

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

Implementação de API REST para automação de fluxos de Modelagem Computacional para a aplicação do Design Construtal e da Busca Exaustiva para Otimização Geométrica de placas com enrijecedores submetidas à flambagem elasto-plástica biaxial

por

Andrei Ferreira Lançanova

Projeto de dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Modelagem Computacional (PPGMC)

Rio Grande, Dezembro, 2024

Implementação de API REST para automação de fluxos de Modelagem Computacional para a aplicação do Design Construtal e da Busca Exaustiva para Otimização Geométrica de placas com enrijecedores submetidas à flambagem elasto-plástica biaxial

por

Andrei Ferreira Lançanova

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional (PPGMC) da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande (FURG), como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Modelagem Computacional.

Áreas de concentração: Mecânica Computacional e Engenharia de Software

Dr. Liércio André Isoldi

Doutor em Engenharia (UFRGS)
Orientador

Dr. Emanuel da Silva Diaz Estrada

Doutor em Engenharia (UFRGS)
Orientador

Comissão de avaliação:

Dr. Mauro de Vasconcellos Real

Doutor em Engenharia Civil (UFRGS)
PPGMC/FURG

Dr. João Paulo Silva Lima

Doutor em Estrut. e Const. Civil (UnB)
FCT/UFG

Dr. Emanuel da Silva Diaz Estrada

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional

Rio Grande, Dezembro, 2024

Ficha Catalográfica

L245i Lançanova, Andrei Ferreira.
Implementação de API REST para automação de fluxos de Modelagem Computacional para a aplicação do Design Construtal e da Busca Exaustiva para Otimização Geométrica de placas com enrijecedores submetidas à flambagem elasto-plástica biaxial / Andrei Ferreira Lançanova. – 2024.
191 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Rio Grande/RS, 2024.
Orientador: Dr. Liércio André Isoldi.
Orientador: Dr. Emanuel da Silva Diaz Estrada.

1. Placas com enrijecedores 2. Flambagem elasto-plástica biaxial 3. Design Construtal 4. Método dos Elementos Finitos 5. APIs REST I. Isoldi, Liércio André II. Estrada, Emanuel da Silva Diaz III. Título.

CDU 004

Catálogo na Fonte: Bibliotecário José Paulo dos Santos CRB 10/2344

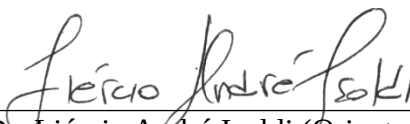
Andrei Ferreira Lançanova

“Implementação de API REST para automação de fluxos de Modelagem Computacional para a aplicação do Design Construtal e da Busca Exaustiva para Otimização Geométrica de placas com enrijecedores submetidas à flambagem elasto-plástica biaxial”

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande - FURG, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área de concentração: Modelagem Computacional.

Aprovada em: 20/12/2024

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Liércio André Isoldi (Orientador – FURG)



Prof. Dr. Emanuel da Silva Diaz Estrada (Orientador - FURG)



Prof. Dr. João Paulo Silva Lima (UFG)



Prof. Dr. Mauro de Vasconcellos Real (FURG)

Resumo

Placas com enrijecedores são utilizadas em vários contextos de engenharia. Quando uma placa está submetida a carregamentos compressivos, pode sofrer um fenômeno denominado flambagem. Quando a compressão se dá em duas direções perpendiculares entre si, a flambagem é dita biaxial. A flambagem elástica não determina a falha de uma placa, sendo possível incrementar carga além da carga crítica até atingir a tensão última de flambagem. Para melhorar o desempenho de uma placa, pode-se utilizar enrijecedores. Estes agregam complexidade para o cálculo analítico de tensões, de modo que abordagens numéricas como a do Método dos Elementos Finitos (MEF) se tornam boas alternativas. Além disso, APIs REST (Interfaces de Aplicação Programadas com Transferência de Estado Representacional) facilitam a manipulação e tratamento de dados de produção científica. Assim, o presente trabalho desenvolve a implementação de uma API REST com a biblioteca Django Rest Framework, integrada ao Ansys Mechanical APDL através da biblioteca PyMAPDL, para automação dos fluxos de modelagem computacional de placas com enrijecedores submetidas à flambagem elasto-plástica biaxial. Foi escolhido o elemento finito SHELL281 para a discretização com MEF, por este ser mais adequado para a modelagem de placas finas e moderadamente espessas. A verificação do modelo computacional e da API REST demonstrou boa concordância com a literatura para todos os casos analisados. A API REST desenvolvida foi utilizada em um estudo de caso com o Método Design Construtal para a avaliação geométrica de placas com enrijecedores submetidas à flambagem elasto-plástica biaxial, onde avaliou-se múltiplas combinações $SP(N_{ls}; N_{ts}; h_s/t_s)$ dos graus de liberdade h_s/t_s , $N_{ls} = \{2, 3, 4, 5\}$ e $N_{ts} = \{2, 3, 4, 5\}$ com uma restrição fração volumétrica $\phi = 0,3$ e um volume total $V_t = 0,028 \text{ m}^3$, para estudar seu efeito nos indicadores de performance tensão última de flambagem biaxial normalizada (NUS_{2A}) e deflexão máxima normalizada com relação à flambagem biaxial (NMD_{2A}). Os resultados mostraram que a melhor performance para NUS_{2A} aconteceu na configuração geométrica $SP(4;2;4,800)$ que obteve $NUS_{2A} = 5,717$, enquanto a melhor performance para NMD_{2A} se deu na configuração geométrica $SP(3;2;5,466)$ que obteve $NMD_{2A} = 0,039$, em relação à placa de referência. Também foi realizado um estudo comparativo entre os resultados de flambagem uniaxial e biaxial, que mostrou que o uso de enrijecedores melhora o desempenho frente a flambagem elasto-plástica biaxial de forma mais significativa do que para a uniaxial.

Palavras-chave: Placas com enrijecedores, Flambagem elasto-plástica biaxial, Design Construtal, Método dos Elementos Finitos, APIs REST.

Abstract

Stiffened plates are used in various engineering contexts. When a plate is subjected to compressive loads, it may undergo a phenomenon known as buckling. When compression occurs in two mutually perpendicular directions, the buckling is referred to as biaxial. Elastic buckling does not determine the failure of a plate, as it is possible to increase the load beyond the critical load until reaching the ultimate buckling stress. To improve the performance of a plate, stiffeners can be used. These add complexity to the analytical calculation of stresses, making numerical approaches such as the Finite Element Method (FEM) good alternatives. Furthermore, REST APIs (Representational State Transfer Application Programming Interfaces) facilitate the handling and processing of scientific production data. Thus, this work develops the implementation of a REST API using the Django Rest Framework, integrated with Ansys Mechanical APDL through the PyMAPDL library, to automate computational modeling workflows of stiffened plates subjected to elasto-plastic biaxial buckling. The finite element SHELL281 was chosen for FEM discretization, as it is more suitable for modeling thin and moderately thick plates. The verification of the computational model and the REST API demonstrated good agreement with the literature for all analyzed cases. The developed REST API was used in a case study employing the Constructal Design Method for the geometric evaluation of stiffened plates subjected to elasto-plastic biaxial buckling, where multiple combinations $SP(N_{ls}; N_{ts}; h_s/t_s)$ of the degrees of freedom h_s/t_s , $N_{ls} = \{2, 3, 4, 5\}$ and $N_{ts} = \{2, 3, 4, 5\}$ were evaluated with a volume fraction constraint $\phi = 0.3$ and a total volume of $V_t = 0.028 \text{ m}^3$, to analyze their influence on the performance indicators of normalized ultimate biaxial buckling stress (NUS_{2A}) and normalized maximum deflection concerning biaxial buckling (NMD_{2A}). The results showed that the best performance for NUS_{2A} occurred in the geometric configuration $SP(4;2;4.800)$, which achieved $NUS_{2A} = 5.717$, while the best performance for NMD_{2A} was obtained in the geometric configuration $SP(3;2;5.466)$, which achieved $NMD_{2A} = 0.039$, compared to the reference plate. A comparative study was also conducted between uniaxial and biaxial buckling results, showing that the use of stiffeners improves performance against elasto-plastic biaxial buckling more significantly than against uniaxial buckling.

Keywords: Stiffened plates, Biaxial elasto-plastic buckling, Constructal Design, Finite Element Method, REST APIs.

Agradecimentos

Ao Amor Divino que sempre se manifestou para mim nas mais diversas formas, mesmo quando eu não sabia que precisava.

Aos meus orientadores Prof. Dr. Liércio André Isoldi e Prof. Dr. Emanuel da Silva Diaz Estrada, por terem sido compreensão, aconselhamento e apoio na minha jornada cheia de percalços, e por terem me ensinado que a grandeza está na simplicidade.

A minha companheira Ailézig, por todo o amor, carinho, paciência e renúncias que fez para me apoiar no meu sonho de estudar, estando ao meu lado em todos os momentos. A muitos conheci por ocioso acaso. A ti vim encontrar porque era preciso.

Ao meu irmão Robson, por ter sido, desde sempre, a pessoa que me incentivou a estudar, assim como o meu melhor amigo e inspiração ao longo de toda a vida.

Aos meus pais, Zélia e Cícero, e minha irmã Vitória, por terem apoiado o meu sonho de estudar na FURG, e tantos outros que surgiram em decorrência deste.

Às minhas cunhadas Arliv e Mainara, por terem sido o apoio que eu precisei, mesmo estando fisicamente distantes por milhares de km.

Ao meu companheiro felino Duman, por ter estado comigo durante as noites, madrugadas e amanheceres durante os quais este trabalho foi escrito.

Aos amigos André Meneghetti, Artur Nascimento, Caio César, Gibran Teixeira, Guilherme Baumgaurdt, Hallysson Mateus, Lucas Selbach, Pablo Teófilo, Rosana Soriano e Thais Passos que trouxeram significativas contribuições para o meu crescimento nos âmbitos acadêmico, profissional e pessoal, trazendo leveza e alegria ao meu percurso. Existe um pedaço de cada um de vocês neste trabalho e esta vitória também é de vocês.

À CAPES pelo apoio financeiro durante o período em que fui bolsista.

À FURG por ter transformado a minha vida. Os subprogramas de Assistência Estudantil, em especial a Casa do Estudante Universitário e o Restaurante Universitário, tornaram possível que eu chegasse até aqui. Desejo que a FURG possa transformar ainda mais vidas, assim como transformou a minha.

Por fim, estendo os agradecimentos a todas as pessoas que, de uma forma ou de outra, contribuíram para que eu chegasse até aqui. A todos: Muito obrigado!

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Símbolos

Lista de Abreviaturas e Siglas

1	Introdução	22
1.1	Estado da Arte	26
1.1.1	Flambagem de placas com enrijecedores	26
1.1.2	Engenharia de software aplicada a simulação numérica	31
1.1.3	Contribuição científica	34
1.2	Objetivos	34
1.2.1	Objetivo Geral	34
1.2.2	Objetivos Específicos	34
2	Revisão Bibliográfica	36
2.1	Teorias para análise de placas	36
2.2	Resistência de pós-flambagem de placas	37
2.3	Método dos Elementos Finitos (MEF)	40
2.3.1	Aplicação do MEF com Ansys Mechanical APDL (MAPDL)	42
2.3.1.1	Estrutura de processamento do MAPDL	42
2.3.1.2	O modelo elasto-plástico de endurecimento isotrópico bi-linear	43
2.3.1.3	O elemento finito SHELL281	44
2.3.1.4	Análise de Flambagem Elástica com o MAPDL	45
2.3.1.5	Análise de Flambagem Elasto-Plástica com o MAPDL	47
2.4	Teoria e Design Construtal	49
2.4.1	Técnica de Busca Exaustiva (BE)	52
2.5	Aplicações Web	52
2.5.1	APIs REST	53

SUMÁRIO

2.5.2	Arquitetura MVC (Model - View - Controller)	54
2.5.3	A especificação OpenAPI	55
2.6	Ferramentas computacionais	55
2.6.1	A linguagem Python	55
2.6.1.1	A biblioteca PyMAPDL	56
2.6.1.2	O Django Rest Framework	57
2.6.2	O Banco de Dados Relacional MariaDB	57
2.6.3	A infraestrutura Docker	57
3	Desenvolvimento	58
3.1	Características do Modelo Computacional	59
3.1.1	Geometria	59
3.1.2	Condições de Contorno de Deslocamento	60
3.2	Modelo Computacional no MAPDL	61
3.2.1	Padronização do nome dos arquivos	62
3.2.2	Passos iniciais da modelagem	62
3.2.3	Criação da Geometria	63
3.2.4	Aplicação da malha	63
3.2.5	Análise estática com pré-tensão	64
3.2.6	Análise de flambagem elástica	65
3.2.7	Análise de flambagem elasto-plástica	65
3.2.8	Testes de Convergência de Malha (TCM)	67
3.2.9	Verificação do Modelo Computacional (VMC)	70
3.3	Implementação da API REST usando Python	72
3.3.1	Resumo Funcional	74
3.3.2	Visão Geral da Arquitetura	75
3.3.3	Fluxo geral de processamento	75
3.3.4	Estrutura do Banco de Dados	78
3.3.4.1	Tabela Plate	79
3.3.4.2	Tabela StiffenedPlate	80
3.3.4.3	Tabela StiffenedPlateAnalysis	80
3.3.4.4	Tabela ElasticBuckling	81

SUMÁRIO

3.3.4.5	Tabela ElastoPlasticBuckling	82
3.3.4.6	Tabela Material	82
3.3.4.7	Tabela ProcessingStatus	83
3.3.4.8	Tabela BucklingLoadType	83
3.3.5	Recursos (Endpoints) da API REST	84
3.3.5.1	Criação, Listagem, Detalhe, Edição e Deleção de Placas sem Enrijecedores	84
3.3.5.2	Criação, Listagem, Detalhe, Edição e Deleção de Placas com Enrijecedores	88
3.3.5.3	Criação, Listagem e Detalhe de Análises de Placas com Enrijecedores	91
3.3.5.4	Criação, Listagem e Detalhe de Resultados de Flambagem Elástica	94
3.3.5.5	Criação, Listagem e Detalhe de Resultados de Flambagem Elasto-Plástica	95
3.3.6	Verificação da API REST	98
3.4	Aplicação do Design Construtal	99
3.4.1	Definições	99
3.4.1.1	Restrições	99
3.4.1.2	Graus de Liberdade	99
3.4.1.3	Indicadores de Performance	100
3.4.2	Estudo de Caso: Flambagem Elasto-Plástica Biaxial de Placas com Enrijecedores	101
3.4.3	Estudo Comparativo: Flambagem Uniaxial e Biaxial	103
4	Resultados e Discussões	104
4.1	Implementação da API REST	104
4.2	Estudo de Caso	105
4.2.1	Placa de Referência	105
4.2.2	Performance com relação a NUS	106
4.2.2.1	Melhores e piores desempenhos para cada par (N_{ls}, N_{ts})	107
4.2.2.2	Configuração Geométrica de Pior Desempenho	111

SUMÁRIO

4.2.2.3	Configuração Geométrica de Melhor Desempenho	111
4.2.3	Performance com relação a NMD	113
4.2.3.1	Melhores e piores desempenhos para cada par (N_{ls}, N_{ts})	113
4.2.3.2	Configuração Geométrica de Pior Desempenho	116
4.2.3.3	Configuração Geométrica de Melhor Desempenho	117
4.3	Estudo Comparativo	118
4.3.1	Placa de Referência	119
4.3.2	Análise dos resultados	119
5	Conclusões	121
5.1	Proposta de continuidade	124
	Referências Bibliográficas	125
A	Teoria Elástica de Placas	135
A.1	Teoria de Pequenos Deslocamentos de Placas Finas de Kirchhoff	135
A.1.1	Hipóteses da Teoria	135
A.1.2	Equações de Placas no Sistema de Coordenadas Cartesiano	136
A.1.3	Equilíbrio entre esforços internos e ações externas	138
A.1.4	Relações entre tensões, deformações e deslocamentos a partir da Teoria da Elasticidade	140
A.1.5	Forças internas expressas em termos de w	143
A.1.6	Condições de contorno da Teoria das Placas de Kirchhoff	145
A.1.6.1	Condições de contorno geométricas (Borda fixa a translação e rotação)	146
A.1.6.2	Condições de contorno estáticas (Borda livre não-carregada)	146
A.1.6.3	Condições de contorno mistas (Borda simplesmente apoiada)	148
A.1.7	Solução da equação diferencial das placas finas de Kirchhoff . . .	149
A.2	Teorias de Deformação por Cisalhamento de 1ª Ordem de Reissner-Mindlin	149
A.2.1	Teoria de Reissner	150
A.2.1.1	Hipóteses da Teoria	150
A.2.1.2	Equações da Teoria	151

SUMÁRIO

A.2.1.3	Condições de contorno	152
A.2.2	Teoria de Mindlin	153
A.2.2.1	Hipóteses da Teoria	153
A.2.2.2	Equações da Teoria	153
A.2.2.3	Condições de contorno	154
A.3	Flambagem de Placas	155
A.3.1	Equação diferencial da flambagem para placas	156
A.3.2	Flambagem elástica biaxial de placas retangulares	158
A.3.2.1	Obtenção da carga crítica através do Método do Equilíbrio	158
B	Script APDL de Análise de Flambagem Elasto-Plástica Biaxial	160
C	Estudo de Caso: Tabelas	173
D	Estudo de Caso: Gráficos de NUS	178
E	Estudo de Caso: Gráficos de NMD	180
F	Estudo Comparativo: Tabelas	182
G	Comparativo: Gráficos de Tensão	187
H	Comparativo: Gráficos de NUS	189

Lista de Figuras

1.1	Geometria de placa retangular	22
1.2	Geometria de uma placa retangular submetida à flambagem biaxial	23
1.3	Geometria de uma placa com enrijecedores submetida à flambagem biaxial	24
1.4	Geometria da placa com enrijecedores submetida a carregamento com- pressivo normal biaxial em conjunto com carregamento lateral	26
1.5	Fluxo de otimização de placas com enrijecedores submetidas a flambagem	27
1.6	Tipos de carregamento avaliados por Hamedani e Ranji (2013)	28
1.7	Fluxograma de aplicação do Design Construtal e da Busca Exaustiva para otimização geométrica	29
1.8	Representação do modelo de elementos finitos como um grafo equivalente	31
1.9	Modelo computacional gerado com Python, C/C++ e Fortran	32
1.10	Comparação dos tempos de processamento com manipulação manual e com o uso da automação	33
2.1	Diferença entre as rotações da superfície média das teorias de Kirchhoff e Reissner-Mindlin	37
2.2	Bifurcações na trajetória de deformações para uma placa em pós-flambagem	38
2.3	Distribuição de tensões na placa pós-flambagem para compressão uniaxial	39
2.4	Divisão do domínio em elementos	40
2.5	Arquitetura do Ansys	42
2.6	Modelo de Endurecimento Isotrópico Bilinear	43
2.7	Modelo de Endurecimento Isotrópico Bilinear para um material elasto- plástico perfeito	44
2.8	Geometria do SHELL281	44
2.9	Tipos de problema de flambagem	45
2.10	Método de Newton-Raphson	48
2.11	Procedimento de Newton-Raphson Incremental	48
2.12	Avaliação geométrica para suporte a otimização da concepção estrutural	51
2.13	Geometria otimizada aplicada na concepção estrutural do Stuttgart Airport	51
2.14	Arquitetura - PyMAPDL	56

LISTA DE FIGURAS

3.1	Fluxograma de integração de todas as etapas do presente trabalho	58
3.2	Geometria - Placas sem Enrijecedores	59
3.3	Geometria - Placas com Enrijecedores	59
3.4	Condições de Contorno - Placas Sem Enrijecedores	60
3.5	Condições de Contorno - Placas Com Enrijecedores	60
3.6	TCM - Modelo Elasto-Plástico Uniaxial Sem Enrijecedores	68
3.7	TCM - Modelo Elasto-Plástico Uniaxial Com Enrijecedores	68
3.8	TCM - Modelo Elasto-Plástico Biaxial Sem Enrijecedores	69
3.9	TCM - Modelo Elasto-Plástico Biaxial Com Enrijecedores	69
3.10	VMC - Geometria dos Enrijecedores	70
3.11	Comparação entre os processos de modelagem computacional tradicional e o proposto pelo presente trabalho	73
3.12	Visão geral da arquitetura	75
3.13	Diagrama do fluxo de dados na API REST	77
3.14	Diagrama Entidade-Relacionamento do Banco de Dados	79
3.15	Tabela Plate - Recurso de Criação de um registro	85
3.16	Tabela Plate - Recurso de Listagem	86
3.17	Tabela Plate - Recurso de Detalhe de um registro	86
3.18	Tabela Plate - Recurso de Edição de um registro	87
3.19	Tabela Plate - Recurso de Deleção de um registro	87
3.20	Tabela StiffenedPlate - Recurso de Criação de um registro	89
3.21	Tabela StiffenedPlate - Recurso de Listagem	89
3.22	Tabela StiffenedPlate - Recurso de Detalhe de um registro	90
3.23	Tabela StiffenedPlate - Recurso de Edição de um registro	90
3.24	Tabela StiffenedPlate - Recurso de Deleção de um registro	91
3.25	Tabela StiffenedPlateAnalysis - Recurso de Criação de um registro	92
3.26	Tabela StiffenedPlateAnalysis - Recurso de Listagem	93
3.27	Tabela StiffenedPlateAnalysis - Recurso de Detalhe de um registro	93
3.28	Tabela ElasticBuckling - Recurso de Criação de um registro	94
3.29	Tabela ElasticBuckling - Recurso de Listagem	95
3.30	Tabela ElasticBuckling - Recurso de Detalhe de um registro	95

LISTA DE FIGURAS

3.31	Tabela ElastoPlasticBuckling - Recurso de Criação de um registro	96
3.32	Tabela ElastoPlasticBuckling - Recurso de Listagem	97
3.33	Tabela ElastoPlasticBuckling - Recurso de Detalhe de um registro	97
3.34	Fluxograma do Estudo de Caso de Design Construtal	102
4.1	Placa de Referência - Distribuição de Tensões de von Mises	106
4.2	Placa de Referência - Distribuição de Deflexões	106
4.3	Distribuições de Tensões de von Mises para os casos de melhor performance com relação a NUS para: (a) $N_{ls} = 2$, (b) $N_{ls} = 3$, (c) $N_{ls} = 4$ e (d) $N_{ls} = 5$	109
4.4	Distribuições de Tensões de von Mises para os casos de melhor performance com relação a NUS para: (a) $N_{ts} = 2$, (b) $N_{ts} = 3$, (c) $N_{ts} = 4$ e (d) $N_{ts} = 5$	110
4.5	Configuração Geométrica de Pior Desempenho - Distribuição de Tensões de von Mises	111
4.6	Configuração Geométrica de Pior Desempenho - Distribuição de Deflexões	111
4.7	Configuração Geométrica de Melhor Desempenho para NUS - Distribuição de Tensões de von Mises	112
4.8	Configuração Geométrica de Melhor Desempenho para NUS - Distribuição de Deflexões	112
4.9	Deflexões máximas para os casos de melhor performance com relação a NMD_{2A} para: (a) $N_{ls} = 2$, (b) $N_{ls} = 3$, (c) $N_{ls} = 4$ e (d) $N_{ls} = 5$	115
4.10	Deflexões máximas para os casos de melhor performance com relação a NMD_{2A} para: (a) $N_{ts} = 2$, (b) $N_{ts} = 3$, (c) $N_{ts} = 4$ e (d) $N_{ts} = 5$	116
4.11	Configuração Geométrica de Pior Desempenho para NMD - Distribuição de Tensões de von Mises	117
4.12	Configuração Geométrica de Pior Desempenho para NMD - Distribuição de Deflexões	117
4.13	Configuração Geométrica de Melhor Desempenho para NMD - Distribuição de Tensões de von Mises	118
4.14	Configuração Geométrica de Melhor Desempenho para NMD - Distribuição de Deflexões	118
4.15	Referência - Flambagem Uniaxial - Tensões de von Mises	119

LISTA DE FIGURAS

4.16	Referência - Flambagem Uniaxial - Distribuição de Deflexões	119
A.1	Geometria da placa retangular e sistema de coordenadas cartesiano utilizado	137
A.2	Componentes de tensão no elemento infinitesimal da placa	137
A.3	Esforços internos no elemento infinitesimal da placa	138
A.4	Esforços internos por unidade de comprimento da superfície média no elemento infinitesimal da placa	139
A.5	Tensões de cisalhamento geradas pelos momentos torçores	141
A.6	Seção antes e depois da deflexão	141
A.7	Distorção angular como função das componentes de deslocamento	142
A.8	Condições de contorno	145
A.9	Condições de contorno	147
A.10	Condições de contorno	148
A.11	Hipótese da rotação das linhas originalmente perpendiculares de Reissner	151
A.12	Natureza geral dos resultados para flambagem biaxial	156
A.13	Esforços de membrana para um elemento infinitesimal da placa	156
A.14	Esforços de membrana para um elemento infinitesimal deformado da placa	157
A.15	Placa retangular submetida a esforços nas bordas no plano da superfície média	158
D.1	NUS_{2A} por h_s/t_s para $N_{ls} = \{2, 3\}$ e $N_{ts} = \{2, 3, 4, 5\}$	178
D.2	NUS_{2A} por h_s/t_s para $N_{ls} = \{4, 5\}$ e $N_{ts} = \{2, 3, 4, 5\}$	179
E.1	NMD_{2A} por h_s/t_s para $N_{ls} = \{2, 3\}$ e $N_{ts} = \{2, 3, 4, 5\}$	180
E.2	NMD_{2A} por h_s/t_s para $N_{ls} = \{4, 5\}$ e $N_{ts} = \{2, 3, 4, 5\}$	181
G.1	$\sigma_{u,1A}$ e $\sigma_{u,2A}$ por h_s/t_s para $N_{ls} = \{2, 3\}$ e $N_{ts} = \{2, 3, 4, 5\}$	187
G.2	$\sigma_{u,1A}$ e $\sigma_{u,2A}$ por h_s/t_s para $N_{ls} = \{4, 5\}$ e $N_{ts} = \{2, 3, 4, 5\}$	188
H.1	NUS_{1A} e NUS_{2A} por h_s/t_s para $N_{ls} = \{2, 3\}$ e $N_{ts} = \{2, 3, 4, 5\}$	189
H.2	NUS_{1A} e NUS_{2A} por h_s/t_s para $N_{ls} = \{4, 5\}$ e $N_{ts} = \{2, 3, 4, 5\}$	190

Lista de Tabelas

3.1	Limites de Tolerância de Convergência	67
3.2	VMC - Tipo de carregamento e geometria dos casos de verificação	71
3.3	VMC - Propriedades mecânicas utilizadas nos casos de verificação	71
3.4	VMC - Resultados	72
3.5	Estrutura da Tabela <i>Plate</i>	80
3.6	Estrutura da tabela <i>StiffenedPlate</i>	80
3.7	Estrutura da tabela <i>StiffenedPlateAnalysis</i>	81
3.8	Estrutura da Tabela <i>ElasticBuckling</i>	82
3.9	Estrutura da Tabela <i>ElastoPlasticBuckling</i>	82
3.10	Estrutura da tabela <i>Material</i>	83
3.11	Estrutura da tabela <i>ProcessingStatus</i>	83
3.12	Estrutura da tabela <i>BucklingLoadType</i>	84
3.13	Endpoints para a tabela <i>Plate</i>	85
3.14	Endpoints para a tabela <i>StiffenedPlate</i>	88
3.15	Endpoints para a tabela <i>StiffenedPlateAnalysis</i>	91
3.16	Endpoints para a tabela <i>ElasticBuckling</i>	94
3.17	Endpoints para a tabela <i>ElastoPlasticBuckling</i>	96
3.18	Verificação da API REST desenvolvida	98
4.1	Piores desempenhos para NUS_{2A} em cada par (N_{ls}, N_{ts})	107
4.2	Melhores desempenhos para NUS_{2A} em cada par (N_{ls}, N_{ts})	108
4.3	Melhores desempenhos para NUS_{2A} em cada N_{ls}	109
4.4	Melhores desempenhos para NUS_{2A} em cada N_{ts}	110
4.5	Piores desempenhos para NMD_{2A} em cada par (N_{ls}, N_{ts})	113
4.6	Melhores desempenhos para NMD_{2A} em cada par (N_{ls}, N_{ts})	114
4.7	Melhores desempenhos para NMD_{2A} em cada N_{ls}	115
4.8	Melhores desempenhos para NMD_{2A} em cada N_{ts}	116
C.1	Resultados para cada Configuração Geométrica	173
F.1	Resultados para cada Configuração Geométrica	182

Lista de Símbolos

Símbolo	Significado	Unid.
a	Comprimento da placa	mm
A_{eq}	Área equivalente da placa	mm ²
b	Largura da placa	mm
D	Rigidez a flexão da placa	N mm
E	Módulo de deformação longitudinal	GPa
E_P	Módulo tangente plástico	GPa
E_T	Módulo tangente	GPa
$\{F\}$	Vetor de carga global	—
$\{F^*\}$	Vetor de carga unitário	—
$\{F_{crit}\}$	Vetor da carga crítica	—
$\{F_y\}$	Vetor da carga de escoamento	—
G	Módulo de deformação transversal	GPa
h	Espessura da placa	mm
h_s	Altura do enrijecedor	mm
$k = h_s/t_s$	Relação de lados do enrijecedor	—
K	Matriz de rigidez total global	—
$[K_E]$	Matriz de rigidez elástica global	—
$[K_G]$	Matriz de rigidez geométrica global	—
$[K_G^*]$	Matriz de rigidez geométrica unitária	—
L_{eq}	Comprimento equivalente da placa	mm
M_x	Momento fletor em torno do eixo x	N mm
$M_{xy} = M_{yx}$	Momento torçor paralelo ao normal do plano xy	N mm
M_y	Momento fletor em torno do eixo y	N mm
m_x	Momento fletor em torno do eixo x por unidade de comprimento	N mm/mm
$m_{xy} = m_{yx}$	Momento torçor paralelo ao normal do plano xy por unidade de comprimento	N mm/mm

LISTA DE TABELAS

Símbolo	Significado	Unid.
m_y	Momento fletor em torno do eixo y por unidade de comprimento	N mm/mm
N_{cr}	Carga crítica de flambagem	N/mm
N_{ls}	Número de enrijecedores longitudinais	—
N_{ts}	Número de enrijecedores transversais	—
N_u	Carga última de flambagem	N/mm
$N_{u,1A}$	Carga última de flambagem uniaxial	N/mm
$N_{u,2A}$	Carga última de flambagem biaxial	N/mm
NMD_{1A}	Normalized Maximum Deflection for Uniaxial Buckling (Deflexão Máxima Normalizada para flambagem uniaxial)	—
NMD_{2A}	Normalized Maximum Deflection for Biaxial Buckling (Deflexão Máxima Normalizada para flambagem biaxial)	—
NUS_{1A}	Normalized Ultimate Stress for Uniaxial Buckling (Tensão Última Normalizada para flambagem uniaxial)	—
NUS_{2A}	Normalized Ultimate Stress for Biaxial Buckling (Tensão Última Normalizada para flambagem biaxial)	—
n_x	Esforço normal paralelo a x por unidade de comprimento	N/mm
$n_{xy} = n_{yx}$	Esforço tangente ao plano xy por unidade de comprimento	N/mm
n_y	Esforço normal paralelo a y por unidade de comprimento	N/mm
$\bar{N}_x$	Carga axial paralela à direção x	N/mm
$\bar{N}_y$	Carga axial paralela à direção y	N/mm
$\bar{n}_{x0}$	Esforço normal paralelo a x unitário por unidade de comprimento	N/mm
$\bar{n}_{y0}$	Esforço normal paralelo a y unitário por unidade de comprimento	N/mm
p_z	Carga externa aplicada transversalmente ao plano da placa, paralela ao eixo z	N/mm ²
q_x	Esforço cortante transversal ao plano cuja normal é paralela a x por unidade de comprimento	N/mm

LISTA DE TABELAS

Símbolo	Significado	Unid.
q_y	Esforço cortante transversal ao plano cuja normal é paralela a y por unidade de comprimento	N/mm
Q_x	Esforço cortante transversal ao plano cuja normal é paralela a x	N
Q_y	Esforço cortante transversal ao plano cuja normal é paralela a y	N
$\{R\}$	Vetor residual	—
$\ \{R\}\ $	Norma do vetor residual (Força)	N/mm
t	Espessura da placa	mm
t_0	Espessura original da placa	mm
t_1	Espessura corrigida (após dedução de volume) da placa	mm
t_{eq}	Espessura equivalente da placa	mm
t_s	Largura do enrijecedor	mm
$u_x = u$	Translação paralela à direção x	mm
$u_y = v$	Translação paralela à direção y	mm
$u_z = w$	Translação paralela à direção z	mm
$u_{z,1A}$	Translação paralela à z causada por flambagem uniaxial	mm
$u_{z,2A}$	Translação paralela à z causada por flambagem biaxial	mm
$\{U\}$	Vetor dos deslocamentos globais	—
V_T	Volume total da placa	m ³
w_0	Fator de imperfeição inicial	—
w_{max}	Deflexão máxima	mm
$w(x, y)$	Distribuição de deflexões paralelas a z da placa	mm
x	Direção x	—
y	Direção y	—
z	Direção z	—
$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$	Distorção angular por cisalhamento no plano xy	rad
ε_x	Deformação específica paralela a x	mm/mm

LISTA DE TABELAS

Símbolo	Significado	Unid.
ε_y	Deformação específica paralela a y	mm/mm
θ_x	Rotação em torno da direção x	rad
θ_y	Rotação em torno da direção y	rad
θ_z	Rotação em torno da direção z	rad
κ_x	Mudança de curvatura segundo a direção x	—
κ_y	Mudança de curvatura segundo a direção y	—
λ	Autovalor de carga	—
λ_{crit}	Autovalor de carga crítica	—
ν	Coefficiente de Poisson	—
ξ_y	Relação entre as cargas n_y e n_x	—
ξ_{xy}	Relação entre as cargas n_{xy} e n_x	—
σ_{cr}	Tensão crítica de flambagem	MPa
σ_u	Tensão última de flambagem	MPa
$\sigma_{u,1A}$	Tensão última de flambagem uniaxial com enrijecedores	MPa
$\sigma_{u,2A}$	Tensão última de flambagem biaxial com enrijecedores	MPa
$\sigma_{ur,1A}$	Tensão última de flambagem uniaxial (referência)	MPa
$\sigma_{ur,2A}$	Tensão última de flambagem biaxial (referência)	MPa
σ_x	Tensão normal paralela à direção x	MPa
σ_y	Tensão normal paralela à direção y	MPa
$\tau_{xy} = \tau_{yx}$	Tensão de cisalhamento no plano xy	N/mm ²
ϕ	Fração volumétrica	—
χ	Razão de empenamento	—
ψ_x	Rotação em torno da direção x (Mindlin)	rad
ψ_y	Rotação em torno da direção y (Mindlin)	rad
ω_x	Rotação em torno da direção x (Reissner)	rad
ω_y	Rotação em torno da direção y (Reissner)	rad

Lista de Abreviaturas e Siglas

Abreviatura	Significado
AEF	Análise de Elementos Finitos
API	<i>Application Programming Interface</i> (Interfaces de Aplicação Programadas)
REST	<i>Representational State Transfer</i> (Transferência de Estado Representacional)
JSON	<i>JavaScript Object Notation</i> (Notação de Objetos JavaScript)
HTTP	<i>HyperText Transfer Protocol</i> (Protocolo de Transferência de Hipertexto)
gRPC	<i>Google Remote Procedure Calls</i> (Chamadas de Procedimento Remoto Google)
GUI	<i>Graphical User Interface</i> (Interface Gráfica ao Usuário)
MVC	<i>Model-View-Controller</i> (Modelo–Visão–Controlador)
MEF	Método dos Elementos Finitos
EDP	Equação Diferencial Parcial
BE	Busca Exaustiva
DC	<i>Constructal Design</i> (Design Construtal)
APDL	<i>Ansys Parametric Design Language</i>
MAPDL	<i>Ansys Mechanical APDL</i>
TCM	Teste de Convergência de Malha
PNRI	Procedimento de Newton–Raphson Incremental
DRF	<i>Django Rest Framework</i>
DFC	Dinâmica dos Fluidos Computacional
SQL	<i>Structured Query Language</i> (Linguagem de Consulta Estruturada)
BD	Banco de Dados
SP	<i>Stiffened Plate</i> (Placa com Enrijecedores)
GDL	Grau de Liberdade

1 Introdução

O desenvolvimento tecnológico é uma crescente na sociedade e na engenharia. Diariamente, novas tecnologias são criadas e estas dão forma a novos estilos de vida e obras de engenharia. Segundo Sly e Crowne (2023), a evolução da tecnologias é crucial na engenharia, uma vez que este é o ponto de partida para a criação de novos produtos e sistemas, integrando exploração científica com resultados de engenharia.

A prática de engenharia estrutural evolui para poder propor novas formas de design para atender às necessidades emergentes e, neste contexto, placas são amplamente utilizadas em diversos ramos da engenharia como elementos estruturais ou componentes de máquinas, constituindo estruturas civis, arquitetônicas, hidráulicas, marítimas, aeroespaciais, dentre tantas outras (Kobayashi, 1997; Lançanova et al., 2023).

Placas são componentes estruturais bidimensionais retos e planos, em que a dimensão fora do plano, denominada espessura t , é muito menor do que as dimensões de seu plano de desenvolvimento, estas sendo o comprimento a e a largura b (Jones, 2006; Szilard, 2004), como pode-se ver na Figura 1.1, que traz a geometria de uma placa.

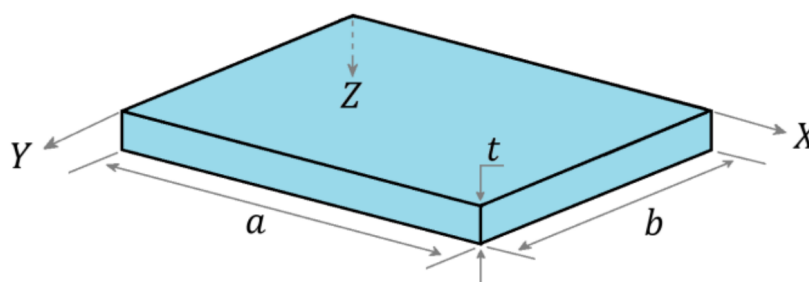


Figura 1.1: Geometria de placa retangular. Fonte: Baumgardt et al. (2023, p. 6).

De acordo com Musmar (2022), placas são elementos que podem estar submetidos a carregamentos axiais, transversais ou combinados. Segundo El-Sawy, Nazmy e Martini (2004), quando estão submetidas a carregamentos axiais, as placas podem sofrer um fenômeno indesejado de instabilidade do equilíbrio denominado flambagem. Conforme o entendimento de Tenenbaum e Eisenberger (2021), a flambagem de placas implica na perda de sua rigidez e a carga crítica é o valor de carga para o qual um incremento muito pequeno na carga gera um deslocamento infinito, de modo que não é mais possível obter a solução das equações de equilíbrio matriciais.

El-Sawy, Nazmy e Martini (2004) explicam que a flambagem pode se dar de duas formas: a flambagem elástica, que ocorre quando as placas são esbeltas e a instabilidade se dá no regime elástico do material, e a flambagem elasto-plástica, que ocorre conforme

a esbeltez da placa diminui e a carga atinge o regime de deformação plástica do material. Porém, diferentemente do que ocorre para colunas esbeltas, placas são capazes de resistir carregamento mesmo após a sua flambagem elástica (Trahair e Bradford, 1988).

Dentre os modelos para descrição de carregamento reais que ocasionam flambagem, está o modelo de flambagem biaxial, onde uma placa é submetida a cargas compressivas em duas direções perpendiculares entre si, como pode ser visto na Figura 1.2.

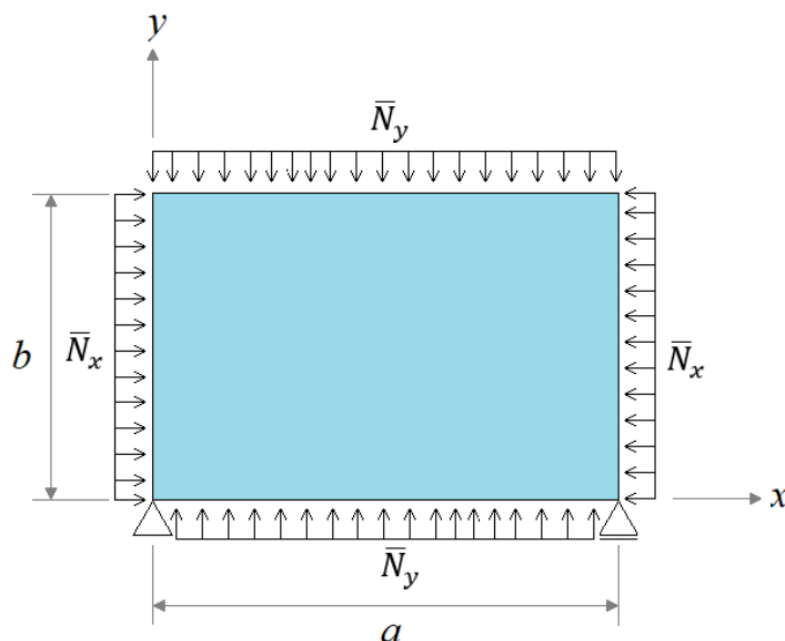


Figura 1.2: Geometria de uma placa retangular submetida à flambagem biaxial.
Fonte: Adaptado de Baumgardt et al. (2023, p. 6).

Segundo Gayathri e Parvathy (2023), placas com enrijecedores têm sido fundamentais nas indústrias marítima, offshore, aeronáutica e na construção de pontes por muitas décadas. Conforme explicam Ueda e Yao (1983), a resistência à flambagem de uma placa com enrijecedores aumenta com o aumento da rigidez à flexão dos enrijecedores.

A principal função dos enrijecedores é enrijecer a placa contra a flambagem causada por forças compressivas ou cisalhamentos atuando no plano. Para placas com compressão axial, os enrijecedores contribuem significativamente para o aumento da resistência da carga que atua paralela a direção de desenvolvimento do enrijecedor (Zhao e Mahdi, 2023). Lima et al. (2018) trazem ainda que o uso de enrijecedores aumenta significativamente a resistência a flambagem de placas com pouco ou nenhum incremento de peso a estrutura, o que favorece a redução de custos de fabricação. A geometria de uma placa com enrijecedores submetida a flambagem biaxial é apresentada na Figura 1.3.

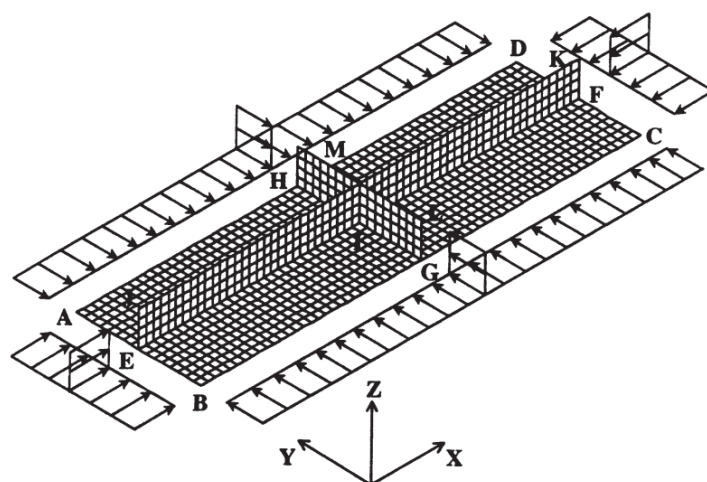


Figura 1.3: Geometria de uma placa com enrijecedores submetida à flambagem biaxial. Fonte: Adaptado de Paik e Thayamballi (2001, p. 51).

De acordo com Rackow et al. (2015), o uso de enrijecedores para melhorar a resistência à flambagem de placas é uma prática bastante comum, mas que carece de soluções analíticas para dimensionamento. Kim et al. (2017) propuseram uma formulação empírica para previsão da resistência última de placas com enrijecedores submetidos a compressão longitudinal, onde os resultados mostraram boa concordância com o modelo não-linear de elementos finitos desenvolvido no software ANSYS.

Song et al. (2019) analisaram formulações de similaridade parcial para propor alternativas economicamente viáveis aos modelos de similaridade completa para análise experimental de flambagem uniaxial de placas com enrijecedores, onde propuseram relações empíricas para modelos de pequena escala, que foram validados com modelos de escala completa e com resultados de análise de elementos finitos utilizando o ANSYS. Assim, a simulação numérica se mostra como uma importante ferramenta para análise de placas com enrijecedores (Lima et al., 2020).

Além disso, vários estudos de referência, demonstraram que os resultados de análises de flambagem de placas com enrijecedores através de simulação numérica possuem confiabilidade e boa concordância com resultados experimentais (Estefen, Chujutalli e Soares, 2016; Ringsberg et al., 2021).

Segundo Wang et al. (2015), o Método dos Elementos Finitos (MEF) é utilizado para o estudo de flambagem de placas com enrijecedores por ser adequado para captura dos modos de flambagem e por conta de sua eficiência e simplicidade em analisar e otimizar estruturas complexas. Além disso, o MEF, além de trazer resultados consistentes com dados experimentais, também se mostrou adequado para análise de flambagem em todo o intervalo de deformações elasto-plástico (Ghavami e Khedmati, 2006).

O software Ansys Mechanical APDL (MAPDL), que é baseado no MEF, tem sido utilizado em incontáveis trabalhos para realizar a análise de flambagem de placas, provendo um software de análise de elementos finitos de propósito geral que tem a capacidade de agrupar diversos campos de análise (Hassan e Kurgan, 2019).

O trabalho de Da Silveira et al. (2021) demonstrou que o Design Construtal (DC) é aplicável no contexto de Mecânica dos Materiais, realizando um estudo de flambagem elasto-plástica de placas com perfurações elípticas. Além disso, o trabalho de Lima et al. (2020) realizou a avaliação geométrica, aplicando o DC, de placas com enrijecedores submetidas à flambagem elasto-plástica uniaxial.

Muitas vezes, softwares de análise estrutural são usados de duas formas. Na primeira, instala-se o software em uma máquina privada e se utiliza localmente. Na segunda, instala-se o software em um servidor de alta performance, que é acessível através de terminais na rede local. No primeiro caso, a manutenção e atualização do software é responsabilidade do usuário local, e os recursos de máquina ficam limitados a uma máquina única. No segundo, muitas vezes trabalha-se com transmissão de arquivos e interação via terminal através de FTP e TELNET (Chen, Lin e Chao, 2006).

Utilizar uma arquitetura de sistema cliente-servidor baseada em Web pode unir o melhor dos dois mundos mencionados acima, extendendo a funcionalidade do software de análise e tornando o seu uso possível através da Internet, sem a necessidade de uso de máquinas de alta performance para o lado cliente (Chen, Lin e Chao, 2006). Um dos padrões que segue a arquitetura cliente-servidor é o padrão REST¹. Segundo Tarkowska et al. (2018), o padrão REST é uma forma difundida para prover interoperabilidade entre sistemas usando o protocolo HTTP² e o formato de troca de informações JSON³.

A linguagem Python possui uma sintaxe de código fácil de ler, em conjunto com o suporte para computação interativa, o que a torna adequada para computação numérica (Johansson, 2015). Neste sentido, Papkov, Shadymov e Pashchenko (2023) utilizaram a linguagem Python para automatizar fluxos de modelagem para dinâmica dos fluidos computacional (DFC), demonstrando que esta é adequada para automação dos processos de modelagem e simulação numérica em DFC. Os autores Kaszynski et al. (2021) desenvolveram a biblioteca PyMAPDL, que faz parte de um esforço maior chamado PyAnsys para facilitar o uso das tecnologias da família de software Ansys diretamente a partir do uso de comandos em linguagem Python.

Dentro do mundo Python, um framework que implementa o padrão REST é o Django

¹ *Representational State Transfer* - Transferência de Estado Representacional.

² *Hypertext Transfer Protocol* - Protocolo de Transferência de Hipertexto.

³ *JavaScript Object Notation* - Notação de Objetos JavaScript.

Rest Framework (DRF). O DRF suporta: a arquitetura REST, habilitando troca de informações de forma facilitada através do protocolo HTTP (Amditis et al., 2022), com fácil serialização de tipos de dados complexos (Chen et al., 2020).

Assim, o presente trabalho faz a implementação de uma API REST com DRF, integrada ao MAPDL através da biblioteca PyMAPDL, para automatizar os processos de modelagem computacional do fenômeno de flambagem elasto-plástica de placas com enrijecedores. Esta API REST é então utilizada para a realização de um estudo de caso utilizando o DC para avaliação geométrica desse fenômeno e um estudo comparativo entre os resultados para flambagem elasto-plástica uniaxial e biaxial.

1.1 Estado da Arte

1.1.1 Flambagem de placas com enrijecedores

Vários autores estudaram a flambagem de placas com enrijecedores. Paik e Seo (2009) analisaram a influência da geometria, imperfeições iniciais, tipos de carregamento (puramente normal biaxial e normal biaxial associado a carregamentos laterais com diferentes fatores de proporção), condições de simetria, e técnicas computacionais na obtenção da tensão última de flambagem de placas com enrijecedores simplesmente apoiadas, onde compararam os resultados obtidos via software Ansys com os resultados obtidos pelo método semi-analítico ALPS/ULSAP. A placa com enrijecedores submetida a carregamento normal biaxial e lateral é apresentada na Figura 1.4.

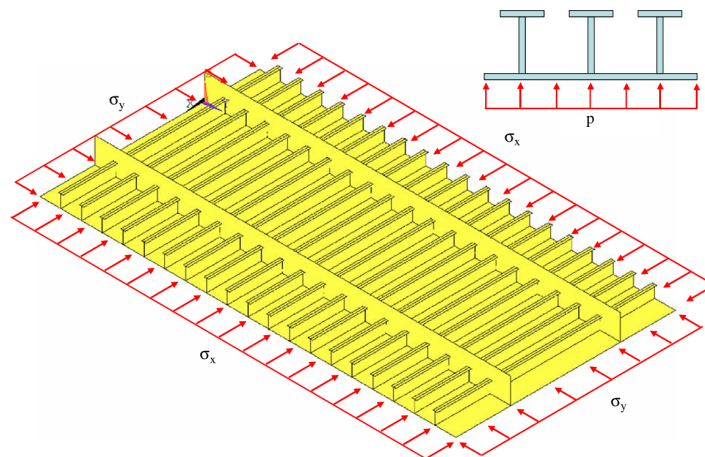


Figura 1.4: Geometria da placa com enrijecedores submetida a carregamento compressivo normal biaxial em conjunto com carregamento lateral. Fonte: Adaptado de Paik e Seo (2009, p. 1000).

Os autores Cheng et al. (2010) conduziram um estudo de otimização para placas moderadamente espessas com enrijecedores submetidas à compressão uniaxial e biaxial. Primeiramente, o estado-limite último foi determinado com base no critério de escoamento de von Mises. A solução das equações diferenciais não lineares foi realizada utilizando o algoritmo simplex de Nelder-Mead. As variáveis de design consideradas no estudo foram a quantidade e as dimensões dos enrijecedores.

O método de otimização adotado envolveu dois objetivos principais: reforçar a estrutura contra a instabilidade global e contra a tensão de trabalho. A função objetivo utilizada foi a minimização da razão entre o peso dos enrijecedores e o peso da placa. Além disso, o estudo incluiu funções de restrição voltadas à prevenção de três tipos de instabilidade estrutural: flambagem global do painel, flambagem local da placa entre os enrijecedores e flambagem local dos próprios enrijecedores. O fluxograma de otimização utilizado por Cheng et al. (2010) é mostrado na Figura 1.5.

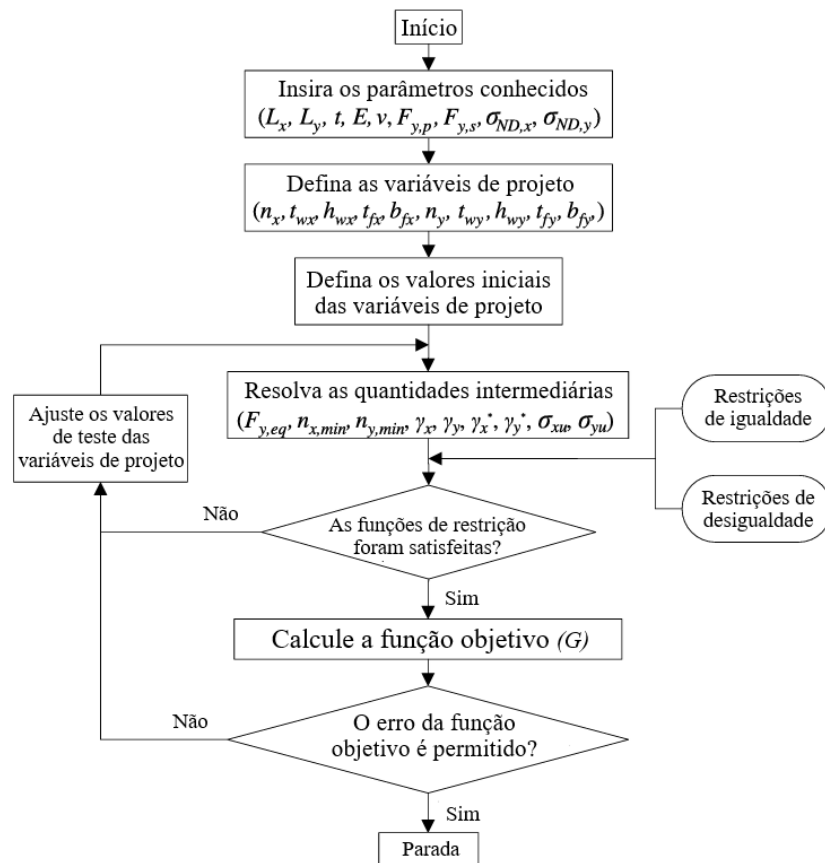


Figura 1.5: Fluxo de otimização de placas com enrijecedores submetidas a flambagem. Fonte: Adaptado de Cheng et al. (2010, p. 1227).

Hamedani e Ranji (2013) analisaram a flambagem elástica biaxial de placas com enrijecedores através da implementação de um modelo computacional de elementos finitos convencionais quadrilaterais e superelementos⁴, baseado na Teoria de Reissner-Mindlin. Os autores analisaram configurações geométricas com um enrijecedor longitudinal e um enrijecedor transversal, isto é, $N_{ls} = N_{ts} = 1$, para diferentes tipos de carregamento compressivo (ver Figura 1.6): uniforme ($\alpha = 0$), triangular ($\alpha = 1$), trativo-compressivo simétrico ($\alpha = 2$) e parabólico (P); condições de apoio nas bordas⁵: SSSS, SSCS, SCSS, CSCS, SCSC, SSCC, CCSC, CCCS, CCCC, CCFF, FCFC, CSFS, SSFS.

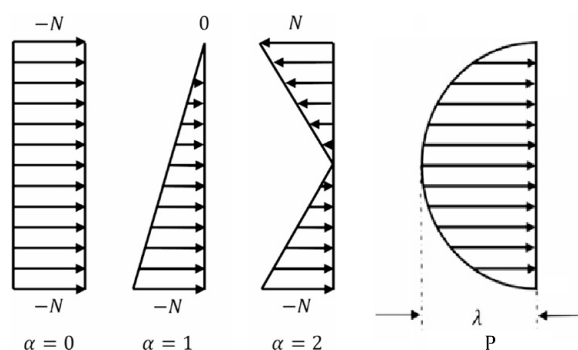


Figura 1.6: Tipos de carregamento avaliados por Hamedani e Ranji (2013). Fonte: Adaptado de Hamedani e Ranji (2013, p. 43).

Helbig et al. (2016) utilizaram o DC em conjunto com o MEF (através do software Ansys com o elemento finito SHELL93) para avaliação geométrica de placas perfuradas (com perfurações elípticas, retangulares, losangulares, oblongos e hexagonais), com orientações a 0° e 90° , analisando a relação de lados das perfurações como grau de liberdade e as tensões últimas de flambagem normalizadas como parâmetros indicadores de performance.

Da Silva et al. (2019) utilizou o DC aliado ao MEF (através do software Ansys com o elemento finito SHELL93) para avaliação geométrica de placas perfuradas com perfurações hexagonais, submetidas à flambagem elástica e elasto-plástica uniaxial, analisando a relação de lados das perfurações como grau de liberdade e as tensões crítica e última de flambagem normalizadas como parâmetros indicadores de performance.

Lima et al. (2020) utilizaram o DC em associação com a BE e o MEF (através do software Ansys com o elemento finito SHELL93) para realizar um estudo de otimização geométrica de placas com enrijecedores simplesmente apoiadas submetidas à flambagem elasto-plástica uniaxial. Para aplicar sua metodologia, Lima et al. (2020) definiram

⁴De acordo com os autores, um superelemento é um elemento complexo que consiste da conjunção de vários elementos finitos convencionais, em um arranjo mestre-servo.

⁵S - Borda Simplesmente Apoiada; C - Borda Engastada; F - Borda Livre.

a restrição de fração volumétrica, que relaciona o volume da placa de referência com o volume dos enrijecedores. Assim, parte do volume da placa foi transformada em enrijecedores, mantendo o volume total constante. Os graus de liberdade considerados foram o número de enrijecedores longitudinais (N_{ls}), transversais (N_{ts}), e a relação altura/largura dos enrijecedores, avaliados para dois valores de volume total. Como indicadores de performance, foram utilizadas a tensão última de flambagem e sua versão normalizada (relação entre a tensão última da placa com enrijecedores e da placa sem enrijecedores). O fluxograma da metodologia está ilustrado na Figura 1.7.

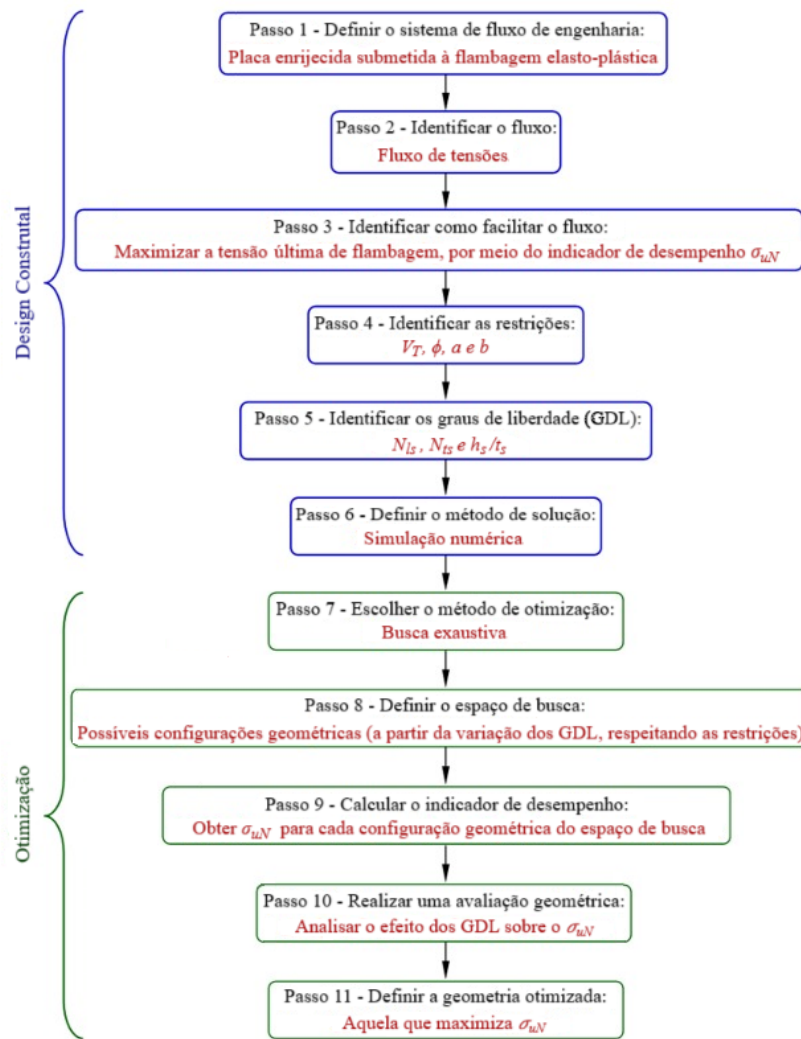


Figura 1.7: Fluxograma de aplicação do Design Construtual e da Busca Exaustiva para otimização geométrica. Fonte: Adaptado de Lima et al. (2020, p. 8).

Os resultados de Lima et al. (2020) indicam que a variação na geometria dos enrijecedores afeta significativamente o comportamento mecânico de placas com enrijecedores submetidas a flambagem elasto-plástica uniaxial, onde o caso de melhor performance analisado teve uma melhoria de 88,5% em comparação com a situação de referência.

Guzel e Gurses (2021) obtiveram a carga crítica e a carga última de flambagem de placas com enrijecedores através do uso de redes neurais artificiais (RNAs) através do software Matlab com a metodologia LHS⁶ para reduzir o número de AEF necessárias (que foram executadas no software ABAQUS) para geração do banco de dados utilizado pela rede neural. O treinamento da RNA foi realizado com o algoritmo de retropropagação de Levenberg-Marquardt. Concluiu-se que o uso de redes neurais para obtenção dos resultados possui uma acurácia alta, mas esta diminui com a redução da quantidade de análises utilizada para geração do banco de dados utilizado pela rede neural.

Baumgardt et al. (2021) realizaram uma verificação de um modelo computacional utilizando MEF através do Ansys com o elemento finito SHELL281 para análise de flambagem elasto-plástica biaxial para duas configurações geométricas de placa: uma placa sem enrijecedores e outra placa com 19 enrijecedores transversais do tipo *tee-bar* e 2 enrijecedores longitudinais (ver configuração geométrica da Figura 1.4).

Da Silveira et al. (2021) aplicaram o DC em conjunto com a BE e o MEF (através do software Ansys com o elemento finito SHELL281) para um estudo de caso sobre flambagem elasto-plástica biaxial de placas com perfurações elípticas centradas, onde a restrição utilizada foi a fração volumétrica, tendo como graus de liberdade: o ângulo de orientação da perfuração elíptica com relação ao eixo horizontal, denotado por α e a relação de lados das dimensões dos eixos das perfurações elípticas, denotada por b_0/a_0 . Os indicadores de performance utilizados foram a tensão última de flambagem normalizada, denotada por NUS e o deslocamento máximo normalizado, denotado por NMD , onde os resultados obtidos para placas com enrijecedores foram normalizados pelos respectivos resultados da placa de referência (sem enrijecedores). Os resultados obtidos provaram que o DC é aplicável e adequado para o contexto de Mecânica dos Materiais, para além de terem obtido o resultado otimizado que era previamente conhecido, por conta da natureza simétrica do caso analisado, demonstrando também a aplicabilidade do Design Construtal para problemas de flambagem elasto-plástica biaxial.

Baumgardt et al. (2023) realizaram a verificação e validação de modelos computacionais de placas retangulares, sem perfurações e enrijecedores, placas com perfurações quadradas, placas com perfurações circulares, placas com um enrijecedor e uma per-

⁶Latin Hypercube Sampling - Amostragem por Hipercubo Latino.

furação semi-circular e placas com enrijecedores e perfurações quadradas submetidas à flambagem elasto-plástica biaxial.

Cai e Jelovica (2023) utilizaram redes neurais com a técnica de Amostragem e Agregação de Grafos (AAG) para prever tensões em painéis enrijecidos com geometrias variadas. Os resultados indicam que o uso da técnica de AAG colabora para uma representação eficiente de geometrias complexas com ordem reduzida. A representação do modelo de elementos finitos como um grafo equivalente é apresentada na Figura 1.8.

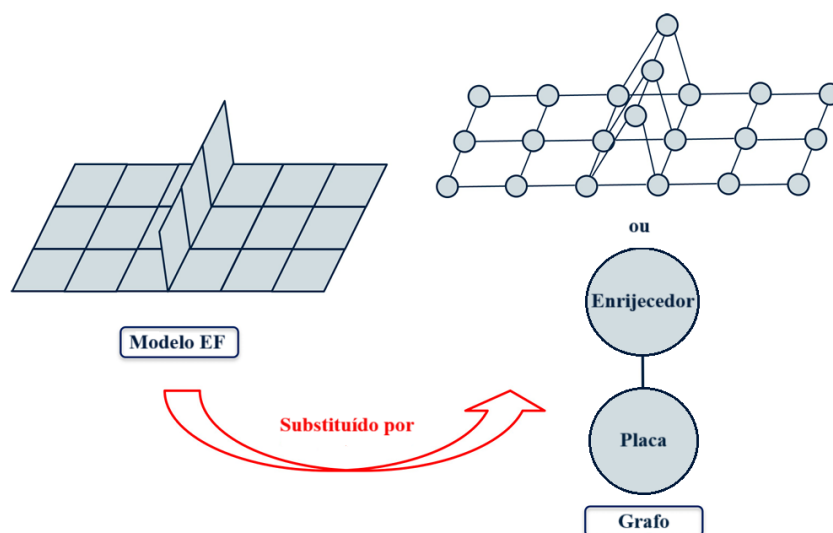


Figura 1.8: Representação do modelo de elementos finitos como um grafo equivalente.
Fonte: Adaptado de Cai e Jelovica (2023, p. 7).

Elumalai et al. (2024) estudaram a flambagem uniaxial de placas com enrijecedores *tee bar* integrados, pensando na reprodução do comportamento de peças de manufatura aditiva. Concluiu-se que o uso de enrijecedores integrados tem uma taxa de deformação 1,2% maior, e resulta em uma tensão equivalente máxima 4,864% maior e cerca de 20,25% de variação na resistência a deformação em relação a situação convencional.

1.1.2 Engenharia de software aplicada a simulação numérica

Vários autores empregaram conhecimentos de engenharia de software para automatizar fluxos de simulação numérica, modelagem computacional e também para facilitar a colaboração entre pesquisadores na construção e acúmulo de conhecimento.

Wagner (2009) implementou uma API REST aplicada a astrofísica computacional, com os objetivos de publicar dados em um observatório virtual conforme novos padrões e metodologias surgem, ser simples o bastante para que usuários não-desenvolvedores consigam consumir as informações, e para monitoração das simulações em andamento,

inserindo os dados gerados na base à medida que são produzidos.

Rashed, Ahsan e Chowdhury (2012) desenvolveram um *framework* de Análise de Elementos Finitos (AEF) usando bibliotecas *open source* escritas em linguagem Python e também em linguagens C/C++ e Fortran legadas envolvendo Python, onde estes verificaram seu modelo (ver Figura 1.9) como uma ferramenta viável de solução de elementos finitos com um exemplo de simulação de teste de tração em concreto.

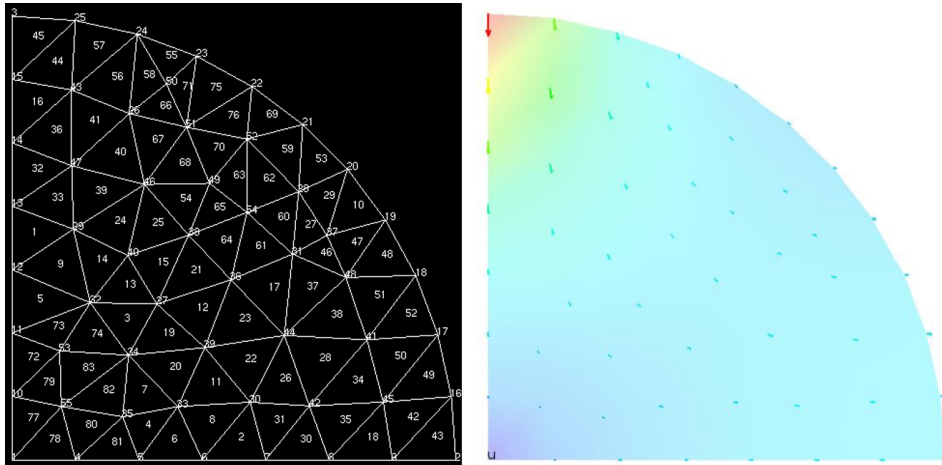


Figura 1.9: Modelo computacional gerado com Python, C/C++ e Fortran. Fonte: Adaptado de Rashed, Ahsan e Chowdhury (2012, p. 37).

Liu, Wu e Fang (2015) criaram uma ferramenta numérica de solução para as equações de Navier-Stokes baseada no Método de Diferenças Finitas (MDF) com Python, usando bibliotecas *open source*. Hauschild e Pollmann (2018) aplicaram Python com a biblioteca de tensores TeNPy para solução de problemas em sistemas quânticos.

Sanchez-Mesa et al. (2018) criaram um *driver* em Python para utilização de elementos de comprimento coincidente implementados no software Matlab diretamente no Ansys HFSS, permitindo uma análise paramétrica para problemas eletro-magnéticos.

Petsch, Kohlgrüber e Heubischl (2018) desenvolveram um *framework* em linguagem Python chamado PANDORA, utilizando um conjunto de bibliotecas *open source* para análise numérica de fuselagens aeronáuticas. Os autores utilizaram o PANDORA para se integrar ao CPACS (ferramenta de pré e pós-processamento de elementos finitos também desenvolvida pelos autores), utilizando o Ansys para a execução da etapa de solução.

Cleveland et al. (2020) desenvolveram um *framework* com Python para prover APIs REST como forma de acelerar a obtenção de resultados de pesquisa científica, eliminando a necessidade de configuração de ambiente (provisionamento de máquinas com hardware potente e instalação de software). Os autores concluíram que o uso de sua abordagem se mostrou bem-sucedido e seguro para o propósito de integrar e escalar arquiteturas de

processamento para dar suporte a pesquisa científica reproduzível.

Shaimi, Khatyr e Naciri (2022) aplicaram automações com Python na criação das geometrias de modelos computacionais para serem analisados com o Ansys SpaceClaim, para análise térmica de problemas de estado estacionário de aletas. O uso de scripts de automação para os procedimentos numéricos reduziram significativamente o tempo computacional e a necessidade de intervenção humana na execução das simulações, assim como reduzem a probabilidade de ocorrência de erros humanos.

Papkov, Shadymov e Pashchenko (2023) usaram Python para automatizar cálculos repetitivos na modelagem de problemas de DFC para calcular velocidade, direção de fluxo e temperatura para geometrias bidimensionais (aerofólios) e tridimensionais (leitões compactados com transferência de calor) com o Ansys Fluent. Concluiu-se que o uso de Python não afeta a acurácia dos resultados, ao mesmo tempo que sua utilização reduziu em 25% e 15% os tempos de processamento para o modelo bidimensional e tridimensional, respectivamente. Além disso, comparou-se os tempos de análise com a manipulação manual e o uso da automação, como pode ser visto na Figura 1.10.

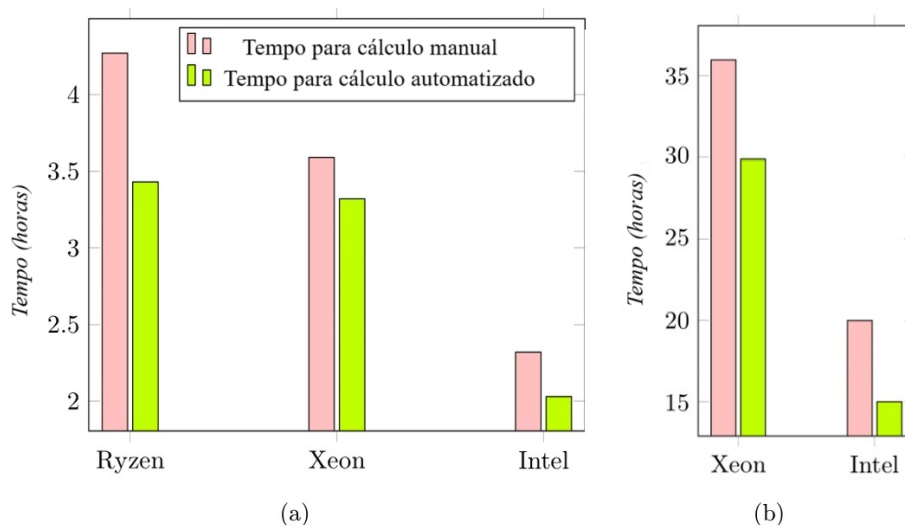


Figura 1.10: Comparação dos tempos de processamento com manipulação manual e com o uso da automação das geometrias: (a) bidimensional; (b) tridimensional. Fonte: Adaptado de Papkov, Shadymov e Pashchenko (2023, p. 13).

Wurzinger e Schoder (2024) implementaram uma ferramenta de processamento de dados de simulação numérica usando Python denominada *pyCFS-data*, para integrar o conjunto de ferramentas multidisciplinar denominado *openCFS*, que resolve equações diferenciais parciais (EDPs) através do MEF também utilizando Python.

1.1.3 Contribuição científica

Cabe mencionar que, apesar da vasta produção de conhecimento realizada por vários autores, o estudo de flambagem elasto-plástica biaxial de placas com enrijecedores através do Design Construtal ainda não foi endereçado por nenhum esforço anterior, assim como a simulação numérica do problema de flambagem elasto-plástica utilizando APIs REST.

Assim sendo, a contribuição científica do presente trabalho consiste na implementação de uma API REST para automação dos fluxos de modelagem computacional do fenômeno de flambagem elasto-plástica biaxial, buscando sanar a lacuna de pesquisa exposta.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

Agregando a simulação numérica com o software Ansys Mechanical APDL e o Método Design Construtal, em conjunto com as bibliotecas Python Django Rest Framework e PyMAPDL, o objetivo geral deste trabalho consiste em implementar uma API REST para automatizar os processos de modelagem computacional e simulação numérica para análise de flambagem elasto-plástica biaxial de placas com enrijecedores.

1.2.2 Objetivos Específicos

Para atingir o objetivo geral os seguintes objetivos específicos serão desenvolvidos:

1. Construir a modelagem de Banco de Dados Relacional para consulta/persistência das informações de placas sem enrijecedores, placas com enrijecedores, análises de placas com enrijecedores, resultados de flambagem elástica e elasto-plástica;
2. Desenvolver recursos de API REST para manipulação de informações de placas sem enrijecedores, em função dos parâmetros geométricos da placa;
3. Desenvolver recursos de API REST para cálculo dos parâmetros geométricos de placas com enrijecedores, em função dos parâmetros geométricos da placa de referência e dos graus de liberdade da configuração geométrica analisada;
4. Desenvolver recursos de API REST para geração da geometria e aplicação das condições de contorno no MAPDL para o fenômeno de flambagem elasto-plástica biaxial, que armazene em disco os arquivos da AEF para cada análise;

5. Desenvolver recursos de API REST para cálculo da carga e tensão crítica de flambagem, que armazene os resultados da Análise de Flambagem Elástica para cada configuração geométrica analisada;
6. Desenvolver recursos de API REST para cálculo de carga e tensão última de flambagem, deflexão máxima e a geração das imagens de distribuição de tensões de von Mises e de deflexões máximas, que armazene os resultados da Análise de Flambagem Elasto-Plástica para cada configuração geométrica analisada;
7. Realizar um estudo de caso para avaliação geométrica do fenômeno de flambagem elasto-plástica biaxial através do Método Design Construtal, analisando a influência dos graus de liberdade: número de enrijecedores transversais (N_{ts}); número de enrijecedores longitudinais (N_{ls}) e relação de lados dos enrijecedores (h_s/t_s), no indicador de performance tensão última de flambagem biaxial normalizada (NUS_{2A}), obtendo a geometria otimizada para os casos analisados;
8. Realizar um estudo de caso para avaliação geométrica do fenômeno de flambagem elasto-plástica biaxial através do Método Design Construtal, analisando a influência dos graus de liberdade: número de enrijecedores transversais (N_{ts}); número de enrijecedores longitudinais (N_{ls}) e relação de lados dos enrijecedores (h_s/t_s), no indicador de performance deflexão máxima normalizada causada pela flambagem biaxial (NMD_{2A}), obtendo a geometria otimizada para os casos analisados;
9. Realizar um estudo comparativo entre os resultados obtidos no presente trabalho para flambagem elasto-plástica biaxial e os obtidos utilizando a API REST para flambagem elasto-plástica uniaxial, analisando a influência dos graus de liberdade: número de enrijecedores transversais (N_{ts}); número de enrijecedores longitudinais (N_{ls}) e relação de lados dos enrijecedores (h_s/t_s), nos indicadores de performance tensão última de flambagem uniaxial e biaxial ($\sigma_{u,1A}$ e $\sigma_{u,2A}$);
10. Realizar um estudo comparativo entre os resultados obtidos no presente trabalho para flambagem elasto-plástica biaxial e os obtidos utilizando a API REST para flambagem elasto-plástica uniaxial, analisando a influência dos graus de liberdade: número de enrijecedores transversais (N_{ts}); número de enrijecedores longitudinais (N_{ls}) e relação de lados dos enrijecedores (h_s/t_s), nos indicadores de performance tensão última de flambagem uniaxial e biaxial normalizada (NUS_{1A} e NUS_{2A}).

2 Revisão Bibliográfica

2.1 Teorias para análise de placas

Conforme exposto em Bui, Nguyen e Zhang (2011), existem várias teorias baseadas em formulações de deslocamentos para análise de placas, e tradicionalmente, problemas de estabilidade, como o de flambagem, são analisados através da Teoria Clássica de Placas de Kirchhoff. Szilard (2004) traz que, embora a Teoria Clássica de Kirchhoff direcione a resultados suficientemente acurados para placas finas, sua acurácia reduz com o aumento da espessura da placa, tendo resultados com erros da ordem da espessura da placa ao quadrado quando comparados com os resultados exatos da Teoria da Elasticidade Tridimensional. A explicação dos aspectos mais relevantes da Teoria Elástica de Placas para o presente trabalho é apresentada no Apêndice A.

Bui, Nguyen e Zhang (2011) explicam que isso advém da hipótese de Kirchhoff que diz que as seções tomadas normais à superfície média pré-deformação assim permanecem pós-deformação, desconsiderando os efeitos de deformação por cisalhamento transversal, efeitos estes que se tornam mais importantes quando a espessura da placa aumenta.

Buscando sanar estas limitações, surgiram várias teorias que consideram os efeitos de deformação por cisalhamento transversal em sua formulação, onde cabe destacar a de Reissner (1944), baseada em tensões normais, e a de Mindlin (1951), baseada em deslocamentos. Os avanços gerados por estes dois autores, ao agregar o efeito das deformações de cisalhamento à abordagem clássica das placas de Kirchhoff e ao estimular, junto a outros autores, o debate sobre o assunto entre as décadas de 1940 a 1980, fizeram com que modelos numéricos e trabalhos que vieram depois, baseados nas ideias destes dois autores, se refiram a esta abordagem como Teoria de Deformação por Cisalhamento de Primeira Ordem de Reissner-Mindlin. A fundamentação teórica da Teoria de Reissner-Mindlin é apresentada no item A.2 do Apêndice A.

Segundo Bui, Nguyen e Zhang (2011), esta teoria considera constantes as deformações por cisalhamento transversal ao longo da direção da espessura, o que traz a necessidade do uso de um fator de correção de cisalhamento para sanar a discrepância na rigidez ao cisalhamento transversal que existia na Teoria de Kirchhoff. A Figura 2.1 ilustra a diferença nos ângulos de rotação da superfície média de acordo com a Teoria de Kirchhoff e a Teoria de Reissner-Mindlin.

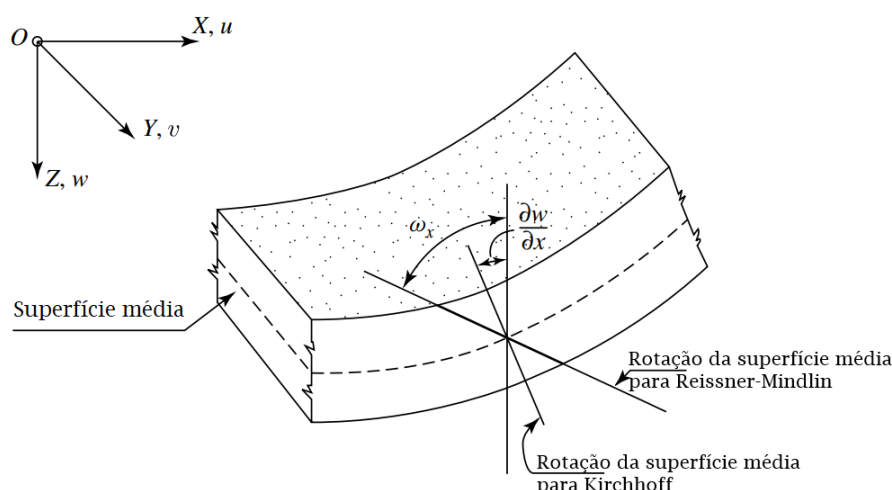


Figura 2.1: Diferença entre as rotações da superfície média das teorias de Kirchhoff e Reissner-Mindlin. Fonte: Adaptado de Szilard (2004, p. 46).

De acordo com Sky et al. (2023), elementos finitos baseados na Teoria de Reissner-Mindlin são utilizados na análise de placas com enrijecedores por conta de sua capacidade de modelar de forma precisa as deformações por cisalhamento e flexão, garantindo boas taxas de convergência em cenários envolvendo geometrias complexas.

Para os casos analisados por Hamedani e Ranji (2013), os efeitos de deformações por cisalhamento e da rigidez torcional dos enrijecedores geraram diferenças de até 30% nos resultados para flambagem elástica biaxial de placas com enrijecedores quando comparados aos resultados obtidos via Teoria Clássica de Kirchhoff, o que torna possível dizer que é necessário considerá-los para a análise de flambagem biaxial de placas com enrijecedores. Assim sendo, a Teoria de Cisalhamento de Primeira Ordem de Reissner-Mindlin será utilizada como base para o modelo computacional do presente trabalho.

2.2 Resistência de pós-flambagem de placas

A discussão teórica da Teoria de Flambagem Elástica é apresentada no item A.3 do Apêndice A. Apesar da prática de utilizar a carga crítica de flambagem elástica como um parâmetro ser algo comum, Ziemian (2010) argumenta que só a tensão crítica de flambagem não descreve adequadamente o comportamento real da placa, sendo este também influenciado pelas não-linearidades inerentes do problema. E para abordar o problema de uma forma mais ampla, os seguintes conceitos devem ser considerados:

- flambagem inelástica: acontece quando o escoamento do material é atingido antes da tensão crítica de flambagem elástica;

- pós-flambagem: tensões em valores maiores do que a crítica, assim como as deformações associadas, podendo estas ser elásticas ou inelásticas;
- tensão última de flambagem: tensão máxima que a placa consegue suportar, independentemente da deformação, e geralmente bem maior do que a tensão crítica.

De acordo com Chajes (1974), ao passar da carga crítica, enquanto a deflexão lateral for infinitesimalmente pequena, a rigidez da placa é nula, isto é, a inclinação da tangente da curva de carga-deflexão é zero. No entanto, tão logo a deflexão lateral se torne finita, a rigidez começa a aumentar e continua assim enquanto a deflexão aumenta, o que faz com que a placa ainda resista a cargas axiais mesmo depois de ter atingido a carga crítica. Este comportamento é denominado de resistência de pós-flambagem.

Diferentemente do que acontece para colunas, a carga crítica de flambagem não é a carga de ruptura de uma placa. De acordo com Jerath (2021), as placas tem a capacidade adicional de resistir a esforços para além da carga crítica e sua carga de ruptura é influenciada por este comportamento de pós-flambagem. Além disso, segundo Jones (2006), placas apresentam comportamento de pós-flambagem simétrico estável, o que significa que este acréscimo de resistência é governado pela relação entre os pontos de bifurcação e a redução da rigidez e também pela forma como cada carga crítica tem um modo de flambagem diferente, como pode ser visto na Figura 2.2.

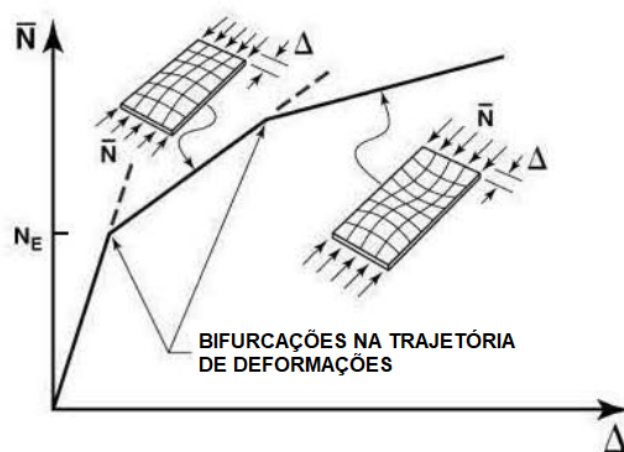


Figura 2.2: Bifurcações na trajetória de deformações para uma placa em pós-flambagem. Fonte: Adaptado de Jones (2006, p. 8).

A resistência adicional de pós-flambagem de placas está relacionada a vários fatores. No entanto, segundo Chajes (1974), o mais importante deles é o fato de que a forma deformada da placa não pode ser desenvolvida a partir da configuração de pré-flambagem, sem que haja uma redistribuição das tensões no plano médio ao longo da placa. Esta

redistribuição, que é ignorada na teoria de pequenos deslocamentos para a flambagem elástica, favorece as regiões menos rígidas da placa, e isso causa um aumento da eficiência da mesma. Para visualizar este fenômeno, considere-se a Figura 2.3.

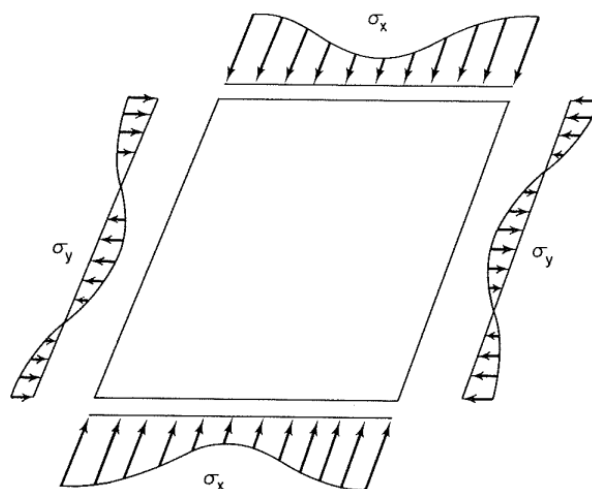


Figura 2.3: Distribuição de tensões na placa pós-flambagem para compressão uniaxial. Fonte: Adaptado de Chajes (1974, p. 293).

Segundo Chajes (1974), na direção perpendicular à aplicação da carga de compressão uniaxial, surgem esforços de tração que enrijecem a placa lateralmente e impedem que a ruptura ocorra mesmo após a carga crítica ter sido atingida. Estes esforços de tração que geram o efeito de resistência adicional pós-flambagem para a placa. Este efeito cresce do centro para as bordas longitudinais apoiadas da placa, admitindo-se, de forma conservadora, que o colapso da placa ocorrerá quando a tensão última atuante for igual à tensão de escoamento do material, o que concorda com investigações experimentais que observaram que a ruptura de uma placa geralmente ocorre logo depois que a máxima tensão longitudinal na borda da placa atinge o valor da tensão de escoamento do material (Chajes, 1974; Åkesson, 2007). Em virtude disso, ao determinar a carga de ruptura por flambagem, costuma-se assumir que a ruptura coincide com o início do escoamento.

Descrever a pós-flambagem é um desafio, por conta de suas não-linearidades, tanto de ordem física (deformações plásticas do material), quanto de ordem geométrica (a hipótese de pequenos deslocamentos deixa de ser válida). De acordo com Jones (2006), a pós-flambagem de placas é um problema de instabilidade do equilíbrio para grandes deslocamentos, que pode ser resolvido de forma aproximada para a grande maioria dos casos de interesse prático. Além disso, Ziemian (2010) argumenta que os efeitos de flambagem inelástica, pós-flambagem e carga última podem ser examinados de forma mais robusta através de métodos numéricos, como o Método dos Elementos Finitos (MEF), razão pela qual este foi escolhido para ser utilizado no presente trabalho.

2.3 Método dos Elementos Finitos (MEF)

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um método computacional que divide uma estrutura, corpo ou região a ser analisada em um conjunto numeroso de elementos finitos, que podem ter uma, duas ou três dimensões. A Análise de Elementos Finitos (AEF) é um procedimento numérico que é aplicável em diversas áreas de problemas de engenharia do mundo real, incluindo análises de estruturas/tensões, de fluxo/escoamento de fluidos, de transferência de calor e análises eletro-magnéticas (Musa, 2023).

Segundo Larson e Bengzon (2013), o MEF é um método numérico-computacional geral para solução de equações diferenciais parciais (EDPs) de forma aproximada. Além disso, o MEF é baseado na formulação variacional de EDPs, utilizando polinômios por partes para cada elemento para computar o gradiente de uma função, lidando assim com geometrias e contornos complexos (Chen, 2014), com suporte a formulações matemáticas robustas e aproximações de alta ordem (Musa, 2023). Estas características fazem com que o MEF seja adequado para a análise de flambagem de placas, cuja forma matemática é uma EDP de quarta ordem, que é apresentada na Equação (A.122) do Apêndice A, onde obtém-se tensões e deslocamentos através do MEF.

O MEF é baseado na decomposição do domínio¹ em um número finito de sub-domínios, denominados elementos, para os quais a solução aproximada sistemática é construída pela aplicação dos métodos residual variacional ou residual ponderado (Madenci e Guven, 2015). Isso reduz o problema a um número finito de incógnitas, dividindo o domínio em elementos e expressando a variável de campo desconhecida em termos das funções de aproximação assumidas para cada elemento. Essas funções (também chamadas de funções de interpolação) são definidas em termos dos valores das variáveis de campo em pontos específicos, chamados de nós (ver Figura 2.4).

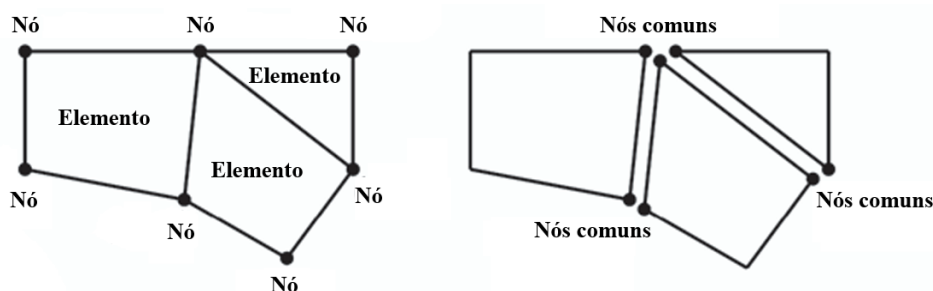


Figura 2.4: Divisão do domínio em elementos. Fonte: Adaptado de Madenci e Guven (2015, p. 3).

¹Segundo Madenci e Guven (2015) um domínio é um todo contínuo com um contorno conhecido.

De acordo com Musa (2023), o procedimento para realização da AEF, no que diz respeito à análise estrutural para uma formulação de deslocamento, é:

- a) Discretização do domínio, isto é, subdivisão do domínio em um número finito de elementos;
- b) Definição de um modelo de interpolação adequado, isto é, a seleção de funções de interpolação, por exemplo, polinômios, para descrever a variação da variável de estado (por exemplo, deslocamento) dentro de um elemento;
- c) Derivação das matrizes de rigidez e vetores de carga para cada elemento: A resposta de um elemento ao carregamento externo pode ser expressa por:

$$[k]\{q\} = \{Q\} \quad (2.1)$$

onde $[k]$ é a matriz de rigidez do elemento; $\{q\}$ é o vetor de resposta do elemento; e $\{Q\}$ é o vetor de carga do elemento.

- d) Montagem das equações dos elementos para obtenção das equações globais, que são expressas por:

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (2.2)$$

onde $[K]$ é a matriz de rigidez global; $\{U\}$ é o vetor dos deslocamentos globais; e $\{F\}$: Vetor de carga global para a estrutura completa.

- e) Solução dos deslocamentos nodais desconhecidos: Aplicando-se as condições de contorno, a Equação (2.2) se torna:

$$[K_1]\{U_1\} = \{F_1\} \quad (2.3)$$

- f) Cálculo das deformações e tensões para cada elemento: A partir do valor de r_1 conhecido através da solução da Equação (2.3), deformações e tensões podem ser calculadas através de equações estruturais predefinidas.

De acordo com Wang et al. (2015), o MEF é utilizado para o estudo de flambagem de placas com enrijecedores por ser adequado para captura dos modos de flambagem e também por conta de sua eficiência e simplicidade em analisar e otimizar estruturas complexas. Adicionalmente, o MEF é o método numérico mais utilizado para análise de flambagem, porque este apresenta maior concordância com as soluções analíticas para diferentes disposições e condições de contorno disponíveis na literatura (Arani et al., 2011), e também porque este se mostrou adequado para análise de flambagem em todo o intervalo de deformações elasto-plástico (Ghavami e Khedmati, 2006).

2.3.1 Aplicação do MEF com Ansys Mechanical APDL (MAPDL)

Existem vários softwares comerciais para análise de elementos finitos, tais como ABAQUS, COMSOL Multiphysics, SolidWorks Simulation e os softwares Ansys. Segundo Lin et al. (2020), o Ansys é conhecido por sua capacidade abrangente em análise estrutural, térmica e de fluidos, dando suporte para simulações de problemas lineares e não-lineares, sendo amplamente utilizado em vários ramos de engenharia.

Vários autores, tais como Lima et al. (2020), Baumgardt et al. (2021) e Souza et al. (2023), utilizaram o MEF através do software Ansys Mechanical APDL (MAPDL) para a análise de flambagem elástica e elasto-plástica de placas com e sem enrijecedores, obtendo resultados consistentes com a literatura, razão pela qual optou-se por sua utilização na versão 2024R2, com a licença *Student* para o presente trabalho.

2.3.1.1 Estrutura de processamento do MAPDL

Segundo Moaveni (2008), o MAPDL tem dois níveis básicos: o nível de início (*BEGIN*) e o nível de processamento (*PROCESSOR*), como pode-se ver na Figura 2.5.

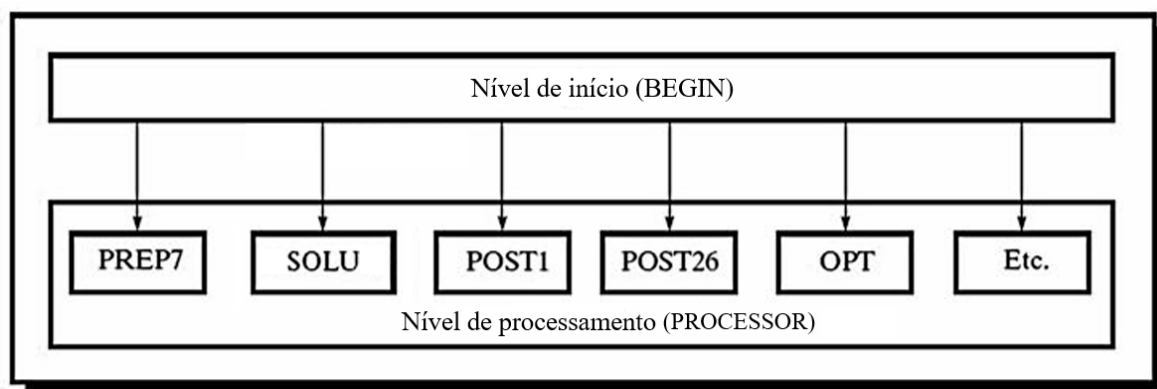


Figura 2.5: Arquitetura do Ansys. Fonte: Adaptado de Moaveni (2008, p. 354).

Moaveni (2008) também afirma que o MAPDL inicializa seu contexto no nível de início, permitindo que os usuários interajam com seu banco de dados para limpar arquivos, renomeá-los ou trocar de diretório. Além disso, é possível acessar um dos processadores do nível de processamento. Um processador é uma coleção de comandos e rotinas que servem a propósitos específicos. Os três processadores mais utilizados são o *PREP7*, o *SOLU* e o *POST1*.

O pré-processador (*PREP7 - Preprocessor*) é responsável por diversas tarefas, como definir tipos, opções e constantes reais de elementos finitos; especificar propriedades dos materiais utilizados; criar a geometria do modelo; configurar controles de malha; e gerar a malha do objeto criado.

O processador de solução (*SOLU - Solution*) desempenha funções essenciais, como aplicar condições de contorno do tipo força ou deslocamento, definir as configurações do método de solução, resolver as equações que descrevem o problema e escrever arquivos contendo os valores obtidos para as soluções nodais.

O pós-processador geral (*POST1 - General Postproc*) é utilizado para ler dados dos arquivos de resultados, plotar resultados a nível de nós ou elementos e listar resultados a nível de nós ou elementos.

2.3.1.2 O modelo elasto-plástico de endurecimento isotrópico bilinear

Para analisar comportamento de flambagem elasto-plástica, é necessário um modelo de material que descreva a transição do regime elástico para o regime plástico do material. De acordo com Ansys (2024c), o modelo de endurecimento isotrópico bilinear (*Bilinear Isotropic Hardening - BISO*) é uma curva bilinear de tensão efetiva por deformação efetiva, onde a inclinação do primeiro trecho é o módulo de elasticidade E e a inclinação do segundo trecho, iniciado na tensão limite de proporcionalidade σ_0 , é dada pelo módulo tangente E_T . A Figura 2.6a apresenta o diagrama bilinear de tensão-deformação.

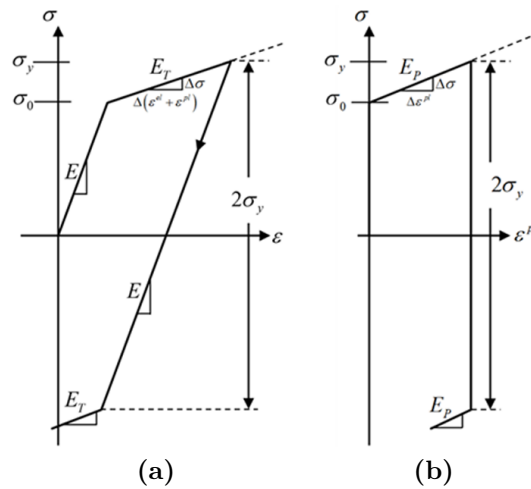


Figura 2.6: Modelo de Endurecimento Isotrópico Bilinear: (a) Diagrama bilinear de tensão x deformação; (b) Diagrama tensão x deformação plástica. Fonte: Adaptado de Ansys (2024c).

Na Figura 2.6b, o módulo tangente plástico E_P é dado por:

$$E_P = \frac{EE_T}{E - E_T} \quad (2.4)$$

Para alguns aços, é razoável assumir o comportamento elasto-plástico perfeito, onde a tensão limite de proporcionalidade é igual à tensão de escoamento, isto é $\sigma_0 = \sigma_y$. Com isso, o segundo trecho do diagrama bilinear se transforma em uma reta constante

onde $E_T = 0$ (e consequentemente, pela Equação (2.4), $E_P = 0$). A curva bilinear para um material elasto-plástico perfeito é apresentada na Figura 2.7.

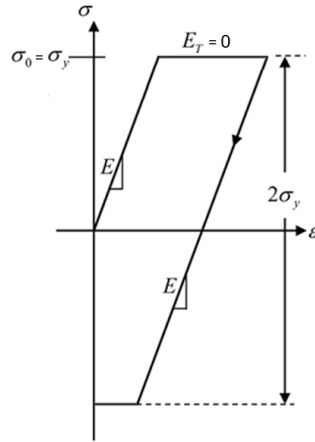


Figura 2.7: Modelo de Endurecimento Isotrópico Bilinear para um material elasto-plástico perfeito. Fonte: Adaptado de Ansys (2024c).

2.3.1.3 O elemento finito SHELL281

O elemento finito SHELL281 é um elemento de casca de oito nós com seis graus de liberdade para cada nó: três translações (u_x , u_y , u_z) e três rotações (θ_x , θ_y , θ_z), sendo apropriado para a análise de estruturas de placas finas a moderadamente espessas e tendo acurácia regida pela Teoria de Cisalhamento-Deformação de Primeira Ordem de Reissner-Mindlin (Ansys, 2024a), discutida em detalhes no item A.2 do Apêndice A. A geometria do elemento SHELL281 pode ser vista na Figura 2.8.

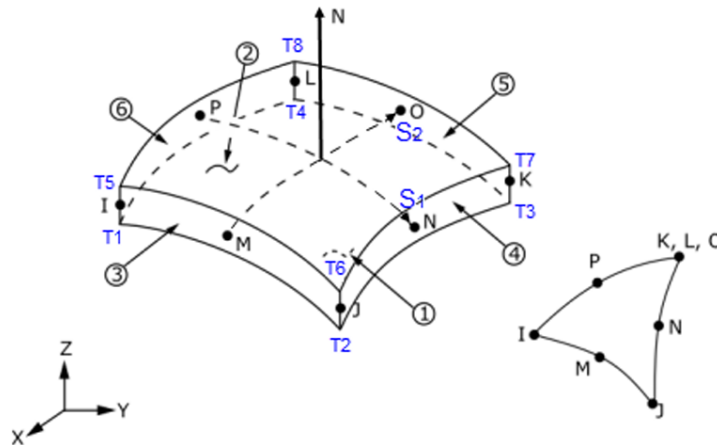


Figura 2.8: Geometria do SHELL281. Fonte: Adaptado de Ansys (2024a, p. 1452).

O SHELL281 pode ser utilizado para análise de problemas lineares com grandes rotações e/ou não-lineares com grandes deformações, em que mudanças na espessura do elemento são consideradas (Ansys, 2024a). No contexto de avaliação e otimização

geométrica utilizando o Design Construtal, autores tais como Nogueira et al. (2019), Pinto et al. (2020), Baumgardt et al. (2021), Da Silveira et al. (2022) utilizaram o MAPDL com o elemento SHELL281 para análise de problemas de flexão e flambagem de placas, obtendo resultados coerentes com a literatura, razão pela qual optou-se por sua utilização, tanto para a discretização da geometria da placa quanto dos enrijecedores.

Há duas abordagens principais para análise de flambagem: a análise linear de autovalores, que diz respeito ao cálculo da carga teórica de flambagem para uma estrutura linear-elástica (Madenci e Guven, 2015); e a análise não-linear, que se trata da análise de problemas onde não-linearidades geométricas estão presentes (Ansys, 2024e). A Figura 2.9 traz a ilustração das curvas de carga-deflexão características destas duas abordagens.

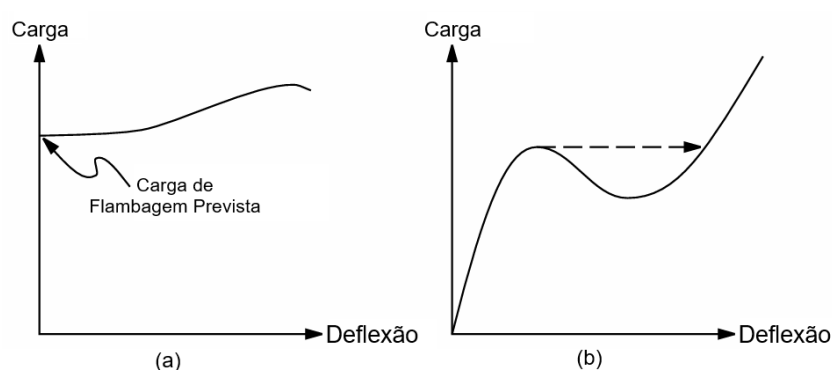


Figura 2.9: Tipos de problema de flambagem: (a) Análise com pequenos deslocamentos (flambagem linear-elástica); (b) análise com grandes deslocamentos (flambagem elasto-plástica) Fonte: Adaptado de Ansys (2024e).

2.3.1.4 Análise de Flambagem Elástica com o MAPDL

De acordo com Chajes (1974), para dar suporte à análise de grandes deslocamentos, a formulação matricial para pequenos deslocamentos da Equação (2.2) precisa ser reformulada. Neste sentido, de acordo com Przemieniecki (1968), por conta da hipótese de grandes deslocamentos, as equações de deformação-deslocamento contêm termos não-lineares que precisam ser considerados no cálculo das matrizes de rigidez de cada elemento $[k]$ e também na matriz de rigidez total $[K]$. Assim, a matriz de rigidez de cada elemento passa a ser expressa como:

$$[k] = [k_E] + [k_G] \quad (2.5)$$

onde $[k_E]$ é a matriz de rigidez elástica padrão calculada a partir da geometria do elemento no início do passo de carga e $[k_G]$ é denominada de matriz geométrica (também chamada de matriz de rigidez incremental), que depende não somente da geometria, mas também dos esforços internos presentes no início do passo de carga. Estas matrizes são calculadas para cada elemento e então formam a matriz de rigidez total $[K]$ que passa

a ser dada por:

$$[K] = [K_E] + [K_G] \quad (2.6)$$

Por conta da análise de flambagem se tratar de uma análise incremental e iterativa, é importante expressar tanto a matriz de rigidez total $[K]$ quanto o vetor de carregamento externo $\{F\}$ como sendo dependentes do fator de carga λ . Para isso considere-se uma matriz de rigidez geométrica unitária denotada por $[K_G^*]$, e um vetor de carregamento externo unitário $\{F^*\}$ obtidos fazendo-se $\lambda = 1$. Deste modo, pode-se escrever:

$$[K_G] = \lambda[K_G^*] \quad (2.7)$$

$$\{F\} = \lambda\{F^*\} \quad (2.8)$$

Substituindo a Equação (2.7) na Equação (2.6) e levando em conta que a matriz de rigidez elástica $[K_E]$ pode ser considerada como constante para um intervalo grande de deslocamentos, pode-se escrever:

$$[K] = [K_E] + \lambda[K_G^*] \quad (2.9)$$

Substituindo $[K]$ da Equação (2.9) e $\{F\}$ da Equação (2.8) na Equação (2.2), obtém-se:

$$([K_E] + \lambda[K_G^*])\{U\} = \lambda\{F^*\} \quad (2.10)$$

Os deslocamentos podem ser determinados isolando-se $\{U\}$ na Equação (2.10), de modo que:

$$\{U\} = ([K_E] + \lambda[K_G^*])^{-1}\lambda\{F^*\} \quad (2.11)$$

A partir da definição de matriz inversa como sendo a matriz adjunta² dividida pelo determinante dos coeficientes da matriz $([K_E] + \lambda[K_G^*])$, pode-se escrever:

$$([K_E] + \lambda[K_G^*])^{-1} = \frac{1}{\det([K_E] + \lambda[K_G^*])} \text{adj}([K_E] + \lambda[K_G^*]) \quad (2.12)$$

Analisando a Equação (2.11) em conjunto com a Equação (2.12), é possível dizer que os valores $\{U\}$ tendem ao infinito quando:

$$\det([K_E] + \lambda[K_G^*]) = 0 \quad (2.13)$$

O valor da carga crítica de flambagem é obtido extraindo-se o menor valor de λ a partir da Equação (2.13) e este autovalor é denotado como λ_{crit} , de modo que pode-se escrever:

$$\{F_{crit}\} = \lambda_{crit}\{F^*\} \quad (2.14)$$

O vetor $\{U\}$ correspondente ao autovalor λ_{crit} é o modo de flambagem associado.

²Matriz transposta da matriz dos cofatores da matriz original.

Para a análise de flambagem elástica do presente trabalho, foi extraído somente o primeiro modo de flambagem, onde a solução numérica no MAPDL foi realizada através do método de Lanczos em Blocos (*Block Lanczos*). Mais detalhes sobre o funcionamento e implementação sobre o método de Lanczos em Blocos podem ser encontrados em Grimes, Lewis e Simon (1994), que é a fundamentação teórica para a implementação do *eigensolver* utilizado pelo MAPDL.

2.3.1.5 Análise de Flambagem Elasto-Plástica com o MAPDL

A configuração deformada gerada pelo primeiro modo de flambagem elástica é utilizada como parâmetro de entrada da análise elasto-plástica, onde a geometria deformada deve ser atualizada por um fator de imperfeição geométrica inicial w_0 . Os autores El-Sawy, Nazmy e Martini (2004) recomendam que, para uma placa de largura b , o valor de w_0 seja:

$$w_0 = \frac{b}{2000} \quad (2.15)$$

Uma vez atualizada a geometria, conforme explicam Helbig et al. (2014) e Baumgardt et al. (2023), para uma placa com espessura t e tensão de escoamento σ_y , uma carga de referência F_y é aplicada em pequenos incrementos, denominados sub-passos de carga, às bordas nas duas direções da placa, onde a carga de referência é dada por:

$$F_y = \sigma_y t \quad (2.16)$$

De acordo com Ansys (2024e), no MAPDL, o incremento dos sub-passos de carga é governado pelo Método de Newton-Raphson (MNR). O algoritmo geral para solução pelo MNR dentro do MAPDL, para um dado vetor carregamento externo $\{F^a\}$, segue os seguintes passos:

1. Assume-se um valor para o vetor de deslocamentos inicial $\{u_0\}$, geralmente sendo $\{u_0\} = \{0\}$;
2. Calcula-se o valor atualizado da matriz tangente $[K_i^T]$ e do vetor das forças restauradoras $\{F_i^{nr}\}$ da configuração $\{u_i\}$;
3. Calcula-se o valor do vetor variação de deslocamento para a iteração i , $\{\Delta u_i\}$, através da equação:

$$[K_i^T]\{\Delta u_i\} = \{F^a\} - \{F_i^{nr}\} \quad (2.17)$$

4. Obtém-se $\{u_{i+1}\}$ através da equação:

$$\{u_{i+1}\} = \{u_i\} + \{\Delta u_i\} \quad (2.18)$$

5. Repetem-se os passos de 2 a 4 até que seja obtida a convergência.

Uma ilustração das duas primeiras iterações do MNR clássico (com aplicação integral do vetor carregamento externo $\{F^a\}$ na primeira iteração) é mostrada na Figura 2.10.

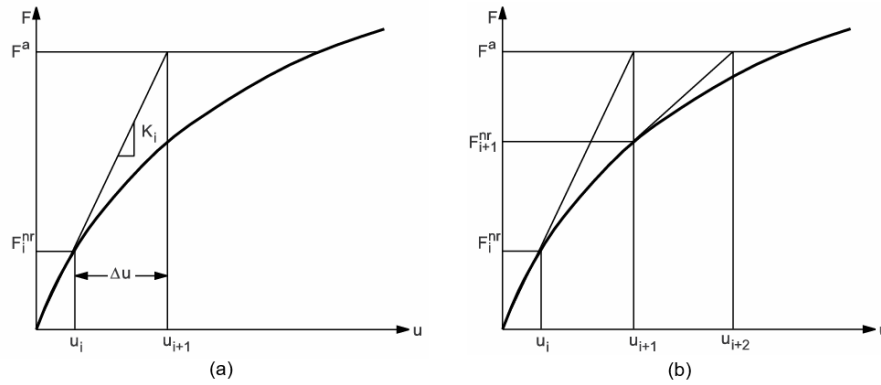


Figura 2.10: Método de Newton-Raphson: (a) Primeira iteração; (b) Segunda iteração. Fonte: Adaptado de Ansys (2024e).

Em decorrência da não-linearidade oriunda da plasticidade, o procedimento de solução requer que alguns sub-passos de carga intermediários estejam em equilíbrio para que a análise siga o caminho de carga correto. Para isso, é necessário aplicar o carregamento $\{F^a\}$ de maneira incremental e assim, o passo 3 explicado acima se torna uma análise incremental, onde o vetor carregamento externo $\{F^a\}$ é alcançado através da aplicação do carregamento em sub-passos de carga e as iterações de Newton-Raphson são executadas para cada sub-passo, de modo que a Equação (2.17) se torna:

$$[K_{n,i}^T]\{\Delta u_i\} = \{F_n^a\} - \{F_{n,i}^{nr}\} \quad (2.19)$$

onde $[K_{n,i}^T]$ é a matriz tangente para o sub-passo de carga n , na iteração i ; $\{F_n^a\}$ é o vetor da carga total até então aplicada para o sub-passo de carga n ; $\{F_{n,i}^{nr}\}$ é o vetor das forças restauradoras para o sub-passo de carga n , iteração i .

Esta abordagem é chamada de Procedimento Incremental de Newton-Raphson (PNRI) e a Figura 2.11 ilustra seu processo.

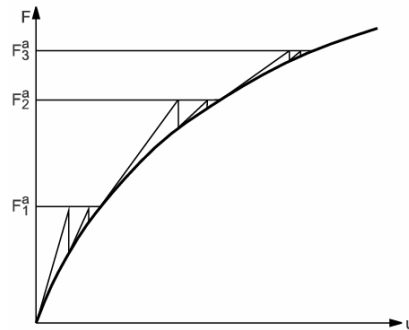


Figura 2.11: Procedimento de Newton-Raphson Incremental. Fonte: Adaptado de Ansys (2024e).

O critério de convergência utilizado no presente trabalho foi o Critério de Convergência de Desequilíbrio (*Out-of-Balance Convergence*). De acordo com Ansys (2024e), para este critério, a convergência acontece quando:

$$\|\{R\}\| < \varepsilon_R R_{ref} \quad (2.20)$$

onde ε_R é a tolerância do critério; R_{ref} é o valor de referência para a variável de análise (força, momento ou deslocamento); e $\|\{R\}\|$ é a norma do vetor $\{R\}$, que é o vetor residual, que representa o lado direito da Equação (2.19), isto é:

$$\{R\} = \{F_n^a\} - \{F_{n,i}^{nr}\} \quad (2.21)$$

A norma $\|\{R\}\|$ pode ser calculada de três formas:

1. Norma do infinito: $\|\{R\}\|_\infty = \max |R_i|$;
2. Norma L1: $\|\{R\}\|_1 = \sum |R_i|$;
3. Norma L2: $\|\{R\}\|_2 = (\sum R_i^2)^{\frac{1}{2}}$;

O último valor de carga para o qual foi possível encontrar a convergência pelo PNRI é denominado carga última de flambagem, denotada por N_u . A partir do valor de N_u , pode-se obter o valor da tensão última de flambagem σ_u para uma placa de espessura t através da equação:

$$\sigma_u = \frac{N_u}{t} \quad (2.22)$$

2.4 Teoria e Design Construtal

A Teoria Construtal (TC) é a visualização mental de que o design de todos os sistemas de fluxo/escoamento é gerado por um princípio físico denominado Lei Construtal (Bejan e Lorente, 2008). De acordo com a Lei Construtal (LC), para persistir no tempo, o design de qualquer sistema de fluxo/escoamento (animado ou inanimado) deve evoluir de modo a facilitar o movimento de suas correntes ao longo do sistema (Bejan, 2016).

A TC é baseada em três observações fundamentais, que descrevem como as formas geométricas são determinadas (Bejan, 2000; Bejan e Lorente, 2008; Bejan e Zane, 2012):

- A vida é um fluxo/escoamento, ou seja, todos os sistemas de fluxo/escoamento são sistemas vivos, tanto o animado quanto o inanimado;
- Geração de design e a sua evolução são fenômenos da física, baseados em um princípio físico fundamental;

- Os sistemas têm a tendência universal para evoluir em um determinado sentido no tempo.

Bejan e Lorente (2008) trazem ainda que, segundo a TC, os sistemas de fluxo/escoamento estão destinados a permanecerem imperfeitos, onde a evolução do sistema ocorrerá no sentido de melhorar a distribuição das imperfeições, possibilitando que o fluxo/escoamento ocorra de maneira cada vez mais fácil, e sempre de forma evolutiva.

O método utilizado para aplicação da LC em problemas de engenharia é denominado de Design Construtal (DC), sendo este um método que relaciona os graus de liberdade, restrições globais e indicadores de performance, para encontrar a geometria que proporciona um melhor desempenho do sistema quando submetida a alguma espécie de fluxo e/ou escoamento (Bejan e Zane, 2012).

Segundo Bejan (2000) O DC tem o seu fluxo/escoamento maleável e a geometria é avaliada a partir de um princípio de melhoria do desempenho global. Desta forma a sua geometria deve ser submetida a restrições globais e a uma variação de acordo com seus graus de liberdade. Para a aplicação do DC na otimização geométrica de um sistema físico é necessário definir: parâmetro de performance (saber a grandeza a ser otimizada, como: vazão mássica, potência, fluxo de tensões, energia, etc.), graus de liberdade (parâmetros que variam ao longo do processo) e restrições (parâmetros constantes ao longo do processo).

Particularizando a avaliação do DC para o contexto de Mecânica dos Sólidos, deve-se visualizar a configuração mecânica da mesma forma que se visualizam as configurações de fluxo/escoamento. Em outras palavras, estruturas mecânicas são como uma rede (conexões com mínimo volume) através da qual os esforços fluem de um componente para seus vizinhos (Bejan e Lorente, 2008). Além disso, quando se trata da Mecânica dos Sólidos, a LC pode ser visualizada quando se entende um sistema estrutural como um sistema de fluxo, onde o que flui são as tensões entre os componentes que a este constituem; e que facilitar o acesso às correntes pode ser entendido como melhor distribuir as possíveis concentrações de tensão (Da Silveira, 2021). Um exemplo de aplicação do Design Construtal na engenharia estrutural é apresentado em Latif e Shahin (2021), em que a partir da observação de uma umbela na natureza, se idealizou a avaliação geométrica que gerou a concepção estrutural presente nas Figuras 2.12 e 2.13.

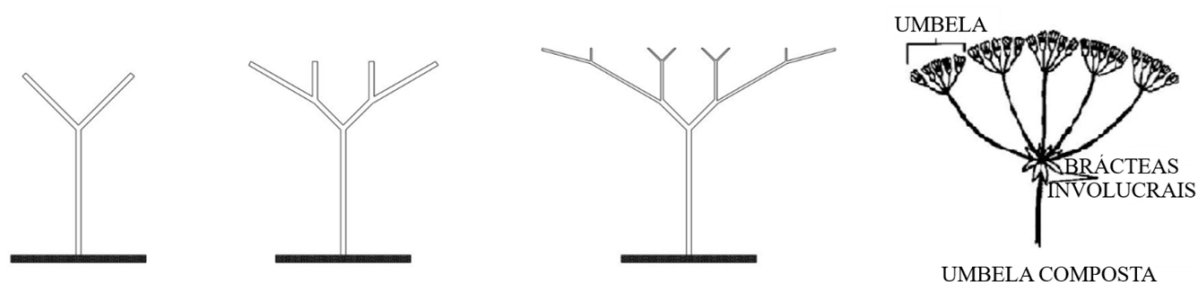


Figura 2.12: Avaliação geométrica para suporte a otimização da concepção estrutural. Fonte: Adaptado de Latif e Shahin (2021).

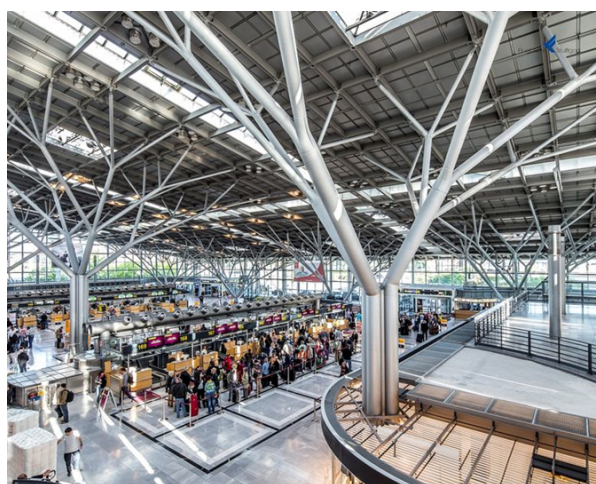


Figura 2.13: Geometria otimizada aplicada na concepção estrutural do Stuttgart Airport. Fonte: Adaptado de Latif e Shahin (2021).

Segundo Da Silveira (2021), a concentração de tensões, assim como estrangulações do fluxo/escoamento, não é benéfica para o melhor desempenho: o melhor uso de uma estrutura ocorre quando o máximo dos esforços admissíveis é distribuído uniformemente através do material disponível. Além disso, Bejan e Lorente (2008) agregam que a questão fundamental é como selecionar parâmetros que irão maximizar a resistência global, esta podendo se tratar tanto de resistência à transferência de calor quanto da resistência mecânica estrutural.

De acordo com Dos Santos et al. (2017) e Rocha, Lorente e Bejan (2018), o DC é um método de avaliação geométrica e não um método de otimização. Para sua aplicação é necessário definir: restrições (globais ou locais), graus de liberdade (livres para variar respeitando as restrições), e parâmetros indicadores de performance que podem ser maximizados ou minimizados (o que representar uma facilitação do acesso ao fluxo/escoamento). Contudo, o Design Construtal pode ser empregado em conjunto com um método de otimização (como Métodos Heurísticos ou Busca Exaustiva). Neste caso, o Design Construtal é responsável por gerar o espaço de busca (composto por todas

as configurações geométricas possíveis), nas quais o método de otimização identifica a geometria do sistema que conduz a uma performance superior.

2.4.1 Técnica de Busca Exaustiva (BE)

A técnica de otimização por Busca Exaustiva consiste em avaliar cenário após cenário dentro de um intervalo com um determinado passo, e retornar o valor ótimo encontrado ao final da análise de todos os casos. Embora possa parecer pouco sofisticada, esta técnica não faz suposições sobre as características da função (não precisa de um ponto de partida, interpolação ou derivada; necessita apenas de um intervalo de análise) e tem a vantagem de ser capaz de buscar pelo valor ótimo para qualquer função, mesmo para aquelas com um comportamento complexo e irregular, com múltiplos extremos locais e até mesmo com descontinuidades, o que é útil para lidar com problemas do tipo "caixa preta", quando não há muitas informações disponíveis sobre o comportamento da função sendo otimizada (Khoury e Harder, 2016).

Isto é particularmente interessante para busca pelo comportamento ótimo de placas com enrijecedores submetidas à flambagem elasto-plástica com o MAPDL, uma vez que a função que rege o comportamento da tensão última de flambagem com respeito à relação de lados dos enrijecedores h_s/t_s não é definida explicitamente, mas sim calculada para cada ponto do intervalo através do análise de elementos finitos com o MAPDL.

Contudo, o tempo total necessário para execução das análises é uma desvantagem, uma vez que todos os cenários de um intervalo precisam ser testados. Além disso, quando a técnica de Busca Exaustiva encontra um valor próximo a um ótimo global, este resultado não é melhorado a menos que um intervalo com mais pontos seja gerado, o que faz com que a técnica geralmente encontre um ponto próximo do ótimo global, mas muito pouco provavelmente o ótimo global em si (Khoury e Harder, 2016).

2.5 Aplicações Web

A solução desenvolvida para automatizar os fluxos de modelagem computacional do presente trabalho é uma aplicação Web. Esta é uma interface disponibilizada para os usuários por um servidor através de uma rede, seja ela a internet ou mesmo uma rede interna (Fowler e Stanwick, 2004), para ser acessível através de um cliente Web, permitindo interação dinâmica e colaboração entre um grande número de pessoas (Jazayeri, 2007).

Uma API³ é um conjunto de regras e protocolos que permite que diferentes aplicações de software se comuniquem e interajam umas com as outras, facilitando a interoperabilidade, escalabilidade e modularidade no desenvolvimento de sistemas modernos (Mudassir e Mushtaq, 2024).

2.5.1 APIs REST

APIs Web modernas que seguem o estilo arquitetural REST⁴ são conhecidas como APIs REST. Estas são constituídas de múltiplos recursos que clientes podem manipular através de requisições HTTP (Segura et al., 2018). O protocolo HTTP (*HyperText Transfer Protocol*) foi projetado para permitir que um computador - denominado cliente - solicite informações a outro computador - denominado servidor - para que este possa tornar estas informações disponíveis para o cliente.

Em outras palavras, o HTTP é um protocolo simples de requisição-resposta. Este define oito operações básicas: OPTIONS, GET, HEAD, POST, PUT, DELETE, TRACE e CONNECT, das quais as mais utilizadas são GET e POST. O método GET, quando requisitado, recupera informações associadas a uma determinado recurso do servidor. O método POST, quando requisitado, envia dados para um determinado recurso do servidor (Jazayeri, 2007).

APIs REST possuem as seguintes características:

- Baseadas em Recursos: São desenvolvidas em torno de recursos, que podem ser qualquer tipo de objeto, dados ou serviços que são acessados através de um URI (*Uniform Resource Identifier* - Identificador de Recurso Uniforme) único (Arcuri, 2019);
- Operações *Stateless* (sem estado): Cada requisição de um cliente para um servidor deve conter toda informação necessária para o servidor entender e processar a requisição. O servidor não armazena nenhum estado sobre a sessão do cliente;
- Emprego de métodos HTTP: Usam métodos HTTP para executar operações nos recursos. Estes métodos correspondem a operações CRUD (*Create, Read, Update, Delete* - Criar, Ler, Editar e Deletar) (Sud, 2020);
- Formato de dados: O JSON (*JavaScript Object Notation* - Notação de Objetos JavaScript) é o mais comumente utilizado, embora XML e outros formatos possam

³ *Application Programming Interface* - Interface de Programação de Aplicações

⁴ *Representation State Transfer* - Transferência de Estado Representacional

ser utilizados (Neumann, Laranjeiro e Bernardino, 2018);

- Escalabilidade e Flexibilidade: São projetadas para serem escaláveis e flexíveis, possibilitando integração e interação facilitada entre sistemas e serviços (Ehsan et al., 2022).

Estas características fazem com que usar uma API REST como uma ferramenta de suporte à modelagem computacional associada a um software de simulação numérica como o MAPDL permita que mesmo usuários sem uma máquina com grandes recursos computacionais consigam utilizar os recursos de simulação numérica, através da internet, interagindo com o servidor de simulação através da API (Chen, Lin e Chao, 2006), para além da possibilidade de automação dos fluxos de modelagem computacional, que muitas vezes são executados de forma manual e repetitiva através da interface gráfica.

2.5.2 Arquitetura MVC (Model - View - Controller)

Pensando-se em boas práticas de organização e estruturação do código, foi adotada a arquitetura MVC, através da adoção do *Django Rest Framework* (DRF). De acordo com Tiwari et al. (2024), a arquitetura MVC é um padrão de design de software que separa uma aplicação em três componentes interconectados: *Model* (modelo de dados), *View* (apresentação), *Controller* (controlador). Estas camadas têm as seguintes funções:

- *Model*: Representa o modelo de dados (representação no código do Banco de Dados) e a regra de negócio da aplicação. Gerencia os dados e aplica a lógica e as regras da aplicação (Ramírez-Noriega et al., 2021);
- *View*: Apresenta e formata os dados para o usuário, formatando-os de forma apropriada (Tiwari et al., 2024);
- *Controller*: Atua como um intermediário entre a *Model* e a *View*. Faz o processamento das informações recebidas na requisição, interage com a *Model* e devolve as informações para a *View* (Pop e Altăr, 2014).

Segundo Rubio (2017), o DRF implementa a camada *Controller* através de *ViewSet*s; a camada de *View* através de *Serializers* e a camada de *Model* através do conjunto das classes *Model* e *Service*.

2.5.3 A especificação OpenAPI

De acordo com Casas et al. (2021), a especificação *OpenAPI* (previamente conhecida como *Swagger*) é um padrão amplamente adotado para a descrição de APIs REST, tornando fácil de melhorar, simplificar e automatizar várias atividades. Ela melhora a documentação de APIs e fornece uma interface fácil de entender que explica como utilizar uma API REST.

A documentação *Swagger* é uma ferramenta que permite descrever a funcionalidade de uma API REST, o que ajuda a manter uma consistência entre a documentação e sua implementação, gerando um contrato que especifica o que deve ser enviado na requisição (corpo e cabeçalhos) e o que será retornado como resposta (Santos et al., 2020).

2.6 Ferramentas computacionais

2.6.1 A linguagem Python

Python é uma linguagem de programação interpretada, de alto nível, orientada a objetos, de tipagem dinâmica. Sua utilização inclui vantagens como desenvolvimento rápido, facilidade de leitura/compreensão, rápida curva de aprendizado, amplo suporte da comunidade e boa capacidade para lidar com várias plataformas. É utilizada extensivamente para aplicações *desktop*, aplicações web, criação de scripts, gerenciamento de sistemas e computação científica (Liu, Wu e Fang, 2015). Além disso, Tahmoorei, Heydarnoori e Aghamohammadi (2020) adicionam que a linguagem Python é utilizada na solução de problemas nas áreas de matemática, ciência de dados, estatística e processamento de linguagem natural.

Conforme explicam Zhang et al. (2024), em virtude de ser uma das linguagens preferidas para aplicações de Inteligência Artificial (IA), a linguagem Python ganhou imensa popularidade devido à sua sintaxe versátil, flexibilidade de múltiplos paradigmas de programação, bem como o robusto suporte da comunidade. Essa popularidade aumenta ainda mais no domínio da computação científica, aprendizado de máquina, ou algoritmos de IA onde há grande demanda de processamento de dados.

Segundo Raschka, Patterson e Nolet (2020), a linguagem Python aumenta a produtividade nas áreas de computação científica, ciência de dados e *machine learning*, permitindo o uso de bibliotecas de baixo nível e APIs de alto nível. Em adição a isso, Pérez, Granger e Hunter (2011) traz que a utilização de Python na pesquisa de engenha-

ria proporciona um equilíbrio entre clareza e flexibilidade sem sacrificar a performance, fazendo dessa uma valiosa ferramenta para solução de problemas complexos.

De acordo com Rashed, Ahsan e Chowdhury (2012), em *open source*, como o código fonte é disponível gratuitamente para uso e modificação, muitos usuários contribuem com seu conhecimento individual sobre vários aspectos da modelagem numérica. O presente trabalho utilizou bibliotecas e *frameworks open source*, que são descritas na sequência.

2.6.1.1 A biblioteca PyMAPDL

A biblioteca PyMAPDL é parte de um esforço maior, chamado PyAnsys, que tem o intuito de facilitar o uso das tecnologias Ansys diretamente a partir de ambientes Python (Kaszynski et al., 2021). Seu pacote principal (*ansys-mapdl-core*) fornece:

- Criação de scripts tanto através de sintaxe Python, quanto através de sintaxe APDL (Ansys Parametric Design Language);
- Exibição da geometria e malhas usando PyVista a partir de um script Python ou de um Jupyter Notebook interativo;
- Acesso aos arrays do Ansys Mechanical APDL como objetos Python (por exemplo, nós, elementos, matrizes de solução e resultados).

Além disso, ainda segundo a documentação da biblioteca PyAnsys (2024), através da tecnologia *Google Remote Procedure Calls(gRPC)*, é possível estabelecer conexões seguras para chamadas diretas de uma máquina cliente para um servidor remoto que roda uma instância do MAPDL, como pode ser visto na Figura 2.14.

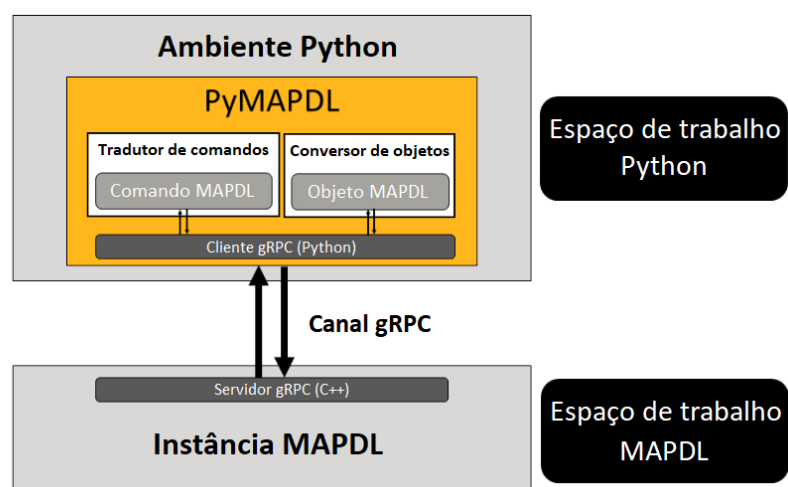


Figura 2.14: Arquitetura - PyMAPDL. Fonte: Adaptado de PyAnsys (2024).

Isso aliado à comunicação com base em HTTP/2 e uso de formatos de transmissão binária, torna essa tecnologia compatível com a infraestrutura de internet moderna e favorece alta performance, mesmo para chamadas remotas (PyAnsys, 2024).

A utilização do PyMAPDL para integrar ao MAPDL permite que os comandos para simulação numérica sejam feitos diretamente a partir do ambiente Python, o que permite uma fácil integração com outras bibliotecas Python para análise e geração de gráficos, planilhas e demais recursos que dão suporte à produção de conhecimento científico.

2.6.1.2 O Django Rest Framework

Segundo Rubio (2017), o Django Rest Framework (DRF) é um *framework* baseado na arquitetura MVC, tendo suporte para comunicação com bancos de dados relacionais (SQL⁵), não-relacionais (NoSQL), comunicações de tempo real e práticas modernas de JavaScript (integração para *front-end*). O DRF é *open source*⁶, e provê uma estrutura pronta de forma rápida para criação de aplicações web complexas (Rubio, 2017), com suporte a integração com outras ferramentas, bibliotecas e até mesmo linguagens de programação, para além de autenticação e autorização, garantindo a segurança de dados.

2.6.2 O Banco de Dados Relacional MariaDB

O MariaDB é um banco de dados relacional *open source*⁷. O MariaDB foi projetado para atender a requisitos de alta performance, suportando consultas complexas e grandes conjuntos de dados, sendo adequado para ser utilizado em APIs REST (Sriparasa, 2014).

2.6.3 A infraestrutura Docker

Segundo Bhatia (2017), Docker é uma plataforma de containerização que provê virtualização leve e rápida ao nível do sistema operacional, o que o tornou popular por dar suporte a várias plataformas de nuvem. Yasir (2018) traz ainda que Docker é uma plataforma *open source*⁸ que permite com que profissionais de engenharia de software possam construir, distribuir e executar aplicações em um ambiente portátil, leve, flexível e orquestrável.

⁵ *Structured Query Language* - Linguagem de Consulta Estruturada.

⁶ Disponível em: <<https://github.com/encode/django-rest-framework>>. Acesso em: 25 nov. 2024.

⁷ Disponível em: <<https://github.com/mariadb>>. Acesso em: 25 nov. 2024.

⁸ Disponível em: <<https://github.com/docker>>. Acesso em: 25 nov. 2024.

3 Desenvolvimento

O presente trabalho traz a construção e verificação de um modelo computacional para análise de flambagem elasto-plástica biaxial de placas com enrijecedores, baseado na implementação de uma API REST desenvolvida em linguagem Python com o Django Rest Framework (DRF), integrada ao software Ansys Mechanical APDL através da biblioteca PyMAPDL. Além disso, foram realizados: um estudo de caso aplicando o Design Construtal, utilizando-se da API REST desenvolvida para análise de otimização geométrica com relação à tensão última de flambagem biaxial normalizada e deflexão máxima normalizada causada pela flambagem elasto-plástica biaxial; um estudo comparativo entre os resultados de flambagem elasto-plástica uniaxial e biaxial. O fluxograma de integração de todas as etapas do presente trabalho é apresentado na Figura 3.1.

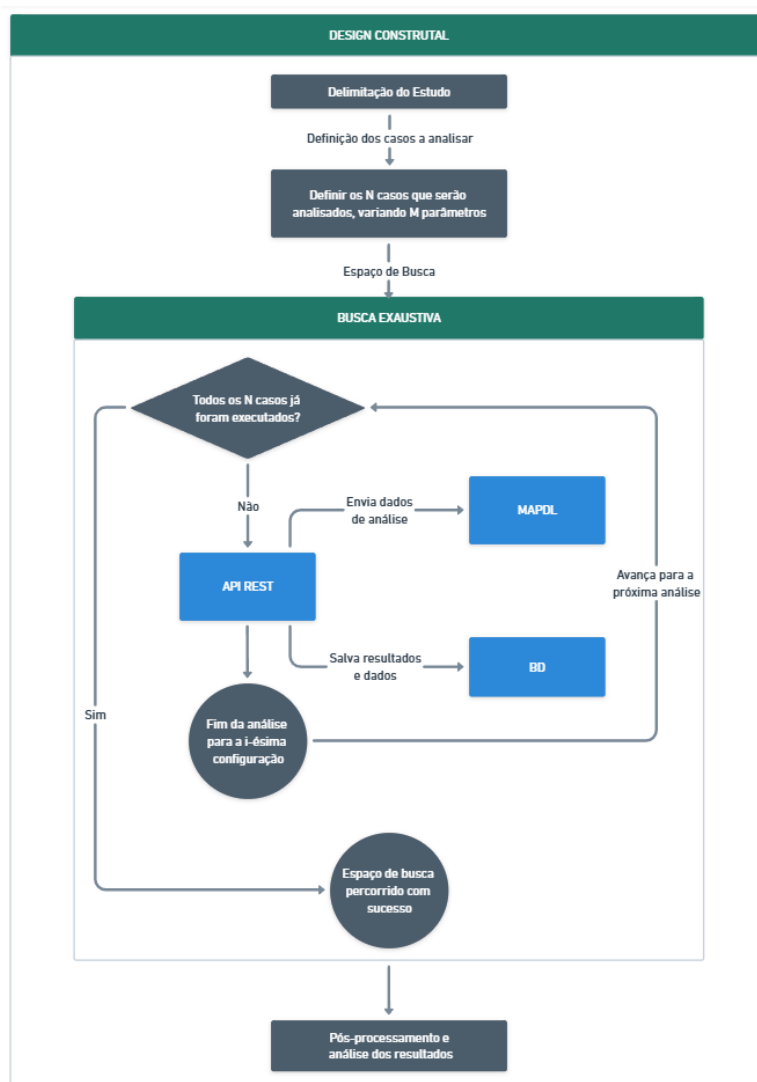


Figura 3.1: Fluxograma de integração de todas as etapas do presente trabalho

3.1 Características do Modelo Computacional

O modelo computacional do presente trabalho foi concebido pensando na realidade de analisar casos de placas com e sem enrijecedores, simplesmente apoiadas, podendo estas estarem submetidas à flambagem uniaxial ou biaxial.

3.1.1 Geometria

A geometria das placas sem enrijecedores é retangular, onde o comprimento é denotado por a , a largura por b e a espessura por t_0 , como pode ser visto na Figura 3.2.

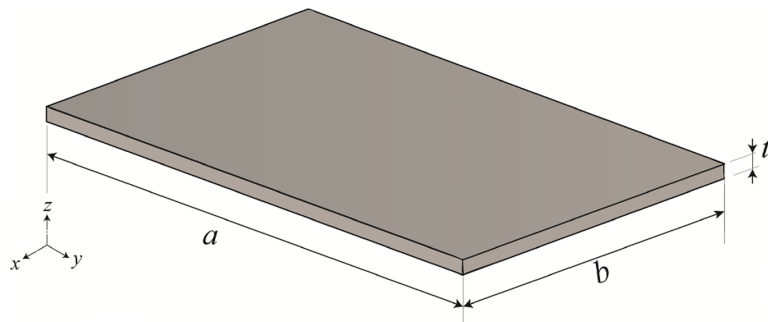


Figura 3.2: Geometria sem Enrijecedores. Adaptado de Lima et al. (2020, p. 6)

A geometria das placas com enrijecedores tem comprimento a e largura b do mesmo modo das placas sem enrijecedores, mas têm espessura t_1 , e também contam com as características geométricas dos enrijecedores, onde h_s é altura dos enrijecedores, t_s é a largura dos enrijecedores, N_{ls} é o número de enrijecedores longitudinais, N_{ts} é o número de enrijecedores transversais, a_{ts} é o espaçamento entre os enrijecedores transversais e b_{ls} é o espaçamento entre os enrijecedores longitudinais. A geometria das placas com enrijecedores pode ser vista na Figura 3.3.

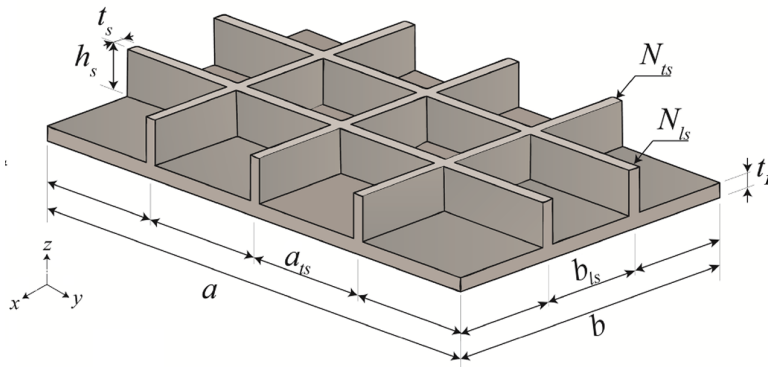


Figura 3.3: Geometria com Enrijecedores. Adaptado de Lima et al. (2020, p. 6)

Os enrijecedores possuem seção retangular, com os longitudinais e transversais possuindo as mesmas dimensões. As espessuras t_0 e t_1 são diferentes por conta da fração volumétrica (ϕ) que é considerada como restrição do Design Construtal (item 3.4), onde o volume total das placas sem e com enrijecedores é mantido constante. Esta restrição faz com que seja deduzida uma parte do volume das placas sem enrijecedores para ser convertida em enrijecedores, gerando a diferença entre as espessuras t_0 e t_1 .

3.1.2 Condições de Contorno de Deslocamento

As placas são consideradas simplesmente apoiadas em suas quatro bordas e também nos enrijecedores, o que implica translação $u_z = 0$. Além disso, para impedir movimento de corpo rígido, o ponto mais à esquerda inferior é restringido de modo que as translações $u_x = u_y = 0$, e o ponto mais à direita inferior é restringido de modo que a translação $u_y = 0$. As condições de contorno de deslocamento para as placas sem enrijecedores e com enrijecedores são apresentadas nas Figuras 3.4 e 3.5.

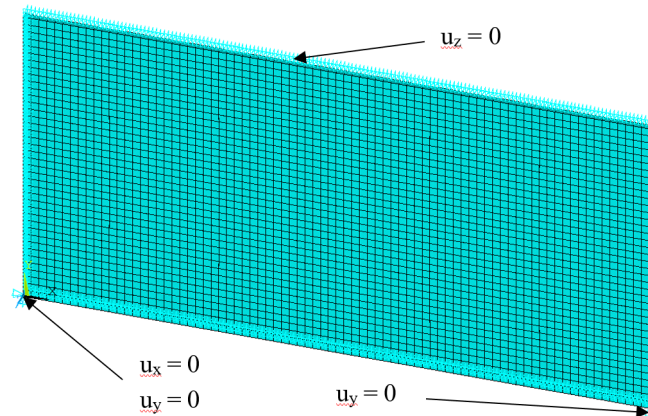


Figura 3.4: Condições de Contorno - Placas Sem Enrijecedores.

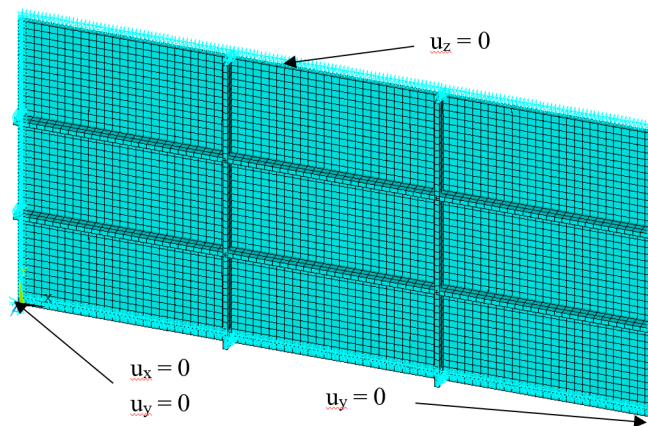


Figura 3.5: Condições de Contorno - Placas Com Enrijecedores.

3.2 Modelo Computacional no MAPDL

A modelagem computacional pode ser aplicada em uma série de contextos, como mecânica dos sólidos e fluidos, computação, inteligência artificial, física de partículas, astrofísica, economia, finanças, biomedicina, neurologia, geociências, meteorologia, ciências ambientais, dentre tantas outras. É uma área multidisciplinar que utiliza conceitos de engenharia, matemática e ciência da computação para gerar resultados.

A modelagem computacional é uma representação de algum sistema de interesse, primeiro expresso matematicamente e depois na forma de um programa de computador, em que, muitas vezes, métodos numéricos são utilizados. Em outras palavras, esta pode ser vista como um conjunto de ferramentas que recebe parâmetros de entrada e, mediante uma análise computacional, produz resultados (Morris, 1991).

De acordo com Zienkiewicz (1971), a simulação numérica consiste em uma técnica que avalia o comportamento de um determinado sistema por meio de modelos computacionais, que reproduzem na totalidade ou em parte as propriedades e comportamentos do sistema, permitindo assim sua manipulação e estudo detalhado. Além disso, Aho (2012) adiciona que a modelagem computacional é amplamente utilizada nos dias atuais porque esta ajuda a entender problemas complexos através do uso de modelos bem-definidos com capacidades e significados claros.

Miłkowski (2018) traz que, através do uso de modelos computacionais, pesquisadores são capazes de analisar, especificar e formalizar intuições, permitindo uma teorização transparente. Além disso, Miranda e Abreu (2016) trazem que a modelagem computacional pode ser aplicada em engenharia para prever desafios de projeto, implicações e soluções sem experimentação direta, o que pode ser custoso ou mesmo perigoso. Lima et al. (2020) ainda adiciona que a versatilidade e generalidade dos métodos numéricos para simulação de problemas de engenharia, e a relativa simplicidade de aplicação dessas técnicas, são outros fatores motivadores para seu uso.

Para dar suporte à descrição do modelo computacional para o presente trabalho, o Apêndice B traz um exemplo de script APDL que foi utilizado como base para construir o modelo computacional no MAPDL e também para criar os trechos de código Python que utilizaram a biblioteca PyMAPDL dentro da API REST desenvolvida.

3.2.1 Padronização do nome dos arquivos

Dentro do MAPDL, existe um limite de 32 caracteres para o nome de variáveis, arquivos e elementos identificadores tais como componentes, materiais e elementos. Assim sendo, para nomear os arquivos de forma automatizada de forma a respeitar esta limitação, foi adotada a seguinte padronização de nomes:

$$\underbrace{\text{BL2}}_{\substack{\text{Buckling Material} \\ \text{Load} \\ \text{Type}}} \underbrace{\text{M1}}_{\text{Material}} \underbrace{\text{P0.3}}_{\phi} \underbrace{\text{L2}}_{N_{ls}} \underbrace{\text{T2}}_{N_{ts}} \underbrace{\text{-k6.333}}_{h_s/t_s} \underbrace{\text{-MS25}}_{\substack{\text{Mesh} \\ \text{Size}}} \underbrace{\text{-SP1}}_{\substack{\text{Stiffened} \\ \text{Plate}}}$$

Esta padronização carrega informações que, para o exemplo acima significam:

- BL2: Indica que o identificador (ID) do tipo de carregamento de flambagem é 2 - Biaxial na Tabela de Domínio *BucklingLoadType* (ver item 3.3.4.8);
- M1: Indica que o ID do material é 1 na Tabela *Material* (ver item 3.3.4.6);
- P0.3: Indica que o valor da fração volumétrica é $\phi = 0.3$;
- L2: Indica que o valor do número de enrijecedores longitudinais é $N_{ls} = 2$;
- T2: Indica que o valor do número de enrijecedores transversais é $N_{ts} = 2$;
- k6.333: Indica que o valor da relação de lados do enrijecedor é $k = h_s/t_s = 6,333$;
- MS25: Indica que o tamanho de malha (*mesh size*) é de 25 mm;
- SP1: Indica que o ID da placa com enrijecedores é 1 na Tabela *StiffenedPlate* (ver item 3.3.4.2).

3.2.2 Passos iniciais da modelagem

Para começar a análise no MAPDL, é necessário realizar alguns passos iniciais que serão base para o desenvolvimento do modelo computacional. Estes passos são:

1. Escolha do diretório onde os arquivos serão salvos, nome dos arquivos (ver item 3.2.1) e título da análise (linhas 3 a 7);
2. Definição dos parâmetros escalares do MAPDL (linhas 10 a 31);
3. Entrar no processador de pré-processamento (/PREP7) para poder chamar os comandos de definição (linha 34);

4. Definição do elemento finito como sendo o *SHELL281* (linha 37);
5. Definição das propriedades mecânicas do material (linhas 40 a 44);
6. Alteração do modo de exibição para perspectiva (linhas 47 a 49).

A declaração de parâmetros escalares com o comando **SET* (ver item 2 do passo a passo acima) foram utilizadas no script do Apêndice B com o intuito de facilitar o entendimento do script APDL em si, não tendo sido utilizadas nas funções Python correspondentes no contexto da API REST desenvolvida, uma vez que variáveis podem ser criadas e manipuladas no contexto da própria linguagem Python.

3.2.3 Criação da Geometria

Para tornar o script APDL (e o código Python nele baseado) parametrizável, foi utilizado o recurso de *Selection Logic* do MAPDL, que consiste do uso de comandos que possibilitam selecionar entidades do MAPDL (KPs, linhas, áreas, volumes, nós e/ou elementos) através de critérios como um intervalo de valores de uma coordenada¹. Neste sentido a criação da geometria do modelo computacional no MAPDL se deu da seguinte forma:

1. Definição das seções (necessária para o elemento *SHELL281*) (linhas 53 a 62);
2. Criação da geometria e dos componentes pré-partição de áreas (linhas 66 a 127);
3. Partição de áreas (linha 130): A partição de áreas é necessária para evitar que durante a discretização, áreas que tenham regiões sobrepostas (como as intersecções entre placa e enrijecedores) gerem eventuais faltas de vinculação a alguns elementos, gerando problemas de movimento de corpo rígido de elementos no modelo;
4. Recriação dos componentes pós-partição de áreas (linhas 135 a 160).

3.2.4 Aplicação da malha

O processo de aplicação da malha para o tipo de elemento *SHELL281* consiste em selecionar as áreas da geometria até então criada e definir o tamanho de malha apropriado para cada parte. Como será detalhado no item 3.2.8, o tamanho de malha definido

¹Para aprofundar o conhecimento sobre *Selection Logic*, recomenda-se consultar os comandos CM, CMSEL, CMGRP, ALLSEL, ASEL, LSLA, LSEL, KSL, KSEL em Ansys (2024b).

no teste de convergência de malha foi de 25 mm, tanto para a placa quanto para os enrijecedores. Os passos para aplicação da malha são os seguintes:

1. Geração da malha para placa e enrijecedores (linhas 164 a 193);
2. Mesclagem de nós e depois de KPs coincidentes, que se faz necessária quando se aplica o comando NUMMRG após o modelo estar malhado (linhas 197 e 198, respectivamente);
3. Encerrar o processador de pré-processamento (/PREP7) através do comando FINISH (linha 204).

3.2.5 Análise estática com pré-tensão

De acordo com Ansys (2024d), a análise de autovalores da flambagem elástica exige previamente a realização de uma análise estática com a pré-tensão habilitada, para o cálculo da matriz de rigidez geométrica unitária $[K_G^*]$, que será necessária na análise de flambagem elástica. Assim, os passos para realização da análise estática com pré-tensão são os seguintes:

1. Entrar no processador de solução (/SOLU), definindo uma análise estática com pré-tensão (linhas 207 a 211);
2. Criar os componentes para facilitar a aplicação das condições de contorno (linhas 216 a 311);
3. Aplicar condições de contorno:
 - (a) Restrição à translação de KPs nas direções x e y para impedir movimento de corpo rígido (linhas 315 a 321);
 - (b) Restrição à translação de linhas na direção z para dar à placa a condição de simplesmente apoiada (linhas 324 a 330);
 - (c) Aplicação de cargas de superfície unitárias paralelas a x para análises de flambagem uniaxial (linhas 333 a 337) e em ambas as direções para análises de flambagem biaxial (linhas 333 a 341);
4. Executar a solução (SOLVE) e sair do processador de solução (linhas 344 a 350).

3.2.6 Análise de flambagem elástica

Uma vez calculada a matriz de rigidez geométrica unitária $[K_G^*]$, esta é utilizada pelo MAPDL para calcular o fator de carga $\lambda = \lambda_{crit}$ utilizando a Equação (2.13), que fornece o valor da carga crítica de flambagem elástica através da Equação (2.14), onde $\{F^*\}$ é um vetor unitário (observar item 3c). Assim, os passos para a análise de flambagem elástica no MAPDL são os seguintes:

1. Entrar no processador de solução (/SOLU) novamente (linha 353);
2. Definir o tipo de análise para análise de flambagem (linha 356);
3. Definir o método de solução para a análise, que será o Método de Lanczos em Blocos, com extração somente do primeiro modo de flambagem, com espaço de busca pelos autovalores de $-\infty$ a $+\infty$ (linha 359);
4. Definir que, após a solução, seja feita a expansão modal do primeiro modo de flambagem, para tornar os resultados disponíveis para pós-processamento (linha 362);
5. Executar a solução (SOLVE) e sair do processador de solução (linhas 365 e 368);
6. Salvar o modelo (linha 371);
7. Entrar no processador de pós-processamento geral (/POST1), armazenar o resultado de λ_{crit} no parâmetro escalar N_CR e sair do /POST1 (linhas 374 a 380).

3.2.7 Análise de flambagem elasto-plástica

A análise de flambagem elasto-plástica partiu da geometria deformada gerada pela análise de flambagem elástica, onde utilizou-se um fator de imperfeição inicial w_0 que é dado pela Equação (2.15) e utilizado para atualizar a geometria.

Numericamente, foi realizada uma análise por incremento de carga com um passo de carga único com valor limite sendo a carga de escoamento F_y da Equação (2.16). Este passo de carga foi dividido em sub-passos de carga devido à não-linearidade oriunda da plasticidade do material (para descrever o material foi utilizado o modelo elasto-plástico de endurecimento isotrópico bilinear, que é apresentado no item 2.3.1.2).

Por padrão, o MAPDL habilita o passo de tempo automático (*Automatic Time Stepping*), o que faz com que, caso a convergência não seja atingida para um determinado

sub-passo de carga, o programa bissecte o incremento e tente realizar a solução para uma carga menor. Os aspectos teóricos desta análise são descritos no item 2.3.1.5. Os passos para a análise de flambagem elasto-plástica no MAPDL são os seguintes:

- Pré-Processamento:

1. Entrar no processador de pré-processamento (/PREP7) (linha 383);
2. Aumentar o limite de erros, para que a conexão gRPC não feche abruptamente em caso de Warnings (linha 386);
3. Garantir que o modelo todo está selecionado (linha 388);
4. Atualizar geometria da configuração deformada da análise elástica pelo fator de imperfeição inicial w_0 (linha 391);
5. Definir o modelo elasto-plástico de endurecimento isotrópico bilinear, informando σ_y e E_T (linhas 394 a 396).

- Solução:

1. Entrar no processador de solução (/SOLU) novamente (linha 402);
2. Definir uma análise estática, com pré-tensão e grandes deslocamentos permitidos (linhas 405 a 409);
3. De acordo com Ansys (2024d), é recomendado desabilitar o preditor não-linear (*Nonlinear Predictor*) para análise de flambagem, porque, em caso contrário, a solução pode ignorar alguns pontos de flambagem crítica mesmo que a solução tenha convergido para uma dada tolerância (linha 412);
4. Definir o número planejado, máximo e mínimo de sub-passos de carga a serem utilizados durante o PNRI (ver PNRI na página 48), de modo que os incrementos de carga sejam suaves o suficiente para permitirem a plastificação, mas não o bastante para que o tempo de análise aumente sem um aumento proporcional da precisão do resultado (linha 414). Foram considerados os seguintes valores:
 - número planejado: 200;
 - número máximo: 400;
 - número mínimo: 50.
5. Realizar a limpeza dos arquivos de resultado: principal (.rst), deslocamentos nodais (.DSP), modos de flambagem (.mode), até então preenchidos com os

- resultados de flambagem elástica, para salvamento dos resultados de flambagem elasto-plástica (linhas 417 e 420);
6. Definir o valor da carga de referência ao final do passo de carga F_y (ver Equação (2.16)), que será o valor limite da análise (linha 423);
 7. Aplicar as cargas de superfície F_y nas bordas da placa: paralelas a x para flambagem uniaxial (linhas 426 a 430) e em ambas as direções para flambagem biaxial (linhas 426 a 434);
 8. Definir os limites de tolerância de convergência: utilizou-se os valores padrões de limite de tolerância (ε_R) e norma (ver tipos de norma do MAPDL na página 49), que são descritos na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Limites de Tolerância de Convergência

Parâmetro	ε_R	Norma
Força	0,005	$\ \{R\}\ _2$
Momento	0,005	$\ \{R\}\ _2$
Deslocamento	0,05	$\ \{R\}\ _\infty$

9. Executar a solução (SOLVE) e sair do processador de solução (linhas 439 e 442);
10. Salvar o modelo (linha 445).

O pós-processamento das análises foi realizado através de scripts Python baseados nas bibliotecas Matplotlib, OpenPyXL, Pandas, PyMAPDL, PyVista e SQLAlchemy.

3.2.8 Testes de Convergência de Malha (TCM)

Para que a análise através do MEF seja realizada, uma etapa de fundamental importância consiste dos testes de refinamento e convergência de malha. Estes testes visam garantir essencialmente duas características com relação ao tamanho da malha:

- que o tamanho da malha adotado não está influenciando os resultados, isto é, que os resultados são independentes da malha utilizada;
- que a precisão dos resultados obtidos para o tamanho da malha adotado é compatível com o esforço computacional investido, isto é, que um aumento no esforço computacional não melhorará significativamente a precisão dos resultados.

Os testes de convergência de malha (TCM) realizados para definir o tamanho de malha a ser utilizado nas análises de flambagem elasto-plástica abrangeram quatro cenários de uma placa com comprimento $a = 2000$ mm, largura $b = 1000$ mm, $N_{ls} = N_{ts} = 2$, feita de um aço com módulo de elasticidade $E = 200$ GPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, tensão de escoamento $\sigma_y = 355$ MPa e módulo tangente $E_T = 0$ GPa, a saber: Uniaxial sem enrijecedores: $t_0 = 20$ mm; Uniaxial com enrijecedores: $t_1 = 18$ mm, $h_s = 66$ mm e $t_s = 10$ mm; Biaxial sem enrijecedores: $t_0 = 20$ mm; Biaxial com enrijecedores: $t_1 = 18$ mm, $h_s = 66$ mm e $t_s = 10$ mm. Os resultados obtidos para os testes de convergência de malha são apresentados nas Figuras 3.6 a 3.9.

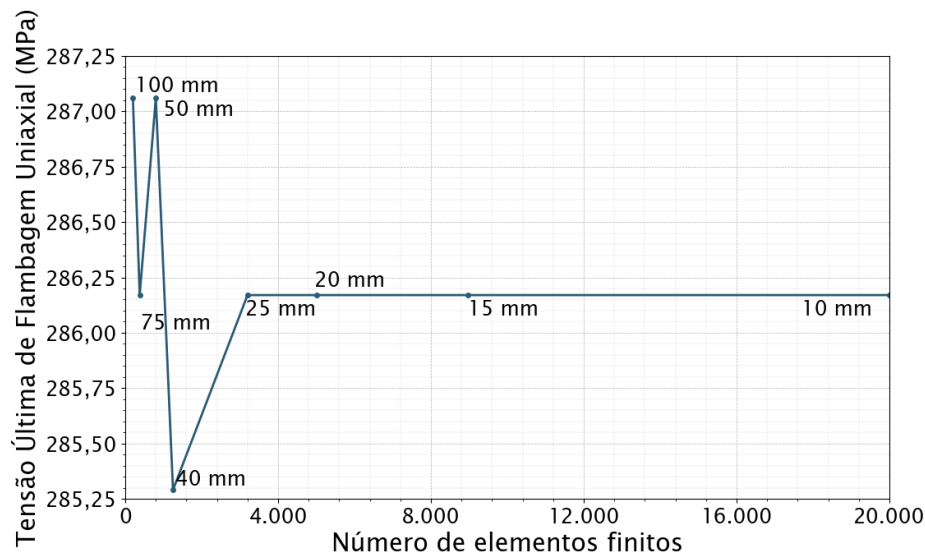


Figura 3.6: TCM - Modelo Elasto-Plástico Uniaxial Sem Enrijecedores

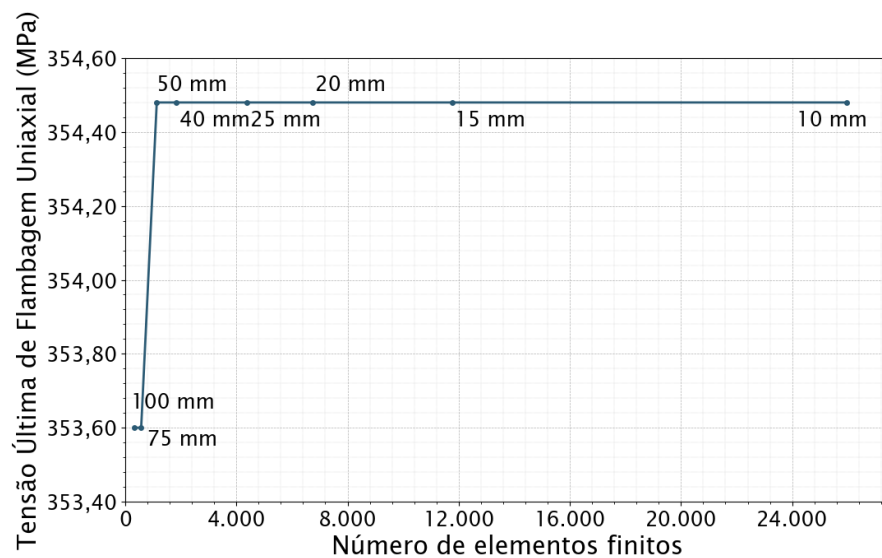


Figura 3.7: TCM - Modelo Elasto-Plástico Uniaxial Com Enrijecedores

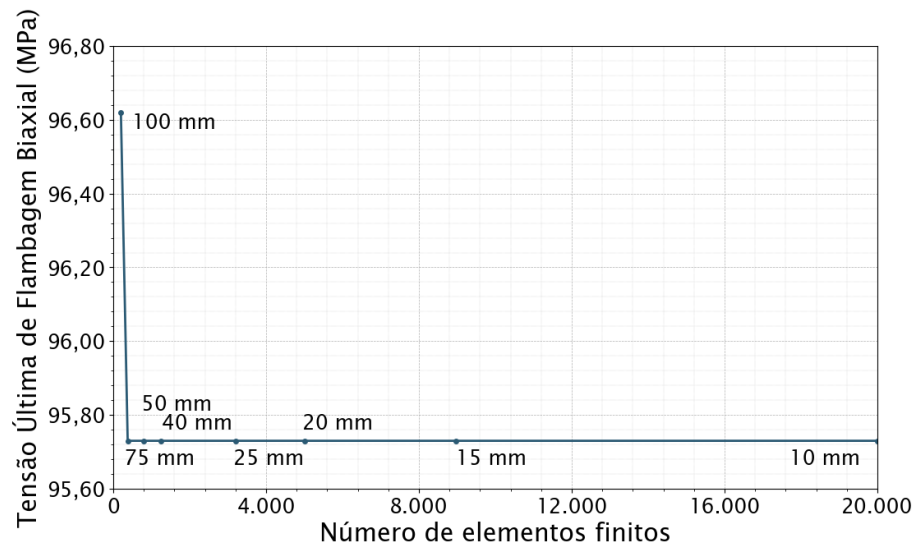


Figura 3.8: TCM - Modelo Elasto-Plástico Biaxial Sem Enrijecedores

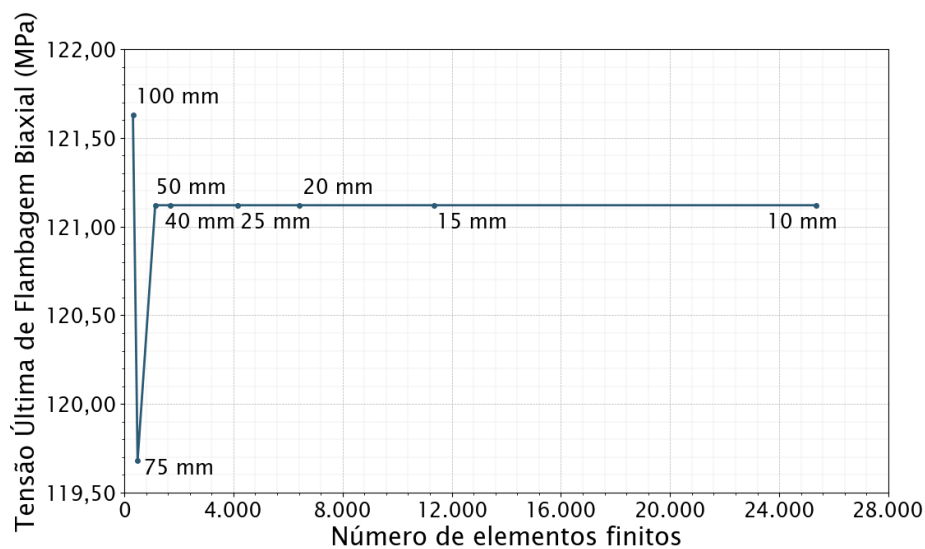


Figura 3.9: TCM - Modelo Elasto-Plástico Biaxial Com Enrijecedores

A partir dos resultados obtidos, e considerando que, para os casos de flambagem uniaxial, a convergência de malha ocorreu para 25 mm para o elemento SHELL281, em contraste com 20 mm do elemento SHELL93 (Lima et al., 2020) definiu-se o tamanho de malha para 25 mm, para obtenção de resultados suficientemente precisos para placas com e sem enrijecedores, submetidas à flambagem elasto-plástica uniaxial ou biaxial.

3.2.9 Verificação do Modelo Computacional (VMC)

Segundo Oberkampf e Trucano (2002), a verificação de um modelo computacional em simulação numérica envolve identificar e quantificar erros no modelo e nas soluções obtidas através dele, assim como avaliar quão precisa é a solução obtida, comparando-a com valores de referência. Valores de referência estes que podem advir tanto de resultados numéricos, quanto através de soluções analíticas disponíveis na literatura.

Além disso, Morris (1991) recomenda executar experimentos computacionais utilizando a abordagem *one-factor-at-a-time*, que consiste basicamente em avaliar a influência que cada fator tem nos resultados obtidos. Assim, a verificação do modelo computacional deste trabalho foi realizada comparando os resultados obtidos pelo modelo do presente trabalho com os disponíveis na literatura para flambagem elasto-plástica, da seguinte forma:

- Uniaxial (1A) de placas sem enrijecedores: Lima et al. (2020);
- Uniaxial (1A) de placas com enrijecedores: Lima et al. (2020);
- Biaxial (2A) de placas sem enrijecedores: Shanmugam e Narayanan (1998);
- Biaxial (2A) de placas com enrijecedores: Paik e Seo (2009).

A Figura 3.10 define os parâmetros geométricos das seções transversais que foram utilizados nos casos de verificação.

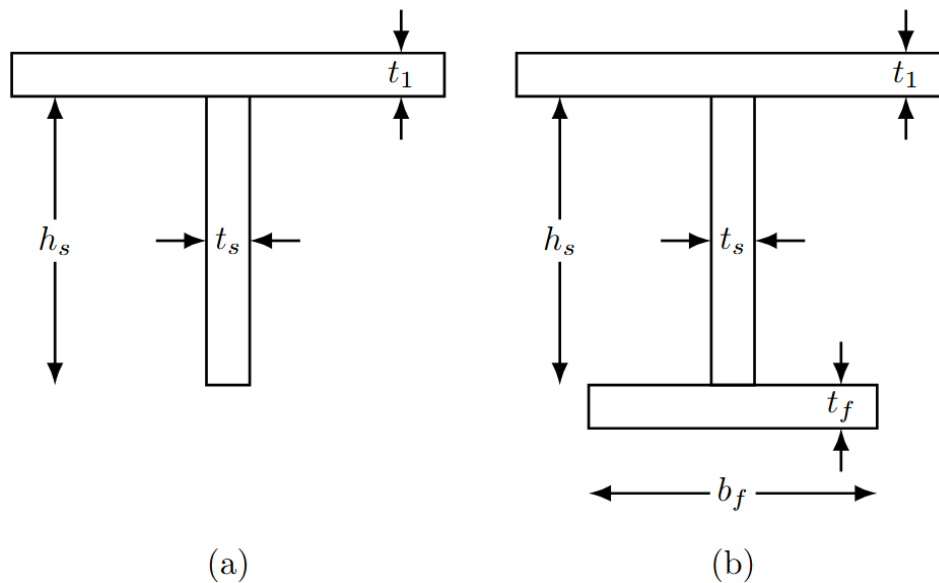


Figura 3.10: VMC - Geometria dos Enrijecedores: (a) *flat bar*; (b) *tee bar*.

A Tabela 3.2 traz os valores dos parâmetros geométricos definidos na Figura 3.10.

Tabela 3.2: VMC - Tipo de carregamento e geometria dos casos de verificação

Autores	Carga	Geometria	a	b	t_p	N_{ls}	N_{ts}	t_s	h_s	t_f	h_f
			mm	mm	mm			mm	mm	mm	mm
Lima et al. (2020)	Uniaxial	s/ enrij.	2000	1000	14	-	-	-	-	-	-
		<i>flat bar</i>	2000	1000	18	2	2	45	14	-	-
Shanmugan e Narayanan (1998)	Biaxial	s/ enrij.	720	240	4	-	-	-	-	-	-
Paik e Seo (2009)	Biaxial	<i>tee bar</i>	16300	4300	18	0	19	8	463	172	17

Cabe mencionar que $t_p = t_0$ e $t_p = t_1$ para placas sem e com enrijecedores, respectivamente. O trabalho de Paik e Seo (2009) considerou os enrijecedores longitudinais através de condições de contorno do tipo $u_z = 0$ nas linhas de intersecção entre os enrijecedores, não tendo estes enrijecedores sido representados geometricamente no modelo. A Tabela 3.3 traz as propriedades mecânicas dos materiais utilizados para cada caso de verificação, tanto para a placa quanto para os enrijecedores.

Tabela 3.3: VMC - Propriedades mecânicas utilizadas nos casos de verificação

Autores	E	ν	σ_y	E_T
	GPa	-	MPa	GPa
Lima et al. (2020)	210	0,3	355	0
Shanmugan e Narayanan (1998)	205	0,3	245	0
Paik e Seo (2009)	205,8	0,3	315	0

Para desambiguar tensão última de flambagem para os casos uniaxial e biaxial, a uniaxial será denotada por $\sigma_{u,1A}$, enquanto a biaxial será denotada por $\sigma_{u,2A}$. Além disso, os autores Paik e Seo (2009) trazem tensões últimas para as direções x e y como sendo σ_{xu} e σ_{yu} , respectivamente. Os resultados obtidos, assim como os valores da literatura, são apresentados na Tabela 3.4.

Tabela 3.4: VMC - Resultados

Autores	Geome- tria	Tensão	Refe- rência	Presente Trabalho	Desvio
			MPa	MPa	%
Lima et al. (2020)	s/ enrij.	$\sigma_{u,1A}$	187,61	186,45	0,62
	<i>flat bar</i>	$\sigma_{u,1A}$	293,78	284,34	3,21
Shanmugan e Narayanan (1998)	s/ enrij.	$\sigma_{u,2A}$	56,35	58,97	4,65
Paik e Seo (2009)	<i>tee bar</i>	σ_{xu}	72,14	69,91	3,09
		σ_{yu}	105,24	104,87	0,35

Observa-se que os resultados apresentados na Tabela 3.4 possuem desvios pequenos com relação aos valores da literatura, o que permite dizer que o modelo computacional está verificado e pode portanto ser utilizado para o desenvolvimento das demais análises do presente trabalho.

3.3 Implementação da API REST usando Python

O processo de modelagem computacional convencional através do Ansys Mechanical APDL consiste da utilização da interface gráfica para geração da geometria, definição de malha, aplicação das condições de contorno (carregamento e externo e restrições de deslocamento) e solução. No entanto, mesmo com a utilização de scripts LGW exportados, que mantêm o histórico dos passos executados manualmente, a execução de várias análises (onde se faz necessário variar a geometria e demais definições do modelo diversas vezes) se torna um processo manual, repetitivo e altamente suscetível a erros humanos. A comparação entre os fluxos de modelagem computacional tradicional (utilizando a GUI do MAPDL) e da proposta do presente trabalho é apresentada na Figura 3.11.

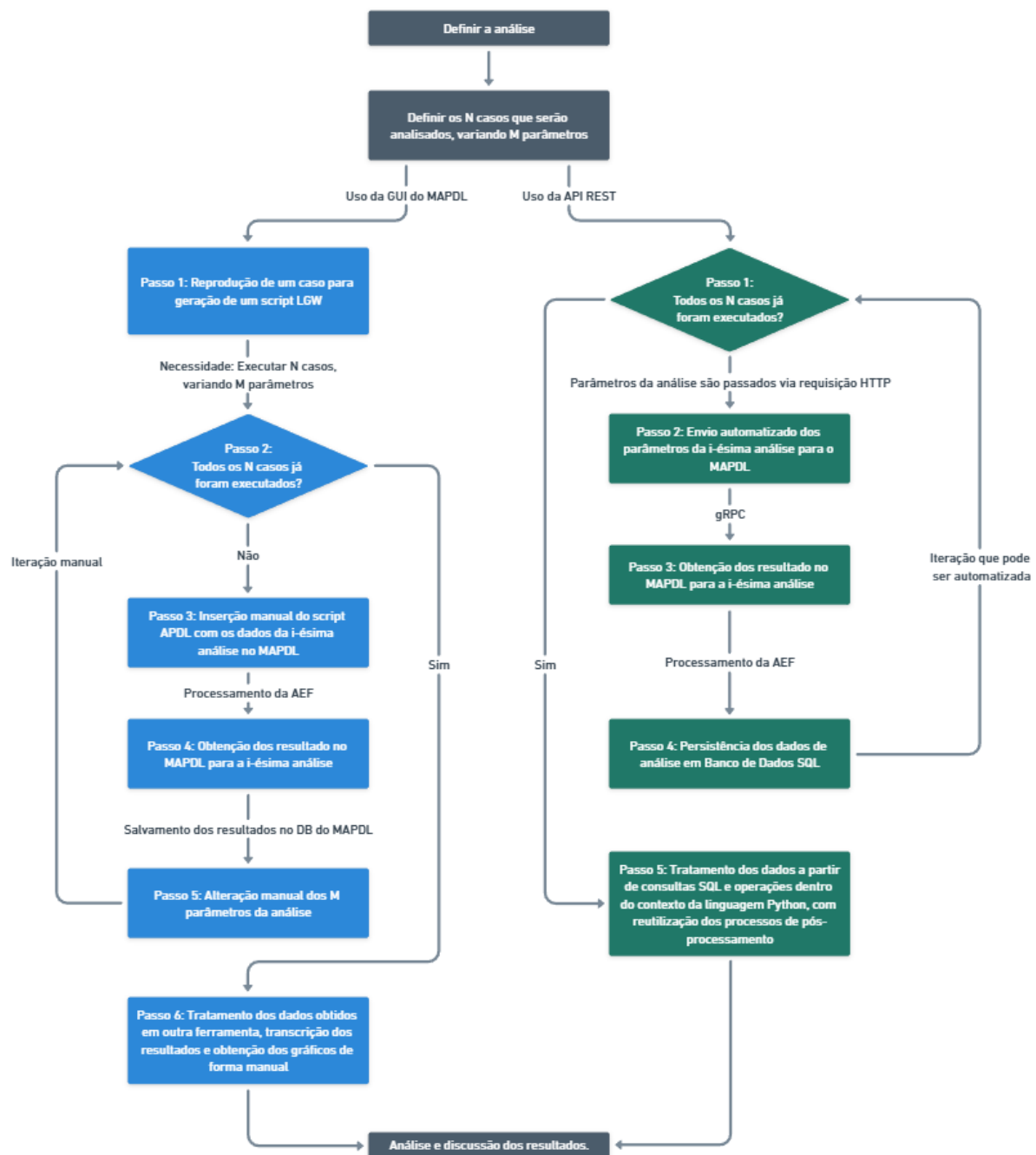


Figura 3.11: Comparação entre os processos de modelagem computacional tradicional e o proposto pelo presente trabalho.

A partir da Figura 3.11, pode-se observar que a abordagem utilizando a GUI, apesar de reutilizar os scripts APDL, depende da interação manual, que para análises de avaliação geométrica ou otimização geométrica, que executam várias simulações numéricas variando somente os parâmetros, pode aumentar muito o volume de trabalho manual, e em consequência, a probabilidade de erros humanos no processo. Esta desvantagem é sanada através do uso da API REST, que permite que as chamadas de criação de re-

gistros e comunicação com o MAPDL sejam automatizadas, aumentando a eficiência do processo, para além de possibilitar a automação de várias etapas do pós-processamento.

Visando facilitar o uso do Ansys de forma programática, os autores Kaszynski et al. (2021) implementaram a biblioteca PyMAPDL (ver item 2.6.1.1), que provê uma forma de passar comandos para o Ansys diretamente através do Python. No entanto, esta abordagem ainda tem uma limitação, que é a falta de salvamento e consolidação dos resultados de uma forma automatizada, o que muitas vezes demanda que o usuário extraia as informações de resultados para análises de otimização ou mesmo de avaliação geométrica de forma manual, muitas vezes recorrendo à inspeção visual e transcrição dos resultados em planilhas ou outras ferramentas que possibilitem esta consolidação.

Pensando em melhorar esta abordagem, o presente trabalho desenvolveu uma API REST implementada em Python através do DRF na versão 3.15.2, que aliada à biblioteca PyMAPDL na versão 0.68.4 se integra ao MAPDL na versão 2024R2 *Student*, se propondo a automatizar o processo de modelagem computacional do fenômeno de flambagem elasto-plástica biaxial de placas com enrijecedores, onde os resultados gerados são armazenados em um Banco de Dados Relacional MariaDB na versão 10.5, em uma arquitetura de contêineres (utilizando Docker na versão 4.33.1).

3.3.1 Resumo Funcional

As funcionalidades desenvolvidas dão suporte às seguintes atividades:

- definição dos parâmetros de geometria de placas sem enrijecedores (placas de referência);
- definição dos parâmetros de geometria de placas com enrijecedores, com determinação da altura (h_s) e largura (t_s) dos enrijecedores e da espessura corrigida da placa (t_1), a partir da geometria da placa de referência, da relação de lados do enrijecedor ($k = h_s/t_s$), do número de enrijecedores longitudinais (N_{ls}), do número de enrijecedores transversais (N_{ts}) e da fração volumétrica (ϕ) do caso analisado;
- definição, geração da geometria e condições de contorno (forças externas e restrição dos deslocamentos) do modelo no MAPDL de placas com enrijecedores, considerando tamanho de malha, material, e tipo de carregamento de flambagem (uniaxial ou biaxial);
- geração dos resultados de flambagem elástica com o MAPDL: N_{cr} e σ_{cr} ;

- geração dos resultados de flambagem elasto-plástica com o MAPDL: N_u , σ_u , w_{max} , distribuição de tensão de von Mises e distribuição de deslocamentos transversais.

Todas as etapas fazem persistência dos dados gerados em Banco de Dados Relacional MariaDB, e as etapas que envolvem interação com o MAPDL não necessitam de interação com a GUI.

3.3.2 Visão Geral da Arquitetura

A visão geral da arquitetura desenvolvida consiste de uma API REST, desenvolvida com DRF na versão 3.15.2, que se comunica com o Ansys Mechanical APDL através do protocolo gRPC para envio/retorno de dados de análise e posterior persistência em banco de dados relacional, sendo tanto a API REST, quanto o Banco de Dados, hospedados em contêineres como pode-se ver na Figura 3.12.

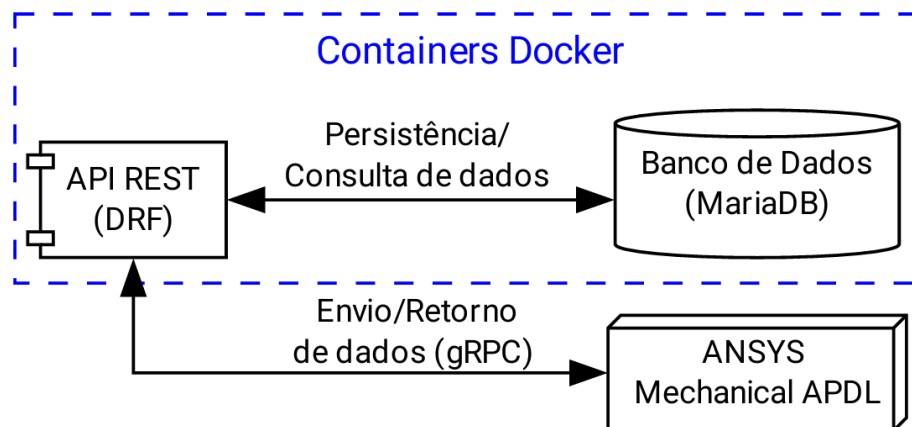


Figura 3.12: Visão geral da arquitetura.

Esta arquitetura permite uma abordagem integrada, onde os resultados são persistidos em banco de dados via API e a recuperação futura destes dados é realizada de forma bastante simples, através de consultas também disponibilizadas via API. Isso abstrai a complexidade do banco de dados, permitindo que um usuário que não possua conhecimento de banco de dados recupere as informações mediante ao consumo da API.

3.3.3 Fluxo geral de processamento

O fluxo geral de processamento consiste da interação entre os componentes internos da API REST desenvolvida, que recebem, validam, serializam e enviam dados para o MAPDL realizar análises de elementos finitos, como também recebem a resposta do

MAPDL e persistem os resultados no banco de dados (BD).

O processo começa com um cliente HTTP enviando uma requisição para a API, a qual é interpretada e validada pelo componente *ViewSet*. Este componente desempenha o papel de interface inicial, extraíndo e validando as informações do corpo da requisição HTTP antes de encaminhá-las para as próximas etapas de processamento.

Após a validação, os dados são enviados ao *Serializer*, que orquestra as chamadas para a camada de serviço (*Service*). O *Serializer* é responsável por transformar os dados recebidos em estruturas adequadas para o processamento interno e para o retorno ao cliente HTTP. Além disso, ele aciona fluxos específicos de criação de registros e cálculos, delegando essas operações à camada de serviço.

A camada de serviço, por sua vez, interage diretamente com componentes externos principais: o MAPDL e o banco de dados (BD). Utilizando comunicação via gRPC, a *Service* envia dados para o MAPDL realizar a análise de elementos finitos, que consiste da geração de geometria, discretização do modelo, aplicação de condições de contorno e o processamento da solução. A partir do retorno do MAPDL, a aplicação se conecta ao BD via conexão TCP, os resultados gerados são então salvos em tabelas específicas, e o objeto de retorno do processamento é montado pelo *Serializer*, retornado a camada de *ViewSet* e então enviado para o cliente HTTP como resposta a sua requisição. O fluxo descrito é apresentado na Figura 3.13.

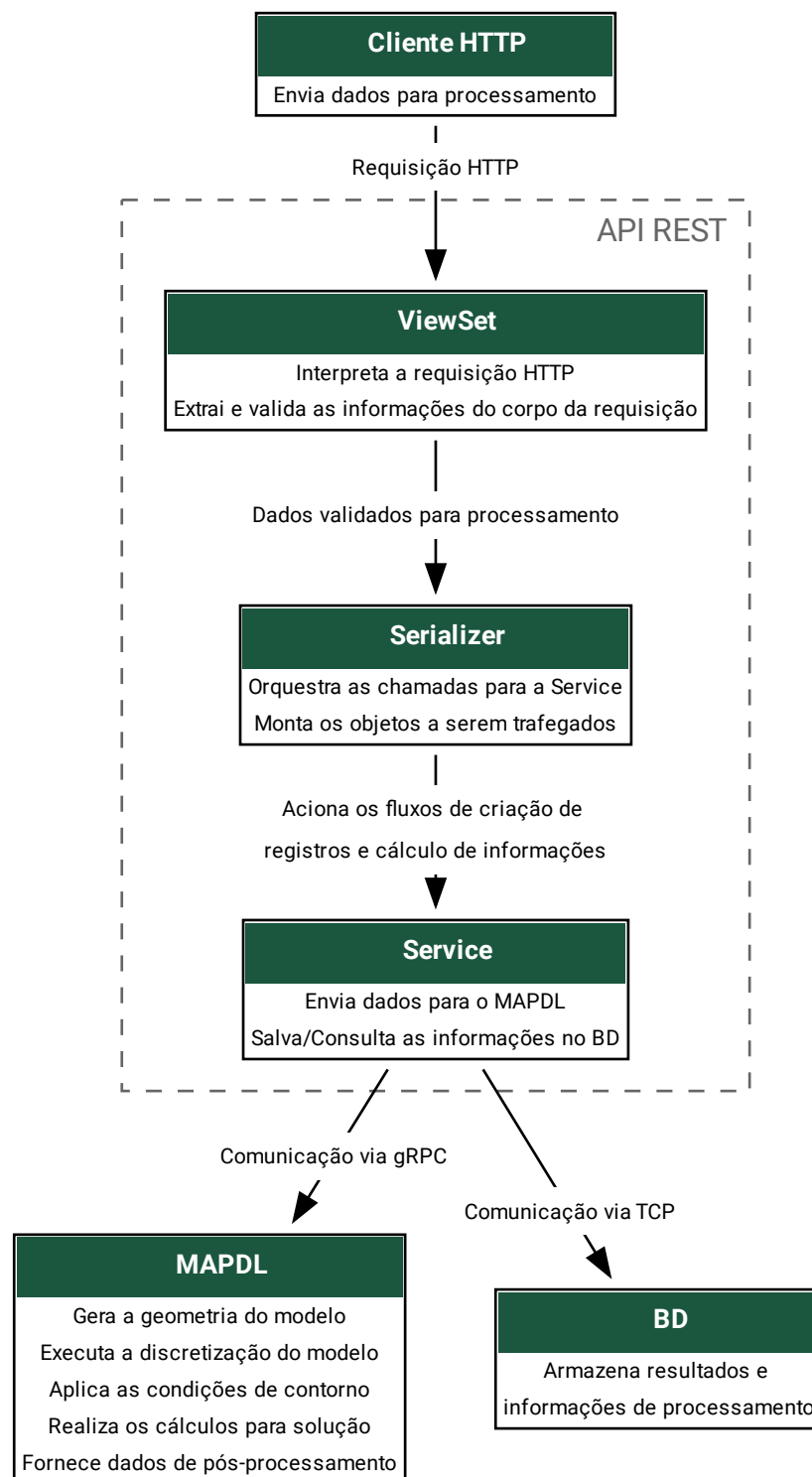


Figura 3.13: Diagrama do fluxo de dados na API REST.

3.3.4 Estrutura do Banco de Dados

O Banco de Dados utilizado neste trabalho foi o MariaDB na versão 10.5 (ver item 2.6.2). A escolha pela utilização de um banco de dados relacional surgiu pela necessidade de armazenamento de dados dos resultados das análises de simulação numérica de uma forma estruturada, para além de todas as otimizações de performance inerentes que o banco de dados MariaDB possibilita.

A modelagem do banco de dados foi pensada para atender às necessidades dos fluxos de modelagem do presente trabalho. Assim sendo, foram definidas as entidades, que armazenam as seguintes informações:

- *Plate*: Informações das placas de referência (sem enrijecedores);
- *StiffenedPlate*: Informações das placas com enrijecedores;
- *StiffenedPlateAnalysis*: Informações de análises de flambagem;
- *ElasticBuckling*: Resultados de análises de flambagem elástica;
- *ElastoPlasticBuckling*: Resultados de análises de flambagem elasto-plástica;
- *Material*: Material utilizado na análise;
- *BucklingLoadType*: Tipo de carregamento de flambagem;
- *ProcessingStatus*: Status de processamento da análise.

O diagrama Entidade-Relacionamento (ER) da modelagem do banco de dados do presente trabalho é apresentado na Figura 3.14. Os campos com a indicação *ForeignKey* mostram a presença de uma chave estrangeira na tabela, que faz referência às tabelas que estão conectadas por linhas com um ponto no diagrama. A tipagem dos campos indicada na Figura 3.14 significa:

- *BigAutoField*: Campo numérico inteiro, podendo ser positivo ou negativo;
- *PositiveIntegerField*: Campo numérico inteiro estritamente positivo;
- *DecimalField*: Campo numérico decimal;
- *TextField*: Campo textual.

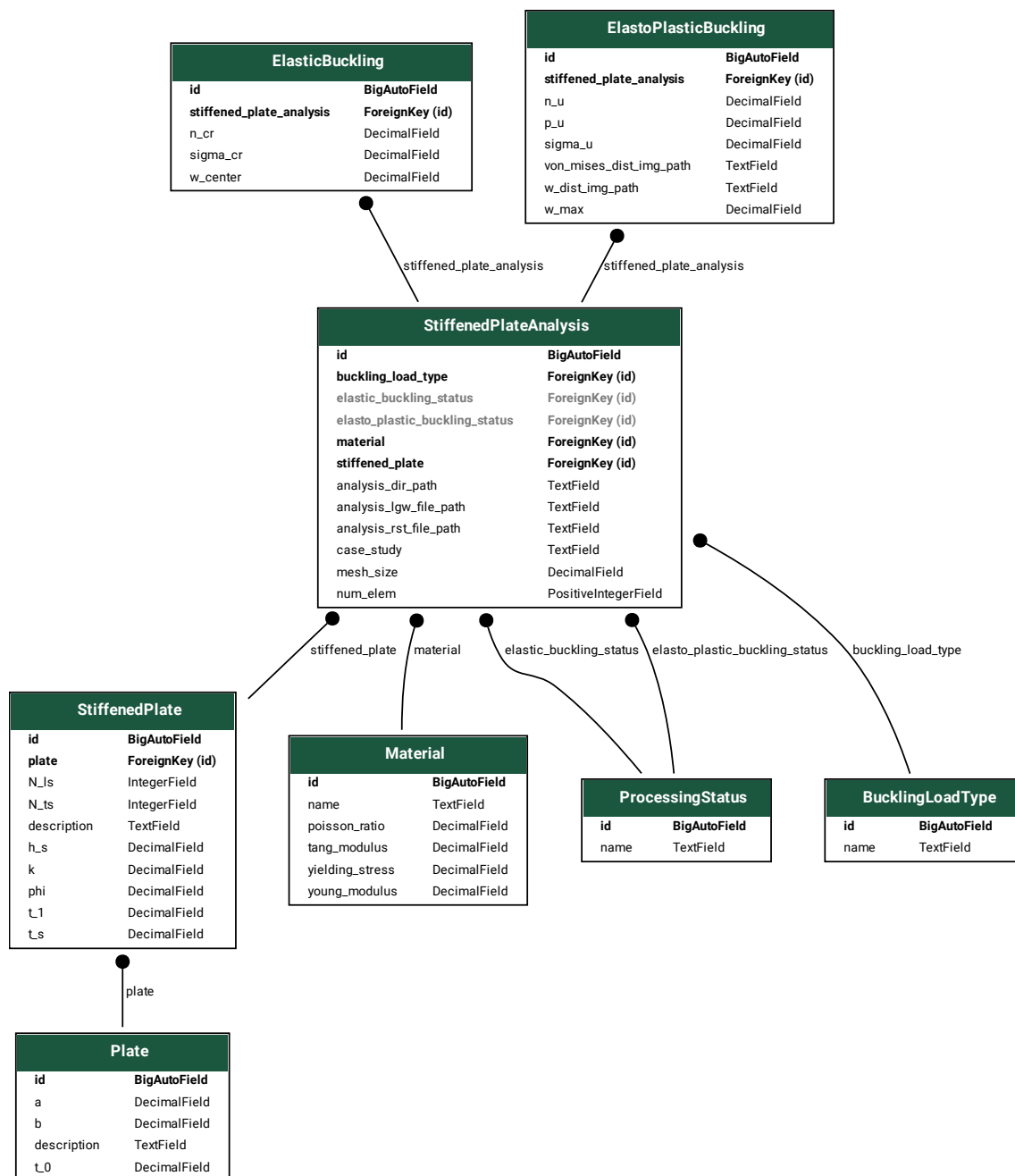


Figura 3.14: Diagrama Entidade-Relacionamento do Banco de Dados.

3.3.4.1 Tabela Plate

A tabela *Plate* armazena as informações de placas sem enrijecedores (como a placa de referência). Sua finalidade é dar suporte a tabela *StiffenedPlate* no cálculo das dimensões dos enrijecedores e da espessura corrigida da placa com enrijecedores. Os atributos da tabela *Plate* são apresentados na Tabela 3.5.

Tabela 3.5: Estrutura da Tabela *Plate*

Nome da Coluna	Tipo de Dado	Restrição	Descrição
id	BigAutoField	Not Null	Identificador único da tabela
a	DecimalField	Not Null	Comprimento da placa
b	DecimalField	-	Largura da placa
t_0	DecimalField	Not Null	Espessura original da placa
description	TextField	Not Null	Descrição do Estudo de Caso

3.3.4.2 Tabela *StiffenedPlate*

A tabela *StiffenedPlate* armazena as informações das placas com enrijecedores. Sua finalidade é prover para a tabela *StiffenedPlateAnalysis* as dimensões da geometria que serão utilizadas na geração do modelo computacional no MAPDL. Os campos da tabela *StiffenedPlate* podem ser vistos na Tabela 3.6.

Tabela 3.6: Estrutura da tabela *StiffenedPlate*

Nome da Coluna	Tipo de Dado	Restrição	Descrição
id	BigAutoField	Not Null	Identificador único da tabela
phi	DecimalField	Not Null	Fração volumétrica
N_ls	IntegerField	Not Null	Número de enrijecedores longitudinais
N_ts	IntegerField	Not Null	Número de enrijecedores transversais
h_s	DecimalField	-	Altura do enrijecedor
t_s	DecimalField	-	Espessura do enrijecedor
k	DecimalField	NotNull	Relação de lados do enrijecedor
t_1	DecimalField	-	Espessura corrigida da placa
description	TextField	-	Descrição do Estudo de Caso
plate	ForeignKey (id)	-	Referência à tabela <i>Plate</i>

3.3.4.3 Tabela *StiffenedPlateAnalysis*

A tabela *StiffenedPlateAnalysis* armazena as informações de geração e execução dos passos do modelo computacional do MAPDL. Sua finalidade é relacionar a geometria (*StiffenedPlate*) com o diretório de arquivos do Banco de Dados do MAPDL, e para servir de referência para as tabelas *ElasticBuckling* e *ElastoPlasticBuckling*. Os campos da tabela *StiffenedPlateAnalysis* podem ser vistos na Tabela 3.7.

Tabela 3.7: Estrutura da tabela *StiffenedPlateAnalysis*

Nome da Coluna	Tipo de Dado	Restrição	Descrição
id	BigAutoField	Not Null	Identificador único da tabela
case_study	TextField	Not Null	Nome do Estudo de Caso (diretório base onde ficam salvos os arquivos)
buckling_load_type	ForeignKey (id)	Not Null	Tipo de carregamento de flambagem
mesh_size	DecimalField	Not Null	Tamanho da malha
material	ForeignKey (id)	Not Null	Material utilizado na análise
stiffened_plate	ForeignKey (id)	Not Null	Referência à tabela <i>StiffenedPlate</i>
analysis_dir_path	TextField	-	Caminho para o diretório de análise
analysis_lgw_file_path	TextField	-	Caminho para o arquivo LGW
analysis_rst_file_path	TextField	-	Caminho para o arquivo RST
num_elem	PositiveIntegerField	-	Número de elementos
elastic_buckling_status	ForeignKey (id)	-	Status da análise de flambagem elástica
elasto_plastic_buckling_status	ForeignKey (id)	-	Status da análise de flambagem elasto-plástica

3.3.4.4 Tabela ElasticBuckling

A tabela *ElasticBuckling* armazena os resultados da análise de flambagem elástica. Os campos da tabela *StiffenedPlateAnalysis* podem ser vistos na Tabela 3.8.

Tabela 3.8: Estrutura da Tabela *ElasticBuckling*

Nome da Coluna	Tipo de Dado	Restrição	Descrição
id	BigAutoField	Not Null	Identificador único da tabela
stiffened_plate_analysis	ForeignKey (id)	Not Null	Referência à tabela <i>StiffenedPlateAnalysis</i>
n_cr	DecimalField	-	Carga crítica de flambagem
sigma_cr	DecimalField	-	Tensão crítica de flambagem
w_center	DecimalField	-	Deflexão no centro da placa

3.3.4.5 Tabela ElastoPlasticBuckling

A tabela *ElastoPlasticBuckling* armazena as informações relacionadas aos resultados da análise de flambagem elasto-plástica. Estes valores são utilizados para desenvolvimento do Estudo de Caso de Design Construtal do presente trabalho. Os campos da tabela *ElastoPlasticBuckling* podem ser vistos na Tabela 3.9.

Tabela 3.9: Estrutura da Tabela *ElastoPlasticBuckling*

Nome da Coluna	Tipo de Dado	Restrição	Descrição
id	BigAutoField	Not Null	Identificador único da tabela
stiffened_plate_analysis	ForeignKey (id)	Not Null	Referência à análise de placa com enrijecedores
n_u	DecimalField	-	Força normal última
p_u	DecimalField	-	Carga última
sigma_u	DecimalField	-	Tensão última de flambagem
von_mises_dist_img_path	TextField	-	Caminho para a imagem de distribuição de von Mises
w_dist_img_path	TextField	-	Caminho para a imagem da distribuição de deflexão
w_max	DecimalField	-	Valor máximo de deflexão

3.3.4.6 Tabela Material

A tabela *Material* armazena informações de materiais utilizados nas análises. Os campos da tabela *Material* podem ser vistos na Tabela 3.10.

Tabela 3.10: Estrutura da tabela *Material*

Nome da Coluna	Tipo de Dado	Restrição	Descrição
id	BigAutoField	-	Identificador único da tabela
name	TextField	-	Nome do material
young_modulus	DecimalField	-	Módulo de elasticidade
poisson_ratio	DecimalField	-	Coeficiente de Poisson
yielding_stress	DecimalField	-	Tensão de escoamento
tang_modulus	DecimalField	-	Módulo tangente

3.3.4.7 Tabela ProcessingStatus

A tabela *ProcessingStatus* é uma tabela de domínio que armazena códigos que correspondem aos status de processamento das análises. Os campos da tabela *ProcessingStatus* podem ser vistos na Tabela 3.11.

Tabela 3.11: Estrutura da tabela *ProcessingStatus*

Nome da Coluna	Tipo de Dado	Restrição	Descrição
id	BigAutoField	-	Identificador único da tabela
name	TextField	-	Nome do status de processamento

O status de processamento diz se a execução da análise em questão (flambagem elástica ou elasto-plástica) foi executada com sucesso ou se houve algum tipo de erro. A partir deste campo é possível fazer consultas no banco de dados para avaliar se existe a necessidade de reprocessar algum caso, por conta de eventuais erros.

3.3.4.8 Tabela BucklingLoadType

A tabela *Tabela BucklingLoadType* é uma tabela de domínio que armazena códigos que correspondem aos tipos de carregamento de flambagem passíveis de serem aplicados. Os campos da tabela *BucklingLoadType* podem ser vistos na Tabela 3.12.

Tabela 3.12: Estrutura da tabela *BucklingLoadType*

Nome da Coluna	Tipo Dado	de Restrição	Descrição
id	BigAutoField	-	Identificador único da tabela
name	TextField	-	Nome do tipo de carregamento de flambagem

3.3.5 Recursos (Endpoints) da API REST

A implementação concreta das funcionalidades descritas no item 3.3.1 foi gerada na forma de recursos de API REST. Para facilitar a compreensão de como utilizar a API, foi construída a documentação *Swagger* da API, que apresenta como os recursos devem ser chamados, isto é, como os parâmetros (*Parameters*) devem ser passados para acessar cada recurso, e como será a resposta deste recurso caso a requisição seja processada corretamente. De acordo com Swagger (2024), dentro da documentação *Swagger*, alguns termos são frequentemente mencionados, e merecem explicação, a saber:

- Corpo da requisição (*body*): Objeto que deve ser passado quando da chamada ao recurso, com informações necessárias ao correto processamento da requisição;
- Parâmetros da requisição (*path*): Parâmetros que devem ser passados através de variáveis de rota (*Path variables*), para acesso ou interação com um recurso específico;
- Corpo da resposta (*Response Body*): Objeto que será retornado como resposta da requisição.

3.3.5.1 Criação, Listagem, Detalhe, Edição e Deleção de Placas sem Enrijecedores

O início do fluxo de utilização da API REST desenvolvida consiste da criação de um registro na Tabela *Plate* (ver item 3.3.4.1), para representar a placa de referência (sem enrijecedores) do cenário analisado. Assim sendo, foram desenvolvidos recursos de criação, leitura, edição e remoção de Placas sem Enrijecedores no Banco de Dados. A Tabela 3.13 apresenta um resumo dos recursos implementados na API REST para acesso e manipulação das informações da Tabela *Plate*.

Tabela 3.13: Endpoints para a tabela *Plate*

Endpoint	Método HTTP	Finalidade
/plates/	POST	Criar um registro da tabela <i>Plate</i>
/plates/	GET	Listar todos os registros da tabela <i>Plate</i>
/plates/{id}	GET	Detalhar um registro específico da tabela <i>Plate</i>
/plates/{id}	PUT	Editar um registro específico da tabela <i>Plate</i>
/plates/{id}	DELETE	Excluir um registro específico da tabela <i>Plate</i>

Os registros da Tabela *Plate* são utilizados tanto como referência para a geração dos registros da Tabela *StiffenedPlate*, quanto para geração dos dados de análise do MAPDL (Tabela *StiffenedPlateAnalysis*) e obtenção dos resultados de flambagem elástica (Tabela *ElasticBuckling*) e elasto-plástica (Tabela *ElastoPlasticBuckling*) para os casos de referência (sem enrijecedores). As Figuras 3.15 a 3.19 trazem o detalhamento dos recursos da API REST desenvolvida para a Tabela *StiffenedPlate*.

The screenshot shows a REST client interface for the POST endpoint `/plates/`. The request body is a JSON object with the following structure:

```
{
  "a": "2000.00",
  "b": "1000.00",
  "t_0": "20.00",
  "description": "Verificação - Modelo NS2A"
}
```

The response shows a 201 status code with a JSON object containing an 'id' field:

```
{
  "id": 1,
  "a": "2000.00",
  "b": "1000.00",
  "t_0": "20.00",
  "description": "Verificação - Modelo NS2A"
}
```

Figura 3.15: Tabela *Plate* - Recurso de Criação de um registro.

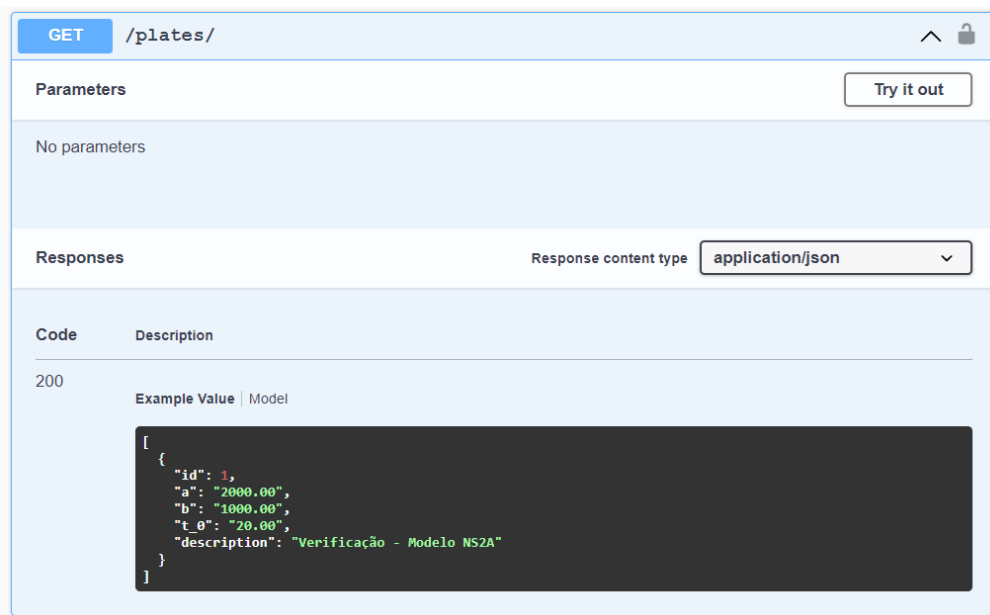


Figura 3.16: Tabela Plate - Recurso de Listagem.

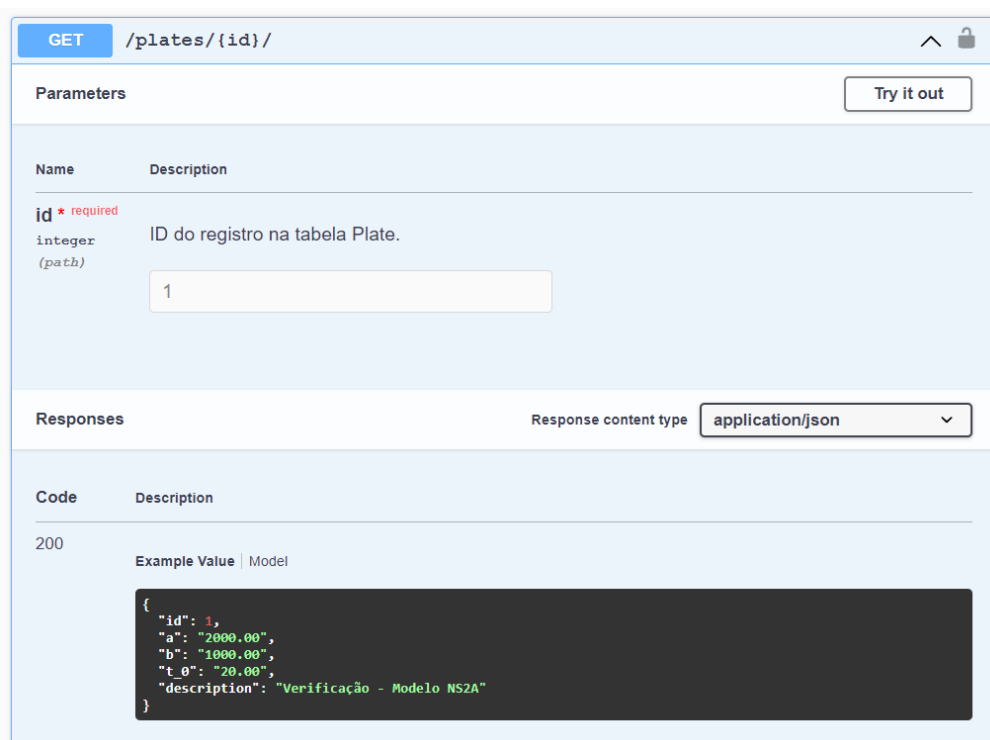


Figura 3.17: Tabela Plate - Recurso de Detalhe de um registro.

PUT /plates/{id}/

Parameters Try it out

Name	Description
data * required object (body)	Example Value Model <pre>{ "a": "2000.00", "b": "1000.00", "t_0": "20.00", "description": "Verificação - Modelo NS2A" }</pre> Parameter content type application/json
id * required integer (path)	ID do registro na tabela Plate. 1

Responses Response content type application/json

Code	Description
200	Example Value Model <pre>{ "id": 1, "a": "2000.00", "b": "1000.00", "t_0": "20.00", "description": "Verificação - Modelo NS2A" }</pre>

Figura 3.18: Tabela Plate - Recurso de Edição de um registro.

DELETE /plates/{id}/

Parameters Try it out

Name	Description
id * required integer (path)	ID do registro na tabela Plate. 1

Responses Response content type application/json

Code	Description
204	

Figura 3.19: Tabela Plate - Recurso de Deleção de um registro.

3.3.5.2 Criação, Listagem, Detalhe, Edição e Deleção de Placas com Enrijecedores

Após a geração dos registros das placas sem enrijecedores (Tabela *Plate*), o próximo passo é a criação dos registros das placas com enrijecedores da Tabela *StiffenedPlate*, que usa como referência uma placa sem enrijecedores, a partir da qual uma parte de seu volume é extraída para ser convertida em enrijecedores, cujas dimensões h_s e t_s são determinadas em função dos parâmetros ϕ , N_{ls} , N_{ts} e k , através da relação da fração volumétrica ϕ definida no item 3.4.1.1. A Tabela 3.14 apresenta um resumo dos recursos implementados na API REST para acesso e manipulação das informações da Tabela *StiffenedPlate*.

Tabela 3.14: Endpoints para a tabela *StiffenedPlate*

Endpoint	Método HTTP	Finalidade
<code>/stiffened-plates/</code>	POST	Criar um registro da tabela <i>StiffenedPlate</i>
<code>/stiffened-plates/</code>	GET	Listar todos os registros da tabela <i>StiffenedPlate</i>
<code>/stiffened-plates/{id}</code>	GET	Detalhar um registro da tabela <i>StiffenedPlate</i>
<code>/stiffened-plates/{id}</code>	PUT	Editar um registro da tabela <i>StiffenedPlate</i>
<code>/stiffened-plates/{id}</code>	DELETE	Excluir um registro da tabela <i>StiffenedPlate</i>

Os registros da Tabela *StiffenedPlate* são utilizados para a geração dos casos de análise (Tabela *StiffenedPlateAnalysis*) e obtenção dos resultados de flambagem elástica (Tabela *ElasticBuckling*) e elasto-plástica (Tabela *ElastoPlasticBuckling*) para as placas com enrijecedores. As Figuras 3.20 a 3.24 trazem o detalhamento dos recursos da API REST desenvolvida para a Tabela *StiffenedPlate*.

POST /stiffened-plates/ Try it out

Parameters

Name	Description
data * required object (body)	Example Value Model <pre>{ "phi": "0.3", "N_ls": 2, "N_ts": 2, "k": "6.333", "description": "Verificação Modelo NS2A", "plate": 1 }</pre> Parameter content type application/json

Responses

Response content type application/json

Code	Description
201	Example Value Model <pre>{ "id": 1, "phi": "0.3", "N_ls": 2, "N_ts": 2, "k": "6.333", "t_1": "9.8", "h_s": "54", "t_s": "20", "description": "Verificação Modelo NS2A", "plate": 1 }</pre>

Figura 3.20: Tabela StiffenedPlate - Recurso de Criação de um registro.

GET /stiffened-plates/ Try it out

Parameters

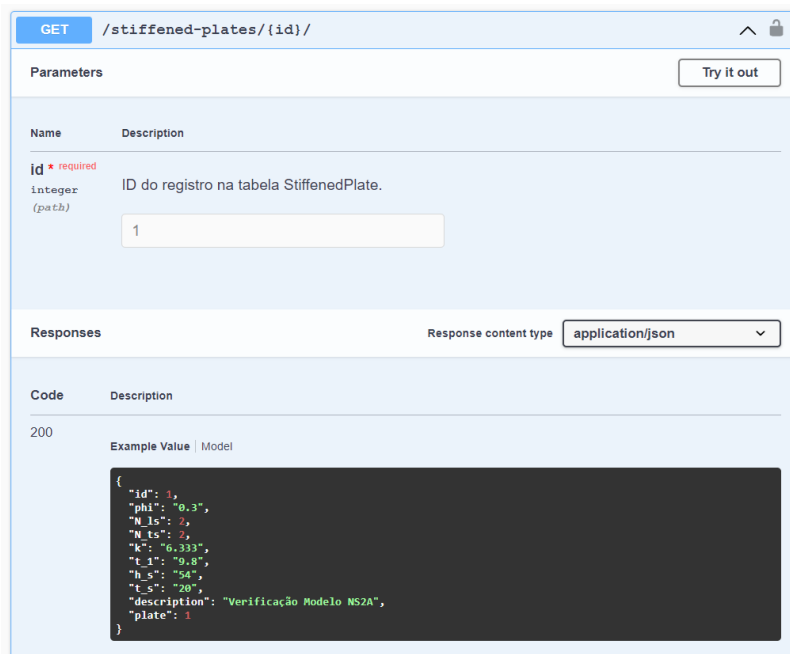
No parameters

Responses

Response content type application/json

Code	Description
200	Example Value Model <pre>[{ "id": 1, "phi": "0.3", "N_ls": 2, "N_ts": 2, "k": "6.333", "t_1": "9.8", "h_s": "54", "t_s": "20", "description": "Verificação Modelo NS2A", "plate": 1 }]</pre>

Figura 3.21: Tabela StiffenedPlate - Recurso de Listagem.



GET /stiffened-plates/{id}/

Parameters

Name	Description
id * required integer (path)	ID do registro na tabela StiffenedPlate.

1

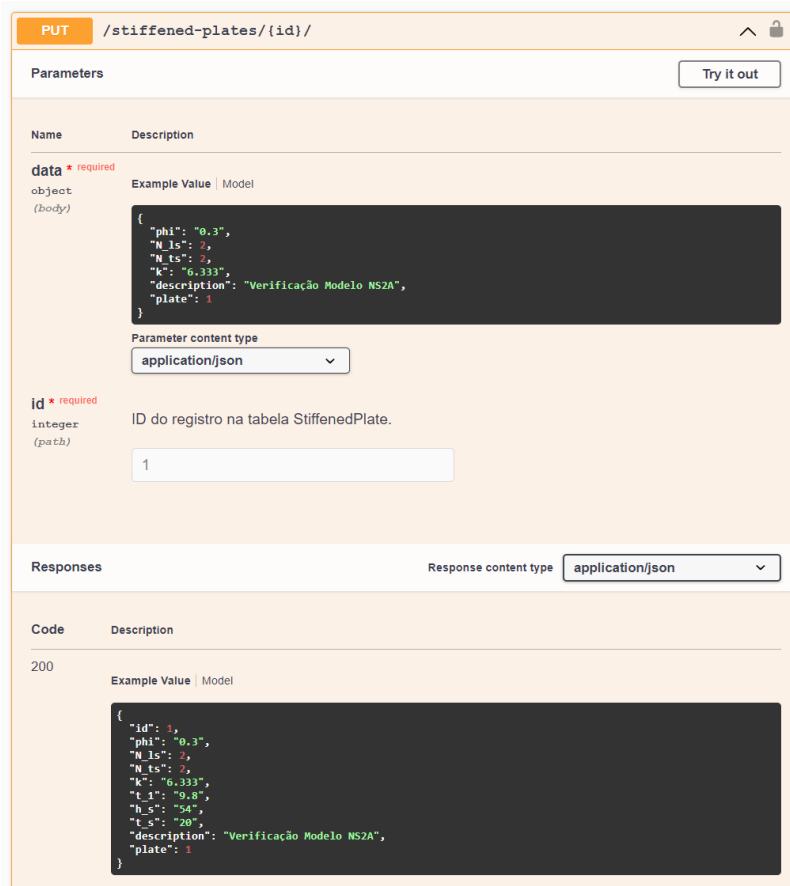
Responses

Response content type: application/json

Code	Description
200	Example Value Model

```
{
  "id": 1,
  "phi": "0.3",
  "N_ls": 2,
  "N_ts": 2,
  "K": "6.333",
  "t_1": "9.8",
  "h_s": "54",
  "t_s": "20",
  "description": "Verificação Modelo NS2A",
  "plate": 1
}
```

Figura 3.22: Tabela StiffenedPlate - Recurso de Detalhe de um registro.



PUT /stiffened-plates/{id}/

Parameters

Try it out

Name	Description
data * required object (body)	Example Value Model

```
{
  "phi": "0.3",
  "N_ls": 2,
  "N_ts": 2,
  "K": "6.333",
  "description": "Verificação Modelo NS2A",
  "plate": 1
}
```

Parameter content type: application/json

Name	Description
id * required integer (path)	ID do registro na tabela StiffenedPlate.

1

Responses

Response content type: application/json

Code	Description
200	Example Value Model

```
{
  "id": 1,
  "phi": "0.3",
  "N_ls": 2,
  "N_ts": 2,
  "K": "6.333",
  "t_1": "9.8",
  "h_s": "54",
  "t_s": "20",
  "description": "Verificação Modelo NS2A",
  "plate": 1
}
```

Figura 3.23: Tabela StiffenedPlate - Recurso de Edição de um registro.

The screenshot shows a REST client interface for a DELETE request to the endpoint `/stiffened-plates/{id}/`. The interface includes a 'Parameters' section with a table listing the required parameter `id` (integer, path) with the value `1`. The 'Responses' section shows a response with status code `204` and content type `application/json`.

Figura 3.24: Tabela *StiffenedPlate* - Recurso de Deleção de um registro.

3.3.5.3 Criação, Listagem e Detalhe de Análises de Placas com Enrijecedores

A partir da definição de uma placa com enrijecedores (registro na Tabela *StiffenedPlate*), em conjunto com informações como tipo de material (registro da Tabela *Material*), tipo de flambagem (valor de domínio da Tabela *BucklingLoadType*), o nome do estudo de caso e o tamanho de malha, é possível gerar uma análise de placas com enrijecedores (registro na Tabela *StiffenedPlateAnalysis*), que consiste das informações de referência para o modelo de elementos finitos gerado no MAPDL. A API consulta as informações da geometria presentes no Banco de Dados e usa estas informações para geração do modelo no MAPDL. A Tabela 3.15 apresenta um resumo dos recursos implementados na API REST para acesso e manipulação das informações da Tabela *StiffenedPlateAnalysis*.

Tabela 3.15: Endpoints para a tabela *StiffenedPlateAnalysis*

Endpoint	Método HTTP	Finalidade
<code>/stiffened-plate-analysis/</code>	POST	Criar um registro da tabela <i>StiffenedPlateAnalysis</i>
<code>/stiffened-plate-analysis/</code>	GET	Listar todos os registros da tabela <i>StiffenedPlateAnalysis</i>
<code>/stiffened-plate-analysis/{id}</code>	GET	Detalhar um registro específico da tabela <i>StiffenedPlateAnalysis</i>

Os registros da Tabela *StiffenedPlateAnalysis* são utilizados para armazenar a re-

ferência para o modelo computacional do caso analisado no MAPDL, sendo armazenadas também informações referentes ao status de processamento (valor de domínio da Tabela *ProcessingStatus*) para as análises de flambagem elástica e elasto-plástica.

Além disso, durante o tempo de processamento da requisição de criação de um registro da Tabela *StiffenedPlateAnalysis*, são executadas as etapas de geração de geometria, criação e aplicação da malha, aplicação das condições de contorno (cargas e restrições de deslocamento) no modelo no MAPDL, onde o modelo é salvo e preparado para receber a requisição para execução da solução para flambagem elástica (criação de registro na Tabela *ElasticBuckling*). As Figuras 3.25 a 3.27 trazem o detalhamento dos recursos da API REST desenvolvida para a Tabela *StiffenedPlateAnalysis*.

POST /stiffened-plate-analysis/ Try it out

Parameters

Name	Description
data ★ required	Example Value Model
object (body)	<pre>{ "mesh_size": "25", "case_study": "verificacao-modelo-ns2a", "material": 1, "stiffened_plate": 1, "buckling_load_type": 2 }</pre>
Parameter content type	application/json

Responses Response content type: application/json

Code	Description
201	Example Value Model
	<pre>{ "id": 1, "mesh_size": "25", "num_elem": 3200, "case_study": "verificacao-modelo-ns2a", "analysis_dir_path": "D:/constructal_automate_analysis_files/verificacao-modelo-ns2a/BL2M1P0.3L2T2_k6.33_MS25_SP1", "analysis_rst_file_path": "D:/constructal_automate_analysis_files/verificacao-modelo-ns2a/BL2M1P0.3L2T2_k6.333_MS25_SP1/BL2M1P0.3L2T2_k6.333_MS25_SP1.rst", "analysis_lgw_file_path": "D:/constructal_automate_analysis_files/verificacao-modelo-ns2a/BL2M1P0.3L2T2_k6.333_MS25_SP1/BL2M1P0.3L2T2_k6.333_MS25_SP1.txt", "material": 1, "stiffened_plate": 1, "buckling_load_type": 2, "elastic_buckling_status": 1, "elasto_plastic_buckling_status": 1 }</pre>

Figura 3.25: Tabela *StiffenedPlateAnalysis* - Recurso de Criação de um registro.

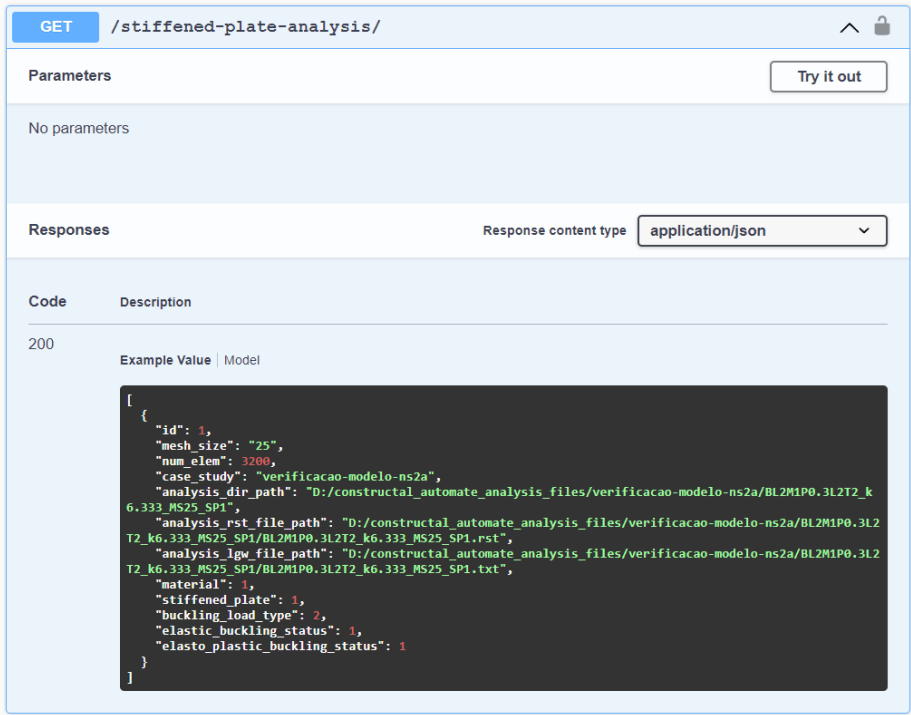


Figura 3.26: Tabela StiffenedPlateAnalysis - Recurso de Listagem.

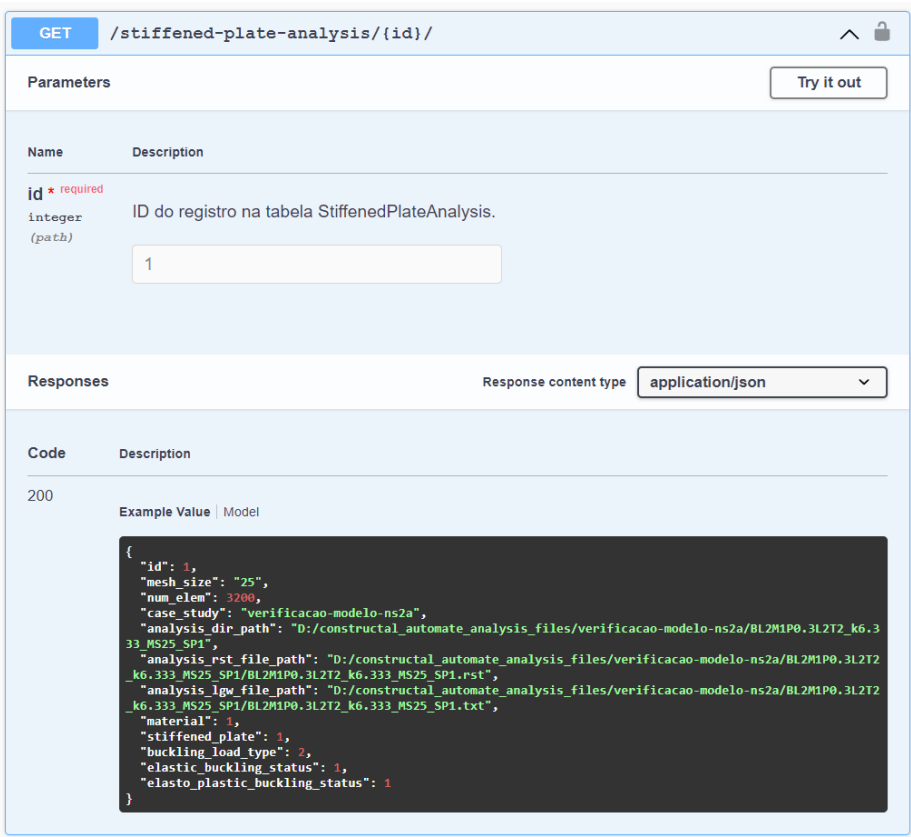


Figura 3.27: Tabela StiffenedPlateAnalysis - Recurso de Detalhe de um registro.

3.3.5.4 Criação, Listagem e Detalhe de Resultados de Flambagem Elástica

Uma vez gerado o registro na Tabela *StiffenedPlateAnalysis*, é possível criar um registro para a Tabela *ElasticBuckling*. A Tabela 3.16 apresenta um resumo dos recursos da API REST para acesso e manipulação das informações da Tabela *ElasticBuckling*.

Tabela 3.16: Endpoints para a tabela *ElasticBuckling*

Endpoint	Método HTTP	Finalidade
/elastic-buckling/	POST	Criar um registro da tabela <i>ElasticBuckling</i>
/elastic-buckling/	GET	Listar os registros da tabela <i>ElasticBuckling</i>
/elastic-buckling/{id}	GET	Detalhar um registro da tabela <i>ElasticBuckling</i>

Durante o processamento da requisição de criação do registro na Tabela *ElasticBuckling*, o MAPDL executa a análise estática de pequenos deslocamentos que obtém a configuração deformada para o primeiro modo de flambagem, a partir do qual se extraem os valores de carga crítica N_{cr} , w_{center} e σ_{cr} . As Figuras 3.28 a 3.30 trazem o detalhamento dos recursos da API REST desenvolvida para a Tabela *ElasticBuckling*.

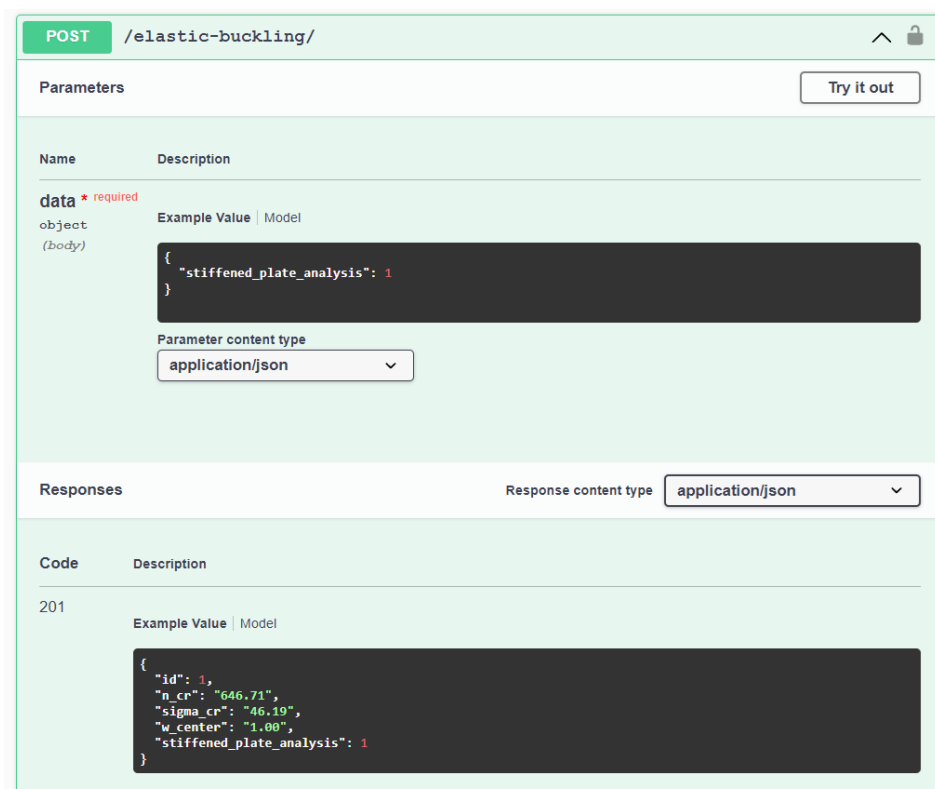


Figura 3.28: Tabela *ElasticBuckling* - Recurso de Criação de um registro.

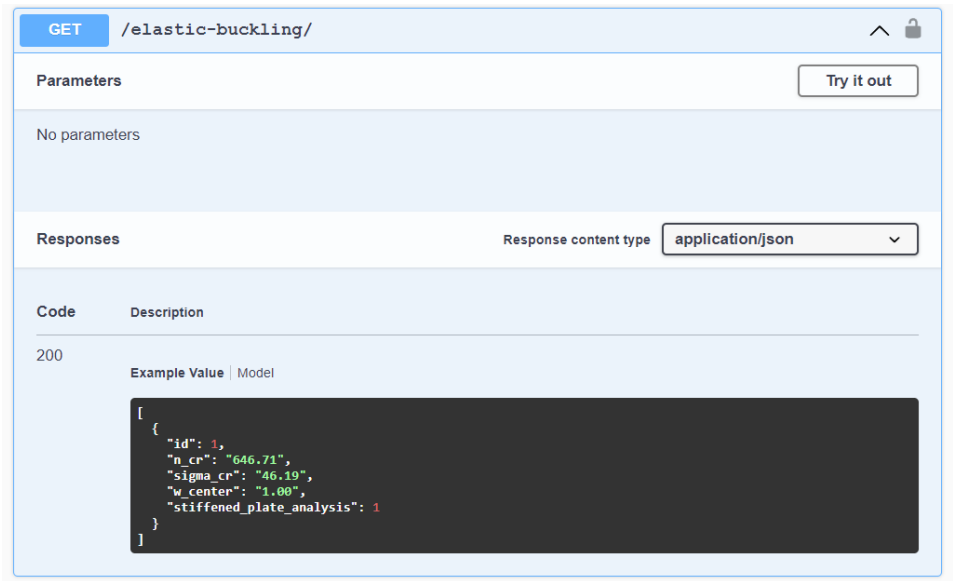


Figura 3.29: Tabela ElasticBuckling - Recurso de Listagem.

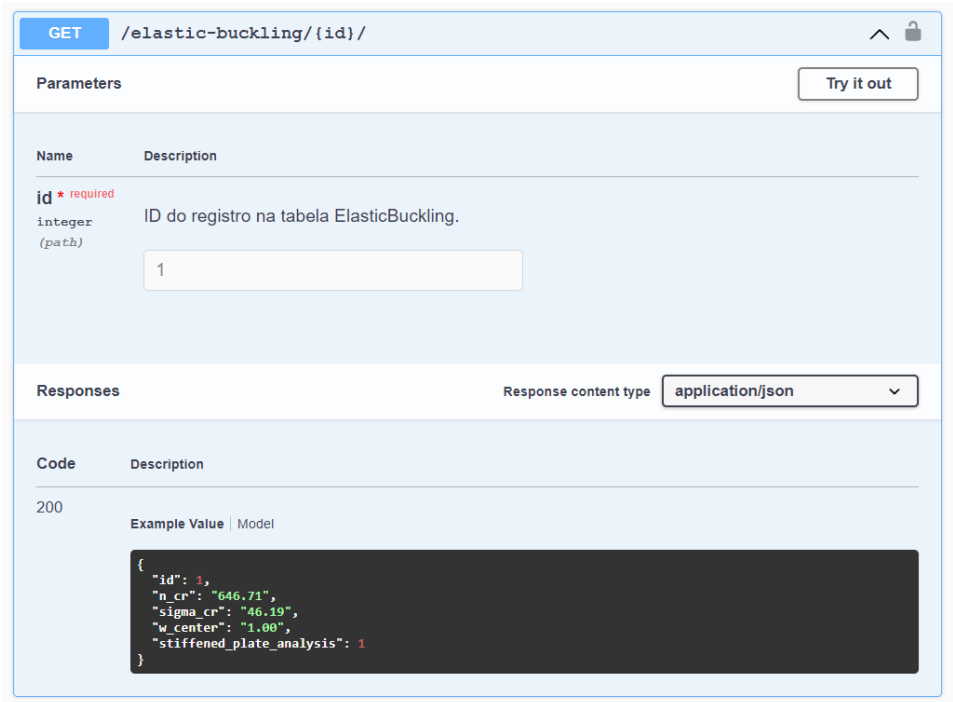


Figura 3.30: Tabela ElasticBuckling - Recurso de Detalhe de um registro.

3.3.5.5 Criação, Listagem e Detalhe de Resultados de Flambagem Elasto-Plástica

A partir da configuração deformada gerada pela análise de flambagem elástica, é possível realizar a análise elasto-plástica (criar registros na Tabela *ElastoPlasticBuckling*). A Tabela 3.17 apresenta um resumo dos recursos implementados na API REST para acesso e manipulação das informações da Tabela *ElastoPlasticBuckling*.

Tabela 3.17: Endpoints para a tabela *ElastoPlasticBuckling*

Endpoint	Método HTTP	Finalidade
/elasto-plastic-buckling/	POST	Criar um registro da tabela <i>ElastoPlasticBuckling</i>
/elasto-plastic-buckling/	GET	Listar todos os registros da tabela <i>ElastoPlasticBuckling</i>
/elasto-plastic-buckling/{id}	GET	Detalhar um registro específico da tabela <i>ElastoPlasticBuckling</i>

Durante o processamento da requisição de criação do registro na Tabela *ElastoPlasticBuckling*, o MAPDL executa a análise estática de grandes deslocamentos que gera a condição de flambagem elasto-plástica, a partir da qual se extraem os valores de carga última N_u , w_{max} e σ_u , a distribuição de tensão de von Mises e a distribuição de deflexão transversal. As Figuras 3.31 a 3.33 trazem o detalhamento dos recursos da API REST desenvolvida para a Tabela *ElastoPlasticBuckling*.

POST /elasto-plastic-buckling/ Try it out

Parameters

Name	Description
data * required	
object (body)	Example Value Model <pre>{ "stiffened_plate_analysis": 1 }</pre>

Parameter content type: application/json

Responses Response content type: application/json

Code	Description
201	Example Value Model <pre>{ "id": 1, "p_u": "4970", "n_u": "835.58", "sigma_u": "59.68", "w_max": "38.0533", "w_dist_img_path": "D:/constructual_automate_analysis_files/verificacao-modelo-ns2a/BL2M1P0.3L2T2_k6.333_MS25_SP1/BL2M1P0.3L2T2_k6.333_MS25_SP1_w_dist.png", "von_mises_dist_img_path": "D:/constructual_automate_analysis_files/verificacao-modelo-ns2a/BL2M1P0.3L2T2_k6.333_MS25_SP1/BL2M1P0.3L2T2_k6.333_MS25_SP1_von_mises_dist.png", "stiffened_plate_analysis": 1 }</pre>

Figura 3.31: Tabela *ElastoPlasticBuckling* - Recurso de Criação de um registro.

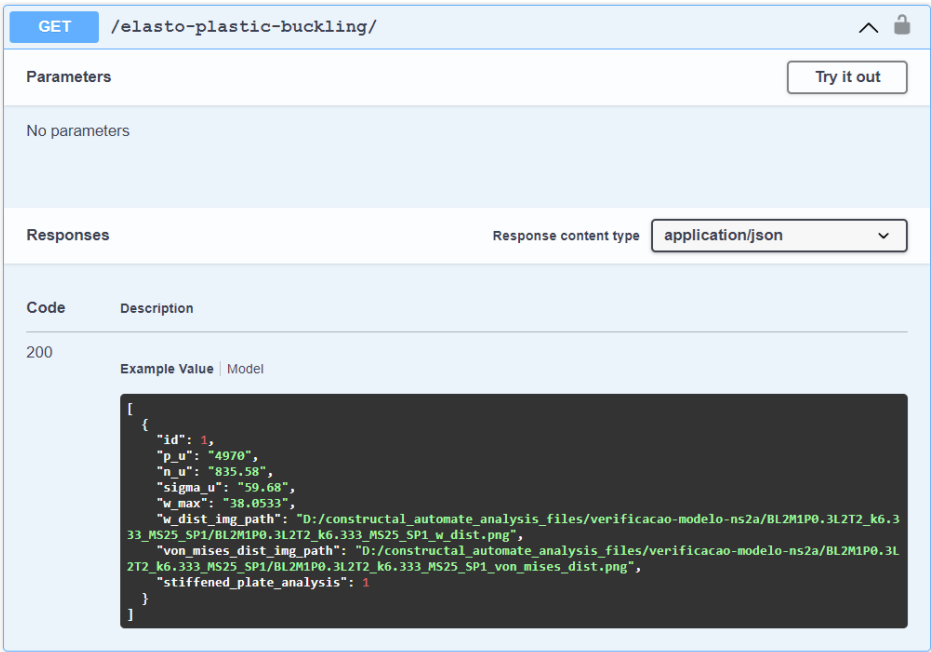


Figura 3.32: Tabela ElastoPlasticBuckling - Recurso de Listagem.

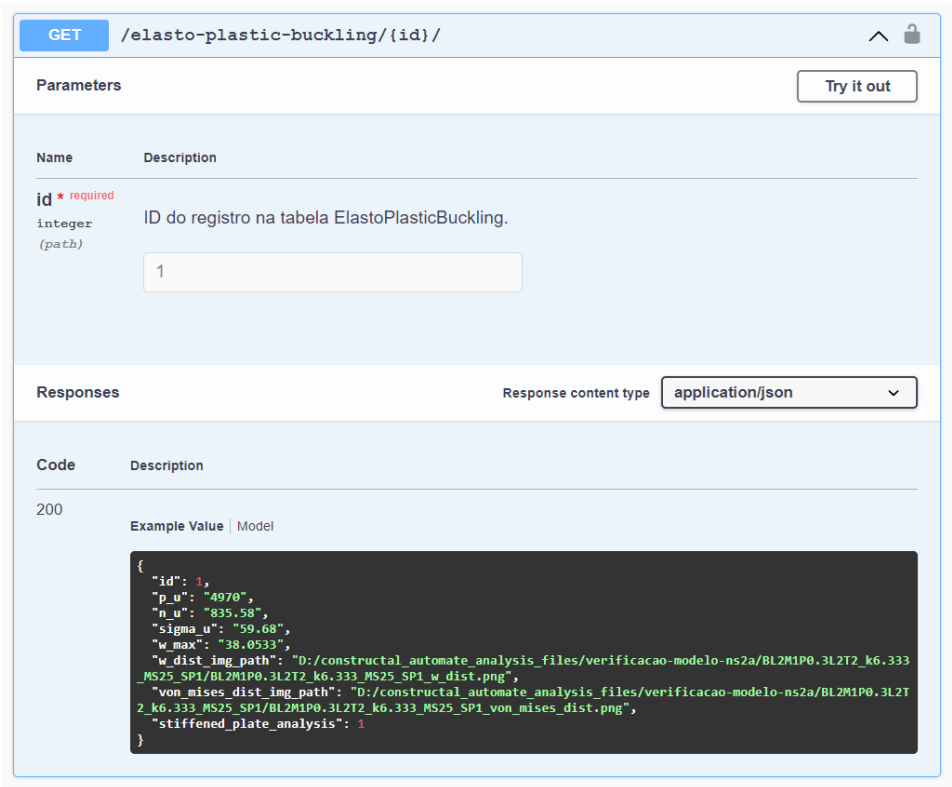


Figura 3.33: Tabela ElastoPlasticBuckling - Recurso de Detalhe de um registro.

3.3.6 Verificação da API REST

Com o propósito de verificar a API REST desenvolvida, foram analisadas as oito configurações geométricas presentes em Lima et al. (2020) para uma fração volumétrica $\phi = 0,3$, com $N_{ls} = N_{ts} = 5$. A comparação entre os valores obtidos através da API REST desenvolvida no presente trabalho e os de Lima et al. (2020) é apresentada na Tabela 3.18.

Tabela 3.18: Verificação da API REST desenvolvida

N_{ls}	N_{ts}	h_s/t_s	h_s mm	t_s mm	L mm	A mm ²	NUS_{1A}		Dif. (%)
							Pres. Trab.	Lima et al (2020)	
5	5	22,600	113	5	1565	12625	0,930	1,147	18,92
5	5	5,700	57	10	1285	12650	1,817	1,796	1,17
5	5	2,600	39	15	1195	12725	1,727	1,687	2,37
5	5	1,450	29	20	1145	12700	1,558	1,515	2,84
5	5	0,960	24	25	1120	12800	1,424	1,312	8,54
5	5	0,666	20	30	1100	12800	1,270	1,233	3,00
5	5	0,485	17	35	1085	12775	1,145	1,141	0,35
5	5	0,375	15	40	1075	12800	1,124	1,078	4,27

Observa-se que as diferenças são pequenas para a maioria dos casos analisados, onde a configuração geométrica SP(5;5;22,600) teve o maior desvio. Isso pode ser explicado pela diferença de elemento finito, onde Lima et al. (2020) utilizaram SHELL93, que é um elemento que possui uma formulação mais simples do que o SHELL281, utilizado no presente trabalho, que possui uma formulação baseada em medições logarítmicas de deformação e medições de tensões reais (Ansys, 2024a).

Além disso, Lima et al. (2020) utilizaram subpassos de carga mínimos de 0,1% da carga de escoamento, enquanto que o presente trabalho utilizou subpassos de carga mínimos de 0,25%, o que pode gerar diferenças significativas em cenários de flambagem local dos enrijecedores, como é o caso da configuração geométrica SP(5;5;22,600). Assim sendo, e considerando que a diferença média foi de 5,18% para os casos analisados, pode-se dizer que a API REST desenvolvida está verificada e pode ser utilizada para realização das demais análises do presente trabalho.

3.4 Aplicação do Design Construtal

3.4.1 Definições

3.4.1.1 Restrições

Para a aplicação do Design Construtal ao problema de flambagem elasto-plástica (uniaxial e biaxial) de placas com enrijecedores do tipo *flat bar* (ver item 3.1.1), definiram-se quatro restrições: a fração volumétrica ϕ , o volume total original V_t , o comprimento a e a largura b da placa de referência.

A restrição fração volumétrica consiste em deduzir uma fração de volume V_s do volume total V_t , de modo que V_s seja destinado a constituir a geometria dos enrijecedores. A relação entre ϕ , V_s , V_t e os parâmetros geométricos da placa de referência e dos enrijecedores (ver Figura 3.3) é dada por:

$$\phi = \frac{V_s}{V_t} = \frac{N_{ls}(ah_s t_s) + N_{ts}[(b - N_{ls}t_s)h_s t_s]}{abt_0} \quad (3.1)$$

A restrição volume total V_t garante que não haja variação de volume total entre a placa de referência e as placas com enrijecedores associadas. De acordo com Lima et al. (2020), uma variação geométrica sem variação de volume é um aspecto que está diretamente ligado à aplicação do Design Construtal, uma vez que permite uma comparação adequada entre todas as configurações geométricas propostas. Neste sentido, para manter o volume constante, a espessura da placa com enrijecedores (t_1) se relaciona com a espessura da placa de referência (t_0) pela seguinte expressão:

$$t_1 = (1 - \phi)t_0 \quad (3.2)$$

As restrições de comprimento a e largura b da placa garantem que a avaliação geométrica permaneça focada em encontrar a combinação dos graus de liberdade que conduzam à melhor performance, permitindo uma comparação direta entre os resultados obtidos.

3.4.1.2 Graus de Liberdade

Os graus de liberdade utilizados foram o número de enrijecedores longitudinais (N_{ls}), o número de enrijecedores transversais (N_{ts}) e a relação de lados dos enrijecedores h_s/t_s . Para facilitar a comparação dos valores de flambagem biaxial com os de flambagem uniaxial reproduzidos do trabalho de Lima et al. (2020), é conveniente expressar a altura dos enrijecedores (h_s) como função das demais variáveis e da largura dos enrijecedores (t_s). Para isso, isola-se h_s na Equação (3.1), de modo a obter-se:

$$h_s = \frac{\phi a b t_0}{N_{ls} a t_s + N_{ts} t_s (b - N_{ls} t_s)} \quad (3.3)$$

A Equação (3.3) então pode ser utilizada para calcular os valores de h_s considerando-se t_s a partir de valores de espessuras de placas de aço comercialmente empregadas como um grau de liberdade, e estes dois valores então usados para calcular o valor de h_s/t_s .

3.4.1.3 Indicadores de Performance

Os indicadores de performance foram escolhidos buscando entender a performance das configurações geométricas tanto para a flambagem biaxial (ver estudo de caso do item 3.4.2) quanto para a flambagem uniaxial (ver estudo comparativo do item 3.4.3). Assim sendo, os parâmetros indicadores de performance escolhidos foram:

- tensões últimas de flambagem: $\sigma_{u,1A}$ e $\sigma_{u,2A}$, que são dadas, respectivamente, por:

$$\sigma_{u,1A} = \frac{N_{u,1A}}{t_{eq}} \quad (3.4)$$

$$\sigma_{u,2A} = \frac{N_{u,2A}}{t_1} \quad (3.5)$$

onde $N_{u,1A}$ e $N_{u,2A}$ representam, respectivamente, as cargas últimas de flambagem uniaxial e biaxial; t_{eq} é a espessura equivalente (detalhada no item 4.3) e t_1 é a espessura corrigida da placa após a adição de enrijecedores.

- tensões últimas de flambagem normalizadas: NUS_{1A} e NUS_{2A} , que são dadas, respectivamente, por:

$$NUS_{1A} = \frac{\sigma_{u,1A}}{\sigma_{ur,1A}} \quad (3.6)$$

$$NUS_{2A} = \frac{\sigma_{u,2A}}{\sigma_{ur,2A}} \quad (3.7)$$

onde $\sigma_{ur,1A}$ e $\sigma_{ur,2A}$ representam, respectivamente, as tensões últimas de flambagem uniaxial e biaxial da placa de referência (sem enrijecedores);

- deslocamentos máximos: $u_{z,1A}$ e $u_{z,2A}$;
- deslocamentos máximos normalizados: NMD_{1A} e NMD_{2A} , que são dados, respectivamente, por:

$$NMD_{1A} = \frac{u_{z,1A}}{u_{zr,1A}} \quad (3.8)$$

$$NMD_{2A} = \frac{u_{z,2A}}{u_{zr,2A}} \quad (3.9)$$

onde $u_{zr,1A}$ e $u_{zr,2A}$ representam, respectivamente, as deflexões máximas com relação à direção z geradas pela flambagem elasto-plástica uniaxial e biaxial da placa de referência (sem enrijecedores).

3.4.2 Estudo de Caso: Flambagem Elasto-Plástica Biaxial de Placas com Enrijecedores

Para desenvolver o Estudo de Caso para Flambagem Elasto-Plástica Biaxial de Placas com Enrijecedores, foram definidos os intervalos e parâmetros de valores para as restrições, graus de liberdade e indicadores de performance. As restrições incluem a fração volumétrica $\phi = 0,30$, que foi escolhida por esta ter conduzido à melhor performance para a análise de flambagem elasto-plástica uniaxial conduzida por Lima et al. (2020), o volume total da placa de referência $V_t = 0,028 \text{ m}^3$, o comprimento da placa $a = 2000 \text{ mm}$ e a largura da placa $b = 1000 \text{ mm}$.

Os graus de liberdade são definidos pelo número de enrijecedores longitudinais $N_{ls} = \{2, 3, 4, 5\}$ e pelo número de enrijecedores transversais $N_{ts} = \{2, 3, 4, 5\}$. A relação de lados do enrijecedor (h_s/t_s) é determinada da seguinte forma: primeiro, define-se um par de N_{ls} e N_{ts} ; em seguida, a partir do par (N_{ls}, N_{ts}) , em conjunto com as informações de a , b , t_0 , ϕ e o intervalo de valores de $t_s = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40\} \text{ mm}$, calcula-se os valores de h_s através da Equação (3.3); por fim, a partir do par (h_s, t_s) , calcula-se o valor de h_s/t_s (os valores obtidos para as dimensões dos enrijecedores para cada caso são apresentados no Apêndice C). Já os parâmetros indicadores de performance escolhidos foram a NUS_{2A} e a NMD_{2A} .

Para denotar as configurações geométrica, será considerada a notação $SP(N_{ls}, N_{ts}, h_s/t_s)$, onde por exemplo, a configuração $SP(4; 2; 4,800)$ denota uma configuração geométrica em que $N_{ls} = 4$, $N_{ts} = 2$ e $h_s/t_s = 4,800$. A partir dos valores de h_s e t_s definidos, é realizada a aplicação do Design Construtal, como pode-se ver na Figura 3.34.

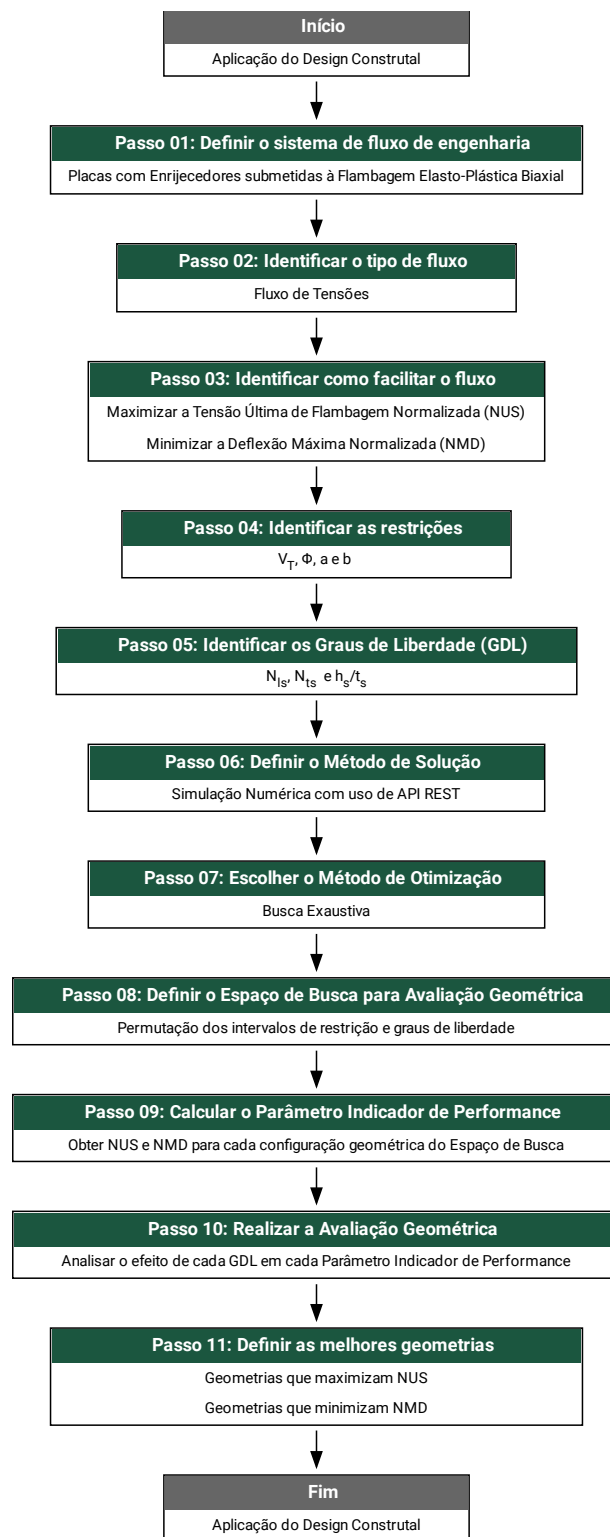


Figura 3.34: Fluxograma do Estudo de Caso de Design Construtal.

No fluxograma da Figura 3.34, o DC é aplicado de forma integrada à simulação numérica do MAPDL através da API REST desenvolvida, que segue o fluxo de:

1. Cadastro de dados da placa de referência na Tabela *Plate*, com o recurso **/plates/** da API REST (ver Figura 3.15);
2. Calcular e salvar dados da placa com enrijecedores na Tabela *StiffenedPlate*, com o recurso **/stiffened-plates/** da API REST (ver Figura 3.20);
3. Realizar a etapa de pré-processamento (criação de diretórios, geometria e malha), salvando dados na Tabela *StiffenedPlateAnalysis*, com o recurso **/stiffened-plate-analysis/** da API REST (ver Figura 3.25);
4. Solução de flambagem elástica, salvando dados na Tabela *ElasticBuckling*, com o recurso **/elastic-buckling/** da API REST (ver Figura 3.28);
5. Solução de flambagem elasto-plástica, salvando dados na Tabela *ElastoPlasticBuckling*, com o recurso **/elasto-plastic-buckling/** da API REST (ver Figura 3.31);
6. A tensão última de flambagem biaxial é calculada através da Equação 3.5.

3.4.3 Estudo Comparativo: Flambagem Uniaxial e Biaxial

Para realizar o Estudo Comparativo, foram analisadas para flambagem uniaxial as mesmas configurações geométricas que fizeram parte do estudo de caso de flambagem biaxial, que foram também foram analisadas por Lima et al. (2020). Para Lima et al. (2020), o cálculo de tensões últimas é realizado através dos seguintes passos:

1. Calcula-se o comprimento equivalente L_{eq} , que é dado por:

$$L_{eq} = b + N_{ls}h_s \quad (3.10)$$

2. Calcula-se a área equivalente A_{eq} , que é dada por:

$$A_{eq} = bt_1 + N_{ls}h_s t_s \quad (3.11)$$

3. Calcula-se a espessura equivalente t_{eq} , que é dada por:

$$t_{eq} = \frac{A_{eq}}{L_{eq}} \quad (3.12)$$

4. Calcula-se a tensão última de flambagem uniaxial $\sigma_{u,1A}$ a partir da Equação (3.4);
5. Uma vez calculada a tensão última de flambagem uniaxial para a placa de referência ($\sigma_{ur,1A}$), calcula-se NUS_{1A} de acordo com a Equação (3.6).

Todos os demais aspectos da modelagem e de uso da API REST se mantêm iguais ao que foi realizado no item 3.4.2, para facilitar a comparação entre os resultados para flambagem uniaxial e biaxial.

4 Resultados e Discussões

4.1 Implementação da API REST

O presente trabalho desenvolveu a implementação de uma API REST para a automação dos processos de modelagem computacional e simulação numérica para a flambagem biaxial de placas com enrijecedores, onde foram construídos dois repositórios *open source* com licença *MIT*: o primeiro¹ contém toda a implementação da API REST desenvolvida no presente trabalho, incluindo toda a informação necessária para esta funcionar; o segundo², traz o conjunto de scripts *SQL*, *Jupyter Notebooks*³ e tabelas (em formatos .csv e .tex), utilizado no pós-processamento dos dados de análise gerados pela arquitetura do presente trabalho.

Para dar suporte a API REST desenvolvida, também foi modelado um Banco de Dados MariaDB, que contemplou oito tabelas, sendo cinco tabelas operacionais, que contemplaram a manipulação de informações de: geometria de placas sem enrijecedores (Tabela *Plate*), geometria de placas com enrijecedores (Tabela *StiffenedPlate*), geração de malha e solução estática com pré-tensão de placas (Tabela *StiffenedPlateAnalysis*), solução de flambagem elástica de placas (Tabela *ElasticBuckling*) e solução de flambagem elasto-plástica de placas (Tabela *ElastoPlasticBuckling*); e três tabelas de domínio, para armazenar informações de materiais (Tabela *Material*), do tipo de carregamento de flambagem (Tabela *BucklingLoadType*) e do status de processamento das análises (Tabela *ProcessingStatus*).

Do ponto de vista de infraestrutura, implantação no servidor e reproducibilidade da arquitetura por outros profissionais, foi construída a infraestrutura Docker da API, em uma arquitetura que engloba o Banco de Dados e a API REST. Com isso se torna possível que toda a arquitetura desenvolvida seja reproduzida em outra máquina, facilitando a colaboração, continuidade e evolução da pesquisa presente por trabalhos futuros⁴.

Para verificar que os resultados obtidos pela API REST desenvolvida estão coerentes com a literatura, foi realizada uma verificação no item 3.3.6 que comparou os resultados obtidos pelo presente trabalho com os resultados de Lima et al. (2020). Esta verificação mostrou que a API REST desenvolvida é adequada para geração de resultados para flambagem elasto-plástica de placas com enrijecedores.

¹Disponível em: <https://github.com/andreiflancanova/constructal_automate>.

²Disponível em: <https://github.com/andreiflancanova/constructal_automate_post_processing>.

³Ambiente de execução de código Python diretamente do navegador com uma GUI.

⁴Mais detalhes sobre isso podem ser vistos no *README* do repositório da nota 1.

Com relação aos tempos de processamento, a utilização da API REST desenvolvida permitiu que a etapa de iteração manual para execução de várias análises onde se variam apenas alguns parâmetros fosse substituída por uma iteração que pode ser (e foi) automatizada, trazendo uma redução da necessidade de execução manual destas análises por parte de um operador humano, permitindo que este tempo seja redirecionado para outras tarefas de análise mais relevantes para a produção de conhecimento.

A utilização da API REST desenvolvida também trouxe ganhos na etapa de pós-processamento, pois as distribuições de tensões de von Mises e de deflexões foram geradas automaticamente através da integração da biblioteca PyMAPDL com a biblioteca PyVista⁵, permitindo ganhos de tempo na geração destas distribuições (que deixaram de ser feitas de forma manual via GUI do MAPDL) e também uma melhoria na qualidade das imagens geradas, que tem resolução melhor do que as imagens geradas pela interação com a GUI do MAPDL. Além disso, os resultados persistidos em banco de dados permitiram a sua manipulação através de scripts SQL que, em conjunto com a linguagem Python através do uso de *Jupyter Notebooks*, permitiram a geração de gráficos de indicador de performance por grau de liberdade de forma muito mais rápida, reduzindo a necessidade de transcrição de resultados do MAPDL para planilhas de forma manual para a posterior geração dos gráficos.

4.2 Estudo de Caso

Esta seção descreve os resultados obtidos durante o Estudo de Caso para Flambagem Elasto-Plástica Biaxial de Placas com Enrijecedores, que foi delimitado no item 3.4.2. Os valores calculados para os indicadores de performance NUS_{2A} e NMD_{2A} com relação a N_{ls} , N_{ts} e h_s/t_s são apresentados no Apêndice C. Os gráficos dos resultados para o efeito da variação de h_s/t_s na variação dos indicadores de performance NUS_{2A} e NMD_{2A} são apresentados respectivamente nos Apêndices D e E.

4.2.1 Placa de Referência

A tensão última de flambagem elasto-plástica biaxial e a deflexão máxima com relação à direção z da placa de referência (sem enrijecedores) foram calculadas, onde obteve-se respectivamente $\sigma_{ur,2A} = 59,68$ MPa e $u_{zr,2A} = 38,05$ mm. As distribuições de tensões de von Mises e das deflexões da placa de referência são mostradas nas Figuras 4.1 e 4.2.

⁵Biblioteca de plotagem 3D e filtragem para conjuntos de dados espaciais

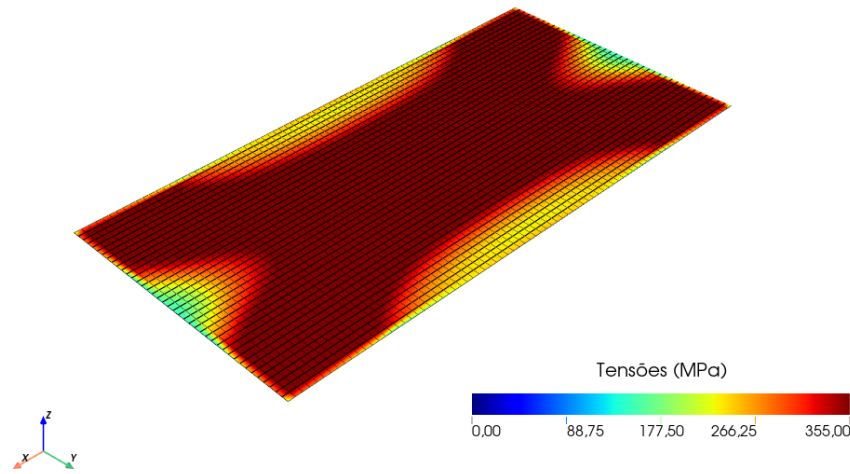


Figura 4.1: Placa de Referência - Distribuição de Tensões de von Mises.

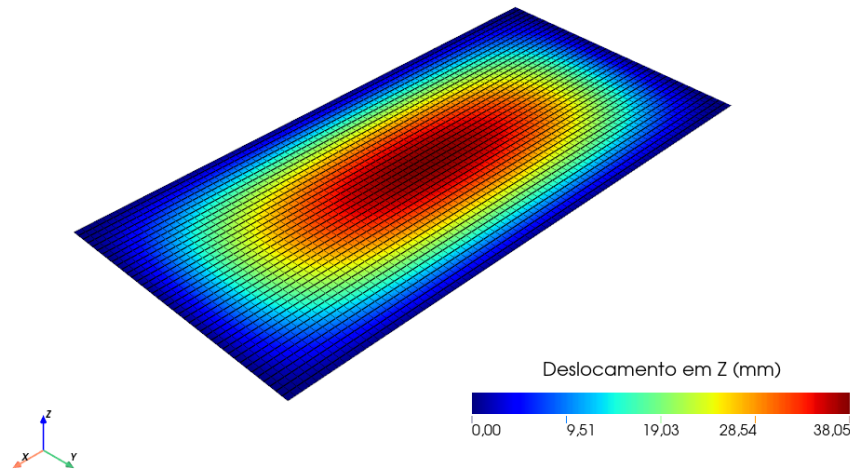


Figura 4.2: Placa de Referência - Distribuição de Deflexões.

Conforme apresentado nas Equações (3.7) e (3.9), o valor de $\sigma_{ur,2A}$ e $u_{zr,2A}$ são utilizados para normalizar, respectivamente, os resultados de tensão última de flambagem para obter NUS_{2A} e de deflexão máxima para obter NMD_{2A} para os casos de placas com enrijecedores.

4.2.2 Performance com relação a NUS

A partir dos resultados obtidos para NUS, apresentados nos Apêndices C e D, é possível observar que a presença de enrijecedores gerou melhoria para a tensão última de flambagem elasto-plástica biaxial em relação à placa de referência (de mesmo volume e sem enrijecedores) para a maioria dos casos analisados (122 de 128 casos analisados).

Os gráficos do Apêndice D indicam que, para cada par (N_{ls}, N_{ts}) , existe um valor de h_s/t_s que maximiza o parâmetro indicador de performance NUS_{2A} . As curvas possuem um comportamento geral constituído de uma zona de comportamento crescente de NUS_{2A} para valores inferiores a $h_s/t_s = 10$, seguido de um comportamento decrescente que tende à vizinhança da situação de referência.

4.2.2.1 Melhores e piores desempenhos para cada par (N_{ls}, N_{ts})

Para entender a relação que os graus de liberdade N_{ls} e N_{ts} possuem com NUS, os resultados foram organizados considerando-se cada par (N_{ls}, N_{ts}) e extraindo-se a configuração geométrica correspondente à pior e melhor performance de cada par.

Para entender o comportamento para os casos de pior performance, estes foram extraídos para cada par (N_{ls}, N_{ts}) , e são apresentados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Piores desempenhos para NUS_{2A} em cada par (N_{ls}, N_{ts})

N_{ls}	N_{ts}	h_s/t_s	h_s	t_s	$\sigma_{u,2A}$	w_{max}	NUS_{2A}	NMD_{2A}
			mm	mm	MPa	mm		
2	2	56,200	281	5	25,57	0,1573	0,428	0,004
2	3	42,200	211	5	43,71	0,3346	0,732	0,009
2	4	33,800	169	5	61,46	0,5566	1,030	0,015
2	5	28,200	141	5	87,36	0,9085	1,464	0,024
3	2	48,400	242	5	30,93	0,2370	0,518	0,006
3	3	37,600	188	5	52,58	0,4702	0,881	0,012
3	4	30,800	154	5	72,94	0,7687	1,222	0,020
3	5	0,425	17	40	79,39	14,5219	1,330	0,382
4	2	42,400	212	5	40,16	0,3663	0,673	0,010
4	3	34,000	170	5	61,68	0,6436	1,034	0,017
4	4	0,475	19	40	85,62	13,2437	1,435	0,348
4	5	0,400	16	40	76,19	15,9241	1,277	0,418
5	2	37,600	188	5	52,58	0,5612	0,881	0,015
5	3	30,800	154	5	76,49	0,9304	1,282	0,024
5	4	0,450	18	40	86,64	37,5824	1,452	0,988
5	5	0,375	15	40	80,39	40,9420	1,347	1,076

Observa-se como regra geral que, para um mesmo par (N_{ls}, N_{ts}) , as piores perfor-

mances acontecem para os maiores valores de h_s/t_s analisados, por conta da alta esbeltez que os enrijecedores com valores de h_s/t_s mais elevados possuem (geralmente associada ao baixo valor de t_s , que favorece a flambagem local dos enrijecedores). No entanto, para os pares (3,5), (4,4), (4,5), (5,4) e (5,5), o comportamento se modifica, devido ao fato de valores intermediários de N_{ls} associados a valores mais altos de N_{ts} fazerem com que os valores máximos de h_s/t_s sejam mais baixos, e os enrijecedores assim menos esbeltos.

Isso faz com que o pior desempenho para estes pares de (N_{ls}, N_{ts}) passe a acontecer para valores de h_s/t_s bem pequenos, onde os enrijecedores melhoram a performance, mas de forma bem menos significativa, por terem espessuras t_s grandes e alturas h_s pequenas, aproximando o comportamento dessas placas com enrijecedores à situação de referência (valores de NUS_{2A} pouco maiores do que 1).

Para entender o comportamento para os casos de melhor performance, estes foram extraídos para cada par (N_{ls}, N_{ts}) , e são apresentados na Tabela 4.2

Tabela 4.2: Melhores desempenhos para NUS_{2A} em cada par (N_{ls}, N_{ts})

N_{ls}	N_{ts}	h_s/t_s	h_s	t_s	$\sigma_{u,2A}$	w_{max}	NUS_{2A}	NMD_{2A}
			mm	mm	MPa	mm		
2	2	2,280	57	25	221,39	3,4031	3,710	0,089
2	3	2,700	54	20	241,27	3,2469	4,043	0,085
2	4	3,800	57	15	259,03	2,0647	4,340	0,054
2	5	3,200	48	15	267,57	6,7162	4,483	0,176
3	2	3,100	62	20	302,86	5,7802	5,075	0,152
3	3	4,266	64	15	282,66	1,5962	4,736	0,042
3	4	3,466	52	15	291,50	7,0045	4,884	0,184
3	5	6,600	66	10	245,17	1,8876	4,108	0,050
4	2	4,800	72	15	341,22	2,8165	5,717	0,074
4	3	3,866	58	15	310,51	5,5516	5,203	0,146
4	4	3,200	48	15	251,92	7,2660	4,221	0,191
4	5	6,100	61	10	241,83	3,2321	4,052	0,085
5	2	4,266	64	15	316,72	4,8871	5,307	0,128
5	3	3,466	52	15	256,02	6,4391	4,290	0,169
5	4	6,600	66	10	230,28	2,3378	3,859	0,061
5	5	5,700	57	10	209,67	3,1884	3,513	0,084

Observa-se que, para um mesmo par (N_{ls}, N_{ts}) , as melhores performances para NUS acontecem para h_s/t_s entre 2,280 e 6,600 (enrijecedores menos esbeltos que contribuem para a melhoria do performance), fazendo a placa ter mais regiões sob escoamento.

Partindo-se dos gráficos do Apêndice D e agrupando-se os melhores desempenhos para cada valor de N_{ls} da Tabela 4.2, chega-se a Tabela 4.3.

Tabela 4.3: Melhores desempenhos para NUS_{2A} em cada N_{ls}

N_{ls}	N_{ts}	h_s/t_s	h_s	t_s	$\sigma_{u,2A}$	w_{max}	NUS_{2A}	NMD_{2A}
			mm	mm	MPa	mm		
2	5	3,200	48	15	267,57	6,7162	4,483	0,176
3	2	3,100	62	20	302,86	5,7802	5,075	0,152
4	2	4,800	72	15	341,22	2,8165	5,717	0,074
5	2	4,266	64	15	316,72	4,8871	5,307	0,128

Os resultados da Tabela 4.3 indicam que as melhores performances para N_{ls} acontecem, em sua maioria, para $N_{ts} = 2$, pois o volume disponível para cada enrijecedor é maior, fazendo com que estes sejam pouco esbeltos e levando a placa a mais regiões próximas ao escoamento, como pode-se ver na Figura 4.3.

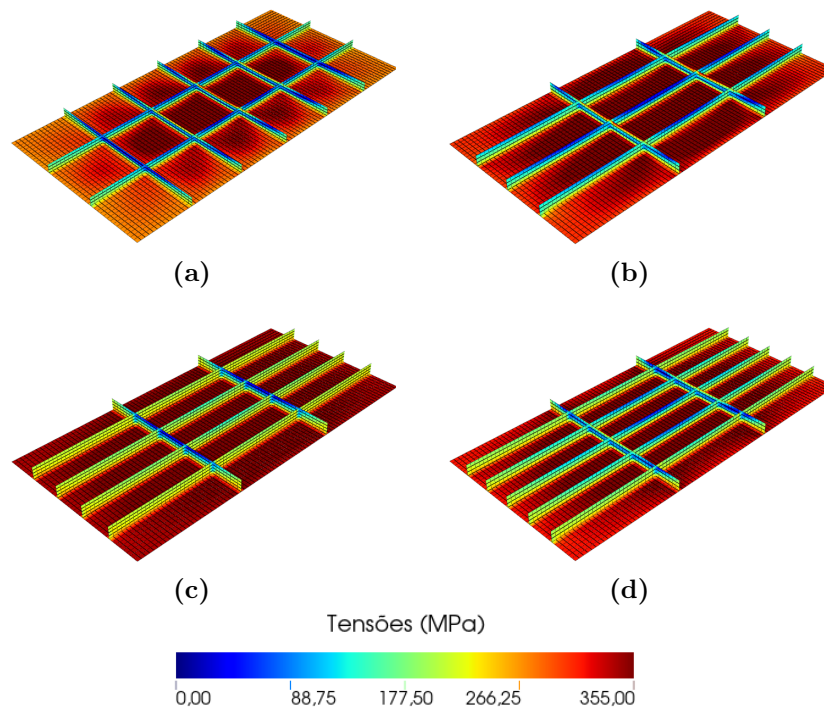


Figura 4.3: Distribuições de Tensões de von Mises para os casos de melhor performance com relação a NUS para: (a) $N_{ls} = 2$, (b) $N_{ls} = 3$, (c) $N_{ls} = 4$ e (d) $N_{ls} = 5$.

Partindo-se dos gráficos do Apêndice D e agrupando-se os melhores desempenhos para cada valor de N_{ts} da Tabela 4.2, chega-se a Tabela 4.4.

Tabela 4.4: Melhores desempenhos para NUS_{2A} em cada N_{ts}

N_{ls}	N_{ts}	h_s/t_s	h_s	t_s	$\sigma_{u,2A}$	w_{max}	NUS_{2A}	NMD_{2A}
			mm	mm	MPa	mm		
4	2	4,800	72	15	341,22	2,8165	5,717	0,074
4	3	3,866	58	15	310,51	5,5516	5,203	0,146
3	4	3,466	52	15	291,50	7,0045	4,884	0,184
2	5	3,200	48	15	267,57	6,7162	4,483	0,176

Os resultados da Tabela 4.4 mostram que as melhores performances com relação a N_{ts} ocorrem para $t_s = 15$ mm, pois este valor de t_s garante a absorção dos esforços pelos enrijecedores sem que ocorra flambagem local, o que faz com que a placa tenha mais regiões próximas ao escoamento, como pode-se ver na Figura 4.4.

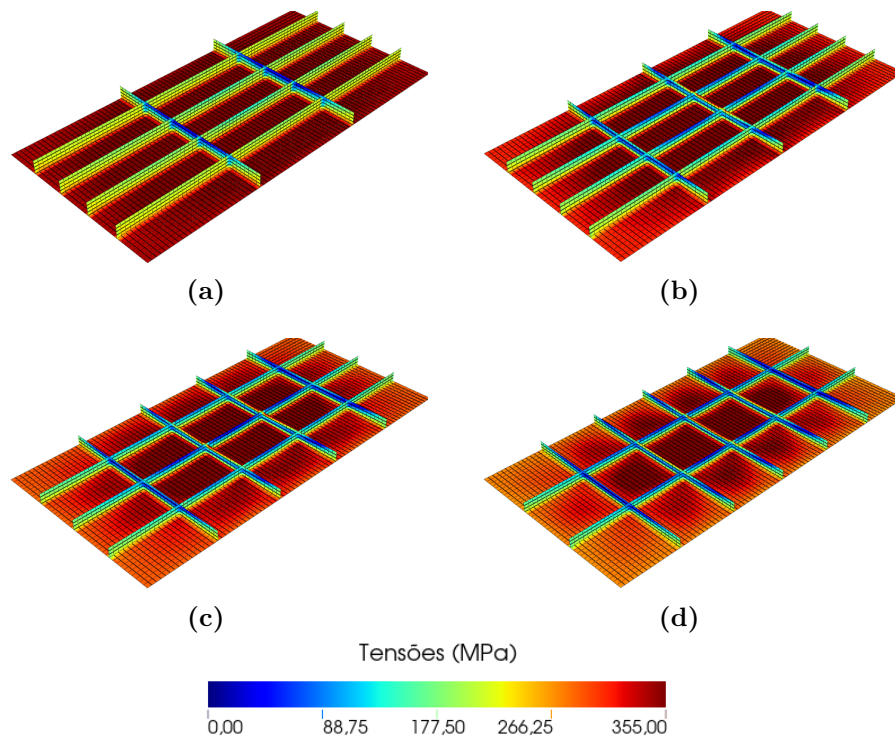


Figura 4.4: Distribuições de Tensões de von Mises para os casos de melhor performance com relação a NUS para: (a) $N_{ts} = 2$, (b) $N_{ts} = 3$, (c) $N_{ts} = 4$ e (d) $N_{ts} = 5$.

4.2.2.2 Configuração Geométrica de Pior Desempenho

O caso de pior desempenho global com relação a NUS_{2A} dentre os casos analisados foi a configuração geométrica SP(2; 2; 56,200), que obteve $NUS_{2A} = 0,428$, representando uma redução de 57,2% em relação à situação de referência. As distribuições de tensões de von Mises e de deflexões da configuração geométrica SP(2; 2; 56,200) são apresentadas nas Figuras 4.5 e 4.6.

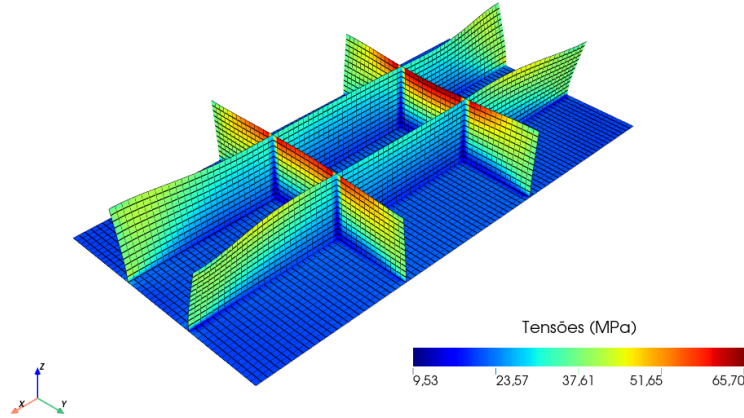


Figura 4.5: Configuração Geométrica de Pior Desempenho - Distribuição de Tensões de von Mises. Deformações ampliadas por um fator de 20x.

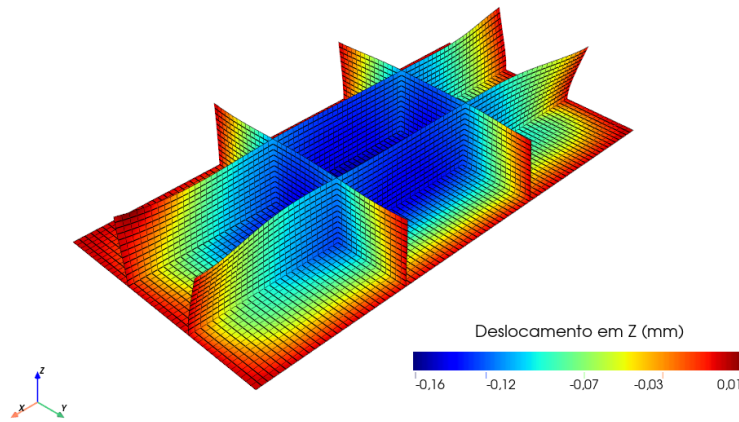


Figura 4.6: Configuração Geométrica de Pior Desempenho - Distribuição de Deflexões. Deformações ampliadas por um fator de 20x.

É possível inferir que esta baixa performance é gerada pela combinação dos menores valores analisados de N_{ls} e N_{ts} , isto é $N_{ls} = N_{ts} = 2$, que associada a uma restrição de volume total constante, faz com que o maior valor de h_s/t_s gere enrijecedores muito esbeltos, que sofrem flambagem local para valores baixos de carregamento aplicado.

4.2.2.3 Configuração Geométrica de Melhor Desempenho

O caso de melhor desempenho global com relação a NUS_{2A} dentre os casos analisados foi a configuração geométrica SP(4; 2; 4,800), que obteve $NUS_{2A} = 5,717$, o que

representa uma melhora de 471,7% na performance em relação à placa de referência. As distribuições de tensões de von Mises e de deflexões da configuração geométrica SP(4; 2; 4,800) são apresentadas nas Figuras 4.7 e 4.8.

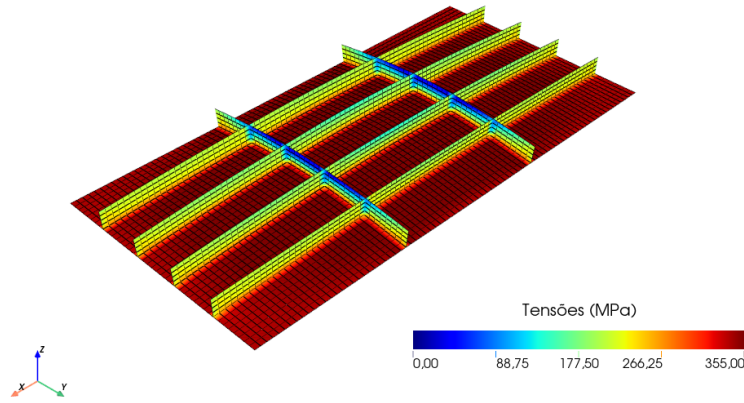


Figura 4.7: Configuração Geométrica de Melhor Desempenho para NUS - Distribuição de Tensões de von Mises. Deformações ampliadas por um fator de 20x.

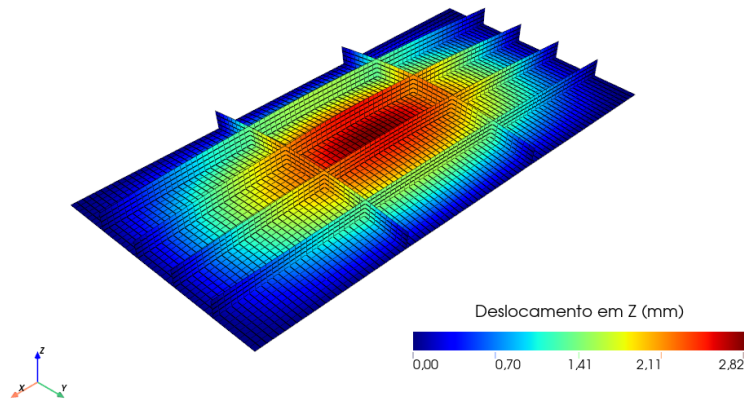


Figura 4.8: Configuração Geométrica de Melhor Desempenho para NUS - Distribuição de Deflexões. Deformações ampliadas por um fator de 20x.

É possível inferir que esta alta performance é gerada por um valor intermediário de $N_{ls} = 4$, que associado ao fato dos enrijecedores longitudinais terem comprimento a , faz com que boa parte do volume total dos enrijecedores V_s seja dedicado a eles. Isso, associado ao menor valor analisado de $N_{ts} = 2$, faz com que o volume disponível seja melhor aproveitado para um valor intermediário de h_s/t_s , fazendo com que os enrijecedores contribuam para que boa parte da região da placa atinja a tensão de escoamento.

Além disso, é possível notar a partir da Figura 4.7 que a configuração geométrica que conduziu à melhor performance com relação a NUS possui uma maior região da placa submetida a tensões mais próximas da tensão última (regiões em vermelho escuro), o que é explicado pelo Princípio Construtal da Ótima Distribuição das Imperfeições, uma

vez que a geometria com o melhor desempenho é aquela que consegue distribuir as imperfeições (tensões últimas de flambagem mais altas) de maneira mais uniforme.

4.2.3 Performance com relação a NMD

A partir dos resultados obtidos para NMD, apresentados nos Apêndices C e E, é possível observar que a presença de enrijecedores gerou melhoria com relação a deflexão máxima quando da flambagem elasto-plástica biaxial em relação a placa de referência para a maioria dos casos analisados (126 de 128 casos analisados).

4.2.3.1 Melhores e piores desempenhos para cada par (N_{ls}, N_{ts})

Para entender o comportamento dos casos de pior performance, estes foram extraídos para cada par (N_{ls}, N_{ts}) , e são apresentados na Tabela 4.5.

Tabela 4.5: Piores desempenhos para NMD_{2A} em cada par (N_{ls}, N_{ts})

N_{ls}	N_{ts}	h_s/t_s	h_s	t_s	$\sigma_{u,2A}$	w_{max}	NUS_{2A}	NMD_{2A}
			mm	mm	MPa	mm		
2	2	1,171	41	35	181,47	9,8215	3,041	0,258
2	3	0,700	28	40	123,58	12,2692	2,071	0,322
2	4	0,550	22	40	98,38	16,1726	1,648	0,425
2	5	0,475	19	40	91,30	14,9734	1,530	0,393
3	2	0,800	32	40	132,12	10,2051	2,214	0,268
3	3	0,625	25	40	107,79	12,2732	1,806	0,323
3	4	0,657	23	35	99,82	13,8231	1,673	0,363
3	5	0,425	17	40	79,39	14,5219	1,330	0,382
4	2	0,700	28	40	111,87	10,9274	1,874	0,287
4	3	0,575	23	40	98,93	13,0772	1,658	0,344
4	4	0,600	21	35	90,39	15,3108	1,515	0,402
4	5	0,400	16	40	76,19	15,9241	1,277	0,418
5	2	0,800	28	35	107,80	11,6975	1,806	0,307
5	3	0,525	21	40	93,50	35,8490	1,567	0,942
5	4	0,450	18	40	86,64	37,5824	1,452	0,988
5	5	0,375	15	40	80,39	40,9420	1,347	1,076

Observa-se como regra geral que, para um mesmo par (N_{ls}, N_{ts}) , as piores performances com relação a NMD_{2A} acontecem para os menores valores de h_s/t_s analisados, o que é explicado pela baixa altura h_s que estes possuem, o que faz com que os enrijecedores contribuam pouco na limitação das deflexões. Para os pares (5,3), (5,4) e (5,5), o valor de NMD_{2A} se intensifica bastante, possivelmente pela alta quantidade de enrijecedores nos dois sentidos, que faz com que o volume destinado a cada um seja menor.

Apesar da maioria dos resultados para NMD serem baixos, muitas vezes isso ocorre por conta dos enrijecedores sofrerem flambagem local para valores pequenos de $u_{z,2A}$, o que pode gerar uma ilusão de boa performance. Assim, como forma de contornar este problema, será feita a análise de NMD_{2A} para $10 \leq t_s \leq 20$ mm, em virtude das geometrias de melhor desempenho para NUS_{2A} se concentrarem neste intervalo de t_s . Partindo-se dessa premissa, os resultados para os casos de melhor desempenho com relação a NMD_{2A} para cada par (N_{ls}, N_{ts}) são apresentados na Tabela 4.6.

Tabela 4.6: Melhores desempenhos para NMD_{2A} em cada par (N_{ls}, N_{ts})

N_{ls}	N_{ts}	h_s/t_s	h_s	t_s	$\sigma_{u,2A}$	w_{max}	NUS_{2A}	NMD_{2A}
			mm	mm	MPa	mm		
2	2	3,550	71	20	219,08	3,1459	3,671	0,083
2	3	4,733	71	15	237,18	2,5976	3,974	0,068
2	4	3,800	57	15	259,03	2,0647	4,340	0,054
2	5	7,100	71	10	244,46	2,6016	4,096	0,068
3	2	5,466	82	15	265,58	1,4849	4,450	0,039
3	3	4,266	64	15	282,66	1,5962	4,736	0,042
3	4	7,800	78	10	250,14	2,4262	4,191	0,064
3	5	6,600	66	10	245,17	1,8876	4,108	0,050
4	2	10,700	107	10	269,01	2,1677	4,508	0,057
4	3	8,600	86	10	251,24	2,6682	4,210	0,070
4	4	7,100	71	10	246,95	2,3011	4,138	0,060
4	5	6,100	61	10	241,83	3,2321	4,052	0,085
5	2	9,500	95	10	262,23	1,9373	4,394	0,051
5	3	7,800	78	10	250,14	2,4733	4,191	0,065
5	4	6,600	66	10	230,28	2,3378	3,859	0,061
5	5	5,700	57	10	209,67	3,1884	3,513	0,084

Partindo-se da Tabela 4.6 e agrupando-se os melhores desempenhos para cada valor de N_{ls} , chega-se à Tabela 4.7.

Tabela 4.7: Melhores desempenhos para NMD_{2A} em cada N_{ls}

N_{ls}	N_{ts}	h_s/t_s	h_s	t_s	$\sigma_{u,2A}$	w_{max}	NUS_{2A}	NMD_{2A}
			mm	mm	MPa	mm		
2	4	3,800	57	15	259,03	2,0647	4,340	0,054
3	2	5,466	82	15	265,58	1,4849	4,450	0,039
4	2	10,700	107	10	269,01	2,1677	4,508	0,057
5	2	9,500	95	10	262,23	1,9373	4,394	0,051

Os resultados da Tabela 4.7 mostram que as melhores performance para N_{ls} se concentraram em sua maioria para $N_{ts} = 2$, que faz com que os enrijecedores sejam mais rígidos (por disporem de mais volume), ajudando dessa forma às deflexões se distribuírem de forma mais uniforme, como pode-se ver na Figura 4.9.

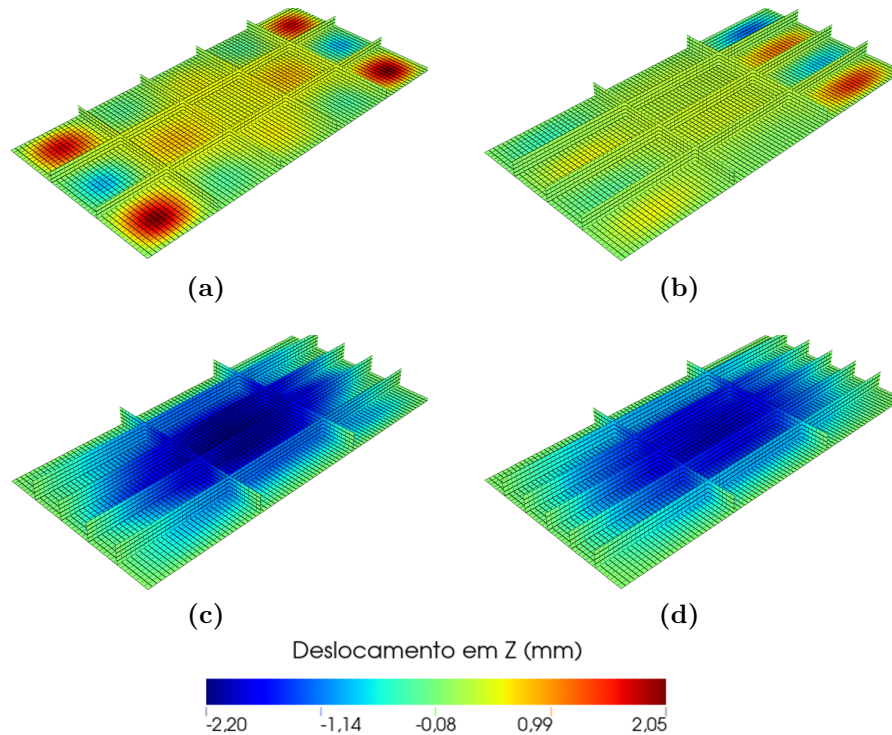


Figura 4.9: Deflexões máximas para os casos de melhor performance com relação a NMD_{2A} para: (a) $N_{ls} = 2$, (b) $N_{ls} = 3$, (c) $N_{ls} = 4$ e (d) $N_{ls} = 5$.

Partindo-se da Tabela 4.6 e agrupando-se os melhores desempenhos para cada valor de N_{ts} , chega-se a Tabela 4.8.

Tabela 4.8: Melhores desempenhos para NMD_{2A} em cada N_{ts}

N_{ls}	N_{ts}	h_s/t_s	h_s	t_s	$\sigma_{u,2A}$	w_{max}	NUS_{2A}	NMD_{2A}
			mm	mm	MPa	mm		
3	2	5,466	82	15	265,58	1,4849	4,450	0,039
3	3	4,266	64	15	282,66	1,5962	4,736	0,042
2	4	3,800	57	15	259,03	2,0647	4,340	0,054
3	5	6,600	66	10	245,17	1,8876	4,108	0,050

Os resultados da Tabela 4.8 mostram que as melhores performance para N_{ts} aconteceram em sua maioria para $N_{ls} = 3$, que é um valor que favorece uma distribuição mais uniforme de deflexões para o conjunto, como pode ser visto na Figura 4.10.

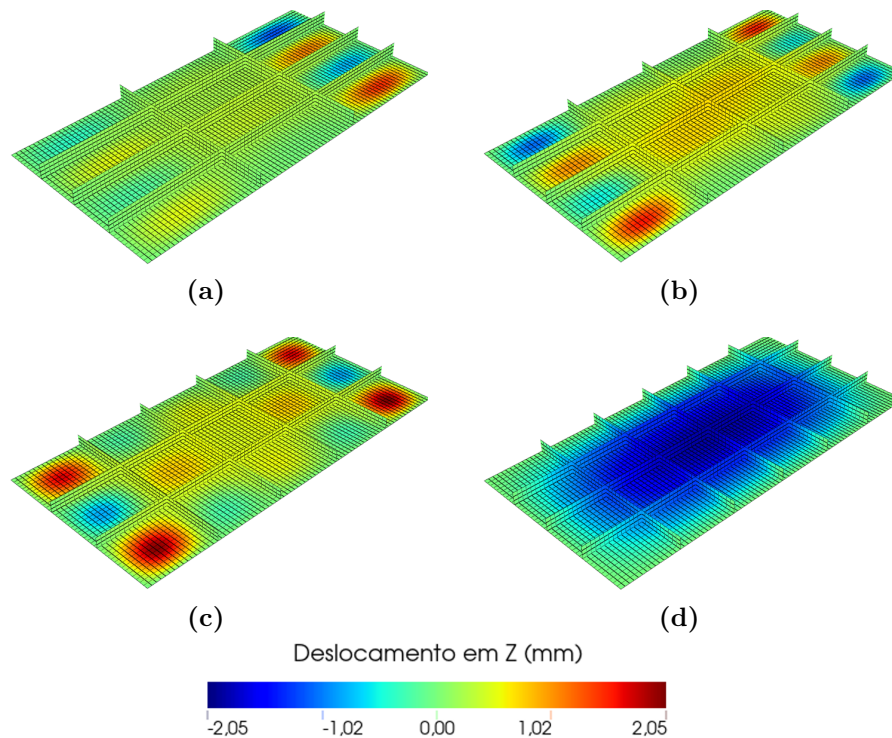


Figura 4.10: Deflexões máximas para os casos de melhor performance com relação a NMD_{2A} para: (a) $N_{ts} = 2$, (b) $N_{ts} = 3$, (c) $N_{ts} = 4$ e (d) $N_{ts} = 5$.

4.2.3.2 Configuração Geométrica de Pior Desempenho

O caso de pior desempenho global com relação a NMD_{2A} dentre os casos analisados foi a configuração geométrica SP(5; 5; 0,375), que obteve $NMD_{2A} = 1,076$, representando uma redução de 7,6% em relação a situação de referência. As distribuições de tensões de von Mises e de deflexões da configuração geométrica SP(5; 5; 0,375) são

apresentadas nas Figuras 4.11 e 4.12.

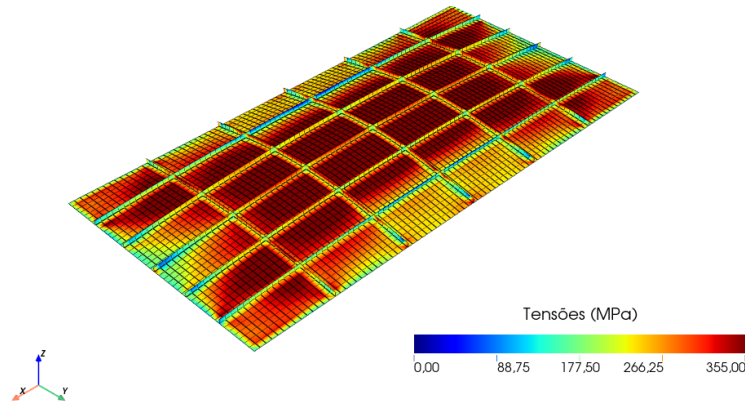


Figura 4.11: Configuração Geométrica de Pior Desempenho para NMD - Distribuição de Tensões de von Mises. Deformações ampliadas por um fator de 2x.

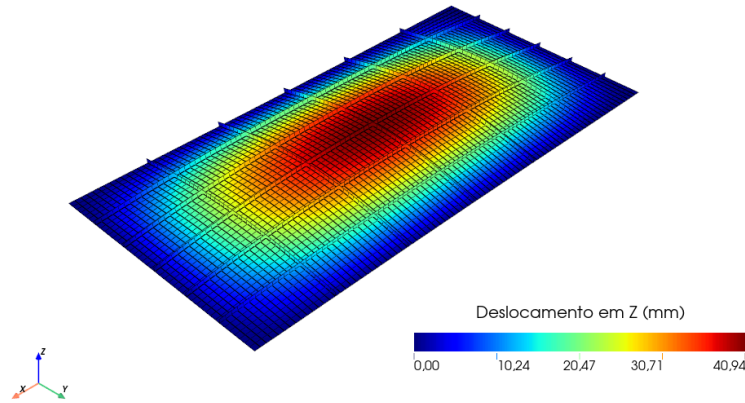


Figura 4.12: Configuração Geométrica de Pior Desempenho para NMD - Distribuição de Deflexões. Deformações ampliadas por um fator de 2x.

É possível inferir que esta baixa performance é causada pela combinação dos maiores valores de N_{ls} e N_{ts} em conjunto com enrijecedores com valor de largura $t_s = 40\text{mm}$, o que faz com que estes tenham uma altura h_s pequena que não contribui significativamente para a performance frente a NMD_{2A} , fazendo com que a espessura deduzida para conversão em enrijecedores não seja bem aproveitada, aproximando bastante o comportamento desta configuração geométrica à situação de referência (observar a semelhança nas distribuições das Figuras 4.11 e 4.12 com os resultados das Figuras 4.1 e 4.2).

4.2.3.3 Configuração Geométrica de Melhor Desempenho

O caso de melhor desempenho global com relação a NMD_{2A} dentre os casos analisados foi a configuração geométrica $SP(3; 2; 5,466)$, que obteve $NMD_{2A} = 0,039$, o que representa uma melhoria de 96,1% na performance em relação a situação de referência. As distribuições de tensões de von Mises e de deflexões da configuração geométrica $SP(3;$

2; 5,466) são apresentadas nas Figuras 4.13 e 4.14.

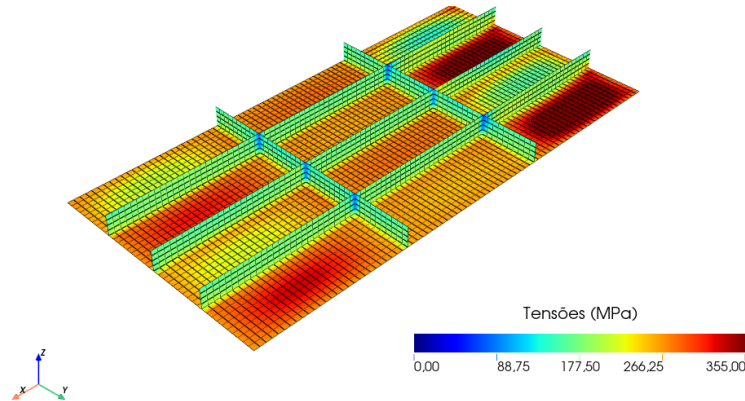


Figura 4.13: Configuração Geométrica de Melhor Desempenho para NMD - Distribuição de Tensões de von Mises.

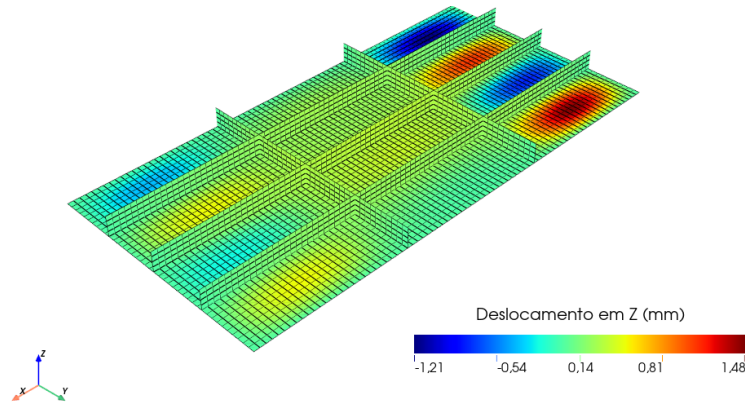


Figura 4.14: Configuração Geométrica de Melhor Desempenho para NMD - Distribuição de Deflexões.

É possível inferir que esta alta performance está associada a distribuição uniforme de valores altos de tensão na placa e moderados nos enrijecedores, o que favorece distribuições uniformes de deflexões pequenas na maior parte da região da placa e dos enrijecedores, que é oriunda de esbeltez moderada dos enrijecedores, associada ao valor de $N_{ls} = 3$ que favorece a distribuição de deflexões de forma mais uniforme.

4.3 Estudo Comparativo

Esta seção descreve o Estudo Comparativo entre Resultados de Flambagem Elasto-Plástica Uniaxial e Biaxial, que foi delimitado no item 3.4.3. Os valores calculados para $\sigma_{u,1A}$, NUS_{1A} , $\sigma_{u,2A}$ e NUS_{2A} com relação aos graus de liberdade N_{ls} , N_{ts} e h_s/t_s são apresentados no Apêndice F. Os gráficos dos resultados para o efeito da variação de h_s/t_s

na variação dos indicadores de performance $\sigma_{u,1A}$ e $\sigma_{u,2A}$ são apresentados no Apêndice G, enquanto os resultados para NUS_{1A} e NUS_{2A} são apresentados no Apêndice H.

4.3.1 Placa de Referência

A tensão última de flambagem uniaxial e biaxial para a placa de referência (sem enrijecedores) foram calculadas, onde obteve-se respectivamente os valores de $\sigma_{ur,1A} = 186,46$ MPa e $\sigma_{ur,2A} = 59,68$ MPa. As distribuições de tensões de von Mises e das deflexões da placa de referência para flambagem elasto-plástica uniaxial e biaxial são apresentadas, respectivamente, nas Figuras 4.15, 4.16, 4.1 e 4.2 (ver item 4.2.1).

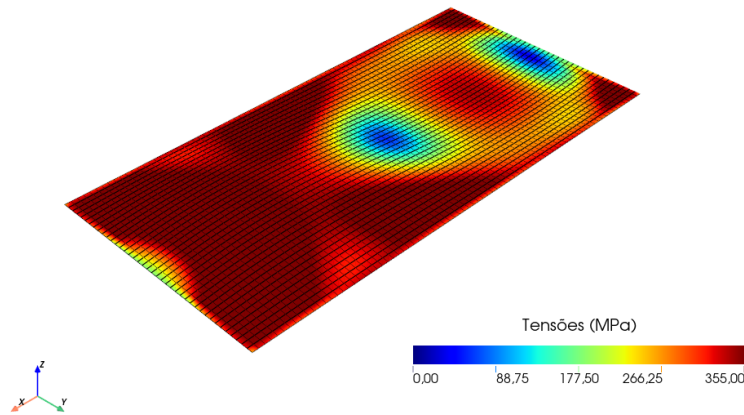


Figura 4.15: Referência - Flambagem Uniaxial - Tensões de von Mises.

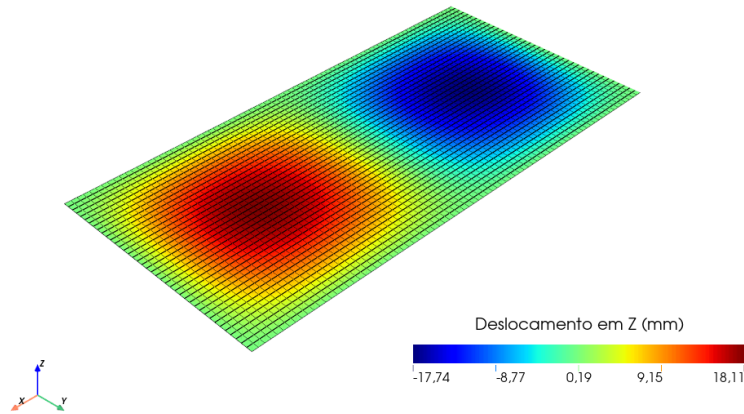


Figura 4.16: Referência - Flambagem Uniaxial - Distribuição de Deflexões.

4.3.2 Análise dos resultados

Os resultados do Apêndice F e do Apêndice G mostram, como tendência geral, que os valores absolutos de $\sigma_{u,1A}$ são maiores do que $\sigma_{u,2A}$, o que é explicado pela hipótese de

Jones (2006), que diz que a presença do carregamento biaxial causa a flambagem antes que as cargas em ambas as direções atinjam o valor da carga de flambagem uniaxial.

A aparente inconsistência nos valores para a configuração geométrica SP(4;2;4,800), onde $\sigma_{u,2A} = 341,22$ MPa é maior do que $\sigma_{u,1A} = 316,89$ MPa ocorre por conta da diferença nas metodologias utilizadas pelo presente trabalho para o cálculo da tensão última de flambagem, onde a análise para flambagem biaxial, baseada em Helbig et al. (2016) e Da Silveira (2021) seguiu a Equação (3.5), enquanto que a análise para flambagem uniaxial foi baseada em Lima et al. (2020) na forma da Equação (3.4)⁶.

Quando se comparam os valores de NUS , os resultados do Apêndice F e do Apêndice H revelam uma inversão no comportamento, onde os valores de NUS_{2A} são maiores que os valores de NUS_{1A} para todos os casos analisados, o que torna possível dizer que o uso de enrijecedores gera uma melhoria de performance frente a flambagem elasto-plástica biaxial mais significativa do que a melhoria frente a flambagem elasto-plástica uniaxial.

Entretanto, é importante destacar que existem algumas diferenças com relação a metodologia de obtenção de resultados entre o presente trabalho e o de Lima et al. (2020), como o tipo de elemento finito, o incremento de carga e a forma como as tensões últimas são calculadas. De forma geral, é possível ver as tendências mencionadas, mas comparações mais detalhadas precisam levar estes detalhes em consideração.

⁶Ao se calcular $\sigma_{u,1A}$ como a razão entre carga última e espessura corrigida da placa, chega-se a $\sigma_{u,1A} = 354,40$ MPa, de modo que $\sigma_{u,1A} > \sigma_{u,2A}$, como esperado.

5 Conclusões

A análise de placas com enrijecedores é um tema relevante para várias indústrias do contexto de engenharia (civil, mecânica, naval, aeronáutica), devido à sua vasta gama de aplicações. Entender o comportamento de flambagem elasto-plástica é cada vez mais fundamental para os projetos de engenharia contemporâneos, onde requisitos de alta resistência associados com baixo peso próprio se fazem dia após dia mais presentes, e o uso de enrijecedores possibilita uma melhoria de performance sem alteração de volume de material, o que está diretamente associado à redução de custos de fabricação.

Neste sentido, o presente trabalho se propôs a desenvolver uma API REST para automatizar os processos de modelagem computacional e simulação numérica para análise de flambagem elasto-plástica de placas com enrijecedores, orientada à aplicação do Método Design Construtal em conjunto com a Técnica de Busca Exaustiva.

Começou-se pela modelagem do Banco de Dados, criando-se as tabelas e campos para denotar e armazenar informações e resultados importantes para cada recurso de API REST que seria desenvolvido, onde foram construídas 8 tabelas de Banco de Dados, para representar as abstrações de placas sem enrijecedores, placas com enrijecedores, análises de placas com enrijecedores, resultados de flambagem elástica, resultados de flambagem elasto-plástica, para além das tabelas de domínio de status de processamento, tipo de flambagem e tipo de material, cujas informações e campos estão descritos no item 3.3.4, de modo que pode-se dizer que o objetivo específico 1 foi atingido.

Em seguida foi desenvolvida uma API REST com Django Rest Framework que se integra ao Ansys Mechanical APDL (MAPDL) através da biblioteca PyMAPDL, que interage via Python através do protocolo gRPC com o banco de dados do MAPDL, provendo uma forma de enviar comandos escritos em Python que são traduzidos para APDL, linguagem paramétrica de design utilizada pelo MAPDL. Esta API gerencia todos os passos de modelagem computacional e simulação numérica utilizados pelo presente trabalho, ao permitir:

- a definição de placas sem enrijecedores (objetivo específico 2);
- o cálculo das dimensões dos enrijecedores e definição da geometria das placas com enrijecedores associadas (objetivo específico 3);
- a geração da análise de placas com enrijecedores (que contempla a criação da geometria, malha e análise estática com pré-tensão com carga unitária) no MAPDL, com informações de diretórios e status de processamento (objetivo específico 4);

- o cálculo de carga e tensão crítica de flambagem elástica biaxial, gerando a configuração deformada base para a análise elasto-plástica (objetivo específico 5);
- o cálculo de carga e tensão última de flambagem elasto-plástica biaxial, assim como das deflexões máximas de placas com enrijecedores, e a geração das distribuições de tensões de von Mises e de deflexões máximas (objetivo específico 6).

A partir da implementação bem-sucedida da API REST, que gerou resultados consistentes com a literatura (verificados no item 3.2.9), pode-se dizer que os objetivos específicos de 2 a 6 foram atingidos. Além disso, o código-fonte da API REST desenvolvida, assim como todos os scripts e rotinas de pós-processamento foram disponibilizado no GitHub de forma pública em dois repositórios, conforme descrito no item 4.1.

Uma vez concluído o desenvolvimento da API REST, a mesma foi utilizada para realização de um estudo de caso para aplicação do Design Construtal, que utilizou N_{ts} , N_{ts} e h_s/t_s como graus de liberdade para uma restrição volumétrica $\phi = 0,3$ para um volume total $V_t = 0,028 \text{ m}^3$, onde avaliou-se a performance das configurações geométricas através dos indicadores de performance tensão última de flambagem biaxial normalizada (NUS_{2A}) e deflexão máxima normalizada gerada por flambagem biaxial (NMD_{2A}).

Com relação a NUS_{2A} , a melhor performance global aconteceu para a configuração geométrica SP(4;2;4,800), que apresentou um valor de $NUS_{2A} = 5,717$, associada a uma configuração geométrica em que grande parte das regiões da placa atingiram tensões próximas à tensão de escoamento. Já a pior performance aconteceu para a configuração geométrica SP(2;2;56,200), situação onde acontece flambagem local dos enrijecedores para um valor pequeno de carga axial aplicada, por conta da esbeltez dos enrijecedores.

Com relação a NMD_{2A} , a melhor performance global aconteceu para a configuração geométrica SP(3;2;5,466), que apresentou um valor de $NMD_{2A} = 0,039$, associada à uma configuração geométrica em que grande parte das regiões da placa teve deflexões pequenas (dar ordem de 0,14mm). Já a pior performance aconteceu para a configuração geométrica SP(5;5;0,375), que é explicado por conta dos enrijecedores não contribuírem significativamente na melhoria da performance, onde esta configuração geométrica tem distribuição de tensões e deflexões bem parecidas com a situação de referência.

Além disso, a configuração geométrica SP(4;2;4,800) obteve um valor de $NMD_{2A} = 0,074$, e a configuração geométrica SP(3;2;5,466) obteve um valor de $NUS_{2A} = 4,450$, o que indica que os dois indicadores guardam um grau de sinergia, por conta do princípio da ótima distribuição das imperfeições.

A realização bem-sucedida do estudo de caso, contemplando a geração dos gráficos

de NUS_{2A} e NMD_{2A} pelo grau de liberdade h_s/t_s , assim como a geração de imagens de distribuições de tensões de von Mises e de deflexões, faz com que seja possível dizer que os objetivos específicos 7 a 8 foram atingidos.

Observa-se que a transformação de parte do volume do material da placa em enrijecedores gerou, para a maioria dos casos analisados, tanto com relação a NUS_{2A} quanto para NMD_{2A} , melhorias significativas na performance, justificando a utilização do Método Design Construtal em conjunto com a Técnica de Busca Exaustiva na procura das melhores geometrias, não focando somente na geometria otimizada, mas dando uma visão do comportamento dentro de todo o espaço de busca, permitindo identificar como a variação de cada grau de liberdade influencia no comportamento mecânico de placas frente ao fenômeno de flambagem elasto-plástica biaxial.

Após a realização do estudo de caso, foi realizado um estudo comparativo entre os resultados de flambagem uniaxial e biaxial, onde avaliou-se a influência da variação dos parâmetros N_{ls} , N_{ts} e h_s/t_s nos indicadores de performance $\sigma_{u,1A}$, $\sigma_{u,2A}$, NUS_{1A} e NUS_{2A} . Observou-se, na comparação absoluta, que os valores de $\sigma_{u,1A}$ são maiores do que $\sigma_{u,2A}$, pois no caso biaxial mais energia de deformação é inserida no sistema (na forma de carregamento externo), fazendo com que a placa sofra flambagem para valores menores de carregamento externo aplicado com relação ao caso uniaxial. No entanto, quando se comparam os valores de NUS_{1A} e NUS_{2A} , o comportamento se inverte, de modo que NUS_{2A} é maior do que NUS_{1A} para todos os casos analisados, o que torna possível dizer que o uso de enrijecedores melhora a performance frente a flambagem elasto-plástica biaxial de forma mais significativa do que frente a flambagem elasto-plástica uniaxial. Estes resultados também permitem dizer que os objetivos específicos 9 e 10 foram atingidos.

Dessa forma, ao atingir todos os objetivos específicos, é possível confirmar que o objetivo geral foi alcançado. A integração do Ansys Mechanical APDL com o Método Design Construtal, em conjunto com as bibliotecas Django Rest Framework e PyMAPDL, permitiu a criação de uma ferramenta eficiente, facilitando a análise de problemas de flambagem elasto-plástica de placas com enrijecedores.

Os resultados obtidos demonstram a viabilidade, aplicabilidade e eficácia da metodologia utilizada, proporcionando um ferramental abrangente para análise de problemas de mecânica computacional. A automação dos fluxos de modelagem computacional contribui para a redução de erros manuais e para a otimização do tempo de execução das simulações, favorecendo a aplicação desta metodologia em diferentes contextos de engenharia.

Assim sendo, o presente trabalho não apenas atinge seu objetivo, como também abre caminho para futuras melhorias, como a incorporação de novas funcionalidades, ampliação do escopo de utilização e integração com outras tecnologias. Espera-se que esta API REST sirva como base para novos estudos e aplicações, permitindo que novos conhecimentos sejam produzidos de forma integrada com tecnologias emergentes.

5.1 Proposta de continuidade

Como proposta de continuidade do trabalho para a realização de avanços futuros dentro da área de estudo do presente trabalho, sugere-se:

- Considerar diferentes valores de fração volumétrica no intervalo $0,1 \leq \phi \leq 0,5$, para entender a influência da variação de volume transformado em enrijecedores;
- Implementação de recursos de API REST para avaliação geométrica de problemas de flexão e flexo-compressão através do Design Construtal;
- Aprimorar o funcionamento da API REST, através do uso de processamento assíncrono (através do uso da biblioteca Celery e de *brokers* como Apache Kafka);
- Aprimorar o funcionamento da arquitetura, com recursos de processamento paralelo no MAPDL, para reduzir os tempos de processamento das análises;
- Aprimorar o funcionamento da arquitetura, agregando o MAPDL a infraestrutura Docker, para criar um ambiente completamente containerizado;
- Avaliar a influência de diferentes razões de aspecto a/b , para entender como esta impacta na distribuição de tensões;
- Avaliar a influência da variação da relação entre as cargas aplicadas em cada direção;
- Avaliar a influência de outras geometrias de enrijecedores na tensão última de flambagem;
- Avaliar a influência da relação entre os volume dos enrijecedores em cada direção;
- Avaliar a utilização de outros modelos para consideração das imperfeições iniciais.

Referências Bibliográficas

- Aho, A. (2012). **Computation and computational thinking**, *Comput. J.* 55: 832–835.
- Amditis, A., Tsimiklis, G., Karagiannopoulou, A. e Routsis, K. (2022). **A versatile and secure data management system api facilitating the interconnection of any software component and easy data access.**
- Ansys (2024a). **Ansys Element Reference - Release 2024R2**, Ansys Inc., Canonsburg, PA.
- Ansys (2024b). **Ansys Mechanical APDL Command Reference - Release 2024R2**, Ansys Inc., Canonsburg, PA.
- Ansys (2024c). **Ansys Mechanical APDL Material Reference - Release 2024R2**, Ansys Inc., Canonsburg, PA.
- Ansys (2024d). **Ansys Mechanical APDL Structural Analysis Guide - Release 2024R2**, Ansys Inc., Canonsburg, PA.
- Ansys (2024e). **Ansys Mechanical APDL Theory Reference - Release 2024R2**, Ansys Inc., Canonsburg, PA.
- Arani, A. G., Maghamikia, S., Mohammadimehr, M. e Arefmanesh, A. (2011). **Buckling analysis of laminated composite rectangular plates reinforced by swcnts using analytical and finite element methods**, *Journal of Mechanical Science and Technology* 25: 809–820.
- Arcuri, A. (2019). **Restful api automated test case generation with evomaster**, *ACM Transactions on Software Engineering and Methodology (TOSEM)* 28: 1 – 37.
- Baluch, M. H. e Voyiadjis, G. Z. (1980). **Higher order plate equations based on reissner’s formulation of the plate problem**, *Arab J. Sci. Eng.* 5: 75–80.
- Baumgardt, G. R., Da Silveira, T. d., Lima, J. P., Rocha, L. A. O., Santos, E. D. d. e Isoldi, L. A. (2021). **Verification of finite element computational model for biaxial buckling of stiffened plates**, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* 1150(1): 012023.
- Baumgardt, G. R., Fragassa, C., Rocha, L. A. O., dos Santos, E. D., Da Silveira, T. e Isoldi, L. A. (2023). **Computational model verification and validation of elastoplastic buckling due to combined loads of thin plates**, *Metals* 13(4): 731.
- Bejan, A. (2000). **Shape and Structure, From Engineering to Nature**, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Bejan, A. (2016). **The Physics of Life: The Evolution of Everything**, St. Martin’s Press.

- Bejan, A. e Lorente, S. (2008). **Design with Constructal Theory**, Wiley, Hoboken.
- Bejan, A. e Zane, J. P. (2012). **Design in Nature: How the Constructal Law Govern Evolution in Biology, Physics, and Social Organization**, Doubleday, New York, USA.
- Bhatia, G. (2017). **The road to docker: A survey**, *International Journal of Advanced Research in Computer Science* 8: 83–87.
- Boresi, A. P. e Schmidt, R. J. (2003). **Advanced Mechanics of Materials**, 6 edn, John Wiley and Sons, Hoboken.
- Bui, T., Nguyen, M. e Zhang, C. (2011). **Buckling analysis of reissner–mindlin plates subjected to in-plane edge loads using a shear-locking-free and meshfree method**, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 35(9): 1038–1053.
- Cai, Y. e Jelovica, J. (2023). **Graph neural network for stress predictions in stiffened panels under uniform loading**.
- Casas, S., Cruz, D., Vidal, G. e Constanzo, M. (2021). **Uses and applications of the openapi/swagger specification: a systematic mapping of the literature**, *2021 40th International Conference of the Chilean Computer Science Society (SCCC)* pp. 1–8.
- Chajes, A. (1974). **Principles of Structural Stability Theory**, Prentice Hall College Div.
- Chen, H.-M., Lin, Y.-C. e Chao, Y.-F. (2006). **Application of web services for structural engineering systems**, *Journal of Computing in Civil Engineering* 20(3): 154–164.
- Chen, L. (2014). **Introduction to Computational Mathematics**, WORLD SCIENTIFIC, p. 157–170.
- Chen, S., Ahmmed, S., Lal, K. e Deming, C. (2020). **Django web development framework: Powering the modern web**, *American Journal of Trade and Policy* 7(3): 99–106.
- Cheng, B., Xiao, R., Zhao, J. e Cheng, J. (2010). **Optimal stiffener design of moderately thick plates under uniaxial and biaxial compression**, *Journal of Constructional Steel Research* 66(10): 1218–1231.
- Cleveland, S. B., Jamthe, A., Padhy, S., Stubbs, J., Packard, M., Looney, J., Terry, S., Cardone, R., Dahan, M. e Jacobs, G. A. (2020). **Tapis api development with python: Best practices in scientific rest api implementation: Experience implementing a distributed stream api**, *Practice and Experience in Advanced Research Computing*, PEARC 20, ACM, p. 181–187.

- Da Silva, C. C. C., Helbig, D., Cunha, M. L., dos Santos, E. D., Rocha, L. A. O., Real, M. d. V. e Isoldi, L. A. (2019). **Numerical buckling analysis of thin steel plates with centered hexagonal perforation through constructal design method**, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* 41(8).
- Da Silveira, T. (2021). **Simulação Numérica e Design Construtal Aplicados à Flambagem Biaxial Elasto-Plástica de Placas Perfuradas**, FURG, Rio Grande, RS.
- Da Silveira, T., Baumgardt, G., Rocha, L., Dos Santos, E. e Isoldi, L. (2022). **Numerical simulation and constructal design applied to biaxial elastic buckling of plates of composite material used in naval structures**, *Composite Structures* 290.
- Da Silveira, T., Pinto, V., Neufeld, J. P., Pavlovic, A., Rocha, L., dos Santos, E. e Isoldi, L. A. (2021). **Applicability evidence of constructal design in structural engineering: Case study of biaxial elasto-plastic buckling of square steel plates with elliptical cutout**, *Journal of Applied and Computational Mechanics* 7(2): 922–934.
- Dos Santos, E. D., Isoldi, L. A., Gomes, M. d. N. e Rocha, L. A. O. (2017). **The Constructal Design Applied to Renewable Energy Systems**, Vol. 1, CRC Press – Taylor and Francis, Boca Raton.
- Ehsan, A., Abuhaliqa, M. A., Catal, C. e Mishra, D. (2022). **Restful api testing methodologies: Rationale, challenges, and solution directions**, *Applied Sciences* .
- El-Sawy, K. M., Nazmy, Y. A. S. e Martini, M. I. (2004). **Elasto-plastic buckling of perforated plates under uniaxial compression**, *Thin Walled Structures* 42(8): 1083–1101.
- Elumalai, E. S., Asokan, R., Thejus, C. M., Uday Ranjan Goud, N. e Sivamani, S. (2024). **Numerical investigations of the buckling behaviour of an integrated stiffened panel**, *Journal of Physics: Conference Series* 2837(1): 012063.
- Estefen, S. F., Chujutalli, J. H. e Soares, C. G. (2016). **Influence of geometric imperfections on the ultimate strength of the double bottom of a suezmax tanker**, *Eng. Struct.* 127: 287–303.
- Fowler, S. e Stanwick, V. (2004). **Web Application Design Handbook: Best Practices for Web-Based Software**, Interactive Technologies, 1 edn, Morgan Kaufmann.
- Gayathri, D. e Parvathy, U. (2023). **Buckling analysis of stiffened fgm plates**, *Materials Today: Proceedings* .
- Ghavami, K. e Khedmati, M. R. (2006). **Numerical and experimental investigations on the compression behaviour of stiffened plates**, *Journal of Constructional Steel Research* 62(11): 1087–1100.

- Grimes, R. G., Lewis, J. G. e Simon, H. D. (1994). **A shifted block lanczos algorithm for solving sparse symmetric generalized eigenproblems**, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 15(1): 228–272.
- Guzel, S. e Gurses, E. (2021). **Determination of the 1st buckling and collapse loads for integrally stiffened panels by artificial neural network and design of experiment methodology**, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* 1024(1): 012080.
- Hahn, W. (1957). **Probleme und methoden der modernen stabilitatstheorie**, *MTW.-Mitt. (Technische Hochschule, Vienna)* pp. 119–134.
- Hamedani, S. J. e Ranji, A. R. (2013). **Buckling analysis of stiffened plates subjected to non-uniform biaxial compressive loads using conventional and super finite elements**, *Thin-Walled Structures* 64: 41–49.
- Hassan, A. H. A. e Kurgan, N. (2019). **Modeling and buckling analysis of rectangular plates in ansys**, *International Journal of Engineering and Applied Sciences* 11(1): 310–329.
- Hauschild, J. e Pollmann, F. (2018). **Efficient numerical simulations with tensor networks: Tensor network python (TeNPy)**, *SciPost Phys. Lect. Notes* 5.
- Helbig, D., Rocha, L. A. O., da Silva, C. C. C., dos Santos, E. D., Real, M. V. e Isoldi, L. A. (2014). **Numerical simulation and constructal design method applied to the study of the cutouts shape influence in the mechanical behavior of perforated plates subjected to buckling**, *Proceedings of the XXXV CILAMCE*.
- Helbig, D., Silva, C. C. C., Real, M. V., dos Santos, E. D., Isoldi, L. A. e Rocha, L. A. O. (2016). **Study about buckling phenomenon in perforated thin steel plates employing computational modeling and constructal design method**, *Latin American Journal of Solids and Structures* 13: 1912–1936.
- Jazayeri, M. (2007). **Some trends in web application development**, *Future of Software Engineering (FOSE '07)* pp. 199–213.
- Jerath, S. (2021). **Structural Stability Theory and Practice: Buckling of Columns, Beams, Plates, and Shells**, John Wiley and Sons.
- Johansson, R. (2015). **Introduction to Computing with Python**, Apress.
- Jones, R. M. (2006). **Buckling of Bars, Plates and Shells**, Bull Ridge Publishing, Blacksburg, USA.
- Kaszynski, A., Derrick, J., Ayuso, G. M., FredAns, Jleonatti, Correia, D., Addy, D., JackGuyver, Jazztekk, Jkbgbr e Spectereye (2021). **pyansys/pymapdl: v0.60.3**.
- Khoury, R. e Harder, D. W. (2016). **Numerical Methods and Modelling for Engineering**, Springer International Publishing.

- Kim, D., Lim, H., Kim, M., Hwang, O. e Park, K. (2017). **An empirical formulation for predicting the ultimate strength of stiffened panels subjected to longitudinal compression**, *Ocean Engineering* 140: 270–280.
- Kobayashi, H. (1997). **A survey of books and monographs on plates**, *Memoirs of the Faculty of Engineering, Osaka City University* 38: 73–98.
- Lançanova, A. F., Pacheco, B. F., Rodrigues, E. M., Rocha, L. A. O., dos Santos, E. D., Da Silveira, T. e Isoldi, L. A. (2023). **Design construtal e modelagem computacional aplicados à flambagem elasto-plástica biaxial de placas com duas perfurações elípticas**, *Scientia Plena* 19(11).
- Larson, M. G. e Bengzon, F. (2013). **The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications**, Springer Berlin Heidelberg.
- Latif, A. A. e Shahin, B. R. (2021). **Structural design according to constructal theory in architecture**, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* 1090(1): 012070.
- Levy, M. (1877). **Memoire sur la théorie des plaques élastiques**, *J. Math. Pures Appl.* pp. 219–306.
- Lima, J. P. S. (2016). **Análise numérica da flambagem de placas finas de aço com enrijecedores através do método design construtal**, Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica.
- Lima, J. P. S., Cunha, M. L., dos Santos, E. D., Rocha, L. A. O., de Vasconcellos Real, M. e Isoldi, L. A. (2020). **Constructal design for the ultimate buckling stress improvement of stiffened plates submitted to uniaxial compressive load**, *Engineering Structures* 203: 109883.
- Lima, J. P. S., Rocha, L. A. O., Santos, E. D. e Real, M. V. (2018). **Constructal design and numerical modeling applied to stiffened steel plates submitted to elasto-plastic buckling**, *Proceedings of the Romanian Academy, Series A Special Issue*: 195–200.
- Lin, H., Xu, A., Misra, A. e Zhao, R. (2020). **An ansys apdl code for topology optimization of structures with multi-constraints using the beso method with dynamic evolution rate (der-beso)**, *Structural and Multidisciplinary Optimization* 62: 2229–2254.
- Liu, J., Wu, L. e Fang, X. (2015). **Using python to solve the navier-stokes equations-applications in the preconditioned iterative methods**, *Journal of Scientific Research and Reports* 7(3): 207–217.
- Madenci, E. e Guven, I. (2015). **The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS®**, 2 edn, Springer US.

- Marguerre, K. e Woernle, H.-T. (1969). **Elastic Plates**, Springer.
- Mindlin, R. D. (1951). **Influence of rotatory inertia on flexural motions of isotropic, elastic plates**, *J. Appl. Mech.* pp. 31–38.
- Miranda, F. e Abreu, C. (2016). **Handbook of Research on Computational Simulation and Modeling in Engineering**, IGI Global.
- Miłkowski, M. (2018). **From computer metaphor to computational modeling: The evolution of computationalism**, *Minds and Machines* 28(3): 515–541.
- Moaveni, S. (2008). **Finite element analysis: theory and application with ANSYS**, 3 edn, Pearson Education.
- Morris, M. (1991). **Factorial sampling plans for preliminary computational experiments**, *Quality Engineering* 37: 307–310.
- Mudassir, M. e Mushtaq, M. (2024). **The role of apis in modern software development**, *World Journal of Advanced Engineering Technology and Sciences* .
- Musa, S. M. (2023). **Finite Element Analysis: A Primer**, 2 edn, Mercury Learning and Information.
- Musmar, M. A. (2022). **Structural performance of steel plates**, *Frontiers in Built Environment* 8.
- Neumann, A., Laranjeiro, N. e Bernardino, J. (2018). **An analysis of public rest web service apis**, *IEEE Transactions on Services Computing* 14: 957–970.
- Nogueira, C. M., Cunha, M. L., Amaral, R. R., Troina, G. d. S., Lima, J. P. S., Santos, E. D. d. e Isoldi, L. A. (2019). **Simulação numérica e design construtal aplicados a placas com enrijecedores com diferentes relações altura/espessura**, *Scientia Plena* 15(4).
- Oberkampf, W. e Trucano, T. (2002). **Verification and validation in computational fluid dynamics**, *Progress in Aerospace Sciences* 38: 209–272.
- Paik, J. K. e Thayamballi, A. K. (2001). **Buckling strength of steel plating with elastically restrained edges**, *Thin-Walled Structures* 37(1): 27–55.
- Paik, J. e Seo, J. (2009). **Nonlinear finite element method models for ultimate strength analysis of steel stiffened-plate structures under combined biaxial compression and lateral pressure actions—part ii: Stiffened panels**, *Thin-Walled Structures* 47: 998–1007.
- Papkov, V., Shadymov, N. e Pashchenko, D. (2023). **Cfd-modeling of fluid flow in ansys fluent using python-based code for automation of repeating calculations**, *International Journal of Modern Physics C* 34(09).

- Petsch, M., Kohlgrüber, D. e Heubischl, J. (2018). **Pandora - a python based framework for modelling and structural sizing of transport aircraft**, *MATEC Web Conf.* 233: 1–13.
- Pinto, V. T., Oliveira Rocha, L. A., Fragassa, C., Domingues dos Santos, E. e Isoldi, L. A. (2020). **Multiobjective geometric analysis of stiffened plates under bending through constructal design method**, *Journal of Applied and Computational Mechanics* 6(Special Issue).
- Pop, D. e Altăr, A. (2014). **Designing an mvc model for rapid web application development**, *Procedia Engineering* 69: 1172–1179.
- Przemieniecki, J. S. (1968). **Theory of matrix structural analysis**, Dover.
- PyAnsys (2024). **PyMAPDL documentation 0.68.4**, ANSYS Inc. Acesso em: 01 dez. 2024.
- Pérez, F., Granger, B. e Hunter, J. D. (2011). **Python: An ecosystem for scientific computing**, *Computing in Science and Engineering* 13: 13–21.
- Rackow, P. B., Real, M. D. V., Isoldi, L., Thormann, D. e Da Silva, R. C. (2015). **Análise paramétrica de um painel com enrijecedor sob flambagem elástica**, *Scientia Plena* 11(8).
- Ramírez-Noriega, A., Martínez-Ramírez, Y., Jiménez, S., Soto-Vega, J. e Figueroa-Pérez, J. F. (2021). **indev: A software to generate an mvc architecture based on the er model**, *Computer Applications in Engineering Education* 30: 259 – 274.
- Raschka, S., Patterson, J. e Nolet, C. J. (2020). **Machine learning in python: Main developments and technology trends in data science, machine learning, and artificial intelligence**, *Inf.* 11: 193.
- Rashed, M. G., Ahsan, R. e Chowdhury, S. R. (2012). **Numerical modelling of concrete tensile strength test by wrapping scripting language with compiled library**, *International Journal of Computer Applications* 40(14): 34–38.
- Reddy, J. N. (2006). **Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells**, Series in Systems and Control, 2 edn, CRC Press, Boca Raton.
- Reissner, E. (1944). **On the theory of bending of elastic plates**, *J. Math. Phys.* pp. 184–191.
- Reissner, E. (1985). **Reflections on the theory of elastic plates**, *Appl. Mech. Rev.* 38(11): 1453–1464.
- Ringsberg, J. W., Darie, I., Nahshon, K., Shilling, G., Vaz, M. A., Benson, S., Brubak, L., Feng, G., Fujikubo, M., Gaiotti, M., Hu, Z., Jang, B.-S., Paik, J.-K., Slagstad, M., Tabri, K., Wang, Y., Wiegard, B. e Yanagihara, D. (2021). **The issc 2022 committee iii.1-ultimate strength benchmark study on the ultimate limit state**

- analysis of a stiffened plate structure subjected to uniaxial compressive loads, *Marine Structures* 79.
- Rocha, L. A. O., Lorente, S. e Bejan, A. (2018). **Constructal Theory in Heat Transfer**, Springer, Cham.
- Rubio, D. (2017). **REST Services with Django**, Apress, p. 549–566.
- Sanchez-Mesa, R. J., Cortes-Hernandez, D. M., Rayas-Sanchez, J. E., Brito-Brito, Z. e de la Mora-Hernandez, L. (2018). **Em parametric study of length matching elements exploiting an ansys hfss matlab-python driver**, *2018 IEEE MTT-S Latin America Microwave Conference (LAMC 2018)*, IEEE, p. 1–3.
- Santos, J., Azevedo, L., Soares, E., Thiago, R. e Silva, V. (2020). **Analysis of tools for rest contract specification in swagger/openapi**, *Proceedings of the 22nd International Conference on Enterprise Information Systems*, SCITEPRESS - Science and Technology Publications.
- Segura, S., Parejo, J. A., Troya, J. e Ruiz-Cortés, A. (2018). **Metamorphic testing of restful web apis**, *IEEE Transactions on Software Engineering* 44: 1083–1099.
- Shaimi, M., Khatyr, R. e Naciri, J. K. (2022). **Ansys mechanical automation using python for the steady state thermal analysis of fins**, *World Congress on Mechanical, Chemical, and Material Engineering*, MCM'22, Avestia Publishing.
- Shanmugam, N. E. e Wang, C. M. (eds) (2021). **Analysis and Design of Plated Structures**, Woodhead Publishing Series in Civil and Structural Engineering, 2 edn, Woodhead Publishing.
- Shanmugam, N. e Narayanan, R. (1998). **Ultimate strength of biaxially loaded plates**, *Stability and Ductility of Steel Structures*, Pergamon, Oxford, UK.
- Sky, A., Neunteufel, M., Hale, J. S. e Zilian, A. (2023). **A reissner-mindlin plate formulation using symmetric hu-zhang elements via polytopal transformations**.
- Sly, J. e Crowne, D. (2023). **Systems engineering in technology development**, *INSIGHT* 26(3): 26–32.
- Song, Z. J., Xu, M. C., Moan, T. e Pan, J. (2019). **Dimensional and similitude analysis of stiffened panels under longitudinal compression considering buckling behaviours**, *Ocean Engineering* 187: 106188.
- Souza, D. S., Peglow, J. M., Rodrigues, E. D., Santos, E. D., Real, M. V. e Isoldi, L. A. (2023). **Verificação de modelo computacional para simular numericamente a flambagem elástica de placas com enrijecedores**, *Revista Mundi - Engenharia, Tecnologia e Gestão* 8(1).

- Speare, P. R. S. e Kemp, K. O. (1977). **A simplified reissner theory for plate bending**, *Int. J. Solids Struct.* 13: 1073–1079.
- Sriparasa, S. S. (2014). **Building a Web Application with PHP and MariaDB: A Reference Guide**, Packt Publishing, Birmingham, England.
- Sud, K. (2020). **Understanding REST APIs**, Apress, p. 1–11.
- Swagger (2024). **Api server and base path**. Acessado em Dezembro de 2024.
- Szillard, R. (2004). **Theories and Applications of Plate Analysis: Classical Numerical and Engineering Methods**, Wiley, Hoboken.
- Tahmooresi, H., Heydarnoori, A. e Aghamohammadi, A. (2020). **An analysis of python’s topics, trends, and technologies through mining stack overflow discussions**, *ArXiv* abs/2004.06280.
- Tarkowska, A., Carvalho-Silva, D., Cook, C. E., Turner, E., Finn, R. D. e Yates, A. D. (2018). **Eleven quick tips to build a usable rest api for life sciences**, *PLOS Computational Biology* 14(12): e1006542.
- Tenenbaum, J. e Eisenberger, M. (2021). **Analytic solution for buckling of rectangular isotropic plates with internal point supports**, *Thin-walled Structures* 163: 107640.
- Timoshenko, S. P. e Krieger, S. W. (1959). **Theory Of Plates and Shells**, second edn, McGraw - Hill International Editions.
- Tiwari, V., Varshney, M., Singh, K. P. e Bharti, S. K. (2024). **A comparative study of mvc architecture model of open source server side scripting language jsp and php for client-server architecture based applications development**, *international journal of engineering technology and management sciences* 8(2): 142–151.
- Trahair, N. S. e Bradford, M. A. (1988). **The behavior and design of steel structures**, 2nd edn, Chapman & Hall.
- Ueda, Y. e Yao, T. (1983). **Ultimate strength of compressed stiffened plates and minimum stiffness ratio of their stiffeners**, *Engineering Structures* 5(2): 97–107.
- Ventsel, E. e Krauthammer, T. (2001). **Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications**, 1st edn, CRC Press.
- Wagner, R. (2009). **A restful catalog for simulations**, *Memorie della Società Astronomica Italiana* 80: 365.
- Wang, B., Tian, K., Hao, P., Cai, Y., Li, Y. e Sun, Y. (2015). **Hybrid analysis and optimization of hierarchical stiffened plates based on asymptotic homogenization method**, *Composite Structures* 132: 136–147.

- Wurzinger, A. e Schoder, S. (2024). **pycfs-data: Data processing framework in python for opencfs.**
- Yasir, M. (2018). **A review on introduction to docker and its features**, *International Journal of Adv. Research in Computer Science and Software Eng.* .
- Zhang, C., Jia, L., Zhang, W. e Wen, N. (2024). **Functional programming paradigm of python for scientific computation pipeline integration.**
- Zhao, W. e Mahdi, M. A. (2023). **Buckling load maximization of stiffened plates using level set topology optimization and inverse isoparametric mapping algorithm**, *AIAA AVIATION 2023 Forum*, American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- Ziemian, R. D. (2010). **Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures**, John Wiley and Sons, New Jersey, USA.
- Zienkiewicz, O. (1971). **The Finite Element Method in Engineering Science**, 2 edn, McGraw-Hill, London.
- Åkesson, B. (2007). **Plate Buckling in Bridges and Other Structures**, Taylor and Francis, London, UK.

A Teoria Elástica de Placas

Durante o processo de revisão bibliográfica do presente trabalho, para que fosse possível analisar e entender o fenômeno de flambagem elasto-plástica biaxial de placas com enrijecedores, foi necessário estudar os conceitos fundamentais da Teoria Elástica de Placas. Nesse sentido, este capítulo busca trazer uma apresentação dos conceitos principais sobre Teoria Elástica de Placas, o que serve ao propósito de construir fundamentação teórica para entender flambagem de placas em um sentido mais amplo.

A.1 Teoria de Pequenos Deslocamentos de Placas Finas de Kirchhoff

Placas são estruturas bidimensionais onde a espessura (h) é de uma ordem de grandeza bem menor que as dimensões de seu plano de desenvolvimento e que estão submetidas a carregamentos que geram deformação por flexão e alongamento. Em virtude disso, geralmente, é possível modelar uma placa sem que haja a necessidade de usar equações tridimensionais da Teoria da Elasticidade. De acordo com Reddy (2006), esta abordagem, que estende a ideia da teoria de vigas de Euler-Bernoulli¹ para as placas, é conhecida como Teoria das Placas Finas de Kirchhoff ou simplesmente como Teoria Clássica de Placas.

Dessa forma, a análise de esforços de uma placa, que essencialmente é de caráter tridimensional, pode ser realizada a partir de uma abordagem bidimensional, onde cada ponto do 3D contínuo pode ser considerado como sobre uma superfície bidimensional de referência. Para isso, de acordo com Szilard (2004), a Teoria das Placas Finas de Kirchhoff é formulada em termos dos deslocamentos transversais $w(x, y)$, de modo que as equações diferenciais parciais governantes são de 4ª ordem, e precisam de duas condições de contorno em cada borda para sua solução.

A.1.1 Hipóteses da Teoria

O tratamento matemático exato do problema de análise de tensões em uma placa fina submetida a carregamentos normais a sua superfície exige a solução de equações

¹A teoria de vigas de Euler-Bernoulli é baseada na hipótese de que uma viga se deforma de tal modo que uma linha reta normal ao eixo da viga antes da flexão permanece (1) reta, (2) inextensível e (3) normal ao eixo da viga após a deformação causada pela flexão.

diferenciais de elasticidade tridimensional, o que pode ser consideravelmente desafiador. No entanto, para a vasta maioria das aplicações, uma abordagem baseada na Teoria das Placas Finas de Kirchhoff conduz a resultados suficientemente precisos. As simplificações utilizadas na derivação das equações da teoria são baseadas nas seguintes hipóteses:

1. Material que constitui a placa segue a Lei de Hooke, isto é, o material é homogêneo, isotrópico e linear-elástico;
2. A placa é inicialmente plana;
3. A superfície média² da placa permanece indeformada durante a flexão;
4. A espessura da placa h é uma constante e seu valor é pequeno quando comparado com as demais dimensões da placa; isto é, a menor dimensão lateral no plano da placa é, pelo menos, 10 vezes maior que sua espessura;
5. As deflexões $w(x, y)$ são pequenas quando comparadas à espessura da placa. A deflexão máxima para esta hipótese permanecer válida é tal que $w_{max}(x, y) \leq \frac{h}{10}$;
6. As inclinações da tangente à superfície média $\vartheta(x, y)$ para a condição deformada são pequenas, isto é, $\vartheta(x, y) \ll 1$ rad;
7. Seções tomadas normais à superfície média antes da deformação permanecem planas e normais a superfície média após a deformação. Para essa hipótese ser válida, as deformações por cisalhamento devem ser desprezadas;
8. As tensões normais σ_z à direção transversal da superfície da placa podem ser desprezadas.

A partir destas hipóteses, de acordo com Szilard (2004), o problema de análise de tensões com base na Teoria da Elasticidade, que rigorosamente é tridimensional, pode ser reduzido a um problema bidimensional. Assim sendo, a seguir, serão deduzidas as equações para a deflexão de placas retangulares com base nas hipóteses apresentadas.

A.1.2 Equações de Placas no Sistema de Coordenadas Cartesiano

Para o contexto de placas retangulares, segundo Szilard (2004), a utilização de um sistema de coordenadas cartesiano, assim como o apresentado na Figura A.1 é uma escolha interessante.

²Conceito equivalente ao eixo neutro da teoria de vigas de Euler-Bernoulli, para o contexto da Teoria de Placas Finas de Kirchhoff.

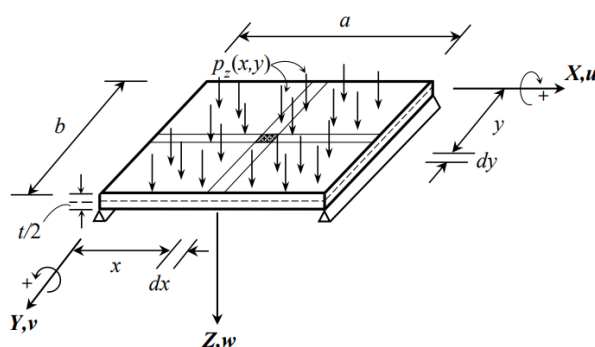


Figura A.1: Geometria da placa retangular e sistema de coordenadas cartesiano utilizado. Fonte: Adaptado de Szilard (2004, p. 24).

As forças internas e externas, assim como as tensões e as componentes de deslocamento u , v e w , são arbitradas e consideradas positivas quando direcionadas para o sentido positivo dos eixos X , Y e Z . Além disso, as tensões normais por flexão são arbitradas de modo a concordar com a convenção de sinais para os momentos fletores, onde estes são positivos quando tracionam as fibras inferiores de placa, conforme pode ser visto na Figura A.2.

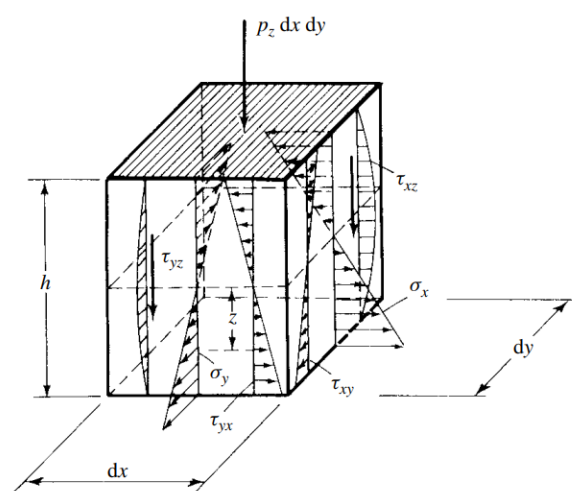


Figura A.2: Componentes de tensão no elemento infinitesimal da placa. Fonte: Szilard (2004, p. 24).

A notação utilizada para nomenclatura dos esforços é tal que o primeiro subíndice de cada esforço ou tensão corresponde a direção normal a seção na qual este atua, enquanto que o segundo subíndice indica a direção no qual o vetor aponta. Por exemplo, σ_x se refere a tensão normal que atua no plano cuja normal tem a direção do eixo X , enquanto que τ_{xy} se refere a tensão de cisalhamento que atua no plano cuja normal tem a direção do eixo X e aponta para a direção do eixo Y .

Uma vez entendidos os referenciais a serem utilizados, o próximo passo é escrever as equações de equilíbrio para poderem ser estabelecidas as relações que serão necessárias

nas próximas etapas. Isto será feito no capítulo que vem a seguir.

A.1.3 Equilíbrio entre esforços internos e ações externas

As equações de equilíbrio em coordenadas retangulares para um placa podem ser derivadas por vários métodos. De acordo com Boresi e Schmidt (2003), elas podem ser derivadas (1) através do equilíbrio de um elemento infinitesimal (dx, dy, dz), conforme é apresentado em Marguerre e Woernle (1969) e Szilard (2004), (2) através da integração das equações de equilíbrio pontuais ao longo da espessura da placa e usando a definição de simetria dos momentos torçores, como consta em Boresi e Schmidt (2003), ou (3) através de aplicação direta do Princípio dos Trabalhos Virtuais, como pode ser visto em Reddy (2006). Para manter a dedução o mais parecido possível com a dedução da teoria de vigas de Euler-Bernoulli, conforme foi realizado em Szilard (2004), será seguida a abordagem 1.

Para o desenvolvimento das expressões que relacionam os esforços, considere-se o equilíbrio de um elemento infinitesimal pertencente a uma placa retangular, submetido a um carregamento externo p_z , conforme indica a Figura A.3.

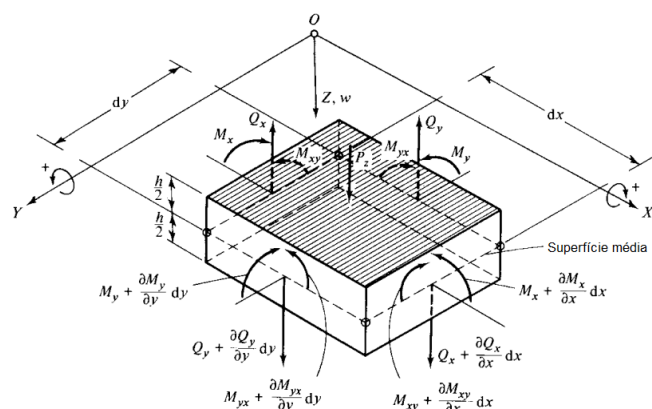


Figura A.3: Esforços internos no elemento infinitesimal da placa. Fonte: Adaptado de Szilard (2004, p. 25).

Em decorrência do seccionamento do elemento em suas quatro bordas, surgem esforços internos para garantir o seu equilíbrio, a saber, esforços cortantes (Q_x, Q_y), momentos fletores (M_x, M_y) e momentos torçores (M_{xy}, M_{yx}). Vale mencionar que tensões normais associadas puramente a esforço normal não são mobilizadas aqui, em virtude da natureza do carregamento externo p_z que é transversal. A partir deste esquema, de acordo com Szilard (2004), percebe-se que o comportamento de uma placa se assemelha bastante com o de uma malha bidimensional de vigas, diferindo essencialmente pela presença dos momentos torçores M_{xy} e M_{yx} . Além disso, de acordo com Lima (2016),

estas parcelas contribuem na resistência ao carregamento interno.

Na teoria das placas, se normaliza os esforços por unidade de comprimento da superfície média. Assim sendo, para se referir aos esforços normalizados, serão utilizadas as notações com letra minúscula q_x , q_y , m_x , m_y , m_{xy} e m_{yx} . Partindo-se dessa premissa, o equilíbrio do elemento infinitesimal fica representado pela Figura A.4.

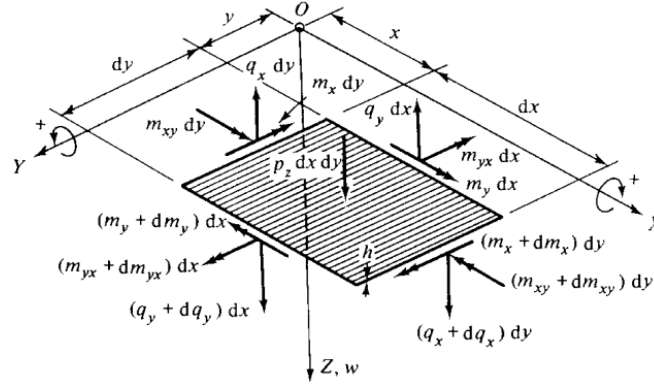


Figura A.4: Esforços internos por unidade de comprimento da superfície média no elemento infinitesimal da placa. Fonte: Adaptado de Szilard (2004, p. 25).

Considerando o equilíbrio do elemento infinitesimal da placa, que está sujeito somente a ações transversais, pode-se escrever as equações de equilíbrio que podem ser usadas:

$$\sum M_x = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\sum M_y = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\sum p_z = 0 \quad (\text{A.3})$$

Começando com o somatório de momentos em torno do eixo y, tem-se:

$$(m_x + dm_x) dy - m_x dy + (m_{yx} + dm_{yx}) dx - m_{yx} dx + (q_x + dq_x) dy \frac{dx}{2} - q_x dy \frac{dx}{2} = 0 \quad (\text{A.4})$$

Escrevendo os diferenciais totais como função das coordenadas cartesianas, isto é:

$$\begin{aligned} dm_x &= \frac{\partial m_x}{\partial x} dx \\ dm_{yx} &= \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy \\ dq_x &= \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \end{aligned}$$

E substituindo-os na Equação (A.4), pode-se chegar a:

$$\begin{aligned} \left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx \right) dy - m_x dy + \left(m_{yx} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy \right) dx - m_{yx} dx \\ + \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy \frac{dx}{2} - q_x dy \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} dxdy + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dxdy - q_x dxdy = 0$$

Dividindo os termos da equação acima por $dxdy$ e reorganizando, chega-se a:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = q_x \quad (\text{A.5})$$

De forma similar, realizando o equilíbrio de momentos em torno do eixo x , obtém-se:

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = q_y \quad (\text{A.6})$$

Considerando o equilíbrio de forças nas direções x e y , é necessário que $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$. Assim, as expressões para os momentos torçores por unidade de comprimento, que atuam em torno da direção x (m_{xy}) e em torno de y (m_{yx}), são dadas, respectivamente, por:

$$m_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \tau z dz \quad (\text{A.7})$$

$$m_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \tau z dz \quad (\text{A.8})$$

de modo que:

$$m_{xy} = m_{yx} \quad (\text{A.9})$$

Calculando o equilíbrio de forças na direção z , tem-se:

$$\left(q_y dx + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dy - q_y dy dx + \left(q_x dy + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dx - q_x dxdy + p_z dxdy = 0$$

Dividindo os termos da equação acima por $dxdy$ e reorganizando, pode-se obter:

$$\frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_x}{\partial x} = -p_z \quad (\text{A.10})$$

Substituindo as Equações (A.5), (A.6) e (A.9) na Equação (A.10), chega-se a:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p_z(x, y) \quad (\text{A.11})$$

Os momentos fletores e torçores por unidade de comprimento na Equação (A.11) dependem das deformações da placa, e estas por sua vez são funções das componentes de deslocamento u , v e w . Na próxima subseção, as relações entre estes esforços e as componentes de deslocamento serão desenvolvidas.

A.1.4 Relações entre tensões, deformações e deslocamentos a partir da Teoria da Elasticidade

A partir da hipótese 1 da página 136, pode-se utilizar a Lei de Hooke bidimensional:

$$\sigma_x = E\epsilon_x + \nu\sigma_y \quad (\text{A.12})$$

$$\sigma_y = E\epsilon_y + \nu\sigma_x \quad (\text{A.13})$$

Substituindo as Equações (A.12) e (A.13) uma na outra, chega-se a:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \quad (\text{A.14})$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_y + \nu\epsilon_x) \quad (\text{A.15})$$

De acordo com as Equações (A.7) e (A.8), os momentos torçores m_{xy} e m_{yx} produzem as tensões de cisalhamento τ_{xy} e τ_{yx} , que podem ser visualizadas na Figura A.5.

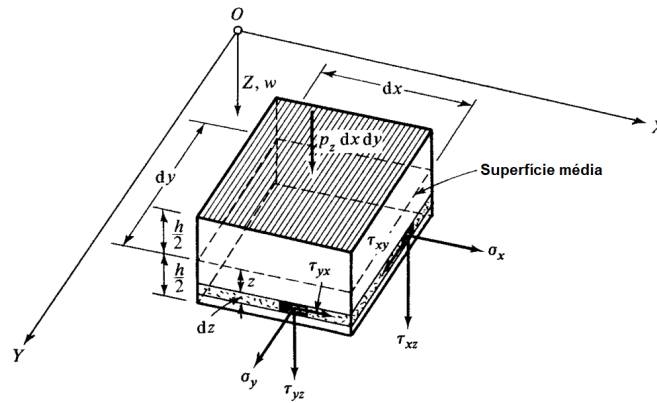


Figura A.5: Tensões de cisalhamento geradas pelos momentos torçores. Fonte: Adaptado de Szilard (2004, p. 28).

Estas tensões, por sua vez, estão relacionadas com as deformações através da formulação da Lei de Hooke para tensões de cisalhamento:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \quad (\text{A.16})$$

Para expressar as deformações em termos das componentes cartesianas, considere-se uma seção a um valor constante de y antes e depois da deflexão, conforme a Figura A.6.

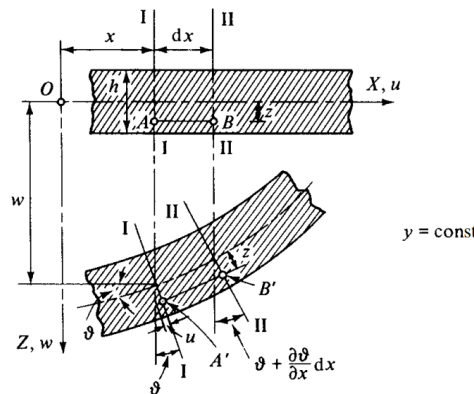


Figura A.6: Seção antes e depois da deflexão. Fonte: Szilard (2004, p. 29).

A partir das hipóteses 6 e 7 da página 136, pode-se expressar o ângulo de rotação das linhas I-I e II-II com relação ao eixo x por:

$$\vartheta_{I-I} = \vartheta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{A.17})$$

$$\vartheta_{II-II} = \vartheta_{I-I} + d\vartheta_{I-I} = \vartheta_x + \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} dx \quad (\text{A.18})$$

Analogamente, para o eixo y :

$$\vartheta_{I-I} = \vartheta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{A.19})$$

$$\vartheta_{II-II} = \vartheta_{I-I} + d\vartheta_{I-I} = \vartheta_y + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} dy \quad (\text{A.20})$$

A partir desse resultado, as componentes de deslocamento u e v ficam sendo:

$$u = z\vartheta_x = -z\frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{A.21})$$

$$v = z\vartheta_y = -z\frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{A.22})$$

Depois da deformação, o comprimento $\overline{AB}$, localizado a uma distância z da superfície média, se torna $\overline{A'B'}$. A partir da definição de deformação:

$$\epsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{[dx + z(\frac{\partial \vartheta}{\partial x})dx] - dx}{dx} = z\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \quad (\text{A.23})$$

Substituindo ϑ_x da Equação (A.17) na Equação (A.23), pode-se chegar a:

$$\epsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{A.24})$$

De forma análoga, para ϵ_y , obtém-se:

$$\epsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (\text{A.25})$$

Para escrever a distorção angular γ_{xy} considere-se a Figura A.7, de modo que o plano da seção está a uma distância constante z da superfície média, e mostra o paralelogramo ABCD (indeformado) e o paralelogramo A'B'C'D' (deformado).

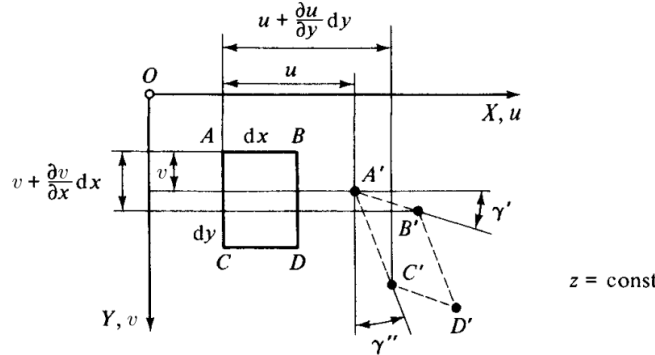


Figura A.7: Distorção angular como função das componentes de deslocamento. Fonte: Szilard (2004, p. 29).

A partir da Figura A.7, pode-se escrever:

$$\gamma_{xy} = \gamma' + \gamma'' \quad (\text{A.26})$$

$$\gamma' = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{A.27})$$

$$\gamma'' = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{A.28})$$

Combinando as Equações (A.26), (A.27) e (A.28), obtém-se:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{A.29})$$

Substituindo as Equações (A.21) e (A.22) na Equação (A.29), chega-se a:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-z \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-z \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{A.30})$$

Assim, as mudanças de curvatura κ_x e κ_y , assim como a razão de empenamento χ ficam sendo:

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{A.31})$$

$$\kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (\text{A.32})$$

$$\chi = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{A.33})$$

Para prosseguir o desenvolvimento, é necessário desenvolver as forças internas em termos da deflexão w . Isto será desenvolvido na próxima seção.

A.1.5 Forças internas expressas em termos de w

As componentes de tensão normal σ_x e σ_y produzem momentos fletores em uma placa de forma bastante semelhante a forma como os produzem na teoria elementar de vigas. Dessa forma, as expressões para m_x e m_y ficam sendo, respectivamente:

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \, dz \quad (\text{A.34})$$

$$m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z \, dz \quad (\text{A.35})$$

As expressões de σ_x e σ_y em função de w podem ser obtidas substituindo-se os resultados das Equações (A.24) e (A.25) nas Equações (A.14) e (A.15), de modo a obter:

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.36})$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (\text{A.37})$$

A partir das equações acima, substituindo os resultados das Equações (A.36) e (A.37) nas Equações (A.34) e (A.35), respectivamente, e resolvendo as integrais, tem-se:

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$m_y = \int_{-h/2}^{h/2} -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) z dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

Para os momentos torçores, combinando os resultados de (A.7), (A.8), (A.9), (A.16) e (A.30) e resolvendo a integral, tem-se:

$$m_{xy} = m_{yx} = \int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \tau z dz = -2G \int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z^2 dz = -\frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{A.38})$$

Considerando-se que pode-se extrair a constante D , de modo que:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (\text{A.39})$$

E refatorando os resultados de m_x e m_y usando os resultados das Equações (A.31), (A.32), assim como os resultados de m_{xy} e m_{yx} a partir do resultado da Equação (A.33) e utilizando a expressão (A.39) de D , obtém-se:

$$m_x = D(\kappa_x + \nu\kappa_y) \quad (\text{A.40})$$

$$m_y = D(\kappa_y + \nu\kappa_x) \quad (\text{A.41})$$

$$m_{xy} = m_{yx} = -(1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -(1-\nu)D\chi \quad (\text{A.42})$$

Agregando os resultados das Equações (A.40), (A.41) e (A.42) a Equação (A.11), chega-se ao resultado da Equação (A.43), que é conhecido como a equação diferencial governante de placas submetidas a carregamentos transversais.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z(x, y)}{D} \quad (\text{A.43})$$

que também pode ser representada de forma mais condensada utilizando o operador diferencial ∇ como segue:

$$D\nabla^2 \nabla^2 w(x, y) = p_z(x, y) \quad (\text{A.44})$$

A Equação (A.43) é uma equação diferencial parcial de quarta ordem não-homogênea, elíptica com coeficientes constantes, também conhecida como equação bi-harmônica não-homogênea. Além disso, de acordo com Szilard (2004), esta equação é uma equação

linear, uma vez que as derivadas de $w(x, y)$ não têm expoentes maiores do que 1.

Para obter as expressões de q_x e q_y em função de w , basta substituir os resultados das Equações (A.40), (A.41), (A.42) nas Equações (A.5) e (A.6), onde obtém-se:

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \quad (\text{A.45})$$

$$q_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) \quad (\text{A.46})$$

O problema da placa é considerado resolvido se uma dada solução para a deflexão $w(x, y)$ consegue satisfazer, simultaneamente, a Equação (A.43) e as condições de contorno impostas pelo caso específico que se está analisando. Sendo assim, de acordo com Szilard (2004), a solução do problema de placa é um caso particular de problema de valor de contorno da área de física matemática. Isto dito, na próxima seção, serão apresentadas as condições de contorno mais comuns para solução de problemas de placa.

A.1.6 Condições de contorno da Teoria das Placas de Kirchhoff

Para obter uma solução exata para um determinado problema de placa, para além da dedução das equações governantes, há que se entender as condições de contorno que regem este problema. Em virtude da Equação (A.43) ser de quarta ordem, é necessário que hajam duas condições de contorno em cada borda. Além disso, para a flexão de placas, três tipos de esforços internos são predominantes (cisalhamento transversal, momentos fletores e torçores). Estes esforços geram componentes de deslocamento de translação e rotação, que podem ser usadas para formulação de condições de contorno.

Para exemplificar os tipos de condições de contorno, considere-se a Figura A.8 a seguir, que traz os diferentes tipos de condições de contorno.

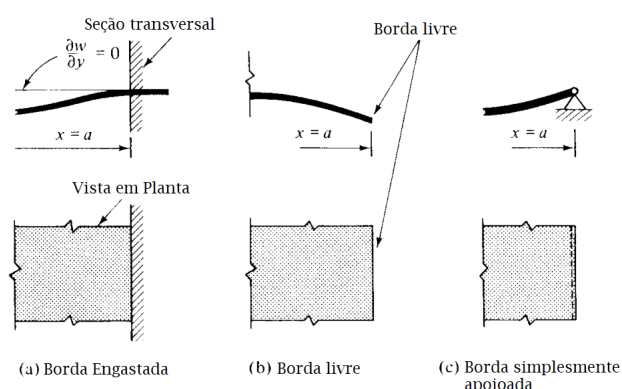


Figura A.8: Condições de contorno. Fonte: Adaptado de Szilard (2004, p. 36).

As placas exemplificadas acima possuem comprimento paralelo a x igual a a e com-

primento paralelo a y igual a b , de tal forma que $a > b$. Além disso, os itens a, b e c da Figura A.8 se referem, respectivamente, às condições de contorno de borda fixa a translação e rotação, borda livre e borda simplesmente apoiada. As implicações matemáticas de cada uma destas condições de contorno serão desenvolvidas a seguir.

A.1.6.1 Condições de contorno geométricas (Borda fixa a translação e rotação)

De acordo com Szilard (2004), as condições geométricas fornecidas pela magnitude dos deslocamentos de translação e rotação podem ser utilizados para formular condições de contorno. Para bordas fixas, tanto as translações quanto rotações são nulas. Isso implica dizer que:

$$(w_x)_{x=0} = (w_x)_{x=a} = 0 \quad (\text{A.47})$$

$$(\vartheta_x)_{x=0} = (\vartheta_x)_{x=a} = 0 \quad (\text{A.48})$$

$$(w_y)_{y=0} = (w_y)_{y=b} = 0 \quad (\text{A.49})$$

$$(\vartheta_x)_{y=0} = (\vartheta_x)_{y=b} = 0 \quad (\text{A.50})$$

Estas condições de contorno são denominadas condições de contorno geométricas.

A.1.6.2 Condições de contorno estáticas (Borda livre não-carregada)

As forças de extremidade podem fornecer condições de contorno que se denominam estáticas. Para o caso do item b da Figura A.8, em que se tem uma borda livre não-carregada, pode-se dizer que os pares v_x e m_x ou v_y e m_y são nulos, de modo que as equações:

$$(v_x)_{x=0} = (v_x)_{x=a} = 0 \quad (\text{A.51})$$

$$(m_x)_{x=0} = (m_x)_{x=a} = 0 \quad (\text{A.52})$$

ou

$$(v_y)_{y=0} = (v_y)_{y=b} = 0 \quad (\text{A.53})$$

$$(m_y)_{y=0} = (m_y)_{y=b} = 0 \quad (\text{A.54})$$

são aplicáveis como condições de contorno. Além disso, os esforços cortantes v_x e v_y englobam duas parcelas, que advém do cisalhamento transversal e dos momentos torçores. Considerando que as bordas da placa tem normais σ_x e σ_y , pode-se escrever os esforços cortantes nas bordas por unidade de comprimento como sendo:

$$v_x(0) = v_x(a) = q_x + \underbrace{\frac{\partial m_{xy}}{\partial y}}_{q_x^*} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \quad (\text{A.55})$$

$$v_y(0) = v_y(b) = q_y + \underbrace{\frac{\partial m_{yx}}{\partial x}}_{q_y^*} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] \quad (\text{A.56})$$

As parcelas $q_x^* = \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}$ e $q_y^* = \frac{\partial m_{yx}}{\partial x}$ representam as forças adicionais de cisalhamento por unidade de comprimento nas bordas, que são geradas pelos momentos de torção m_{xy} e m_{yx} , e são conhecidas como forças suplementares de Kirchhoff. Ao substituir os momentos torçores por binários dessas forças suplementares (como pode ser visto na Figura A.9), se reduz o número de incógnitas de três para duas, de modo que se resolve o problema com duas condições de contorno para cada borda.

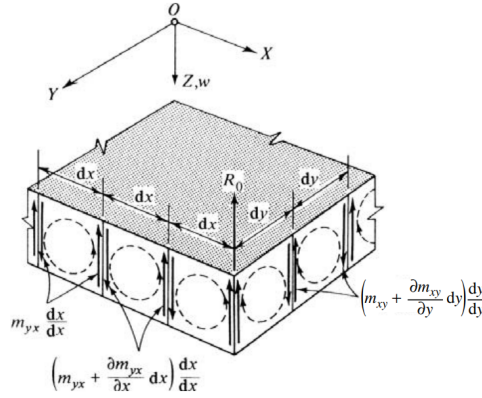


Figura A.9: Condições de contorno. Fonte: Adaptado de Szilard (2004, p. 37).

Consequentemente, unindo os resultados das Equações (A.40), (A.41), (A.51), (A.52), (A.53), (A.54), (A.55) e (A.56), obtém-se as condições de contorno estáticas:

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{x=0} = 0 \quad (\text{A.57})$$

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=0} = 0 \quad (\text{A.58})$$

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{x=a} = 0 \quad (\text{A.59})$$

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} = 0 \quad (\text{A.60})$$

$$(\text{A.61})$$

ou, para a direção y :

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{y=0} = 0 \quad (\text{A.62})$$

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{y=0} = 0 \quad (\text{A.63})$$

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{y=b} = 0 \quad (\text{A.64})$$

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{y=b} = 0 \quad (\text{A.65})$$

$$(\text{A.66})$$

A.1.6.3 Condições de contorno mistas (Borda simplesmente apoiada)

Para bordas simplesmente apoiadas, tem-se que tanto as translações verticais quanto os momentos fletores são nulos, de modo que, para as bordas paralelas a direção x:

$$(w)_{x=0,a} = 0 \quad (\text{A.67})$$

$$(m_x)_{x=0,a} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0,a} = 0 \quad (\text{A.68})$$

Analogamente, para as bordas paralelas a direção y, tem-se:

$$(w)_{y=0,b} = 0 \quad (\text{A.69})$$

$$(m_y)_{y=0,b} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=0,b} = 0 \quad (\text{A.70})$$

Nos cantos da placa, de acordo com Szilard (2004), as forças geradas pelos momentos torçores se somam ao invés de se cancelar, pois possuem mesmo sentido, gerando forças de canto adicionais R_0 . Se não for provisionada uma ancoragem adequada, estas podem levantar as bordas, como pode ser visto na Figura A.10.

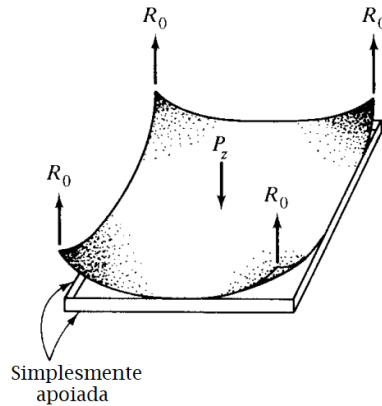


Figura A.10: Condições de contorno. Fonte: Adaptado de Szilard (2004, p. 38).

A expressão para R_0 é dada por:

$$R_0 = 2m_{xy} = -2D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{A.71})$$

Szillard (2004) adiciona que, para os casos de bordas fixas a translação e rotação ou bordas livres, este fenômeno não ocorre, porque os momentos torçores ao longo das bordas são nulos em ambos os casos.

A.1.7 Solução da equação diferencial das placas finas de Kirchhoff

A solução analítica exata para a Equação (A.43) precisa ser uma função $w(x, y)$ que satisfaça as condições de contorno de um determinado problema. Além disso, de acordo com Szillard (2004), em virtude do caráter linear da Equação (A.43), é possível utilizar o princípio da superposição, de modo que pode-se escrever:

$$w(x, y) = w_H(x, y) + w_P(x, y) \quad (\text{A.72})$$

em que $w_H(x, y)$ simboliza a solução homogênea (que tem significado físico das condições de vinculação das bordas da placa) e $w_P(x, y)$ simboliza a solução particular (que representa as parcelas que garantem o equilíbrio das ações externas $p_z(x, y)$).

As soluções analíticas para casos fechados podem ser encontradas em literaturas clássicas como Timoshenko e Krieger (1959) e Szillard (2004). Cabe salientar que estas soluções foram amplamente utilizadas para o desenvolvimento de projetos para estruturas reais no contexto de cálculos feitos sem o auxílio de computadores, o que justifica sua importância e relevância histórica. No entanto, a obtenção dessas soluções, muitas vezes, só é possível para condições de carregamento e de contorno bastante simplificadas, o que conduziu às abordagens contemporâneas, baseadas em equações mais complexas, a serem abordadas em uma metodologia baseada de métodos numéricos, como o Método dos Elementos Finitos (MEF).

A.2 Teorias de Deformação por Cisalhamento de 1ª Ordem de Reissner-Mindlin

As hipóteses da teoria de placas finas de Kirchhoff conduzem a resultados suficientemente precisos para o caso de placas finas. No entanto, de acordo com Ventsel e Krauthammer (2001), esta teoria possui as seguintes limitações:

1. As condições de contorno da teoria de Kirchhoff consideram apenas duas carac-

terísticas na borda livre ao invés de três (utilizando o sistema equivalente que transforma os momentos torçores em um binário de forças, que pode ser visto na Figura A.9). Esta simplificação não pode ser generalizada para qualquer caso, e faz com que a distribuição de tensões prevista pela teoria de Kirchhoff não concorde com as tensões reais, especialmente na vizinhança das bordas;

2. A teoria de Kirchhoff apresenta algumas contradições com relações as equações tridimensionais da elasticidade, sendo a de mais notável importância aqui a relação da lei de Hooke para as tensões de cisalhamento transversais τ_{xz} e τ_{yz} . De acordo com a hipótese 7 da página 136, as deformações γ_{xz} e γ_{yz} precisariam ser nulas. No entanto, para isso acontecer, as tensões τ_{xz} e τ_{yz} , pela lei de Hooke, também precisariam ser nulas, o que não é possível, porque os esforços cortantes v_x e v_y são necessárias para que aconteça o equilíbrio do elemento infinitesimal.

Pensando em suprir essas limitações, vários autores buscaram formas de refinar a teoria de Kirchhoff. De acordo com Szilard (2004), a primeira tentativa neste sentido foi realizada por Levy (1877), onde foram apresentadas soluções para elasticidade tridimensional. Mais tarde, duas abordagens levaram em consideração o efeito das deformações por cisalhamento: Reissner (1944) considerou as tensões normais como variáveis principais, enquanto que Mindlin (1951) considerou os deslocamentos como incógnitas. O desenvolvimento das formulações destas duas teorias será apresentado a seguir.

A.2.1 Teoria de Reissner

As principais limitações da Teoria de Kirchhoff, discutidas na seção anterior são parcialmente eliminadas por Reissner (1944), introduzindo a influência do cisalhamento transversal, em uma formulação baseada em tensões. Na sequência são apresentadas as considerações que ele utilizou, assim como as equações e condições de contorno para solução do problema.

A.2.1.1 Hipóteses da Teoria

As simplificações utilizadas na derivação das equações da teoria são baseadas nas seguintes hipóteses:

1. A variação do campo de deslocamento ao longo da espessura da placa é linear;
2. Quando da flexão da placa, seções planas permanecem planas, mas linhas antes perpendiculares a superfície média assim não permanecem após a deformação.

A.2.1.2 Equações da Teoria

Considere-se a Figura A.11. De acordo com a hipótese 2, os ângulos de rotação de uma linha originalmente perpendicular após a deformação passam a ser ω_x e ω_y .

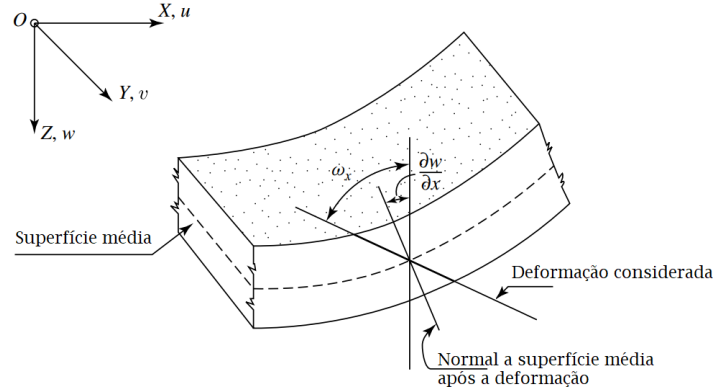


Figura A.11: Hipótese da rotação das linhas originalmente perpendiculares de Reissner. Fonte: Adaptado de Szilard (2004, p. 46).

De acordo com Szilard (2004), estes ângulos de rotação podem ser expressos pelas equações a seguir, onde ϑ_x e ϑ_y simbolizam os ângulos assumidos na Teoria de Kirchhoff. Além disso, os termos destacados em azul nas equações a seguir simbolizam os termos agregados pela hipótese 2 de Reissner (1944):

$$\omega_x = \underbrace{-\frac{\partial w}{\partial x}}_{\vartheta_x} + \frac{6}{5Gh} q_x \quad (\text{A.73})$$

$$\omega_y = \underbrace{-\frac{\partial w}{\partial y}}_{\vartheta_y} + \frac{6}{5Gh} q_y \quad (\text{A.74})$$

Através das relações mostradas acima, e utilizando o Teorema do Trabalho Mínimo de Castigliano, usando tensões como variáveis, Reissner (1944) obteve o seguinte sistema de equações:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = p_z - \frac{h^2}{10} \frac{2-\nu}{1-\nu} \nabla^2 p_z \quad (\text{A.75})$$

$$q_x = -D \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial x} + \frac{h^2}{10} \nabla^2 q_x - \frac{h^2}{10} \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial p_z}{\partial x} \quad (\text{A.76})$$

$$q_y = -D \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial y} + \frac{h^2}{10} \nabla^2 q_y - \frac{h^2}{10} \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial p_z}{\partial y} \quad (\text{A.77})$$

Desenvolvendo-se as expressões para os momentos fletores e torçores, obtém-se:

$$m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{h^2}{5} \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{h^2}{10} \frac{\nu}{1-\nu} p_z \quad (\text{A.78})$$

$$m_y = -D \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{h^2}{5} \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{h^2}{10} \frac{\nu}{1-\nu} p_z \quad (\text{A.79})$$

$$m_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{h^2}{10} \left(\frac{\partial q_y}{\partial x} + \frac{\partial q_x}{\partial y} \right) \quad (\text{A.80})$$

As equações governantes acima representam uma integração de um problema de sexta ordem. De acordo com Szilard (2004), isso traz como consequência a necessidade de que três condições de contorno independentes sejam satisfeitas em cada borda.

A.2.1.3 Condições de contorno

Em seguida, são apresentadas as condições de contorno para a Teoria de Reissner. Para isso, considere-se novamente a Figura A.8.

- Condições de contorno geométricas (Borda fixa a translação e rotação): De acordo com Szilard (2004), para bordas fixas, tanto as translações quanto rotações são nulas. Isso implica dizer que:

$$(w_x)_{x=a} = 0 \quad (\text{A.81})$$

$$(w_y)_{x=a} = 0 \quad (\text{A.82})$$

$$(\omega_x)_{x=a} = 0 \quad (\text{A.83})$$

- Condições de contorno estáticas (Condições de borda livre não-carregada): De acordo com Ventsel e Krauthammer (2001), para a borda livre é necessário que as tensões σ_x , τ_{xy} e τ_{xz} sejam nulas, o que implica em:

$$(q_x)_{x=a} = 0 \quad (\text{A.84})$$

$$(m_x)_{x=a} = 0 \quad (\text{A.85})$$

$$(m_{xy})_{x=a} = 0 \quad (\text{A.86})$$

- Condições de contorno mistas (Condições de borda simplesmente apoiada): De acordo com Szilard (2004), para uma borda de placa simplesmente apoiada, tem-se:

$$(w)_{x=a} = 0 \quad (\text{A.87})$$

$$(m_x)_{x=a} = 0 \quad (\text{A.88})$$

$$(m_{xy})_{x=a} = 0 \quad (\text{A.89})$$

Com o passar dos anos, mediante as contribuições de muitos outros autores, Reissner aprimorou sua teoria e formulou equações diferenciais em termos do deslocamento

$w(x, y)$, como pode ser visto em Reissner (1985). No entanto, em virtude da complexidade de solução analítica destas, surgiram abordagens simplificadas, dentre as quais Szilard (2004) destaca duas: Speare e Kemp (1977) e Baluch e Voyiadjis (1980).

A.2.2 Teoria de Mindlin

De acordo com Szilard (2004), a Teoria de Mindlin (1951) é a formulação baseada em deslocamentos mais utilizada para placas moderadamente esbeltas. Ela veio depois da formulação de Reissner, e contribuiu fortemente para o aprimoramento da consideração de deformações por cisalhamento no cálculo de tensões e deslocamentos, sendo base para muitos estudos que vieram na área logo depois.

A.2.2.1 Hipóteses da Teoria

As simplificações utilizadas na derivação das equações da teoria são baseadas nas seguintes hipóteses:

1. Os deslocamentos no plano da placa (ver Figura A.7 da página 142) podem ser escritos como sendo:

$$u = z\psi_x(x, y) \quad (\text{A.90})$$

$$v = z\psi_y(x, y) \quad (\text{A.91})$$

2. Como os deslocamentos transversais $w(x, y)$ são independentes de z , nenhum alongamento no sentido da espessura é permitido.

Observe que a hipótese 1 de Mindlin é análoga a hipótese 2 de Reissner, de modo que pode-se escrever $\omega_x = \psi_x$ e $\omega_y = \psi_y$. De acordo com Szilard (2004), esta hipótese inicial está equivocada, uma vez que as equações (A.90) e (A.91) conduzem a valores de tensões e deformações por cisalhamento constantes, o que difere do comportamento real, em que as tensões são nulas nas bordas superior e inferior e têm uma distribuição parabólica. Para corrigir estas inconsistências, foi introduzido um fator de correção κ^2 , que foi obtido a partir da comparação com soluções elásticas exatas.

A.2.2.2 Equações da Teoria

Usando o teorema de mínima energia potencial, Mindlin (1951) deduziu as equações a seguir, em que:

$$\phi = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \quad (\text{A.92})$$

E as equações de equilíbrio, na forma diferencial ficam sendo:

$$\kappa^2 Gh(\nabla^2 w + \phi) + p_z(x, y) = 0 \quad (\text{A.93})$$

$$\frac{D}{2} \left[(1 - \nu) \nabla^2 \psi_x + (1 + \nu) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] - \kappa^2 Gh \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{A.94})$$

$$\frac{D}{2} \left[(1 - \nu) \nabla^2 \psi_y + (1 + \nu) \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] - \kappa^2 Gh \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{A.95})$$

Utilizando as equações acima, pode-se chegar nos esforços internos expressos como sendo:

$$q_x = \kappa^2 Gh \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (\text{A.96})$$

$$q_y = \kappa^2 Gh \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (\text{A.97})$$

$$m_x = D \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \quad (\text{A.98})$$

$$m_y = D \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) \quad (\text{A.99})$$

$$m_{xy} = m_{yx} = \frac{1 - \nu}{2} D \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right) \quad (\text{A.100})$$

A.2.2.3 Condições de contorno

- Condições de contorno geométricas (Borda fixa a translação e rotação): De acordo com Szilard (2004), para bordas fixas, tanto as translações quanto rotações são nulas. Isso implica dizer que:

$$(w_x)_{x=a} = 0 \quad (\text{A.101})$$

$$(\psi_x)_{x=a} = 0 \quad (\text{A.102})$$

$$(\psi_y)_{x=a} = 0 \quad (\text{A.103})$$

- Condições de contorno estáticas (Borda livre não-carregada): De acordo com Ventsel e Krauthammer (2001), para a borda livre é necessário que as tensões σ_x , τ_{xy} e τ_{xz} sejam nulas, o que implica em:

$$(m_x)_{x=a} = 0 \quad (\text{A.104})$$

$$(m_{xy})_{x=a} = 0 \quad (\text{A.105})$$

$$(q_x)_{x=a} = 0 \quad (\text{A.106})$$

- Condições de contorno mistas (Borda simplesmente apoiada): Segundo Szilard

(2004), para uma borda de placa simplesmente apoiada, tem-se:

$$(w_x)_{x=a} = 0 \quad (\text{A.107})$$

$$(\psi_x)_{x=a} = 0 \quad (\text{A.108})$$

$$(m_x)_{x=a} = 0 \quad (\text{A.109})$$

Os avanços gerados por Reissner e Mindlin, ao agregar o efeito das deformações de cisalhamento a abordagem clássica das placas de Kirchhoff e ao estimular, junto a outros autores, o debate sobre o assunto entre as décadas de 1940 a 1980, fizeram com que modelos numéricos e trabalhos que vieram depois, baseados nas ideias destes dois autores, se refiram a esta abordagem como Teoria das Placas de Reissner-Mindlin.

A.3 Flambagem de Placas

A flambagem de placas pode ocorrer de duas formas: a flambagem elástica, que ocorre quando a instabilidade se dá para um valor menor do que a carga que conduz a tensão de escoamento do material (regime elástico), onde esta carga é denominada de carga crítica de flambagem ($\bar{N}_{cr}$); e a flambagem elasto-plástica, que ocorre em casos em que a esbeltez da placa diminui e a instabilidade se dá para uma carga já no regime plástico, onde esta carga é denominada de carga última de flambagem ($\bar{N}_u$).

Quando a flambagem se dá para carregamentos compressivos atuantes em duas direções perpendiculares entre si, o fenômeno é denominado de flambagem biaxial³. De acordo com Jones (2006), a presença dessas duas cargas causa a flambagem antes que qualquer uma delas atinja o valor de flambagem uniaxial, isto é, a rigidez a flambagem da placa reduz em presença do carregamento combinado biaxial, como pode ser visto na Figura A.12 a seguir. Note que, para que haja compatibilidade da carga de flambagem nas duas direções, há uma mudança na forma do modo de flambagem, que faz com que ocorra uma redução da inclinação das linhas de forma do modo de flambagem.

A carga crítica de uma placa pode ser deduzida através de abordagens como: a equação diferencial do equilíbrio estático, presente em Szilard (2004) e utilizada neste trabalho; a utilização de métodos de energia, como presente em Shanmugam e Wang (2021); ou ainda através de uma abordagem dinâmica, que compara as equações diferenciais de flambagem e vibração, como pode ser visto em Hahn (1957).

³Jones (2006) explica a possibilidade da aplicação de carregamentos em cada direção ser sequencial ou simultânea (carregamento proporcional). Para efeito deste trabalho, sempre que for mencionado o termo flambagem biaxial, este se referirá a flambagem biaxial a carregamento proporcional.

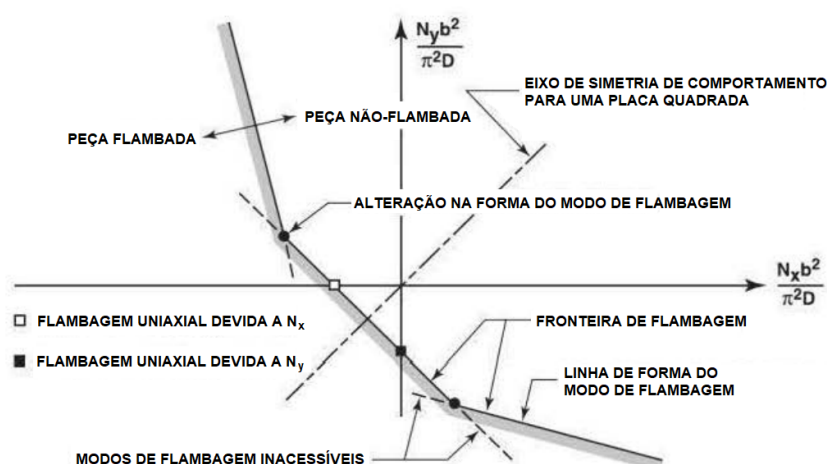


Figura A.12: Natureza geral dos resultados para flambagem biaxial. Fonte: Adaptado de Jones (2006, p. 272).

A.3.1 Equação diferencial da flambagem para placas

As equações derivadas na seção A.1 foram deduzidas considerando que não existiam cargas atuando na direção do plano da placa. Nesta seção serão deduzidas as relações para a deflexão lateral de uma placa submetida a cargas axiais.

Para isso, considere-se o equilíbrio de um elemento diferencial $dx dy$, submetido aos esforços por unidade de comprimento n_x , n_y e $n_{xy} = n_{yx}$, como na Figura A.13.

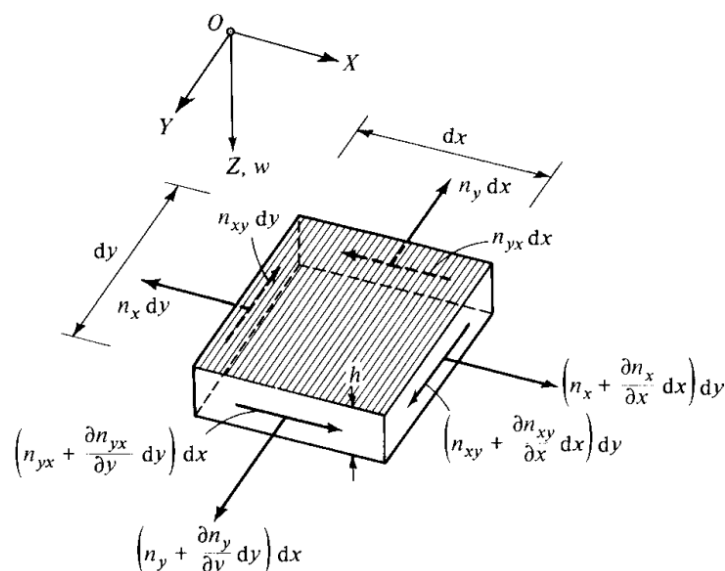


Figura A.13: Esforços de membrana para um elemento infinitesimal da placa. Fonte: Adaptado de Szilard (2004, p. 147).

Escrevendo a equação de equilíbrio de esforços na direção X , em que o incremento nos esforços normais em faces opostas pode ser aproximado pela expansão de Taylor

com truncamento no segundo termo, tem-se:

$$\left(n_x + \frac{\partial n_x}{\partial x} dx\right) dy - n_x dy + \left(n_{yx} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} dy\right) dx - n_{yx} dx = 0$$

que pode ser simplificada para:

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.110})$$

Analogamente, para a direção Y, obtem-se:

$$\frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.111})$$

De acordo com Szilard (2004), as Equações (A.110) e (A.111) formam um sistema de equações que, quando a espessura da placa é constante, pode ser reescrito em termos da função de tensões $\Phi(x, y)$ de Airy, como segue:

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0 \quad (\text{A.112})$$

Isto dito, considere-se o equilíbrio na direção Z para o elemento infinitesimal da placa na condição deformada, como pode ser visto na Figura A.14:

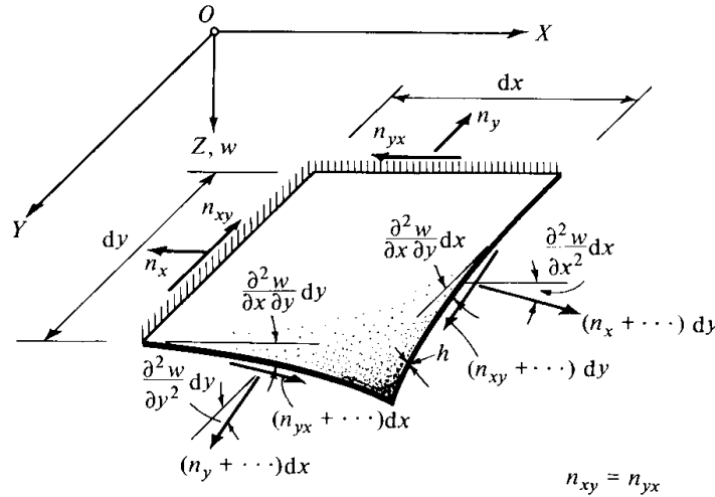


Figura A.14: Esforços de membrana para um elemento infinitesimal deformado da placa. Fonte: Adaptado de Szilard (2004, p. 148).

Para simplificar, se assume que os lados opostos da placa estão engastados e contidos no plano \$XY\$. Dessa forma, a soma das componentes dos esforços de membrana na direção do eixo \$Z\$ resulta em:

$$\begin{aligned} \sum F_z = & \left(n_x + \frac{\partial n_x}{\partial x} dx\right) dy \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + \left(n_y + \frac{\partial n_y}{\partial y} dy\right) dx \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy \\ & + \left(n_{xy} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} dx\right) dy \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx \\ & + \left(n_{yx} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} dy\right) dx \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy \end{aligned}$$

Desprezando os termos de alta ordem da equação acima, chega-se a:

$$n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + n_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2n_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = p_z^*(x, y) \quad (\text{A.113})$$

onde p_z^* é o esforço transversal fictício gerado pelas contribuições dos esforços de membrana. Somando esta carga p_z^* aos esforços transversais na Equação (A.43), obtém-se

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(p_z + n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2n_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + n_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.114})$$

Como a carga p_z precisa ser nula no estado de equilíbrio neutro, a equação diferencial acima pode ser reescrita na forma:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2n_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + n_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.115})$$

De acordo com Da Silveira (2021) a Equação (A.115) é conhecida como equação diferencial governante da instabilidade elástica das placas.

A.3.2 Flambagem elástica biaxial de placas retangulares

A.3.2.1 Obtenção da carga crítica através do Método do Equilíbrio

Considere-se uma placa retangular sujeita a ação de esforços $\bar{n}_x$, $\bar{n}_y$ e $\bar{n}_{xy}$, atuantes na superfície média de forma coplanar a placa, como pode-se ver na Figura A.15.

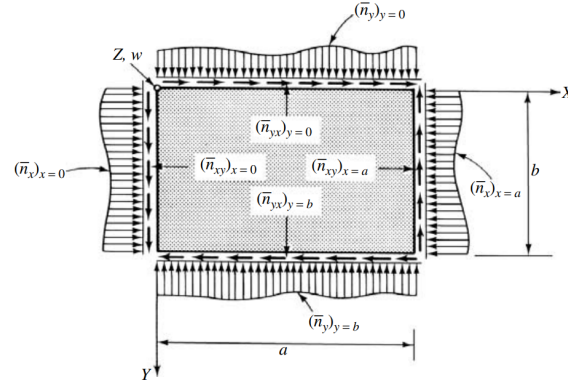


Figura A.15: Placa retangular submetida a esforços nas bordas no plano da superfície média. Fonte: Adaptado de Szilard (2004, p. 912).

É possível escrever estes esforços como função de um fator de carga λ , de modo que:

$$n_x = -\lambda \bar{n}_{x0} \quad (\text{A.116})$$

$$n_y = -\lambda \bar{n}_{y0} \quad (\text{A.117})$$

$$n_{xy} = -\lambda \bar{n}_{xy0} \quad (\text{A.118})$$

Através das equações acima, observa-se que um aumento de λ faz com que ocorra um

aumento das cargas aplicadas nas bordas. Além disso, de acordo com Szilard (2004), para um dado valor de λ , mesmo sem carregamentos transversais, as deformações atingem o ponto de bifurcação (ver Figura 2.2), e a placa sofre deflexão lateral.

Substituindo as Equações (A.116), (A.117) e (A.118) na Equação (A.115), obtém-se:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{\lambda}{D} \left(\bar{n}_{x0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\bar{n}_{xy0} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \bar{n}_{y0} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.119})$$

Quando há ações combinadas ($\bar{n}_{x0}$ e/ou $\bar{n}_{y0}$ e/ou $\bar{n}_{xy0}$ não-nulos), é comum especificar a relação entre as cargas como as razões ξ_y e ξ_{xy} Szilard (2004):

$$\bar{n}_{y0} = \xi_y \bar{n}_{x0} \quad (\text{A.120})$$

$$\bar{n}_{xy0} = \xi_{xy} \bar{n}_{x0} \quad (\text{A.121})$$

de modo que a expressão da equação de instabilidade fica sendo:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{\lambda \bar{n}_{x0}}{D} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\xi_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \xi_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.122})$$

Com a Equação (A.122), se determina a carga crítica incrementando o valor de λ e avaliando o menor valor para o qual a placa atinge o ponto de bifurcação. Além disso, de acordo com Szilard (2004), a Equação (A.122) é homogênea e linear, e o fator de carga λ aparece nos coeficientes dos termos de ordem mais baixa, caracterizando esta como um problema de autovalores, de modo que a solução rigorosa deve satisfazer a Equação (A.122) e as condições de contorno. A Equação (A.122) possui uma grande dificuldade de solução analítica. Assim, a abordagem de solução para esta é o emprego de métodos numéricos. No entanto, é importante que a abordagem numérica seja verificada mediante resultados analíticos ou resultados numéricos consolidados na literatura.

Uma vez encontrado o menor autovalor (λ_{cr}) associado ao modo de deformação para uma carga externa $\bar{n}_{x0}$, a carga crítica ($\bar{n}_{cr}$) pode ser obtida por:

$$\bar{n}_{cr} = \lambda_{cr} \bar{n}_{x0} \quad (\text{A.123})$$

Como a carga crítica ($\bar{n}_{cr}$) tem dimensões de força por unidade de comprimento, para obtenção da tensão crítica σ_{cr} , basta dividir $\bar{n}_{cr}$ pela espessura t da placa, isto é:

$$\sigma_{cr} = \frac{\bar{n}_{cr}}{t} \quad (\text{A.124})$$

B Script APDL de Análise de Flambagem Elasto-Plástica Biaxial

```
1  ! Definições iniciais pré-geometria
2  !! Current Working Directory (Diretório onde os arquivos gerados
   durante a análise serão salvos)
3  /CWD,'D:/constructal_automate_analysis_files/ec_2a_2_2_phi_0.3
   _lancanova_2024/BL2M1P0.3L2T2_k6.333_MS25_SP1'
4  !! Nome dos arquivos que serão gerados pelo MAPDL
5  /FILENAME,BL2M1P0.3L2T2_k6.333_MS25_SP1,1
6  !! Título da análise dentro do MAPDL
7  /TITLE,BL2M1P0.3L2T2_k6.333_MS25_SP4
8
9  !! Definição dos parâmetros escalares
10 *SET,a,2000
11 *SET,b,1000
12 *SET,NTS,2
13 *SET,NLS,2
14 *SET,ATS,a/(NTS+1)
15 *SET,BLS,b/(NLS+1)
16 *SET,TP,9.80
17 *SET,TS,15.00
18 *SET,HS_REAL,95.00
19 *SET,HS_MODELO,HS_REAL + TP/2
20 *SET,E,2.1e5
21 *SET,POISSON,0.3
22 *SET,DENSITY,7850
23 *SET,SIGMA_Y,355
24 *SET,E_TAG,0
25 *SET,MESH_SIZE,25
26 *SET,OFFSET_BORDA_INICIAL,0.40
27 *SET,OFFSET_BORDA_FINAL,0.60
28 *SET,OFFSET_Z_INICIAL,0.40
29 *SET,OFFSET_Z_FINAL,0.60
30 *SET,CARGA_PE,1
31 *SET,CARGA_PU,3479.00
32
```

```
33  ! Pré-Processamento
34  /PREP7 ,
35  !!Definição do elemento finito
36  /GO
37  ET ,1 ,SHELL281 , , , , , ,
38
39  !!Definição do material
40  MPTEMP , , , , , ,
41  MPTEMP ,1 ,0 , , , , ,
42  MPDATA ,EX ,1 , ,E , , , , ,
43  MPDATA ,PRXY ,1 , ,POISSON , , , , ,
44  MP ,DENS ,1 ,DENSITY
45
46  !!Mudar view para perspectiva
47  /VIEW ,1 ,1 ,1 ,1
48  /ANG ,1
49  /REP ,FAST
50
51  !!Definição das seções
52  !!! Seção da placa
53  SECT ,1 ,shell
54  SECDATA ,TP ,1 ,0 ,5 , , , , , ,
55  SECOFFSET ,TOP , , , , , ,
56  SECCONTROL ,0 ,0 ,0 ,0 ,1 ,1 ,1 , , , , ,
57
58  !!! Seção dos enrijecedores
59  SECT ,2 ,shell
60  SECDATA ,TS ,1 ,0 ,5 , , , , , ,
61  SECOFFSET ,MID , , , , , ,
62  SECCONTROL ,0 ,0 ,0 ,0 ,1 ,1 ,1 , , , , ,
63
64  !! Geometria Pré-Partição de Áreas
65  !!! Definição dos KPs
66  K ,1 ,a/3 ,0 ,0
67  K ,2 ,a/3 ,b ,0
68  K ,3 ,a/3 ,b ,HS_MODELO
69  K ,4 ,a/3 ,0 ,HS_MODELO
70  K ,5 ,0 ,b/3 ,0
```

```
71 K,6,a,b/3,0
72 K,7,a,b/3,HS_MODELO
73 K,8,0,b/3,HS_MODELO
74
75 !!! Enrijecedores transversais
76 !!!! Criação da área base
77 FLST,2,4,3,,
78 FITEM,2,1,,
79 FITEM,2,2,,
80 FITEM,2,3,,
81 FITEM,2,4,,
82 A,P51X,,,,,,,,,,,,,
83 CM,enrijecedor_transversal, AREA
84
85 !!!! Geração dos NTS enrijecedores transversais
86 AGEN,NTS,enrijecedor_transversal,,,ATS,,,,,
87
88 !!!! Criação do componente dos enrijecedores transversais
89 ALLSEL,ALL,ALL
90 CM,transversais_pre_aptn, AREA
91
92 !!! Enrijecedores longitudinais
93 !!!! Criação da área base
94 FLST,2,4,3,,
95 FITEM,2,5,,
96 FITEM,2,6,,
97 FITEM,2,7,,
98 FITEM,2,8,,
99 A,P51X,,,,,,,,,,,,,
100
101 !!!! Geração dos NLS enrijecedores longitudinais
102 ALLSEL,ALL
103 CMSEL,U,transversais_pre_aptn,
104 CM,enrijecedor_longitudinal, AREA
105 AGEN,NLS,enrijecedor_longitudinal,,,BLS,,,,,
106
107 !!!! Criação do componente dos enrijecedores longitudinais antes  
do APTN
```

```
108 ALLSEL,ALL
109 CMSEL,U,transversais_pre_aptn,
110 CM,longitudinais_pre_aptn, AREA
111
112 !!! Placa
113 !!!! Criação da área
114 RECTNG,0,a,0,b
115
116 !!!! Criação do componente da placa antes do APTN
117 ALLSEL,ALL,ALL
118 CMSEL,U,longitudinais_pre_aptn
119 CMSEL,U,transversais_pre_aptn
120 CM,placa_pre_aptn, AREA
121
122 !!! Agrupamento dos componentes para aplicação do APTN
123 ALLSEL,ALL,ALL
124 CMSEL,S,longitudinais_pre_aptn
125 CMSEL,A,transversais_pre_aptn
126 CMSEL,A,placa_pre_aptn
127 CMGRP,conjunto_pre_aptn,longitudinais_pre_aptn,
    transversais_pre_aptn,placa_pre_aptn,,,,,
128
129 !!! Aplicação do APTN (Area Partition)
130 APTN,conjunto_pre_aptn
131
132 !! Geometria Pós-Partição de Áreas
133 !!! Recriação dos componentes após uso do APTN (os componentes
    originais são apagados)
134 !!!! Placa
135 ALLSEL,ALL,ALL
136 ASEL,S,LOC,Z,-0.5*TP,0.5*TP,
137 CM,placa_pos_aptn, AREA
138
139 !!!! Enrijecedores Longitudinais
140 ALLSEL,ALL,ALL
141 ASEL,S,LOC,X,0.4*ATS,0.6*ATS,
142 ASEL,A,LOC,X,1.4*ATS,1.6*ATS,
143 ASEL,A,LOC,X,2.4*ATS,2.6*ATS,
```

```
144 ASEL,R,LOC,Z,0.4*HS_MODELO,0.6*HS_MODELO,
145 CM,longitudinais_pos_aptn, AREA
146
147 !!!! Enrijecedores Transversais
148 ALLSEL,ALL,ALL
149 ASEL,S,LOC,Y,0.4*BLS,0.6*BLS,
150 ASEL,A,LOC,Y,1.4*BLS,1.6*BLS,
151 ASEL,A,LOC,Y,2.4*BLS,2.6*BLS,
152 ASEL,R,LOC,Z,0.4*HS_MODELO,0.6*HS_MODELO,
153 CM,transversais_pos_aptn, AREA
154
155 !!! Agrupamento dos enrijecedores para execução do AGLUE ("colar
" faces comuns)
156 ALLSEL,ALL,ALL
157 CMGRP,enrijecedores_pos_aptn,longitudinais_pos_aptn,
    transversais_pos_aptn,,,,,
158
159 !!! Agrupamento da placa com os enrijecedores para execução do
AGLUE ("colar" faces comuns)
160 CMGRP,conjunto_pos_aptn,enrijecedores_pos_aptn,placa_pos_aptn
    ,,,,,,
161
162 !! Meshing
163 !!! Definição do contexto de meshing
164 ALLSEL,ALL,ALL
165 MSHAPE,0,2D
166 MSHKEY,0
167
168 !!! Meshing da placa
169 TYPE,1
170 MAT,1
171 REAL
172 ESYS,0
173 SECNUM,1
174 AESIZE,placa_pos_aptn,25.0
175 AMESH,placa_pos_aptn,,
176
177 !!! Meshing dos enrijecedores transversais
```

```
178 TYPE ,1
179 MAT ,1
180 REAL
181 ESYS ,0
182 SECNUM ,2
183 AESIZE ,transversais_pos_aptn ,MESH_SIZE
184 AMESH ,transversais_pos_aptn , ,
185
186 !!! Meshing dos enrijecedores longitudinais
187 TYPE ,1
188 MAT ,1
189 REAL
190 ESYS ,0
191 SECNUM ,2
192 AESIZE ,longitudinais_pos_aptn ,MESH_SIZE
193 AMESH ,longitudinais_pos_aptn , ,
194
195 !! Mesclar itens coincidentes. Segundo o Command Reference, em
um modelo já malhado com nós e KPs coincidentes, deve-se
executar o NUMMRG,NODE primeiro e o NUMMRG,KP em seguida.
196 ALLSEL ,ALL ,ALL
197 NUMMRG ,NODE , , , ,LOW
198 NUMMRG ,KP , , , ,LOW
199
200 !!! Contagem do total de elementos
201 *GET ,NELEM ,ELEM , , count , , , , , ,
202
203 !! Encerrar /PREP7
204 FINISH ,
205
206 ! Entrar no /SOLU (Solution)
207 /SOLU ,
208
209 !! Tipo de análise: Análise estática pré-flambagem elástica com
pré-tensão
210 ANTYPE ,STATIC
211 PSTRES ,ON
212
```

```
213  !! Criação dos componentes para aplicação das condições de  
    contorno  
214  !!! Placa  
215  !!!! Componente do KP Inferior Esquerdo:  
216  ALLSEL,ALL,ALL  
217  CMSEL,S,placa_pos_aptn,  
218  LSLA,S  
219  KSLI,S  
220  KSEL,S,LOC,X,0,,,  
221  KSEL,R,LOC,Y,0,,,  
222  CM,kp_inferior_esquerdo, KP  
223  
224  !!!! Componente do KP Superior Direito  
225  ALLSEL,ALL,ALL  
226  CMSEL,S,placa_pos_aptn,  
227  LSLA,S  
228  KSLI,S  
229  KSEL,S,LOC,X,a,,,  
230  KSEL,R,LOC,Y,b,,,  
231  CM,kp_superior_direito, KP  
232  
233  !!!! Componente das linhas do contorno da placa  
234  ALLSEL,ALL,ALL  
235  CMSEL,S,placa_pos_aptn,  
236  LSLA,S  
237  LSEL,S,LOC,X,0,,,  
238  LSEL,A,LOC,X,a,,,  
239  LSEL,A,LOC,Y,0,,,  
240  LSEL,A,LOC,Y,b,,,  
241  LSEL,R,LOC,Z,0,TP,,  
242  CM,lines_contorno_placa, LINE  
243  
244  !!!! Componente das linhas da borda esquerda da placa (X = 0)  
245  ALLSEL,ALL,ALL  
246  CMSEL,S,lines_contorno_placa,  
247  LSEL,R,LOC,X,0,,,  
248  CM,lines_contorno_placa_esquerda, LINE  
249
```

```
250 !!!! Componente das linhas da borda direita da placa (X = A)
251 ALLSEL,ALL,ALL
252 CMSEL,S,lines_contorno_placa,
253 LSEL,R,LOC,X,a,,,
254 CM,lines_contorno_placa_direita, LINE
255
256 !!!! Componente do agrupamento das linhas das bordas
transversais da placa
257 CMGRP,lines_contorno_placa_ts,lines_contorno_placa_esquerda,
    lines_contorno_placa_direita,,,,,
258
259 !!!! Componente das linhas da borda inferior da placa (Y = 0)
260 ALLSEL,ALL,ALL
261 CMSEL,S,lines_contorno_placa,
262 LSEL,R,LOC,Y,0,,,
263 CM,lines_contorno_placa_inferior, LINE
264
265 !!!! Componente das linhas da borda superior da placa (Y = B)
266 ALLSEL,ALL,ALL
267 CMSEL,S,lines_contorno_placa,
268 LSEL,R,LOC,Y,b,,,
269 CM,lines_contorno_placa_superior, LINE
270
271 !!!! Componente do agrupamento das linhas das bordas
longitudinais da placa
272 CMGRP,lines_contorno_placa_ls,lines_contorno_placa_inferior,
    lines_contorno_placa_superior,,,,,
273
274 !!! Enrijecedores Transversais
275 !!!! Componente das linhas da borda inferior dos enrijecedores
transversais (Y = 0)
276 ALLSEL,ALL,ALL
277 CMSEL,S,transversais_pos_aptn,
278 LSLA,S
279 LSEL,R,LOC,Y,0,,,
280 CM,lines_borda_ts_inferior, LINE
281
282 !!!! Componente das linhas da borda superior dos enrijecedores
```

```
transversais (Y = B)
283 ALLSEL,ALL,ALL
284 CMSEL,S,transversais_pos_aptn,
285 LSLA,S
286 LSEL,R,LOC,Y,b,,,
287 CM,lines_borda_ts_superior, LINE
288
289 !!!! Componente do agrupamento das linhas das bordas dos
    enrijecedores transversais
290 CMGRP,lines_borda_ts,lines_borda_ts_inferior,
    lines_borda_ts_superior,,,,,
291
292 !!! Enrijecedores Longitudinais
293 !!!! Componente das linhas da borda esquerda dos enrijecedores
    longitudinais (X = 0)
294 ALLSEL,ALL,ALL
295 CMSEL,S,longitudinais_pos_aptn,
296 LSLA,S
297 LSEL,R,LOC,X,0,,,
298 CM,lines_borda_ls_esquerda, LINE
299
300 !!!! Componente das linhas da borda esquerda dos enrijecedores
    longitudinais (X = A)
301 ALLSEL,ALL,ALL
302 CMSEL,S,longitudinais_pos_aptn,
303 LSLA,S
304 LSEL,R,LOC,X,a,,,
305 CM,lines_borda_ls_direita, LINE
306
307 !!!! Componente do agrupamento das linhas das bordas dos
    enrijecedores longitudinais
308 CMGRP,lines_borda_ls,lines_borda_ls_esquerda,
    lines_borda_ls_direita,,,,,
309
310 !!!! Componente do agrupamento das linhas das bordas dos
    enrijecedores
311 CMGRP,lines_borda_enrijecedores,lines_borda_ts,lines_borda_ls
    ,,,,,,
```

```
312
313 !! Aplicação das condições de contorno
314 !!! Selecionar tudo para manter o contexto correto no ANSYS
315 ALLSEL,ALL,ALL
316
317 !!! Deslocamento
318 !!!! KPs
319 DK,kp_inferior_esquerdo,UX,0,,,,,,
320 DK,kp_inferior_esquerdo,UY,0,,,,,,
321 DK,kp_superior_direito,UY,0,,,,,,
322
323 !!!! Linhas
324 ALLSEL,ALL,ALL
325
326 !!!!!! Placa
327 DL,lines_contorno_placa,,UZ,0,
328
329 !!!!!! Enrijecedores
330 DL,lines_borda_enrijecedores,,UZ,0,
331
332 !!! Cargas de Superfície
333 ALLSEL,ALL,ALL
334
335 !!!! Para carregamento uniaxial
336 SFL,lines_contorno_placa_ts,PRESS,1,,
337 SFL,lines_borda_ls,PRESS,1,,
338
339 !!!! Para carregamento biaxial
340 SFL,lines_contorno_placa_ls,PRESS,1,,
341 SFL,lines_borda_ts,PRESS,1,,
342
343 !! Selecionar tudo para resolver a análise estática pré-  
flambagem elástica
344 ALLSEL,ALL,ALL
345
346 !! Resolver análise estática pré-flambagem elástica
347 SOLVE,
348
```

```
349  !! Encerrar /SOLU da análise estática pré-flambagem elástica
350  FINISH ,
351
352  ! Entrar no /SOLU (Solution)
353  /SOLU
354
355  !! Tipo de análise: Análise de flambagem elástica
356  ANTYPE ,BUCKLE
357
358  !! Usar o método Block Lanczos
359  BUCOPT ,LANB ,1,0,0,CENTER
360
361  !! Extrair somente o primeiro modo de flambagem
362  MXPAND ,1,0,0,0,0.001,,
363
364  !! Resolver análise de flambagem elástica
365  SOLVE ,
366
367  !! Encerrar /SOLU da análise de flambagem elástica
368  FINISH ,
369
370  !! Salvar o modelo
371  SAVE ,,,,ALL
372
373  ! Entrar no /POST1 (General Postproc)
374  /POST1
375
376  !! Escrever a carga crítica de flambagem nos Scalar Parameters
377  *GET ,N_CR ,MODE ,1,FREQ
378
379  !! Encerrar /POST1 da análise de flambagem elástica
380  FINISH ,
381
382  ! Entrar no /PREP7 para análise de flambagem elasto-plástica
383  /PREP7 ,
384
385  !! Aumentar o limite de erros que a análise tolera antes de
    encerrar
```

```
386 /NERR,1000,99999999
387
388 ALLSEL,ALL
389
390 !! Atualizar geometria do problema com base na configuração
    deformada da análise elástica pelo fator  $w0 = B/2000$ 
391 UPGEOM,b/2000,LAST,LAST,D:
    /constructal_automate_analysis_files/ec_2a_2_2_phi_0.3
    _lancanova_2024/BL2M1P0.3L2T2_k6.333_MS25_SP1,
392
393 !! Fornecer informações do material
394 TB,BISO,1,1,2,,,
395 TBTEMP,0,
396 TBDATA,,SIGMA_Y,E_TAG,,,,
397
398 !! Encerrar /PREP7 da análise de flambagem elasto-plástica
399 FINISH,
400
401 ! Entrar no /SOLU para análise de flambagem elasto-plástica
402 /SOLU
403
404 !! Tipo de análise: Análise estática de flambagem elasto-plá
    stica com pré-tensão:
405 ANTYPE,STATIC
406 PSTRES,ON
407
408 !! Habilitar grandes deslocamentos
409 NLGEOM,1
410
411 !! O ANSYS Mechanical APDL Structural Analysis Guide (pg.242)
    recomenda desabilitar o Nonlinear Predictor para análise de
    flambagem
412 PRED,OFF,,
413 !! Definir o número de sub-passos a serem utilizados para o
    Passo de Carga atual
414 NSUBST,200,400,50,
415
416 !! Limpar os dados de solução salvos no DB do ANSYS para salvar
```

os resultados dos sub-passos na análise de flambagem elasto-plástica

417 OUTRES,ERASE,,,,

418

419 *!! Escrever os resultados de todos os sub-passos no DB do ANSYS.*

420 OUTRES,ALL,ALL,,,

421

422 *!! Definir o valor da carga de referência ao final do Passo de Carga*

423 TIME,CARGA_PU

424

425 *!! Aplicar carregamento*

426 ALLSEL,ALL

427

428 *!!!! Para carregamento uniaxial*

429 SFL,lines_contorno_placa_ts,PRESS,CARGA_PU,,,

430 SFL,lines_borda_ls,PRESS,CARGA_PU,,,

431

432 *!!!! Para carregamento biaxial*

433 SFL,lines_contorno_placa_ls,PRESS,CARGA_PU,,,

434 SFL,lines_borda_ts,PRESS,CARGA_PU,,,

435

436 ALLSEL,ALL

437

438 *!! Resolver análise de flambagem elasto-plástica*

439 SOLVE,

440

441 *!! Encerrar /SOLU da análise de flambagem elasto-plástica*

442 FINISH,

443

444 *!! Salvar o modelo*

445 SAVE,,,,,ALL

C Estudo de Caso: Tabelas

Tabela C.1: Resultados para cada Configuração Geométrica

N_{ls}	N_{ts}	h_s/t_s	h_s	t_s	$\sigma_{u,2A}$	w_{max}	NUS_{2A}	NMD_{2A}
			mm	mm	MPa	mm		
2	2	56,200	281	5	25,57	0,1573	0,428	0,004
2	2	14,100	141	10	196,18	3,6033	3,287	0,095
2	2	6,333	95	15	211,45	3,2897	3,543	0,086
2	2	3,550	71	20	219,08	3,1459	3,671	0,083
2	2	2,280	57	25	221,39	3,4031	3,710	0,089
2	2	1,600	48	30	218,76	7,6305	3,666	0,201
2	2	1,171	41	35	181,47	9,8215	3,041	0,258
2	2	0,900	36	40	154,31	9,7893	2,586	0,257
2	3	42,200	211	5	43,71	0,3346	0,732	0,009
2	3	10,600	106	10	221,40	3,6413	3,710	0,096
2	3	4,733	71	15	237,18	2,5976	3,974	0,068
2	3	2,700	54	20	241,27	3,2469	4,043	0,085
2	3	1,720	43	25	198,33	9,6213	3,323	0,253
2	3	1,200	36	30	160,86	7,6216	2,695	0,200
2	3	0,885	31	35	135,32	11,4437	2,267	0,301
2	3	0,700	28	40	123,58	12,2692	2,071	0,322
2	4	33,800	169	5	61,46	0,5566	1,030	0,015
2	4	8,500	85	10	247,48	2,7274	4,147	0,072
2	4	3,800	57	15	259,03	2,0647	4,340	0,054
2	4	2,150	43	20	218,21	3,1591	3,656	0,083
2	4	1,400	35	25	159,08	8,0753	2,666	0,212
2	4	0,966	29	30	127,67	7,9675	2,139	0,209
2	4	0,714	25	35	109,38	9,5246	1,833	0,250

N_{ls}	N_{ts}	h_s/t_s	h_s	t_s	$\sigma_{u,2A}$	w_{max}	NUS_{2A}	NMD_{2A}
2	4	0,550	22	40	98,38	16,1726	1,648	0,425
2	5	28,200	141	5	87,36	0,9085	1,464	0,024
2	5	7,100	71	10	244,46	2,6016	4,096	0,068
2	5	3,200	48	15	267,57	6,7162	4,483	0,176
2	5	1,800	36	20	174,70	9,6277	2,927	0,253
2	5	1,160	29	25	129,09	9,5314	2,163	0,250
2	5	0,800	24	30	104,59	10,1771	1,753	0,267
2	5	0,600	21	35	94,30	11,9310	1,580	0,314
2	5	0,475	19	40	91,30	14,9734	1,530	0,393
3	2	48,400	242	5	30,93	0,2370	0,518	0,006
3	2	12,200	122	10	261,70	1,7003	4,385	0,045
3	2	5,466	82	15	265,58	1,4849	4,450	0,039
3	2	3,100	62	20	302,86	5,7802	5,075	0,152
3	2	2,000	50	25	226,20	7,7868	3,790	0,205
3	2	1,400	42	30	178,80	9,6502	2,996	0,254
3	2	1,028	36	35	148,08	9,0417	2,481	0,238
3	2	0,800	32	40	132,12	10,2051	2,214	0,268
3	3	37,600	188	5	52,58	0,4702	0,881	0,012
3	3	9,500	95	10	268,46	2,2943	4,498	0,060
3	3	4,266	64	15	282,66	1,5962	4,736	0,042
3	3	2,400	48	20	229,37	7,2834	3,843	0,191
3	3	1,560	39	25	171,69	9,4836	2,877	0,249
3	3	1,100	33	30	144,19	7,5900	2,416	0,199
3	3	0,800	28	35	118,47	11,4846	1,985	0,302
3	3	0,625	25	40	107,79	12,2732	1,806	0,323
3	4	30,800	154	5	72,94	0,7687	1,222	0,020
3	4	7,800	78	10	250,14	2,4262	4,191	0,064

N_{ls}	N_{ts}	h_s/t_s	h_s	t_s	$\sigma_{u,2A}$	w_{max}	NUS_{2A}	NMD_{2A}
3	4	3,466	52	15	291,50	7,0045	4,884	0,184
3	4	2,000	40	20	186,45	7,5750	3,124	0,199
3	4	1,280	32	25	138,33	8,9250	2,318	0,235
3	4	0,900	27	30	115,60	10,1654	1,937	0,267
3	4	0,657	23	35	99,82	13,8231	1,673	0,363
3	4	0,500	20	40	88,97	12,6871	1,491	0,333
3	5	26,000	130	5	101,20	1,2466	1,696	0,033
3	5	6,600	66	10	245,17	1,8876	4,108	0,050
3	5	2,933	44	15	230,08	6,7615	3,855	0,178
3	5	1,700	34	20	156,07	9,1346	2,615	0,240
3	5	1,080	27	25	116,48	9,6349	1,952	0,253
3	5	0,766	23	30	100,69	11,4499	1,687	0,301
3	5	0,571	20	35	91,46	13,5866	1,533	0,357
3	5	0,425	17	40	79,39	14,5219	1,330	0,382
4	2	42,400	212	5	40,16	0,3663	0,673	0,010
4	2	10,700	107	10	269,01	2,1677	4,508	0,057
4	2	4,800	72	15	341,22	2,8165	5,717	0,074
4	2	2,700	54	20	243,40	7,5572	4,078	0,199
4	2	1,760	44	25	182,71	9,4170	3,061	0,247
4	2	1,233	37	30	148,97	8,5403	2,496	0,224
4	2	0,914	32	35	126,96	9,5712	2,127	0,252
4	2	0,700	28	40	111,87	10,9274	1,874	0,287
4	3	34,000	170	5	61,68	0,6436	1,034	0,017
4	3	8,600	86	10	251,24	2,6682	4,210	0,070
4	3	3,866	58	15	310,51	5,5516	5,203	0,146
4	3	2,200	44	20	203,10	8,6470	3,403	0,227
4	3	1,400	35	25	150,76	10,9957	2,526	0,289

N_{ls}	N_{ts}	h_s/t_s	h_s	t_s	$\sigma_{u,2A}$	w_{max}	NUS_{2A}	NMD_{2A}
4	3	1,000	30	30	126,80	10,4074	2,125	0,273
4	3	0,742	26	35	108,50	11,4154	1,818	0,300
4	3	0,575	23	40	98,93	13,0772	1,658	0,344
4	4	28,200	141	5	91,21	1,1271	1,528	0,030
4	4	7,100	71	10	246,95	2,3011	4,138	0,060
4	4	3,200	48	15	251,92	7,2660	4,221	0,191
4	4	1,800	36	20	155,18	7,5930	2,600	0,200
4	4	1,160	29	25	118,97	8,5670	1,993	0,225
4	4	0,833	25	30	105,48	13,0023	1,767	0,342
4	4	0,600	21	35	90,39	15,3108	1,515	0,402
4	4	0,475	19	40	85,62	13,2437	1,435	0,348
4	5	24,200	121	5	113,16	1,6602	1,896	0,044
4	5	6,100	61	10	241,83	3,2321	4,052	0,085
4	5	2,733	41	15	200,80	6,8984	3,365	0,181
4	5	1,550	31	20	135,65	6,0047	2,273	0,158
4	5	1,000	25	25	106,54	1,5432	1,785	0,041
4	5	0,700	21	30	90,07	11,7984	1,509	0,310
4	5	0,542	19	35	88,08	13,8178	1,476	0,363
4	5	0,400	16	40	76,19	15,9241	1,277	0,418
5	2	37,600	188	5	52,58	0,5612	0,881	0,015
5	2	9,500	95	10	262,23	1,9373	4,394	0,051
5	2	4,266	64	15	316,72	4,8871	5,307	0,128
5	2	2,400	48	20	197,78	7,6003	3,314	0,200
5	2	1,560	39	25	152,16	4,5655	2,550	0,120
5	2	1,100	33	30	125,89	9,1932	2,109	0,242
5	2	0,800	28	35	107,80	11,6975	1,806	0,307
5	2	0,625	25	40	98,38	11,3795	1,648	0,299

N_{ls}	N_{ts}	h_s/t_s	h_s	t_s	$\sigma_{u,2A}$	w_{max}	NUS_{2A}	NMD_{2A}
5	3	30,800	154	5	76,49	0,9304	1,282	0,024
5	3	7,800	78	10	250,14	2,4733	4,191	0,065
5	3	3,466	52	15	256,02	6,4391	4,290	0,169
5	3	2,000	40	20	168,51	9,4723	2,824	0,249
5	3	1,280	32	25	127,33	10,1862	2,134	0,268
5	3	0,900	27	30	108,67	10,1712	1,821	0,267
5	3	0,657	23	35	94,30	13,8151	1,580	0,363
5	3	0,525	21	40	93,50	35,8490	1,567	0,942
5	4	26,200	131	5	98,73	1,3875	1,654	0,036
5	4	6,600	66	10	230,28	2,3378	3,859	0,061
5	4	3,000	45	15	222,29	8,3696	3,725	0,220
5	4	1,700	34	20	141,53	7,6030	2,371	0,200
5	4	1,080	27	25	108,50	9,4235	1,818	0,248
5	4	0,766	23	30	95,18	12,1575	1,595	0,319
5	4	0,571	20	35	87,20	13,2755	1,461	0,349
5	4	0,450	18	40	86,64	37,5824	1,452	0,988
5	5	22,600	113	5	125,36	4,4905	2,101	0,118
5	5	5,700	57	10	209,67	3,1884	3,513	0,084
5	5	2,600	39	15	184,47	7,2929	3,091	0,192
5	5	1,450	29	20	120,23	8,9962	2,015	0,236
5	5	0,960	24	25	100,37	10,7217	1,682	0,282
5	5	0,666	20	30	87,20	12,9010	1,461	0,339
5	5	0,485	17	35	82,18	38,9591	1,377	1,024
5	5	0,375	15	40	80,39	40,9420	1,347	1,076

D Estudo de Caso: Gráficos de NUS

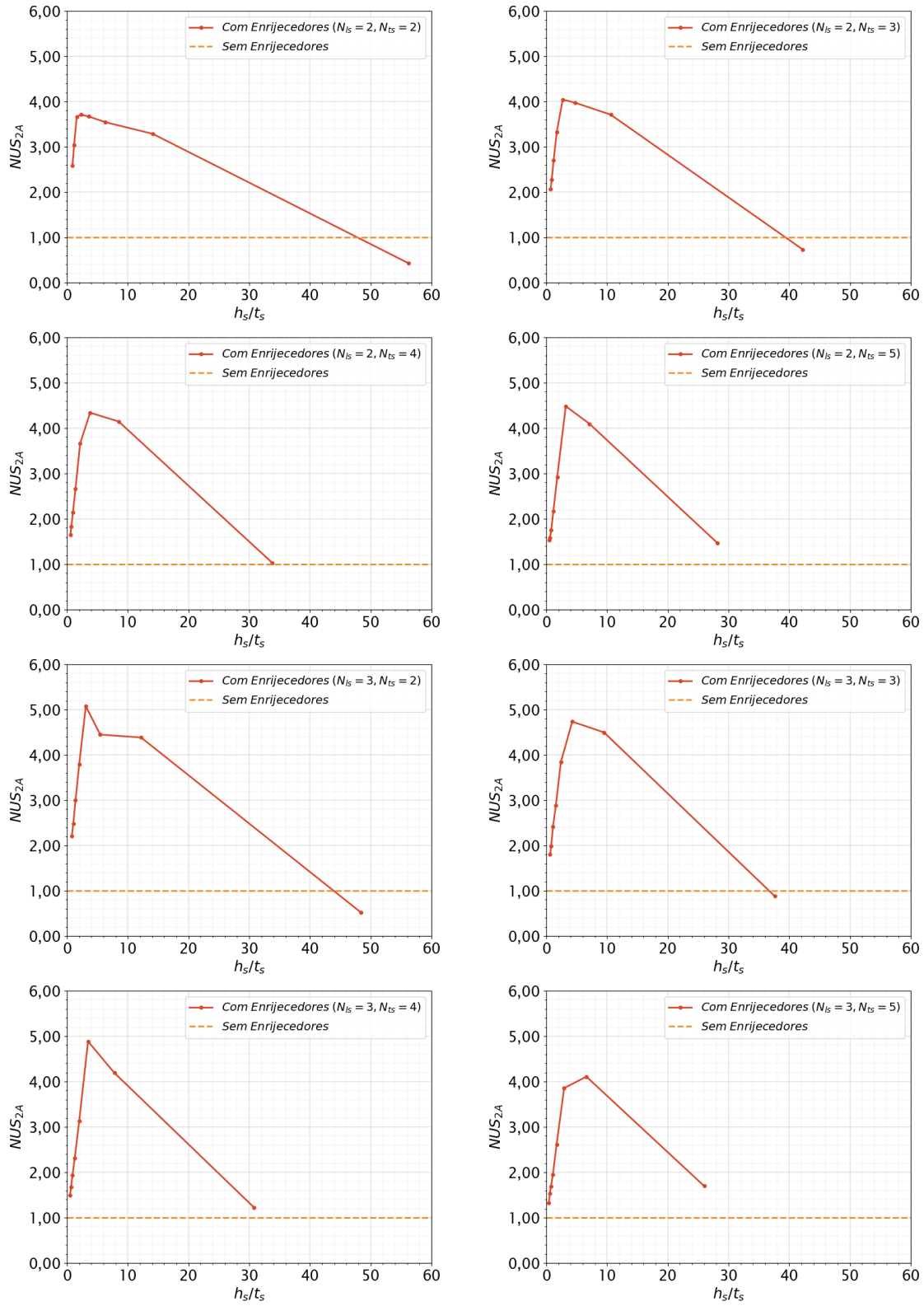


Figura D.1: NUS_{2A} por h_s/t_s para $N_{ls} = \{2, 3\}$ e $N_{ts} = \{2, 3, 4, 5\}$.

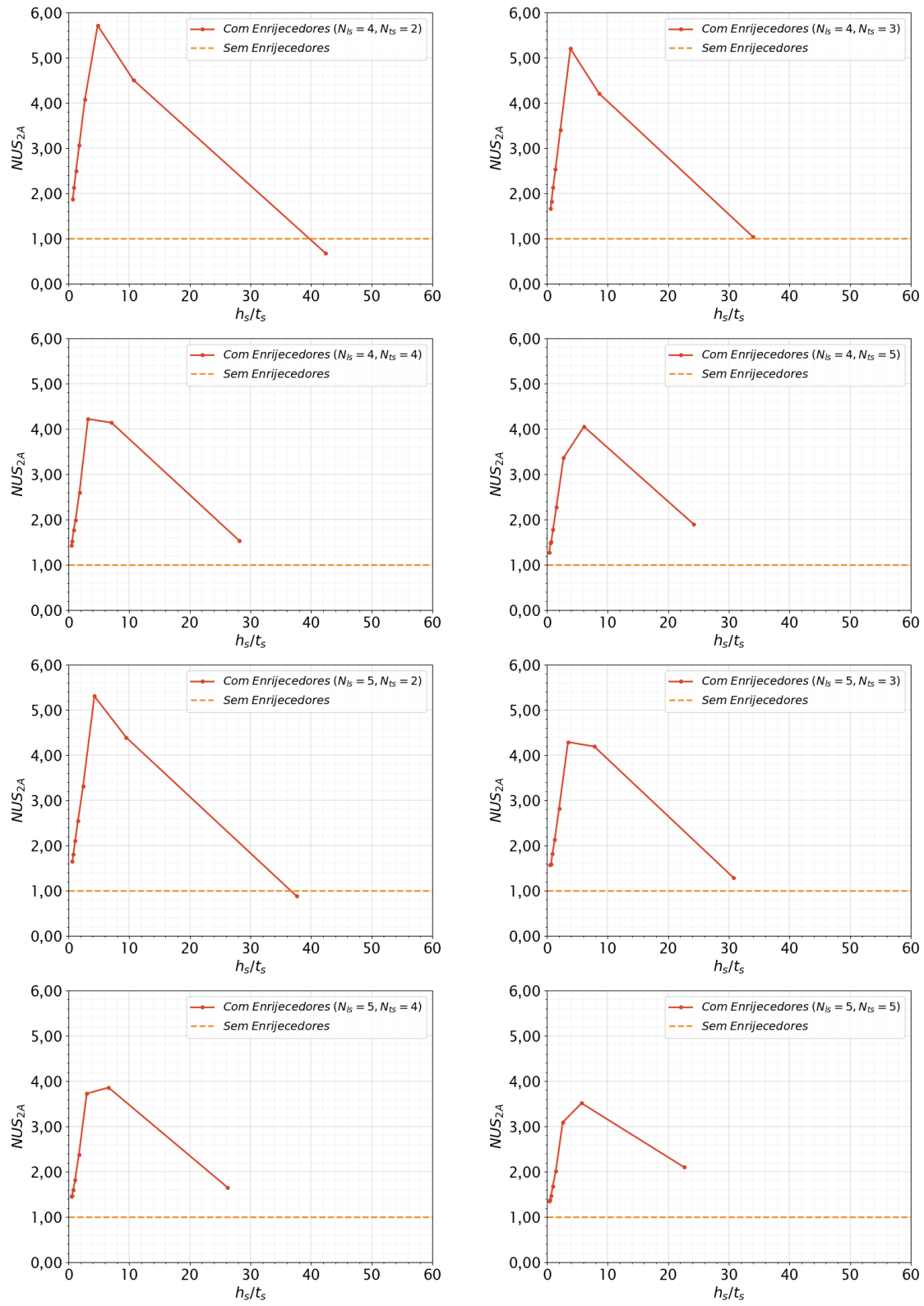


Figura D.2: NUS_{2A} por h_s/t_s para $N_{ls} = \{4, 5\}$ e $N_{ts} = \{2, 3, 4, 5\}$.

E Estudo de Caso: Gráficos de NMD

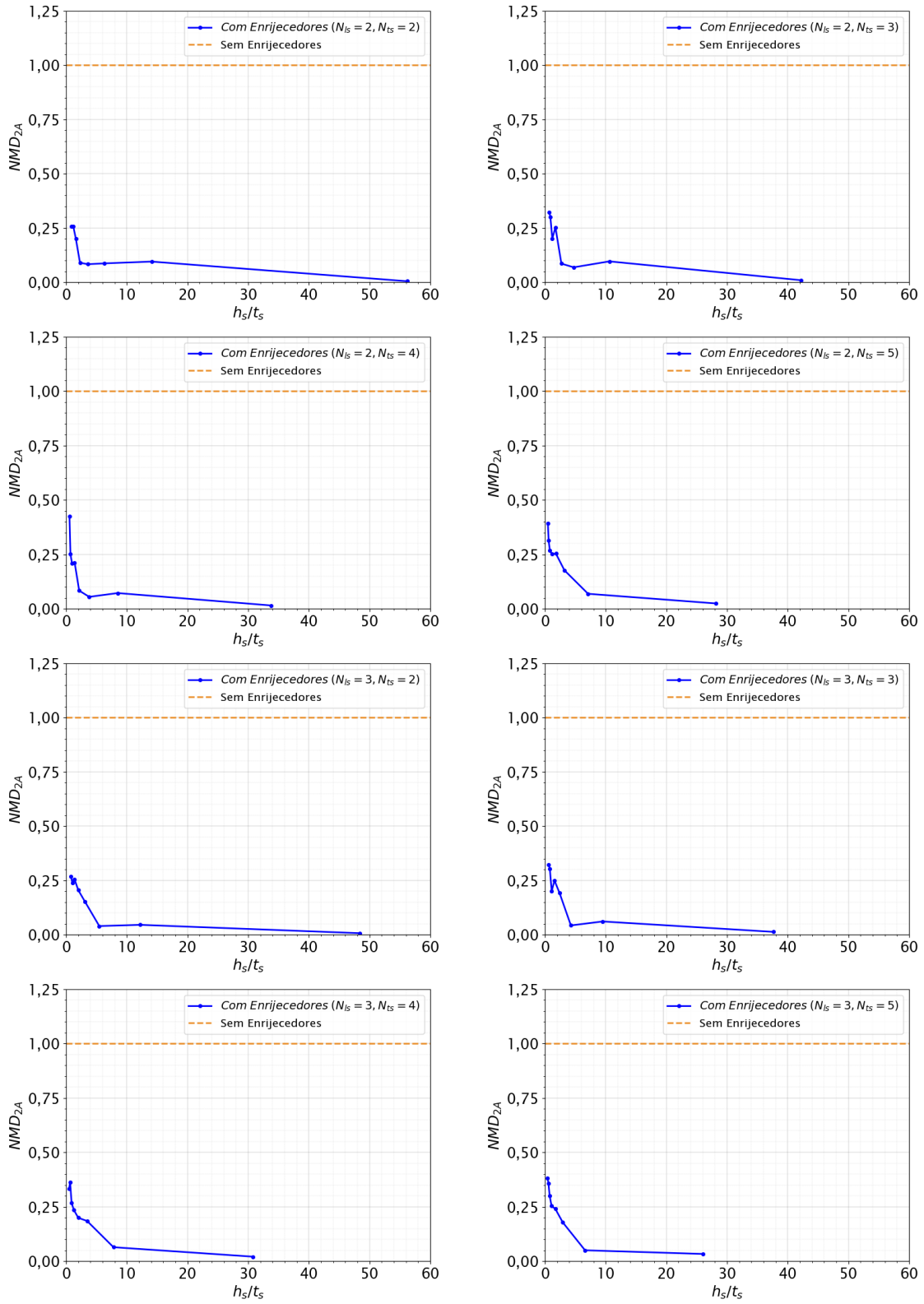


Figura E.1: NMD_{2A} por h_s/t_s para $N_{ls} = \{2, 3\}$ e $N_{ts} = \{2, 3, 4, 5\}$.

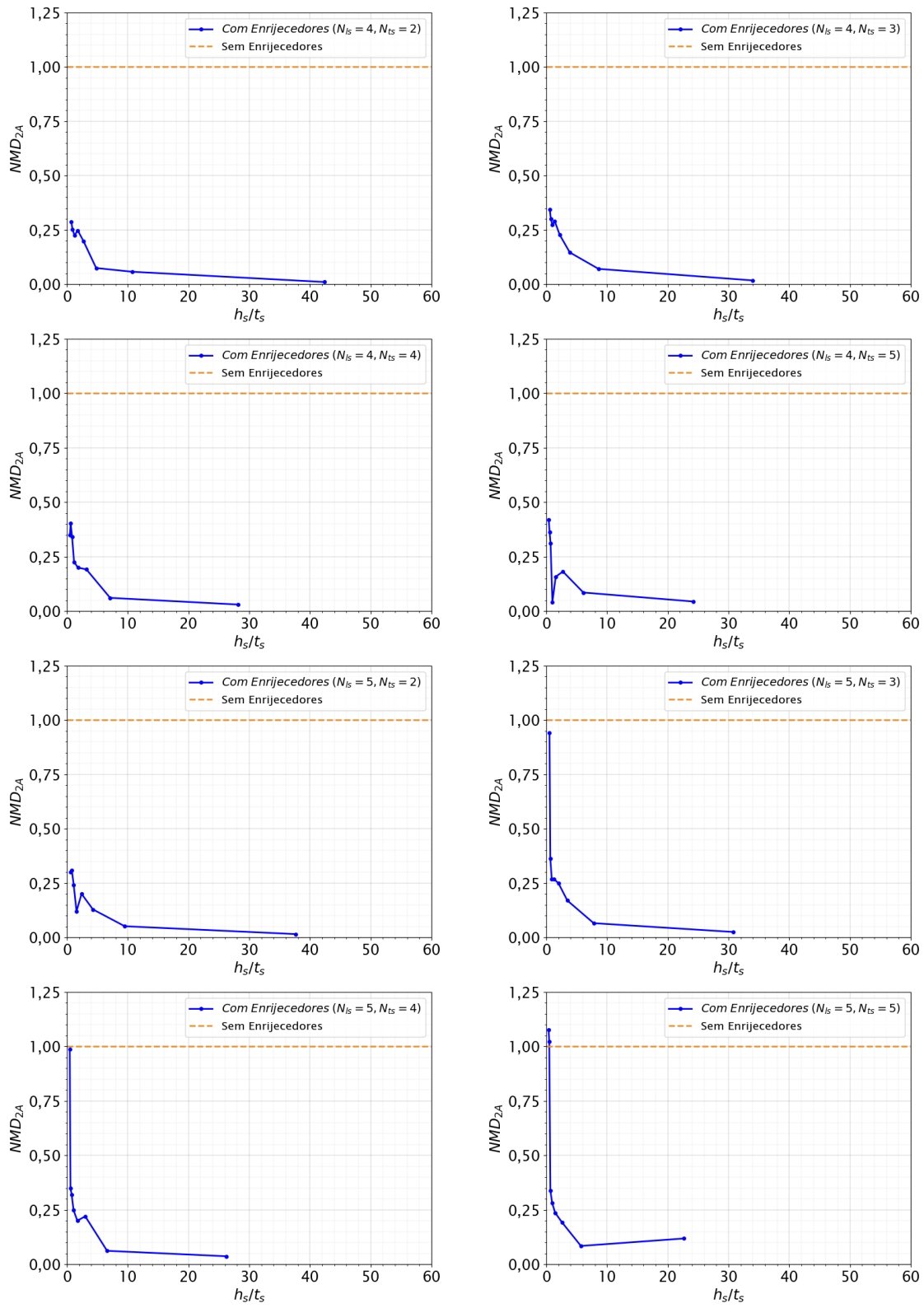


Figura E.2: NMD_{2A} por h_s/t_s para $N_{ls} = \{4, 5\}$ e $N_{ts} = \{2, 3, 4, 5\}$.

F Estudo Comparativo: Tabelas

Tabela F.1: Resultados para cada Configuração Geométrica

N_{ls}	N_{ts}	h_s/t_s	h_s	t_s	L_{eq}	A_{eq}	t_{eq}	$\sigma_{u,1A}$	NUS_{1A}	$\sigma_{u,2A}$	NUS_{2A}
			mm	mm	mm	mm ²	mm	MPa		MPa	
2	2	56,200	281	5	1562	12610	8,07	31,03	0,166	25,57	0,428
2	2	14,100	141	10	1282	12620	9,84	352,90	1,893	196,18	3,287
2	2	6,333	95	15	1190	12650	10,63	325,50	1,746	211,45	3,543
2	2	3,550	71	20	1142	12640	11,07	312,62	1,677	219,08	3,671
2	2	2,280	57	25	1114	12650	11,36	304,72	1,634	221,39	3,710
2	2	1,600	48	30	1096	12680	11,57	299,08	1,604	218,76	3,666
2	2	1,171	41	35	1082	12670	11,71	296,51	1,590	181,47	3,041
2	2	0,900	36	40	1072	12680	11,83	291,80	1,565	154,31	2,586
2	3	42,200	211	5	1422	11910	8,38	50,62	0,271	43,71	0,732
2	3	10,600	106	10	1212	11920	9,83	351,32	1,884	221,41	3,710
2	3	4,733	71	15	1142	11930	10,45	331,23	1,776	237,18	3,974
2	3	2,700	54	20	1108	11960	10,79	320,56	1,719	241,27	4,043
2	3	1,720	43	25	1086	11950	11,00	314,92	1,689	198,33	3,323
2	3	1,200	36	30	1072	11960	11,16	311,38	1,670	160,86	2,695
2	3	0,885	31	35	1062	11970	11,27	296,68	1,591	135,32	2,267
2	3	0,700	28	40	1056	12040	11,40	285,95	1,534	123,58	2,071
2	4	33,800	169	5	1338	11490	8,59	76,99	0,413	61,46	1,030
2	4	8,500	85	10	1170	11500	9,83	352,04	1,888	247,48	4,147
2	4	3,800	57	15	1114	11510	10,33	335,74	1,801	259,03	4,340
2	4	2,150	43	20	1086	11520	10,61	327,49	1,756	218,21	3,656
2	4	1,400	35	25	1070	11550	10,79	317,83	1,705	159,08	2,666
2	4	0,966	29	30	1058	11540	10,91	293,82	1,576	127,67	2,139
2	4	0,714	25	35	1050	11550	11,00	266,53	1,429	109,38	1,833

N_{ls}	N_{ts}	h_s/t_s	h_s	t_s	L_{eq}	A_{eq}	t_{eq}	$\sigma_{u,1A}$	NUS_{1A}	$\sigma_{u,2A}$	NUS_{2A}
2	4	0,550	22	40	1044	11560	11,07	246,84	1,324	98,38	1,648
2	5	28,200	141	5	1282	11210	8,74	105,07	0,564	87,36	1,464
2	5	7,100	71	10	1142	11220	9,82	347,44	1,863	244,46	4,096
2	5	3,200	48	15	1096	11240	10,26	334,36	1,793	267,57	4,483
2	5	1,800	36	20	1072	11240	10,49	316,25	1,696	174,70	2,927
2	5	1,160	29	25	1058	11250	10,63	286,18	1,535	129,09	2,163
2	5	0,800	24	30	1048	11240	10,73	252,89	1,356	104,59	1,753
2	5	0,600	21	35	1042	11270	10,82	236,82	1,270	94,30	1,580
2	5	0,475	19	40	1038	11320	10,91	228,22	1,224	91,30	1,530
3	2	48,400	242	5	1726	13430	7,78	38,96	0,209	30,93	0,518
3	2	12,200	122	10	1366	13460	9,85	349,76	1,876	261,70	4,385
3	2	5,466	82	15	1246	13490	10,83	320,87	1,721	265,58	4,450
3	2	3,100	62	20	1186	13520	11,40	304,74	1,634	302,86	5,075
3	2	2,000	50	25	1150	13550	11,78	294,10	1,577	226,20	3,790
3	2	1,400	42	30	1126	13580	12,06	287,89	1,544	178,81	2,996
3	2	1,028	36	35	1108	13580	12,26	282,32	1,514	148,08	2,481
3	2	0,800	32	40	1096	13640	12,45	277,33	1,487	132,12	2,214
3	3	37,600	188	5	1564	12620	8,07	63,86	0,343	52,58	0,881
3	3	9,500	95	10	1285	12650	9,84	347,08	1,861	268,46	4,498
3	3	4,266	64	15	1192	12680	10,64	326,57	1,751	282,66	4,736
3	3	2,400	48	20	1144	12680	11,08	313,42	1,681	229,37	3,843
3	3	1,560	39	25	1117	12725	11,39	304,18	1,631	171,69	2,877
3	3	1,100	33	30	1099	12770	11,62	297,79	1,597	144,19	2,416
3	3	0,800	28	35	1084	12740	11,75	293,67	1,575	118,47	1,985
3	3	0,625	25	40	1075	12800	11,91	280,84	1,506	107,79	1,806
3	4	30,800	154	5	1462	12110	8,28	86,30	0,463	72,94	1,222
3	4	7,800	78	10	1234	12140	9,84	345,72	1,854	250,14	4,191

N_{ls}	N_{ts}	h_s/t_s	h_s	t_s	L_{eq}	A_{eq}	t_{eq}	$\sigma_{u,1A}$	NUS_{1A}	$\sigma_{u,2A}$	NUS_{2A}
3	4	3,466	52	15	1156	12140	10,50	326,52	1,751	291,50	4,884
3	4	2,000	40	20	1120	12200	10,89	318,92	1,710	186,46	3,124
3	4	1,280	32	25	1096	12200	11,13	310,85	1,667	138,33	2,318
3	4	0,900	27	30	1081	12230	11,31	285,40	1,531	115,60	1,937
3	4	0,657	23	35	1069	12215	11,43	260,20	1,395	99,82	1,673
3	4	0,500	20	40	1060	12200	11,51	236,13	1,266	88,97	1,491
3	5	26,000	130	5	1390	11750	8,45	118,07	0,633	101,20	1,696
3	5	6,600	66	10	1198	11780	9,83	348,90	1,871	245,17	4,108
3	5	2,933	44	15	1132	11780	10,41	329,51	1,767	230,08	3,855
3	5	1,700	34	20	1102	11840	10,74	314,29	1,686	156,07	2,615
3	5	1,080	27	25	1081	11825	10,94	277,88	1,490	116,48	1,952
3	5	0,766	23	30	1069	11870	11,10	254,47	1,365	100,69	1,687
3	5	0,571	20	35	1060	11900	11,23	235,81	1,265	91,46	1,532
3	5	0,425	17	40	1051	11840	11,27	216,83	1,163	79,39	1,330
4	2	42,400	212	5	1848	14040	7,60	51,80	0,278	40,16	0,673
4	2	10,700	107	10	1428	14080	9,86	352,33	1,890	269,01	4,508
4	2	4,800	72	15	1288	14120	10,96	316,89	1,699	341,22	5,717
4	2	2,700	54	20	1216	14120	11,61	299,17	1,604	243,40	4,078
4	2	1,760	44	25	1176	14200	12,07	286,98	1,539	182,71	3,061
4	2	1,233	37	30	1148	14240	12,40	279,65	1,500	148,97	2,496
4	2	0,914	32	35	1128	14280	12,66	273,73	1,468	126,96	2,127
4	2	0,700	28	40	1112	14280	12,84	269,05	1,443	111,87	1,874
4	3	34,000	170	5	1680	13200	7,86	79,47	0,426	61,68	1,034
4	3	8,600	86	10	1344	13240	9,85	352,64	1,891	251,24	4,210
4	3	3,866	58	15	1232	13280	10,78	322,28	1,728	310,51	5,203
4	3	2,200	44	20	1176	13320	11,33	306,71	1,645	203,10	3,403
4	3	1,400	35	25	1140	13300	11,67	297,61	1,596	150,76	2,526

N_{ls}	N_{ts}	h_s/t_s	h_s	t_s	L_{eq}	A_{eq}	t_{eq}	$\sigma_{u,1A}$	NUS_{1A}	$\sigma_{u,2A}$	NUS_{2A}
4	3	1,000	30	30	1120	13400	11,96	288,48	1,547	126,80	2,125
4	3	0,742	26	35	1104	13440	12,17	282,38	1,514	108,50	1,818
4	3	0,575	23	40	1092	13480	12,34	273,28	1,466	98,93	1,658
4	4	28,200	141	5	1564	12620	8,07	109,30	0,586	91,21	1,528
4	4	7,100	71	10	1284	12640	9,84	350,99	1,882	246,95	4,138
4	4	3,200	48	15	1192	12680	10,64	326,57	1,751	251,92	4,221
4	4	1,800	36	20	1144	12680	11,08	313,42	1,681	155,18	2,600
4	4	1,160	29	25	1116	12700	11,38	297,21	1,594	118,97	1,993
4	4	0,833	25	30	1100	12800	11,64	277,95	1,491	105,48	1,767
4	4	0,600	21	35	1084	12740	11,75	249,74	1,339	90,39	1,515
4	4	0,475	19	40	1076	12840	11,93	236,78	1,270	85,62	1,435
4	5	24,200	121	5	1484	12220	8,23	138,37	0,742	113,16	1,896
4	5	6,100	61	10	1244	12240	9,84	345,90	1,855	241,83	4,052
4	5	2,733	41	15	1164	12260	10,53	325,56	1,746	200,80	3,365
4	5	1,550	31	20	1124	12280	10,93	300,50	1,612	135,65	2,273
4	5	1,000	25	25	1100	12300	11,18	267,16	1,433	106,54	1,785
4	5	0,700	21	30	1084	12320	11,37	242,02	1,298	90,07	1,509
4	5	0,542	19	35	1076	12460	11,58	231,99	1,244	88,08	1,476
4	5	0,400	16	40	1064	12360	11,62	213,67	1,146	76,19	1,277
5	2	37,600	188	5	1940	14500	7,47	68,37	0,367	52,58	0,881
5	2	9,500	95	10	1475	14550	9,86	343,94	1,845	262,23	4,394
5	2	4,266	64	15	1320	14600	11,06	314,08	1,684	316,72	5,307
5	2	2,400	48	20	1240	14600	11,77	294,31	1,578	197,78	3,314
5	2	1,560	39	25	1195	14675	12,28	281,77	1,511	152,16	2,550
5	2	1,100	33	30	1165	14750	12,66	272,61	1,462	125,89	2,109
5	2	0,800	28	35	1140	14700	12,89	267,27	1,433	107,81	1,806
5	2	0,625	25	40	1125	14800	13,16	251,14	1,347	98,38	1,648

N_{ls}	N_{ts}	h_s/t_s	h_s	t_s	L_{eq}	A_{eq}	t_{eq}	$\sigma_{u,1A}$	NUS_{1A}	$\sigma_{u,2A}$	NUS_{2A}
5	3	30,800	154	5	1770	13650	7,71	99,57	0,534	76,49	1,282
5	3	7,800	78	10	1390	13700	9,86	351,07	1,883	250,14	4,191
5	3	3,466	52	15	1260	13700	10,87	319,50	1,714	256,02	4,290
5	3	2,000	40	20	1200	13800	11,50	301,33	1,616	168,51	2,824
5	3	1,280	32	25	1160	13800	11,90	292,01	1,566	127,33	2,134
5	3	0,900	27	30	1135	13850	12,20	283,14	1,519	108,67	1,821
5	3	0,657	23	35	1115	13825	12,40	270,38	1,450	94,30	1,580
5	3	0,525	21	40	1105	14000	12,67	259,11	1,390	93,50	1,567
5	4	26,200	131	5	1655	13075	7,90	130,31	0,699	98,73	1,654
5	4	6,600	66	10	1330	13100	9,85	348,31	1,868	230,28	3,859
5	4	3,000	45	15	1225	13175	10,76	323,00	1,732	222,29	3,725
5	4	1,700	34	20	1170	13200	11,28	307,76	1,651	141,53	2,371
5	4	1,080	27	25	1135	13175	11,61	290,16	1,556	108,50	1,818
5	4	0,766	23	30	1115	13250	11,88	268,24	1,439	95,18	1,595
5	4	0,571	20	35	1100	13300	12,09	245,91	1,319	87,20	1,461
5	4	0,450	18	40	1090	13400	12,29	233,79	1,254	86,64	1,452
5	5	22,600	113	5	1565	12625	8,07	173,48	0,930	125,36	2,101
5	5	5,700	57	10	1285	12650	9,84	338,80	1,817	209,67	3,513
5	5	2,600	39	15	1195	12725	10,65	322,02	1,727	184,47	3,091
5	5	1,450	29	20	1145	12700	11,09	290,49	1,558	120,23	2,015
5	5	0,960	24	25	1120	12800	11,43	265,50	1,424	100,37	1,682
5	5	0,666	20	30	1100	12800	11,64	236,84	1,270	87,20	1,461
5	5	0,485	17	35	1085	12775	11,77	213,55	1,145	82,18	1,377
5	5	0,375	15	40	1075	12800	11,91	209,55	1,124	80,39	1,347

G Comparativo: Gráficos de Tensão

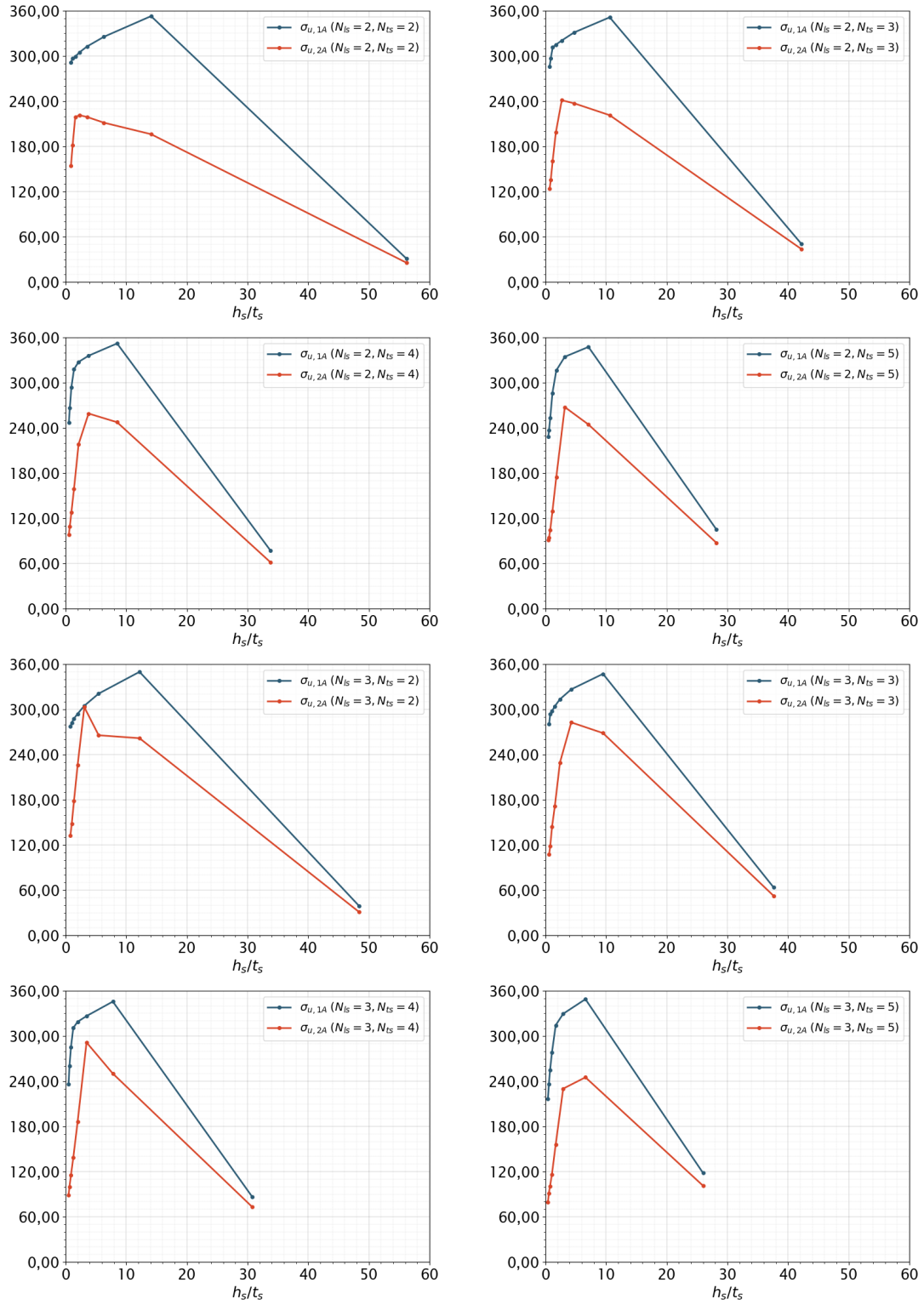


Figura G.1: $\sigma_{u,1A}$ e $\sigma_{u,2A}$ por h_s/t_s para $N_{ls} = \{2, 3\}$ e $N_{ts} = \{2, 3, 4, 5\}$.

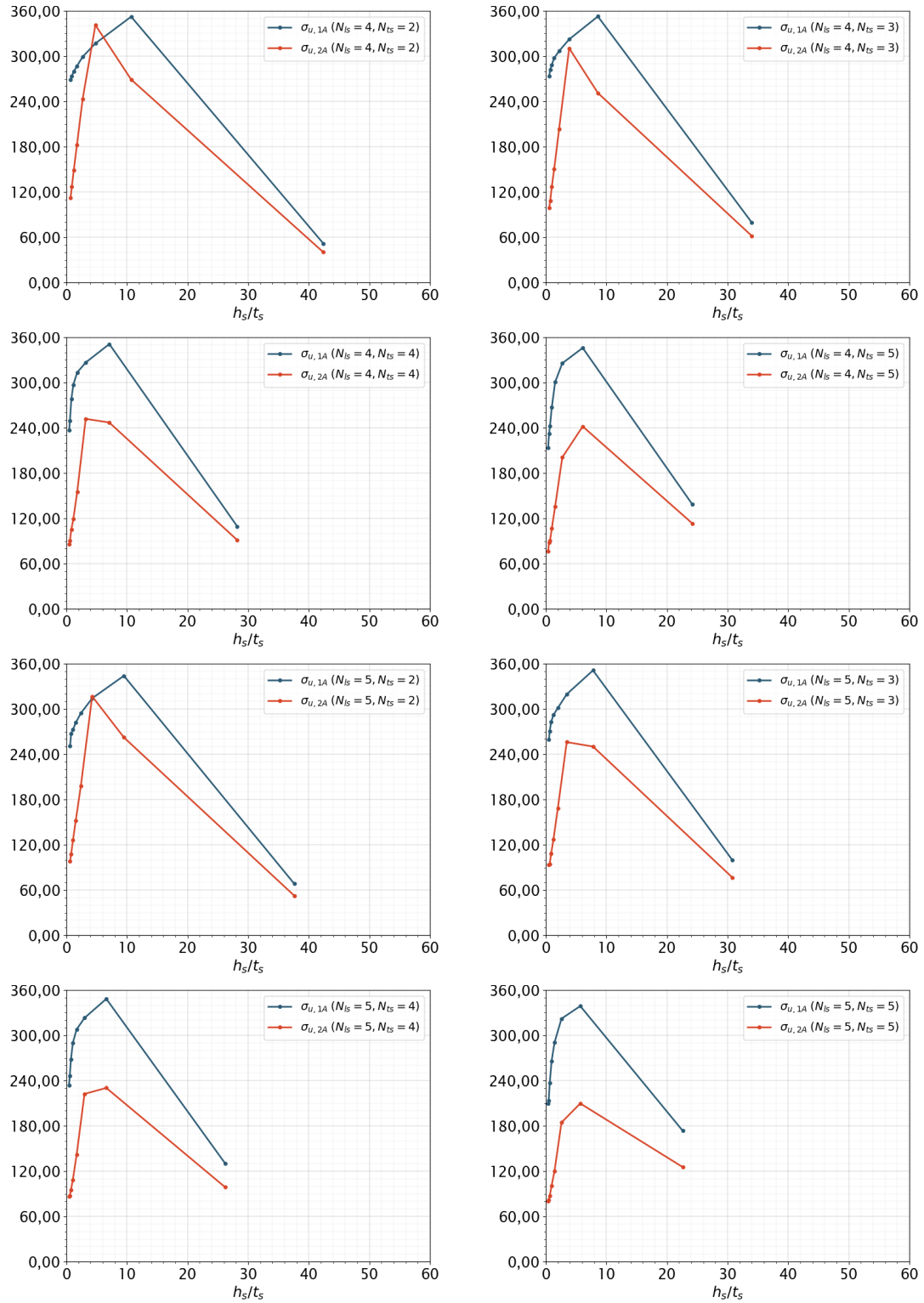


Figura G.2: $\sigma_{u,1A}$ e $\sigma_{u,2A}$ por h_s/t_s para $N_{is} = \{4, 5\}$ e $N_{ts} = \{2, 3, 4, 5\}$.

H Comparativo: Gráficos de NUS

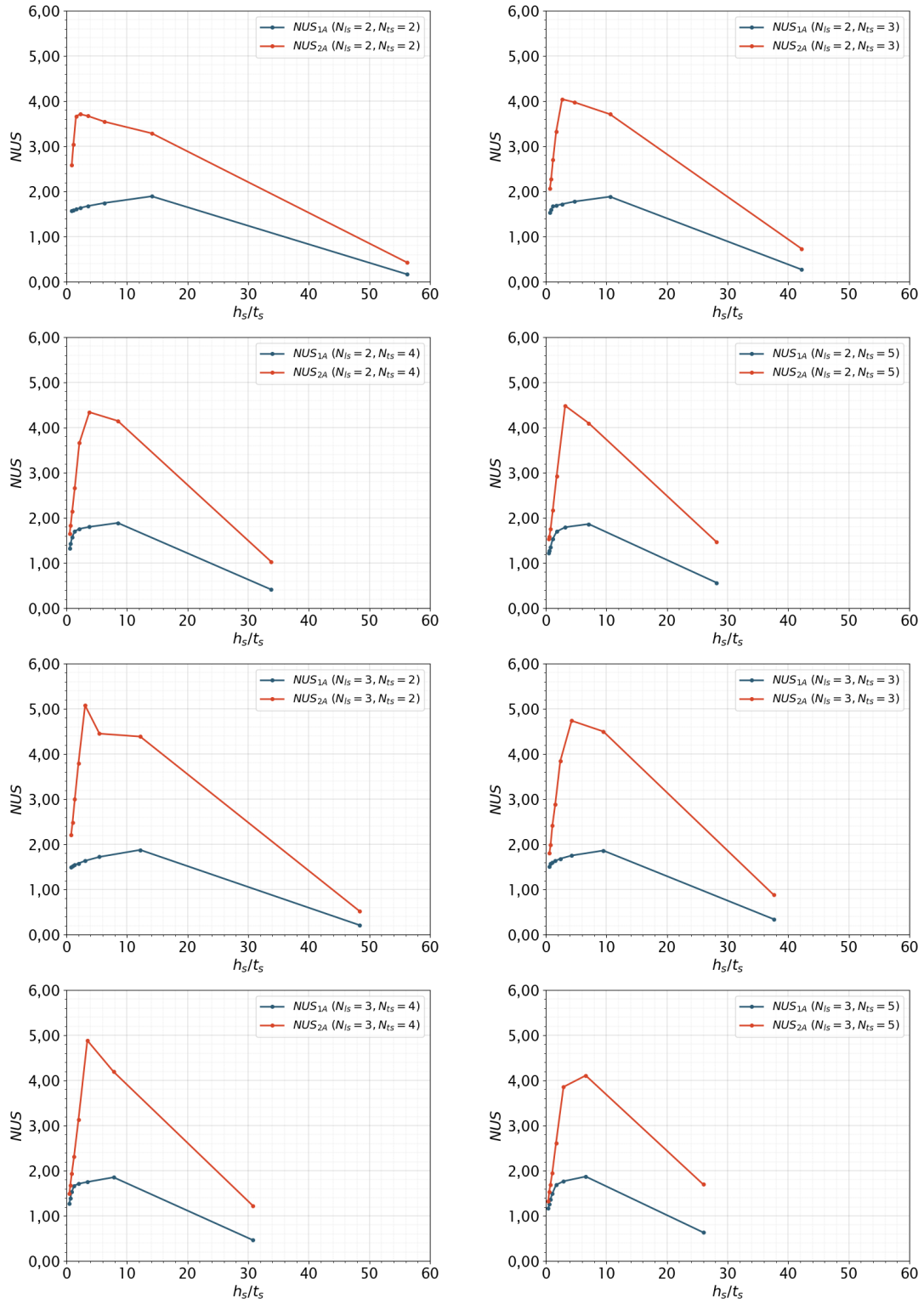


Figura H.1: NUS_{1A} e NUS_{2A} por h_s/t_s para $N_{ls} = \{2, 3\}$ e $N_{ts} = \{2, 3, 4, 5\}$.

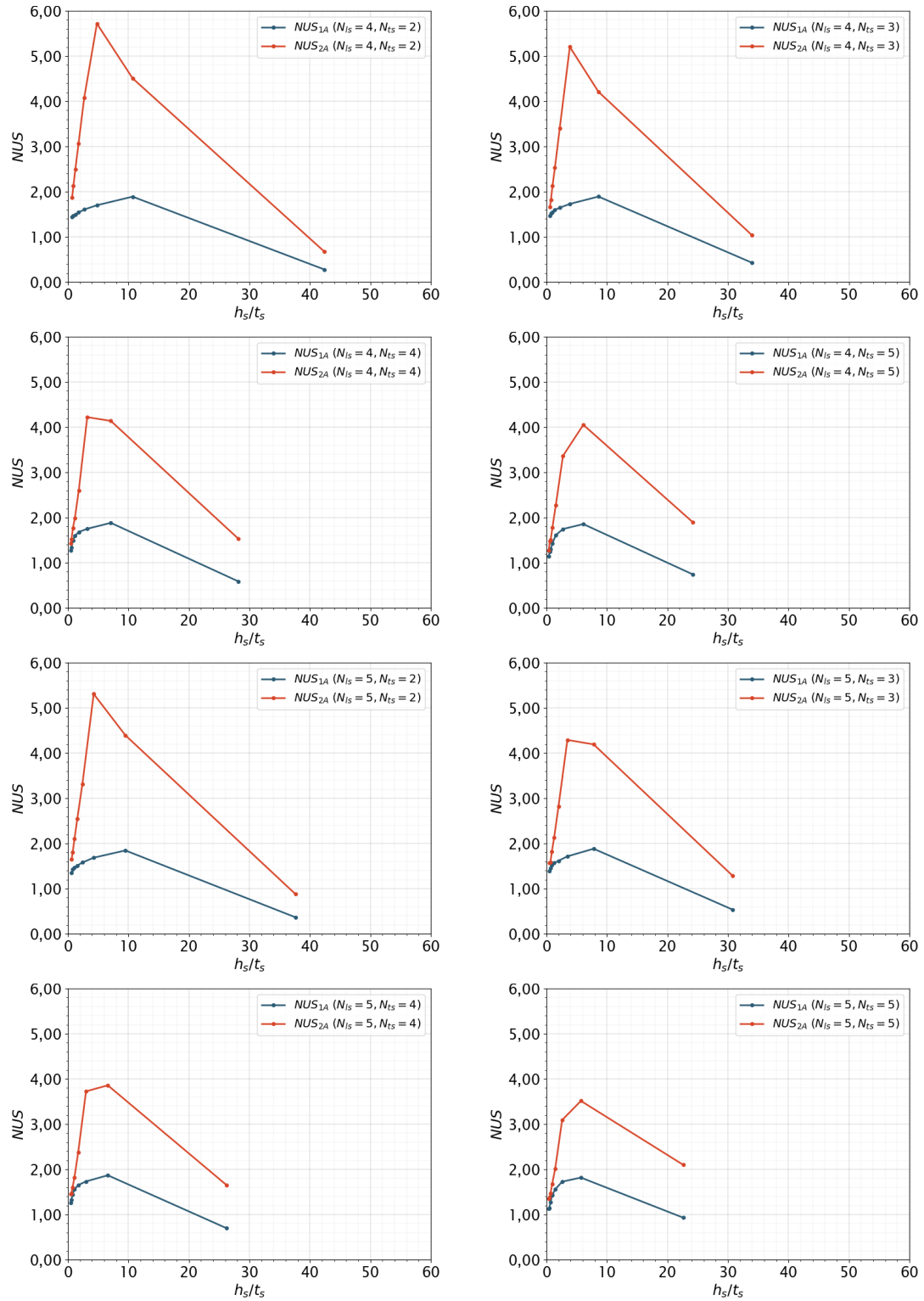


Figura H.2: NUS_{1A} e NUS_{2A} por h_s/t_s para $N_{ts} = \{4, 5\}$ e $N_{is} = \{2, 3, 4, 5\}$.