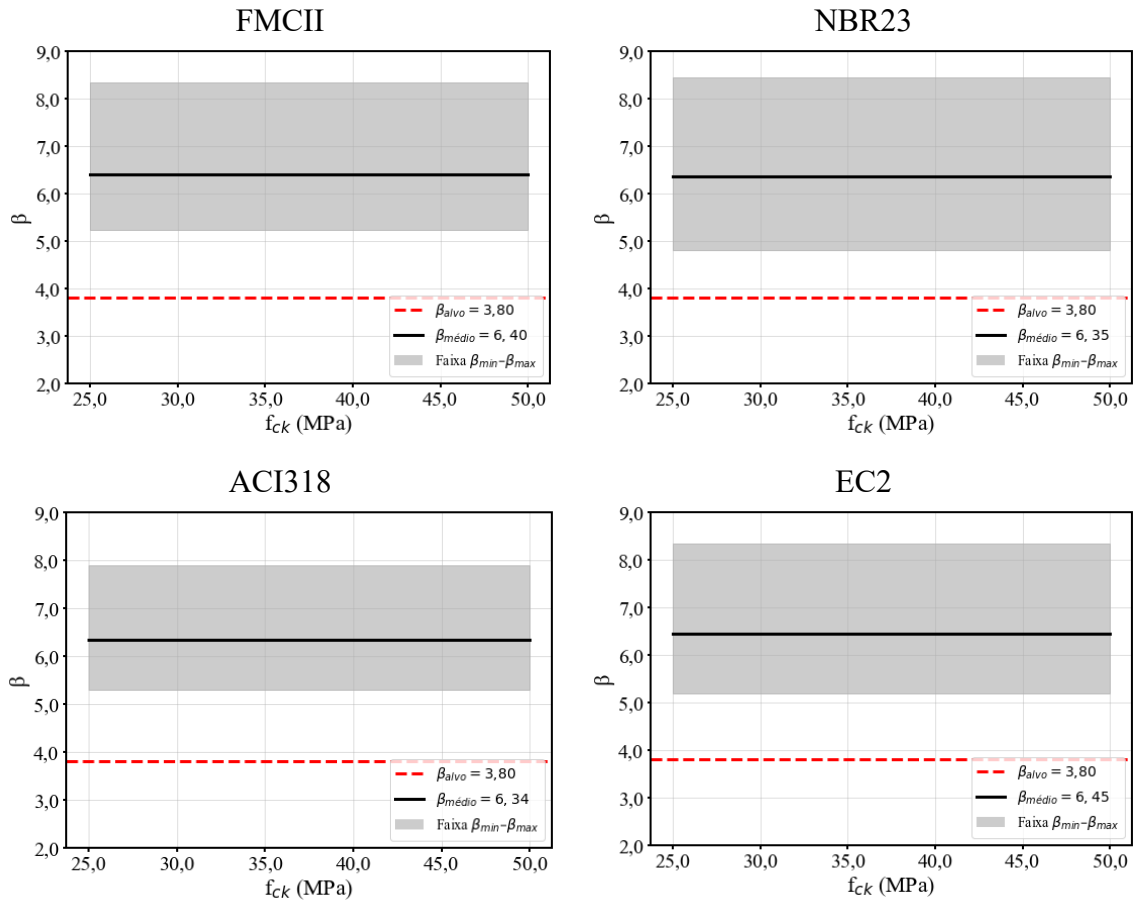


Figura 8.6 – Variação dos índices de confiabilidade em função da resistência do concreto para as normas analisadas, desconsiderando o erro de modelo

Fonte: Autora

Com a extinção do erro de modelo, é observado uma redução significativa na dispersão dos resultados. Como consequência, a faixa de variação entre $\beta_{\min}$ e $\beta_{\max}$ torna-se mais extensa e os valores médios de β tendem a se elevar ligeiramente. Esse ajuste permite visualizar de forma mais clara a influência isolada das variáveis mecânicas e geométricas no índice de confiabilidade, bem como comparar diretamente o comportamento previsto pelas diferentes normas.

A Figura 8.7 apresenta a variação do índice de confiabilidade β em função da razão de carregamento δ para os diferentes modelos normativos analisados, considerando valores de resistência característica do concreto variando entre 25 MPa e 50 MPa. A análise foi conduzida com a função estado limite formulada sem a inclusão do erro de

modelo, de forma que os resultados refletem exclusivamente a interação probabilística entre a resistência disponível e as ações solicitantes. Cada linha corresponde a um valor específico de f_{ck}, permitindo examinar simultaneamente o efeito da variação do carregamento e da resistência do material sobre o desempenho confiável da ligação laje-pilar.

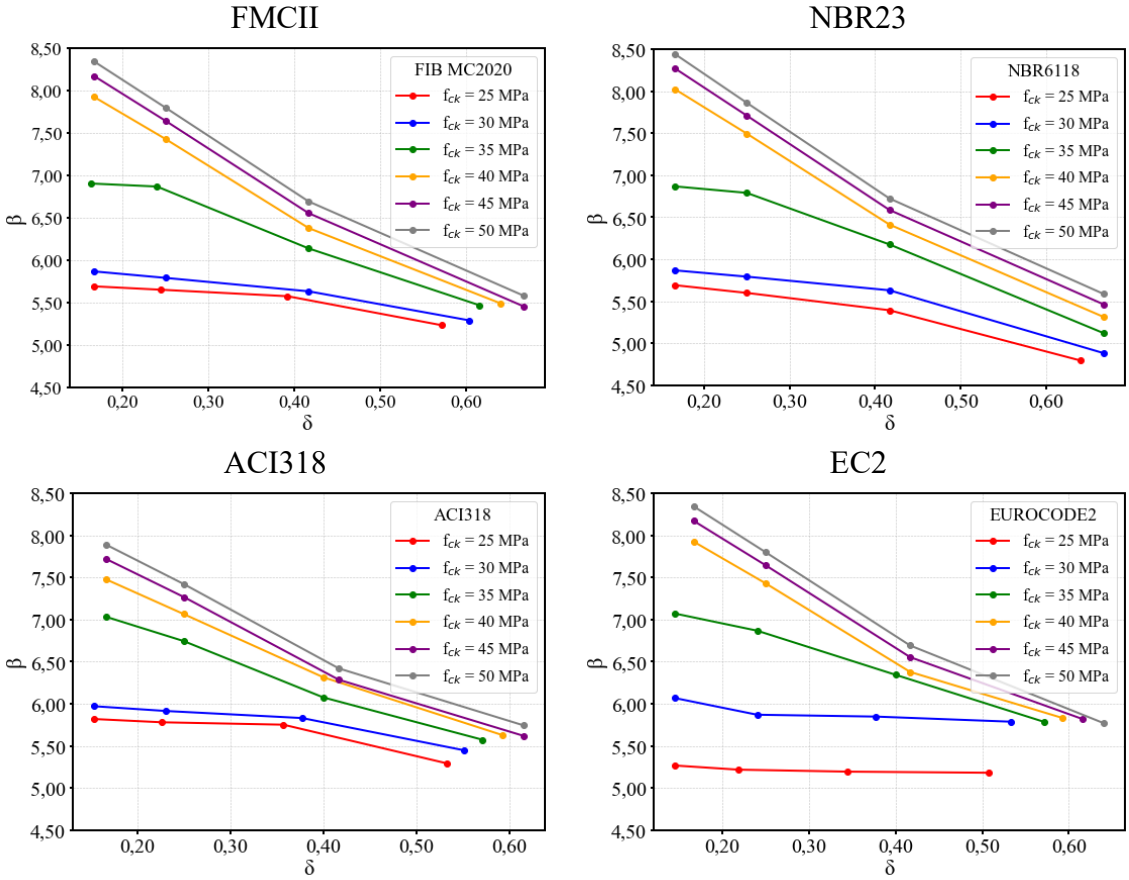


Figura 8.7 – Variação do índice de confiabilidade β em função da razão de carregamento para diferentes valores de f_{ck}, sem considerar o erro de modelo

Fonte: Autora

Observando a Fig. 8.7, para todas as normas, o índice de confiabilidade β diminui progressivamente com o aumento da razão de carregamento δ, evidenciando a influência do aumento das ações solicitantes em relação à capacidade resistente sobre o modo de falha por punção. A eliminação do erro de modelo resulta em valores mais elevados de β em comparação às análises completas, como esperado. Além disso, quanto maior o f_{ck}, maiores são os valores de β obtidos, sobretudo para baixos níveis de carregamento, indicando maior margem de segurança estrutural. Esse comportamento reforça a

influência conjunta da resistência do concreto e da intensidade do carregamento na confiabilidade da ligação laje-pilar.

A Figura 8.8 apresenta a variação do índice de confiabilidade β em função da altura total da laje h, para as quatro normas avaliadas, considerando exclusivamente as incertezas das variáveis (cargas, geometria e resistência do concreto e do aço), sem a inclusão do erro de modelo. Observa-se uma tendência de redução do índice β com o aumento de h, comportamento associado ao critério de dimensionamento adotado, no qual o aumento da espessura da laje conduz o sistema a atender a verificação de segurança no limite, resultando em menores margens de segurança relativas. Os intervalos verticais apresentados nos gráficos representam a faixa de variação entre $\beta_{\min}$ e $\beta_{\max}$.

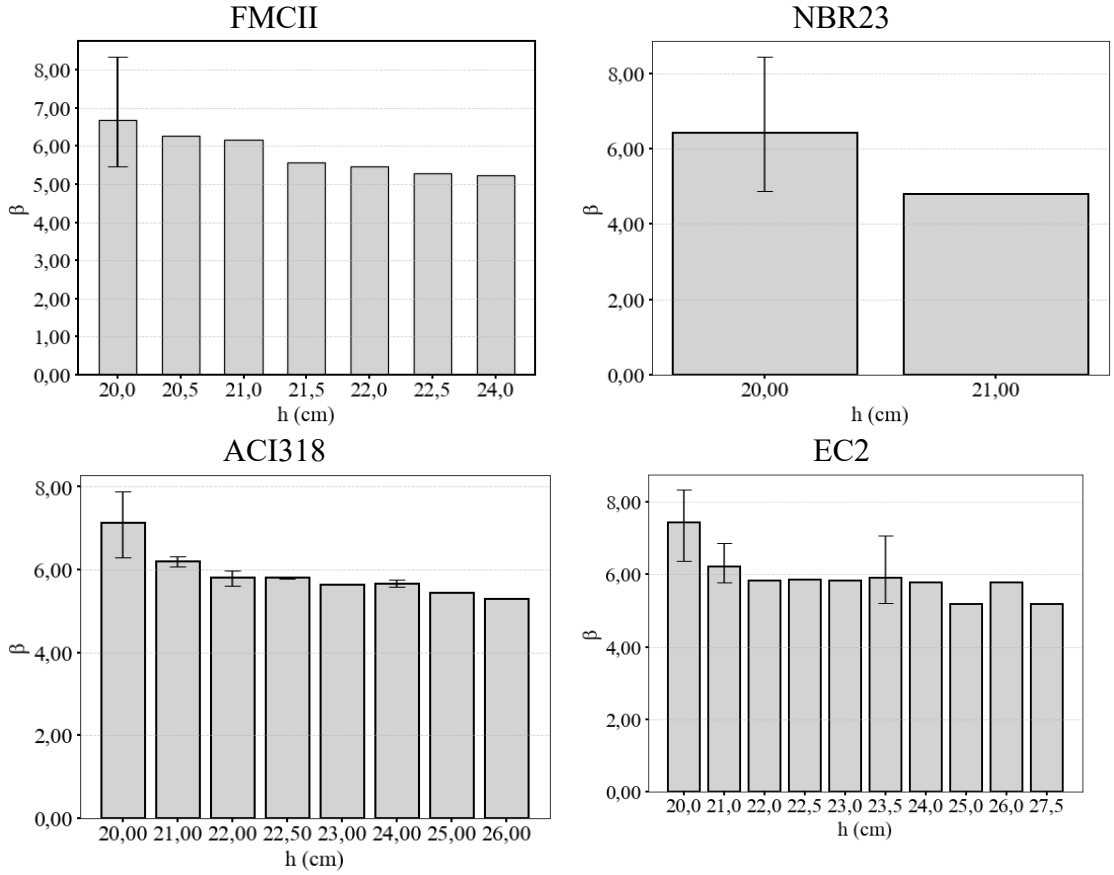


Figura 8.8 – Influência da espessura da laje (h) no índice de confiabilidade β segundo diferentes normas, desconsiderando o erro de modelo

Fonte: Autora

A Figura 8.8 indica que, para as normas FMCII e EC2, os maiores valores de β ocorrem para a menor espessura analisada (h = 20 cm), observando uma redução progressiva de β com o aumento da espessura da laje. Essa diminuição é relativamente

suave ao longo do intervalo considerado, sugerindo influência moderada da espessura sobre a confiabilidade estrutural. A NBR23 apresenta comportamento semelhante, com β mais elevado para h = 20 cm e uma redução acentuada para h = 21 cm, refletindo uma maior influência da norma à variação da geometria. Já a ACI318 mostra a menor variação entre as alturas, revelando um comportamento mais uniforme dos índices β ao longo das espessuras estudadas. Nessa condição sem erro de modelo, as diferenças entre as normas são menos acentuadas, e os índices de confiabilidade permanecem relativamente elevados.

8.5.3. Análise de sensibilidade

A análise de sensibilidade realizada tem como objetivo identificar quais variáveis aleatórias exercem maior influência sobre o índice de confiabilidade das lajes lisas de concreto armado submetidas à punção, permitindo compreender a contribuição relativa de parâmetros geométricos, de materiais, de ações e do erro de modelo na segurança estrutural. Para isso, foram determinados os coeficientes de sensibilidade média $|\alpha|$ a partir das simulações probabilísticas, considerando e desconsiderando o erro de modelo.

Na análise de sensibilidade considerando o erro de modelo, apresentam-se apenas os resultados obtidos a partir do modelo de resistência da FMCII, uma vez que as demais normas analisadas (NBR23, ACI6118 e EC2) apresentaram comportamento equivalente, sem diferenças significativas nos coeficientes de sensibilidade, como mostra a Fig. 8.9.

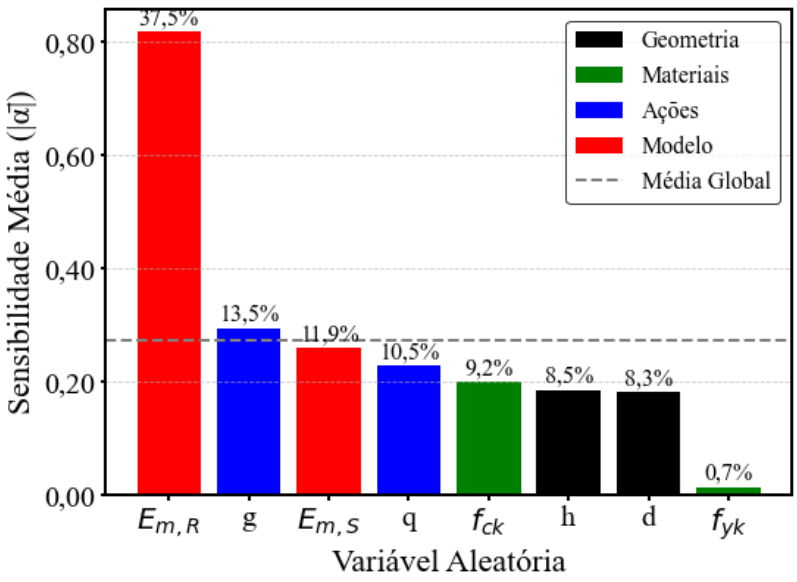


Figura 8.9 – Sensibilidade com erro de modelo

Fonte: Autora

A Figura 8.9 apresenta a análise de sensibilidade das variáveis aleatórias considerando a inclusão do erro de modelo, evidenciando a contribuição relativa de cada variável para a construção do índice de confiabilidade. Observa-se que o erro de modelo ($E_{m,R}$) é o fator dominante, respondendo por aproximadamente 37,5% da sensibilidade média total, superando significativamente as demais variáveis. Em seguida, destacam-se as ações permanentes (g) e variáveis (q), com cerca de 13,5% e 10,5%, respectivamente, indicando a relevância das variáveis associadas ao carregamento. As propriedades dos materiais, representadas principalmente pela resistência à compressão do concreto (f_{ck}), apresentam contribuição intermediária (9,2%), enquanto as variáveis geométricas (h e d) exercem influência relativamente menor, com sensibilidades próximas de 8,5% e 8,3%. A resistência ao escoamento do aço (f_{yk}) mostra impacto praticamente desprezível (0,7%). De modo geral, o gráfico reforça que, na presença do erro de modelo, a confiabilidade da ligação laje-pilar é fortemente governada pelas incertezas associadas à modelagem e às ações, enquanto as incertezas geométricas e de resistência do aço desempenham papel secundário.

Para o caso sem a consideração do erro de modelo, igualmente são apresentados apenas os resultados correspondentes ao modelo da FMCII, já que os valores obtidos com as demais normas foram praticamente idênticos, não alterando a interpretação geral da análise. Sem a presença de $E_{m,R}$, a hierarquia das variáveis muda de forma significativa, como mostrado na Fig. 8.10.

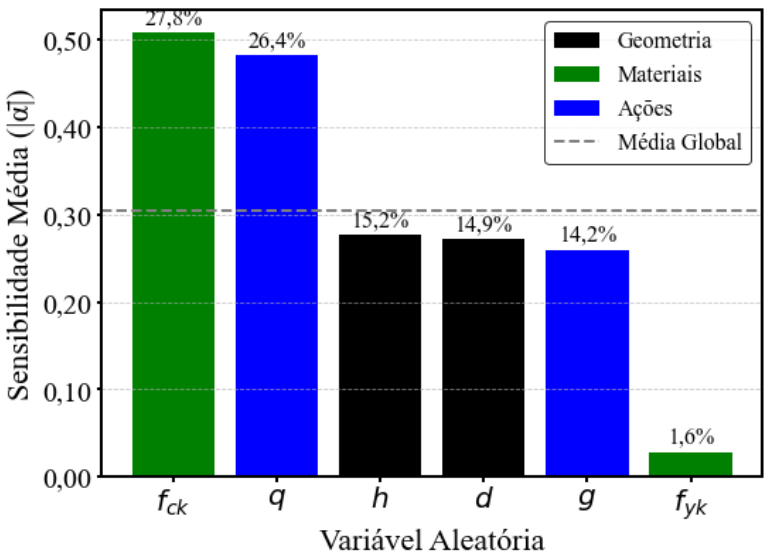


Figura 8.10 – Sensibilidade sem erro de modelo

Fonte: Autora

A Figura 8.10 evidencia uma alteração significativa no padrão de sensibilidade das variáveis aleatórias quando o erro de modelo é desconsiderado. Observa-se que, na ausência do erro de modelo, a resistência à compressão do concreto (f_{ck}) e as ações variáveis (q) passam a ser os fatores predominantes, contribuindo com aproximadamente 27,8% e 26,4%, respectivamente, para a sensibilidade média global. As variáveis geométricas (h e d) assumem importância intermediária, com contribuições de 15,2% e 14,9%, indicando maior influência da geometria no desempenho estrutural quando a incerteza de modelagem não é considerada. Em contrapartida, a ação permanente (g) apresenta contribuição mais moderada (14,2%), enquanto a resistência ao escoamento do aço (f_{yk}) permanece com impacto pouco significativo (1,6%). Dessa forma, a comparação entre as Figs. 8.9 e 8.10 mostra que a inclusão do erro de modelo concentra a sensibilidade na etapa de modelagem, ao passo que sua exclusão redistribui a influência entre as variáveis aleatórias do sistema, destacando principalmente as ações e a resistência do concreto como os principais condicionantes da confiabilidade da ligação laje-pilar.

A análise de sensibilidade evidencia de forma clara a importância do erro de modelo na avaliação da confiabilidade estrutural. Conforme observado, a inclusão dessa incerteza concentra uma parcela significativa da sensibilidade total no termo associado à modelagem, indicando que imperfeições na representação do fenômeno físico e nas formulações normativas exercem influência dominante sobre o índice de confiabilidade. Em contraste, quando o erro de modelo é desconsiderado, a sensibilidade se redistribui entre as variáveis aleatórias do sistema, como ações, propriedades dos materiais e parâmetros geométricos, podendo levar a uma superestimação da confiabilidade caso a incerteza de modelagem não seja adequadamente incorporada. Assim, os resultados reforçam que a consideração explícita do erro de modelo é essencial para uma avaliação mais realista e consistente da segurança estrutural, sobretudo em mecanismos frágeis de ruptura, como a punção em ligações laje-pilar.

8.5.4. Comparação dos resultados

A Figura 8.11 apresenta a comparação dos valores dos índices de confiabilidade previstos pelas quatro normas analisadas (FMCII, NBR23, ACI318 e EC2) para diferentes valores de resistência característica do concreto f_{ck}, considerando a inclusão do erro de modelo. Observa-se que, para todas as normas, os valores de resistência aumentam de forma coerente com o crescimento do f_{ck}, como esperado do ponto de vista mecânico. Entretanto, cada documento normativo apresenta ligeiras variações nos valores

estimados, refletindo diferenças nos coeficientes parciais, expressões de cálculo e parâmetros adotados em suas formulações de punção.

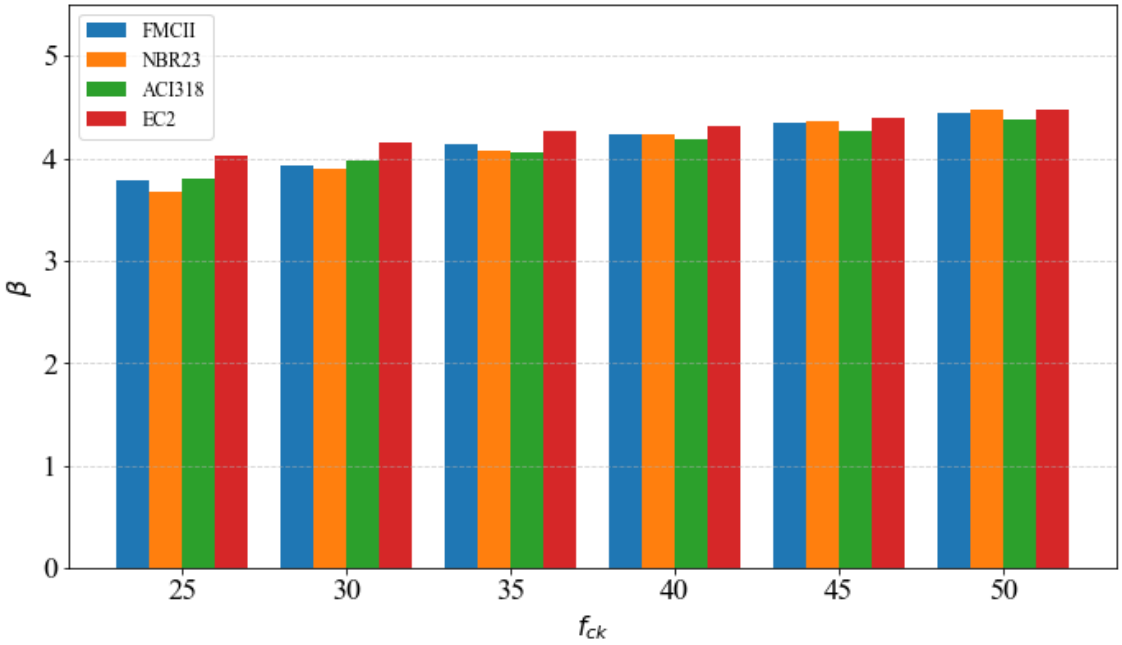


Figura 8.11 – Índice de confiabilidade em função da resistência à compressão do concreto para as normas analisadas

Fonte: Autora

A Figura 8.11 evidencia que o índice de confiabilidade (β) apresenta uma tendência crescente com o aumento da resistência à compressão do concreto (f_{ck}) para todas as normas analisadas, indicando melhora progressiva do nível de segurança estrutural à medida que o concreto se torna mais resistente. Observa-se que, para valores mais baixos de f_{ck}, os índices de confiabilidade são menores, aumentando de forma aproximadamente linear ao longo do intervalo considerado. Dessa forma, as diferenças entre os resultados permanecem relativamente pequenas, sugerindo níveis de confiabilidade semelhantes e variações associadas aos critérios de dimensionamento e aos coeficientes de segurança adotados em cada norma.

Complementarmente, ao se examinar o comportamento relativo das normas ao longo do intervalo de resistência analisado, verifica-se que o EC2 mantém, de forma consistente, os maiores valores do índice de confiabilidade β, enquanto o FMCII apresenta resultados muito próximos, com diferenças pouco expressivas entre ambos. Em contraste, a ACI318 mostra os menores valores de β, já a NBR23 ocupa uma posição

intermediária entre a norma americana e os documentos europeus. Essa hierarquização permanece praticamente constante com o aumento de f_{ck}, reforçando que as diferenças observadas decorrem principalmente das abordagens normativas adotadas, e não de alterações significativas no padrão de resposta com a variação da resistência do concreto.

Considerando os resultados apresentados neste capítulo, é evidenciado que a confiabilidade estrutural de lajes lisas submetidas à punção é fortemente influenciada pelas incertezas associadas à modelagem da resistência, às ações atuantes e, em menor grau, às variáveis geométricas e de material. A comparação entre as análises com e sem a inclusão do erro de modelo demonstrou que sua consideração é fundamental para uma avaliação realista da segurança estrutural, sobretudo em mecanismos de ruptura frágil, como a punção. Embora todas as normas analisadas apresentem níveis de confiabilidade superiores ao índice alvo adotado, existem diferenças entre seus resultados, refletindo distintas abordagens normativas e níveis de conservadorismo. A análise de sensibilidade reforçou a importância do erro de modelo como variável dominante, destacando a necessidade de sua incorporação em estudos probabilísticos. Assim, este capítulo fornece uma base consistente para a compreensão do desempenho à punção sob uma perspectiva probabilística, contribuindo para o avanço de metologias de dimensionamento fundamentadas na confiabilidade estrutural.

9. CONCLUSÃO

Esta Tese de Doutorado avaliou a influência da variável aleatória erro de modelo da resistência à punção na confiabilidade estrutural de lajes lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento, com base nos modelos normativos da ABNT NBR6118 (2014 e 2023), ACI318 (2025), EUROCODE2 (2023) e FIB MC2020 (2024). A análise foi fundamentada em um banco de dados composto por 288 resultados experimentais, garantindo representatividade estatística das conclusões obtidas.

A comparação entre resistências experimentais e previstas evidenciou diferenças relevantes entre os modelos normativos. As médias dos erros de modelo variaram em torno da unidade para a FMCII, NBR14 e EC2, com valores entre 0,98 e 1,06, indicando boa aderência média aos resultados experimentais. Entretanto, os modelos da NBR23, FMCI e ACI318 apresentaram afastamento significativo da unidade, com médias superiores a 1,15, chegando a 1,42, o que evidencia maior conservadorismo e tendência sistemática de subestimação da resistência. A análise por regressão linear revelou esses resultados, evidenciando melhor aderência do modelo FMCII aos resultados experimentais, enquanto a ACI318 apresentou os maiores desvios médios e maior conservadorismo, seguida pela NBR23 e pelo EC2.

A caracterização estatística do erro de modelo demonstrou elevada variabilidade, confirmando a relevância dessa incerteza na avaliação da segurança estrutural. As distribuições de probabilidade ajustadas apresentaram bom desempenho estatístico, com validação consistente quando comparadas a estudos consolidados da literatura, apresentando diferenças inferiores a 8% em termos de valores médios, o que reforça a confiabilidade da variável aleatória definida.

A distribuição Gama foi adotada como representação probabilística do erro de modelo por apresentar melhor desempenho segundo os testes de aderência e critérios de informação, assegurando uniformidade na modelagem da incerteza e maior robustez às análises de confiabilidade realizadas.

Diante dos resultados obtidos na etapa de avaliação estatística do erro de modelo, definiu-se que a NBR14 não seria considerada nas análises de confiabilidade estrutural. Essa norma foi empregada exclusivamente como referência comparativa em relação à versão mais recente, a NBR23, a qual representa o estado atual da regulamentação brasileira. De forma análoga, verificou-se que, no caso da FMCI apresentou desempenho inferior e maior dispersão estatística quando comparados ao modelo FMCII. Em razão

desse comportamento menos satisfatório, o modelo FMCI também foi excluído da etapa de análise de confiabilidade, concentrando-se as avaliações nos modelos que demonstraram melhor aderência e maior consistência estatística.

As análises de confiabilidade estrutural, realizadas para 96 casos representativos de lajes lisas, predominantemente pelo método FORM e validadas por meio dos métodos SORM e MCAIA, evidenciaram que a inclusão do erro de modelo na função estado limite provoca redução significativa dos índices de confiabilidade. De forma geral, observaram-se reduções médias do índice β de 15% a 35%, dependendo do modelo normativo adotado e do nível de resistência do concreto. A análise de sensibilidade evidenciou que a inclusão do erro de modelo altera de forma substancial o mecanismo de controle da confiabilidade estrutural, fazendo com que a incerteza associada à modelagem da resistência se torne o principal fator condicionante do índice de confiabilidade, em detrimento das variáveis de ações, materiais e geometria. Esse resultado explica a redução observada nos valores de β e reforça a necessidade de incorporar explicitamente o erro de modelo em avaliações probabilísticas de mecanismos frágeis, como a punção.

A análise da influência da resistência característica do concreto evidenciou tendência consistente de aumento do índice de confiabilidade com o incremento de f_{ck} para todas as normas analisadas. Apesar desse aumento progressivo, as diferenças relativas entre os modelos normativos mantiveram-se praticamente constantes, indicando que a variação de f_{ck} não altera de forma significativa a hierarquização dos níveis de confiabilidade. Nesse contexto, o EC2 apresentou sistematicamente os maiores valores de β, seguido pela FMCII, enquanto a ACI318 resultou nos menores índices de confiabilidade, com a NBR23 ocupando uma posição intermediária. Esses resultados reforçam que as diferenças observadas decorrem predominantemente das abordagens normativas e dos coeficientes de segurança adotados, e não da forma como os modelos incorporam a resistência do concreto em suas formulações.

Apesar dos avanços apresentados, esta pesquisa apresenta limitações que devem ser consideradas na interpretação dos resultados. O banco de dados utilizado contempla exclusivamente lajes lisas sem armadura de cisalhamento e predominantemente sob condições de carregamento centrado, não abrangendo situações com elevados momentos transferidos ou a presença de armadura de punção, tampouco outros sistemas estruturais, geometrias mais complexas ou efeitos construtivos específicos.

De modo geral, os resultados desta pesquisa evidenciam que a incorporação explícita do erro de modelo é um aspecto fundamental para a obtenção de índices de

confiabilidade estrutural coerentes com o comportamental real de lajes lisas submetidas à punção. A omissão dessa incerteza pode conduzir a superestimações da segurança estrutural, especialmente em mecanismos frágeis, reforçando a importância de análises baseadas na confiabilidade estrutural que considerem de forma explícita as limitações inerentes aos modelos normativos de resistência.

9.1. Principais contribuições desta Tese

Entre as principais contribuições desta Tese, destacam-se:

a) A caracterização estatística do erro de modelo da resistência à punção com base em um amplo e representativo banco de dados experimental.

b) A avaliação comparativa do desempenho, da dispersão e do grau de conservadorismo dos principais modelos normativos internacionais atualmente em vigor.

c) A quantificação objetiva do impacto do erro de modelo nos índices de confiabilidade estrutural de lajes lisas.

d) A identificação do erro de modelo como a variável dominante nas análises de confiabilidade estrutural, evidenciando sua relevância para avaliações de segurança estrutural mais realistas e consistentes.

9.2. Sugestões de trabalhos futuros

Com base nos resultados e nas limitações identificadas nesta pesquisa, sugerem-se como trabalhos futuros:

a) Ampliar o banco de dados experimental, incluindo lajes com armadura de cisalhamento, diferentes condições de excentricidade, carregamentos combinados e diferentes condições de apoio.

b) Investigar a variabilidade do erro de modelo em função de subgrupos do banco de dados experimental, considerando parâmetros como taxa de armadura de flexão, relação vão/espessura, tipo de carregamento e posição do pilar, de modo a avaliar a necessidade de erros de modelo condicionais em substituição a um único modelo global.

c) Aplicar métodos de confiabilidade baseados em superfícies de resposta ou metamodelos, como Redes Neurais, visando reduzir o custo computacional das análises probabilísticas com inclusão explícita do erro de modelo.

d) Incorporar modelos mecânicos avançados para a resistência à punção, tais como abordagens baseadas em *Generalized Linear Model* (GLM) ou em Métodos dos Elementos Finitos não lineares tridimensionais, integrando esses modelos às análises de confiabilidade estrutural para representação dos mecanismos físicos da ruptura.

e) Estudar a evolução do erro de modelo ao longo do tempo, considerando efeitos de deterioração, fluência e retração do concreto, com vistas à avaliação da confiabilidade estrutural ao longo da vida útil da estrutura.

f) Investigar o impacto da escolha da distribuição de probabilidade do erro de modelo em análises de risco, avaliando não apenas o índice de confiabilidade, mas também probabilidades de falha e consequências associadas.

g) Expandir a abordagem probabilística para estruturas reais ou sistemas estruturais completos, avaliando a propagação do erro de modelo da punção em análises de confiabilidade global e de robustez estrutural.

h) Investigar a aplicabilidade dos resultados obtidos a diferentes contextos normativos e níveis de segurança, considerando classes de consequência e exigências diferenciadas de confiabilidade estrutural.

i) Aplicar a metodologia desenvolvida a outros mecanismos frágeis de ruptura em estruturas de concreto, assim como a calibração de coeficientes parciais de segurança a partir de uma abordagem baseada na confiabilidade, contribuindo para o aprimoramento das formulações normativas.

REFERÊNCIAS

ACI Committee 440, Guide for the design and construction of concrete reinforced with FRP bars**, ACI 440.1R-15,** A report by ACI committee 440, Farmington Hills, American Concrete Institute, Michigan, USA, 2015.

ABOOD, E. A; ABDALLAH, M. H; ALSAADI, M.; IMRAN, H.; BERNARDO, L. F. A.; DE DOMENICO, D.; HENEDY, S. N. Machine Learning-Based Prediction Models for Punching Shear Strength of Fiber-Reinforced Polymer Reinforced Concrete Slabs Using a Gradient-Boosted Regression Tree. **Materials**, vol. 17, 2024.

AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION. **AISC 360–16**: Specification for Structural Steel Buildings, Chicago, 2016.

ALBUQUERQUE, C. S. **Estudo comparativo de métodos computacionais de avaliação de confiabilidade estrutural**. Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Universidade Federal do Rio Grande - FURG, Rio Grande - RS, 2021.

ALBUQUERQUE, C. S.; PERREIRA, T. P.; MATTOS, V. L. D. Análise inferencial das distribuições de probabilidade que melhor se ajustam aos modelos de bielas e tirantes de vigas-paredes. **XXIV Encontro Nacional de Modelagem Computacional e XII Encontro de Ciência e Tecnologia de Materiais**, 2021.

ALBUQUERQUE, C. S.; REAL, M. V. Estudo comparativo de métodos de confiabilidade estrutural aplicados a estruturas de concreto, **62º Congresso Brasileiro do concreto**, 2020.

ALEXANDER, S. D. B.; SIMMONDS, S. H. Tests of column-flat plate connections. **ACI Structural Journal.** Vol. 89(5), p. 495-502, 1992.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE COMITTEE. **ACI 318-22**: Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary, 2022.

ANG, A. H.-S.; CORNELL, C. A. Reliability bases of structural safety and design. **Journal of Structural Division**, v.100, n.9, p.1755–1769, 1974.

ANG, A. H-S.; TANG, W. H. **Probability Concepts in Engineering: Emphasis on Applications to Civil and Environmental Engineering.** – 2. ed. – John Wiley & Sons, 2007.

ARAÚJO, J. M. **Curso de Concreto Armado. 4 vols**. Rio Grande, Editora Dunas, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 6118:** Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro: ABNT, 2023.

Ayub, M. P.E., S.E. **Investigation of the October 30, 2003 Fatal Parking Garage Collapse at the Tropicana Casino Resort, Atlantic City, NJ. U.S**. Department of Labor, Occupational Safety and Health Administration, Office of Engineering Services, Directorate of Construction, 2004.

BANTHIA, N.; AL-ASALY M.; MA, S. Behavior of concrete slabs reinforced with fiber-reinforced plastic grid. **Journal of Materials in Civil Engineering**. Vol. 7(4), p.252-25, 1995.

BASE G. D. Some tests on the punching shear strength of reinforced concrete slabs. Technical Report No. 321, **Cement and Concrete Association**, 1959.

BECK, A. T. **Confiabilidade e Segurança das Estruturas** – 2. ed. – Rio de Janeiro: Orsa maggiore, 2024.

BECK, A. T.; OLIVEIRA, W. L. A., DE NARDIM, S; EL DEBS, A. L. H. C. Reliability-based Evaluation of Desing Code Provisions for Circular Concrete-Filled Steel Columns. **Engineering Structures**, Vol. 31, n.10, p. 2299-2308, 2009.

BILLINTON, R; ALLAN, R. N. **Reliability Evaluation of Engineering Systems: concepts and techniques**. 2 ed. New York: Plenum Press, 1992.

BIRKLE G. **Punching of flat slabs: The influence of slab thickness and stud layout**. Ph.D. thesis, University of Calgary, Cananda, 2004.

BORZOVIČ, V.; GAJDOŠOVÁ, K.; HALVONIK, J.; GREGUŠOVÁ, N. Partial factor for the shear resistance model in the 2nd generation of Eurocode 2 for GFRP reinforced concrete members. **Engineering Structures**, v. 285, 2023.

BREITUNG, K. Asymptotic approximations for multinormal integrals. **Journal of Engineering Mechanics**, vol. 110, 357–366, 1984.

BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. **Estatística Básica** – 6. ed. – São Paulo: Saraiva, 2010.

CANADIAN STANDARD ASSOCIATION, **CSA S806-12, Design and construction of building components with fibre reinforced polymers**. Canadian Standards Association, Toronto, Canada, 2012.

CARVALHO, M. **Tipos de lajes**. CARLUC, 2022. Disponível em: < https://carluc.com.br/projeto-estrutural/tipos-de-lajes/>

CHOI, S. K.; GRANDHI, R. V.; CANFIELD, R. A. **Reliability-based Structural Design.** Springer-Verlag London Limited, 2007.

CLÉMENT, T.; RAMOS, A. P.; RUIZ, M. F.; MUTTONI, A. Influence of prestressing on the punching strength of post-tensioned slabs. **Engineering Structures**, Elsevier, v.72, p.56-69, 2014.

COSTA, V. C. M.; OLIVEIRA, D. C.; GOMES, R. B.; GUIMARÃES, G. N. Punção em lajes cogumelo de concreto armado - retangularidade dos pilares. **REEC – Revista Eletrônica de Engenharia Civil**, v. 5, n. 1, p. 36 – 46, 2012.

CRISWELL, M. E. Static and dynamic response of reinforced concrete slab-column connections. **ACI Special Publication.** Vol. 42, p. 721-746, 1974.

DITLEVSEN, O; MADSEN, H. O. **Structural Reliability Methods**. John iley & Sons, 2007.

EL-REEDY, M.A. **Reinforced concrete structural reliability**. CRC Press, 2013.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 1990: Eurocode** — Basis of structural and geotechnical design, 2023.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 1992-1-1: Eurocode2** - Design of concrete structural, 2023.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 1992-1-1: Eurocode2** - Design of concrete structural, 2004.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN1994-1-1: Eurocode 4** - Design of Composite Steel and Concrete Structures - Part. 1–1: General Rules and Rules for Buildings, 2004.

ELSTNER, R. C.; HOGNESTAD, E. Shearing strength of reinforced concrete slabs. **In Journal Proceedings**. Vol. 53(7), p. 29-58, 1956.

FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON (FIB). **FIB Model Code** for Concrete Structures 2010. Berlin, Germany: Ernst & Sohn; 2013.

FERREIRA, E. G. **Análise de confiabilidade estrutural via método SORM DG**. 2015. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Ouro Preto, Minas Gerais, 2015.

FÜRST, A. **Erro de modelo e confiabilidade estrutural de vigas de concreto armado**. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis - SC, 2020.

GALDINO, B. C. P. **Análise Numérica do Comportamento Pós Puncionamento e Colapso Progressivo em Edifícios em Laje Lisa de Concreto Armado**. Dissertação de mestrado, Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. Brasília, 2022.

GARDNER, N. J. Relationship of the punching shear capacity of reinforced concrete slabs with concrete strength. **ACI Structural Journal**. Vol. 87(1), p. 66-71, 1990.

GHANNOUM C. M. **Effect of high-strength concrete on the performance of slab-column specimens**. M.S. thesis. Department of Civil Engineering and Applied Mechanics, McGill University, 1998.

GOMES, W. J. S.; BECK, A. T. A conservatism index based on structural reliability and model errors. **Reliability Engineering and System Safety**, v.209, 2021.

GRAZIANO, F.P. **Projeto e Execução de Estruturas de Concreto Armado**. 1 ed., O Nome da Rosa,2005.

GUANDALINI S. **Poinçonnement symétrique des dalles**. Ph.D. thesis, École Polytechnique Féderale de Lausanne, Switzerland, 2005.

HALVONIK, J.; KALICKÁ, J.; MAJTÁNOVA, L.; MINÁROVA, M. Safety factor for the punching shear resistance model in 2nd Generation of Eurocode 2. **Journal of Building Engineering**, Vol.46, 2022.

HALDAR, A. **Recent developments in reliability-based civil engineering**. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2006.

HALDAR, A.; MAHADEVAN, S. **Reliability assessment using stochastic finite element analysis**. John Wiley & Sons, 2000.

HASOFER, A. M.; LIND, N. C. Exact and invariant second-moment code format. **Journal of the engineering mechanics division**, p. 111-121, 1974.

HAWKINS, N. M.; FALLSEN, H. B.; HINOJOSA, R. C. Influence of column rectangularity on the behavior of flat plates structures. **ACI Special Publication**; Vol. 30, p. 127-146, 1971.

JOINT COMMITTEE ON STRUCTURAL SAFETY**, JCSS**: Probabilistic Model Code, 2001.

JUSTINO, L. B. **Quantificação de incertezas de modelagem em modelos estruturais dinâmicos**. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Itajubá, Minas Gerais, 2018.
KINNUNEN, S.; NYLANDER, H. Punching of concrete slabs without shear reinforcement. **Royal Institute of Technology, Transactions,** No. 158, Stockholm, Sweden, 1960.

KINAS, P. G.; ANDRADE, H. A. **Introdução à análise bayesiana (com R)**. 2 ed. Canoas: Consultor Editorial, 2020. 240p. Ciência Moderna, 2020

KING, S.; DELATTE, N. J. Collapse of 2000 Commonwealth Avenue: Punching Shear Case Study. J**ournal of Performance of Constructed Facilities**, v. 18, n. 1, p. 54-61, 2004.

KIUREGHIAN, A. D.; DITLEVSEN, O. Aleatory or epistemic? Does it matter? **Structural Safety**, v. 31, ed. 2, p.105–112, 2009.

KROETZ, H. M. **Otimização Estrutural sob incertezas: Métodos e Aplicações**. Tese de Doutorado, São Carlos, SP. Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2019.

LADNER M. Einfluß der Maßstabgröße bei Durchstanzversuchen. **Material und Technik**. p. 60-68, 1973.

LEYENDECKER, E. V.; FATTAL, S. G. **Investigation of the Skyline Plaza Collapse in Fairfax County**, Virginia (NBSIR 73-222). Gaithersburg: NBS, 1977.

LEW, H. S.; CARINO, N. J.; FATTAL, S. G.; BATTS, M. E. **Investigation of construction failure at Harbour Cay Condominium**, Cocoa Beach, Florida (NBS BSS 145). Building Science Series 145, National Institute of Standards and Technology (NIST), Gaithersburg, MD, 1982

LI, K. K. L. **Influence of size punching shear strength of concrete slabs**. M.S. thesis, McGill University, Canadá, 2000.

LI, Z.; LIU, X.; KOU, D.; HU, Y.; ZHANG, Q.; YUAN, Q. Probabilistic Models for the Shear Strength of RC Deep Beams. **Applied Sciences**, v.13, 2023.

LIBERATI, E. A. P.; MARQUES, M. G.; TRAUTWEIN, L. M. Erro de modelo de lajes lisas de concreto armado submetidas a carregamento centrado. **Concreto & Construções**, v.107, p.90 - 96, 2022.

LIU, P. L.; KIUREGHIAN, A. D. **Optimization algorithms for structural reliability analysis**. Technical Report UCB/SESM 86/09, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, 1986.

LOVROVICH, J. S.; MCLEAN, D. I. Punching shear behavior of slabs with varying span-depth ratios. **ACI Structural Journal**. Vol.87(5), p. 507-512, 1990.

MANGALATHU, S.; SHIN, H.; CHOI, E.; JEON, J. Explainable machine learning models for punching shear strength estimation of flat slabs without transverse reinforcement. **Journal of Building Engineering,** v. 39, p. 1-10, 2021.

MAGALHÃES, M. N. **Probabilidade e Variáveis Aleatórias**. – 2. ed. – São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2006.

MANTEROLA, M. J. Punching of slabs without shear reinforcement. **Comité Euro-International du Béton, Bulletin d'Information**, No. 57, 1966.

MARQUE, N. L. A.; NOGUEIRA, C. G. Probabilistic analysis of slab-column connections subjected to punching shear according to the ABNT NBR 6118 (2014) recommendations considering the model error measure. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v.14, n.6, 2021.

MARQUES, M. G. **Punção em lajes lisas de concreto armado com aberturas adjacentes ao pilar e armadura de cisalhamento**. 2018. 259f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) ‑ Faculdade de Engenharia Civil e Arquitetura, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2018.

MARTINS, D. A. S. **Confiabilidade de vigas pré-tracionadas de concreto protendido**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Porto do Rio Grande do Sul, Porto Alegre - RS, 2014.

MARZOUK, H.; HUSSEIN, A. Experimental investigation on the behavior of high-strength concrete slabs. **ACI Structural Journal**. Vol. 88(6), p. 701-713, 1991.

MATTHYS, S.; TAERWE L. Concrete slabs reinforced with FRP Grids. II: Punching resistance. **Journal of Composites for Construction**. Vol. 4(3), p.154-161, 2000.

MCHARG, P. J.; COOK, W. D.; MITCHELL, D.; YOON, Y. S. Benefits of concentrated slab reinforcement and steel fibers on performance of slab-column connections. **ACI Structural Journal**. Vol. 97(2), p.225-234, 2000.

MELCHERS, R. E; BECK, A. T. **Structural Reliability Analysis and Prediction**. John Wiley & Sons, 2018.

MENEZES, A. B. N. **Análise de confiabilidade estrutural de pilares mistos de aço e concreto com seção circular preenchida**. Dissertação de mestrado, São Carlos, SP. Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2020.

MIRZA, S. A.; SKRABEK, B. W. Statistical analysis of slender composite beam-column strength. **Journal of Structural Engineering**, v.118, n.5, p.1312–1332,1992.

MIRZA, S. A.; SKRABEK, B. W. Reliability of Short Composite Beam-Column Strength Interaction. **Journal of Structural Engineering**, v.117, p.2320–2339,1991.

MOE, J. Shearing strength of reinforced concrete slabs and footings under concentrated loads. **Journal of Portland Cement Association, Research and Development Laboratories**, Bulletin, No. D47, 1961.

MONTGOMERY, D. C. **Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade**. 7ª ed. LTC, 2016

MUTTONI, A. Punching Shear Strength of Reinforced Concrete Slabs without Transverse Reinforcement. **Aci Structural Journal**, v. 105, n. 4, 2008.

MUTTONI, A. Shear and Punching Strength of Slabs without Shear Reinforcement, **Beton-und Stahlbetonbau**, V. 98, No. 2, p. 74-84, 2003.

MUTTONI, A.; SCHWARTZ, J. Behaviour of beams and punching in slabs without shear reinforcement. **IABSE Colloquium**, v. 62, p. 703:708, 1991.

NICÁCIO, W. G. **Comportamento à punção de lajes de concreto armado tipo bubbledeck**. Tese de Doutorado, Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. Brasília, 2018.

NOWAK, A. S.; RAKOCZY, A. M.; SZELIGA, E. K. Revised Statistical Resistance Modelsfor R/C Structural Components. **American Concrete Institute**, v. 284, p.1 - 16, 2012.

NYLANDER, H.; SUNDQUIST, H. **Genomstansning av pelarunderstödd plattbro av betong med ospänd armering. Nr 104**. Stockholm, Sweden: Institutionen för byggnadsstatik, Kungl Tekniska högskolan, 1972.

OLALUSI, O, B; VILJOEN, C. Model uncertainties and bias in shear strengh prediction of slender stirrup reinforced concrete beams. Structural concrete: journal of the FIB. Vol. 21(1), p.316-332, 2020.

OLIVEIRA, D. R. C.; REGAN, P. E.; MELO, G. S. S. A. Punching resistance of RC slabs with rectangular columns. **Magazine of Concrete Research**. Vol. 56(3), p.123-138. 2003.

OSPINA, C. E.; ALEXANDER, S. D. B.; CHENG, J. J. R. Punching of two-way concrete slabs with fiber-reinforced polymer reinforcing bars of grids. **ACI Structural Journal**, Vol. 100(5), p. 589-598, 2003.

OSPINA C. E.; BIRKLE G.; WIDIANTO, Y.; Wang S. R.; CATLIN A. C.; PUJOL S. N**EES: ACI 445 punching shear collected databank**, 2023. Disponível em: <htts://datacenterhub.org/resources/256>.

OSPINA C. E.; BIRKLE G.; WIDIANTO, Y.; WANG Y.; FERNANDO S. R.; FERNANDO S.; CATLIN A. C.; PUJOL S. N**EES: ACI 445 punching shear collected databank**, 2015.

OZAWA, M.; UCHIDA Y.; KOYANAGI W. Study on the process on punching shear failure of RC slabs. **International Workshop on Punching Shear Capacity of RC Slabs, Royal Institute of Technology**, Stockholm, Sweden, p. 145-154, 2000.

OZDEN S.; ERSOY U.; OZTURAN T. Punching shear tests of normal- and high-strength concrete flat plates. **Canadian Journal of Civil Engineering**, Vol. 33(11), p.1389-1400, 2006.

PONSI, F.; GHIRELLI, G.; BASSOLI, E.; VINCENZI, L. Impact of the model error on the neural network-based damage detection. **Procedia Structural Integrity**, v. 44, p. 1546–1553, 2023.

PRALONG, J.; BRÄNDLI, W.; THÜRLIMANN, B. **Durchstanzversuche an Stahlbetonund Spannbetonplatten**. Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, No. 7305-3, 1979.

PYTHON SOFTWARE FOUNDATION. **Python Language** Site: Documentation, 2019. Disponível em: <https://www.python.org/doc/>.

RAMDANE, K. E. Punching shear of high performance concrete slabs. **4th international symposium on utilization of high-strength/high performance concrete**. Vol. 3, p. 1015-1026, 1996.

RANKIN, G. I. B.; LONG, A. E. Predicting the punching strength of conventional slab-column specimens. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers**. Vol. 82(2), p. 327-346, 1987.

R Core Team (2023). _**R**: A Language and Environment for Statistical Computing_. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. Disponível em: <https://www.R-project.org/>.

REAL, M. V. **Reliability: A Python class for Reliability analysis including Monte Carlo and FORM methods**. 2024. Disponível em: https://github.com/mvreal/Reliability. Acesso em 22/11/2023.

REGAN, P. E. Symmetric punching of reinforced concrete slabs. **Magazine of Concrete Research**. Vol. 38(136), p. 115-128, 1986.

REGAN, P. E. The dependence of punching resistance upon the geometry of the failure surface. **Magazine of Concrete Research**. Vol. 36(126), p. 3-8, 1984.

RICHART, F. E.; KLUGE, R. W. **Tests of reinforced concrete slabs subjected to concentrated loads: A report of an investigation**. Bulletin Series No.314. Illinois: University of Illinois Urbana, 1939.

ROSENTHAL I. Experimental investigation of flat plate floors. **In Journal Proceedings** Vol. 56(8), p. 153-166, 1959.

SACRAMENTO, P. V. P.; FERREIRA, M. P.; OLIVEIRA D. R. C.; MELO, G. S. S. A. Punção em lajes lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento. Revista IBRACON de Estruturas e Materiais, São Paulo, v. 5, n. 5, p. 659-691, 2012.

SAGASETA, J.; MUTTONI, A. RUIZ, M. F.; TASSINARI, L. Non-axis-symmetrical punching shear around internal columns of RC slabs without transverse reinforcement. **Magazine of Concrete Research**, v. 63, n. 6, p. 441-457, 2011.

SAKAMOTO, M. L. **Análise de confiabilidade estrutural utilizando o método FORM com múltiplos modos de falha para edifício alto submetido à ação do vento**. Dissertação de mestrado, Universidade Federal Tecnológica do Paraná, 2016.

SANTIAGO, W. C. **Calibração baseada em confiabilidade dos coeficientes parciais de segurança das principais normas brasileiras de projeto estrutural**. 2019. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2019.

SANTOS, K. R. M. dos. **Técnicas de amostragem inteligente em simulação de Monte Carlo**. Dissertação de Mestrado - Universidade de São Paulo - Escola de Engenharia São Carlos, São Paulo, 2014.

SANTOS, S. R. **Desenvolvimento de algoritmos matemáticos aplicados a confiabilidade estrutural**. 2012. Tese de Doutorado - Universidade Federal do Paraná, Curitiba-PR, 2012.

SCHAEFERS, U. **Konstruktion, Bemessung und Sicherheit gegen Durchstanzen von balkenlosen Stahlbetondecken im Bereich der Innenstützen**. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, 1984.

SCHAEIDT, W.; LADNER, M.; RÖSLI, A. **Berechnung von Flachdecken auf Durchstanzen**. Edigenössische Materialprüfugs- und Versuchsanstalt, Dübendorf, 1970.

SEVENTEKIDIS, P.; GIAGOPOULOS, D. Model error effects in supervised damage identification of structures with numerically trained classifiers. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v.184, 2023

SHEN, W.; OHSAKI, M.; YAMAKAWA, M. Quantile-base3d sequential optimization and Reliability assessment for shape and topology optimization of plane frames using L-moments. **Structural Safety**, v. 94, 2022.

SILVA, G. R. **Confiabilidade estrutural de lajes lisas: estado limite último à punção**. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Porto do Rio Grande do Sul, Porto Alegre - RS, 2022.

SILVA JÚNIOR, E. S. F.; GOMES, W. J. S. Machine learning models to predict the punching shear strength of reinforced concrete flat slabs. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 16, n.4, 2023.

SISTONEN, E.; LYDMAN M.; HUOVINEN S. **Teräsbetonilaatan lävistyskapasiteetin laskentakaavan geometrinen malli. Julkaisu**/Report No.69. Espoo, Finland: Talonrakennustekniikka, Teknillinen Korkeakoulu; 1997.

SOARES, C. G. **Probabilistic Methods for Structural Design**. 1st ed. Vol. 56. Dordrecht: Springer Netherlands, 1997.

SOONG, T. T.; GRIGORIU, M. **Random Vibration of Mechanical and Structural Systems**. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2000.

STANDARDS AUSTRALIA, **AS/NZS 2327**: Composite Structures - Composite Steel-Concrete Construction in Buildings, 2017.

STACIARINI, P. H. **Análise de confiabilidade estrutural de modelos de bielas e tirantes de vigas-parede**. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis - SC, 2020.

STUCCHI, F. R.; SANTOS, S. H. C.; FRANCO, R. M. Evaluation of the safety criteria of Brazilian Standard NBR 6118 for slender members based on reliability analyses. **Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering**, p. 2761–2767, 2011.

SWAMY, R. N.; ALI, S. A. R. Punching shear behavior of reinforced slab-column connections made with steel fiber concrete. **In Journal Proceedings**. Vol. 79(5), p. 392-406, 1982.

SYKORA, M.; HOLICKY, M.; KREJSA, J. Model uncertainty for shear resistance of reinforced concrete beams with shear reinforcement according to EN1992-1-1. **Transactions of the VSB–Technical University of Ostrava**, v.23, n.2, p.150–159, 2013.

TAYLOR, R.; HAYES, B. Some tests on the effect of edge restraint on punching shear in reinforced concrete slabs. **Magazine of Concrete Research**. Vol. 17(50), p. 39-44, 1965.

THAI, H. T.; THAI, S.; NGO, T.; UY, B.; KANG, W. H.; HICKS, S. J. Reliability considerations of modern design codes for CFST columns. **Journal of Constructional Steel Research**, v.177, 2021.

THEODORAKOPOULOS, D. D.; SWAMY, N. Contribution of steel fibers to the strength characteristics of lightweight concrete slab-column connections failing in punching shear. **ACI Structural Journal**. Vol. 90(4), p. 342-355, 1993.

TEICHGRÄBER, M.; KÖHLER, J.; STRAUB, D. Hidden safety in structural design codes. **Engineering Structures**, v.257, 2022.

Timm M. **Durchstanzen von Bodenplatten unter rotationssymmetrischer Belastung**. Ph.D. thesis, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 547, Berlin, 2004.

TITELLO, E.P. **Análise da confiabilidade de vigas em concreto armado reforçado com fibras de aço em relação aos esforços transversais**. 2020. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre -RS, 2020.

TOMASZEWICZ A. **High strength concrete: SP2 – plates and shells report 2.3. Punching shear capacity of reinforced concrete slabs**. Report No. STF70-A93082. Norway: SINTEF (Selskapet for Industriell og Teknisk Forskning, Trondgeim), 1993.

URBAN T. **Nośność na przebicie w aspekcie proporcji boków słupa**. Wydawn. Katedry Budownictwa Betonowego Wydziału Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska Politechniki Łódzkiej. 1994.

VANDEPITTE, D.; MOENS, D. Quantification of uncertain and variable model parameters in non-deterministic analysis. **IUTAM Symposium on the Vibration Analysis of Structures with Uncertainties - IUTAM Bookseries,** v. 27, p. 15-28, 2011.

VANDERBILT, M. D.; Shear Strength of Continuous Plates. **Journal of Structural Division, ASCE**, Vol. 98, No. ST5, p. 961-973, 1972.

VEIGA, J. M. G. C. **Métodos de análise das incertezas na verificação da segurança estrutural em Engenharia civil**. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade do Porto, FEUP, 2008.

VERMA, A. K.; AJIT, S.; DURGA, R. K. **Reliability and Safety Engineering**. – 2. ed. – Springer-Verlag London Ltd., 2016.

Walraven, J. C. Fundamental Analysis of Aggregate Interlock, **Journal of Structural Engineering**, ASCE, V. 107, No. 11, p. 2245-2270, 1981.

WOOD, J.G.M. **Pipers Row Car Park Collapse: Identifying Risk. Concrete**, v. 37, n. 9, p. 29–31, 2003.

YI, W. J.; LI, Y.; CHEN, H.; MA, Z. J.; ZHOU, K. J.; HUANG, Y.; ZHOU, Y. Shear strength evaluation of RC D-Regions based on Single-Panel Strut-and-Tie model. **Engineering Structures**, v.265, 2022.

YOUN, B. D.; CHOI, K. K.; DU, L. Adaptive probability analysis using an enhanced hybrid mean value method. **Struct Multidisc Optim 29**, p. 134–148, 2005.

YU, Q.; SIMÕES, J. T.; MUTTONI, A. Model uncertainties and partial safety factors of strain-based approaches for structural concrete: Example of punching shear. **Engineering Structures**, v.292, 2023.

APÊNDICE 1 – Banco de dados das 288 lajes lisas estudadas

REFERÊNCIA	ENSAIO	PILAR	b_1 (mm)	d_1 (mm)	d (mm)	ρ (%)	f_c (MPa)	f_y (MPa)	r_s (MPa)	V_{exp} (kN)
Branco (2022)	L1A	S	85		95	0,009	28	573	800	183,29
	L1B	R	85	255	95	0,009	28	573	800	220,4
	L1C	R	85	425	95	0,009	28	573	800	251,51
	L2A	S	85		95	0,009	28	573	800	208,38
	L2B	R	85	255	95	0,009	28	573	800	242,48
	L2C	R	85	425	95	0,009	28	573	800	298,38
	L3B	R	85	255	95	0,009	28	573	800	271,2
	L3C	R	85	425	95	0,009	28	573	800	303,86
Liberati (2019)	LR_A	S	150		89	0,016	41,6	575	900	249,9
	LR_B	S	150		88	0,017	41,6	575	900	216,4
	LR_C	S	150		90	0,016	41,6	575	900	259,2
Marques (2018)	LR	S	130		90	0,016	39,8	571	900	232,3
Shu *et al*. (2017)	PG1	S	260		210	0,015	27,6	542	700	1023
	PT32	S	260		215	0,008	40,0	549	1000	871
	AM04	R	260	780	202	0,010	44,6	516	1000	1157
Ospina *et al*. (2015)	3	S	152		165,1	0,752	42,7	419	814	600
Clement *et al*.(2014)	PG19	S	250		206	0,008	46,2	510	1200	860
	PG20	S	250		201	0,016	51,7	551	1200	1094
Costa *et al*. (2012)	L1	R	250	250	94	0,014	29,0	600	400	375
	L2	R	230	270	93	0,014	29,0	600	400	390
	L3	R	215	285	94	0,014	29,0	600	400	375
	L4	R	200	300	90	0,015	29,0	600	400	395
	L6	R	125	375	91	0,014	22,0	600	400	350

REFERÊNCIA	ENSAIO	PILAR	b_1 (mm)	d_1 (mm)	d (mm)	ρ (%)	f_c (MPa)	f_y (MPa)	r_s (MPa)	V_{exp} (kN)
Costa *et al*. (2012)	L7	R	110	390	91	0,014	22,0	600	400	300
Lips *et al*. (2012)	PL1	S	130		193	0,017	36,2	583	670	682
	PV1	S	260		210	0,015	34,0	709	600	974
	PL3	S	520		197	0,016	36,5	583	750	1324
	PL5	S	440		353	0,015	31,9	580	700	2491
Sagaseta *et al*.(2011)	PT21	S	250		192	0,012	67,5	575	1200	959
	PT22	S	250		196	0,008	67,0	552	1200	989
	PT23	S	250		189	0,006	66,0	560	1200	591
	PT31	S	250		212	0,015	66,3	540	1200	1433
	PT32	S	250		215	0,011	40,0	549	1200	1157
	PT33	S	250		212	0,005	47,0	546	1200	602
Damasceno (2007)	L1A	S	85		89,3	0,013	41,3	600	800	188,5
	L2A	R	85	255	89,3	0,012	40,0	600	800	254
	L3A	R	85	425	99,7	0,010	39,7	600	800	297
	L4A	R	85	595	98,6	0,010	40,4	600	800	325
	L1B	S	85		98,1	0,006	41,4	553	800	172
	L2B	R	85	255	90,5	0,006	42,0	553	800	194,5
	L3B	R	85	425	92,7	0,006	41,6	553	800	232
	L4B	R	85	595	98,1	0,005	40,5	553	800	254,5
Carvalho (2006)	L1	S	85		90	0,013	52,5	676	800	185
	L2	R	85	255	90	0,013	51,9	676	800	226
	L3	R	85	425	90	0,013	49,6	676	800	239
Ferreira (2006)	L1a	S	85		87	0,009	42,4	488	800	174
	L1b	S	85		89	0,012	51,4	488	800	231,5
	L1c	S	85		87	0,015	43,5	488	800	190
	L2a	S	85		88	0,009	42,1	488	533	228
	L2b	S	85		88	0,012	49,7	488	533	211
	L2c	S	85		87	0,015	44,8	488	533	159,5
	L3a	S	85		88	0,009	42,1	488	400	225

REFERÊNCIA	ENSAIO	PILAR	b_1 (mm)	d_1 (mm)	d (mm)	ρ (%)	f_c (MPa)	f_y (MPa)	r_s (MPa)	V_{exp} (kN)
Ferreira (2006)	L3b	S	85		88	0,012	49,3	488	400	215
	L3c	S	85		87	0,015	36,1	488	400	179,5
	L4a	S	85		89	0,009	48,8	488	320	193,5
	L4b	S	85		89	0,012	58,0	488	320	191
	L4c	S	85		87	0,015	44,8	488	320	205,5
Ozden *et al*. (2006)	NR1E0F0	S	200		100	0,727	20,5	507	500	188
Vilhena *et al*. (2006)	L1A	S	85	0	65	0,012	27,4	773	600	123
	L1B	S	85	0	65	0,012	27,4	773	600	122
	L3A	R	85	255	65	0,012	32,4	773	600	134,5
	L3B	R	85	255	65	0,012	32,4	773	600	134
	L5A	R	85	425	65	0,012	30,9	773	600	122
	L5B	R	85	425	65	0,012	30,9	773	600	124,5
Guandalini (2005)	PG-1	S	260		210	1,496	27,7	573	1250	1024
	PG-5	S	260		210	0,325	29,3	555	1250	550
	PG-6	S	130		96	1,458	29,3	526	625	236
	PG-7	S	130		100	0,748	34,7	550	625	243
	PG-10	S	260		210	0,325	28,5	577	1250	540
Birkle (2004)	1	S	250		124	1,539	33,3	488	875	483
	7	S	300		190	1,296	32,2	531	1350	825
	10	S	350		260	1,100	28,9	524	1725	1046
Borges (2004)	L42	R	200	400	139	0,014	43,2	604	640	657
	L42A	R	200	400	164	0,012	36,2	604	640	693
	L45	R	200	600	154	0,014	42,0	604	800	798
	L46	R	200	800	164	0,012	39,3	604	800	897
	L41	R	150	250	139	0,014	44,7	604	500	551
	L41A	R	150	250	164	0,013	38,9	604	500	600
	L43A	R	150	450	164	0,013	38,7	604	700	726
	L44	R	150	600	164	0,013	40,0	604	700	761

REFERÊNCIA	ENSAIO	PILAR	b_1 (mm)	d_1 (mm)	d (mm)	ρ (%)	f_c (MPa)	f_y (MPa)	r_s (MPa)	V_{exp} (kN)
Timm (2004)	Ti-1A	C	175		172	1,242	38,7	500	193	789
	Ti-2A	C	175		172	1,242	34,2	500	313	668
	Ti-3A	C	250		246	1,186	31,2	500	275	1356
Oliveira *et al*. (2003)	L1a	S	120		107	0,980	52,4	749	990	240
	L1b	S	120		108	0,971	54,3	749	990	322
	L1c	C	150		98	1,272	56,6	550	990	319
	L2a	R	120	240	109	0,962	53,4	749	990	246
	L2b	R	120	240	106	0,990	53,4	749	990	361
	L2c	R	120	240	107	0,980	52,4	749	990	331
	L3a	R	120	360	108	0,971	51,5	749	990	241
	L3b	R	120	360	107	0,980	55,2	749	990	400
	L3c	R	120	360	106	0,990	49,7	749	990	358
	L4a	R	120	480	108	0,971	51,5	749	990	251
	L4b	R	120	480	106	0,990	49,7	749	990	395
	L4c	R	120	480	107	0,980	51,5	749	990	404
Oliveira *et al*. (2003)	L5a	R	120	600	108	0,971	52,4	749	990	287
	L5b	R	120	600	108	0,971	61,6	749	990	426
	L5c	R	120	600	109	0,962	58,0	749	990	446
Ospina *et al*. (2003)	SR-1	S	250		120	0,838	35,0	430	710	365
	ER1-VS	S	400		109	0,922	28,3	428	710	541
Li (2000)	P100	S	200		100	0,971	37,4	488	263	330
	P150	S	200		150	0,877	37,4	465	395	583
	P200	S	200		200	0,826	37,4	465	525	904
	P300	S	200		300	0,758	37,4	468	788	1381
Matthys e Taerwe (2000)	R1'	C	230		90	0,582	31,8	620	335	265
	R2	C	150		88	1,285	33,3	619	375	294
	R3	C	150		86	1,790	33,3	589	375	313
McHarg *et al*. (2000)	NU	S	225		125	0,974	28,5	434	956	306

REFERÊNCIA	ENSAIO	PILAR	b_1 (mm)	d_1 (mm)	d (mm)	ρ (%)	f_c (MPa)	f_y (MPa)	r_s (MPa)	V_{exp} (kN)
Ozawa *et al*. (2000)	LA1	S	100		60	1,100	37,1	382	450	120
	LA21	S	100		60	1,950	37,1	382	450	170
	LA22	S	100		60	1,950	37,1	382	450	135
	LB1	S	100		75	1,500	27,6	382	450	180
Ghannoum (1998)	S1-U	S	225		127	0,958	35,3	445	584	301
	S1-B	S	120		107	0,980	54,3	749	584	318
	S2-U	S	225		127	0,958	54,2	445	956	363
	S3-U	S	225		127	0,958	63,7	445	956	443
Sistonen *et al*. (1997)	L1	C	202		172	0,444	31,1	621	684	503
	L2	C	202		176	0,434	31,1	621	684	537
	L3	C	201		173	0,441	31,1	621	685	530
	L4	C	402		170	0,643	31,1	612	684	686
	L5	C	399		172	0,635	31,1	612	682	696
	L6	C	406		175	0,625	31,1	612	682	799
Sistonen *et al*. (1997)	L7	C	201		177	0,618	22,9	586	785	478
	L8	C	899		174	1,105	22,9	576	686	1111
	L9	C	897		172	1,117	22,9	576	687	1107
	L10	C	901		173	1,111	22,9	576	685	1079
Ramdane (1996)	12	R	152	457	117,3	0,860	24,6	419	611	320
	14	C	150		98	1,272	57,0	550	611	341
	21	C	150		98	1,272	39,3	650	611	286
	23	C	150		98	1,272	40,9	550	611	297
	25	C	150		100	1,247	30,8	650	611	244
	26	C	150		100	1,247	35,3	650	611	294
	27	C	150		102	1,027	31,6	650	611	227
Banthia *et al*. (1995)	IV	C	100		55	0,350	39,0	448	200	60

REFERÊNCIA	ENSAIO	PILAR	b_1 (mm)	d_1 (mm)	d (mm)	ρ (%)	f_c (MPa)	f_y (MPa)	r_s (MPa)	V_{exp} (kN)
Urban (1994)	Pm 1/1-1.5	R	160	160	99	1,462	25,8	416	720	260
	Pd 1/1-1.5	S	320		99	1,462	31,2	416	640	360
	P 1/2-1.5	R	133	267	91	1,503	21,2	352	734	252
Theodorakopoulos e Swamy (1993)	FS-1	S	150		100	0,530	33,2	460	770	174
	FS-8	S	100		100	0,530	34,4	460	795	150
	FS-10	S	200		100	0,530	34,1	460	745	191
	FS-19	S	150		100	0,353	32,3	460	770	137
Tomaszewicz (1993)	ND65-1-1	S	200		275	1,487	64,1	550	1150	2050
	ND65-2-1	S	150		200	1,745	70,0	550	1025	1200
Alexander e Simmonds (1992)	P11S150	S	200		134	0,499	31,5	438	1120	257
	P38S150	S	200		107	0,625	33,8	438	1120	264
	P19S150	S	200		124,7	0,536	24,7	438	1120	258
	PI9RE	S	200		124,7	0,536	33,5	438	1120	304
	P19RC	S	200		124,7	0,536	33,5	438	1120	282
	P19RB	S	200		124,7	0,536	33,5	438	789	343
Marzouk (1991)	HS2	S	150		95	0,845	66,5	490	675	249
	HS3	S	150		95	1,479	65,6	490	675	356
	HS5	S	150		125	0,642	64,6	490	675	365
	HS6	S	150		120	0,950	66,5	490	675	489
	HS8	S	150		120	1,117	65,6	490	675	436
	HS13	S	150		70	2,007	64,6	490	675	267
	HS14	S	220		95	1,479	68,4	490	640	498
	HS15	S	300		95	1,479	67,5	490	600	560
	NS1	S	150		95	1,479	39,9	490	675	320
	NS2	S	150		120	0,950	28,5	490	675	396
Gardner (1990)	8	C	102		76,2	2,014	22,9	414	508	129
	9	C	102		76,2	2,014	21,5	414	292	136
	10	C	102		76,2	2,014	23,4	414	140	129

REFERÊNCIA	ENSAIO	PILAR	b_1 (mm)	d_1 (mm)	d (mm)	ρ (%)	f_c (MPa)	f_y (MPa)	r_s (MPa)	V_{exp} (kN)
Gardner (1990)	13	C	203		121,6	0,665	23,6	450	242	271
	15	C	152		80,8	1,499	23,8	450	192	160
	25	C	203		121,6	0,665	49,5	450	242	306
	27	C	152		80,8	1,499	49,5	450	192	243
Lovrovich (1990)	F2	C	102		82,6	1,752	38,0	531	153	204
	F3	C	102		82,6	1,752	38,0	531	254	149
	F4	C	102		82,6	1,752	38,0	531	356	129
	F5	C	102		82,6	1,752	38,0	531	559	139
Rankin e Long (1987)	2C	S	100		53,5	0,686	30,4	530	400	88
	3C	S	100		53,5	1,289	30,4	530	400	124
	4C	S	100		53,5	1,957	26,1	530	400	126
Regan (1986)	I/1	S	200		77	0,921	30,3	500	815	194
	I/2	S	200		77	1,205	22,0	500	815	176
	I/6	S	200		79	0,751	20,6	480	815	165
	II/1	C	250		200	1,047	32,7	530	1248	825
	II/2	C	160		128	1,047	31,2	485	820	390
	II/3	C	160		128	1,047	32,2	485	820	365
	II/4	C	80		64	1,047	31,2	480	410	117
	II/5	C	80		64	1,047	32,2	480	410	105
	II/6	C	80		64	1,047	33,9	480	410	105
	III/1	C	150		95	0,873	21,8	494	610	197
	III/3	C	150		95	0,873	35,5	494	610	214
	III/5	C	150		93	1,625	25,1	464	610	214
	III/6	C	150		93	1,625	40,0	464	610	248
	IV/1	S	160		80	1,396	24,5	525	610	190
	IV/2	S	160		80	1,396	31,9	525	610	236
	IV/3	S	160		80	1,396	26,6	525	610	248

REFERÊNCIA	ENSAIO	PILAR	b_1 (mm)	d_1 (mm)	d (mm)	ρ (%)	f_c (MPa)	f_y (MPa)	r_s (MPa)	V_{exp} (kN)
Regan (1986)	IV/4	S	160		80	1,396	29,3	525	610	262
	V/1	C	54		118	0,841	32,2	628	723	170
	V/2	C	170		118	0,841	30,2	628	665	280
	V/3	C	110		118	0,841	30,4	628	695	265
	V/4	S	102		118	0,841	34,0	628	699	285
	V/5	C	150		118	0,841	30,8	628	675	285
Regan (1984)	1	S	150		75	1,496	21,5	480	350	197
	2	S	150		75	1,496	23,7	480	225	227
	3	S	150		75	1,496	27,0	480	100	235
	4	S	100		75	1,496	26,4	480	125	185
	5	S	200		75	1,496	26,4	480	75	338
	8	S	100		75	0,748	33,5	480	125	172
	9	S	200		75	0,748	33,5	480	75	284
	10	S	200		75	1,496	36,1	480	75	421
	11	S	100		75	1,496	36,1	480	125	182
	15	S	200		75	1,496	35,9	480	100	368
	17	S	200		160	0,942	28,2	480	100	1099
Schaefers (1984)	0	C	210		113	0,834	21,9	420	735	280
Swamy e Ali (1982)	S-1	S	150		100	0,557	35,0	462	770	198
Pralong *et al*. (1979)	P5	C	300		171	1,176	25,7	515	1150	626
Ladner *et al*. (1977)	6	C	100		80	1,795	37,5	550	478	183
	7	C	240		80	1,795	41,9	550	408	281
	10	C	200		80	1,795	40,0	550	428	288
	11	C	320		80	1,795	38,0	550	368	324

REFERÊNCIA	ENSAIO	PILAR	b_1 (mm)	d_1 (mm)	d (mm)	ρ (%)	f_c (MPa)	f_y (MPa)	r_s (MPa)	V_{exp} (kN)
Pralong *et al*. (1977)	P2	C	300		143	1,483	32,4	558	1150	628
Criswell (1974)	S2150-1	S	254		124,0	1,540	28,1	331	889	464
	S2150-2	S	254		122,2	1,560	28,6	331	889	440
	S4150-1	S	508		125,5	1,520	33,7	331	889	579
	S4150-2	S	508		125,5	1,520	33,9	336	889	580
Ladner (1973)	M	C	226		109	1,201	39,6	541	487	362
Nylander e Sundquist (1972)	B1	S	100		107	0,734	37,7	324	290	184
	B2	C	120		101	0,711	23,9	678	290	183
	C2	C	240		201	0,788	20,1	720	580	558
	C1	C	240		201	1,076	20,4	725	580	661
Hawkins *et al*. (1971)	8	R	114	495	120,7	0,787	24,8	422	858	314
	9	R	152	305	120,7	0,752	28,0	422	839	315
Schaeidt *et al*. (1970)	P1	C	500		240	1,309	26,2	544	1075	1662
Vanderbilt (1972)	A1/T2	S	203		117	1,200	20,0	432	584	339
	A2/M2	S	203		117	1,500	31,2	282	584	411
	A2/M3	S	203		121	1,900	30,9	282	584	422
	A2/T1	S	203		124	1,000	37,3	432	584	411
	A2/T2	S	203		124	1,700	39,3	432	584	431
	A3/M3	S	203		117	1,900	25,9	282	584	292
	A4/M1	S	203		114	1,100	36,4	255	584	254
	A4/M2	S	203		119	1,500	27,7	282	584	335
	A4/M3	S	203		117	1,900	30,6	322	584	531
	A4/T1	S	203		114	1,100	31,2	432	584	377
	A4/T2	S	203		117	1,200	27,8	432	662	394
Manterola (1966)	P1-S1	S	100		107	1,057	24,3	304	1450	216
	P2-S1	S	250		107	1,057	32,2	304	1375	257

REFERÊNCIA	ENSAIO	PILAR	b_1 (mm)	d_1 (mm)	d (mm)	ρ (%)	f_c (MPa)	f_y (MPa)	r_s (MPa)	V_{exp} (kN)
Manterola (1966)	P3-S1	S	450		107	1,057	28,2	304	1275	301
	PI-S2	S	100		107	1,057	23,0	324	1450	196
	P2-S2	S	250		107	1,057	31,4	324	1375	283
	P3-S2	S	450		107	1,057	30,3	324	1275	397
	P1-S3	C	120		95,5	1,175	24,0	723	600	184
	P2-S3	S	100		107	0,979	34,0	324	1450	211
	P3-S3	S	100		107	0,367	37,3	324	1450	165
Taylor e Hayes (1965)	2S2	S	51		63,5	0,873	21,9	376	407	64
	2S3	S	76		63,5	0,873	20,7	376	394	83
Moe (1961)	S1-60	S	254	152	114,3	1,050	22,1	399	763	389
	S1-70	S	254		114,3	1,050	23,3	482	762	392
	S3-70	S	203		114,3	1,050	21,9	482	789	378
	S5-60	S	203		114,3	1,050	21,1	399	789	343
	R1	R	457		114,3	1,137	26,2	328	662	394
	R2	S	152		114,3	1,137	25,2	328	814	311
Kinnunen e Nylander (1960)	IAI5a-5	C	150		117	0,848	26,2	441	780	255
	IAI5a-6	C	150		118	0,841	24,2	454	780	275
	IAI5c-11	C	150		121	1,640	29,5	436	780	334
	IAI5c-12	C	150		122	1,626	27,0	439	780	332
	IA30a-24	C	300		128	1,065	24,3	456	705	430
	IA30a-25	C	300		124	1,099	23,1	451	705	408
	IA30d-32	C	300		123	0,538	24,2	448	705	258
	IA30d-33	C	300		125	0,529	24,5	462	705	258
	IA30e-34	C	300		120	1,109	25,2	461	705	332
	IA30e-35	C	300		122	1,091	23,0	459	705	332
Base (1959)	A	C	100		60	1,060	24,8	250	230	94

REFERÊNCIA	ENSAIO	PILAR	b_1 (mm)	d_1 (mm)	d (mm)	ρ (%)	f_c (MPa)	f_y (MPa)	r_s (MPa)	V_{exp} (kN)
Base (1959)	B	C	100		60	1,060	26,8	250	230	104
	C	C	100		60	1,060	24,6	250	230	98
	D	C	100		60	1,060	25,6	250	230	104
	E	C	100		60	0,690	28,0	250	230	82
	F	C	100		60	0,690	26,0	250	230	82
	G	C	100		60	1,560	27,2	250	230	113
	H	C	100		60	1,560	24,8	250	230	100
Rosenthal (1959)	II/4	C	229		80	0,982	22,3	490	625	245
Elstner e Hognestad (1956)	A-1b	S	254		117,5	1,184	24,0	332	762	365
	A-1c	S	254		117,5	1,184	27,6	332	762	356
	A-1d	S	254		117,5	1,184	35,0	332	762	351
	A-4	S	356		117,5	1,184	24,8	332	711	400
Richart e Kluge (1939)	2-in. Disk 1	C	51		130	0,724	24,9	305	737	151
	2-in. Disk 2	C	51		130	0,724	24,9	305	737	166
	6-in. Disk 1	C	152		130	0,724	24,9	305	686	201
	6-in. Disk 2	C	152		130	0,724	24,9	305	686	198
	6-in. Plaster 1	C	152		130	0,724	24,9	305	686	200
	6-in. Plaster 2	C	152		130	0,724	24,9	305	686	199
	14-in. Disk 1	C	356		130	0,724	24,9	305	686	243
	14-in. Ring 1	C	356		130	0,724	24,9	305	686	249
	14-in. Ring 2	C	356		130	0,724	24,9	305	686	239
	6-in. Ring 1	C	152		130	0,724	24,9	305	686	203
	6-in. Ring 2	C	152		130	0,724	24,9	305	686	202

APÊNDICE 2 – Resultado das cargas de ruptura e erros de modelo das normas analisadas

REFERÊNCIA	ENSAIO	V_{exp} (kN)	NBR6118		ACI318		FIB MC2020		EUROCODE2	
			V_{NBR} (kN)	$E_{m,NBR}$	V_{ACI} (kN)	$E_{m,ACI}$	V_{FMC} (kN)	$E_{m,FMC}$	V_{EC2} (kN)	$E_{m,EC2}$
Branco (2022)	L1A	183,29	190,538	0,962	120,646	1,519	111,899	1,638	199,382	0,919
	L1B	220,4	232,775	0,947	148,015	1,489	171,490	1,285	246,827	0,893
	L1C	251,51	275,011	0,915	164,213	1,532	231,081	1,088	286,520	0,878
	L2A	208,38	190,538	1,094	120,646	1,727	111,899	1,862	199,382	1,045
	L2B	242,48	232,775	1,042	148,015	1,638	171,490	1,414	246,827	0,982
	L2C	298,38	275,011	1,085	164,213	1,817	231,081	1,291	286,520	1,041
	L3B	271,2	232,775	1,165	148,015	1,832	171,490	1,581	246,827	1,099
	L3C	303,86	275,011	1,105	164,213	1,850	231,081	1,315	286,520	1,061
Liberati (2019)	LR_A	249,9	278,718	0,897	182,837	1,367	164,603	1,518	240,026	1,041
	LR_B	216,4	280,104	0,773	180,026	1,202	162,172	1,334	240,379	0,900
	LR_C	259,2	282,962	0,916	185,665	1,396	167,047	1,552	244,519	1,060
Marques (2018)	LR	232,3	266,019	0,873	166,550	1,395	149,243	1,557	241,065	0,964
Shu *et al*. (2017)	PG1	1023	946,316	1,081	691,370	1,480	720,233	1,420	855,818	1,195
	PT32	871	914,288	0,953	861,194	1,011	735,495	1,184	831,183	1,048
	AM04	1157	1180,105	0,980	1082,215	1,069	1196,355	0,967	1043,611	1,109
Ospina *et al*. (2015)	3	600	532,387	1,127	456,178	1,315	491,103	1,222	536,192	1,119
Clement *et al*.(2014)	PG19	860	880,001	0,977	851,318	1,010	681,861	1,261	802,103	1,072
	PG20	1094	1110,257	0,985	869,074	1,259	664,715	1,646	1006,395	1,087
Costa *et al*. (2012)	L1	375	311,127	1,205	232,180	1,615	306,842	1,222	884,972	1,084
	L2	390	307,752	1,267	229,042	1,703	302,842	1,288	799,370	1,237
	L3	375	311,127	1,205	232,180	1,615	306,842	1,222	674,294	0,876
	L4	395	299,000	1,321	219,715	1,798	290,935	1,358	1118,005	1,282

REFERÊNCIA	ENSAIO	V_{exp} (kN)	NBR6118		ACI318		FIB MC2020		EUROCODE2	
			V_{NBR} (kN)	$E_{m,NBR}$	V_{ACI} (kN)	$E_{m,ACI}$	V_{FMC} (kN)	$E_{m,FMC}$	V_{EC2} (kN)	$E_{m,EC2}$
Costa *et al*. (2012)	L6	350	275,161	1,272	161,720	2,164	256,844	1,363	900,095	1,285
	L7	300	275,161	1,090	151,768	1,977	256,844	1,168	724,184	0,831
Lips *et al*. (2012)	PL1	682	807,124	0,845	500,095	1,364	495,197	1,377	830,801	0,821
	PV1	974	1014,439	0,960	767,353	1,269	754,742	1,291	917,427	1,062
	PL3	1324	1255,604	1,054	1137,812	1,164	1148,294	1,153	874,280	1,514
	PL5	2491	2488,282	1,001	1919,589	1,298	2124,264	1,173	2129,155	1,170
Sagaseta *et al*.(2011)	PT21	959	1028,282	0,933	929,639	1,032	694,075	1,382	229,749	0,820
	PT22	989	922,101	1,073	954,041	1,037	729,952	1,355	271,752	0,935
	PT23	591	780,493	0,757	898,746	0,658	682,920	0,865	358,878	0,828
	PT31	1433	1262,648	1,135	1063,343	1,348	820,985	1,745	397,307	0,818
	PT32	1157	978,256	1,183	843,063	1,372	643,725	1,797	202,803	0,848
	PT33	602	789,486	0,763	895,294	0,672	686,513	0,877	222,825	0,873
Damasceno (2007)	L1A	188,5	223,047	0,845	133,371	1,413	121,110	1,556	268,507	0,864
	L2A	254	261,361	0,972	162,720	1,561	184,494	1,377	315,091	0,808
	L3A	297	338,452	0,878	207,964	1,428	284,822	1,043	251,624	0,735
	L4A	325	386,244	0,841	235,608	1,379	355,881	0,913	311,666	0,725
	L1B	172	192,259	0,895	154,098	1,116	145,364	1,183	357,110	0,669
	L2B	194,5	213,387	0,911	169,761	1,146	200,945	0,968	197,368	0,882
	L3B	232	260,087	0,892	194,030	1,196	278,541	0,833	236,091	0,981
	L4B	254,5	306,957	0,829	234,435	1,086	370,022	0,688	231,577	0,820
Carvalho (2006)	L1	185	243,793	0,759	152,159	1,216	129,164	1,432	200,818	1,135
	L2	226	298,995	0,756	187,308	1,207	198,540	1,138	228,953	0,922
	L3	239	349,805	0,683	204,098	1,171	262,635	0,910	233,861	0,682
Ferreira (2006)	L1a	174	192,914	0,902	129,918	1,339	131,585	1,322	200,818	1,120
	L1b	231,5	229,404	1,009	148,033	1,564	149,728	1,546	228,337	0,942
	L1c	190	226,351	0,839	131,592	1,444	133,281	1,426	217,621	0,825
	L2a	228	195,702	1,165	131,707	1,731	159,689	1,428	215,103	0,900
	L2b	211	223,120	0,946	143,102	1,474	173,505	1,216	245,792	0,777

REFERÊNCIA	ENSAIO	V_{exp} (kN)	NBR6118		ACI318		FIB MC2020		EUROCODE2	
			V_{NBR} (kN)	$E_{m,NBR}$	V_{ACI} (kN)	$E_{m,ACI}$	V_{FMC} (kN)	$E_{m,FMC}$	V_{EC2} (kN)	$E_{m,EC2}$
Ferreira (2006)	L2c	159,5	228,584	0,698	133,544	1,194	162,028	0,984	233,861	0,879
	L3a	225	195,702	1,150	131,707	1,708	177,154	1,270	177,640	1,058
	L3b	215	222,520	0,966	142,525	1,509	191,705	1,122	112,603	1,092
	L3c	179,5	212,710	0,844	119,878	1,497	161,355	1,112	112,603	1,083
	L4a	193,5	209,010	0,926	144,241	1,342	207,534	0,932	151,779	0,886
	L4b	191	238,830	0,800	157,250	1,215	226,253	0,844	151,779	0,883
	L4c	205,5	228,584	0,899	133,544	1,539	192,407	1,068	175,792	0,694
Ozden *et al*. (2006)	NR1E0F0	188	220,033	0,854	181,196	1,038	231,292	0,813	175,792	0,708
Vilhena *et al*. (2006)	L1A	123	119,420	1,030	68,049	1,808	64,153	1,917	859,927	1,191
	L1B	122	119,420	1,022	68,049	1,793	64,153	1,902	526,831	1,044
	L3A	134,5	163,397	0,823	96,608	1,392	113,346	1,187	235,180	1,003
	L3B	134	163,397	0,820	96,608	1,387	113,346	1,182	213,394	1,139
	L5A	122	197,369	0,618	107,914	1,131	153,255	0,796	521,992	1,034
	L5B	124,5	197,369	0,631	107,914	1,154	153,255	0,812	383,656	1,259
Guandalini (2005)	PG-1	1024	950,859	1,077	692,621	1,478	503,452	2,034	727,112	1,135
	PG-5	550	582,540	0,944	712,344	0,772	528,457	1,041	1121,529	0,933
	PG-6	236	254,791	0,926	156,586	1,507	175,400	1,345	563,886	1,165
	PG-7	243	228,590	1,063	180,647	1,345	197,794	1,229	668,224	1,037
	PG-10	540	577,189	0,936	702,552	0,769	508,389	1,062	729,802	1,093
Birkle (2004)	1	483	481,447	1,003	356,845	1,354	359,884	1,342	831,658	1,079
	7	825	862,155	0,957	704,395	1,171	518,907	1,590	544,372	1,012
	10	1046	1298,667	0,805	1125,384	0,929	710,553	1,472	661,430	0,907
Borges (2004)	L42	657	638,052	1,030	534,761	1,229	569,060	1,155	754,047	0,963
	L42A	693	719,901	0,963	610,457	1,135	644,104	1,076	830,770	0,916
	L45	798	811,434	0,983	614,345	1,299	704,702	1,132	603,490	1,307
	L46	897	921,409	0,974	682,666	1,314	876,232	1,024	579,303	1,153
	L41	551	556,428	0,990	420,056	1,312	490,204	1,124	1003,817	1,351

REFERÊNCIA	ENSAIO	V_{exp} (kN)	NBR6118		ACI318		FIB MC2020		EUROCODE2	
			V_{NBR} (kN)	$E_{m,NBR}$	V_{ACI} (kN)	$E_{m,ACI}$	V_{FMC} (kN)	$E_{m,FMC}$	V_{EC2} (kN)	$E_{m,EC2}$
Borges (2004)	L41A	600	648,655	0,925	496,431	1,209	573,810	1,046	301,322	0,796
	L43A	726	738,079	0,984	525,987	1,380	636,578	1,140	308,724	1,043
	L44	761	819,231	0,929	559,065	1,361	760,376	1,001	290,390	1,099
Timm (2004)	Ti-1A	789	634,101	1,244	388,638	2,030	703,869	1,121	353,344	0,696
	Ti-2A	668	608,688	1,097	365,510	1,828	590,381	1,131	340,504	1,060
	Ti-3A	1356	1087,302	1,247	713,254	1,901	1192,923	1,137	342,775	0,966
Oliveira *et al*. (2003)	L1a	240	309,306	0,776	234,520	1,023	165,718	1,448	382,076	0,631
	L1b	322	316,147	1,019	241,890	1,331	170,831	1,885	386,277	1,036
	L1c	319	305,074	1,046	214,351	1,488	184,073	1,733	368,436	0,972
	L2a	246	358,817	0,686	306,811	0,802	221,677	1,110	415,870	0,604
	L2b	361	348,645	1,035	295,269	1,223	213,663	1,690	401,175	0,985
	L2c	331	349,991	0,946	296,508	1,116	214,449	1,543	410,961	0,983
	L3a	241	391,871	0,615	299,743	0,804	263,938	0,913	449,762	0,638
	L3b	400	397,413	1,007	306,507	1,305	270,018	1,481	469,999	0,906
	L3c	358	380,255	0,941	287,230	1,246	253,152	1,414	470,462	0,948
	L4a	251	432,459	0,580	316,280	0,794	312,692	0,803	301,729	1,210
	L4b	395	420,072	0,940	303,335	1,302	300,141	1,316	255,286	2,119
	L4c	404	428,823	0,942	312,584	1,292	309,164	1,307	238,994	1,381
Oliveira *et al*. (2003)	L5a	287	475,846	0,603	341,616	0,840	364,658	0,787	453,393	1,286
	L5b	426	502,188	0,848	370,372	1,150	395,354	1,078	725,363	1,246
	L5c	446	495,927	0,899	363,246	1,228	387,604	1,151	1350,058	1,023
Ospina *et al*. (2003)	SR-1	365	382,557	0,954	350,032	1,043	414,770	0,880	147,766	1,793
	ER1-VS	541	407,005	1,329	393,598	1,374	479,213	1,129	187,940	1,564
Li (2000)	P100	330	296,028	1,115	244,720	1,348	386,626	0,854	201,916	1,550
	P150	583	500,180	1,166	428,260	1,361	598,782	0,974	316,197	0,968
	P200	904	748,861	1,207	652,587	1,385	812,609	1,112	105,671	1,136
	P300	1381	1366,946	1,010	1166,658	1,184	1245,335	1,109	127,890	1,329

REFERÊNCIA	ENSAIO	V_{exp} (kN)	NBR6118		ACI318		FIB MC2020		EUROCODE2	
			V_{NBR} (kN)	$E_{m,NBR}$	V_{ACI} (kN)	$E_{m,ACI}$	V_{FMC} (kN)	$E_{m,FMC}$	V_{EC2} (kN)	$E_{m,EC2}$
Matthys e Taerwe (2000)	R1'	265	197,856	1,339	170,140	1,558	251,592	1,053	127,890	1,056
	R2	294	219,210	1,341	126,650	2,321	180,025	1,633	154,368	1,166
	R3	313	237,064	1,320	122,731	2,550	177,625	1,762	346,892	0,868
McHarg *et al*. (2000)	NU	306	381,224	0,803	311,415	0,983	316,854	0,966	304,806	1,043
Ozawa *et al*. (2000)	LA1	120	121,194	0,990	77,912	1,540	112,592	1,066	400,152	0,907
	LA21	170	146,677	1,159	77,912	2,182	112,592	1,510	413,154	1,072
	LA22	135	146,677	0,920	77,912	1,733	112,592	1,199	399,434	1,259
	LB1	180	165,168	1,090	92,012	1,956	131,306	1,371	412,569	1,302
Ghannoum (1998)	S1-U	301	416,284	0,723	354,339	0,849	445,075	0,676	402,832	1,316
	S1-B	318	312,882	1,016	238,599	1,333	229,955	1,383	436,587	1,571
	S2-U	363	480,198	0,756	439,000	0,827	440,590	0,824	443,362	1,570
	S3-U	443	506,737	0,874	475,892	0,931	477,615	0,928	453,791	1,761
Sistonen *et al*. (1997)	L1	503	431,371	1,166	375,461	1,340	408,771	1,231	423,570	1,129
	L2	537	443,359	1,211	388,301	1,383	422,751	1,270	512,359	2,168
	L3	530	433,872	1,222	377,643	1,403	410,837	1,290	504,841	2,193
	L4	686	588,215	1,166	567,557	1,209	622,566	1,102	508,743	2,121
	L5	696	593,830	1,172	573,230	1,214	627,848	1,109	331,693	0,965
	L6	799	608,603	1,313	593,442	1,346	651,937	1,226	268,661	1,269
Sistonen *et al*. (1997)	L7	478	453,980	1,053	335,246	1,426	349,999	1,366	237,344	1,205
	L8	1111	954,579	1,164	935,509	1,188	1056,542	1,052	240,473	1,235
	L9	1107	943,974	1,173	921,309	1,202	1039,749	1,065	225,006	1,084
	L10	1079	951,064	1,135	930,999	1,159	1052,212	1,025	235,295	1,249
Ramdane (1996)	12	320	362,624	0,882	272,597	1,174	421,625	0,759	219,886	1,032
	14	341	304,180	1,121	192,152	1,775	234,474	1,454	58,561	1,025
	21	286	268,722	1,064	159,552	1,793	179,738	1,591	237,360	1,095
	23	297	272,265	1,091	162,718	1,825	198,557	1,496	259,364	1,388
	25	244	253,383	0,963	145,352	1,679	163,741	1,490	224,543	1,122

REFERÊNCIA	ENSAIO	V_{exp} (kN)	NBR6118		ACI318		FIB MC2020		EUROCODE2	
			V_{NBR} (kN)	$E_{m,NBR}$	V_{ACI} (kN)	$E_{m,ACI}$	V_{FMC} (kN)	$E_{m,FMC}$	V_{EC2} (kN)	$E_{m,EC2}$
Ramdane (1996)	26	294	264,970	1,110	155,435	1,891	175,100	1,679	187,068	0,930
	27	227	246,325	0,922	151,252	1,501	170,388	1,332	191,569	0,783
Banthia *et al*. (1995)	IV	60	69,113	0,868	55,716	1,077	102,335	0,586	189,457	1,008
Urban (1994)	Pm 1/1-1.5	260	272,792	0,953	173,788	1,496	204,862	1,269	161,949	0,846
	Pd 1/1-1.5	360	388,989	0,925	308,736	1,166	395,208	0,911	1728,890	1,186
	P 1/2-1.5	252	250,493	1,006	162,208	1,554	206,886	1,218	1077,490	1,114
Theodorakopoulos e Swamy (1993)	FS-1	174	209,812	0,829	191,920	0,907	208,924	0,833	293,608	0,875
	FS-8	150	189,484	0,792	156,342	0,959	163,696	0,916	222,961	1,184
	FS-10	191	234,670	0,814	233,666	0,817	262,360	0,728	245,853	1,049
	FS-19	137	181,639	0,754	189,561	0,723	206,356	0,664	272,234	1,117
Tomaszewicz (1993)	ND65-1-1	2050	1783,490	1,149	1361,233	1,506	1061,884	1,931	272,234	1,036
	ND65-2-1	1200	1112,395	1,079	781,019	1,536	638,249	1,880	272,234	1,260
Alexander e Simmonds (1992)	P11S150	257	333,553	0,770	335,136	0,767	308,769	0,832	243,852	1,021
	P38S150	264	270,322	0,977	254,711	1,036	237,573	1,111	293,921	1,211
	P19S150	258	284,892	0,906	268,309	0,962	248,195	1,040	353,131	1,034
	PI9RE	304	315,462	0,964	312,634	0,972	289,198	1,051	375,406	1,303
	P19RC	282	315,462	0,894	312,634	0,902	289,198	0,975	396,301	1,100
	P19RB	343	315,462	1,087	312,634	1,097	345,566	0,993	196,653	1,358
Marzouk (1991)	HS2	249	287,906	0,865	253,069	0,984	285,171	0,873	296,267	1,681
	HS3	356	345,334	1,031	251,255	1,417	283,126	1,257	301,248	1,859
	HS5	365	382,889	0,953	368,381	0,991	408,620	0,893	257,058	1,245
	HS6	489	415,409	1,177	352,285	1,388	391,704	1,248	293,512	1,349
	HS8	436	436,400	0,999	349,760	1,247	388,896	1,121	152,772	0,844
	HS13	267	253,562	1,053	165,035	1,618	188,998	1,413	149,487	0,910
	HS14	498	404,942	1,230	329,990	1,509	388,489	1,282	153,841	0,839
	HS15	560	465,253	1,204	410,914	1,363	504,427	1,110	230,343	1,177

REFERÊNCIA	ENSAIO	V_{exp} (kN)	NBR6118		ACI318		FIB MC2020		EUROCODE2	
			V_{NBR} (kN)	$E_{m,NBR}$	V_{ACI} (kN)	$E_{m,ACI}$	V_{FMC} (kN)	$E_{m,FMC}$	V_{EC2} (kN)	$E_{m,EC2}$
Marzouk (1991)	NS1	320	292,666	1,093	196,027	1,632	220,892	1,449	153,044	1,045
	NS2	396	313,197	1,264	230,625	1,717	256,431	1,544	294,882	1,038
Gardner (1990)	8	129	164,397	0,785	68,094	1,894	100,261	1,287	195,455	1,243
	9	136	160,863	0,845	65,910	2,063	113,762	1,195	198,034	1,030
	10	129	165,548	0,779	68,810	1,875	135,151	0,954	198,034	0,752
Gardner (1990)	13	271	270,625	1,001	200,622	1,351	354,465	0,765	198,034	0,651
	15	160	183,794	0,871	95,983	1,667	177,459	0,902	198,034	0,702
	25	306	346,449	0,883	290,594	1,053	513,431	0,596	69,912	1,259
	27	243	234,726	1,035	138,529	1,754	256,121	0,949	86,255	1,438
Lovrovich (1990)	F2	204	209,047	0,976	98,334	2,075	183,761	1,110	94,254	1,337
	F3	149	209,047	0,713	98,334	1,515	165,274	0,902	142,987	1,357
	F4	129	209,047	0,617	98,334	1,312	150,031	0,860	140,507	1,253
	F5	139	209,047	0,665	98,334	1,414	126,763	1,097	122,339	1,349
Rankin e Long (1987)	2C	88	83,371	1,056	60,347	1,458	81,982	1,073	693,002	1,190
	3C	124	102,861	1,206	60,347	2,055	81,982	1,513	324,267	1,203
	4C	126	112,399	1,121	55,940	2,252	75,994	1,658	327,611	1,114
Regan (1986)	I/1	194	194,055	1,000	156,542	1,239	163,697	1,185	102,138	1,146
	I/2	176	190,689	0,923	133,313	1,320	139,407	1,262	103,191	1,018
	I/6	165	164,446	1,003	133,222	1,239	142,020	1,162	105,003	1,000
	II/1	825	771,253	1,070	538,946	1,531	455,707	1,810	163,034	1,208
	II/2	390	349,874	1,115	215,630	1,809	242,742	1,607	191,911	1,115
	II/3	365	353,481	1,033	218,973	1,667	246,506	1,481	203,010	1,054
	II/4	117	107,597	1,087	53,907	2,170	81,175	1,441	236,998	1,046
	II/5	105	108,706	0,966	54,743	1,918	82,434	1,274	161,536	1,176
	II/6	105	110,615	0,949	56,192	1,869	84,615	1,241	176,285	1,339
	III/1	197	186,148	1,058	113,671	1,733	145,589	1,353	165,865	1,495
	III/3	214	219,119	0,977	145,171	1,474	185,935	1,151	171,453	1,528

REFERÊNCIA	ENSAIO	V_{exp} (kN)	NBR6118		ACI318		FIB MC2020		EUROCODE2	
			V_{NBR} (kN)	$E_{m,NBR}$	V_{ACI} (kN)	$E_{m,ACI}$	V_{FMC} (kN)	$E_{m,FMC}$	V_{EC2} (kN)	$E_{m,EC2}$
Regan (1986)	III/5	214	233,150	0,918	118,624	1,804	156,014	1,372	250,887	0,678
	III/6	248	272,184	0,911	149,628	1,657	196,791	1,260	258,536	1,083
	IV/1	190	198,585	0,957	126,778	1,499	146,794	1,294	257,366	1,030
	IV/2	236	216,718	1,089	144,532	1,633	167,351	1,410	295,922	0,963
	IV/3	248	203,907	1,216	131,908	1,880	152,734	1,624	261,949	1,088
	IV/4	262	210,777	1,243	138,631	1,890	160,518	1,632	142,119	1,386
	V/1	170	242,604	0,701	120,559	1,410	126,745	1,341	146,753	1,547
	V/2	280	289,759	0,966	195,410	1,433	214,609	1,305	153,271	1,533
	V/3	265	263,331	1,006	155,276	1,707	166,683	1,590	151,879	1,218
	V/4	285	282,681	1,008	201,754	1,413	191,072	1,492	153,871	2,197
	V/5	285	282,812	1,008	183,864	1,550	200,387	1,422	130,442	1,319
Regan (1984)	1	197	174,432	1,129	104,389	1,887	153,370	1,284	132,153	2,149
	2	227	180,120	1,260	109,536	2,072	180,007	1,261	170,749	2,466
	3	235	188,120	1,249	116,913	2,010	217,965	1,078	168,538	1,080
	4	185	162,506	1,138	89,917	2,057	159,651	1,159	170,393	2,160
	5	338	210,925	1,602	141,298	2,392	274,497	1,231	471,217	2,332
	8	172	139,569	1,232	101,213	1,699	179,708	0,957	214,467	1,306
	9	284	181,155	1,568	159,049	1,786	308,983	0,919	193,516	1,023
	10	421	234,061	1,799	165,172	2,549	320,878	1,312	506,226	1,237
	11	182	180,331	1,009	105,109	1,732	186,626	0,975	188,520	0,971
	15	368	233,574	1,576	164,656	2,235	311,273	1,182	194,814	1,442
	17	1099	511,644	2,148	407,836	2,695	740,814	1,484	190,677	1,510
Schaefers (1984)	0	280	259,794	1,078	179,051	1,564	226,941	1,234	191,551	1,691
Swamy e Ali (1982)	S-1	198	217,044	0,912	197,062	1,005	214,083	0,925	437,950	1,434

REFERÊNCIA	ENSAIO	V_{exp} (kN)	NBR6118		ACI318		FIB MC2020		EUROCODE2	
			V_{NBR} (kN)	$E_{m,NBR}$	V_{ACI} (kN)	$E_{m,ACI}$	V_{FMC} (kN)	$E_{m,FMC}$	V_{EC2} (kN)	$E_{m,EC2}$
Pralong *et al*. (1979)	P5	626	617,249	1,014	427,949	1,463	387,131	1,617	362,559	1,280
Ladner *et al*. (1977)	6	183	199,505	0,917	92,344	1,982	125,151	1,462	357,803	1,230
	7	281	276,028	1,018	173,530	1,619	249,723	1,125	407,224	1,422
	10	288	252,378	1,141	148,357	1,941	209,790	1,373	408,278	1,421
	11	324	305,353	1,061	206,571	1,568	308,161	1,051	277,587	1,304
Pralong *et al*. (1977)	P2	628	559,510	1,122	377,608	1,663	325,348	1,930	247,480	0,743
Criswell (1974)	S2150-1	464	457,674	1,014	331,121	1,401	398,283	1,165	176,288	1,038
	S2150-2	440	453,728	0,970	327,851	1,342	394,639	1,115	541,780	1,030
	S4150-1	579	684,655	0,846	611,992	0,946	761,861	0,760	604,052	1,094
	S4150-2	580	686,427	0,845	614,368	0,944	759,941	0,763	371,783	0,845
Ladner (1973)	M	362	348,087	1,040	240,629	1,504	325,838	1,111	311,734	1,010
Nylander e Sundquist (1972)	B1	184	240,676	0,765	181,433	1,014	293,653	0,627	927,375	1,792
	B2	183	185,277	0,988	114,332	1,601	172,216	1,063	269,450	1,258
	C2	558	595,182	0,938	416,161	1,341	457,061	1,221	336,770	1,220
	C1	661	663,592	0,996	419,255	1,577	458,828	1,441	384,083	1,099
Hawkins *et al*. (1971)	8	314	365,732	0,859	248,710	1,263	376,900	0,833	344,092	1,194
	9	315	333,401	0,945	296,851	1,061	327,881	0,961	417,856	1,031
Schaeidt *et al*. (1970)	P1	1662	1231,064	1,350	951,513	1,747	867,281	1,916	342,755	0,852
Vanderbilt (1972)	A1/T2	339	319,641	1,061	222,970	1,520	283,017	1,198	306,346	0,829
	A2/M2	411	399,501	1,029	278,659	1,475	408,747	1,006	333,195	1,005
	A2/M3	422	451,178	0,935	290,451	1,453	425,266	0,992	362,144	1,466
	A2/T1	411	401,374	1,024	330,344	1,244	417,981	0,983	290,918	1,296
	A2/T2	431	487,418	0,884	339,055	1,271	429,004	1,005	301,089	1,309
	A3/M3	292	406,601	0,718	254,225	1,149	372,906	0,783	241,392	0,895

REFERÊNCIA	ENSAIO	V_{exp} (kN)	NBR6118		ACI318		FIB MC2020		EUROCODE2	
			V_{NBR} (kN)	$E_{m,NBR}$	V_{ACI} (kN)	$E_{m,ACI}$	V_{FMC} (kN)	$E_{m,FMC}$	V_{EC2} (kN)	$E_{m,EC2}$
Vanderbilt (1972)	A4/M1	254	366,227	0,694	290,646	0,874	439,229	0,578	262,974	0,977
	A4/M2	335	393,300	0,852	269,088	1,245	394,346	0,850	261,769	1,150
	A4/M3	531	429,602	1,236	276,099	1,923	388,854	1,366	236,996	0,827
	A4/T1	377	347,783	1,084	268,969	1,402	341,881	1,103	260,926	1,085
	A4/T2	394	357,174	1,103	263,372	1,496	334,300	1,179	267,957	1,482
Manterola (1966)	P1-S1	216	234,756	0,920	145,650	1,483	138,287	1,562	189,426	0,971
	P2-S1	257	346,244	0,742	288,800	0,890	296,636	0,866	263,107	0,802
	P3-S1	301	444,720	0,677	413,936	0,727	461,632	0,652	195,613	0,844
	PI-S2	196	230,481	0,850	141,689	1,383	130,032	1,507	91,448	0,700
	P2-S2	283	343,546	0,824	285,432	0,991	283,621	0,998	88,943	0,933
	P3-S2	397	455,232	0,872	428,700	0,926	463,070	0,857	258,094	1,507
	P1-S3	184	201,925	0,911	105,581	1,743	113,699	1,618	262,379	1,494
	P2-S3	211	255,874	0,825	172,241	1,225	158,070	1,335	255,713	1,478
	P3-S3	165	190,236	0,867	180,310	0,915	165,475	0,997	252,604	1,358
Taylor e Hayes (1965)	2S2	64	84,921	0,754	45,336	1,412	64,918	0,986	246,896	1,596
	2S3	83	91,734	0,905	53,766	1,544	79,559	1,043	275,493	1,129
Moe (1961)	S1-60	389	334,402	1,163	264,074	1,473	314,309	1,238	245,071	1,041
	S1-70	392	339,954	1,153	270,679	1,448	295,534	1,326	241,412	1,139
	S3-70	378	305,457	1,237	226,185	1,671	244,122	1,548	336,578	0,992
	S5-60	343	301,742	1,137	222,072	1,545	277,182	1,237	330,643	1,004
	R1	394	393,228	1,002	272,013	1,448	447,836	0,880	296,568	1,450
	R2	311	299,004	1,040	203,783	1,526	249,200	1,248	279,684	1,459

REFERÊNCIA	ENSAIO	V_{exp} (kN)	NBR6118		ACI318		FIB MC2020		EUROCODE2	
			V_{NBR} (kN)	$E_{m,NBR}$	V_{ACI} (kN)	$E_{m,ACI}$	V_{FMC} (kN)	$E_{m,FMC}$	V_{EC2} (kN)	$E_{m,EC2}$
Kinnunen e Nylander (1960)	IAI5a-5	255	265,141	0,962	167,367	1,524	202,048	1,262	220,951	1,168
	IAI5a-6	275	260,639	1,055	162,744	1,690	193,819	1,419	226,608	1,139
	IAI5c-11	334	361,178	0,925	186,428	1,792	226,248	1,476	273,618	1,213
	IAI5c-12	332	354,108	0,938	180,567	1,839	218,443	1,520	271,322	1,224
	IA30a-24	430	391,106	1,099	282,804	1,520	352,079	1,221	84,324	1,115
	IA30a-25	408	372,367	1,096	264,620	1,542	331,062	1,232	86,564	1,201
	IA30d-32	258	294,896	0,875	268,167	0,962	336,494	0,767	84,153	1,165
	IA30d-33	258	300,971	0,857	275,507	0,936	340,990	0,757	85,251	1,220
	IA30e-34	332	367,965	0,902	264,947	1,253	328,241	1,011	76,126	1,077
	IA30e-35	332	363,026	0,915	258,703	1,283	321,130	1,034	74,314	1,103
Base (1959)	A	94	96,860	0,970	50,014	1,879	98,332	0,956	99,012	1,141
	B	104	99,433	1,046	52,019	1,999	102,276	1,017	95,916	1,043
	C	98	96,664	1,014	49,862	1,965	98,034	1,000	128,817	1,902
	D	104	97,925	1,062	50,840	2,046	99,958	1,040	288,512	1,265
	E	82	87,443	0,938	53,172	1,542	104,542	0,784	302,295	1,178
	F	82	85,362	0,961	51,286	1,599	100,833	0,813	327,228	1,073
	G	113	113,732	0,994	52,455	2,154	103,132	1,096	296,762	1,348
	H	100	110,175	0,908	50,014	1,999	98,332	1,017	258,884	0,583
Rosenthal (1959)	II/4	245	179,266	1,367	122,174	2,005	155,390	1,577	258,884	0,641
Elstner e Hognestad (1956)	A-1b	365	370,481	0,985	284,873	1,281	365,359	0,999	274,028	0,734
	A-1c	356	388,180	0,917	305,529	1,165	391,850	0,909	274,028	0,723
	A-1d	351	420,197	0,835	344,098	1,020	441,316	0,795	274,028	0,730
	A-4	400	436,177	0,917	369,486	1,083	494,159	0,809	274,028	0,726

REFERÊNCIA	ENSAIO	V_{exp} (kN)	NBR6118		ACI318		FIB MC2020		EUROCODE2	
			V_{NBR} (kN)	$E_{m,NBR}$	V_{ACI} (kN)	$E_{m,ACI}$	V_{FMC} (kN)	$E_{m,FMC}$	V_{EC2} (kN)	$E_{m,EC2}$
Richart e Kluge (1939)	2-in. Disk 1	151	246,594	0,612	122,934	1,228	176,802	0,854	269,467	0,816
	2-in. Disk 2	166	246,594	0,673	122,934	1,350	176,802	0,939	269,467	0,802
	6-in. Disk 1	201	290,212	0,693	191,532	1,049	282,513	0,711	270,886	0,919
	6-in. Disk 2	198	290,212	0,682	191,532	1,034	282,513	0,701	274,028	0,741
	6-in. Plaster 1	200	290,212	0,689	191,532	1,044	282,513	0,708	274,028	0,737
	6-in. Plaster 2	199	290,212	0,686	191,532	1,039	282,513	0,704	225,683	1,662
	14-in. Disk 1	243	378,312	0,642	260,810	0,844	384,698	0,572	228,619	1,706
	14-in. Ring 1	249	378,312	0,658	260,810	0,828	384,698	0,561	237,319	1,580
	14-in. Ring 2	239	378,312	0,632	330,087	0,754	486,883	0,511	229,866	1,718
	6-in. Ring 1	203	290,212	0,699	191,532	1,060	282,513	0,719	248,452	1,409
	6-in. Ring 2	202	290,212	0,696	191,532	1,055	282,513	0,715	259,267	1,157

APÊNDICE 3 – Dimensionamento à punção das 96 lajes lisas analisadas

GEOMETRIA E PROPRIEDADES DOS MATERIAIS – FIB MC2020 (2024)												
PAVIMENTO	l_x **(cm)**	l_y **(cm)**	r_{sx} **(cm)**	r_{sy} **(cm)**	b **(cm)**	h **(cm)**	d_{vx} **(cm)**	d_{vy} **(cm)**	d_v **(cm)**	f_{ck} **(MPa)**	f_{yk} **(MPa)**	E_s **(GPa)**
Pav. 2	600	600	132	132	35	24,0	20,7	19,1	19,9	25	500	200
Pav. 3	600	600	132	132	35	21,5	18,2	16,6	17,4	25	500	200
Pav. 4	600	600	132	132	35	20,5	17,2	15,6	16,4	25	500	200
Pav. 5	600	600	132	132	35	20,0	16,7	15,1	15,9	25	500	200
Pav. 2	600	600	132	132	35	22,5	19,2	17,6	18,4	30	500	200
Pav. 3	600	600	132	132	35	20,0	16,7	15,1	15,9	30	500	200
Pav. 4	600	600	132	132	35	20,0	16,7	15,1	15,9	30	500	200
Pav. 5	600	600	132	132	35	20,0	16,7	15,1	15,9	30	500	200
Pav. 2	600	600	132	132	35	22,0	18,7	17,1	17,9	35	500	200
Pav. 3	600	600	132	132	35	20,0	16,7	15,1	15,9	35	500	200
Pav. 4	600	600	132	132	35	21,0	17,7	16,1	16,9	35	500	200
Pav. 5	600	600	132	132	35	20,5	17,2	15,6	16,4	35	500	200
Pav. 2	600	600	132	132	35	21,0	17,7	16,1	16,9	40	500	200
Pav. 3	600	600	132	132	35	20,0	16,7	15,1	15,9	40	500	200
Pav. 4	600	600	132	132	35	20,0	16,7	15,1	15,9	40	500	200
Pav. 5	600	600	132	132	35	20,0	16,7	15,1	15,9	40	500	200
Pav. 2	600	600	132	132	35	20,0	16,7	15,1	15,9	45	500	200
Pav. 3	600	600	132	132	35	20,0	16,7	15,1	15,9	45	500	200
Pav. 4	600	600	132	132	35	20,0	16,7	15,1	15,9	45	500	200
Pav. 5	600	600	132	132	35	20,0	16,7	15,1	15,9	45	500	200
Pav. 2	600	600	132	132	35	20,0	16,7	15,1	15,9	50	500	200
Pav. 3	600	600	132	132	35	20,0	16,7	15,1	15,9	50	500	200
Pav. 4	600	600	132	132	35	20,0	16,7	15,1	15,9	50	500	200
Pav. 5	600	600	132	132	35	20,0	16,7	15,1	15,9	50	500	200

AÇÕES, ESFORÇOS CORTANTES E MOMENTOS FLETORES – FIB MC2020 (2024)									
PAVIMENTO	g_k (kN/m²)	q_k (kN/m²)	$P_k = g_k + q_k$	$r = g_k/q_k$	$P_d = 1,35g_k + 1,50q_k$	V_{Ek} (kN)	V_{ED} (kN)	M_{Sxd} (Nm/m)	M_{Syd} (kNm/m)
Pav. 2	7,00	4,0	11,00	0,57	15,45	333,36	468,21	122,52	122,48
Pav. 3	6,38	2,5	8,88	0,39	12,36	283,35	394,50	103,23	103,20
Pav. 4	6,13	1,5	7,63	0,24	10,52	250,02	344,90	90,26	90,22
Pav. 5	6,00	1,0	7,00	0,17	9,60	233,35	320,02	83,74	83,71
Pav. 2	6,63	4,0	10,63	0,60	14,94	333,36	468,86	122,69	122,65
Pav. 3	6,00	2,5	8,50	0,42	11,85	283,35	395,03	103,37	103,33
Pav. 4	6,00	1,5	7,50	0,25	10,35	250,02	345,02	90,29	90,25
Pav. 5	6,00	1,0	7,00	0,17	9,60	233,35	320,02	83,74	83,71
Pav. 2	6,50	4,0	10,50	0,62	14,78	333,36	469,08	122,75	122,71
Pav. 3	6,00	2,5	8,50	0,42	11,85	283,35	395,03	103,37	103,33
Pav. 4	6,25	1,5	7,75	0,24	10,69	250,02	344,78	90,22	90,19
Pav. 5	6,13	1,0	7,13	0,16	9,77	233,35	319,93	83,72	83,69
Pav. 2	6,25	4,0	10,25	0,64	14,44	333,36	469,54	122,87	122,83
Pav. 3	6,00	2,5	8,50	0,42	11,85	283,35	395,03	103,37	103,33
Pav. 4	6,00	1,5	7,50	0,25	10,35	250,02	345,02	90,29	90,25
Pav. 5	6,00	1,0	7,00	0,17	9,60	233,35	320,02	83,74	83,71
Pav. 2	6,00	4,0	10,00	0,67	14,10	333,36	470,03	123,00	122,95
Pav. 3	6,00	2,5	8,50	0,42	11,85	283,35	395,03	103,37	103,33
Pav. 4	6,00	1,5	7,50	0,25	10,35	250,02	345,02	90,29	90,25
Pav. 5	6,00	1,0	7,00	0,17	9,60	233,35	320,02	83,74	83,71
Pav. 2	6,00	4,0	10,00	0,67	14,10	333,36	470,03	123,00	122,95
Pav. 3	6,00	2,5	8,50	0,42	11,85	283,35	395,03	103,37	103,33
Pav. 4	6,00	1,5	7,50	0,25	10,35	250,02	345,02	90,29	90,25
Pav. 5	6,00	1,0	7,00	0,17	9,60	233,35	320,02	83,74	83,71

ARMADURAS, VERIFICAÇÃO DA RESISTÊNCIA A PUNÇÃO E RESISTÊNCIAS NORMATIVAS – FIB MC2020 (2024)												
PAVIMENTO	$A_{s,x}$ (cm²/m)	$A_{s,y}$ (cm²/m)	r (%)	$b_{0,5}$ (cm)	β_e	$\tau_{Ed0,5}$ (kN/cm²)	$d_{máx,ag}$ (mm)	k_y	$t_{Rd,c}$	$t_{Rd,lim}$	$\tau_{Ed0,5}$ <=$t_{Rd,c}$	$t_{Rd,c}/\tau_{Ed0,5}$
Pav. 2	15,04	16,64	0,80	202,52	1	0,12	19	0,36	0,12	0,17	Ok!	1,03
Pav. 3	14,57	16,42	0,89	194,66	1	0,12	19	0,36	0,12	0,17	Ok!	1,03
Pav. 4	13,44	15,25	0,87	191,52	1	0,11	19	0,36	0,12	0,17	Ok!	1,09
Pav. 5	12,82	14,59	0,86	189,95	1	0,11	19	0,36	0,12	0,17	Ok!	1,13
Pav. 2	16,18	18,04	0,93	197,81	1	0,13	19	0,36	0,13	0,18	Ok!	1,02
Pav. 3	15,88	18,10	1,07	189,95	1	0,13	19	0,36	0,13	0,18	Ok!	1,01
Pav. 4	13,65	15,47	0,91	189,95	1	0,11	19	0,36	0,13	0,18	Ok!	1,15
Pav. 5	12,56	14,20	0,84	189,95	1	0,11	19	0,36	0,13	0,18	Ok!	1,24
Pav. 2	16,45	18,34	0,97	196,23	1	0,13	19	0,36	0,14	0,20	Ok!	1,06
Pav. 3	15,59	17,67	1,05	189,95	1	0,13	19	0,36	0,14	0,20	Ok!	1,09
Pav. 4	12,55	14,02	0,79	193,09	1	0,11	19	0,36	0,14	0,20	Ok!	1,35
Pav. 5	11,97	13,41	0,77	191,52	1	0,10	19	0,36	0,14	0,20	Ok!	1,40
Pav. 2	17,35	19,47	1,09	193,09	1	0,14	19	0,36	0,15	0,21	Ok!	1,06
Pav. 3	15,39	17,37	1,03	189,95	1	0,13	19	0,36	0,15	0,21	Ok!	1,16
Pav. 4	13,30	14,95	0,89	189,95	1	0,11	19	0,36	0,15	0,21	Ok!	1,33
Pav. 5	12,27	13,78	0,82	189,95	1	0,11	19	0,36	0,15	0,21	Ok!	1,43
Pav. 2	18,48	20,91	1,24	189,95	1	0,16	19	0,36	0,16	0,22	Ok!	1,04
Pav. 3	15,29	17,22	1,02	189,95	1	0,13	19	0,36	0,16	0,22	Ok!	1,24
Pav. 4	13,22	14,85	0,88	189,95	1	0,11	19	0,36	0,16	0,22	Ok!	1,41
Pav. 5	12,21	13,69	0,81	189,95	1	0,11	19	0,36	0,16	0,22	Ok!	1,52
Pav. 2	18,36	20,73	1,23	189,95	1	0,16	19	0,36	0,17	0,24	Ok!	1,10
Pav. 3	15,21	17,10	1,02	189,95	1	0,13	19	0,36	0,17	0,24	Ok!	1,30
Pav. 4	13,16	14,76	0,88	189,95	1	0,11	19	0,36	0,17	0,24	Ok!	1,49
Pav. 5	12,16	13,61	0,81	189,95	1	0,11	19	0,36	0,17	0,24	Ok!	1,61

GEOMETRIA E PROPRIEDADES DOS MATERIAIS – ABNT NBR6118 (2023)							
PAVIMENTO	b**(cm)**	h**(cm)**	d_x**(cm)**	d_y**(cm)**	d**(cm)**	f_{ck}**(MPa)**	f_{yk}**(MPa)**
Pav. 2	35	21	17,7	16,1	16,9	25	500
Pav. 3	35	20	16,7	15,1	15,9	25	500
Pav. 4	35	20	16,7	15,1	15,9	25	500
Pav. 5	35	20	16,7	15,1	15,9	25	500
Pav. 2	35	20	16,7	15,1	15,9	30	500
Pav. 3	35	20	16,7	15,1	15,9	30	500
Pav. 4	35	20	16,7	15,1	15,9	30	500
Pav. 5	35	20	16,7	15,1	15,9	30	500
Pav. 2	35	20	16,7	15,1	15,9	35	500
Pav. 3	35	20	16,7	15,1	15,9	35	500
Pav. 4	35	20	16,7	15,1	15,9	35	500
Pav. 5	35	20	16,7	15,1	15,9	35	500
Pav. 2	35	20	16,7	15,1	15,9	40	500
Pav. 3	35	20	16,7	15,1	15,9	40	500
Pav. 4	35	20	16,7	15,1	15,9	40	500
Pav. 5	35	20	16,7	15,1	15,9	40	500
Pav. 2	35	20	16,7	15,1	15,9	45	500
Pav. 3	35	20	16,7	15,1	15,9	45	500
Pav. 4	35	20	16,7	15,1	15,9	45	500
Pav. 5	35	20	16,7	15,1	15,9	45	500
Pav. 2	35	20	16,7	15,1	15,9	50	500
Pav. 3	35	20	16,7	15,1	15,9	50	500
Pav. 4	35	20	16,7	15,1	15,9	50	500
Pav. 5	35	20	16,7	15,1	15,9	50	500

AÇÕES, ESFORÇOS CORTANTES E MOMENTOS FLETORES – ABNT NBR6118 (2023)						
PAVIMENTO	g_k **(kN/m²)**	q_k **(kN/m²)**	$r = g_k/q_k$	V_{Sk}**(kN)**	M_{Sxk} **(Nm/m)**	M_{Syk}**(kNm/m)**
Pav. 2	6,25	4,0	0,64	333,36	87,23	87,20
Pav. 3	6,00	2,5	0,42	283,35	74,15	74,12
Pav. 4	6,00	1,5	0,25	250,02	65,43	65,40
Pav. 5	6,00	1,0	0,17	233,35	61,06	61,04
Pav. 2	6,00	4,0	0,67	333,36	87,23	87,20
Pav. 3	6,00	2,5	0,42	283,35	74,15	74,12
Pav. 4	6,00	1,5	0,25	250,02	65,43	65,40
Pav. 5	6,00	1,0	0,17	233,35	61,06	61,04
Pav. 2	6,00	4,0	0,67	333,36	87,23	87,20
Pav. 3	6,00	2,5	0,42	283,35	74,15	74,12
Pav. 4	6,00	1,5	0,25	250,02	65,43	65,40
Pav. 5	6,00	1,0	0,17	233,35	61,06	61,04
Pav. 2	6,00	4,0	0,67	333,36	87,23	87,20
Pav. 3	6,00	2,5	0,42	283,35	74,15	74,12
Pav. 4	6,00	1,5	0,25	250,02	65,43	65,40
Pav. 5	6,00	1,0	0,17	233,35	61,06	61,04
Pav. 2	6,00	4,0	0,67	333,36	87,23	87,20
Pav. 3	6,00	2,5	0,42	283,35	74,15	74,12
Pav. 4	6,00	1,5	0,25	250,02	65,43	65,40
Pav. 5	6,00	1,0	0,17	233,35	61,06	61,04
Pav. 2	6,00	4,0	0,67	333,36	87,23	87,20
Pav. 3	6,00	2,5	0,42	283,35	74,15	74,12
Pav. 4	6,00	1,5	0,25	250,02	65,43	65,40
Pav. 5	6,00	1,0	0,17	233,35	61,06	61,04

ARMADURAS, VERIFICAÇÃO DA RESISTÊNCIA A PUNÇÃO E RESISTÊNCIAS NORMATIVAS – ABNT NBR6118 (2023)												
PAVIMENTO	$A_{s,x}$ (cm²/m)	$A_{s,y}$ (cm²/m)	r (%)	u (cm)	F_{Sk2} (kN)	t_{Sd2} (kN/cm²)	F_{Sk1} (kN)	t_{Sd1} (kN/cm²)	t_{Rd2} (kN/cm²)	t_{Rd1} (kN/cm²)	t_{Sd2} <= t_{Rd2}	t_{Rd1}/t_{Sd1}
Pav. 2	18,70	21,59	1,19	140	333,36	0,20	333,36	0,08	0,43	0,08	OK!	1,03
Pav. 3	16,68	19,36	1,13	140	283,35	0,18	283,35	0,07	0,43	0,08	OK!	1,08
Pav. 4	14,39	16,54	0,97	140	250,02	0,16	250,02	0,06	0,43	0,08	OK!	1,16
Pav. 5	13,29	15,21	0,90	140	233,35	0,15	233,35	0,06	0,43	0,07	OK!	1,21
Pav. 2	19,55	22,65	1,33	140	333,36	0,21	333,36	0,09	0,51	0,09	OK!	1,03
Pav. 3	16,16	18,52	1,09	140	283,35	0,18	283,35	0,07	0,51	0,08	OK!	1,13
Pav. 4	14,02	15,96	0,94	140	250,02	0,16	250,02	0,06	0,51	0,08	OK!	1,22
Pav. 5	12,98	14,73	0,87	140	233,35	0,15	233,35	0,06	0,51	0,08	OK!	1,28
Pav. 2	19,04	21,82	1,28	140	333,36	0,21	333,36	0,09	0,58	0,09	OK!	1,07
Pav. 3	15,83	18,00	1,06	140	283,35	0,18	283,35	0,07	0,58	0,09	OK!	1,18
Pav. 4	13,78	15,59	0,92	140	250,02	0,16	250,02	0,06	0,58	0,08	OK!	1,28
Pav. 5	12,77	14,43	0,85	140	233,35	0,15	233,35	0,06	0,58	0,08	OK!	1,33
Pav. 2	18,69	21,28	1,26	140	333,36	0,21	333,36	0,09	0,65	0,10	OK!	1,11
Pav. 3	15,60	17,65	1,05	140	283,35	0,18	283,35	0,07	0,65	0,09	OK!	1,23
Pav. 4	13,61	15,34	0,91	140	250,02	0,16	250,02	0,06	0,65	0,09	OK!	1,33
Pav. 5	12,63	14,21	0,84	140	233,35	0,15	233,35	0,06	0,65	0,08	OK!	1,39
Pav. 2	18,52	21,02	1,24	140	333,36	0,21	333,36	0,09	0,71	0,10	OK!	1,15
Pav. 3	15,49	17,48	1,04	140	283,35	0,18	283,35	0,07	0,71	0,09	OK!	1,27
Pav. 4	13,52	15,22	0,90	140	250,02	0,16	250,02	0,06	0,71	0,09	OK!	1,38
Pav. 5	12,56	14,11	0,84	140	233,35	0,15	233,35	0,06	0,71	0,09	OK!	1,44
Pav. 2	18,38	20,81	1,23	140	333,36	0,21	333,36	0,09	0,77	0,10	OK!	1,19
Pav. 3	15,39	17,34	1,03	140	283,35	0,18	283,35	0,07	0,77	0,10	OK!	1,32
Pav. 4	13,45	15,11	0,90	140	250,02	0,16	250,02	0,06	0,77	0,09	OK!	1,43
Pav. 5	12,50	14,02	0,83	140	233,35	0,15	233,35	0,06	0,77	0,09	OK!	1,49

GEOMETRIA E PROPRIEDADES DOS MATERIAIS – ACI318 (2025)										
PAVIMENTO	b**(cm)**	h**(cm)**	d_x**(cm)**	d_y**(cm)**	d**(cm)**	f_{ck}**(MPa)**	f_{cm}**(MPa)**	s**(MPa)**	$f_{C'}$**(MPa)**	f_{yk}**(MPa)**
Pav. 2	35	26,0	22,7	21,1	21,9	25	29,92	2,99	25,91	500
Pav. 3	35	24,0	20,7	19,1	19,9	25	29,92	2,99	25,91	500
Pav. 4	35	22,5	19,2	17,6	18,4	25	29,92	2,99	25,91	500
Pav. 5	35	22,0	18,7	17,1	17,9	25	29,92	2,99	25,91	500
Pav. 2	35	25,0	21,7	20,1	20,9	30	35,91	3,59	31,04	500
Pav. 3	35	22,5	19,2	17,6	18,4	30	35,91	3,59	31,04	500
Pav. 4	35	22,0	18,7	17,1	17,9	30	35,91	3,59	31,04	500
Pav. 5	35	22,0	18,7	17,1	17,9	30	35,91	3,59	31,04	500
Pav. 2	35	24,0	20,7	19,1	19,9	35	41,89	4,19	35,63	500
Pav. 3	35	21,0	17,7	16,1	16,9	35	41,89	4,19	35,63	500
Pav. 4	35	20,0	16,7	15,1	15,9	35	41,89	4,19	35,63	500
Pav. 5	35	20,0	16,7	15,1	15,9	35	41,89	4,19	35,63	500
Pav. 2	35	23,0	19,7	18,1	18,9	40	47,88	4,79	40,22	500
Pav. 3	35	21,0	17,7	16,1	16,9	40	47,88	4,79	40,22	500
Pav. 4	35	20,0	16,7	15,1	15,9	40	47,88	4,79	40,22	500
Pav. 5	35	20,0	16,7	15,1	15,9	40	47,88	4,79	40,22	500
Pav. 2	35	22,0	18,7	17,1	17,9	45	53,86	5,39	44,81	500
Pav. 3	35	20,0	16,7	15,1	15,9	45	53,86	5,39	44,81	500
Pav. 4	35	20,0	16,7	15,1	15,9	45	53,86	5,39	44,81	500
Pav. 5	35	20,0	16,7	15,1	15,9	45	53,86	5,39	44,81	500
Pav. 2	35	22,0	18,7	17,1	17,9	50	59,84	5,98	49,40	500
Pav. 3	35	20,0	16,7	15,1	15,9	50	59,84	5,98	49,40	500
Pav. 4	35	20,0	16,7	15,1	15,9	50	59,84	5,98	49,40	500
Pav. 5	35	20,0	16,7	15,1	15,9	50	59,84	5,98	49,40	500

AÇÕES, ESFORÇOS CORTANTES E MOMENTOS FLETORES – ACI318 (2025)												
PAVIMENTO	g_k **(kN/m²)**	q_k **(kN/m²)**	$P_k = g_k + q_k$	$r = g_k/q_k$	$P_{d1} = 1,4g_k$	$P_{d1} = 1,2g_k + 1,6q_k$	V_{Sk} **(kN)**	V_{Sd} **(kN)**	M_{Sxk} **(Nm/m)**	M_{Sxd} **(Nm/m)**	M_{Syk} **(kNm/m)**	M_{Syd} **(kNm/m)**
Pav. 2	7,50	4,00	11,50	0,53	10,50	15,40	333,36	446,41	87,23	116,82	87,20	116,77
Pav. 3	7,00	2,50	9,50	0,36	9,80	12,40	283,35	369,85	74,15	96,78	74,12	96,75
Pav. 4	6,63	1,50	8,13	0,23	9,28	10,35	250,02	318,48	65,43	83,34	65,40	83,31
Pav. 5	6,50	1,00	7,50	0,15	9,10	9,40	233,35	292,46	61,06	76,53	61,04	76,51
Pav. 2	7,25	4,00	11,25	0,55	10,15	15,10	333,36	447,44	87,23	117,09	87,20	117,04
Pav. 3	6,63	2,50	9,13	0,38	9,28	11,95	283,35	371,08	74,15	97,10	74,12	97,07
Pav. 4	6,50	1,50	8,00	0,23	9,10	10,20	250,02	318,77	65,43	83,42	65,40	83,39
Pav. 5	6,50	1,00	7,50	0,15	9,10	9,40	233,35	292,46	61,06	76,53	61,04	76,51
Pav. 2	7,00	4,00	11,00	0,57	9,80	14,80	333,36	448,52	87,23	117,37	87,20	117,33
Pav. 3	6,25	2,50	8,75	0,40	8,75	11,50	283,35	372,41	74,15	97,45	74,12	97,42
Pav. 4	6,00	1,50	7,50	0,25	8,40	9,60	250,02	320,02	65,43	83,74	65,40	83,71
Pav. 5	6,00	1,00	7,00	0,17	8,40	8,80	233,35	293,35	61,06	76,77	61,04	76,74
Pav. 2	6,75	4,00	10,75	0,59	9,45	14,50	333,36	449,64	87,23	117,66	87,20	117,62
Pav. 3	6,25	2,50	8,75	0,40	8,75	11,50	283,35	372,41	74,15	97,45	74,12	97,42
Pav. 4	6,00	1,50	7,50	0,25	8,40	9,60	250,02	320,02	65,43	83,74	65,40	83,71
Pav. 5	6,00	1,00	7,00	0,17	8,40	8,80	233,35	293,35	61,06	76,77	61,04	76,74
Pav. 2	6,50	4,00	10,50	0,62	9,10	14,20	333,36	450,83	87,23	117,97	87,20	117,93
Pav. 3	6,00	2,50	8,50	0,42	8,40	11,20	283,35	373,36	74,15	97,70	74,12	97,67
Pav. 4	6,00	1,50	7,50	0,25	8,40	9,60	250,02	320,02	65,43	83,74	65,40	83,71
Pav. 5	6,00	1,00	7,00	0,17	8,40	8,80	233,35	293,35	61,06	76,77	61,04	76,74
Pav. 2	6,50	4,00	10,50	0,62	9,10	14,20	333,36	450,83	87,23	117,97	87,20	117,93
Pav. 3	6,00	2,50	8,50	0,42	8,40	11,20	283,35	373,36	74,15	97,70	74,12	97,67
Pav. 4	6,00	1,50	7,50	0,25	8,40	9,60	250,02	320,02	65,43	83,74	65,40	83,71
Pav. 5	6,00	1,00	7,00	0,17	8,40	8,80	233,35	293,35	61,06	76,77	61,04	76,74

ARMADURAS, VERIFICAÇÃO DA RESISTÊNCIA A PUNÇÃO E RESISTÊNCIAS NORMATIVAS – ACI318 (2025)												
PAVIMENTO	$A_{s,x}$ (cm²/m)	$A_{s,y}$ (cm²/m)	r (%)	V_{Sd2} (kN)	b_0 (cm)	t_{Sd2} (kN/cm²)	V_{C1} (kN/cm²)	V_{C2} (kN/cm²)	V_{C3} (kN/cm²)	t_{Rd} (kN/cm²)	t_{Sd2} <=t_{Rd}	t_{Rd}/t_{Sd2}
Pav. 2	12,18	13,24	0,58	446,41	227,60	0,13	0,17	0,25	0,25	0,13	Ok!	1,01
Pav. 3	11,06	12,13	0,58	369,85	219,60	0,12	0,17	0,25	0,24	0,13	Ok!	1,07
Pav. 4	10,27	11,35	0,59	318,48	213,60	0,11	0,17	0,25	0,23	0,13	Ok!	1,12
Pav. 5	9,66	10,70	0,57	292,46	211,60	0,11	0,17	0,25	0,23	0,13	Ok!	1,18
Pav. 2	12,69	13,84	0,63	447,44	223,60	0,13	0,19	0,28	0,27	0,14	Ok!	1,04
Pav. 3	11,94	13,19	0,68	371,08	213,60	0,13	0,19	0,28	0,25	0,14	Ok!	1,05
Pav. 4	10,47	11,58	0,62	318,77	211,60	0,12	0,19	0,28	0,25	0,14	Ok!	1,18
Pav. 5	9,56	10,56	0,56	292,46	211,60	0,11	0,19	0,28	0,25	0,14	Ok!	1,29
Pav. 2	13,31	14,57	0,70	448,52	219,60	0,14	0,20	0,30	0,28	0,15	Ok!	1,04
Pav. 3	13,03	14,53	0,81	372,41	207,60	0,15	0,20	0,30	0,26	0,15	Ok!	1,00
Pav. 4	11,84	13,28	0,79	320,02	203,60	0,14	0,20	0,30	0,25	0,15	Ok!	1,08
Pav. 5	10,79	12,09	0,72	293,35	203,60	0,13	0,20	0,30	0,25	0,15	Ok!	1,18
Pav. 2	14,00	15,40	0,78	449,64	215,60	0,15	0,21	0,32	0,29	0,16	Ok!	1,03
Pav. 3	12,93	14,39	0,81	372,41	207,60	0,15	0,21	0,32	0,28	0,16	Ok!	1,07
Pav. 4	11,75	13,16	0,78	320,02	203,60	0,14	0,21	0,32	0,27	0,16	Ok!	1,15
Pav. 5	10,72	11,99	0,71	293,35	203,60	0,13	0,21	0,32	0,27	0,16	Ok!	1,25
Pav. 2	14,79	16,35	0,87	450,83	211,60	0,17	0,22	0,33	0,30	0,17	Ok!	1,00
Pav. 3	13,74	15,40	0,92	373,36	203,60	0,16	0,22	0,33	0,29	0,17	Ok!	1,04
Pav. 4	11,68	13,06	0,78	320,02	203,60	0,14	0,22	0,33	0,29	0,17	Ok!	1,21
Pav. 5	10,66	11,91	0,71	293,35	203,60	0,13	0,22	0,33	0,29	0,17	Ok!	1,32
Pav. 2	14,71	16,24	0,86	450,83	211,60	0,17	0,23	0,35	0,32	0,18	Ok!	1,05
Pav. 3	13,67	15,30	0,91	373,36	203,60	0,16	0,23	0,35	0,30	0,18	Ok!	1,09
Pav. 4	11,63	12,98	0,77	320,02	203,60	0,14	0,23	0,35	0,30	0,18	Ok!	1,27
Pav. 5	10,62	11,85	0,71	293,35	203,60	0,13	0,23	0,35	0,30	0,18	Ok!	1,39

GEOMETRIA E PROPRIEDADES DOS MATERIAIS – EUROCODE2 (2023)							
PAVIMENTO	b**(cm)**	h**(cm)**	d_x**(cm)**	d_y**(cm)**	d**(cm)**	f_{ck}**(MPa)**	f_{yk}**(MPa)**
Pav. 2	35	27,5	24,2	22,6	23,4	25	500
Pav. 3	35	25,0	21,7	20,1	20,9	25	500
Pav. 4	35	23,5	20,2	18,6	19,4	25	500
Pav. 5	35	23,5	20,2	18,6	19,4	25	500
Pav. 2	35	26,0	22,7	21,1	21,9	30	500
Pav. 3	35	22,5	19,2	17,6	18,4	30	500
Pav. 4	35	21,0	17,7	16,1	16,9	30	500
Pav. 5	35	23,5	20,2	18,6	19,4	30	500
Pav. 2	35	24,0	20,7	19,1	19,9	35	500
Pav. 3	35	21,0	17,7	16,1	16,9	35	500
Pav. 4	35	21,0	17,7	16,1	16,9	35	500
Pav. 5	35	23,5	20,2	18,6	19,4	35	500
Pav. 2	35	23,0	19,7	18,1	18,9	40	500
Pav. 3	35	20,0	16,7	15,1	15,9	40	500
Pav. 4	35	20,0	16,7	15,1	15,9	40	500
Pav. 5	35	20,0	16,7	15,1	15,9	40	500
Pav. 2	35	22,0	18,7	17,1	17,9	45	500
Pav. 3	35	20,0	16,7	15,1	15,9	45	500
Pav. 4	35	20,0	16,7	15,1	15,9	45	500
Pav. 5	35	20,0	16,7	15,1	15,9	45	500
Pav. 2	35	21,0	17,7	16,1	16,9	50	500
Pav. 3	35	20,0	16,7	15,1	15,9	50	500
Pav. 4	35	20,0	16,7	15,1	15,9	50	500
Pav. 5	35	20,0	16,7	15,1	15,9	50	500

AÇÕES, ESFORÇOS CORTANTES E MOMENTOS FLETORES – EUROCODE2 (2023)											
PAVIMENTO	g_k **(kN/m²)**	q_k **(kN/m²)**	$P_k = g_k + q_k$	$r = g_k/q_k$	$P_{d1} = 1,2g_k + 1,6q_k$	V_{Sk} **(kN)**	V_{Sd} **(kN)**	M_{Sxk} **(Nm/m)**	M_{Sxd} **(Nm/m)**	M_{Syk} **(kNm/m)**	M_{Syd} **(kNm/m)**
Pav. 2	7,88	4,0	11,88	0,51	16,63	333,36	466,87	87,23	122,17	87,20	122,13
Pav. 3	7,25	2,5	9,75	0,34	13,54	283,35	393,42	74,15	102,95	74,12	102,91
Pav. 4	6,88	1,5	8,38	0,22	11,53	250,02	344,24	65,43	90,08	65,40	90,05
Pav. 5	6,88	1,0	7,88	0,15	10,78	233,35	319,47	61,06	83,60	61,04	83,57
Pav. 2	7,50	4,0	11,50	0,53	16,13	333,36	467,42	87,23	122,32	87,20	122,27
Pav. 3	6,63	2,5	9,13	0,38	12,69	283,35	394,17	74,15	103,15	74,12	103,11
Pav. 4	6,25	1,5	7,75	0,24	10,69	250,02	344,78	65,43	90,22	65,40	90,19
Pav. 5	6,88	1,0	7,88	0,15	10,78	233,35	319,47	61,06	83,60	61,04	83,57
Pav. 2	7,00	4,0	11,00	0,57	15,45	333,36	468,21	87,23	122,52	87,20	122,48
Pav. 3	6,25	2,5	8,75	0,40	12,19	283,35	394,67	74,15	103,28	74,12	103,24
Pav. 4	6,25	1,5	7,75	0,24	10,69	250,02	344,78	65,43	90,22	65,40	90,19
Pav. 5	6,88	1,0	7,88	0,15	10,78	233,35	319,47	61,06	83,60	61,04	83,57
Pav. 2	6,75	4,0	10,75	0,59	15,11	333,36	468,64	87,23	122,63	87,20	122,59
Pav. 3	6,00	2,5	8,50	0,42	11,85	283,35	395,03	74,15	103,37	74,12	103,33
Pav. 4	6,00	1,5	7,50	0,25	10,35	250,02	345,02	65,43	90,29	65,40	90,25
Pav. 5	6,00	1,0	7,00	0,17	9,60	233,35	320,02	61,06	83,74	61,04	83,71
Pav. 2	6,50	4,0	10,50	0,62	14,78	333,36	469,08	87,23	122,75	87,20	122,71
Pav. 3	6,00	2,5	8,50	0,42	11,85	283,35	395,03	74,15	103,37	74,12	103,33
Pav. 4	6,00	1,5	7,50	0,25	10,35	250,02	345,02	65,43	90,29	65,40	90,25
Pav. 5	6,00	1,0	7,00	0,17	9,60	233,35	320,02	61,06	83,74	61,04	83,71
Pav. 2	6,25	4,0	10,25	0,64	14,44	333,36	469,54	87,23	122,87	87,20	122,83
Pav. 3	6,00	2,5	8,50	0,42	11,85	283,35	395,03	74,15	103,37	74,12	103,33
Pav. 4	6,00	1,5	7,50	0,25	10,35	250,02	345,02	65,43	90,29	65,40	90,25
Pav. 5	6,00	1,0	7,00	0,17	9,60	233,35	320,02	61,06	83,74	61,04	83,71

ARMADURAS, VERIFICAÇÃO DA RESISTÊNCIA A PUNÇÃO E RESISTÊNCIAS NORMATIVAS – EUROCODE2 (2023)												
PAVIMENTO	$A_{s,x}$ (cm²/m)	$A_{s,y}$ (cm²/m)	r (%)	$b_{0,5}$ (cm)	β_e	$\tau_{Ed0,5}$ (kN/cm²)	$d_{máx,ag}$ (mm)	k_{pb}	$t_{Rd,c}$	$t_{Rd,lim}$	$\tau_{Ed0,5}$ <= $t_{Rd,c}$	$t_{Rd,c}/\tau_{Ed0,5}$
Pav. 2	12,45	13,48	0,55	213,51	1,15	0,11	19	2,11	0,11	0,17	Ok!	1,00
Pav. 3	11,74	12,85	0,59	205,66	1,15	0,11	19	2,03	0,11	0,17	Ok!	1,04
Pav. 4	11,04	12,17	0,60	200,95	1,15	0,10	19	1,98	0,11	0,17	Ok!	1,09
Pav. 5	10,19	11,22	0,55	200,95	1,15	0,09	19	1,98	0,11	0,17	Ok!	1,14
Pav. 2	13,23	14,40	0,63	208,80	1,15	0,12	19	2,07	0,12	0,18	Ok!	1,02
Pav. 3	13,37	14,83	0,77	197,81	1,15	0,12	19	1,95	0,13	0,18	Ok!	1,02
Pav. 4	12,72	14,26	0,80	193,09	1,15	0,12	19	1,89	0,13	0,18	Ok!	1,06
Pav. 5	10,06	11,05	0,54	200,95	1,15	0,09	19	1,98	0,11	0,18	Ok!	1,21
Pav. 2	14,57	16,00	0,77	202,52	1,15	0,13	19	2,00	0,13	0,20	Ok!	1,00
Pav. 3	14,53	16,28	0,91	193,09	1,15	0,14	19	1,89	0,14	0,20	Ok!	1,02
Pav. 4	12,55	14,02	0,79	193,09	1,15	0,12	19	1,89	0,13	0,20	Ok!	1,11
Pav. 5	9,98	10,93	0,54	200,95	1,15	0,09	19	1,98	0,12	0,20	Ok!	1,27
Pav. 2	15,28	16,86	0,85	199,38	1,15	0,14	19	1,96	0,15	0,21	Ok!	1,01
Pav. 3	15,39	17,37	1,03	189,95	1,15	0,15	19	1,85	0,15	0,21	Ok!	1,02
Pav. 4	13,30	14,95	0,89	189,95	1,15	0,13	19	1,85	0,15	0,21	Ok!	1,12
Pav. 5	12,27	13,78	0,82	189,95	1,15	0,12	19	1,85	0,14	0,21	Ok!	1,17
Pav. 2	16,15	17,92	0,95	196,23	1,15	0,15	19	1,93	0,16	0,22	Ok!	1,02
Pav. 3	15,29	17,22	1,02	189,95	1,15	0,15	19	1,85	0,16	0,22	Ok!	1,06
Pav. 4	13,22	14,85	0,88	189,95	1,15	0,13	19	1,85	0,15	0,22	Ok!	1,16
Pav. 5	12,21	13,69	0,81	189,95	1,15	0,12	19	1,85	0,15	0,22	Ok!	1,22
Pav. 2	17,13	19,15	1,07	193,09	1,15	0,17	19	1,89	0,17	0,24	Ok!	1,02
Pav. 3	15,21	17,10	1,02	189,95	1,15	0,15	19	1,85	0,17	0,24	Ok!	1,10
Pav. 4	13,16	14,76	0,88	189,95	1,15	0,13	19	1,85	0,16	0,24	Ok!	1,20
Pav. 5	12,16	13,61	0,81	189,95	1,15	0,12	19	1,85	0,15	0,24	Ok!	1,26

APÊNDICE 4 – Índice de confiabilidade com e sem o erro de modelo pelo método FORM

FIB MC2020 (2024)					
Pavimento	f_{ck} **(MPa)**	h **(cm)**	$r = {q_k}/{g_k}$	β **com** $E_{m,FMCII}$	β **sem** $E_{m,FMCII}$
Pav. 2	25	24,0	0,57	3,57	5,23
Pav. 3	25	21,5	0,38	3,71	5,57
Pav. 4	25	20,5	0,25	3,87	5,65
Pav. 5	25	20,0	0,17	3,96	5,69
Pav. 2	30	22,5	0,59	3,66	5,29
Pav. 3	30	20,0	0,42	3,79	5,63
Pav. 4	30	20,0	0,25	4,07	5,79
Pav. 5	30	20,0	0,17	4,20	5,87
Pav. 2	35	22,0	0,62	3,80	5,47
Pav. 3	35	20,0	0,42	3,99	6,14
Pav. 4	35	21,0	0,25	4,35	6,87
Pav. 5	35	20,5	0,17	4,43	6,90
Pav. 2	40	21,0	0,64	3,84	5,49
Pav. 3	40	20,0	0,42	4,15	6,38
Pav. 4	40	20,0	0,25	4,42	7,43
Pav. 5	40	20,0	0,17	4,55	7,92
Pav. 2	45	20,0	0,67	3,84	5,46
Pav. 3	45	20,0	0,42	4,27	6,55
Pav. 4	45	20,0	0,25	4,55	7,64
Pav. 5	45	20,0	0,17	4,68	8,17
Pav. 2	50	20,0	0,67	3,96	5,58
Pav. 3	50	20,0	0,42	4,39	6,69
Pav. 4	50	20,0	0,25	4,66	7,80
Pav. 5	50	20,0	0,17	4,79	8,34

ABNT NBR6118 (2023)					
Pavimento	f_{ck} **(MPa)**	h **(cm)**	$r = {}^{q_k}/_{g_k}$	β **com** $E_{m,NBR23}$	β **sem** $E_{m,NBR23}$
Pav. 2	25	21	0,64	3,29	4,79
Pav. 3	25	20	0,42	3,58	5,39
Pav. 4	25	20	0,25	3,86	5,60
Pav. 5	25	20	0,17	4,00	5,69
Pav. 2	30	20	0,67	3,40	4,88
Pav. 3	30	20	0,42	3,81	5,63
Pav. 4	30	20	0,25	4,10	5,79
Pav. 5	30	20	0,17	4,23	5,87
Pav. 2	35	20	0,67	3,57	5,12
Pav. 3	35	20	0,42	4,00	6,18
Pav. 4	35	20	0,25	4,29	6,79
Pav. 5	35	20	0,17	4,42	6,87
Pav. 2	40	20	0,67	3,72	5,31
Pav. 3	40	20	0,42	4,16	6,41
Pav. 4	40	20	0,25	4,45	7,50
Pav. 5	40	20	0,17	4,58	8,02
Pav. 2	45	20	0,67	3,85	5,46
Pav. 3	45	20	0,42	4,29	6,59
Pav. 4	45	20	0,25	4,57	7,71
Pav. 5	45	20	0,17	4,71	8,27
Pav. 2	50	20	0,67	3,96	5,59
Pav. 3	50	20	0,42	4,40	6,72
Pav. 4	50	20	0,25	4,69	7,86
Pav. 5	50	20	0,17	4,82	8,44

ACI318 (2025)					
Pavimento	f_{ck} **(MPa)**	h **(cm)**	$r = {}^{q_k}/_{g_k}$	β **com** $E_{m,ACI318}$	β **sem** $E_{m,ACI318}$
Pav. 2	25	26,0	0,53	3,63	5,29
Pav. 3	25	24,0	0,36	3,77	5,75
Pav. 4	25	22,5	0,23	3,87	5,78
Pav. 5	25	22,0	0,15	3,93	5,82
Pav. 2	30	25,0	0,55	3,78	5,45
Pav. 3	30	22,5	0,38	3,90	5,83
Pav. 4	30	22,0	0,23	4,07	5,91
Pav. 5	30	22,0	0,15	4,16	5,97
Pav. 2	35	24,0	0,57	3,89	5,57
Pav. 3	35	21,0	0,40	3,96	6,08
Pav. 4	35	20,0	0,25	4,11	6,74
Pav. 5	35	20,0	0,17	4,23	7,03
Pav. 2	40	23,0	0,59	3,95	5,63
Pav. 3	40	21,0	0,40	4,12	6,31
Pav. 4	40	20,0	0,25	4,28	7,06
Pav. 5	40	20,0	0,17	4,39	7,47
Pav. 2	45	22,0	0,62	3,98	5,62
Pav. 3	45	20,0	0,42	4,15	6,29
Pav. 4	45	20,0	0,25	4,40	7,27
Pav. 5	45	20,0	0,17	4,51	7,72
Pav. 2	50	22,0	0,62	4,08	5,74
Pav. 3	50	20,0	0,42	4,27	6,42
Pav. 4	50	20,0	0,25	4,52	7,42
Pav. 5	50	20,0	0,17	4,63	7,89

EUROCODE2 (2023)					
Pavimento	f_{ck} **(MPa)**	h **(cm)**	$r = {}^{q_k}/_{g_k}$	β **com** $E_{m,FMCII}$	β **sem** $E_{m,FMCII}$
Pav. 2	25	27,5	0,51	3,86	5,18
Pav. 3	25	25,0	0,34	3,98	5,19
Pav. 4	25	23,5	0,22	4,09	5,22
Pav. 5	25	23,5	0,15	4,19	5,27
Pav. 2	30	26,0	0,53	3,98	5,79
Pav. 3	30	22,5	0,38	4,03	5,85
Pav. 4	30	21,0	0,24	4,15	5,87
Pav. 5	30	23,5	0,15	4,43	6,07
Pav. 2	35	24,0	0,57	4,00	5,78
Pav. 3	35	21,0	0,40	4,09	6,34
Pav. 4	35	21,0	0,24	4,35	6,87
Pav. 5	35	23,5	0,15	4,62	7,07
Pav. 2	40	23,0	0,59	4,06	5,83
Pav. 3	40	20,0	0,42	4,15	6,38
Pav. 4	40	20,0	0,25	4,42	7,43
Pav. 5	40	20,0	0,17	4,55	7,92
Pav. 2	45	22,0	0,62	4,08	5,82
Pav. 3	45	20,0	0,42	4,27	6,55
Pav. 4	45	20,0	0,25	4,55	7,64
Pav. 5	45	20,0	0,17	4,68	8,17
Pav. 2	50	21,0	0,64	4,08	5,77
Pav. 3	50	20,0	0,42	4,39	6,69
Pav. 4	50	20,0	0,25	4,66	7,80
Pav. 5	50	20,0	0,17	4,79	8,34