

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

MODELO SIR FRACIONÁRIO COM SATURAÇÃO

por

Jessica Santos

Dissertação de Mestrado em Modelagem Computacional

Rio Grande, Setembro, 2023

Jéssica Nunes dos Santos

“MODELO SIR FRACIONÁRIO COM SATURAÇÃO”

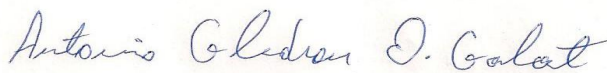
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande - FURG, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestra. Área de concentração: Modelagem Computacional.

Aprovada em: 29/09/2023

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Matheus Jatkoske Lazo (Orientador – FURG)



Prof. Dr. Antonio Gledson de Oliveira Goulart (FURG)



Profa. Dra. Daniela dos Santos de Oliveira (UniFESP)

Rio Grande - RS
2023

S237m Santos, Jéssica Nunes dos
Modelo SIR fracionário com saturação / Jéssica Nunes dos Santos. - 2025.
69 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, 2025.

Orientador: Dr. Matheus Jatkoske Lazo.

1. Modelagem Computacional. 2. Dinâmica de populações. 3. Equações diferenciais fracionárias. 4. Modelo SIR. 5. COVID-19. I. Lazo, Matheus Jatkoske.

CDU 004.414.23

Catálogo na fonte: Bibliotecária Brenda Sequeira CRB10/1979



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE - FURG
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL
Av. Itália, km 8 s/nº - Campus Carreiros - CEP 96201-900 - Rio Grande/RS
E-mail: ppgmc@furg.br - Telefone: (53) 3293-5055



ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

ATA Nº 05/2023

Ao vigésimo nono dia do mês de setembro de dois mil e vinte e três, por meio de videoconferência, realizou-se a 172ª sessão de defesa de dissertação do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional. A mestranda **Jéssica Nunes dos Santos** apresentou e defendeu a dissertação “**MODELO SIR FRACIONÁRIO COM SATURAÇÃO**” como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestra em Modelagem Computacional. A sessão foi aberta às nove horas pelo Prof. Dr. Matheus Jatkoske Lazo, orientador da dissertação e presidente da Comissão de Avaliação. A referida Comissão esteve integrada, além do presidente e orientador, pela Profa. Dra. Daniela dos Santos de Oliveira (Unifesp) e pelo Prof. Dr. Antonio Gledson de Oliveira Goulart (FURG). Após cada integrante da banca ter arguido a mestranda, e esta ter tido a oportunidade de responder a cada um, os examinadores atribuíram os seguintes conceitos ao trabalho:

Prof. Dr. Antonio Gledson de Oliveira Goulart: conceito A

Profa. Dra. Daniela dos Santos de Oliveira: conceito A

Tendo sido a candidata aprovada, com conceito A, neste requisito parcial para a obtenção do grau de Mestra em Modelagem Computacional.


Prof. Dr. Antonio Gledson de Oliveira Goulart
Membro Interno


Profa. Dra. Daniela dos Santos de Oliveira
Membro Externo

Documento assinado digitalmente
 MATHEUS JATKOSKE LAZO
Data: 29/09/2023 11:17:06-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Prof. Dr. Matheus Jatkoske Lazo
Orientador

Dedico este trabalho essencialmente a Deus

e ao meu pai, José Carlos Ayres do Santos, por ser meu exemplo de vida.

AGRADECIMENTOS

Dedico esse trabalho primeiramente a CAPES que financiou o meu projeto, sem o auxílio financeiro jamais conseguiria realizar esse estudo. A Universidade Federal de Rio Grande (FURG) que é um exemplo de qualidade e comprometimento com a ciência. Ao meu Orientador Matheus Jatkoske que há anos compartilha seus conhecimentos comigo sempre sendo muito empático e compreensível. Ao meu noivo Douglas Cozza Fonseca que esteve comigo nessa caminhada me dando apoio emocional. Por fim, manifesto minha gratidão à Deus, que me deu força, coragem e energia para realizar esse trabalho.

RESUMO

Neste trabalho de dissertação apresentamos um modelo SIR fracionário com saturação que propomos com o objetivo de aprofundar o estudo de modelos tipo SIR com dinâmica mais lenta que o modelo clássico, e portanto, possibilitando uma descrição mais precisa da dinâmica da COVID-19. Nosso modelo generaliza o modelo SIR saturado proposto em (Kolokolnikov, 2020) através da substituição das derivadas de ordem inteiras por derivadas fracionárias de Caputo. Neste trabalho fizemos comparações detalhadas entre a dinâmica dos modelos SIR clássico, SIR fracionário, SIR saturado, e SIR fracionário com saturação. Também fizemos comparações com dados reais da epidemia de COVID-19 no Brasil. Para este estudo, obtivemos as soluções numéricas dos modelos utilizando Python. Além disso, neste trabalho também apresentamos uma breve revisão do modelo SIR clássico, do modelo SIR saturado, e uma breve revisão das definições e propriedades básicas dos cálculos fracionários de Riemann-Liouville e de Caputo.

Palavras-chaves: Dinâmica de Populações; Equações Diferenciais Fracionárias; Modelo SIR; COVID-19.

ABSTRACT

In this dissertation we present a fractional SIR model with saturation that we propose with the aim of deepening the study of SIR-type models with slower dynamics than the classical model, and therefore, enabling a more accurate description of the dynamics of COVID-19. Our model generalizes the saturated SIR model proposed in (Kolokolnikov, 2020) by replacing integer order derivatives with Caputo fractional derivatives. In this work we made detailed comparisons between the dynamics of the classical SIR, fractional SIR, saturated SIR, and fractional SIR with saturation models. We also made comparisons with real data from the COVID-19 epidemic in Brazil. For this study, we obtained the numerical solutions of the models using Python. Furthermore, in this work we also present a brief review of the classical SIR model, the saturated SIR model, and a brief review of the definitions and basic properties of Riemann-Liouville and Caputo fractional calculations.

Palavras-chaves: Population Dynamics; Fractional Differential Equations; SIR Model; COVID-19.

ÍNDICE

1	Introdução	11
2	O modelo SIR clássico	14
2.1	Pontos de equilíbrio e Estabilidade local do modelo SIR	17
2.1.1	Pontos de equilíbrio	17
2.1.2	Estabilidade	19
3	O Cálculo Fracionário	26
3.1	O Cálculo Fracionário de Riemann-Liouville	28
3.1.1	Integrais de Riemann-Liouville	30
3.1.2	As derivadas de Riemann-Liouville	32
3.2	O Cálculo Fracionário de Caputo	35
4	O Modelo SIR com Saturação	39
4.1	Introdução SIR com Saturação	39
4.2	Modelo SIR com Saturação	40
5	O Modelo SIR Fracionário com Saturação	44
5.0.1	Pontos de equilíbrio do SIR fracionário com saturação	45
6	Resultados numéricos	48
6.1	Análise qualitativa do sistema SIR fracionário com saturação	49
6.2	Comparação entre modelos numéricos e dados reais	57

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Diagrama do modelo SIR (Tavares, 2020)	15
Figura 2.2: Solução numérica do modelo SIR (Tavares, 2020)	16
Figura 4.1: Dinâmica do modelo probabilístico de agentes proposto por (Kolokolnikov, 2021). Figura extraída de (Kolokolnikov, 2020).	41
Figura 4.2: Comparação da solução do modelo SIR com o SIR com saturação (gráfico extraído de (Kolokolnikov, 2020))	42
Figura 6.1: Infectados por tempo no SIR clássico, SIR fracionário, SIR saturado e SIR fracionário com saturação.	51
Figura 6.2: No gráfico de cima temos a comparação do modelo SIR saturado com o modelo SIR clássico com $\beta = \kappa a$. No gráfico de baixo apresentamos a comparação do modelo SIR clássico com o modelo SIR fracionário com saturação.	52
Figura 6.3: Comparação do modelo SIR saturado com o modelo SIR clássico com $\beta = \kappa a$.	54
Figura 6.4: Suscetíveis, infectados e removidos/recuperados.	55
Figura 6.5: Comparação com dados reais da epidemia de COVID-19 no Brasil à partir da semana 17 até a semana 37. Fonte dos dados reais: (Organização Mundial da Saúde, 2023)	58
Figura 6.6: Comparação com dados reais da epidemia de COVID-19 no Brasil à partir da semana 17 até a semana 63. Fonte dos dados reais: (Organização Mundial da Saúde, 2023)	59

LISTA DE SÍMBOLOS

- N População total.
- S Compartimento Suscetível.
- I Compartimento Infectado.
- R Compartimento Recuperado.
- μ Taxa de natalidade e mortalidade.
- β Taxa de transmissão da doença.
- γ Taxa de recuperação.

1 INTRODUÇÃO

As doenças infecciosas são, de modo geral, uma ameaça à saúde da população cujas consequências se alastram na economia dos estados, e.g. (Khan, 2020). Diante disso, ao longo da história, cientistas de diversas áreas (médicos, matemáticos, sociólogos, etc) vêm pesquisando formas eficazes de minimizar os efeitos nocivos dos surtos e epidemias causadas por essas doenças. Em especial, a epidemiologia é a ciência que se compromete a estudar quantitativamente os fenômenos relacionados às epidemias e suas consequências diretas em uma população. Nela utiliza-se métodos científicos e matemáticos como fatores essenciais na formulação de ações voltadas para a prevenção do controle de doenças. Seu desenvolvimento como ciência estabelece um papel importantíssimo para a melhoria das condições de saúde da população (Waldman, 1998).

Uma das linhas de pesquisa da epidemiologia é sobre modelagens matemáticas que auxiliam na previsão de cenários e a encontrar as diferentes ferramentas de medidas de controle da transmissão entre indivíduos infectados e suscetíveis. Um desses modelos preditivos para doenças infecciosas se dá através de sistemas dinâmicos conhecidos na literatura como modelos epidemiológicos compartimentais do tipo SIR. Nesses modelos compartimentais do tipo SIR, os indivíduos de uma população são divididos em grupos de pessoas suscetíveis (podem ficar doentes), infectadas (estão doentes e contagiosas) e recuperadas (estão curadas) que se relacionam entre si (Kermack, 1927). Esse modelo tem como objetivo prever o número de indivíduos infectados ao longo do tempo, permitindo otimizar o uso de recursos e encaminhar quais as medidas de controle mais eficientes para minimizar os efeitos negativos da epidemia. Estes modelos tipo SIR têm se mostrado uma ferramenta eficiente de controle epidêmico e servem para auxiliar as autoridades de saúde pública na escolha das estratégias eficientes para minimização

dos efeitos das mesmas ((Hethcote, 2000)).

Recentemente, no trabalho (Kolokolnikov, 2020) verificou-se que o modelo SIR clássico não descreve bem a dinâmica da epidemia de COVID-19 para intervalos de tempo longos, pois a curva de infectados apresenta um pico muito agudo e estreito que conforme (Lazo, 2021) não é o ideal esperado. Para descrever este crescimento mais lento os autores propuseram um modelo do tipo SIR com saturação que descrevemos detalhadamente na Seção 4.2 desta dissertação.

Por outro lado, trabalhos recentes mostraram que modelos do tipo SIR com derivadas fracionárias (derivadas de ordem não inteira) também resultam em uma dinâmica mais lenta que o modelo SIR clássico para a epidemia (veja, por exemplo, (Almeida, 2014; Gomes, 2018; Tavares, 2020)). Neste contexto, aprofundamos o estudo de modelos tipo SIR com dinâmica mais lenta que o modelo clássico, e portanto possibilitando uma descrição mais precisa da dinâmica do COVID-19. No contexto desta pesquisa, propomos um modelo SIR fracionário com saturação, uma extensão do modelo SIR saturado que incorpora derivadas fracionárias de Caputo. A introdução dessas derivadas não inteiras resulta em uma dinâmica mais lenta quando comparada ao modelo SIR clássico, tornando-o mais adequado para descrever a propagação de doenças como a COVID-19 (Almeida, 2014; Gomes, 2018; Tavares, 2020)). O objetivo central deste estudo é realizar uma análise abrangente comparando a dinâmica do modelo SIR clássico, SIR saturado com derivadas inteiras e o modelo SIR fracionário com saturação, explorando suas semelhanças e diferenças com os dados reais da epidemia ocorrida no Brasil durante os anos de 2020 e 2021.

Nosso modelo generaliza o modelo SIR saturado proposto em (Kolokolnikov, 2020) através da substituição das derivadas de ordem um por derivadas fracionárias de Caputo e comparamos detalhadamente a dinâmica do modelo SIR com derivada inteira e a dinâmica do nosso modelo SIR fracionário com saturação. Para este estudo, obtivemos as soluções

numéricas dos modelos utilizando Python. Com esses resultados apresentamos um modelo teórico qualitativamente mais adequado para descrever o comportamento da propagação do COVID-19.

A estrutura deste trabalho é a seguinte: no Capítulo 2, apresentaremos os fundamentos teóricos dos modelos SIR. No Capítulo 3, dedicado a uma revisão dos cálculos fracionários de Riemann-Liouville e de Caputo. No Capítulo 4 revisamos o modelo SIR saturado proposto por (Kolokolnikov, 2020). O Modelo SIR fracionário com saturação que propomos é apresentado no Capítulo 5. No Capítulo 6, apresentaremos os resultados da nossa análise numérica, concentramos nossa atenção na comparação entre os modelos SIR, SIR saturado e SIR fracionário com saturação, explorando as mudanças em seus parâmetros e examinando como essas variações afetam a dinâmica da epidemia. Por fim, apresentamos uma comparação com dados reais da epidemia de COVID-19 no Brasil em 2020 e 2021. Destacamos as conclusões finais no Capítulo 6.2, e concluímos a dissertação.

2 O MODELO SIR CLÁSSICO

Neste capítulo apresentaremos uma breve revisão da definição e propriedades matemáticas do modelo epidemiológico SIR. Esta revisão segue de perto o trabalho apresentado em (Tavares, 2020). O modelo SIR foi proposto para descrever matematicamente a evolução temporal de surtos/epidemias de doenças infecciosas. Neste modelo admitimos que uma população total está dividida em três parcelas compartimentais, a suscetível S , a infecciosa I e a recuperada R . No modelo SIR clássico que revisamos aqui, admitimos que não existe morte causada pela doença, e que pessoas recuperadas ficam imune por um tempo ilimitado à doença.

Antes de apresentar a dinâmica descrita pelo modelo SIR, vamos detalhar as variáveis que envolvem o problema:

- Suscetíveis - $S(t)$: número de indivíduos na população que não possuem imunidade e estão expostos a uma eventual infecção;
- Infectáveis - $I(t)$: número de indivíduos na população que estão doentes e conseguem causar infecções nos suscetíveis;
- Recuperados - $R(t)$: número de indivíduos na população que estão recuperados da infecção, que se tornam, de qualquer modo, imunes à doença estudada.

Para simplificar a dinâmica consideramos ainda cinco hipóteses para o comportamento do modelo:

1. Todos os indivíduos nascem suscetíveis;
2. Os infectados quando recuperados ganham imunidade total;

3. As interações entre os compartimentos ocorrem de forma homogênea;
4. O tamanho da população N é constante, pois a taxa da mortalidade é igual a da natalidade - μ ;
5. Não consideramos emigração ou imigração.

Pelas hipóteses consideradas, o número total N de indivíduos na população é constante e é a soma dos três compartimentos. Portanto:

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t). \quad (2.1)$$

O modelo SIR descreve como o número de indivíduos de cada classe varia conforme o tempo. Entendemos então que $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$ são funções que dependem do tempo t . Esta dinâmica pode ser esquematizada através do diagrama abaixo, conforme (Tavares, 2020):

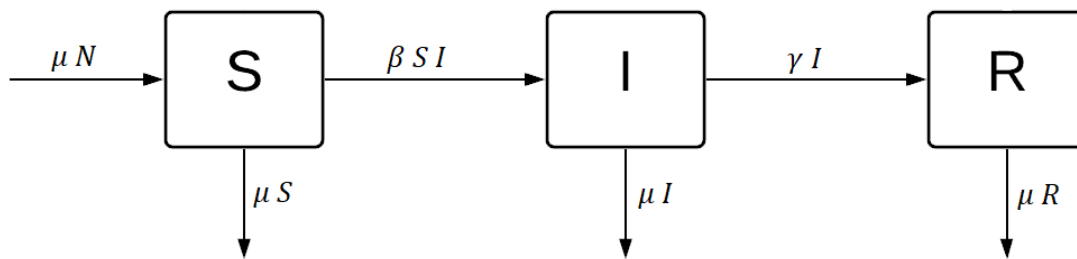


Figura 2.1: Diagrama do modelo SIR (Tavares, 2020)

Neste diagrama β é a taxa de contágio dos indivíduos suscetíveis, que passam a ser infectados e γ é a taxa de recuperação que é proporcional ao inverso do período infeccioso médio. A dinâmica do modelo SIR clássico é dada por um sistema de equações diferenciais não-lineares que, de acordo com (Koziol, 2020), satisfaz as condições iniciais de $S(0) \geq 0, I(0) \geq 0$

e $R(0) \geq 0 \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu N - (\beta \frac{I(t)}{N} + \mu)S(t) \\ \frac{dI}{dt} = \beta S(t) \frac{I(t)}{N} - (\mu + \gamma)I(t) \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t). \end{cases} \quad (2.2)$$

No modelo SIR, o fator $\beta S(t) \frac{I(t)}{N}$ representa a taxa de indivíduos infectados por unidade de tempo. Esse fator diz que a probabilidade de um indivíduo doente tem de infectar um suscetível é proporcional ao contato entre suscetíveis e infectados na população. O fator $\gamma I(t)$ é a taxa de recuperados por unidade de tempo. Os fatores $\mu S(t)$, $\mu I(t)$ e $\mu R(t)$ representam a taxa de indivíduos que foram a óbito por unidade de tempo em cada compartimento, enquanto o termo μN significa a taxa de nascimentos por tempo.

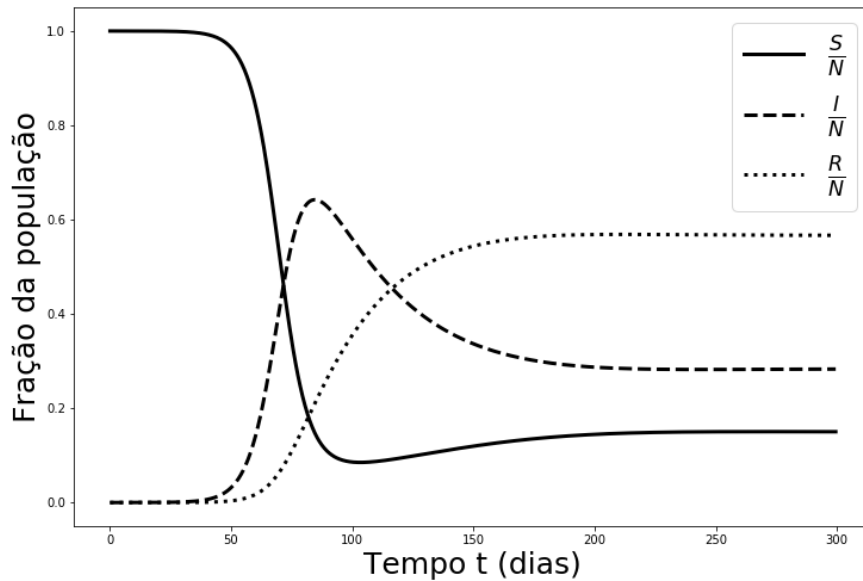


Figura 2.2: Solução numérica do modelo SIR (Tavares, 2020)

Na Figura 2.2 apresenta-se a solução numérica do sistema (2.2) para $\beta = 0,2$, $\gamma = 0,02$ e $\mu = 0,01$.

Em que a população total de $N = 211965$, valor da população de Rio Grande em 2020

obtidos através do site da Prefeitura do Rio Grande. Como condição inicial, foi considerado que no início da epidemia o sistema tinha apenas dois indivíduos infectados $I(0) = 2$. Observa-se nesta figura que a fração da população suscetível $\frac{S}{N}$ cai rapidamente em decorrência do rápido crescimento na fração de infectados $\frac{I}{N}$ e recuperados $\frac{R}{N}$. Com isso percebe-se que a epidemia consegue atingir o seu valor máximo de infectados em um tempo próximo a 80 dias, que corresponde ao ápice da curva de infectados. Após isso, se tem as curvas que representam as assíntotas horizontais, que a seguir veremos que representa um estado de equilíbrio epidêmico da doença.

2.1 Pontos de equilíbrio e Estabilidade local do modelo SIR

Nessa seção falamos sobre o ponto de equilíbrio do sistema dinâmico (2.2) e sua estabilidade. Para facilitar as interpretações utilizamos a ideia de usar apenas uma parte dos compartimentos do modelo SIR. Fazendo assim, também facilitamos os cálculos. Além disso, utilizamos o valor normalizado das variáveis do problema, ou seja, as frações de suscetíveis $\frac{S}{N}$, infectados $\frac{I}{N}$ e recuperados $\frac{R}{N}$, o que equivale a considerar $N = 1$ em (2.2).

2.1.1 Pontos de equilíbrio

Os pontos de equilíbrio de um sistema dinâmico ocorrem quando todas as derivadas do modelo se anulam, ou seja, quando as variáveis tornam-se constantes no tempo. Em alguns casos, mesmo quando iniciamos a dinâmica fora do equilíbrio, o sistema pode evoluir atingindo assintoticamente o equilíbrio (ou seja, atingindo o equilíbrio quando $t \rightarrow \infty$). Isto ocorre, por exemplo, com o modelo SIR (2.2), em que a solução (veja a Figura 2.2) aproxima-se de assíntotas horizontais que representam o ponto de equilíbrio do sistema.

Para encontrar o ponto de equilíbrio, precisamos analisar em que condições as variáveis S , I e R tornam-se constantes. Sejam S^* , I^* e R^* , respectivamente, esses valores constantes (pontos de equilíbrio). Como $S(t) + I(t) + R(t) = N = \text{constante}$, podemos reescrever $R(t) = N - S(t) - I(t)$. Portanto, podemos reduzir (no caso N constante) o sistema (2.2) apenas às duas primeiras equações. Neste caso, fazendo as derivadas $\dot{S} = 0$ e $\dot{I} = 0$, obtemos um sistema algébrico definindo o ponto de equilíbrio:

$$\begin{cases} \mu - (\beta I^* + \mu)S^* = 0 \\ \beta S^* I^* - (\mu + \gamma)I^* = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Da segunda equação em (2.3) obtemos a condição $I^*(\beta S^* - \mu - \gamma) = 0$. Para buscar a solução de equilíbrio, dividiremos em dois casos.

Caso 1) Se $I^* = 0$ temos para a primeira equação em (2.3):

$$\mu(1 - S^*) = 0, \quad (2.4)$$

de onde obtemos:

$$S^* = 1. \quad (2.5)$$

Ficamos, portanto, com $R^* = 1 - S^* - I^* = 0$. Esse ponto de equilíbrio $P_1(S^*, I^*, R^*) = (1, 0, 0)$ é chamado de ponto de equilíbrio livre de doença (não existem doentes na população, pois $I^* = 0$ sempre).

Caso 2) Por outro lado, se $S^* = \frac{\mu + \gamma}{\beta}$ temos para a primeira equação em (2.3):

$$\mu - \beta I^* \left(\frac{\mu + \gamma}{\beta} \right) - \mu \left(\frac{\mu + \gamma}{\beta} \right) = 0. \quad (2.6)$$

Portanto,

$$\beta\mu - \beta I^*(\mu + \gamma) - \mu(\mu + \gamma) = 0. \quad (2.7)$$

Isolando I^* obtemos:

$$I^* = \frac{\mu}{\mu + \gamma} - \frac{\mu}{\beta}. \quad (2.8)$$

Encontramos então um segundo ponto de equilíbrio para o sistema, $P_2(S^*, I^*, R^*) = \left(\frac{\mu+\gamma}{\beta}, \frac{\mu}{\mu+\gamma} - \frac{\mu}{\beta}, 1 - \frac{\gamma}{\beta} - \frac{\mu}{\mu+\gamma}\right)$. $P_2(S^*, I^*, R^*)$ é chamado de ponto de equilíbrio epidêmico, em que sempre haverá uma fração constante de pessoas infectadas na população.

2.1.2 Estabilidade

A ideia fundamental da teoria da estabilidade linear é entender o que acontece com a solução do sistema dinâmico quando ela está próxima de algum ponto de equilíbrio do problema. Para fazer esta análise, precisamos linearizar o sistema dinâmico próximo a um ponto de equilíbrio (Strogatz, 2001).

Como discutido na subseção anterior, podemos reduzir o sistema (2.2) as suas duas primeiras equações quando $S(t) + I(t) + R(t) = N = \text{constante}$. Pois, neste caso, podemos reescrever $R(t) = N - S(t) - I(t)$ o que fixa o valor de $R(t)$ em função de $S(t)$ e $I(t)$. O sistema reduzido é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu - (\beta I(t) + \mu)S(t) = f(S, I) \\ \frac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) - (\mu + \gamma)I(t) = g(S, I). \end{cases} \quad (2.9)$$

Se S^* e I^* são valores de um dado ponto de equilíbrio $P(S^*, I^*, R^*)$ (onde $R^* =$

$N - S^* - I^*$), teremos:

$$f(S^*, I^*) = g(S^*, I^*) = 0. \quad (2.10)$$

Utilizamos $U = S - S^*$ e $V = I - I^*$ como as amplitudes de pequenas perturbações em relação à solução do ponto de equilíbrio. Para determinar se essas perturbações crescem ou diminuem com o tempo, precisamos estudar o comportamento das funções U e V . Vamos considerar primeiro U . Da primeira equação do sistema reduzido (2.9) obtemos:

$$\dot{U} = \dot{S} = f(U + S^*, V + I^*). \quad (2.11)$$

Expandindo $f(U + S^*, V + I^*)$ em série de Taylor em torno de $U = V = 0$ encontramos:

$$\begin{aligned} f(U + S^*, V + I^*) &= f(S^*, I^*) + U \frac{\partial f}{\partial S}(S^*, I^*) + V \frac{\partial f}{\partial I}(S^*, I^*) + O(U^2, V^2, UV) \\ &= U \frac{\partial f}{\partial S}(S^*, I^*) + V \frac{\partial f}{\partial I}(S^*, I^*) + O(U^2, V^2, UV), \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde usamos $f(S^*, I^*) = 0$. Portanto, aproximando em primeira ordem podemos reescrever a equação (2.11) como:

$$\dot{U} = U \frac{\partial f}{\partial S}(S^*, I^*) + V \frac{\partial f}{\partial I}(S^*, I^*). \quad (2.13)$$

Procedendo de forma semelhante com a segunda equação do sistema reduzido (2.9), obtemos

$$\dot{V} = \dot{I} = U \frac{\partial g}{\partial S}(S^*, I^*) + V \frac{\partial g}{\partial I}(S^*, I^*). \quad (2.14)$$

Portanto, o sistema linearizado para as perturbações U e V pode ser escrito na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial S}(S^*, I^*) & \frac{\partial f}{\partial I}(S^*, I^*) \\ \frac{\partial g}{\partial S}(S^*, I^*) & \frac{\partial g}{\partial I}(S^*, I^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

onde a matriz de coeficientes do sistema linearizado é chamada de matriz Jacobiana.

A solução desse sistema linear descreve a evolução temporal das perturbações (soluções do sistema original próximo de um ponto de equilíbrio). As soluções de (2.15) são funções exponenciais que dependem dos autovalores da matriz Jacobiana. Podemos utilizar esses autovalores para caracterizar os pontos de equilíbrio de um sistema dinâmico quanto a sua estabilidade (Strogatz, 2001). São quatro os casos mais importantes para nossa análise:

1. Se a parte real dos autovalores forem positivas, as perturbações crescerão, e dizemos que o ponto de equilíbrio é instável (a solução foge do ponto de equilíbrio);
2. Se a parte real dos os autovalores forem negativas, as perturbações diminuirão com o tempo, e dizemos que o ponto de equilíbrio é estável (as soluções tendem ao equilíbrio);
3. Se a parte real dos autovalores tiverem sinais opostos, então algumas perturbações crescerão e outras diminuirão com o tempo, neste caso temos um ponto de sela e o equilíbrio também será instável;
4. Se a parte real dos autovalores for nula, as perturbações serão funções periódicas (as soluções oscilam em torno dos valores de equilíbrio).

A matriz Jacobiana para o modelo SIR reduzido e linearizado (2.15) pode ser reescrita como:

$$J(S^*, I^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial S}(S^*, I^*) & \frac{\partial f}{\partial I}(S^*, I^*) \\ \frac{\partial g}{\partial S}(S^*, I^*) & \frac{\partial g}{\partial I}(S^*, I^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta I^* - \mu & -\beta S^* \\ \beta I^* & \beta S^* - \mu - \gamma \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Vamos, agora, analisar a estabilidade dos dois pontos de equilíbrio do modelo SIR clássico (2.2):

Caso 1) Para o ponto de equilíbrio $P_1(S^*, I^*, R^*) = (1, 0, 0)$, a matriz Jacobiana (2.16)

se reduz à:

$$J(P_1) = \begin{bmatrix} -\mu & -\beta \\ 0 & \beta - (\mu - \gamma) \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

que tem como autovalores:

$$\lambda_1 = \beta - \mu - \gamma, \quad (2.18)$$

e

$$\lambda_2 = -\mu. \quad (2.19)$$

Como todos os parâmetros do modelo são positivos ($\beta, \mu, \gamma \geq 0$), o autovalor λ_2 será sempre negativo. Então, a estabilidade do ponto de equilíbrio livre de infecção $P_1(S^*, I^*, R^*) = (1, 0, 0)$ depende do sinal do primeiro autovalor. Teremos $\lambda_1 < 0$ quando $\beta < \mu + \gamma$, e neste caso, o equilíbrio será estável. O que implica que se inserirmos um número pequeno de indivíduos infectados (a perturbação V) na população, majoritariamente suscetível, isto não desencadeará uma epidemia. Este fato é consequência direta da taxa de contágio ser menor que a soma das taxas de recuperação e natalidade/mortalidade, por isso o número de infectados decresce mais rapidamente que o número de novos casos. Por outro lado, teremos $\lambda_1 > 0$ se $\beta > \mu + \gamma$, e o equilíbrio será instável. Neste caso, ao inserirmos um pequeno número de infectados na população, isso desencadeará uma epidemia, pois o número de novos infectados crescerá inicialmente mais rápido que o número de infectados que se recuperam da doença.

Caso 2) Para o ponto de equilíbrio epidêmico $P_2(S^*, I^*, R^*) = \left(\frac{\mu+\gamma}{\beta}, \frac{\mu}{\mu+\gamma} - \frac{\mu}{\beta}, 1 - \frac{\gamma}{\beta} - \frac{\mu}{\mu+\gamma}\right)$,

a matriz Jacobiana (2.16) se reduz à:

$$J(P_2) = \begin{bmatrix} -\frac{\beta\mu}{\mu+\gamma} & -(\mu + \gamma) \\ \frac{\beta\mu}{\mu+\gamma} - \mu & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

que tem como autovalores:

$$\lambda_1 = -\frac{\beta\mu - \sqrt{\Delta}}{2\mu + 2\gamma}, \quad (2.21)$$

e

$$\lambda_2 = -\frac{\beta\mu + \sqrt{\Delta}}{2\mu + 2\gamma}, \quad (2.22)$$

onde

$$\Delta = 4\mu\gamma^3 + (12\mu^2 - 4\beta\mu)\gamma^2 + (12\mu^3 - 8\beta\mu^2)\gamma + 4\mu^4 - 4\beta\mu^3 + \beta + \beta^2\mu^2. \quad (2.23)$$

É fácil observar que a parte real do autovalor λ_2 é sempre negativa. Portanto, a estabilidade do sistema depende novamente do sinal do primeiro autovalor. Como análise direta do sinal da parte real de λ_1 é complicada pois depende do valor de Δ , ao invés de estudarmos diretamente o sinal de λ_1 , vamos analisar o traço e o determinante da matriz Jacobiana. Esta análise permite determinar o sinal da parte real de λ_1 porque os autovalores podem ser convenientemente expressos a partir do traço e do determinante da matriz Jacobiana associada ao sistema (Almeida, 2014). Segundo o Teorema Método Traço-Determinante (Almeida, 2014) consideramos o polinômio característico (determinante) da matriz Jacobiana calculada para os autovalores. Temos as seguintes possibilidades:

- (i) Se $\det(J(P_2)) < 0$, então temos que $P_2(S^*, I^*, R^*)$ é um ponto de equilíbrio instável;
- (ii) Se $\det(J(P_2)) \geq 0$ e $\text{tr}(J(P_2)) > 0$, então $P_2(S^*, I^*, R^*)$ também é um ponto de equilíbrio instável;
- (iii) Se $\det(J(P_2)) \geq 0$ e $\text{tr}(J(P_2)) < 0$, então temos que $P_2(S^*, I^*, R^*)$ é um ponto de equilíbrio estável.

O traço e o determinante da matriz Jacobiana (2.17), são respectivamente:

$$\text{tr}(J(P_2)) = -\frac{\beta\mu}{\mu + \gamma}, \quad (2.24)$$

e

$$\det(J(P_2)) = \mu(\beta - \mu - \gamma). \quad (2.25)$$

Como $\text{tr}(J(P_2)) < 0$ pois $\beta, \mu, \gamma > 0$, a estabilidade do ponto de equilíbrio epidêmico dependerá apenas do sinal do determinante da matriz Jacobiana. Do determinante (2.25) obtemos que em que o ponto de equilíbrio será instável quando $\beta < \mu + \gamma$, pois o valor do determinante fica negativo. Porém, esse ponto de equilíbrio instável não é biologicamente relevante, porque seria um ponto de equilíbrio com $S^* = \frac{\mu + \gamma}{\beta} > 1$ e, para que o sistema normalizado tenha sentido, devemos ter $0 \leq S^* \leq 1$. Então, descartamos este caso de equilíbrio instável. Já o caso de ponto de equilíbrio estável é biologicamente relevante. O equilíbrio estável ocorre quando $\det(J(P_2)) \geq 0$, ou seja, quando $\beta \geq \mu + \gamma$.

Compreender a biologia subjacente aos modelos matemáticos é essencial para uma análise aprofundada das dinâmicas epidêmicas. No contexto do modelo SIR, é importante reconhecer que um ponto de equilíbrio com $S \geq 1$ (população totalmente suscetível) é biologicamente instável.

A população suscetível (S) representa o número de indivíduos que ainda não foram infectados e, portanto, estão vulneráveis à doença. No entanto, quando $S = 1$, isso implicaria que toda a população está suscetível, o que contradiz a premissa básica de um surto epidêmico. Se ninguém estiver infectado ou se $S = 1$, não haverá sentido em estudar o modelo SIR, pois não há casos ativos para observar e analisar.

Além disso, é importante destacar que a soma das proporções de indivíduos $S+R+I = 1$, já que representam a distribuição completa da população. Portanto, não faria sentido proporcionalmente ter uma população totalmente suscetível ($S = 1$) sem casos de infecção ou recuperação (não faz pensar para $S > 1$).

Ao analisar o modelo SIR, é crucial considerar condições iniciais realistas e biologicamente plausíveis. Isso envolve a presença de uma fração significativa de indivíduos infectados ou recuperados na população, permitindo que a dinâmica epidêmica seja estudada e compreendida de maneira adequada.

Portanto, ao explorar o modelo SIR, devemos nos concentrar em pontos de equilíbrio biologicamente relevantes, onde a distribuição entre os compartimentos de suscetíveis, infectados e recuperados reflita condições realistas e permita uma análise significativa do comportamento da epidemia.

3 O CÁLCULO FRACIONÁRIO

Em 1695, l'Hospital escreveu uma carta para Leibniz perguntando qual o significado da expressão $\frac{d^{1/2}y}{dx^{1/2}}$, ou seja, qual o significado da derivada de ordem $\frac{1}{2}$ (Oldham, 1974). Leibniz respondeu a carta dizendo que o valor de $d^{\frac{1}{2}}x$ seria $x\sqrt{dx} : x$. Desta forma, poderíamos nos perguntar qual seria o significado de uma derivada de ordem π ou i ? Desta pergunta surgiu o chamado Cálculo Fracionário que trata de derivadas e integrais de ordem não inteira. Neste capítulo vamos fazer uma revisão das principais formulações do Cálculos Fracionário. Nossas principais referências foram a dissertação de graduação de (Santos, 2018) e a apostila de (Lazo, 2012).

O Cálculo Fracionário vem despertando muito interesse na comunidade científica nas últimas três décadas devido as suas diversas aplicações. Apesar de quase tão antigo quanto o cálculo convencional, a demora no surgimento de aplicações deste cálculo se dá por conta da dificuldade de interpretar física e geometricamente as derivadas e integrais não inteiras. Apesar destas dificuldades com as interpretações, o Cálculo Fracionário mostrou-se uma ferramenta extremamente importante para aplicações que envolvam sistemas complexos. Estes sistemas que podemos utilizar no Cálculo Fracionário são sistemas com comportamento não-local ou com dinâmica dependente de memória.

Uma das mais antigas definições do Cálculo Fracionário se deve a Euler e foi formulada em 1730. Esta formulação é baseada na fórmula geral de uma derivada de ordem n de uma função potência

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad (3.1)$$

com m e n inteiros e $m > n$, que é generalizada para ordens e potências reais β e α :

$$\frac{d^\alpha x^\beta}{dx^\alpha} = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} x^{\beta - \alpha}, \quad (3.2)$$

onde $\Gamma(z)$ é a função Gama (Gunther, 2018),

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (3.3)$$

que por sua vez generaliza a função fatorial para números não inteiros.

Embora esta seja a definição mais simples para a derivada fracionária, a definição de Euler é muito restritiva, pois só se aplica em funções analíticas e além disso não tem definição formalmente rigorosa.

Já a definição de Riemann-Liouville para o Cálculo Fracionário é menos restritiva e é a definição mais popular entre os matemáticos. A derivada fracionária de Riemann-Liouville, que estudaremos em mais detalhe na sequência do capítulo é dada por:

$$\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n y}{dx^n} \int_a^x \frac{y(t)}{(x - t)^{-\alpha n + 1}} dt, \quad (3.4)$$

onde $n \leq \alpha < n + 1$ é um inteiro e $a < x$ um número real arbitrário.

A formulação mais usada em ciências, em geral, é a definição da Derivada Fracionária de Caputo, que tem como inspiração a formulação de Riemann-Liouville. As derivadas fracionárias de Caputo, que também estudaremos em mais detalhes neste capítulo, são definidas trocando a ordem entre a derivada e a integral na definição de Riemann-Liouville, ou seja:

$$\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x \frac{1}{(x - t)^{-\alpha n + 1}} \frac{d^n y(t)}{dx^n} dt. \quad (3.5)$$

A Derivada Fracionária de Caputo é o mais popular entre os cientistas, pois as equações diferenciais envolvendo essa formulação requer as condições de contorno regulares que são semelhantes às das equações diferenciais com derivadas usuais de ordem inteira.

Nas próximas subseções detalharemos as formulações do Cálculo Fracionário de Riemann-Liouville e Caputo.

3.1 O Cálculo Fracionário de Riemann-Liouville

Historicamente, o Cálculo Fracionário de Riemann-Liouville é a formulação mais popular entre os matemáticos. Frisando que diversas outras formulações de derivadas fracionárias, incluindo de Caputo, são variantes da formulação de Riemann-Liouville. Essas diversas formulações de derivadas fracionárias estão conectadas pela continuação analítica da fórmula de Cauchy para integrais repetidas.

Teorema 3.1. (Fórmula de Cauchy) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável segundo Riemann no intervalo $[a, b]$. Então, temos para a integral de ordem $n (n \in \mathbb{N})$:

$$\int_a^x f(t)(dt)^n = \int_a^x \int_a^{t_n} \int_a^{t_{n-1}} \cdots \int_a^{t_3} \int_a^{t_2} f(t_1) dt_1 dt_2 \cdots dt_{n-1} dt_n = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x f(t)(x-t)^{n-1}, \quad (3.6)$$

onde Γ é a função Gama.

Demonstração 1. Para provar a Fórmula de Cauchy (3.6) vamos primeiro mostrar que a primeira integral da função f pode ser escrita na forma

$$\int_a^x f(t) dt = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt. \quad (3.7)$$

Calculando uma das derivadas da integral do lado direito da (3.7) obtemos:

$$\begin{aligned}\int_a^x f(t)dt &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \left[\int_a^x \frac{\partial}{\partial x} (x-t)^{n-1} f(t)dt + (x-x)^{n-1} f(x) \right],\end{aligned}\tag{3.8}$$

resultando em:

$$\int_a^x f(t)dt = \frac{1}{(n-2)!} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \int_a^x (x-t)^{n-2} f(t)dt.\tag{3.9}$$

Continuando com o mesmo procedimento obtemos:

$$\begin{aligned}\int_a^x f(t)dt &= \frac{1}{(n-2)!} \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}} \left[\int_a^x \frac{\partial}{\partial x} (x-t)^{n-2} f(t)dt + (x-x)^{n-2} f(x) \right] \\ &= \frac{1}{(n-3)!} \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}} \int_a^x (x-t)^{n-3} f(t)dt = \dots \\ &= \frac{1}{(n-j)!} \frac{d^{n-j}}{dx^{n-j}} \int_a^x (x-t)^{n-j} f(t)dt,\end{aligned}\tag{3.10}$$

em que j é um inteiro qualquer satisfazendo $1 \leq j \leq n$. Escolhendo $j = n$ e usando o fato que $0! = 1$ e definindo que $\frac{d^0}{dx^0}$ é equivalente ao operador identidade conseguimos obter a equação

(3.7).

Para provar a Fórmula de Cauchy (3.6) basta integrarmos repetidas vezes a equação

(3.7). Integrando uma vez obtemos:

$$\begin{aligned}\int_a^x dt_2 \int_a^{t_2} f(t_1)dt_1 &= \int_a^x \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dt_2^{n-1}} \int_a^{t_2} (t_2-t)^{n-1} f(t)dt dt_2 \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt - \frac{d^{n-2}}{da^{n-2}} \int_a^a (a-t)^{n-1} f(t)dt \right) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Integrando duas vezes obtemos:

$$\begin{aligned}
 \int_a^x dt_3 \int_a^x dt_2 f(t_1) dt_1 &= \int_a^x \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-2}}{dt_3^{n-2}} \int_a^{t_3} (t_3 - t)^{n-1} f(t) dt dt_3 \\
 &= \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}} \int_a^x (x - t)^{n-1} f(t) dt - \frac{d^{n-3}}{da^{n-3}} \int_a^a (a - t)^{n-1} f(t) dt \right) \\
 &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}} \int_a^x (x - t)^{n-1} f(t) dt.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Finalmente, depois de integrar $n-1$ vezes a equação (3.7) e identificar $\Gamma(n) = (n-1)!$, obtemos a expressão (3.6)

3.1.1 Integrais de Riemann-Liouville

A fórmula de Cauchy para integrais repetidas é fundamental para o Cálculo Fracionário de Riemann-Liouville. Esta fórmula nos dá uma definição para a integral de ordem não inteira. As integrais obtidas a partir dela são chamadas integrais à direita e à esquerda de Riemann-Liouville

Definição 3.1. Seja $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Os operadores ${}_a J_x^\alpha$ e ${}_x J_b^\alpha$ são definidos por:

$${}_a J_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(u)}{(x-u)^{1-\alpha}} du \quad (\alpha \in \mathbb{R}_+) \tag{3.13}$$

e

$${}_x J_b^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(u)}{(u-x)^{1-\alpha}} du \quad (\alpha \in \mathbb{R}_+), \tag{3.14}$$

com $a < b$ e $a, b \in \mathbb{R}$, são chamados de integrais fracionárias à esquerda e à direita de Riemann-

Liouville de ordem $\alpha \in \mathbb{R}_+$, respectivamente.

Para α inteiro as integrais de Riemann-Liouville (3.13) e (3.14) coincidem com integrais repetidas usuais (3.6). Além disso, das definições (3.13) e (3.14) é fácil de ver que as integrais fracionárias de Riemann-Liouville convergem para quaisquer funções integráveis f se $\alpha > 1$. Mais ainda, é possível provar a convergência das integrais (3.13) e (3.14) para as funções $f \in L_1[a, b]$ mesmo quando $0 < \alpha < 1$.

As integrais fracionárias de Riemann-Liouville (3.13) e (3.14) preservam uma importante propriedade algébrica das integrais usuais.

Teorema 3.2. Seja $\alpha, \beta \geq 0$ e $f \in L_1[a, b]$. Então:

$${}_a J_x^\alpha {}_x J_b^\alpha f(x) = {}_a J_x^{\alpha+\beta} f(x) \quad (3.15)$$

e

$${}_a J_x^\alpha {}_x J_b^\beta f(x) = {}_x J_b^{\alpha+\beta} f(x). \quad (3.16)$$

Demonstração 2. Vamos apresentar a prova para as derivadas à direita (para as derivadas à esquerda segue uma prova similar). Da Definição (3.13) temos:

$${}_a J_x^\alpha {}_a J_x^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \int_a^t (t-u)^{\beta-1} f(u) dt du. \quad (3.17)$$

Como as integrais existem para $f \in L_1[a, b]$, usando o Teorema de Fubini podemos trocar a ordem de integração:

$$\begin{aligned} {}_a J_x^\alpha {}_a J_x^\beta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_u^x (x-t)^{\alpha-1} (t-u)^{\beta-1} f(u) dt du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) \int_u^x (x-t)^{\alpha-1} (t-u)^{\beta-1} dt du. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Fazendo a mudança de variável $t = u + s(x - u)$, obtemos

$${}_a J_x^\alpha {}_a J_x^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u)(x-u)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds du. \quad (3.19)$$

Identificando $\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds = B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ com a função Beta de Euler $B(\alpha, \beta)$ resulta, finalmente,

$${}_a J_x^\alpha {}_a J_x^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(u)(x-u)^{\alpha+\beta-1} du = {}_a J_x^{\alpha+\beta} f(x). \quad (3.20)$$

Uma outra importante consequência das definições (3.13) e (3.14) é a comutatividade dos operadores integrais:

Corolário 3.1. Sobre as considerações das definições (3.13) e (3.14), e do Teorema 3.2, temos:

$${}_a J_x^\alpha {}_a J_x^\beta f(x) = {}_a J_x^\beta {}_a J_x^\alpha f(x) \quad \text{e} \quad {}_x J_b^\alpha {}_x J_b^\beta f(x) = {}_x J_b^\beta {}_x J_b^\alpha f(x) \quad (3.21)$$

Em outras palavras, os conjuntos dos operadores ${}_a J_x^\alpha : L_1[a, b] \rightarrow L_1[a, b]; \alpha \geq 0$ e ${}_x J_b^\alpha : L_1[a, b] \rightarrow L_1[a, b]; \alpha \geq 0$ formam semigrupos com respeito à concatenação, onde o elemento neutro é o operador identidade, ${}_a J_x^0$ e ${}_x J_b^0$, respectivamente. Estas propriedades (3.21) são uma generalização direta do caso usual de integrais de ordem inteira, onde as integrais também comutam formando um semigrupo.

3.1.2 As derivadas de Riemann-Liouville

Os operadores de integração ${}_a J_x^\alpha$ e ${}_x J_b^\alpha$, definidos em (3.13) e (3.14), desempenham papel central no Cálculo Fracionário de Riemann-Liouville. Antes de definir as derivadas fraci-

onárias de Riemann-Liouville, relembramos que para inteiros positivos $n > m$ vale a identidade

$D_x^m f(x) = D_x^n J_x^{n-m} f(x)$, onde D_x^m é uma derivada usual de ordem inteira m .

Definição 3.2. As derivadas fracionárias de ordem $\alpha > 0$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) de Riemann-Liouville à esquerda e à direita são definidas respectivamente, por ${}_a D_x^\alpha f(x) = D_x^n J_x^{n-\alpha} f(x)$ e ${}_x D_b^\alpha f(x) = (-1)^n D_x^n J_b^{n-\alpha} f(x)$ com $n = [\alpha] + 1$, em que $[\alpha]$ significa aparte inteira do alpha.

Com isto temos que:

$${}_a D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(u)}{(x-u)^{1+\alpha-n}} du \quad (n = [\alpha] + 1, \alpha \in \mathbb{R}), \quad (3.22)$$

e

$${}_x D_b^\alpha f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b \frac{f(u)}{(u-x)^{1+\alpha-n}} du \quad (n = [\alpha] + 1, \alpha \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}), \quad (3.23)$$

onde $D_x^n = \frac{d^n}{dx^n}$ é uma derivada usual de ordem inteira n .

Uma consequência importante das definições (3.22) e (3.23) é que as derivadas de Riemann-Liouville são operadores não locais. O operador à esquerda (à direita) definido pela expressão integral-diferencial (3.22) (e (3.23)) depende de valores da função à esquerda (à direita) de x , isto é, $a \leq u \leq x$ ($x \leq u \leq b$).

Operadores não locais são conceitos fundamentais na teoria matemática que descrevem uma classe especial de operadores com propriedades que transcendem as limitações dos operadores locais. Enquanto os operadores locais atuam apenas em um ponto específico, os operadores não locais levam em consideração informações globais ou distribuídas em todo o domínio de interesse. Essa abordagem permite capturar efeitos de longo alcance e interações não triviais entre diferentes partes de um sistema. Em diversos campos da matemática e das ciências aplicadas, como física, engenharia e ciência dos materiais, os operadores não locais

desempenham um papel crucial na modelagem de fenômenos complexos, fornecendo uma ferramenta poderosa para lidar com influências não restritas localmente.

Observação 3.1.1. Quando α é um inteiro, as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville (3.22) e (3.23) se reduzem à derivadas usuais.

Observação 3.1.2. Para $0 < \alpha < 1$ as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville (3.22) e (3.23) podem ser aplicadas mesmo em funções não diferenciáveis. Podemos admitir que a derivada de Riemann-Liouville mesmo de funções não diferenciáveis em todo o domínio, como a função de Weierstrass.

Para ilustrar a aplicação das derivadas de Riemann-Liouville em funções simples, vamos calcular a derivada à esquerda ${}_aD_x^\alpha f(x)$ da função potência $f(x) = (x - a)^\beta$. Temos de (3.22):

$${}_aD_x^\alpha (x - a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{(u - a)^\beta}{(x - u)^{1 + \alpha - n}} du, \quad (3.24)$$

onde $n = [\alpha] + 1$, e devemos ter $\beta > -1$ em ordem de garantir a convergência da integral.

Fazendo a mudança de variável $s = \frac{(u-a)}{(x-a)}$, obtemos:

$$\begin{aligned} {}_aD_x^\alpha (x - a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} (x - a)^{\beta - \alpha + n} \int_0^1 s^\beta (1 - s)^{n - \alpha - 1} ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha + \beta + 1)} \frac{d^n}{dx^n} (x - a)^{\beta - \alpha + n}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde identificamos $\int_0^1 s^\beta (1 - s)^{n - \alpha - 1} ds = B(n - \alpha, \beta + 1)$ com a função Beta de Euler. Temos duas possibilidades para a derivada (3.25). A primeira, quando $\alpha - \beta \in \mathbb{N}$ o lado direito da (3.25) se reduz à um polinômio de grau inteiro $n - (\alpha - \beta) \in 0, 1, 2, \dots, n - 1$ e, portanto, a

derivada é nula. Na segunda, quando $\alpha - \beta \notin \mathbb{N}$ a derivada é não nula. Portanto:

$${}_a D_x^\alpha (x - a)^\beta = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha - \beta \in \mathbb{N} \\ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x - a)^{\beta-\alpha} & \text{se } \alpha - \beta \notin \mathbb{N} \end{cases}, \quad (3.26)$$

onde usamos a propriedade $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ da função Gama de Euler. De forma equivalente, temos para a derivada à direita:

$${}_x D_b^\alpha (b - x)^\beta = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha - \beta \in \mathbb{N} \\ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (b - x)^{\beta-\alpha} & \text{se } \alpha - \beta \notin \mathbb{N} \end{cases}. \quad (3.27)$$

Observação 3.1.3. É importante notar que as derivadas de Riemann-Liouville (3.22) e (3.23) de uma constante não é zero para $\alpha \notin \mathbb{N}$.

$${}_a D_x^\alpha 1 = \frac{(x - a)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}, \quad {}_x D_b^\alpha 1 = \frac{(b - x)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}. \quad (3.28)$$

Para $\alpha \in \mathbb{N}$ recuperamos as derivadas usuais de ordem inteira, e o lado direito da equação (3.28) se torna igual à zero devido aos polos da função Gama de Euler. Devido ao fato da derivada de uma constante ser diferente de zero, as equações diferenciais envolvendo derivadas de Riemann-Liouville requerem condições iniciais e de contorno não regulares.

3.2 O Cálculo Fracionário de Caputo

Nesta subseção revisaremos as definições e propriedades básicas das derivadas fracionárias de Caputo. As derivadas de Caputo são então utilizadas no restante do nosso trabalho. Essas derivadas são definidas à partir das derivadas Riemann-Liouville trocando a ordem entre integração e diferenciação.

Definição 3.3. As derivadas fracionárias de Caputo à esquerda e à direita de ordem $\alpha > 0$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) são definidas, respectivamente, por ${}_a^C D_x^\alpha f(x) = {}_a J_x^{n-\alpha} D_x^n f(x)$ e ${}_x^C D_b^\alpha f(x) = {}_x J_b^{n-\alpha} D_x^n f(x)$ com $n = [\alpha] + 1$, respectivamente:

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(u)}{(x-u)^{1+\alpha-n}} du \quad (n = [\alpha] + 1, \alpha \in \mathbb{R}_+, a \in \mathbb{R}) \quad (3.29)$$

e

$${}_x^C D_b^\alpha f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{f^{(n)}(u)}{(u-x)^{1+\alpha-n}} du \quad (n = [\alpha] + 1, \alpha \in \mathbb{R}_+, a \in \mathbb{R}), \quad (3.30)$$

onde $f^{(n)}(u) = \frac{d^n f(u)}{du^n}$ são derivadas ordinárias de ordem inteira n , e $f^{(n)} \in L_1[a, b]$.

Uma consequência importante das expressões (3.29) e (3.30) é que as derivadas de Caputo são operadores não locais. A derivada à esquerda (à direita) definida pela expressão integro-diferencial (3.29) (e (3.30)) depende de valores da função à esquerda (à direita) de x , isto é, $a \leq u \leq x$ ($x \leq u \leq b$). Em particular, se a derivada de Caputo for no tempo t , o valor da derivada de Caputo à esquerda introduz naturalmente efeitos de memória. Nosso objetivo principal neste trabalho é justamente este efeito na modelagem de epidemias.

A vantagem de utilizar as derivadas de Caputo ao invés das derivadas de Riemann-Liouville na modelagem de problemas reais se deve ao fato de que as derivadas de Caputo (3.29) e (3.30) da função constante são zero para todos $\alpha > 0$, ou seja,

$${}_a^C D_x^\alpha 1 = 0, \quad {}_x^C D_b^\alpha 1 = 0. \quad (3.31)$$

Como consequência deste fato, equações diferenciais envolvendo derivadas de Caputo requerem condições iniciais usuais. Diferente do que ocorre com equações diferenciais envolvendo derivadas Riemann-Liouville onde a solução costuma ser singular no tempo inicial, requerendo

condições iniciais não usuais e de interpretação não trivial.

Temos ainda as seguintes propriedades envolvendo derivadas de Caputo e integrais fracionárias.

Teorema 3.3. Fazendo $\alpha > 0$ para toda $f \in L_1[a, b]$, temos:

$${}_a D_x^\alpha J_x^\alpha f(x) = f(x), \quad {}_x D_b^\alpha J_b^\alpha f(x) = f(x) \quad (3.32)$$

e

$${}_a^C D_x^\alpha J_x^\alpha f(x) = f(x), \quad {}_x^C D_b^\alpha J_b^\alpha f(x) = f(x). \quad (3.33)$$

A seguir apresentamos o Teorema Fundamental do Cálculo envolvendo as derivadas fracionárias de Caputo:

Teorema 3.4. Quando $0 < \alpha < 1$ e $f(x)$ seja uma função diferenciável em $[a, b]$. Então, temos:

$${}_a J_x^{\alpha C} D_x^\alpha f(x) = f(b) - f(a) \quad (3.34)$$

e

$${}_x J_b^{\alpha C} D_b^\alpha f(x) = f(a) - f(b). \quad (3.35)$$

A demonstração desses teoremas podem ser encontradas, por exemplo, em (Kai, 2010).

Finalizamos este capítulo de revisão do Cálculo Fracionário com a derivada de Caputo da função potência. Temos para a função $(x - a)^\beta$, com $\beta > 0$,

$${}_a D_x^\alpha (x - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (x - a)^{\beta - \alpha}, \quad (3.36)$$

e

$${}_x D_b^\alpha (x-b)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}. \quad (3.37)$$

A demonstração é análoga ao que fizemos para a derivada de Riemann-Liouville da função potência, e pode ser encontrada em (Kai, 2010).

Observação 3.2.1. Se $\beta = 0$, as derivadas de Caputo são nulas. É importante destacar que a derivada de Caputo com $0 < \alpha < 1$ só existe para potências $\beta \geq 0$. Para $\beta < 0$, a integral na definição da derivada de Caputo diverge, portanto, não existe derivada de Caputo nesse caso.

Para verificar este fato para derivadas à esquerda vamos considerar, sem perda de generalidade, $a = 0$. Neste caso, temos da equação (3.36):

$${}_x^C D_b^\alpha x^\beta = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{\beta u^{\beta-1} du}{(x-u)^\alpha}. \quad (3.38)$$

Expandindo em série de potências

$$\frac{1}{(x-u)^\alpha} = \frac{1}{x^\alpha} \left[1 + \frac{\alpha u}{x} + \dots \right] = \frac{1}{x^\alpha} + \frac{\alpha u}{x^{\alpha+1}} + \dots, \quad (3.39)$$

e substituindo na equação (3.38) obtemos

$$\begin{aligned} {}_0^C D_x^\alpha x^\beta &= \frac{\beta}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x u^{\beta-1} \left[\frac{1}{x^\alpha} + \frac{\alpha u}{x^{\alpha+1}} + \dots \right] du \\ &= \frac{\beta}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{u^{\beta-1}}{x^\alpha} du + \frac{\beta}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{u^\beta}{x^{\alpha+1}} du + \dots, \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde a primeira integral diverge se $\beta < 0$. Portanto, só existe derivada de Caputo de ordem $0 < \alpha < 1$ da função potência se $\beta \geq 0$.

4 O MODELO SIR COM SATURAÇÃO

Neste capítulo apresentamos o Modelo SIR com saturação proposto em (Kolokolnikov, 2020), e definimos nosso modelo generalizado com saturação e derivadas fracionárias.

4.1 Introdução SIR com Saturação

À medida que a pandemia de coronavírus se alastrou, ela provocou mudanças drásticas no cotidiano das pessoas, suscitando um interesse significativo por parte da comunidade científica em modelar essa epidemia. O modelo SIR, que foi abordado detalhadamente ao longo desta dissertação, constitui uma ferramenta matemática valiosa para compreender o desenvolvimento de qualquer epidemia. Nesse modelo, pressupõe-se a existência de uma taxa de infecção proporcional ao produto dos indivíduos suscetíveis e infectados. Entretanto, é importante ressaltar que essa suposição se mostra apropriada apenas para o estágio inicial do surto epidêmico da COVID-19, conforme será discutido na subseção subsequente.

Neste subsequente capítulo, exploramos o modelo SIR com saturação, uma extensão do modelo SIR tradicional, utilizado para analisar a propagação de doenças infecciosas. O modelo SIR (Suscetível-Infectado-Recuperado) tem sido amplamente utilizado para descrever o comportamento de epidemias. No entanto, em certos contextos, a suposição de que a taxa de infecção é proporcional ao produto dos indivíduos suscetíveis e infectados pode não ser suficiente para capturar o comportamento real da doença.

O modelo SIR com saturação leva em conta a capacidade de propagação da doença. A inclusão do termo de saturação na taxa de infecção permite que a dinâmica do sistema atinja

um patamar e evite um crescimento descontrolado. Essa abordagem é especialmente relevante em situações em que medidas de controle, como a imunização em massa ou a redução do contato social, afetam a capacidade de propagação da doença.

Para introduzirmos o modelo SIR com saturação na dissertação, exploramos suas principais características e propriedades. Com isso, analisamos como a saturação afeta a dinâmica da doença e quais os impactos observados na curva de propagação. Além disso, discutimos as vantagens desse modelo em relação ao modelo SIR tradicional, destacando sua capacidade de fornecer uma representação mais realista e adaptável do comportamento de epidemias em situações que envolvem recursos limitados.

4.2 Modelo SIR com Saturação

Como visto em (Kolokolnikov, 2020), percebe-se que o modelo SIR clássico não descreve bem a epidemia de COVID-19 para intervalos de tempos longos. Neste caso, percebe-se que a força de infecção satura, e para resolver esse problema na modelagem foi proposto então, em (Kolokolnikov, 2020), um modelo do tipo SIR (suscetível, infectado e recuperado/removido) que leva em consideração essa saturação.

A saturação neste modelo surge do limite de campo médio de um modelo probabilístico de agentes no qual um indivíduo infectado interage com outros indivíduos da população que estão a uma certa distância definida por um raio de infecção. Nessa população a infecção só pode acontecer se um indivíduo suscetível estiver à uma distância menor que r de um indivíduo infectado. Discutiremos abaixo este modelo em detalhes.

Segundo (Kolokolnikov, 2020), os dados reais indicam um efeito de saturação na propagação da epidemia que tem como efeito alongar/achatar a curva de infecção. Então, ele

propõe um modelo probabilístico de agentes no qual o indivíduo infectado interage com outros indivíduos da população que estão a uma certa distância definida por um raio de infecção. Nessa população a infecção só pode acontecer se um indivíduo suscetível estiver à uma distância menor que r de um indivíduo infectado. Na Figura 4.1 ilustramos a dinâmica deste modelo de agentes.

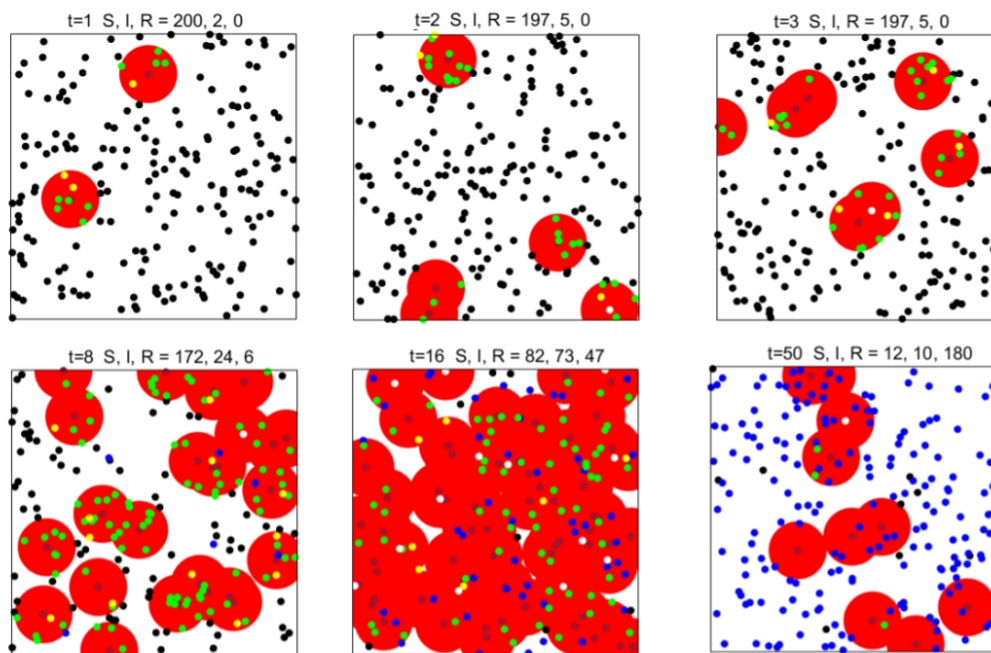


Figura 4.1: Dinâmica do modelo probabilístico de agentes proposto por (Kolokolnikov, 2021). Figura extraída de (Kolokolnikov, 2020).

Uma infecção ocorre com alguma probabilidade p se uma pessoa suscetível estiver dentro de um raio r da pessoa infectada. Suponha que as pessoas sejam bem misturadas (estão localizadas aleatoriamente dentro de uma caixa unitária). Indivíduos infectados são removidos com alguma taxa γ . Que, como já explicado, poderá vir a se tornar suscetíveis.

No trabalho (Kolokolnikov, 2020), os autores mostram que, no limite de campo médio, este modelo probabilístico de agentes se reduz a uma generalização do modelo SIR, chamado

de modelo SIR com saturação

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\kappa(1 - e^{-aI(t)})S(t) \\ \frac{dI}{dt} = \kappa(1 - e^{-aI(t)})S(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

Este modelo SIR com saturação descreve bem melhor a dinâmica da epidemia de COVID do que o modelo SIR clássico, como podemos ver na Figura 4.2 extraída de (Kolokolnikov, 2020).

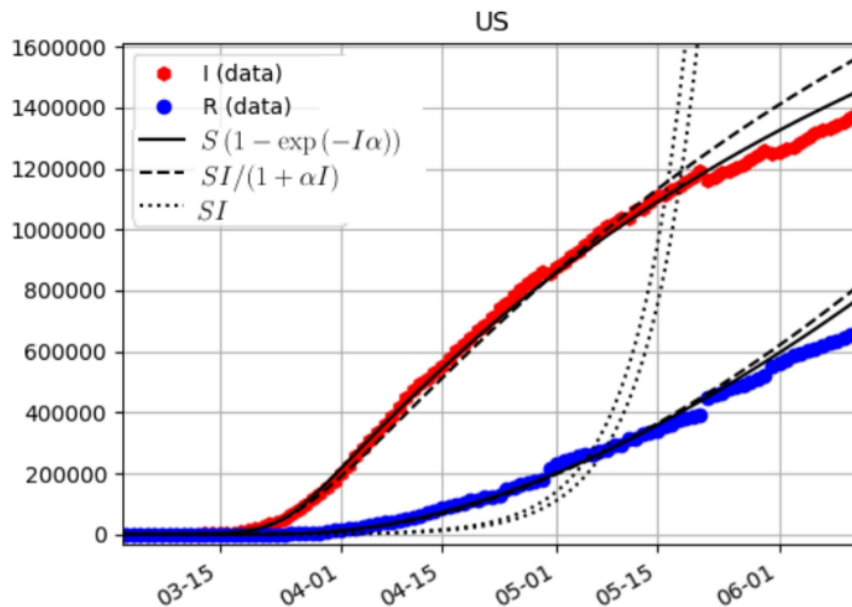


Figura 4.2: Comparação da solução do modelo SIR com o SIR com saturação (gráfico extraído de (Kolokolnikov, 2020))

No contexto deste estudo, realiza-se a comparação entre dois modelos probabilísticos: o sistema SIR e o sistema SIR com saturação. Na Figura 4.2, são apresentados os gráficos correspondentes a esses modelos, sendo as linhas pontilhadas representativas do sistema SIR clássico e a linha preta contínua indicativas do sistema SIR com saturação. Em azul e vermelho temos dados reais. A comparação desses gráficos revela diferenças significativas em termos de comportamento.

O sistema SIR segue uma tendência exponencial, caracterizada por um crescimento rápido e contínuo ao longo do tempo. Por outro lado, o sistema SIR com saturação apresenta um comportamento distinto, no qual a curva começa a se atenuar em um determinado ponto. Essa atenuação é resultado do efeito de saturação, que limita o crescimento e reduz a taxa de propagação da doença.

Ao observar a Figura 4.2, é evidente que o sistema SIR com saturação se diferencia do sistema SIR, apresentando uma curva que se aproxima mais dos dados reais ao longo do tempo. Essa diferença na dinâmica dos dois modelos sugere que o sistema SIR com saturação pode ser mais adequado para descrever certos cenários epidemiológicos em que há uma influência significativa de fatores limitantes ou saturação dos recursos disponíveis.

Portanto, a comparação entre os modelos SIR e SIR com saturação revela a importância de considerar o efeito de saturação na modelagem da propagação de doenças infecciosas. O sistema SIR com saturação fornece uma perspectiva mais realista, permitindo uma representação mais precisa e contextualizada do comportamento da epidemia. Essa análise comparativa destaca a relevância de modelos mais sofisticados e adaptáveis para uma compreensão aprofundada dos padrões de disseminação de doenças e o planejamento eficaz de intervenções de saúde pública.

A fim de ajustar ainda mais essas curvas do sistema SIR saturado com os dados reais a proposta desse trabalho fica em aplicar o Cálculo Fracionário nas equações do SIR com saturação (4.1). Uma vez que o cálculo fracionário tem o potencial de descrever a dinâmica de algumas epidemias de maneira mais precisa que o cálculo convencional, pois ele leva em consideração o efeito de memória como explica (Lopes, 2021).

5 O MODELO SIR FRACIONÁRIO COM SATURAÇÃO

Nesta seção formulamos um modelo matemático baseado no uso de derivadas de Caputo para a modelagem de contágio de doenças infecciosas, como por exemplo, a COVID-19. Nosso modelo é uma generalização do modelo proposto por (Kolokolnikov, 2020) através da inclusão de derivadas fracionárias nas equações diferenciais que descrevem a dinâmica do problema. O uso de derivadas fracionárias no estudo do modelo SIR com saturação é justificado pelo fato de que derivadas fracionárias são, em geral, operadores não locais. Neste caso, o uso de derivadas fracionárias na variável tempo introduzem naturalmente efeitos de memória na dinâmica do sistema modelado. Em especial queremos investigar se, com o uso de uma equação diferencial fracionária com parâmetros constantes, podemos modelar com mais precisão um processo tão complexo como o contágio do vírus da COVID-19.

O modelo que vamos propor para essa dinâmica entre suscetíveis, infectados e recuperados é obtido à partir do modelo (Kolokolnikov, 2020) definido pela equação (4.1) através da substituição das derivadas de ordem inteira por derivadas fracionárias de Caputo de ordem $0 < \alpha \leq 1$:

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha S = -\kappa(1 - e^{-aI(t)})S(t) + \mu(1 - S(t)) \\ {}_0^C D_t^\alpha I = \kappa(1 - e^{-aI(t)})S(t) - (\mu + \gamma)I(t) \\ {}_0^C D_t^\alpha R = \gamma I(t) - \mu R(t). \end{cases} \quad (5.1)$$

É importante resaltar que o modelo SIR fracionário com saturação (5.1) generaliza ao mesmo tempo os modelos SIR clássico (2.2), SIR saturado (4.1) e o modelo SIR fracionário ((Tavares, 2020)). Fazendo a ordem da derivada igual a um, ou seja, escolhendo $\alpha = 1$, o sistema (5.1) se reduz ao modelo SIR saturado (4.1). Por outro lado, se a for um número muito pequeno

($|a| < 1$) temos $e^{-aI} \approx 1 - aI$. Portanto, neste caso o sistema (5.1) se reduz à:

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha S = -\kappa a I(t) S(t) + \mu(1 - S(t)) \\ {}^C_0 D_t^\alpha I = \kappa a I(t) S(t) - (\mu + \gamma) I(t) \\ {}^C_0 D_t^\alpha R = \gamma I(t) - \mu R(t), \end{cases} \quad (5.2)$$

que corresponde ao modelo SIR fracionário (Tavares, 2020) com $\beta = \kappa a$. Por fim, para $\alpha = 1$ o sistema (5.2) se transforma no modelo SIR clássico com $\beta = \kappa a$.

A solução do sistema SIR fracionário com saturação (5.1) será obtida e analisada numericamente no próximo capítulo.

5.0.1 Pontos de equilíbrio do SIR fracionário com saturação

Os pontos de equilíbrio de um sistema dinâmico são fundamentais para conhecer o comportamento do sistema, como discutimos no Capítulo 2 para o modelo SIR clássico. Vamos agora analisar os pontos de equilíbrio do modelo SIR saturado fracionário. Os pontos de equilíbrio ocorrem quando todas as derivadas do modelo se anulam. Em certos casos (equilíbrio estável), mesmo quando o sistema é inicialmente perturbado, é possível observar uma convergência assintótica em direção ao equilíbrio, ou seja, as variáveis alcançam valores constantes à medida que o tempo tende ao infinito.

Para determinar os pontos de equilíbrio desse sistema dinâmico, devemos analisar sob quais condições as variáveis S , I e R se tornam constantes. Vamos denotar esses valores constantes por S^* , I^* e R^* , como fizemos na análise dos pontos de equilíbrio do modelo SIR clássico. Aqui também percebemos que a soma das variáveis deve ser constante ao longo do tempo, temos $S(t) + I(t) + R(t) = 1$, pois a população total é constante quando as taxas de

natalidade e mortalidade são iguais (o que estamos considerando neste trabalho), e as variáveis S , I e R representam frações da população total. A partir dessa relação, podemos expressar $R(t)$ como $R(t) = 1 - S(t) - I(t)$. Portanto, podemos simplificar o sistema (5.2), considerando apenas as duas primeiras equações, uma vez que o valor de R pode ser determinado a partir delas. Fazendo isso e igualando as derivadas de S e I a zero, obtemos um sistema de equações algébricas cuja solução descreve o ponto de equilíbrio do sistema:

$$\begin{cases} -\kappa(1 - e^{-aI^*})S^* + \mu(1 - S^*) = 0 \\ \kappa(1 - e^{-aI^*})S^* - (\mu + \gamma)I^* = 0 \end{cases}. \quad (5.3)$$

Esse sistema não tem solução analítica exata. No entanto, é de se esperar que para uma doença real no equilíbrio (quando a doença ou desaparece ou fica endêmica) a fração da população infectada seja um número pequeno. Portanto, para doenças reais termos, na maioria das vezes, $aI^* \ll 1$. Neste caso, podemos expandir a função exponencial no sistema (5.3) em primeira ordem em Taylor, ou seja, podemos fazer a aproximação $e^{-aI^*} \approx 1 - aI^*$. Com isso, a (5.3) se reduz à:

$$\begin{cases} -\kappa a I^* S^* + \mu(1 - S^*) = 0 \\ \kappa a I^* S^* - (\mu + \gamma)I^* = 0 \end{cases}, \quad (5.4)$$

que além de ter solução analítica, fica idêntico ao sistema linear que fixa o ponto de equilíbrio do sistema SIR clássico (2.3) quando utilizando a mudança de variável $\beta = \kappa a$:

$$\begin{cases} \mu - (\beta I^* + \mu)S^* = 0 \\ \beta S^* I^* - (\mu + \gamma)I^* = 0. \end{cases}. \quad (5.5)$$

Portanto, para $aI^* \ll 1$ os pontos de equilíbrio do modelo SIR fracionário com saturação são idênticos ao do modelo SIR clássico. A mesma análise vale para a estabilidade dos pontos de equilíbrio. Então, resumimos aqui a análise dos pontos de equilíbrio e estabilidade do modelo

detalhado no Capítulo 2 para o SIR clássico. Temos dois pontos de equilíbrio:

Caso 1) O ponto de equilíbrio $P_1(S^*, I^*, R^*) = (1, 0, 0)$ é estável quando $\beta < \mu + \gamma$, o que implica que se inserirmos um número pequeno de indivíduos infectados na população, majoritariamente suscetível, isto não desencadeará uma epidemia. Por outro lado, esse ponto de equilíbrio será instável para $\beta > \mu + \gamma$. Neste caso, ao inserirmos um pequeno número de infectados na população, isso desencadeará uma epidemia, pois o número de novos infectados crescerá inicialmente mais rápido que o número de infectados que se recuperam da doença.

Caso 2) O ponto de equilíbrio epidêmico $P_2(S^*, I^*, R^*) = \left(\frac{\mu+\gamma}{\beta}, \frac{\mu}{\mu+\gamma} - \frac{\mu}{\beta}, 1 - \frac{\gamma}{\beta} - \frac{\mu}{\mu+\gamma}\right)$ é instável quando $\beta < \mu + \gamma$. Porém, como discutido no Capítulo 2, esse ponto de equilíbrio instável não é biologicamente relevante, porque seria um ponto de equilíbrio com $S^* = \frac{\mu+\gamma}{\beta} > 1$ e, para que o sistema normalizado tenha sentido, devemos ter $0 \leq S^* \leq 1$. Então, descartamos este caso de equilíbrio instável. Já o caso de ponto de equilíbrio estável é biologicamente relevante. O equilíbrio estável ocorre quando $\beta \geq \mu + \gamma$.

6 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo apresentaremos a solução numérica do modelo SIR fracionário com saturação (5.1), e comparamos com os resultados dos modelos SIR clássico (2.2), SIR saturado (4.1) e SIR fracionário (Tavares, 2020).

Para obter uma solução numérica para o modelo SIR fracionário com saturação (5.1), utilizamos o método de diferenças finitas (De Oliveira Fagundes, 2000). Em particular, utilizamos o método de diferenças finitas adaptado para sistemas de equações diferenciais fracionárias apresentado em (Tavares, 2020). Neste método primeiro integramos ambos os lados de (5.1) com uma integral fracionária ${}_0J_t^\alpha$ de ordem α . Do Teorema Fundamental do Cálculo de Caputo, (3.34), temos:

$$\begin{cases} S(t) = S(0) - \kappa_0 J_t^\alpha (1 - e^{-aI(t)}) S(t) + \mu_0 J_t^\alpha (1 - S(t)) \\ I(t) = I(0) + \kappa_0 J_t^\alpha (1 - e^{-aI(t)}) S(t) - (\mu + \gamma)_0 J_t^\alpha I(t) \\ R(t) = R(0) + \gamma_0 J_t^\alpha I(t) - \mu_0 J_t^\alpha R(t) \end{cases} \quad (6.1)$$

Definimos agora funções discretizadas de S , I e R . Para um inteiro positivo L , seja $t_n = t_0 + nh$ ($n = 0, 1, \dots, L$), onde $h = \frac{t_L - t_0}{L}$ e $t_0 = 0$. Então, seja $X_i^{(n)} = X_i(t_n)$ (onde X indica S , I ou R).

As funções discretizadas são definidas por:

$$X^L(t) = X^{(n)} \quad \text{se } t_n \leq t < t_{n+1}. \quad (6.2)$$

Como $X(t)$ é uma função diferenciável, temos $\lim_{L \rightarrow \infty} X^L(t) = X(t)$. Consequentemente, as funções discretizadas $X^L(t)$ são uma aproximação para $X(t)$ quando L é grande. Agora

podemos encontrar os valores $X^{(n)}$ das seguintes relações de recorrência:

$$\begin{cases} S^{(n)} = S^{(0)} - \kappa \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_n} (1 - e^{-aI^L}) S^L dt + \mu \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_n} (1 - S^L) dt \\ I^{(n)} = I^{(0)} + \kappa \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_n} (1 - e^{-aI^L}) S^L dt - (\mu + \gamma) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_n} I^L dt \\ R^{(n)} = R^{(0)} + \gamma \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_n} I^L dt - \mu \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_n} R^L dt \end{cases} \quad (6.3)$$

Finalmente, calculando as integrais em (6.3) obtemos uma solução aproximada para o sistema

(5.1):

$$\begin{cases} S^{(n)} = S^{(0)} - \frac{\kappa}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{m=1}^n (1 - e^{-aI^{(n-m)}}) S^{(n-m)} \Delta_{n,m}^\alpha + \frac{\mu}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{m=1}^n (1 - S^{(n-m)}) \Delta_{n,m}^\alpha \\ I^{(n)} = I^{(0)} + \frac{\kappa}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{m=1}^n (1 - e^{-aI^{(n-m)}}) S^{(n-m)} \Delta_{n,m}^\alpha - \frac{\mu+\gamma}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{m=1}^n I^{(n-m)} \Delta_{n,m}^\alpha \\ R^{(n)} = R^{(0)} + \frac{\gamma}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{m=1}^n I^{(n-m)} \Delta_{n,m}^\alpha - \frac{\mu}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{m=1}^n R^{(n-m)} \Delta_{n,m}^\alpha \end{cases}, \quad (6.4)$$

onde

$$\Delta_{n,m}^\alpha = (t_n - t_{n-m})^\alpha - (t_n - t_{n-m+1})^\alpha. \quad (6.5)$$

Para obter a solução numérica, implementamos o sistema (6.4) em Python. Disponibilizamos no Apêndice da presente dissertação, o código de programação dos sistemas SIR, SIR fracionário, SIR saturado e SIR fracionário com saturação.

6.1 Análise qualitativa do sistema SIR fracionário com saturação

Nesta seção, para obter os resultados numéricos, em todos os modelos consideramos $\gamma_1 = 1/3$, $\mu = 0.01$, $N = 100000$. Como condição inicial, consideramos que haviam 5 indivíduos inicialmente infectados. Para os modelos SIR saturado e SIR fracionário com saturação, usamos diversos valores para os parâmetros a e κ . Para efeito de comparação, nos modelos SIR e SIR fracionário utilizamos $\beta = \kappa a$. Finalmente, utilizamos ainda diversos valores para a ordem da

derivada fracionária de Caputo α .

Na Figura 6.1 apresentamos uma visão geral do comportamento dos modelos SIR, SIR fracionário, SIR saturado e SIR fracionário com saturação. Para obter a Figura 6.1 usamos os parâmetros $a = 20$ e $\kappa = 0,05$. Para efeito de comparação, nos modelos SIR e SIR fracionário utilizamos $\beta = \kappa a = 1$. A ordem da derivada fracionária de Caputo utilizada foi de $\alpha = 0,75$. A Figura 6.1 nos proporciona uma visão esclarecedora sobre o comportamento geral desses modelos. Enquanto a derivada de ordem inteira do sistema SIR clássico exibe um pico de infecções estreito por volta dos 17 dias, a saturação e as derivadas de ordem fracionária introduzem interessantes modificações na dinâmica. O efeito mais evidente da derivada fracionária, como podemos ver da curva do modelo SIR fracionário, é o aumento na duração da epidemia, reduzindo o máximo da fração infectada e alargando a curva de infectados. Como pode ser observado na curva de infectados do modelo SIR saturado, a saturação apresenta o mesmo efeito mas de forma mais acentuada, reduzindo ainda mais o pico de infectados e aumentando consideravelmente a duração epidemia. No modelo SIR fracionário com saturação vemos a combinação dos efeitos da derivada fracionária com a saturação. Neste último caso, o alargamento do período da epidemia é grande o suficiente para formar um aparente Platô na curva de infectados. Isso se assemelha mais ao comportamento da epidemia de COVID-19, como vínhamos já relatando.

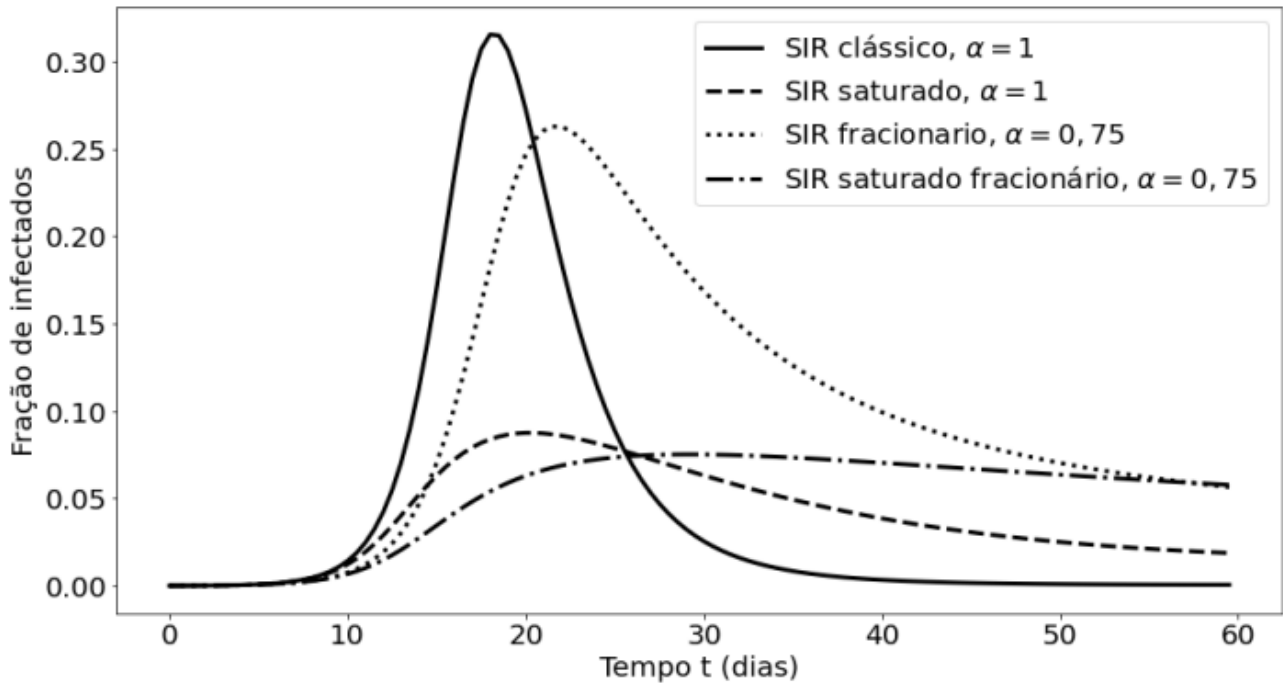


Figura 6.1: Infectados por tempo no SIR clássico, SIR fracionário, SIR saturado e SIR fracionário com saturação.

Conforme (Fagundes, 2020), (Pantoja-Lima, 2021) e (Lima, 2020) o comportamento do efeito platô é caracterizado por um estado estável prolongado em que o número de casos ativos da doença se mantém relativamente constante por um período significativo, apresenta notável semelhança com o padrão observado na propagação da infecção pelo COVID-19. Essa analogia é de grande importância, uma vez que evidencia a correspondência entre os resultados teóricos obtidos nos sistemas SIR fracionário com saturação e as dinâmicas observadas em situações reais da pandemia. A investigação e análise detalhadas do efeito platô, tanto em nível teórico quanto por meio da análise de dados empíricos, proporcionam uma base sólida para a compreensão mais aprofundada da dinâmica de epidemias de doenças como a COVID-19.

Para analisar mais detalhadamente o efeito da saturação nesses modelos, na Figura 6.2 apresentamos as soluções dos modelos SIR saturado e SIR fracionário com saturação para valores diferentes de κ e a com $\kappa \cdot a = 1 = \beta$. Vale lembrar que a é um parâmetro populacional e que κ está diretamente relacionado à taxa de transmissão da doença, representada

por $\beta = \kappa \cdot a$ quando $aI \ll 1$. Conforme ilustrado na Figura 6.2, este gráfico explora como as alterações nestes parâmetros afetam o comportamento do sistema. Essa comparação é de importância fundamental para aprofundar nossa compreensão da dinâmica subjacente e nos ajuda a identificar como diferentes valores de κ e a influenciam o resultado do modelo.

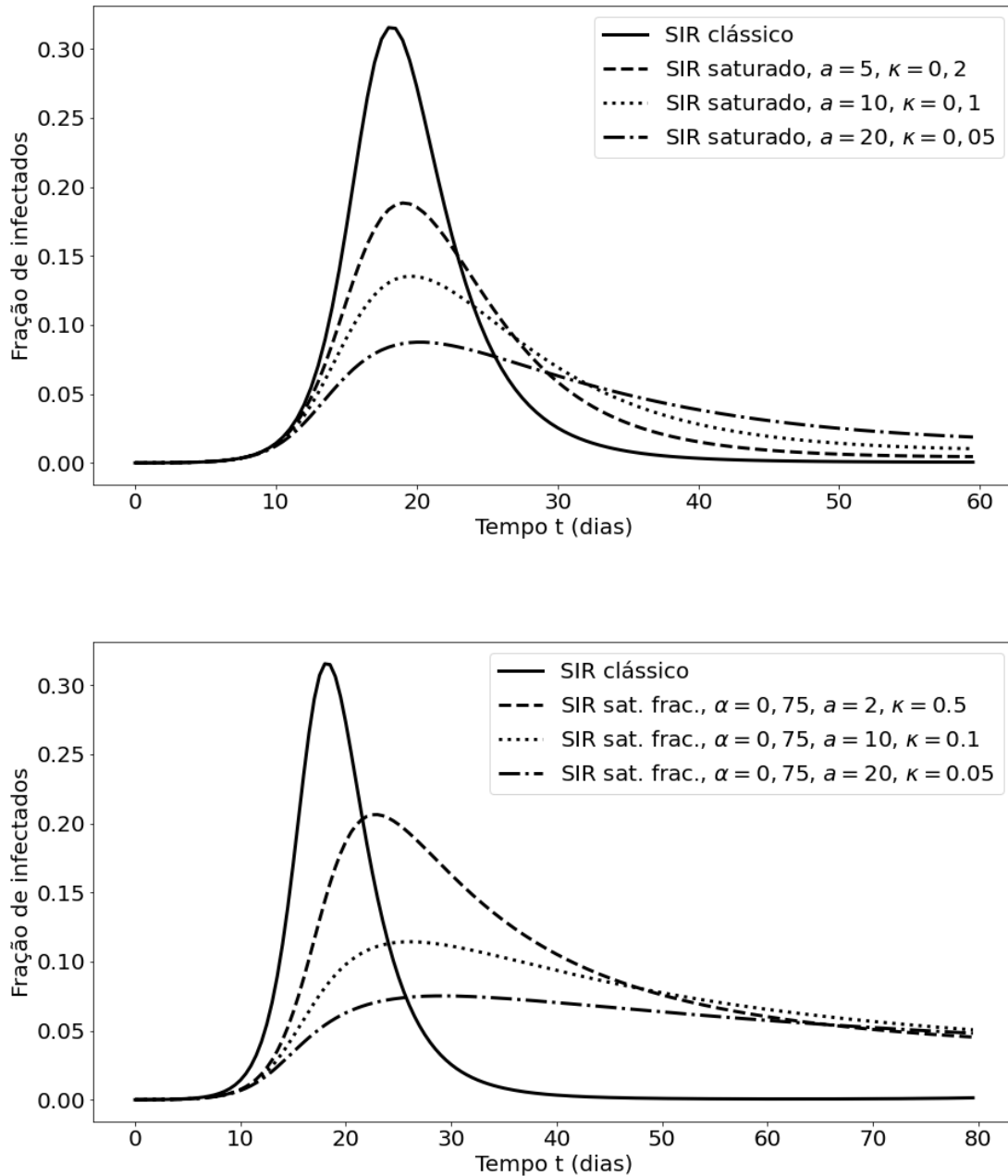


Figura 6.2: No gráfico de cima temos a comparação do modelo SIR saturado com o modelo SIR clássico com $\beta = \kappa a$. No gráfico de baixo apresentamos a comparação do modelo SIR clássico com o modelo SIR fracionário com saturação.

Nos gráficos da Figura 6.2, destacamos a suavização das curvas ao comparar o modelo SIR clássico com os gráficos dos sistemas SIR saturado e SIR fracionário com saturação. Notamos em ambos os casos que ao aumentar o parâmetro a (que controla a saturação) mantendo $\kappa \cdot a = -1$, as curvas de infectados são suavizadas no sentido de reduzir o pico de infectados e alargar o período de duração da epidemia. Isso se torna mais aparente no gráfico com $a = 20$ e $\kappa = 0,05$.

Esta última comparação entre o modelo SIR clássico e o nosso modelo SIR fracionário e com saturação revela a capacidade única deste último em se aproximar do padrão realista de propagação da COVID-19. O surgimento do Efeito Platô em nosso modelo é notável, especialmente quando aumentamos a mantendo $\kappa \cdot a = 1$ (aumentar a sem diminuir κ resulta em um aumento da taxa de infecção $\beta = \kappa \cdot a$). Esse fenômeno reflete qualitativamente características das epidemias reais como a COVID-19, como discutido anteriormente. À medida que variamos os parâmetros a e κ , observamos uma suavização significativa das curvas, resultando para a suficientemente grande na formação de um Efeito Platô. Essa tendência se torna mais evidente no gráfico com $a = 20$. Portanto, essa análise enfatiza a eficácia qualitativa do nosso modelo em capturar as complexidades da transmissão da COVID-19, proporcionando uma compreensão mais profunda da dinâmica epidêmica.

Na Figura 6.2, mantivemos os coeficientes de derivadas fracionárias fixos em $\alpha = 0,75$. Já na Figura 6.3 analisamos comparativamente o efeito da ordem da derivada. Apresentamos diferentes valores para o parâmetro $\alpha = 0,75; 0,9; 1$ (o caso $\alpha = 1$ corresponde ao modelo SIR saturado com derivada inteira), enquanto mantivemos os valores de $\kappa = 0,05$ e $a = 20$ constantes. No gráfico correspondente ao modelo SIR clássico, as curvas exibem um comportamento mais agudo e atenuado, enquanto no modelo SIR fracionário e com saturação, observamos principalmente uma suavização na curva com a diminuição da ordem da derivada. À medida

que reduzimos o valor de α , intensifica-se o a suavização da curva, e para α suficientemente pequeno identificamos o aparecimento do fenômeno do Efeito Platô. Essa análise destaca que à medida que diminuimos o valor de α , o efeito da memória do sistema é ampliada na dinâmica, resultando em uma notável estabilidade prolongada na curva, o que exerce uma influência significativa sobre a dinâmica da epidemia.

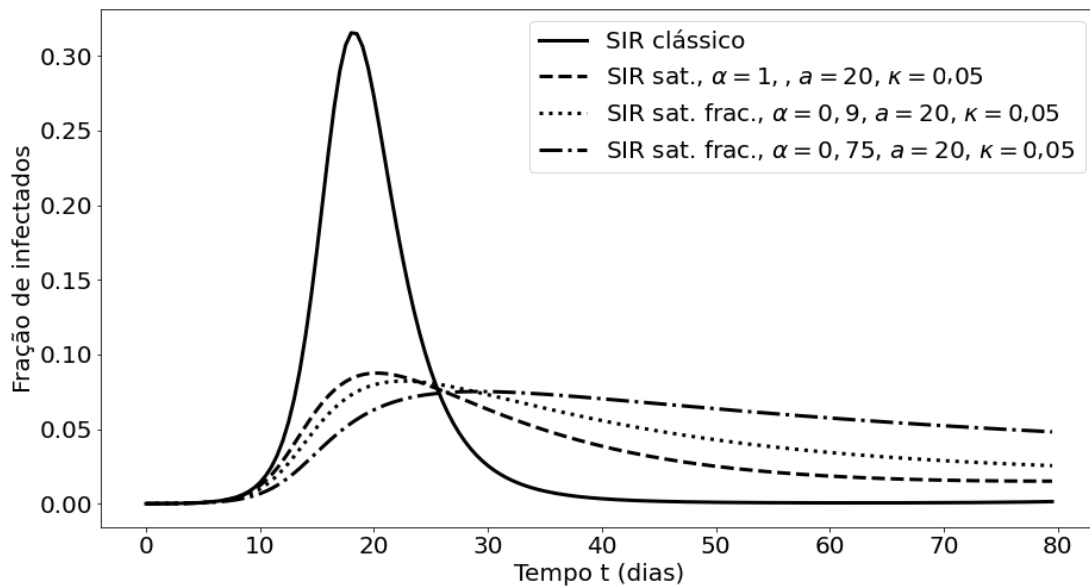


Figura 6.3: Comparação do modelo SIR saturado com o modelo SIR clássico com $\beta = \kappa a$.

Finalmente, na Figura 6.4 apresentamos o comportamento das frações de suscetíveis, infectados e removidos/recuperados do modelo SIR fracionário com saturação ao longo do tempo. Nestes gráficos utilizamos $a = 2$, $\kappa = 0,5$, $\beta = \kappa \cdot a = 1$ e $\alpha = 0,75$. Utilizamos um valor pequeno para a (para que $aI^* \ll 1$) de forma que o equilíbrio do modelo SIR fracionário com saturação seja aproximadamente igual ao equilíbrio do modelo SIR clássico, como discutido anteriormente.

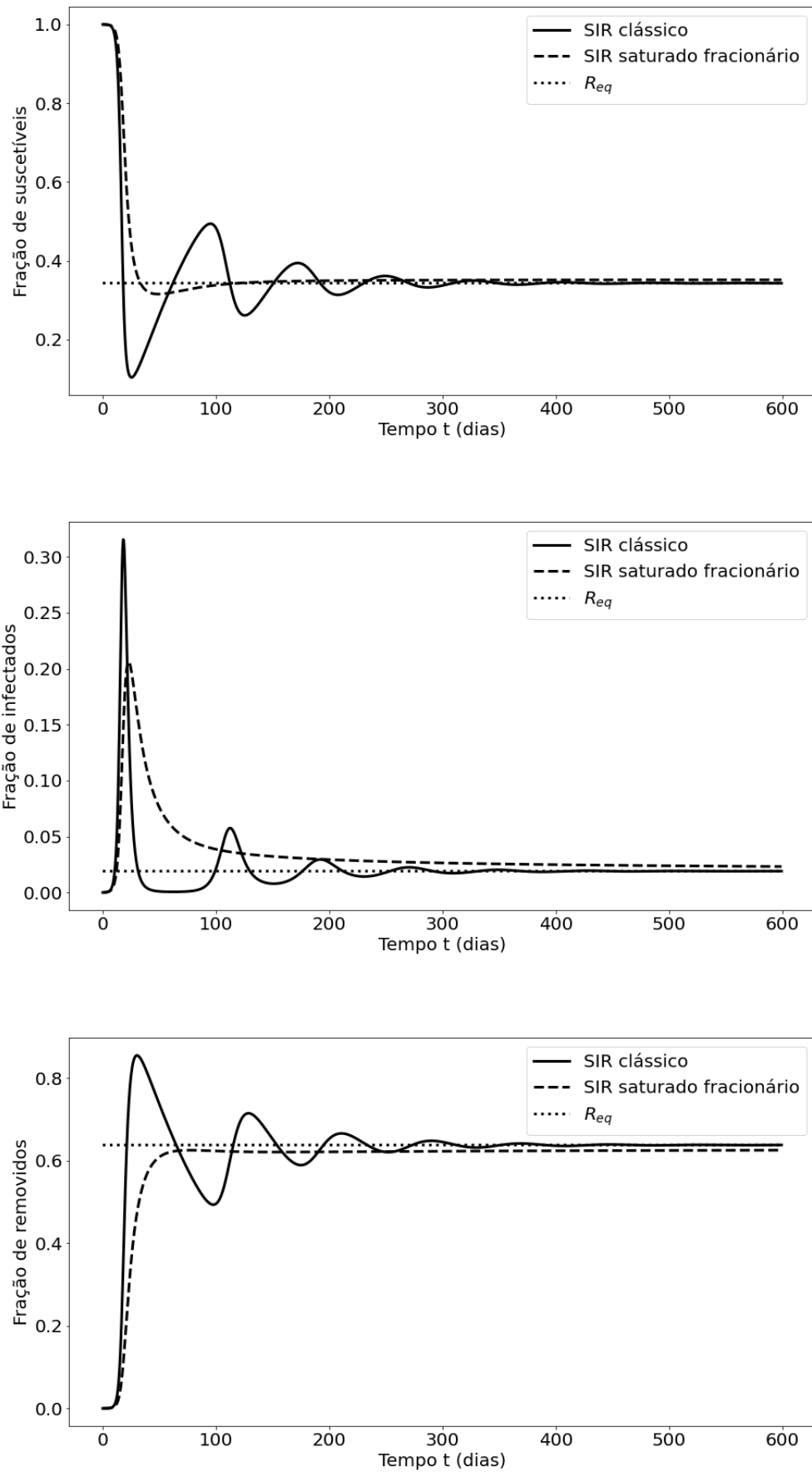


Figura 6.4: Suscetíveis, infectados e removidos/recuperados.

Do primeiro gráfico da Figura 6.4 é notável a diferença entre a dinâmica do modelo SIR clássico e a dinâmica do nosso modelo SIR fracionário com saturação. No início a maioria da população está suscetível à doença, porque há apenas um número mínimo de infectados. No entanto, como é esperado, à medida que o tempo avança parte dos indivíduos suscetíveis é infectada pela doença, reduzindo a fração de suscetíveis. Após o dia $t \approx 25$ começam a surgir diferenças marcantes entre esses modelos. O modelo SIR clássico exibe um comportamento convencional, caracterizado por curvas agudas e a presença de vários picos de infecção (novos eventos de epidemia antes de atingir o equilíbrio). Essa dinâmica sugere flutuações acentuadas no número de casos ao longo do tempo. Em contraste, o modelo SIR fracionário e com saturação apresenta uma curva suave, sem oscilações. Finalmente, em ambos os modelos, quando t se aproxima de infinito as frações de suscetíveis aproximam-se do valor de equilíbrio epidêmico $S^* = \frac{\mu+\gamma}{\beta} = \frac{1}{3} + 0,01 \approx 0,3433$ discutido no capítulo anterior.

No segundo gráfico da Figura 6.4 temos a dinâmica dos infectados nos modelos SIR clássico e SIR fracionário com saturação. Este gráfico também revela diferenças notáveis em suas trajetórias temporais. Inicialmente, ambos os modelos apresentam um aumento acentuado no número de infectados, refletindo o início de uma epidemia, quando a maioria da população está deixando de ser suscetível e se infectando. No entanto, à medida que o tempo progride, as disparidades entre os dois modelos se tornam evidentes. No modelo SIR clássico, novamente, a curva de infectados é caracterizada por oscilações acentuadas e picos frequentes. Já no modelo SIR fracionário com saturação, a presença da saturação e do efeito de memória, devido à derivada fracionária, influencia sua dinâmica deixando a curva com característica mais suave, resultando no desaparecimento das oscilações e no aumento da duração da epidemia. Novamente, para $t \rightarrow \infty$ em ambos os modelos as frações de infectados aproximam-se do valor de equilíbrio epidêmico $I^* = \frac{\mu}{\mu+\gamma} - \frac{\mu}{\beta} \approx 0,0191$.

Finalmente, no terceiro gráfico da Figura 6.4 temos a dinâmica dos removidos/recuperados nos modelos SIR clássico e SIR fracionário com saturação. É natural que o número de recuperados aumente bastante ao longo do tempo, pois os indivíduos infectados eventualmente se recuperam. No entanto, as diferenças entre os modelos são notáveis. No modelo SIR clássico, a curva que representa o número de recuperados exibe flutuações muito acentuadas, com um picos ingrimos seguidos vales frequentes. Essa oscilação é uma característica intrínseca ao modelo clássico. Por outro lado, no modelo SIR fracionário com saturação, a presença da saturação e do efeito da derivada fracionária suavizam significativamente a curva dos recuperados ao longo do tempo. Aqui, novamente desaparecem as oscilações. O valor de equilíbrio utilizado para a fração de removidos/recuperados foi de $R^* = 1 - \frac{\gamma}{\beta} - \frac{\mu}{\mu+\gamma} \approx 0,6375$.

6.2 Comparação entre modelos numéricos e dados reais

Nesta seção, comparamos as soluções dos modelos SIR clássico, SIR saturado e SIR fracionário com saturação com dados reais da epidemia de COVID-19 no Brasil. Os dados reais foram extraídos de (Organização Mundial da Saúde, 2023) e estão no apêndice desta presente dissertação. É importante mencionar que não tivemos como objetivo nesta seção fazer uma análise rigorosa determinando minuciosamente os valores dos parâmetros do modelo que minimizam os erros na comparação com os dados reais. Por exemplo, não fizemos análise do desvio quadrático médio entre os resultados dos modelos com os dados reais. Os valores dos parâmetros foram determinados qualitativamente (observando visualmente os gráficos) com o objetivo apenas de ilustrar o potencial dos modelos SIR saturado e SIR fracionário com saturação na modelagem de doenças como a COVID-19.

Na Figura 6.5 apresentamos os dados reais à partir do dia 20 de abril de 2020 (semana

17 da epidemia de COVID-19 no Brasil) até a semana 37 da epidemia. Essas 20 semanas mostram o princípio de uma estabilidade no número semanal de infectados (platô). Este intervalo de tempo foi utilizado para determinarmos os valores dos parâmetros dos modelos que melhor representam (aproximadamente) os dados reais. Em todos os modelos utilizamos $N = 200000000$ como valor aproximado para a população total do Brasil, $\mu = 0,0005$ para a taxa semanal de natalidade e mortalidade, e $\gamma = 1$ (consideramos de forma aproximada que um indivíduo doente permanece infeccioso por aproximadamente uma semana).

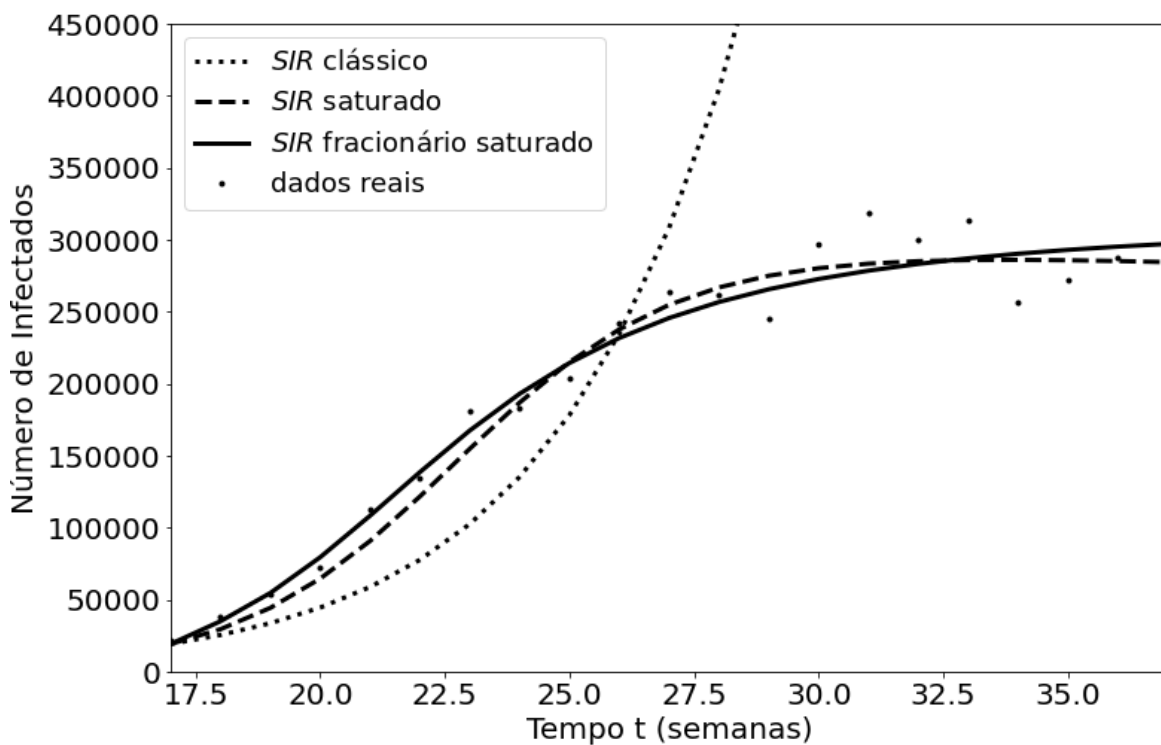


Figura 6.5: Comparação com dados reais da epidemia de COVID-19 no Brasil à partir da semana 17 até a semana 37. Fonte dos dados reais: (Organização Mundial da Saúde, 2023)

Desta Figura 6.5 fica evidente que o modelo SIR clássico não descreve a dinâmica da COVID-19. Não é possível encontrar um valor para o parâmetro β que represente qualitativamente o comportamento dos dados reais. O valor $\beta = 1,3$ utilizado neste gráfico foi o que apresentou o melhor resultado visualmente, mas mesmo neste caso, a solução do modelo

SIR clássico foge muito do resultado real. Por outro lado, ambos os modelos SIR saturado (com $a = 610$ e $\kappa = 0,0025$) e SIR fracionário com saturação (com $a = 670$, $\kappa = 0,0025$ e $\alpha = 0,75$) descrevem qualitativamente muito bem os dados reais. A diferença entre a eficácia destes modelos pode ser vista quando consideramos intervalos de tempo maiores.

Na Figura 6.6 apresentamos os dados reais à partir do dia 20 de abril de 2020 (semana 17 da epidemia de COVID-19 no Brasil) até a semana 63 (semana do dia 1 de abril de 2021) da epidemia. Optamos por não considerar um intervalo maior de tempo pois à partir deste período a aceleração do processo de vacinação e retomada das atividades presenciais implicariam em considerar variáveis não tratadas em nosso modelo.

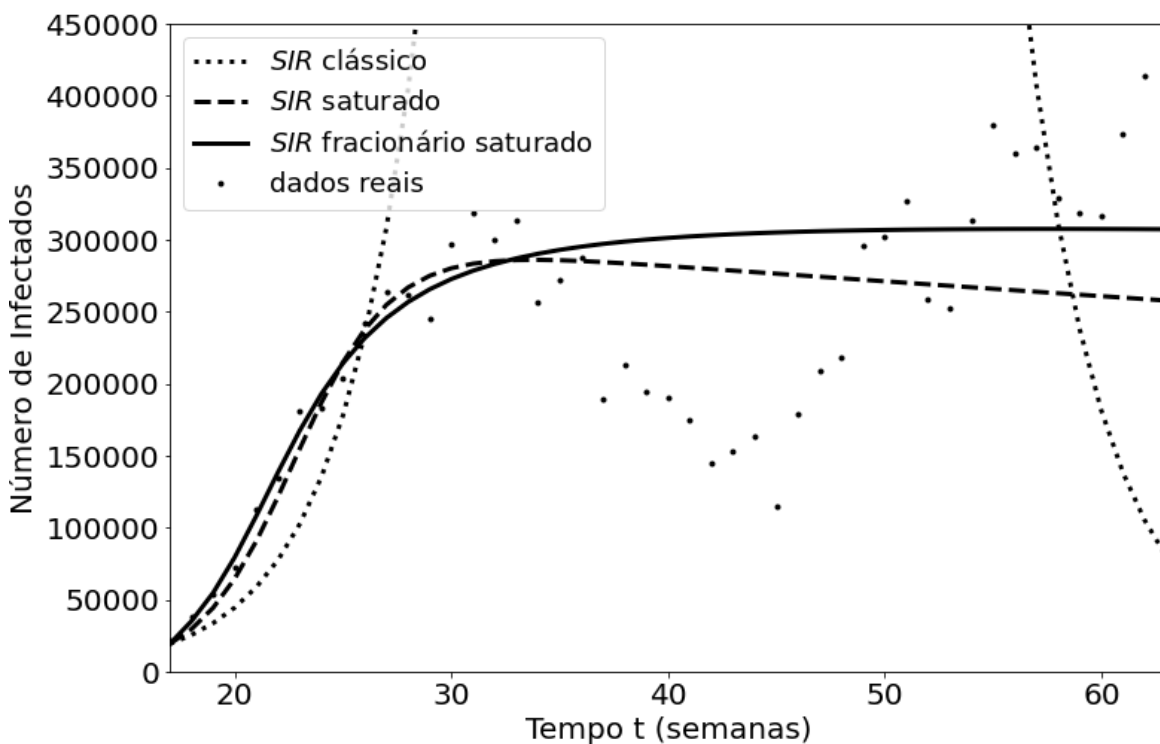


Figura 6.6: Comparação com dados reais da epidemia de COVID-19 no Brasil à partir da semana 17 até a semana 63. Fonte dos dados reais: (Organização Mundial da Saúde, 2023)

É evidente nesta Figura 6.6 a falha do modelo SIR clássico em modelar a dinâmica da epidemia de COVID-19 no Brasil. Enquanto o modelo SIR clássico prevê um aumento

enorme no número de infectados (fugindo da escala do gráfico), resultando em um período mais curto para a epidemia, os dados reais mostram uma relativa estabilidade no número de infectados à partir da semana 30 caracterizando o comportamento do efeito platô ((Fagundes, 2020), (Pantoja-Lima, 2021) e (Lima, 2020)). As flutuações à partir da semana 30 são devidas a mudanças de comportamento (grau de distanciamento social), sub-notificações de casos, difusão espacial da doença entre regiões de densidade populacional diferentes, etc. Para levar em conta esses fatores, deveríamos considerar os parâmetros dos modelos variáveis no tempo, mas isto foge ao objetivo do presente trabalho que é ilustrar que o modelo SIR fracionário com saturação, mesmo com parâmetros constante, representa qualitativamente o comportamento da epidemia de COVID-19. Quanto ao modelo SIR saturado, embora ele também represente bem os dados reais para as primeira 37 semanas de epidemia, vemos que para 63 semanas ele já mostra uma desaceleração no número semanal de infectados, em desacordo aos dados reais de relativa estabilidade (levando-se em conta as flutuações) no período após a semana 30. Neste sentido, o modelo SIR fracionário com saturação representa qualitativamente melhor a dinâmica da epidemia de COVID-19 no Brasil até a semana 63 devido à presença do Efeito Platô.

CONCLUSÃO

Neste trabalho, apresentamos um modelo matemático para o sistema SIR fracionário com saturação, que é uma generalização do modelo SIR saturado proposto por (Kolokolnikov, 2020). Essa generalização foi alcançada por meio da inclusão das derivadas fracionárias de Caputo, que são operadores não locais. A escolha de utilizar derivadas fracionárias é fundamentada pelo fato de que esses operadores permitem capturar efeitos não locais e incorporar a memória na dinâmica do sistema. A incorporação das derivadas fracionárias enriquece a descrição do comportamento do sistema SIR saturado, proporcionando uma compreensão mais abrangente e precisa das dinâmicas complexas associadas à propagação de doenças infecciosas.

Fizemos uma análise dos pontos de equilíbrio e estabilidade do modelo SIR fracionário e com saturação. Para $aI^* \ll 1$ os pontos de equilíbrio e a estabilidade coincidem com o caso do modelo SIR clássico. Temos duas possibilidades, um ponto de equilíbrio livre de epidemia estável para $\beta = \kappa \cdot a < \mu + \gamma$ e instável para $\beta = \kappa \cdot a > \mu + \gamma$. No segundo caso, temos um ponto de equilíbrio epidêmico estável $\beta = \kappa \cdot a > \mu + \gamma$. A ordem da derivada fracionária não afeta os valores dos pontos de equilíbrio e sua estabilidade.

Fizemos uma comparação entre as soluções numéricas dos modelos SIR clássico, SIR fracionário, SIR saturado e SIR fracionário com saturação. Vimos nestes resultados os efeitos da saturação e da memória (derivada fracionária) na dinâmica desses modelos. Um resultado importante obtido é o surgimento de um Efeito Platô no número de infectados no modelo SIR fracionário com saturação, o que não aparece nos outros modelos. Portanto, essa análise enfatiza a eficácia qualitativa do nosso modelo em capturar as complexidades da transmissão da COVID-19, proporcionando uma compreensão mais profunda da dinâmica epidêmica. Por fim, comparamos os modelos SIR clássico, SIR saturado e SIR fracionário com saturação com dados

reais da epidemia de COVID-19 no Brasil. Esta comparação mostrou a completa falência do modelo SIR clássico em descrever essa epidemia, e que o modelo SIR fracionário com saturação representa qualitativamente melhor (do que o modelo SIR saturado) a dinâmica da epidemia de COVID-19 no Brasil, até a semana 63, devido à presença do Efeito de Platô.

APENDICE

Tabela 1: Tabela com dados semanais de n° de casos de 21/04/2020 até 24/09/2020

Semana	Nº de Casos
17	22234
18	37586
19	59380
20	77203
21	114107
22	151191
23	174406
24	177668
25	217065
26	246088
27	263337
28	262846
29	235010
30	319653
31	313364
32	304684
33	304684
34	265266
35	263731
36	276847
37	192687
38	212553

```

import numpy as np
from pylab import * #carrega as funções e números básicos (pi, sin, cos, etc..)
from scipy.special import gamma
from matplotlib import pyplot as plt

import timeit

start = time.time()

#pm878297623br
# Definição dos parametros
a = 0.0 #tempo inicial
b = 60 #tempo final
auxT=int(b-a)
dt = 0.5
t = arange(a, b, dt)
N1 = 100000 #população total
N2 = 100000 #população total
N3 = 100000 #população total
#N2 = 211005

n = int(ceil((b-a)/dt))
S1 = np.zeros((n),float)
I1 = np.zeros((n),float)
R1 = np.zeros((n),float)
S2 = np.zeros((n),float)
I2 = np.zeros((n),float)
R2 = np.zeros((n),float)
S3 = np.zeros((n),float)
I3 = np.zeros((n),float)
R3 = np.zeros((n),float)
S4 = np.zeros((n),float)
I4 = np.zeros((n),float)
R4 = np.zeros((n),float)
EQI = np.zeros((n),float)
EQS = np.zeros((n),float)
EQR = np.zeros((n),float)

#valores iniciais
S1[0] = 1 - 5/N1
I1[0] = 5/N1
R1[0] = 0
S2[0] = 1 - 5/N2
I2[0] = 5/N2
R2[0] = 0
S3[0] = 1 - 5/N3
I3[0] = 5/N3
R3[0] = 0
S4[0] = 1 - 5/N2
I4[0] = 5/N2
R4[0] = 0

#parametros do modelo

a1 = 20
a2 = 20
a3 = 20
a4 = 20
gama1 = 1/3
gama2 = 1/3

```

```

gama3 = 1/3
gama4 = 1/3
kappa1=0.05
kappa2=0.05
kappa3=0.05
kappa4=0.05
mu1 = 0.01
mu2 = 0.01
mu3 = 0.01
mu4 = 0.01

d1 = 1.0
d2 = 1.0

d3 = 0.75
d4 = 0.75

agamma1 = gamma(d1)
agamma2 = gamma(d2)
agamma3 = gamma(d3)
agamma4 = gamma(d4)

# Resolução do modelo

for j in range(n-1): # SIR saturado
    S1[j+1]=S1[0]-(kappa1*(1-math.exp(-a1*I1[j]))*S1[j]-mu1*(1-S1[j]))*dt**d1/(d1*agamma1)
    I1[j+1]=I1[0]+(kappa1*(1-math.exp(-a1*I1[j]))*S1[j]-(mu1+gama1)*I1[j])*dt**d1/(d1*agamma1)
    R1[j+1]=R1[0]+(gama1*I1[j]-mu1*R1[j])*dt**d1/(d1*agamma1)
    for i in range(j):
        adt1=((t[j+1]-t[i])**d1-(t[j+1]-t[i]-dt)**d1)/(d1*agamma1)
        S1[j+1] += -(kappa1*(1-math.exp(-a1*I1[i]))*S1[i]-mu1*(1-S1[i]))*adt1
        I1[j+1] += (kappa1*(1-math.exp(-a1*I1[i]))*S1[i]-(mu1+gama1)*I1[i])*adt1
        R1[j+1] += (gama1*I1[i]-mu1*R1[i])*adt1

for j in range(n-1): # SIR clássico
    S2[j+1]=S2[0]-(kappa2*a2*I2[j]*S2[j]-mu2*(1-S2[j]))*dt**d2/(d2*agamma2)
    I2[j+1]=I2[0]+(kappa2*a2*I2[j]*S2[j]-(mu2+gama2)*I2[j])*dt**d2/(d2*agamma2)
    R2[j+1]=R2[0]+(gama2*I2[j]-mu2*R2[j])*dt**d2/(d2*agamma2)
    for i in range(j):
        adt2=((t[j+1]-t[i])**d2-(t[j+1]-t[i]-dt)**d2)/(d2*agamma2)
        S2[j+1] += -(kappa2*a2*I2[i]*S2[i]-mu2*(1-S2[i]))*adt2
        I2[j+1] += (kappa2*a2*I2[i]*S2[i]-(mu2+gama2)*I2[i])*adt2
        R2[j+1] += (gama2*I2[i]-mu2*R2[i])*adt2

for j in range(n-1): # SIR fracionário
    S3[j+1]=S3[0]-(kappa3*a3*I3[j]*S3[j]-mu3*(1-S3[j]))*dt**d3/(d3*agamma3)
    I3[j+1]=I3[0]+(kappa3*a3*I3[j]*S3[j]-(mu3+gama3)*I3[j])*dt**d3/(d3*agamma3)
    R3[j+1]=R3[0]+(gama3*I3[j]-mu3*R3[j])*dt**d3/(d3*agamma3)
    for i in range(j):
        adt3=((t[j+1]-t[i])**d3-(t[j+1]-t[i]-dt)**d3)/(d3*agamma3)
        S3[j+1] += -(kappa3*a3*I3[i]*S3[i]-mu3*(1-S3[i]))*adt3
        I3[j+1] += (kappa3*a3*I3[i]*S3[i]-(mu3+gama3)*I3[i])*adt3
        R3[j+1] += (gama3*I3[i]-mu3*R3[i])*adt3

for j in range(n-1): # SIR saturado fracionário

```

```

S4[j+1]=S4[0]-(kappa4*(1-math.exp(-a4*I4[j]))*S4[j]-mu4*(1-S4[j]))*dt**d4/(d4*agamma4)
I4[j+1]=I4[0]+(kappa4*(1-math.exp(-a4*I4[j]))*S4[j]-(mu4+gama4)*I4[j])*dt**d4/(d4*agamma4)
R4[j+1]=R4[0]+(gama4*I4[j]-mu4*R4[j])*dt**d4/(d4*agamma4)
for i in range(j):
    adt4=((t[j+1]-t[i])**d4-(t[j+1]-t[i]-dt)**d4)/(d4*agamma4)
    S4[j+1] += -(kappa4*(1-math.exp(-a4*I4[i]))*S4[i]-mu4*(1-S4[i]))*adt4
    I4[j+1] += (kappa4*(1-math.exp(-a4*I4[i]))*S4[i]-(mu4+gama4)*I4[i])*adt4
    R4[j+1] += (gama4*I4[i]-mu4*R4[i])*adt4

#Gráficos

plt.figure(figsize=(15,8))
plt.plot(t, I2,'k', linewidth=3)
plt.plot(t, I1,'k--', linewidth=3)
plt.plot(t, I3,'k:', linewidth=3)
plt.plot(t, I4,'k-.', linewidth=3)
plt.legend(['SIR clássico, $\alpha=1$', 'SIR saturado, $\alpha=1$', 'SIR fracionario, $\alpha$
plt.xlabel('Tempo t (dias)', fontsize=20)
plt.ylabel('Fração de infectados', fontsize=20)
plt.tick_params(axis='both', which='major', labelsize=20)
plt.tick_params(axis='both', which='minor', labelsize=20)
plt.savefig('a1.png', format='png')
plt.show()

plt.figure(figsize=(12,8))
plt.plot(t, i3,'k', linewidth=3)
plt.plot(t, i4,'k--', linewidth=3)
plt.legend(['$i_1$, $\alpha=0.75$', '$i_2$, $\alpha=0.75$'], fontsize=20)
plt.xlabel('tempo t (dias)', fontsize=20)
plt.ylabel('fração de infectados', fontsize=20)
plt.tick_params(axis='both', which='major', labelsize=20)
plt.tick_params(axis='both', which='minor', labelsize=20)
plt.savefig('a075.png', format='png')
plt.show()

end = time.time()
print('time=', end - start)

```

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, P. R., **Modelos epidêmicos SIR, contínuos e discretos, e estratégias de vacinação**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG, 2014.
- BARTOLOMEU. R. F. M., **Modelos Epidemiológicos SIR e SIS Discretos Estudo dos modelos e elaboração de uma ação de divulgação na área da Biomatemática**. Dissertação de Mestrado, Universidade da Beira Interior, Covilhã, 2018.
- CENTRO DE INTELIGÊNCIA ESTRATÉGICA PARA GESTÃO ESTADUAL DO SUS - CIEGES. **Painel Nacional do COVID**. newblock Disponível em: <https://cieges.conass.org.br/paineis/listagem/situacao-de-saude-da-populacao/casos-e-obitos-covid-19>. Acesso em: 05 set. 2023.
- DE OLIVEIRA FORTUNA, Armando. **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos Vol.30**. . Edusp, 2000.
- Kai, . **The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type**. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2010.
- FAGUNDES, M. **Who says brazil's covid-19 curve has plateaued**. <https://www.bloomberg.com/news/articles/2020-07-17/who-says-brazil-s-covid-19-curve-has-plateaued>, Acesso em: 09 set. 2023
- GOMES, A. C. F. N., **Modelo compartimental SIRC fracionário**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, RS, 2018.
- GÜNTHER, Helena. **A função zeta, de Euler a Riemann: uma introdução a teoria analítica de números**. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2018.

HETHCOTE, H. W., **The Mathematics of Infectious Diseases**. SIAM REVIEW, Vol. 42, No. 4, pp. 599–653, 2000

KERMACK, William Ogilvy; Mckendrick, Anderson G. **A contribution to the mathematical theory of epidemics. Proceedings of the royal society of london. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character**, v. 115, n. 772, p. 700-721, 1927.

KOZIOŁ, Kamil; STANISŁAWSKI, Rafał; BIALIC, Grzegorz. **Fractional-order sir epidemic model for transmission prediction of covid-19 disease**. Applied Sciences, v. 10, n. 23, p. 8316, 2020.

KHAN, Naushad **Quarantine role in the control of corona virus in the world and its impact on the world economy**. Available at SSRN 3556940, 2020.

KOLOKOLNIKOV, **Law of mass action and saturation in SIR model with applications to coronavirus**. <https://www.mathstat.dal.ca/~tkolokol/papers/sat.pdf>. Acesso em: 09 set. 2023

LAZO, Matheus. J., **Introdução ao Cálculo Fracionário**. Apostila não publicada, 2014.

LIMA, B.; CARDIM, M. **Covid-19 no Brasil: mortes se estabilizam em platô nas alturas**. <https://www.correiobraziliense.com.br/app/noticia/brasil/2020/07/12/interna-brasil,871435/covid-19-no-brasil-mortes-se-estabilizam-em-plato-nas-alturas.shtml>. Acesso em: 09 set. 2023

LAZO, Matheus. J.; CEZARO, A. **Why can we observe a plateau even in an out of control epidemic outbreak? A SEIR model with the interaction of n distinct po-**

pulations for COVID-19 in Brazil. Trends in Computational and Applied Mathematics, v. 22, p. 109-123, 2021.

LOPES, Michele Martins. **Sobre o efeito de memória no cálculo fracionário.** Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

PANTOJA-LIMA, Jackson. **Nota Técnica n. 2: Evolução da Pandemia de COVID-19 no Município de Presidente Figueiredo, Amazonas.** Atualização: 10 jan. 2021.

SANTOS, Jéssica. **Aplicação do Cálculo Fracionário na Modelagem da Memória e da Aprendizagem.** 2018. Trabalho de conclusão de curso, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, RS.

STROGATZ, S. H., **Nonlinear Dynamics And Chaos: With Applications To Physics, Biology, Chemistry, And Engineering.** Westview Press, 1^a edição, 2001

TAVARES, Cibelle. **Sistemas Dinâmicos com Derivadas Fracionárias Aplicado a Problemas de Populações Interagentes.** Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional) - Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2020.

OLDHAM, Keith; SPANIER, Jerome. **The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order.** Elsevier, 1974.

WALDMAN, Eliseu Alves. **Vigilância em saúde pública.** NAMH/FSP-USP; Peirópolis, 1998.

ORGANIZAÇÃO MUNDIAL DA SAÚDE (OMS). **COVID-19 Dashboard.** Disponível em: <https://covid19.who.int/region/amro/country/br>. Acesso em: 09 set. 2023