MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

MODELAGEM COMPUTACIONAL E DESIGN CONSTRUTAL APLICADOS À MELHORIA DO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE PLACAS COM ENRIJECEDORES DO TIPO VIGA-CAIXÃO SOB FLEXÃO

por

Mariana Alvarenga Alves

Dissertação para obtenção do Título de Mestre em Modelagem Computacional.

Rio Grande, Outubro, 2024.

MODELAGEM COMPUTACIONAL E DESIGN CONSTRUTAL APLICADOS À MELHORIA DO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE PLACAS COM ENRIJECEDORES DO TIPO VIGA-CAIXÃO SOB FLEXÃO

por

Mariana Alvarenga Alves
Engenheira Civil Costeira e Portuária

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional (PPGMC) da Universidade Federal do Rio Grande (FURG), como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Modelagem Computacional.

Área de Concentração: Mecânica Computacional

Orientador: Prof. Dr. Liércio André Isoldi

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Charlei Marcelo Paliga
UFPel
Prof. Dr. Mauro de Vasconcellos Real
PPGMC/FURG

Prof. Dr. Emanuel da Silva Diaz Estrada
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional.

Rio Grande, Outubro, 2024.

Mariana Alvarenga Alves

“MODELAGEM COMPUTACIONAL E DESIGN CONSTRUTAL APLICADOS À MELHORIA DO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE PLACAS COM ENRIJECEDORES DO TIPO VIGA-CAIXÃO SOB FLEXÃO”

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande - FURG, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre. Área de concentração: Modelagem Computacional.

Aprovada em: 02/10/2024

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
LIERCIO ANDRE ISOLDI
Data: 03/10/2024 09:13:39-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Liércio André Isoldi (Orientador – FURG)

Documento assinado digitalmente
MAURO DE VASCONCELLOS REAL
Data: 03/10/2024 13:58:07-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Mauro Vasconcellos Real (FURG)

Documento assinado digitalmente
CHARLEI MARCELO PALIGA
Data: 03/10/2024 13:47:47-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Charlei Marcelo Paliga (UFPEL)

Rio Grande – RS

2024

AGRADECIMENTOS

À Deus que sempre me ampara e orienta em todas as decisões da minha vida, e sem Ele nada disso seria possível.

Ao meu orientador Prof. Dr. Liércio André Isoldi por todos os ensinamentos, apoio e compreensão em cada etapa desta pesquisa.

À minha família Ana Maria, Moises, Angelina e Ana Luisa por sempre me apoiarem e incentivarem quando eu achava que não era capaz.

Ao meu companheiro Salmo pela paciência e amor.

À minha pequena Isabela que chegou durante esse processo para somar e me mostrar que sou muito mais forte do que eu imaginava.

À minha doce Elisa que está a caminho e me traz mais forças para continuar.

À CAPES pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.

Enfim, a todos que contribuíram direta ou indiretamente para que tudo isso fosse possível.

RESUMO

As placas finas de aço com enrijecedores são componentes estruturais bastante utilizados na indústria naval, aeronáutica e também na construção civil, porque apresentam uma combinação de leveza e resistência estrutural. As simulações numéricas assumem um importante papel na análise do comportamento mecânico dessas estruturas. Este estudo propõem um modelo numérico desenvolvido no software *ANSYS Mechanical APDL*, que é baseado no Método dos Elementos Finitos, para avaliar a deflexão de placas de aço com enrijecedores do tipo viga-caixão com formato trapezoidal, também conhecidas como *hat-stiffened plates*. O objetivo desta pesquisa é realizar uma análise numérica deste tipo de estrutura ao ser submetida à um carregamento transversal uniformemente distribuído e considerando as bordas da placa simplesmente apoiadas, para avaliar o comportamento mecânico em termos da deflexão máxima e central. O Design Construtal aliado à técnica de busca exaustiva, são utilizados como ferramenta para avaliação geométrica e otimização do problema proposto. O estudo tem como base a análise de uma placa de referência (sem enrijecedores), onde parte do volume total de material é transformado em enrijecedores através fração volumétrica (ϕ), com um valor fixo de 0,3, baseado em resultados de estudos anteriores. Essa porcentagem de 0,3 da fração volumétrica vai determinar parâmetros como a quantidade, altura e espessura dos enrijecedores, que são graus de liberdade do problema, assim como a direção deles na placa (longitudinal ou transversal). O ângulo que forma o trapézio do enrijecedor também tem um valor fixo de 120°. Os arranjos geométricos com enrijecedores do tipo viga-caixão trapezoidal analisados no presente estudo, mostraram que no geral, independente da direção em que os enrijecedores são posicionados na placa, quanto maior a altura do enrijecedor e menor sua espessura, menores são as deflexões máxima e central da estrutura. Percebe-se também que há uma maior minimização das deflexões máxima e central quando os enrijecedores são adicionados na direção transversal da placa, cujos resultados apresentaram uma redução de até 79,27% entre o melhor resultado para placa com enrijecedores transversais comparados aos enrijecedores longitudinais.

Palavras-chave: Placas enrijecidas, Deflexão, Enrijecedor tipo viga-caixão, Simulação numérica estrutural, Design Construtal.

ABSTRACT

Thin steel plates with stiffeners are widely used structural components in the shipbuilding and aeronautics industries, as well as in civil construction, because they offer a combination of lightness and structural strength. Numerical simulations play an important role in analyzing the mechanical behavior of these structures. This study proposes a numerical model developed in the ANSYS Mechanical APDL software, which is based on the Finite Element Method, to evaluate the deflection of steel plates with trapezoidal-shaped box-beam stiffeners, also known as hat-stiffened plates. The aim of this research is to carry out a numerical analysis of this type of structure when subjected to a uniformly distributed transverse load and considering the edges of the plate simply supported, in order to evaluate the mechanical behavior in terms of maximum and central deflection. Constructal Design and the exhaustive search technique are used as a tool for geometric evaluation and optimization of the proposed problem. The study is based on the analysis of a reference plate (without stiffeners), where part of the total volume of material is transformed into stiffeners by means of a volume fraction (ϕ), with a fixed value of 0.3, based on the results of previous studies. This 0.3 percentage of the volume fraction will determine parameters such as the number, height and thickness of the stiffeners, which are degrees of freedom in the problem, as well as their direction on the plate (longitudinal or transverse). The angle forming the stiffener trapezoid also has a fixed value of 120°. The geometric arrangements with trapezoidal box-beam type stiffeners analyzed in this study showed that, in general, regardless of the direction in which the stiffeners are positioned in the plate, the greater the height of the stiffener and the smaller its thickness, the smaller the maximum and central deflections of the structure. It can also be seen that there is a greater minimization of the maximum and central deflections when the stiffeners are added in the transverse direction of the plate, the results of which showed a reduction of up to 79.27% between the best result for the plate with transverse stiffeners compared to the longitudinal stiffeners.

Keywords: *Stiffened plates, Maximum deflection, Hat-stiffener, Structural numerical simulation, Constructal Design.*

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS....9
LISTA DE TABELAS....12
LISTA DE SÍMBOLOS....13
1. INTRODUÇÃO....16
1.1. Revisão Histórica e Estado da Arte....18
1.2. Objetivos....24
2. TEORIA DE PLACAS....26
2.1. Teoria de Reissner-Mindlin para Placas Finas....28
2.1.1. Campo de Deslocamentos....28
2.1.2. Relação Deformação-Deslocamento....29
2.1.3. Relação Tensão-Deformação....30
2.1.4. Esforços Internos....31
2.2. Placas com enrijecedores....33
3. MODELAGEM COMPUTACIONAL....35
3.1. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS....35
3.1.1. Método dos Deslocamentos por Análise Matricial....36
3.1.2. Formulação de Elementos Finitos pela Teoria de Reissner-Mindlin....39
3.1.2.1. Discretização do Campo de Deslocamentos....39
3.1.2.2. Discretização das Deformações Generalizadas e Campos de Tensões Resultantes....40
3.1.2.3. Derivação das Equações de Equilíbrio para o elemento....41
3.1.2.4. Integração Numérica....42
3.1.2.5. Condições de Contorno....43
3.3. Validação e Verificação do Modelo Numérico....48
3.3.1. Validação do Modelo Numérico com Enrijecedores tipo I....49
3.3.2. Verificação do Modelo Numérico com Enrijecedores tipo I....49
3.3.2.1. Verificação do Modelo Numérico com Enrijecedores tipo Viga-Caixão (*Hat-stiffeners*) 50
4. TEORIA CONSTRUTAL....53
4.1. Método Design Construtal....54
4.2. Busca Exaustiva....54
4.3. Estudo de Caso....55
5. RESULTADOS E DISCUSSÕES....61
5.1. Validação do Modelo Numérico....61

5.2. Verificação do Modelo Numérico 61
5.2.1. Verificação do Modelo Numérico em estruturas *hat-stiffened plates*.....63
5.3. APLICAÇÃO DO MODELO.....68
5.3.1. Enrijecedores Longitudinais 70
5.3.2. Enrijecedores Transversais 77
5.3.3. Comparação dos resultados com estudos anteriores 89
6. CONCLUSÕES.....97
6.1. Proposta de Continuidade 98
REFERÊNCIAS 99
APÊNDICE A – Caracterização da Teoria de Kirchhoff para placas finas 105
Campo de Deslocamentos.....109
Relação Deformação-Deslocamento 110
Relação Tensão-Deformação.....111
Esforços Internos 111
APÊNDICE B – Caracterização geométrica das estruturas de acordo com a altura e espessura do enrijecedor para cada caso estudado.....114
APÊNDICE C – Resultados para a deflexão máxima e central e a diferença relativa entre as deflexões para cada caso analisado.....122

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: Exemplos de aplicação de placas de aço 17
Figura 1.2: Seção transversal de um navio 18
Figura 1.3: Placas com enrijecedores do tipo viga-caixão trapezoidal como parte da fuselagem de uma aeronave 19
Figura 2.1: Representação do deslocamento de um ponto A no plano *xz*, segundo as hipóteses de Reissner-Mindlin 28
Figura 2.2: Distribuição de tensões de cisalhamento: (a) constante; (b) conforme a teoria da elasticidade 31
Figura 2.3: Convenção de sinais adotadas para a Teoria de Reissner-Mindlin 32
Figura 2.4: Placa enrijecida num sistema laje-viga 33
Figura 3.1: Graus de liberdade no sistema de coordenadas global e no sistema de coordenadas local 37
Figura 3.2: Discretização de uma placa usando retângulos de 4 nós 39
Figura 3.3: Algumas condições de contorno em placas pela teoria de Reissner-Mindlin 44
Figura 3.4: Placa quadrada simplesmente apoiada (SS) sob carregamento uniformemente distribuído q. Distribuição da força cortante Q_y ao longo da linha de apoio AB para condições de (a) apoio simples rígido e (b) apoio simples flexível 45
Figura 3.5: Geometria do elemento SHELL281 46
Figura 3.6: Sistemas de coordenadas padrão do elemento SHELL281 47
Figura 3.7: Sistemas de coordenadas local do elemento SHELL281 48
Figura 3.8: Geometria da placa quadrada utilizada no estudo experimental de Carrijo *et al*. (1999), medidas em mm 49
Figura 3.9: Geometria da placa enrijecida utilizada para verificação do modelo computacional, medidas em mm 50
Figura 3.10: (a) Geometria e dimensões da placa com dois enrijecedores do tipo viga-caixão trapezoidal, em mm; (b) Dimensões do enrijecedor, em mm 51
Figura 3.11: Geometria da placa e do enrijecedor 51
Figura 4.1: Sistemas de fluxo 53
Figura 4.2: Caracterização da placa de referência e condições de contorno 56
Figura 4.3: Configurações geométricas geradas pela aplicação do Método Design Construtal 57
Figura 4.4: Proposta de estudo de placa com enrijecedor do tipo viga-caixão trapezoidal na direção longitudinal com até cinco enrijecedores 58

Figura 4.5: Proposta de estudo de placa com enrijecedor do tipo viga-caixão trapezoidal na direção transversal com até nove enrijecedores 59
Figura 4.6: Variáveis que caracterizam a dimensão e espaçamento dos enrijecedores (a) para enrijecedores na direção longitudinal e (b) para enrijecedores na direção transversal 60
Figura 5.1: Resultado para a deflexão máxima na placa obtido com o elemento finito SHELL281 considerando uma malha com elementos de 2,436 mm 61
Figura 5.2: Resultado para a deflexão máxima na placa obtido com o elemento finito SHELL281 considerando uma malha com elementos de 3,81 mm 62
Figura 5.3: Teste de convergência de malha e verificação do modelo computacional 63
Figura 5.4: Resultado para a deflexão máxima obtido com o elemento finito SHELL281 considerando uma malha com elementos de 10 mm 64
Figura 5.5: Teste de convergência de malha para a condição de bordas simplesmente apoiadas e condição de bordas engastadas 65
Figura 5.6: Deflexão máxima para os casos da Tabela 3.1 com a condição de bordas simplesmente apoiadas e com a condição de bordas engastadas 65
Figura 5.7: Menor e maior deflexão resultantes, sendo (a) Caso 6 e (b) Caso 15 com a condição de bordas simplesmente apoiadas; (c) Caso 11 e (d) Caso 15 considerando as bordas da placa engastadas 67
Figura 5.8: Teste de convergência de malha (a) para a placa com cinco enrijecedores longitudinais; (b) para a placa com nove enrijecedores transversais 68
Figura 5.9: Deslocamentos resultantes na placa de referência adotando uma malha quadrada de 10 mm 69
Figura 5.10: Deflexão máxima e central para a placa com um enrijecedor longitudinal 70
Figura 5.11: Deflexão máxima e central para a placa com dois enrijecedores longitudinais 71
Figura 5.12: Deflexão máxima e central para a placa com três enrijecedores longitudinais 71
Figura 5.13: Deflexão máxima e central para a placa com quatro enrijecedores longitudinais 72
Figura 5.14: Deflexão máxima e central para a placa com cinco enrijecedores longitudinais 72
Figura 5.15: Configuração geométrica e distribuição dos deslocamentos na placa com um enrijecedor longitudinal para a espessura de 4,75 mm, sendo (a) h_s = 300 mm; (b) h_s = 275 mm e (c) h_s = 250 mm 74
Figura 5.16: Distribuição dos deslocamentos na placa com dois enrijecedores longitudinais para a espessura de 4,75 mm, sendo (a) h_s = 100 mm; (b) h_s = 75 mm; (c) h_s = 50 mm e (d) h_s = 25 mm.. 75

Figura 5.17: Distribuição das deflexões com os melhores resultados para as cinco configurações geométricas de enrijecedores na direção longitudinal..... 77
Figura 5.18: Deflexão máxima e central para a placa com um enrijecedor transversal 78
Figura 5.19: Deflexão máxima e central para a placa com dois enrijecedores transversais 78
Figura 5.20: Deflexão máxima e central para a placa com três enrijecedores transversais 79
Figura 5.21: Deflexão máxima e central para a placa com quatro enrijecedores transversais 79
Figura 5.22: Deflexão máxima e central para a placa com cinco enrijecedores transversais 80
Figura 5.23: Deflexão máxima e central para a placa com seis enrijecedores transversais 80
Figura 5.24: Deflexão máxima e central para a placa com sete enrijecedores transversais 81
Figura 5.25: Deflexão máxima e central para a placa com oito enrijecedores transversais 81
Figura 5.26: Deflexão máxima e central para a placa com nove enrijecedores transversais 82
Figura 5.27: Distribuição dos deslocamentos na placa com um enrijecedor transversal considerando h_s = 400 mm e t_s = 12,70 mm 84
Figura 5.28: Distribuição dos deslocamentos na placa com dois enrijecedores transversais para a espessura de 12,70 mm, sendo (a) h_s = 200 mm; (b) h_s = 75 mm e (b) h_s = 25 mm 85
Figura 5.29: Distribuição dos deslocamentos na placa com quatro enrijecedores transversais para a espessura de 6,35 mm e h_s = 150 mm 86
Figura 5.30: Distribuição das deflexões com os melhores resultados para as nove configurações geométricas de enrijecedores na direção transversal 88
Figura 5.31: Configuração deformada da placa global otimizada para (a) SHELL93 e (b) SOLID95 90
Figura 5.32: Distribuição das deflexões (a) na placa P(6,6) com enrijecedores a 0° e enrijecedores a 45° ;(b) na placa P(2,5) com enrijecedores a 0° e enrijecedores a 45° 92
Figura 5.33: Distribuição das deflexões para a placa P(2,3) com a razão h_{ts}/h_{ls} = 2 (a) *ts* = 6,35 mm, (b) *ts* = 12,70 mm e (c) *ts* = 25,40 mm 94
Figura 5.34: Distribuição das deflexões para a placa P(6,2) que apresentou melhor desempenho... 95

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1: Dimensões em mm do enrijecedor mantendo volume de material constante (Pal *et al*., 2018). 52
Tabela 5.1: Resultados da Deflexão máxima U_z no centro da placa 62
Tabela 5.2: Deflexão máxima, em mm, para os casos da Tabela 3.1. 66
Tabela 5.3: Resultados da deflexão máxima e central na placa de referência 69
Tabela 5.4: Melhores e piores resultados de deflexões máxima e central de acordo com a quantidade de enrijecedores na direção longitudinal à placa 73
Tabela 5.5: Melhores e piores resultados de deflexões máxima e central de acordo com a quantidade de enrijecedores na direção transversal à placa 83
Tabela 5.6: Resultados da deflexão $U_{z(central)}$para a fração volumétrica ϕ = 0,3 91
Tabela 5.7: Comparação entre os resultados da deflexão central $U_{z(central)}$ para a fração volumétrica ϕ = 0,3 93
Tabela 5.8: Comparação entre os resultados da deflexão máxima $U_{z(máx)}$ e central $U_{z(central)}$..... 94
Tabela 5.9: Comparação entre os resultados de deflexão máxima $U_{z(máx)}$..... 96

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Comprimento da placa [mm]
b	Largura da placa [mm]
b_t	Base menor do enrijecedor [mm]
B	Rigidez Torcional efetiva
B'	Matriz de deformação generalizada (B'_{f_i} flexão e B'_{c_i} cisalhamento transversal)
d	Vetor de deslocamentos
D	Rigidez Flexural
D_t	Rigidez à torção
$\boldsymbol{D}$	Matriz constitutiva ($\boldsymbol{D}_f$ flexão e $\boldsymbol{D}_c$ cisalhamento transversal)
$\widehat{\boldsymbol{D}}$	Matriz constitutiva generalizada ($\widehat{\boldsymbol{D}}_f$ flexão e $\widehat{\boldsymbol{D}}_c$ cisalhamento transversal)
e	Direção ortogonal ao eixo de simetria
E	Módulo de elasticidade (módulo de Young) [GPa]
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Vetor de deformações ($\boldsymbol{\varepsilon}_f$ flexão e $\boldsymbol{\varepsilon}_c$ cisalhamento transversal)
$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$	Vetor de deformações generalizadas ($\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_f$ flexão e $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ cisalhamento transversal)
ε_x	Deformação normal na direção do eixo *x* [mm]
ε_y	Deformação normal na direção do eixo *y* [mm]
ε_y	Deformação normal na direção do eixo *y* [mm]
f	Vetor de forças nodais globais
G	Módulo de elasticidade ao cisalhamento [GPa]
h_s	Altura dos enrijecedores [mm]
$\lvert J^e \rvert$	Determinante Jacobiano
[K]	Matriz de rigidez global
$\boldsymbol{M}$	Vetor de esforços internos por unidade de comprimento
M_x	Momento fletor na direção *x* [kN·mm]
M_y	Momento fletor na direção *y* [kN·mm]
M_{xy}	Momento de torção de *x* em relação à *y* [kN·mm]
M_{yx}	Momento de torção de *y* em relação à *x* [kN·mm]
m_x	Momento fletor na direção *x* por unidade de comprimento [kNmm/mm]
m_y	Momento fletor na direção *y* por unidade de comprimento [kNmm/mm]
m_{xy}	Momento de torção de *x* em relação à *y* por unidade de comprimento [kNmm/mm]
m_{yx}	Momento de torção de *y* em relação à *x* por unidade de comprimento [kNmm/mm]

N	Forças axiais de tração [N/m]
N_{sl}	Número de enrijecedores na direção longitudinal
N_{st}	Número de enrijecedores na direção transversal
n'	Distância entre dois enrijecedores [mm]
P'	Matriz da função de forma para o elemento em um nó *i*
P_z	Carga distribuída na direção do eixo *z* [kN]
Q_x	Força de cisalhamento transversal na direção *x* [kN]
Q_y	Força de cisalhamento transversal na direção *y* [kN]
q_x	Força de cisalhamento transversal por unidade de comprimento em *x* [kNmm/mm]
q_y	Força de cisalhamento transversal por unidade de comprimento em *y* [kNmm/mm]
R	Matriz de rotação
s	Direção lateral
t	Espessura da placa de referência [mm]
t_p	Espessura da placa enrijecida [mm]
t_s	Espessura dos enrijecedores [mm]
τ	Tensão de cisalhamento
τ_{xy}	Tensão de cisalhamento no plano ortogonal ao eixo *x* na direção de *y* [MPa]
τ_{yx}	Tensão de cisalhamento no plano ortogonal ao eixo *y* na direção de *x* [MPa]
U_z	Deflexão no centro da placa [mm]
$U_{zMáx}$	Deflexão máxima na placa [mm]
$\boldsymbol{u}$	Vetor de deslocamentos nodais
u	Componente de deslocamentos do eixo *x*
v	Componente de deslocamentos do eixo *y*
w	Componente de deslocamentos do eixo *z*
V_r	Volume de material da placa de referência [mm³]
V_s	Volume de material dos enrijecedores [mm³]
$\boldsymbol{X}$	Vetor de deformações generalizadas de flexão
x'	Projeção da lateral do enrijecedor no eixo *x* [mm]
y'	Projeção da lateral do enrijecedor no eixo *y* [mm]
θ_x	Rotação no plano *xz*
θ_y	Rotação no plano *yz*
σ_x	Tensão normal na direção do eixo *x* [MPa]
σ_y	Tensão normal na direção do eixo *y* [MPa]

σ_z	Tensão normal na direção do eixo *z* [MPa]
$\boldsymbol{\sigma}$	Vetor de tensões ($\boldsymbol{\sigma}_f$ flexão e $\boldsymbol{\sigma}_c$ cisalhamento)
γ	Deformação por cisalhamento [mm]
γ_{xy}	Deformação por cisalhamento transversal nas direções *x* e *y* [mm]
γ_{xz}	Deformação por cisalhamento transversal nas direções *x* e *z* [mm]
γ_{yx}	Deformação por cisalhamento transversal nas direções *y* e *x* [mm]
ν	Coeficiente de Poisson
α	Coeficiente de correção/Coeficientes de distorção transversal
ϕ	Fração volumétrica
$\emptyset$	Rotações adicionais ($\emptyset_x, \emptyset_y$)
δ	Vetor de deslocamento virtual nodal

1. INTRODUÇÃO

Segundo Krauthammer e Ventsel (2001), as placas finas são elementos estruturais limitados por dois planos paralelos chamados de faces, cuja espessura é considerada pequena em relação às demais dimensões características (comprimento e largura). As cargas estáticas ou dinâmicas suportadas pelas placas são predominantemente perpendiculares às suas faces. A placa sendo originalmente plana, desenvolve forças de cisalhamento, momentos de flexão e torção para resistir às cargas transversais (Timoshenko e Gere, 1961). A ação estrutural bidimensional delas resulta em estruturas mais leves oferecendo inúmeras vantagens econômicas, além disso, as chapas finas combinam leveza e eficiência com alta capacidade de carga. Devido a essas características, as placas de aço são componentes estruturais amplamente utilizados em vários campos de engenharia, como por exemplo, estruturas navais e offshore, indústria aeronáutica, setor automobilístico e na construção civil, como exemplificado na Figura 1.1.

Os enrijecedores são elementos estruturais normalmente adicionados às placas de aço com a função de aumentar a rigidez da estrutura e melhorar o seu comportamento mecânico (Troina *et al*., 2018). Por exemplo, quando analisada a estrutura de uma embarcação que é composta em sua maior parte por placas enrijecidas, como está exemplificado na Figura 1.2, a distribuição dos enrijecedores bem como o seu formato, contribuem para a diminuição dos efeitos provocados pelas cargas internas e pressão externa da água, evitando danos à estrutura (Nogueira *et al*., 2019).

A análise de placas reforçadas sempre foi motivo de preocupação para os engenheiros estruturais devido à dificuldade em quantificar a interação entre os enrijecedores e a placa, ou seja, qual é o compartilhamento real de carga entre esses dois componentes estruturais. O método de energia de deformação sempre permaneceu como uma estratégia de solução, mas de escopo limitado para problemas reais de placas rígidas (Tharian, 2015). A modelagem computacional de estruturas constituídas por placas enrijecidas tem se mostrado muito importante ao longo dos anos, principalmente com os avanços da tecnologia. A análise dos efeitos provocados pelos diversos carregamentos e condições de vinculação, consegue exprimir uma solução quase realista do que está acontecendo ou do que poderá ocorrer nessas estruturas. Diversos métodos de análise foram desenvolvidos, dentre os quais se destaca o Método dos Elementos Finitos (MEF) que foi adotado no desenvolvimento deste estudo, com aplicações em problemas estáticos, dinâmicos e de estabilidade lineares e não-lineares (Szilard, 2004). Este trabalho poderá auxiliar futuros projetos principalmente no setor naval, costeiro e portuário, bem como contribuir em pesquisas desenvolvidas no meio acadêmico relacionadas a este tema.

Figura 1.1: Exemplos de aplicação de placas de aço. (https://aeroclubesc.com.br/fuselagem/; https://viga.ind.br/produto/construcao_naval_fabrica_montagem_de_navios/;https://www.myfarm.com.br/tudo-sobre-silos/;https://gestaodesegurancaprivada.com.br/veiculo-especial-de-transporte-de-numerarios-bens-e-valores/; https://www.metalmartins.com.br/cobertura-estrutura-metalica-preco#group1-1; https://issuu.com/prodweb/docs/101361_revista_pontes_de_aco_set2015/17.

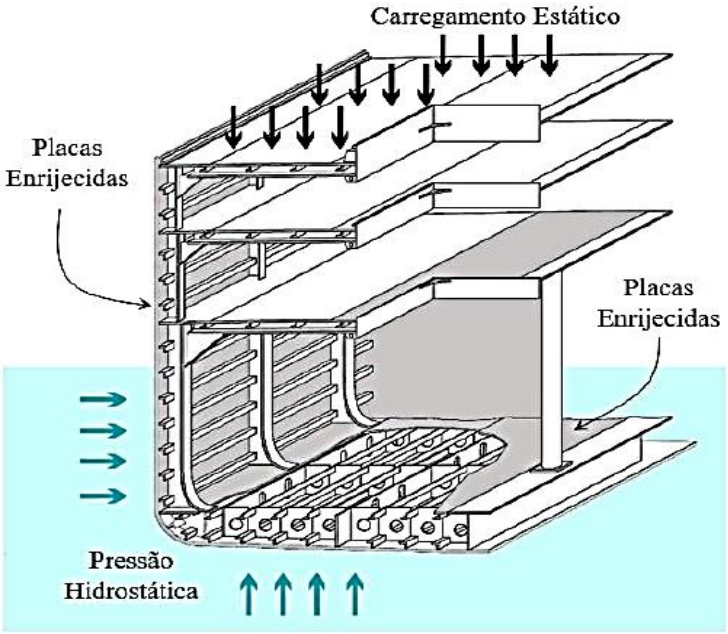

Figura 1.2: Seção transversal de um navio. (Fonte: Pinto, 2019)

1.1. Revisão Histórica e Estado da Arte

Muitos estudos que adotam a abordagem numérica para avaliar o comportamento mecânico de placas enrijecidas podem ser encontrados na literatura. Timoshenko (1959) propôs uma equação diferencial governante de equilíbrio para flexão em placas anisotrópicas submetidas a cargas laterais e a expressão para a determinação de rigidez em alguns casos específicos. Já Troitsky (1976) desenvolveu um tratado completo referente aos métodos clássicos para análise de placas enrijecidas, onde a teoria de placas ortotrópicas foi usada para a análise de placas com vários tipos de enrijecedores. Uma revisão crítica de soluções analíticas para flexão e flambagem de placas planas, retangulares e ortotrópicas foi apresentada por Bao *et al*. (1997). Bedair (1997) apresentou a aplicação da Programação Sequencial Quadrática para análise de placas enrijecidas sob carregamento lateral, cuja energia de deformação da estrutura idealizada é derivada em termos de funções de deslocamento dentro e fora do plano. Prusty e Satsangi (2001) realizaram análises estáticas de painéis enrijecidos usando um elemento isoparamétrico de oito nós para a placa e um elemento de viga curva de três nós para o enrijecedor.

O MEF tem sido usado na análise de estruturas de placas, principalmente no caso de navios, desde o início dos anos 70 (Kawai, 1973), e a extensa aplicação deste método para análise global de estruturas prevalece até hoje. Rossowt e Ibrahimkhail (1978) realizaram um estudo utilizando MEF com base no método das restrições para investigar as deflexões transversais de placas rígidas com enrijecedores concêntricos e excêntricos. A característica distinta do método das restrições em uma análise por elementos finitos é a possibilidade de utilização de elementos baseados em polinômios

completos de ordem arbitrária (Troina, 2017). A modelagem estrutural e análise do módulo do casco de uma embarcação utilizando o MEF foi apresentado por Hughes (1988) para análise linear, onde foram empregadas técnicas como aglomerar reforços e abordagem de placa ortotrópica usando elemento de reforço separado.

A maioria dos estudos que abordam placas enrijecidas utilizam enrijecedores retangulares de seção aberta, que são os modelos mais tradicionais. Nesta pesquisa, será realizada uma análise de placas com enrijecedores do tipo viga-caixão com formato trapezoidal, também chamados de *hat-stiffened plates*. Dubas (1976) salienta as vantagens tanto estrutural como econômica da utilização de enrijecedores de seção fechada, como é o caso dos *hat stiffeners*. A Figura 1.3 mostra um exemplo de estrutura de placas com enrijecedores do tipo viga-caixão trapezoidal.

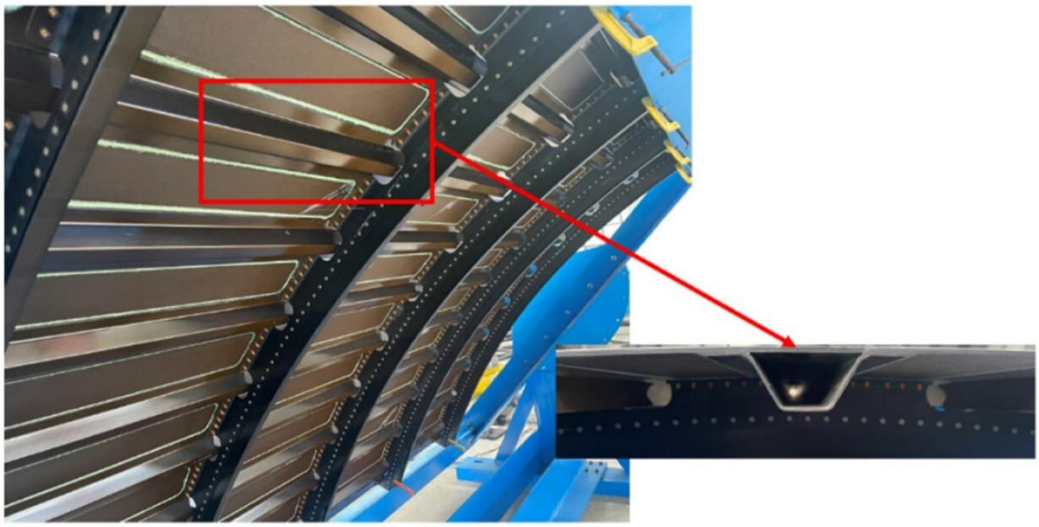

Figura 1.3: Placas com enrijecedores do tipo viga-caixão trapezoidal como parte da fuselagem de uma aeronave. (Fonte: Li *et al*., 2022)

Estudos mais recentes que analisam *hat-stiffeners plates*, em sua grande maioria abordam estruturas de material compósito como por exemplo Kim *et al*. (2010), que apresentaram um estudo sobre a fabricação e avaliação de desempenho de um painel compósito com reforço *hat-stiffened*, usando os processos de co-cura, co-ligação e ligação secundária, avaliando suas precisões geométricas e propriedades mecânicas. Li *et al*. (2019) desenvolveram uma plataforma de testes não destrutivos de micro-ondas combinando imagens de varredura de campo próximo e de campo distante para avaliar defeitos internos de infusão de resina deficiente em um painel compósito com enrijecedores *hat-stiffeners*. Os resultados demonstraram a eficácia da combinação desses métodos de imagem, e também que a técnica de costura de imagem baseada em recursos pode ser adotada para obter a imagem em tamanho real da estrutura estudada. Ju *et al*. (2021) apresentam uma pesquisa sobre a qualidade da fabricação de estruturas compósitas reforçadas com *hat-stiffeners* no processo

de co-cura do material de preenchimento dos enrijecedores, apresentando bons resultados experimentais e numéricos.

Alguns estudos de estruturas do tipo *hat-stiffened plate* com material compósito analisam o processo de flambagem. Sun *et al*. (2020) apresentaram a combinação de resultados de análises numéricas e experimental do comportamento à flambagem de um painel compósito com enrijecedores *hat-stiffeners* sob cisalhamento no plano, mostrando que o processo de evolução da flambagem e o mecanismo de falha da estrutura podem ser efetivamente determinados por investigação numérica e experimental. Kumar *et al*. (2020) realizaram também uma análise experimental e numérica através do método dos elementos finitos no software ABAQUS para avaliar o comportamento de flambagem de painéis compósitos reforçados sob carga compressiva nas bordas para a determinação do comportamento pré e pós-encurvatura. Murthy *et al*. (2021) propuseram uma análise numérica de painéis compósitos reforçados com enrijecedores *hat-stiffeners* para condições pré e pós-flambagem através de uma abordagem não linear de elementos finitos para investigar o comportamento de colapso da estrutura utilizando o software ABAQUS.

Sun *et al*. (2021) analisaram dois tipos de redes neurais artificiais para prever o comportamento de flambagem por compressão em painéis compósitos com enrijecedores *hat-stiffeners*. Foi analisado o comportamento de flambagem da estrutura usando uma combinação de simulação de elementos finitos e validação experimental. Dois tipos de redes neurais foram selecionados comparativamente para prever a carga de flambagem e o modo de falha de flambagem. Wang *et al*. (2023) realizaram uma análise de flambagem e pós-flambagem de painéis compósitos reforçados com *hat-stiffeners* sob cargas de compressão axial. Através de um método de cálculo aprimorado de engenharia e um método de análise numérica baseado no método dos elementos finitos, demonstraram que a combinação dos dois métodos tem um alto valor de referência para projetos desse tipo de estrutura. Kumar *et al*. (2024) apresentaram uma revisão sobre a flambagem de painéis laminados compósitos sob carga de compressão e cisalhamento, de placas laminadas com diferentes tipos de enrijecedores (do tipo I, lâmina, tipo T e *hat-stiffened*). Os autores listaram diferentes métodos de análise, desde estudos analíticos, experimentais, análise de elementos finitos e outros métodos computacionais que foram utilizados por pesquisadores para a determinação do comportamento de flambagem em painéis enrijecidos.

A flexão em estruturas de material compósito também foi tema de estudo de Wang *et al*. (2021), que fizeram uma análise de danos na interface de painéis compósitos reforçados com *hat-stiffeners*, através do projeto de um modelo de flexão de oito pontos na estrutura. O estudo mostrou que o modelo pode ser usado para avaliar o desempenho da interface do painel multirreforçado correspondente durante a flambagem por compressão axial por meio de simulação precisa e projeto

de parâmetros, sendo útil para o projeto e análises de rigidez da placa e dos reforços. Já Li *et al*. (2022) apresentam uma análise de falhas de painéis compósitos de aeronaves reforçados com *hat-stringer* que são similiares aos *hat-stiffeners*, sob carga de flexão de quatro pontos através de estudos experimentais e numéricos, indicando a confiabilidade e aplicabilidade do modelo teórico estabelecido e do método numérico para prever a ruptura de estruturas de vigas do tipo *hat-stiffened*.

Liu e Guan (2023) avaliaram os efeitos de enchimentos na resistência da interface entre painel compósito e enrijecedor *hat-stiffened*. Para garantir uma capacidade avançada de suporte de carga entre o enrijecedor-painel, a inserção de enchimentos pode alterar a resistência de ligação. Uma série de testes de flexão de quatro pontos foram conduzidos em amostras de painel com *hat-stiffened* co-curados com e sem enchimentos, com diferentes defeitos de descolamento pré-fabricados. Além disso, simulações com elementos finitos foram implementadas para prever o processo de falha. Os testes mostraram que o uso de enchimentos pode aumentar a rigidez inicial do painel sem defeitos pré-fabricados em cerca de 10%, mas fornece influência limitada na carga de falha inicial.

Filippatos *et al*. (2024) apresentam um projeto de componentes compósitos de aeronaves voltado para a sustentabilidade, onde utilizam um modelo parametrizado de elementos finitos de uma placa de material compósito, integrando fibras puras e recicladas. Para avaliar a eficácia do índice de sustentabilidade, foram realizados dois testes que incluem uma placa estrutural abstrata com uma disposição típica que possui um enrijecedor do tipo viga-caixão trapezoidal, que é representativo para a indústria da aviação, cuja estrutura é composta por materiais de fibra de carbono puros e reciclados. O objetivo é avaliar o desempenho estrutural do material compósito, bem como o seu impacto global na sustentabilidade.

Pesquisas que abordam a deflexão de placas de aço enrijecidas foram desenvolvidas por Yakoob e Hasan (2015) que avaliaram a rigidez de placas *cantilever*, ou seja, com um lado fixo e o outro livre,considerando diferentes tipos de enrijecedores, entre eles enrijecedores em forma de I, T e trapezoidal sólido, com o objetivo de analisar a flexão estática da placa. Hosseini e Soltani (2017) analisaram a flexão de placas quadradas e retangulares enrijecidas com vigas concêntricas e excêntricas usando o método de colocação sem malha, utilizando a teoria de placas de Mindlin e a teoria de vigas de Timoshenko.

Troina *et al*. (2020) aplicaram o método Design Construtal associado à técnica de busca exaustiva para otimizar placas enrijecidas, simplesmente apoiadas, com enrijecedores do tipo I de mesma altura nas direções longitudinal e transversal da placa, submetidas à flexão devido a um carregamento uniformemente distribuído, visando minimizar a deflexão central nestas estruturas. Os autores utilizaram cinco frações volumétricas além dos elementos finitos SHELL93 (bidimensional) e SOLID95 (tridimensional). Não houve uma diferença significativa entre os resultados das deflexões

centrais da placa para as frações volumétricas dentro do intervalo de $0,3 \leq \phi \leq 0,5$, tendo como melhor desempenho global com $\phi = 0,5$ a placa P(2,5), ou seja, com dois enrijecedores longitudinais e cinco transversais.

Nogueira *et al*. (2021) adotaram a mesma metodologia aplicada por Troina *et al*. (2020), focando na minimização das deflexões máximas e centrais em placas enrijecidas variando as alturas dos enrijecedores em forma de I nas direções transversal e longitudinal. Diferente de Troina *et al*. (2020), neste estudo foi considerado uma fração volumétrica $\phi = 0,3$ e o elemento finito SHELL281. Os resultados mostraram que o aumento na altura dos enrijecedores transversais é mais relevante do que dos longitudinais, gerando uma maior redução das deflexões máxima e central. A placa com melhor desempenho foi a geometria P(2,3) (dois enrijecedores longitudinais e três transversais), apresentando uma melhoria de 97,98% na deflexão máxima e 98,85% na deflexão central em relação à placa de referência.

Pinto *et al*. (2021) também utilizando essa metodologia, investigaram a influência dos enrijecedores do tipo I orientados a 0° e a 45° na minimização da deflexão máxima e central variando a quantidade de enrijecedores transversais e longitudinais (que possuem mesma altura), mas mantendo o volume de material constante e, assim como Troina *et al*. (2020), também adotou cinco valores de fração volumétrica, tendo como elemento finito o SHELL281. Para a maioria dos arranjos analisados, os enrijecedores orientados a 45° são mais vantajosos para reduzir a deflexão máxima em comparação aos enrijecedores orientados a 0°, principalmente nas frações volumétricas ϕ iguais a 0,1; 0,2 e 0,3, onde foi possível minimizar a deflexão máxima em até 60% em alguns arranjos. Para frações volumétricas de 0,4 e 0,5, orientar os enrijecedores a 45° só é viável nos casos com grandes quantidades de enrijecedores. A geometria ótima que apresentou menor flecha máxima para placas com enrijecedores a 45° para $\phi = 0,4$ foi a placa P(6,5) (seis enrijecedores longitudinais e cinco transversais).

Kucharski *et al*. (2022) realizaram uma análise geométrica de placas de aço enrijecidas para analisar a influência de reforços transversais em forma de I ou T no comportamento mecânico em termos da deflexão máxima e da tensão de von Mises; aplicando apenas a fração volumétrica $\phi = 0,3$ e empregando também o elemento finito SHELL281. Os resultados mostraram que as placas com reforços transversais T são mais eficazes para a redução da tensão de von Mises e deflexão máxima, cuja estrutura que apresentou um melhor desempenho quando comparado os enrijecedores I e T (de mesma altura em ambas as direções) foi a placa $P_T(6,2)$ (seis enrijecedores longitudinais e dois transversais), significando uma diminuição em relação à placa $P_I(6,2)$ de 63,00% para a tensão de von Misses e de 52,90% para a deflexão máxima.

Por adotarem a mesma metodologia e o emprego do método Design Construtal na obtenção dos resultados, os estudos de Troina *et al*. (2020), Nogueira *et al*. (2021), Pinto *et al*. (2021) e Kucharski *et al*. (2022) serão utilizados como comparação aos resultados obtidos nesta pesquisa adotando enrijecedores do tipo viga-caixão com formato trapezoidal.

Wang *et al*. (2022) avaliaram um mecanismo de deformação estrutural de uma placa de aço com enrijecedores *hat-stiffened* usada em estruturas marítimas sob carga de impacto, onde o modo de deformação na placa enrijecida é determinado pelo projeto e condução de um teste de impacto, e as fórmulas analíticas para a resistência instantânea da estrutura são derivadas com base na teoria da mecânica plástica. A precisão do método de cálculo analítico é verificada pela comparação com os resultados do teste, e a fórmula de cálculo analítico para calcular a resistência estrutural instantânea da placa com enrijecedores *hat-stiffened* proposta no artigo pode avaliar rapidamente a resposta da estrutura sob cargas de acidente, o que é de grande importância para o projeto de estruturas marítimas.

Platypodis e Anyfantis (2022) avaliaram a modelagem de painéis com reforços do tipo I e T de navios submetidos a cargas de pressão uniforme, cujo trabalho foi dividido em duas partes. A primeira parte envolve a avaliação da resposta estrutural de painéis com reforços em uma única direção sob pressão uniforme, com o objetivo de avaliar a eficácia de abordagens alternativas na obtenção de campos de tensões secundárias precisos. A segunda parte trata-se do desenvolvimento de uma abordagem prescritiva rápida, mas eficaz, que permitirá o dimensionamento dos reforços longitudinais considerando o campo de tensões secundário.

Ainda há poucas pesquisas que abordam a deflexão em placas de aço com enrijecedores *hat-stiffeners*. Como citado anteriormente, grande parte considera materiais compósitos e realizam estudos de flambagem, ou adotam enrijecedores que tradicionalmente tem a forma de vigas em I e T. Nessa área de estudo, Jia e Ulfvarson (2005) analisaram o comportamento estrutural de um deque de aço de alta resistência com reforços trapezoidais a partir de dados de uma estrutura real de um navio para transporte de veículos. O estudo apresenta discussões sobre a caracterização estática e dinâmica deste tipo de convés onde a rigidez da suspensão e amortecimento dos veículos são incluídos para avaliar a resposta dinâmica do sistema veículo-deque.

Tharian e Nandakumar (2013) realizaram uma análise numérica utilizando o MEF através do software ANSYS para quantificar as vantagens estruturais dos enrijecedores trapezoidais (*hat stiffeners*), em relação aos enrijecedores de seção aberta que normalmente são utilizados. Os resultados obtidos mostraram que as placas com enrijecedores trapezoidais apresentaram melhor eficiência de resistência ao peso em comparação com as placas com enrijecedores de seção aberta, se mostrando eficazes no dimensionamento de estruturas mais leves e, portanto, mais econômicas.

Aneja *et al*. (2018) também empregaram o MEF para avaliar a influência que o ângulo e altura dos enrijecedores *hat stiffeners* exercem sobre o aumento de resistência da estrutura da placa. Esse estudo mostrou que à medida que o ângulo dos enrijecedores aumenta até 120°, os parâmetros de deflexão, tensões principais máximas e as tensões de cisalhamento diminuem, resultando no aumento de resistência da placa. Quando avaliado também a influência da altura dos enrijecedores, quanto maior a altura, menores são a deflexão, tensões principais máximas e as tensões de cisalhamento.

Pal *et al*. (2018) analisaram a deflexão e tensão máxima de placas com enrijecedores do tipo viga-caixão trapezoidal, adotando diferentes geometrias para o enrijecedor mas mantendo o volume de material constante, além de diferentes tipos de condição de vinculação da placa. A análise dos 25 casos propostos nos dois tipos de vinculação mostrou que quanto menor o comprimento do enrijecedor, maior a deflexão máxima, já com relação à tensão máxima, quanto menor o comprimento do enrijecedor, maior a tensão máxima na placa. Como esperado, ocorre uma menor variação dos resultados quando considerada a placa com os lados engastados, ao contrário da proposta com lados simplesmente apoiados onde a variação dos resultados é significativamente maior.

Virág e Szirbik (2021) realizaram uma análise modal de placas com reforços trapezoidais otimizadas cujo principal objetivo era investigar as frequências naturais e os modos de operação de algumas estruturas enrijecidas submetidas à pressão lateral e compressão uniaxial, a fim de identificar quaisquer frequências potencialmente perigosas e eliminar possibilidades de falha na estrutura.

Tharian e Nandakumar (2023) apresentaram o estudo de aplicação de um superelemento para análise estrutural de bunkers feitos de placas com enrijecedores *hat-stiffened*. Os requisitos computacionais adotam o método dos elementos finitos, e esse superelemento (que possui 12 nós de fronteira) reduz os esforços de modelagem. A formulação e implementação desse superelemento foi validada e considerada computacionalmente eficiente sem comprometer a precisão dos resultados.

1.2. Objetivos

O objetivo geral desta pesquisa é realizar uma análise numérica de placas de aço com enrijecedores do tipo viga-caixão com formato trapezoidal também chamadas de *hat-stiffened plates*, submetidas a um carregamento transversal uniformemente distribuído e bordas simplesmente apoiadas. Esse estudo pretende avaliar o comportamento mecânico dessas estruturas em termos da deflexão máxima e central.

Os objetivos específicos a serem alcançados no presente estudo são:

- Realizar a validação e verificação do modelo computacional no software ANSYS, empregando o elemento finito bidimensional SHELL281 e considerando estruturas formadas por placa e enrijecedores, incluindo o tipo *hat-stiffened plates*;

- Definir as dimensões dos enrijecedores a partir da fração volumétrica ϕ (definida pela relação entre o volume de material dos enrijecedores e o volume de material total da placa), considerando ϕ = 0,3 (Nogueira *et al*. (2021); Kucharski *et al*. (2022));
- Avaliação geométrica e otimização do problema através da aplicação do Design Construtal e da técnica de busca exaustiva, a fim de avaliar a influência dos graus de liberdade (quantidade de enrijecedores na direção longitudinal da placa (N_{ls}); a quantidade de enrijecedores na direção transversal (N_{ts}); a altura (h_s) e a espessura (t_s) dos enrijecedores) no comportamento mecânico em relação à deflexão máxima e central da placa;
- Comparar os resultados obtidos nesta pesquisa com os de Troina *et al*. (2020), Nogueira *et al*. (2021), Pinto *et al*. (2021) e Kucharski *et al*. (2022) realizados anteriormente, que adotaram o método Design Construtal e as mesmas condições de contorno, mas que consideram enrijecedores tradicionais de seção aberta em forma de I e/ou T.

2. TEORIA DE PLACAS

As placas são elementos estruturais caracterizados por sua pequena espessura em relação ao seu comprimento (Yamaguchi, 1999). A ação estrutural bidimensional das placas resulta em estruturas mais leves o que, consequentemente, também oferece vantagens econômicas. Exemplos típicos de estruturas em engenharia são lajes de piso e fundação, comportas, paredes de contenção finas e tabuleiros de pontes. Também são indispensáveis nas indústrias de construção naval e aeroespacial, além de compor partes de máquinas e outros dispositivos mecânicos (Szilard, 2004).

A ação de carga em uma placa é semelhante, até certo ponto, à de vigas ou cabos, dependendo da rigidez à flexão das estruturas. A placa, sendo originalmente plana, desenvolve forças de cisalhamento, momentos de flexão e torção para resistir às cargas transversais. Como essas cargas geralmente são transportadas em ambas as direções e como a rigidez de torção em placas isotrópicas é bastante significativa, uma placa é consideravelmente mais rígida do que uma viga de vão e espessura comparáveis. Assim, as chapas finas combinam leveza e eficiência com alta capacidade de carga, economia e eficácia tecnológica (Ventsel e Krauthammer, 2001).

Ainda segundo Ventsel e Krauthammer (2001), uma placa resiste a cargas transversais exclusivamente por meio da flexão, isso porque, de acordo com Szilard (2004), a presença dos momentos de torção (M_{xy} e M_{yx}) contribuem para a resistência ao carregamento interno, conforme será apresentado adiante. As propriedades de flexão de uma placa dependem muito da relação entre a espessura em comparação com as demais dimensões. As placas podem ser classificadas em três grupos de acordo com a razão *a/t*, onde *a* representa o comprimento e *t* a espessura da placa. Esses grupos são:

1. O primeiro grupo é representado por placas espessas com relações $a/t \leq 8 \ldots 10$. A análise de tais estruturas inclui todos os componentes de tensões, deformações e deslocamentos, como para corpos sólidos usando as equações gerais de elasticidade tridimensional.
2. O segundo grupo refere-se a placas com proporções $a/t \geq 80 \ldots 100$. Essas placas são chamadas de membranas e são desprovidas de rigidez à flexão. As membranas suportam as cargas laterais por forças axiais de tração *N* (e forças de cisalhamento) atuando na superfície intermediária da placa. Essas forças são chamadas de forças de membrana, elas produzem projeção em um eixo vertical e assim equilibram uma carga lateral aplicada à placa-membrana.
3. O grupo mais extenso representa um tipo intermediário de placa, chamada de placa fina com $8 \ldots 10 \leq a/t \leq 80 \ldots 100$. Dependendo do valor da relação *w/t* (relação entre a deflexão máxima da placa e sua espessura), a parte das forças de flexão e membrana aqui pode ser diferente. Portanto, esse grupo, por sua vez, também pode ser subdivido em duas classes distintas:

a. *Placas rígidas*: uma placa pode ser classificada rígida se $w/t \leq 0{,}2$. Elas carregam cargas bidimensionais, principalmente momentos internos de flexão e torção e por forças de cisalhamento transversais. As deformações do plano médio e as forças de membrana são desprezíveis. Uma característica fundamental das placas rígidas é que as equações de equilíbrio estático para um elemento de placa podem ser estabelecidas para uma configuração original (não deformada) da placa.
b. *Placas flexíveis*: se as deflexões da placa estiverem além de um certo nível, $w/t \geq 0{,}3$, então as deflexões laterais serão acompanhadas pelo alongamento da superfície intermediária. Essas placas representam uma combinação de placas e membranas rígidas e suportam cargas externas pela ação combinada de momentos internos, forças de cisalhamento e forças (axiais) de membrana. Por causa da relação peso-carga favorável, essas placas são amplamente utilizadas pela indústria aeroespacial. Quando a magnitude da deflexão máxima é consideravelmente maior que a espessura da placa, a ação da membrana predomina. Assim, se $w/t > 5$, a tensão de flexão pode ser desprezada em comparação com a tensão da membrana. Consequentemente, o mecanismo de suporte de carga dessas placas torna-se do tipo membrana, ou seja, a tensão é distribuída uniformemente ao longo da espessura da placa.

Para Szilard (2004), as teorias de placas podem ser agrupadas de acordo com as relações tensão-deformação. As teorias de placas linear-elásticas são baseadas na suposição de uma relação tensão-deformação de acordo com a lei de Hooke, enquanto a elasticidade não linear, a plasticidade e a viscoelasticidade consideram relações tensão-deformação mais complexas. Com exceção da viscoelasticidade que trata apenas de condições dinâmicas, todas essas teorias podem ser subdivididas em estática ou dinâmica de placas, dependendo da natureza das cargas externas.

O estudo de placas baseia-se na teoria de Kirchhoff também conhecida como teoria clássica, e na teoria de Reissner-Mindlin. Essas teorias se diferem basicamente na idealização do esforço cortante, onde Kirchhoff despreza esse efeito, enquanto Mindlin o considera através da distribuição uniforme ao longo da estrutura. Isso faz com que a teoria de Reissner-Kirchhoff fique limitada ao estudo de placas finas, já a teoria de Reissner-Mindlin pode ser aplicada a placas de qualquer espessura (Oñate, 2013). A partir disso e considerando que o elemento finito adotado nesta pesquisa é baseado na teoria de Mindlin, a seguir são apresentadas as principais características da teoria de Reissner-Mindlin. A caracterização da teoria de Kirchhoff é apresentada no APÊNDICE A.

2.1. Teoria de Reissner-Mindlin para Placas Finas

Oñate (2013) apresenta que a teoria de Reissner-Mindlin está fundamentada em quatro hipóteses simplificadoras:

1. Os pontos contidos no plano médio se deslocam apenas na direção vertical, portanto os deslocamentos horizontais (u, v) são iguais a zero;
2. Todos os pontos localizados numa reta normal ao plano médio têm o mesmo deslocamento vertical;
3. A tensão normal na direção z (σ_z) é desprezível;
4. Retas normais ao plano médio da placa indeformada permanecem retas, mas não necessariamente normais ao plano médio, após a deformação da placa.

2.1.1. Campo de Deslocamentos

A Figura 2.1 apresenta uma rotação adicional ($\emptyset_x$) do plano onde o ponto A está contido. Isto faz com que este ponto não mais permaneça a uma distância constante do plano médio no estado deformado da placa. De acordo com Oñate (2013), as normais à placa se distorcem durante a deformação, permitindo assim efeitos de deformação por cisalhamento transversal, sendo esta distorção mais importante quanto maior for a espessura da placa. Desta forma, os giros θ_x e θ_y devem ser interpretados como valores médios da deformada real da normal.

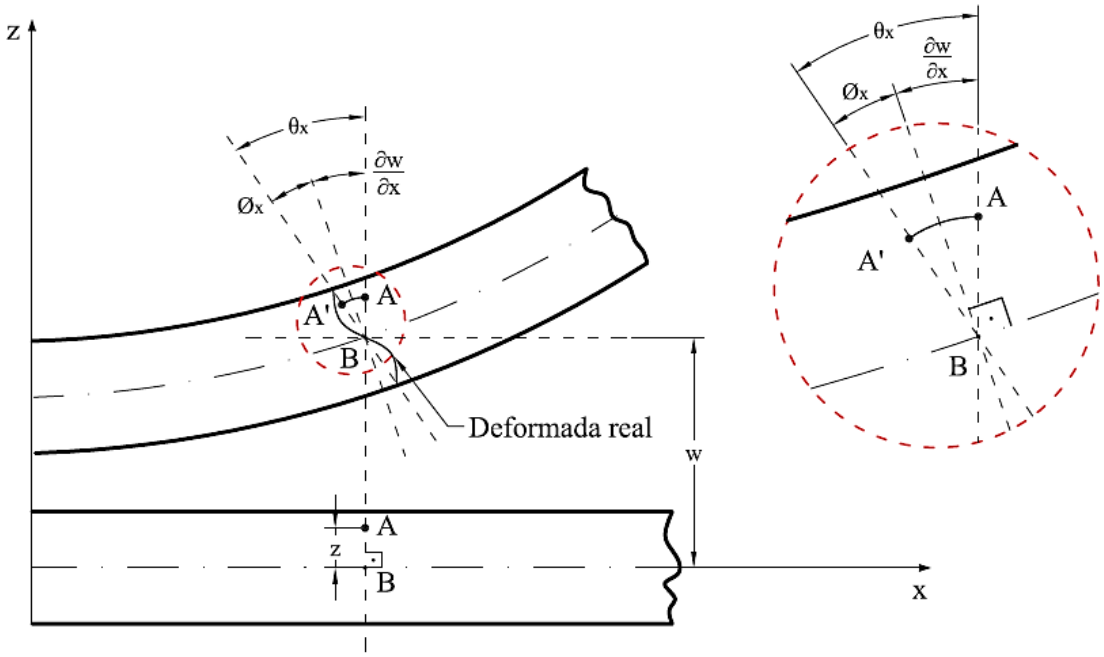

Figura 2.1: Representação do deslocamento de um ponto A no plano *xz*, segundo as hipóteses de Reissner-Mindlin. (Fonte: Saliba, 2007)

A partir da observação da Figura 2.1 o campo de deslocamento do ponto A é dado por:

$$u(x,y,z) = -z\,\theta_x(x,y) \tag{2.1a}$$

$$v(x,y,z) = -z\,\theta_y(x,y) \tag{2.1b}$$

$$w(x,y,z) = w(x,y) \tag{2.1c}$$

Tanto na teoria de Kirchhoff quanto para a teoria de Reissner-Mindlin, as equações que representam o deslocamento de um ponto qualquer contido na placa são idênticas. Sendo assim, de maneira análoga, o vetor de deslocamentos de um ponto pertencente ao plano médio é dado por:

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \tag{2.2}$$

No entanto, como a hipótese "4" não impõem ortogonalidade da normal, o cálculo das rotações θ_x e θ_y se difere entre as teorias. Conforme apresenta o detalhe da Figura 2.1, as rotações para a teoria de Reissner-Mindlin são:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \emptyset_x \tag{2.3a}$$

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} + \emptyset_y \tag{2.3b}$$

Segundo Oñate (2013), as Eqs. (2.3) mostram que os giros da normal θ_x e θ_y não podem ser obtidos unicamente em função da rotação do plano médio, como ocorre na teoria de Kirchhoff (ANEXO A). Pode-se então considerar estes giros como variáveis independentes, sendo essa a diferença substancial entre as teorias.

2.1.2. Relação Deformação-Deslocamento

Baseado na teoria da elasticidade clássica para pequenos deslocamentos e deformações, Oñate (2013) apresenta que o campo de deformações é dado por:

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \tag{2.4a}$$

$$\varepsilon_y = -z\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \tag{2.4b}$$

$$\varepsilon_z = 0 \tag{2.4c}$$

$$\gamma_{xy} = -z\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) \tag{2.4d}$$

$$\gamma_{xz} = -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} = -\emptyset_x \tag{2.4e}$$

$$\gamma_{yz} = -\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} = -\emptyset_y \tag{2.4f}$$

Há o surgimento de deformações transversais que, conforme apresentado nas Eqs. (2.4), são independentes da coordenada *z*, e são iguais a estas rotações (em módulo), isso ocorre devido às rotações adicionais.

O vetor de deformação contendo as componentes não nulas é, portanto:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z\theta_{x,x} \\ -z\theta_{y,y} \\ -z(\theta_{x,y}+\theta_{y,x}) \\ w_{,x} - \theta_x \\ w_{,y} - \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_f \\ \boldsymbol{\varepsilon}_c \end{Bmatrix} \tag{2.5}$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}_f$ é o vetor de deformações de deflexão e $\boldsymbol{\varepsilon}_c$ é o vetor de deformações de cisalhamento transversal.

É importante ressaltar que, ao zerar as deformações transversais de cisalhamento, obtém-se $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}$ e $\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}$, recuperando-se a condição de ortogonalidade da teoria de Kirchhoff.

2.1.3. Relação Tensão-Deformação

A partir da Eq. (A.16), que relaciona tensões e deformações, e da hipótese "3", que impõem a condição $\sigma_z \cong 0$, obtém-se o seguinte vetor de tensões não-nulas:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_f \\ \boldsymbol{\sigma}_c \end{Bmatrix} \tag{2.6}$$

onde $\boldsymbol{\sigma}_f$ é o vetor de tensões devido à flexão e $\boldsymbol{\sigma}_c$ é o vetor de tensões de cisalhamento.

Devido à existência das deformações de cisalhamento transversal, torna-se necessário que a matriz constitutiva ($\boldsymbol{D}$), apresentada na Eq. (A.18), seja modificada para a teoria de Reissner-Mindlin. Logo, têm-se:

$$\boldsymbol{D} = \frac{E_x}{1 - v_{yx}v_{xy}} \begin{bmatrix} \frac{E_x}{1-v_{yx}v_{xy}} & \frac{v_{xy}E_x}{1-v_{yx}v_{xy}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v_{yx}E_x}{1-v_{yx}v_{xy}} & \frac{E_y}{1-v_{yx}v_{xy}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_f & 0 \\ 0 & \boldsymbol{D}_c \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

onde $\boldsymbol{D}_f$ é a matriz constitutiva de flexão (semelhante à Eq. (A.18)) e $\boldsymbol{D}_c$ é a matriz constitutiva de cisalhamento.

As deformações de cortante são independentes da coordenada *z*. Da mesma forma que as deformações, as tensões tangenciais transversais também independem de *z*, conforme visto anteriormente. Isto caracteriza uma distribuição de tensões constante ao longo da espessura, como ilustra a Figura 2.2a, mas de acordo com a teoria da elasticidade, a distribuição exata das tensões tangenciais transversais não é constante ao longo da espessura, ela tem forma parabólica com valores nulos nas extremidades superior e inferior da placa, como representado na Figura 2.2b.

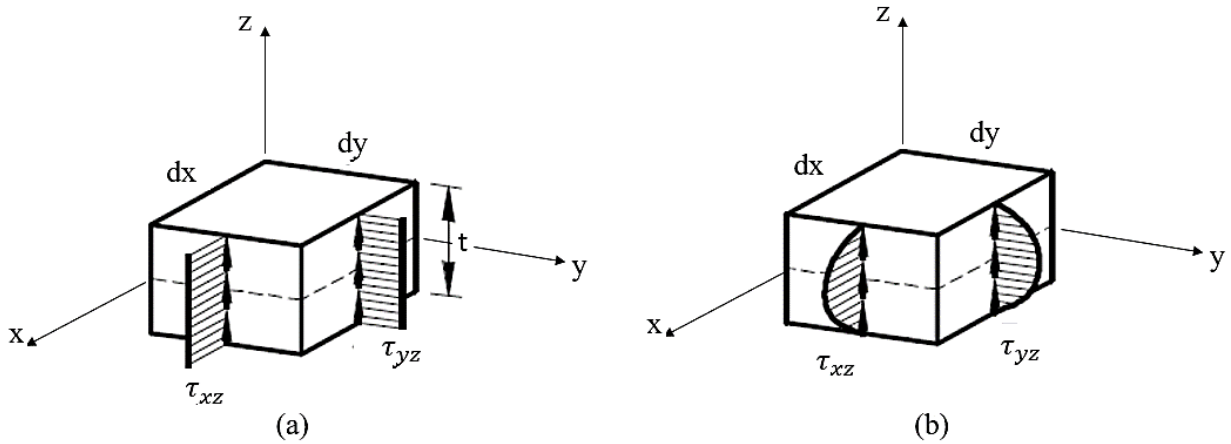

Figura 2.2: Distribuição de tensões de cisalhamento: (a) constante; (b) conforme a teoria da elasticidade. (Fonte: Adaptado de Oñate, 2013)

Para contornar o problema da divergência entre as distribuições de tensões apresentadas nas Figuras 2.2a e 2.2b, utilizam-se fatores de correção dos módulos de elasticidade transversal com o objetivo de igualar o trabalho de deformação realizado entre as soluções aproximada (obtida pela Teoria de Reissner-Mindlin) e exata (obtida pela Teoria da Elasticidade). Portanto, faz-se uma modificação na matriz constitutiva de esforço cortante, que passa a ter a forma:

$$\boldsymbol{D}_c = \begin{bmatrix} \alpha_{11} G_{xz} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} G_{yz} \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

onde α_{ij} são os coeficientes de correção, também conhecidos por coeficientes de distorção transversal.

Em uma seção retangular constante, que é o caso mais comum em placas, adotam-se os seguintes valores: $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \frac{5}{6}$ ou $\alpha = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu}$, conforme Dym e Shames (1973).

2.1.4. Esforços Internos

O vetor de esforços internos é obtido a partir da integração das tensões ao longo da espessura de uma placa de comprimento unitário (ver Figura A.5b). Sabendo-se que as tensões de flexão variam linearmente com a espessura e que as tensões de cisalhamento permanecem constantes, tem-se:

$$\boldsymbol{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{+t/2} \begin{Bmatrix} z\,\sigma_x \\ z\,\sigma_y \\ z\,\tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz = \int_{-t/2}^{+t/2} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_f \\ \boldsymbol{\sigma}_c \end{Bmatrix} dz$$

$$\boldsymbol{M} = \int_{-t/2}^{+t/2} \begin{Bmatrix} z^2 \boldsymbol{D}_f \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_f \\ \boldsymbol{D}_c \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \end{Bmatrix} dz = \begin{Bmatrix} \frac{t^3}{12} \boldsymbol{D}_f \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_f \\ t\, \boldsymbol{D}_c \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \widehat{\boldsymbol{D}}_f \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_f \\ \widehat{\boldsymbol{D}}_c \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{M}_f \\ \boldsymbol{M}_c \end{Bmatrix} \tag{2.9}$$

sendo,

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_f = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}) \end{Bmatrix} \tag{2.10}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_c = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{Bmatrix} \tag{2.11}$$

onde $\boldsymbol{M}$é o vetor de esforços internos por unidade de comprimento, $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_f$ é o vetor de deformações generalizadas de flexão, $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ é o vetor de deformações generalizadas de cisalhamento, $\widehat{\boldsymbol{D}}_f$ é a matriz constitutiva generalizada de flexão e $\widehat{\boldsymbol{D}}_c$ é a matriz constitutiva generalizada de cisalhamento.

É possível escrever a Eq. (2.9) através do seguinte produto matricial:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{D}}_f & 0 \\ 0 & \widehat{\boldsymbol{D}}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_f \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \end{Bmatrix} = \widehat{\boldsymbol{D}}\, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{2.12}$$

onde $\widehat{\boldsymbol{D}}$ é a matriz constitutiva generalizada e $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ é o vetor de deformações generalizadas.

A Figura 2.3 apresenta a convenção de sinais adotada, seguindo o mesmo critério da regra da mão direita.

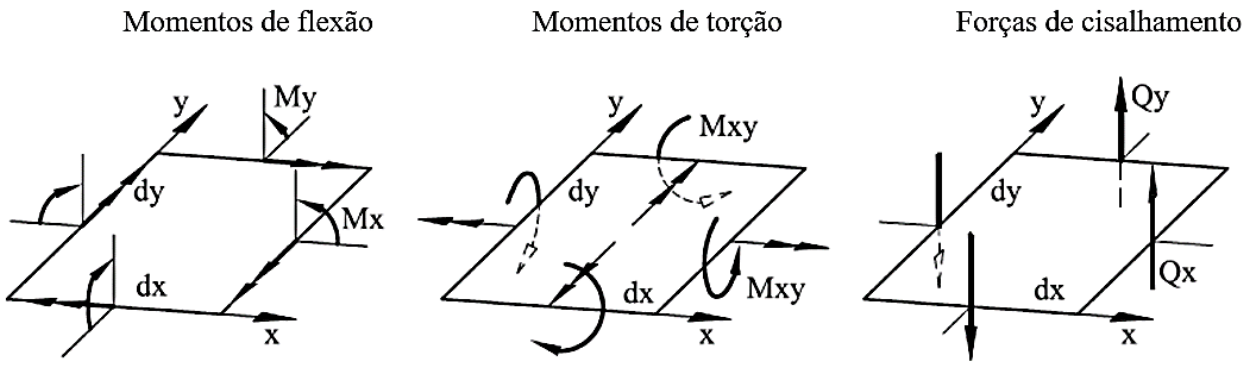

Figura 2.3: Convenção de sinais adotadas para a Teoria de Reissner-Mindlin. (Fonte: Adaptado de Oñate, 2013)

2.2. Placas com enrijecedores

De acordo com Szilard (2004), se as propriedades estruturais da placa diferem em duas direções perpendiculares entre si, a placa é descrita como ortogonalmente anisotrópica ou ortotrópica. Essa anisotropia estrutural pode ser introduzida por nervuras, ondulações ou reforços de viga (Figura 2.4), por exemplo. Estruturas de placas ortotrópicas são muito comuns na engenharia, principalmente nas indústrias navais e aeroespaciais onde o uso de placas reforçadas é indispensável. O modelo de placa ortotrópica tem como ideia básica converter uma placa enrijecida em uma placa ortotrópica equivalente de espessura única, sem a presença de enrijecedores.

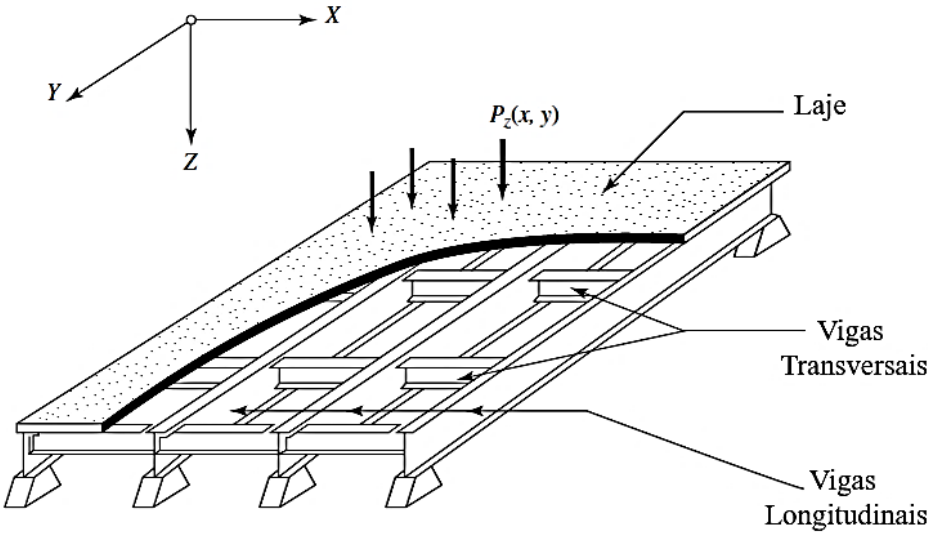

Figura 2.4: Placa enrijecida num sistema laje-viga. (Fonte: Adaptado de Szilard, 2004)

Embora o comportamento estrutural real de placas enrijecedidas não possa ser completamente substituído pelo de placas ortotrópicas, estudos experimentais indicam boa concordância de resultados em casos onde os reforços são relativamente pequenos, estão próximos e uniformemente espaçados (Szilard, 2004). A Eq. (2.13) apresenta o campo de deformações:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - v_y \frac{\sigma_y}{E_y}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_y} - v_x \frac{\sigma_x}{E_x}, \qquad \gamma = \frac{\tau}{G_{xy}} \tag{2.13}$$

onde o módulo de cisalhamento G_{xy} do material ortotrópico pode ser expresso em termos de E_x e E_y:

$$G_{xy} \approx \frac{\sqrt{E_x E_y}}{2(1+\sqrt{v_x v_y})} \approx \frac{E}{2(1+\sqrt{v_x v_y})} \tag{2.14}$$

Resolvendo as Eqs. (2.13) em função de σ_x, σ_y e τ, que representam a relação tensão-deformação para a condição de placas ortotrópicas tem-se:

$$\sigma_x = \frac{E_x}{1 - v_x v_y}(\varepsilon_x + v_y \varepsilon_y) \tag{2.15a}$$

$$\sigma_y = \frac{E_y}{1 - v_x v_y}(\varepsilon_y + v_x \varepsilon_x) \tag{2.15b}$$

$$\tau = G_{xy}\gamma \tag{2.15c}$$

Expressando as Eqs. (2.15) em termos da deflexão transversal *w* é possível obter as equações que representam os momentos:

$$m_x = -D_x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{2.16a}$$

$$m_y = -D_y\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{2.16b}$$

$$m_{xy} = -2D_t \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{2.16c}$$

onde,

$$D_x = \frac{E_x t^3}{12(1 - v_x v_y)}, \quad D_y = \frac{E_y t^3}{12(1 - v_x v_y)} \tag{2.17}$$

que representam a rigidez à flexão da placa ortotrópica, enquanto a rigidez à torção D_t é dada por:

$$2D_t = \left(1 - \sqrt{v_x v_y}\right)\sqrt{D_x D_y} = (1 - v_{xy})D_{xy} \tag{2.18}$$

$$D_t = G_{xy}\frac{t^3}{12} \tag{2.19}$$

A Eq. (2.19) representa a rigidez torcional para uma placa ortotrópica de espessura uniforme.

A substituição das Eqs. (2.16a), (2.16b) e (2.16c) na equação de equilíbrio de um elemento de placa produz a equação diferencial governante de placas ortotrópicas:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2B \frac{\partial^4 w}{\partial x^4 \partial y^4} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p_z(x, y) \tag{2.20}$$

onde,

$$B = \frac{1}{2}\left(v_y D_x + v_x D_y + 4D_t\right) \tag{2.21}$$

sendo *B* a rigidez torcional efetiva.

3. MODELAGEM COMPUTACIONAL

3.1. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O MEF, originalmente introduzido por Turner *et al*. (1956), é uma técnica computacional poderosa para soluções aproximadas à uma variedade de problemas de engenharia com domínios complexos sujeitos a condições gerais de contorno. Este método tornou-se um passo essencial no projeto de modelagem de um fenômeno físico porque envolve diversas variáveis de campo que variam ponto a ponto, possuindo assim um infinito número de soluções no domínio (Madenci e Guven, 2006).

Alguns autores como Desai e Abel (1971), Zienkiewicz (1971), Gallagher (1975), Bathe e Wilson (1976), Cook (1981) e Bathe (1996) apresentaram o desenvolvimento e aplicação do MEF, cujos resultados influenciaram o estado atual desse método de análise numérica.

De acordo com Przemieniecki (2009), o MEF para análise e projeto de estruturas e componentes mecânicos baseia-se no conceito de substituir a estrutura contínua real por um modelo matemático composto por elementos de tamanho finito (referidos como elementos finitos) com características elásticas e propriedades de inércia que podem ser expressas em forma de matriz. Quando o tamanho dos elementos diminui, o comportamento deformacional do modelo matemático converge para o da estrutura contínua. As matrizes que representam essas propriedades são consideradas como blocos de construção que, quando reunidos de acordo com um conjunto de regras derivadas da teoria da elasticidade, fornecem as propriedades estáticas e dinâmicas do sistema real.

Além disso, o MEF baseia-se no conceito de que se pode substituir qualquer contínuo por um conjunto de elementos de forma simples com relações força-deslocamento e materiais bem definidos. Embora não seja possível derivar uma solução de forma fechada para o contínuo, pode-se derivar uma solução aproximada para o conjunto de elementos que o substitui (Ventsel e Krauthammer, 2001).

Segundo Szilard (2004), o MEF tornou-se a técnica numérica mais dominante em quase todos os campos da engenharia e da ciência aplicada, devido aos seguintes fatores:

- O método evoluiu como uma extensão da análise de deslocamentos de matriz estabelecida anteriormente para estruturas em pórtico, na qual a estrutura é representada como um conjunto de elementos barra e viga. Os mesmos conceitos e operações matriciais são usados no MEF, mas em vez de elementos de viga, são empregados pedaços discretos de contínuos para representar o sistema estrutural do tipo superfície;
- O MEF usado na computação representa de perto o contínuo real e, portanto, é fácil de visualizar. O mesmo pode ser dito para as condições de suporte e carga. Essa simplicidade essencial na modelagem contribui muito para a sua popularidade;

- A disponibilidade geral e o poder muito maior dos computadores pessoais facilitaram o uso de métodos numéricos na análise cotidiana da engenharia;
- Uma vez que um programa de computador geral para análise de deslocamentos de estruturas é escrito, ele pode ser facilmente modificado para resolver diversos problemas em mecânica do contínuo, isto porque as operações matriciais básicas permanecem as mesmas. Além disso, a lógica simples do MEF o torna ideal para programação estruturada. Consequentemente, vários programas baseados no MEF estão disponíveis comercialmente;
- O MEF é versátil e flexível, ou seja, o contínuo pode ter forma, suportes e condições de carregamento arbitrárias. Mesmo em um caso tão complexo, o MEF oferece uma solução realista. As aplicações comuns incluem problemas estáticos, dinâmicos e de estabilidade lineares e não-lineares nas áreas de engenharia estrutural, mecânica, naval, de mineração e aeroespacial, entre outras.

O MEF abordado aqui pertence à família do Método dos Deslocamentos ou Método da Rigidez onde os deslocamentos são escolhidos como incógnitas. Todos os membros dessa família se caracterizam por ter como equação fundamental a equação de equilíbrio cujas incógnitas são deslocamentos generalizados, representados por grandezas cinemáticas tais como, deslocamentos lineares, rotações, etc. (Vaz, 2011).

3.1.1. Método dos Deslocamentos por Análise Matricial

A análise de estruturas pelo método dos deslocamentos utiliza três equações básicas, nomeadas equações de compatibilidade, de equilíbrio e constitutivas, também chamadas de relação tensão-deformação. Este método caracteriza-se por usar a equação de equilíbrio como equação fundamental, ou seja, onde são obtidas as incógnitas primárias do problema, a partir das quais todas as outras respostas serão obtidas. As incógnitas primárias são os deslocamentos por meio dos quais é possível obter deformações, tensões, resultantes de tensões, etc (Vaz, 2011).

De acordo com Azevedo (2003), Rao (2004), Zienkiewicz et al. (2005) e Vaz (2011), a análise matricial de estruturas reticuladas sistematizou as operações matemáticas da análise de estruturas fazendo uso da álgebra matricial que opera com vetores e matrizes. Toda a sistematização se baseia na ideia de sistema local e sistema global de coordenadas. A partir das contribuições das matrizes de rigidez e dos vetores de forças nodais de elemento no sistema global, pode-se montar a matriz de rigidez bem como o vetor de forças nodais da estrutura. Os deslocamentos nodais também são definidos nos sistemas local e global. Uma equação de equilíbrio da estrutura no sistema global

fornece os deslocamentos nodais. Uma vez obtidos os deslocamentos nodais da estrutura, as forças atuantes nas extremidades dos elementos podem ser determinadas.

O sistema local de coordenadas é definido quando se escolhe os nós inicial e final do elemento. Na Figura 3.1, os nós 1 e 2 são, respectivamente, o nó inicial e o nó final do elemento ou barra. O eixo *x* fica então definido na direção da barra e com sentido positivo de 1 para 2. O eixo *y* é perpendicular a *x*, com o vetor no sentido fazendo 90° a partir de *x* no sentido anti-horário. O sistema global de coordenadas dado pelos eixos *X* e *Y* é definido usualmente da seguinte forma: *X* tem direção horizontal e sentido positivo da esquerda para direita, e *Y* tem direção vertical e sentido positivo de baixo para cima. O sistema global não é obrigatoriamente o definido anteriormente, podendo ser escolhido outro que seja mais conveniente.

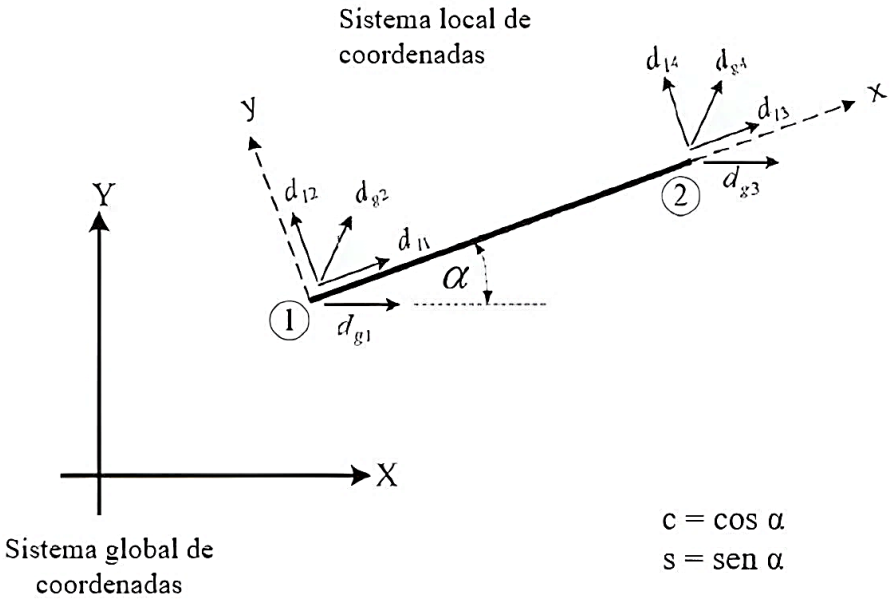

Figura 3.1: Graus de liberdade no sistema de coordenadas global e sistema de coordenadas local. (Fonte: Vaz, 2011)

A Figura 3.1 indica os sentidos positivos dos quatro componentes do vetor deslocamento d_l, no sistema local, e d_g, no sistema global. O ângulo α define a rotação do eixo da barra em relação ao sistema global. Associados aos vetores de deslocamentos, são criados também os vetores de forças nodais f_l, no sistema local, e f_g, no sistema global.

Os vetores deslocamentos de elemento no sistema local d_l e global d_g podem ser relacionados pela matriz de rotação *R*, como indicado a seguir:

$$d_l = R\, d_g \tag{3.1}$$

Como o trabalho é um escalar que independe do sistema de coordenadas, ele deve ser o mesmo nos sistemas local e global, portanto:

$$W_l = W_g \tag{3.2}$$

$$d_g^t\, f_g = d_l^t\, f_l \tag{3.3}$$

Substituindo a Eq. (3.1) na Eq. (3.3), obtém-se:

$$d_g^t\, f_g = (R\, d_g)^t f_l \;= d_l^t\, R^t\, f_l \tag{3.4}$$

$$f_g = \; R^t\, f_l \tag{3.5}$$

As Eqs. (3.1) e (3.5) formam o princípio da contragradiência que pode ser enunciado como: "Se uma matriz transforma deslocamentos globais em locais, sua transposta transforma forças locais em globais."

A matriz de rigidez de um elemento de treliça plana por exemplo, no sistema local para o elemento *m*, $\boldsymbol{K}_{lm}$ é dada por:

$$\boldsymbol{K}_{lm} = \frac{E_m\, A_m}{L_m} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

onde E_m é o módulo de elasticidade do material, A_m a área da seção transversal e L_m o comprimento da barra *m*. A Eq. (3.6) é obtida da definição dos coeficientes de rigidez $\boldsymbol{K}_{lm(ij)}$, que representa a força na direção do deslocamento local *i* para um deslocamento unitário aplicado na direção do deslocamento local *j*, mantendo os outros deslocamentos locais nulos.

A equação de equilíbrio da barra que relaciona deslocamentos, forças e a matriz de rigidez no sistema local de coordenadas é dada por:

$$\boldsymbol{K}_{l_m}\, d_{l_m} = \; f_{l_m} \tag{3.7}$$

A matriz de rigidez do elemento *m* no sistema global de coordenadas K_{g_m} pode ser obtida como apresentado a seguir. Substituindo-se a Eq. (3.1) na Eq. (3.7), obtém-se:

$$\boldsymbol{K}_{l_m}\, R_m\, d_{g_m} = \; f_{l_m} \tag{3.8}$$

Pré-multiplicando-se ambos os lados da Eq. (3.8) por R_m^t, chega-se a:

$$R_m^t\, \boldsymbol{K}_{l_m}\, R_m\, d_{g_m} = \; R_m^t\, f_{l_m} \tag{3.9}$$

Usando a Eq. (3.5), obtém-se:

$$\boldsymbol{K}_{g_m}\, d_{g_m} = f_{g_m} \tag{3.10}$$

onde,

$$\boldsymbol{K}_{g_m} = R_m^t\, K_{l_m}\, R_m \tag{3.11}$$

A partir da matriz de rigidez e das forças nodais de cada elemento *k* no sistema global é feita então a montagem da matriz de rigidez $\boldsymbol{K}$ e das forças nodais *f* globais da estrutura em função da conexão entre os elementos, obtendo-se a Eq. (3.12) que representa o equilíbrio global da estrutura, dada por:

$$\boldsymbol{K}.d = f \tag{3.12}$$

sendo *d* os deslocamentos da estrutura no sistema global de coordenadas.

A matriz de rigidez do sistema é obtida através das relações deformação-deslocamento e tensão-deformação da estrutura, a partir da discretização do modelo e das propriedades do material (Troina *et al*., 2020).

3.1.2. Formulação de Elementos Finitos pela Teoria de Reissner-Mindlin

As formulações para a análise de elementos finitos através da teoria de Reissner-mindlin que será apresentada a seguir é retratada por Oñate (2013).

3.1.2.1. Discretização do Campo de Deslocamentos

O plano médio da placa é discretizado em uma malha de *n* elementos de nós. Por exemplo, a Figura 3.2 ilustra uma discretização com elementos finitos bidimensionais e retangulares, com quatro nós.

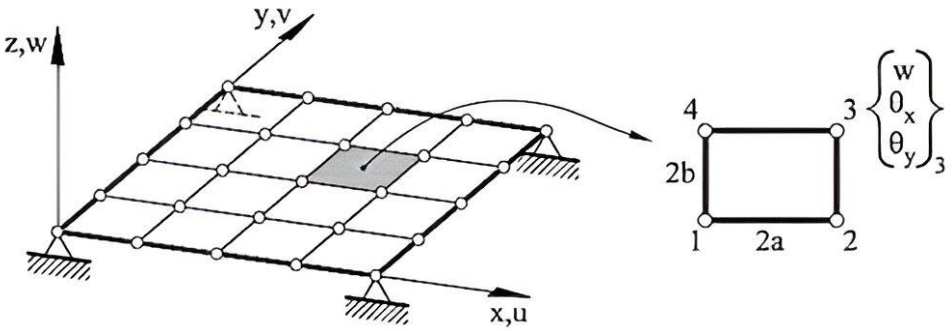

Figura 3.2: Discretização de uma placa usando elementos finitos retangulares com 4 nós. (Fonte: Oñate, 2013)

A deflexão e as duas rotações são variáveis independentes e o campo de deslocamento é interpolado na forma padrão, ou seja:

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{Bmatrix} P_i w_i \\ P_i \theta_{xi} \\ P_i \theta_{yi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P'_1 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & P'_n & 0 & 0 \\ 0 & P'_1 & 0 & \vdots & \cdots \vdots & 0 & P'_n & 0 \\ 0 & 0 & P'_1 & \vdots & \vdots & 0 & 0 & P'_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x_1} \\ \theta_{y_1} \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ w_n \\ \theta_{x_n} \\ \theta_{y_n} \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u} = [P'_1, P'_2, \dots, P'_n] \begin{Bmatrix} a_1^{(e)} \\ \vdots \\ a_n^{(e)} \end{Bmatrix} = P' a^{(e)} \tag{3.13}$$

onde,

$$P' = [P'_1, P'_2, \dots, P'_n] \quad , \quad a^{(e)} = \begin{Bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \\ \vdots \\ a_n^{(e)} \end{Bmatrix} \tag{3.14a}$$

$$P' = \begin{bmatrix} P'_i & 0 & 0 \\ 0 & P'_i & 0 \\ 0 & 0 & P'_i \end{bmatrix} \quad , \quad a_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \tag{3.14b}$$

são a matriz da função de forma (*P'*) e o vetor de deslocamento ($a_i^{(e)}$) para o elemento e um nó *i*, respectivamente.

3.1.2.2. Discretização das Deformações Generalizadas e Campos de Tensões Resultantes

As deformações generalizadas são expressas em termos de deslocamentos nodais usando as Eqs. (2.10), (2.11) e (3.13):

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_f \\ \cdots \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ (\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}) \\ \cdots \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{Bmatrix} \frac{\partial P'_i}{\partial x} \theta_{xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \theta_{yi} \\ (\frac{\partial P'_i}{\partial x} \theta_{xi} + \frac{\partial P'_i}{\partial y} \theta_{yi}) \\ \cdots \\ \frac{\partial P'_i}{\partial x} w_i - P'_i \theta_{xi} \\ \frac{\partial P'_i}{\partial y} w_i - P'_i \theta_y \end{Bmatrix} =$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_{i=1}^{n} \begin{Bmatrix} B'_{f_i} \\ B'_{c_i} \end{Bmatrix} a_i^{(e)} = [B'_1, \dots, B'_n] \begin{Bmatrix} a_1^{(e)} \\ \vdots \\ a_n^{(e)} \end{Bmatrix} = P' a^{(e)} \tag{3.15}$$

onde B'e B'_i são as matrizes de deformação generalizadas para o elemento e um nó i. Da Eq. (3.15) deduz-se:

$$B'_i = \begin{Bmatrix} B'_{f_i} \\ \cdots \\ B'_{c_i} \end{Bmatrix} \quad com\ B'_{f_i} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial P'_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial P'_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial P'_i}{\partial y} & \frac{\partial P'_i}{\partial x} \end{bmatrix};\ B'_{c_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P'_i}{\partial x} & -P'_i & 0 \\ \frac{\partial P'_i}{\partial y} & 0 & -P'_i \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

B'_{f_i} e B'_{c_i} são as matrizes de deformação por flexão e cisalhamento transversais associadas ao i-ésimo nó, respectivamente.

As tensões resultantes são expressas em termos de deslocamentos nodais usando as Eqs. (2.12) e (3.15):

$$\hat{\sigma} = \hat{D} B' a^{(e)}\ ; \quad \hat{\sigma}_f = \hat{D}_f B'_f a^{(e)}; \quad \hat{\sigma}_c = \hat{D}_c B'_c a^{(e)} \tag{3.17a}$$

com,

$$B_f = \left[B_{f_1}, B_{f_2}, \dots, B_{f_n}\right]; \quad B_c = \left[B_{c_1}, B_{c_2}, \dots, B_{c_n}\right] \tag{3.17b}$$

3.1.2.3. Derivação das Equações de Equilíbrio para o elemento

O Princípio dos Trabalhos Virtuais para um único elemento sob cargas é:

$$\iint_{A^{(e)}} \delta\hat{\varepsilon}^T \hat{\sigma}\, dA = \iint_{A^{(e)}} \delta u^T t\, dA + [\delta a^{(e)}]^T q^{(e)} \tag{3.18}$$

onde $\delta a^{(e)}$ é o vetor de deslocamento virtual nodal e o último termo é o trabalho virtual das forças nodais de equilíbrio $q^{(e)}$, com:

$$\delta a^{(e)} = \begin{Bmatrix} \delta_{a_1}{}^{(e)} \\ \vdots \\ \delta_{a_n}{}^{(e)} \end{Bmatrix};\ \delta_{a_1}{}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \delta w_i \\ \delta\theta_{xi} \\ \delta\theta_{yi} \end{Bmatrix};\ q^{(e)} = \begin{Bmatrix} q_1{}^{(e)} \\ \vdots \\ q_1{}^{(e)} \end{Bmatrix};\ \delta_{a_1}{}^{(e)} = \begin{Bmatrix} F_{zi} \\ M_{xi} \\ M_{yi} \end{Bmatrix} \tag{3.19}$$

Substituindo a Eq. (3.17a) em (3.18) e usando as Eqs. (3.13) e (3.15), produz a expressão de equilíbrio discreto padrão para o elemento:

$$K^{(e)} a^{(e)} - f^{(e)} = q^{(e)} \tag{3.20}$$

onde,

$$K_{ij}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} B_i^T\, \hat{D} B_j\, dA \tag{3.21}$$

$$f_i^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} P'_i\, [f_z, m_x, m_y]^T\, dA \tag{3.22}$$

são a matriz de rigidez do elemento que conecta os nós i e j e o vetor de força nodal equivalente devido a uma carga vertical distribuída f_z e momentos fletores m_x e m_y.

O sistema global de equações $\boldsymbol{K}a = f$ (equivalente à Eq. (3.12)) é obtido reunindo as contribuições dos elementos para a matriz de rigidez global $\boldsymbol{K}$ e o vetor de força nodal equivalente global f da maneira usual.

A matriz de rigidez do elemento pode ser dividida nas contribuições de flexão e cisalhamento transversal usando as Eqs. (2.7) e (3.16) como segue:

$$K_{ij}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} [B_{f_i}^T, B_{c_i}^T]^T \, \widehat{D} \begin{Bmatrix} B_{f_j} \\ B_{c_j} \end{Bmatrix} dA = \int_{A^{(e)}} (B_{f_i}^T \widehat{D}_f B_{f_j} + (B_{c_i}^T \widehat{D}_c B_{c_j}) dA = K_{f_{ij}}^{(e)} + K_{c_{ij}}^{(e)} \qquad (3.23a)$$

$$K_{f_{ij}}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} B_{f_i}^T \widehat{D}_f B_{f_j} \; dA; \;\; K_{c_{ij}}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} B_{c_i}^T \widehat{D}_c B_{c_j} \; dA \qquad (3.23b)$$

A divisão acima fornece uma maneira mais econômica de calcular a matriz de rigidez do elemento. Também ajuda a explicar o comportamento do elemento para situações de placas finas.

Diferentemente dos elementos da placa de Kirchhoff, as cargas verticais e os momentos fletores contribuem para os termos de $f_i^{(e)}$ de forma desacoplada, ou seja, as cargas verticais não introduzem componente de momento fletor em $f_i^{(e)}$. Isto se deve à interpolação independente para a deflexão e as rotações.

O peso próprio é tratado como uma carga distribuída verticalmente. Para a gravidade g agindo na direção oposta ao eixo global z, $f_z = -\rho g t$ e

$$f_i^{(e)} = -\iint_{A^{(e)}} P'_i \rho g t \, [1, 0, 0]^T \, dA \qquad (3.24)$$

onde ρ e t são a massa específica do material e a espessura da placa, respectivamente. Finalmente, o vetor força nodal equivalente devido a uma carga pontual vertical externa P_{zj} e momentos fletores concentrados M_{xj}, M_{yj} atuando em um nó com número global j é:

$$P_j = \left[P_{z_j}, M_{x_j}, M_{y_j}\right]^T \qquad (3.25)$$

As forças concentradas que atuam nos nós são reunidas diretamente no vetor global f.

3.1.2.4. Integração Numérica

As integrais que aparecem na matriz de rigidez do elemento e no vetor de força nodal equivalente normalmente são calculadas por uma quadratura de Gauss. Da Eq. (3.23a) deduz-se:

$$K_{ij}^{(e)} = \sum_{p=1}^{n_{fp}} \sum_{q=1}^{n_{fq}} [B_{f_i}^T \widehat{D}_f B_{f_j} |J^e|]_{p,q} W_p W_q + \sum_{p=1}^{n_{cp}} \sum_{q=1}^{n_{cq}} [B_{c_i}^T \widehat{D}_c B_{c_j} |J^e|]_{p,q} W_p W_q \tag{3.26}$$

onde $|J^e|$ é o determinante Jacobiano, (n_{f_p}, n_{f_q}) e (n_{c_p}, n_{c_q}) são os pontos de integração para as matrizes de rigidez à flexão e ao cisalhamento transversal, e W_p, W_q são os pesos correspondentes. A Eq. (2.6) permite usar uma regra de integração seletiva para matrizes de rigidez à flexão e ao cisalhamento transversal.

A quadratura de Gauss para o vetor de força nodal equivalente da Eq. (3.22) é:

$$f_i^{(e)} = \sum_{p=1}^{n_p} \sum_{q=1}^{n_q} [P'_i [f_z, m_x, m_y]^T |J^e|]_{p,q} W_p W_q \tag{3.27}$$

3.1.2.5. Condições de Contorno

As condições de contorno padrão são:

Apoio pontual: $w_i = 0$;

Eixo de simetria (geometria e carregamento): $\theta_e = 0$, onde e é a direção ortogonal ao eixo de simetria;

Lateral fixa *(Clamped - CL)*: $w = \theta_x = \theta_y = 0$;

Lateral simplesmente apoiada *(Simply Supported - SS)*:

- Apoio simples rígido (*hard support*): $w = \theta_s = 0$
- Apoio simples flexível (*soft support*): $w = 0$

onde s é a direção da lateral. Na teoria de Kirchhoff a restrição de w ao longo de uma direção s especifica automaticamente $\theta_s = 0$. Este não é o caso na teoria de Reissner-Mindlin, onde w e θ_s devem ser prescritos independentemente.

A Figura 3.3 apresenta graficamente as diferentes condições de contorno. Uma borda livre não requer nenhuma restrição específica.

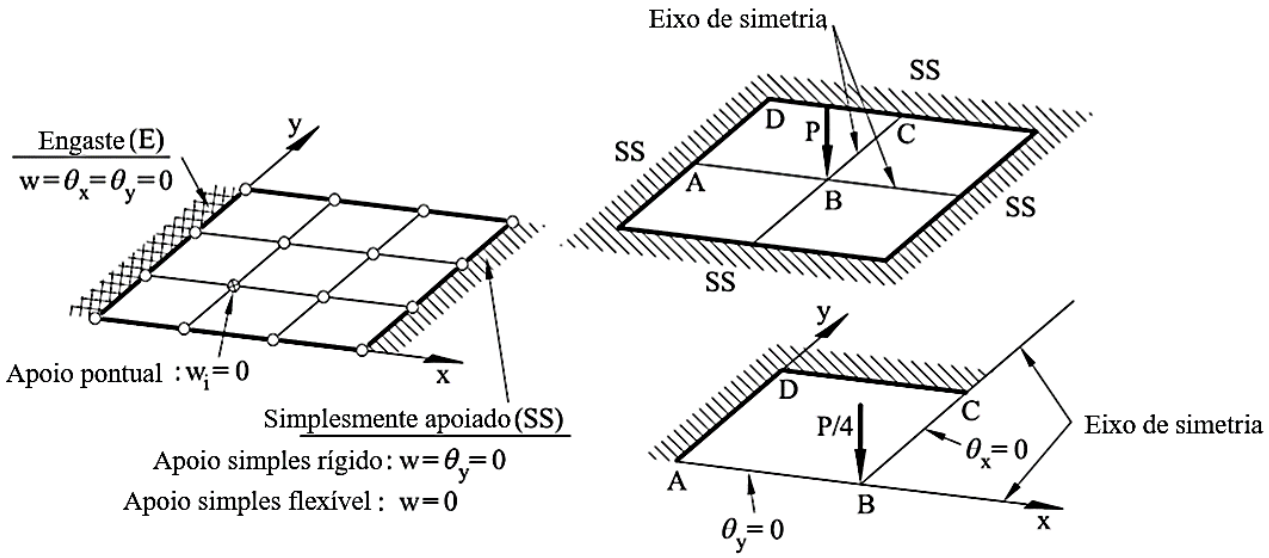

Figura 3.3: Algumas condições de contorno em placas pela teoria de Reissner-Mindlin. (Fonte: Adaptado de Oñate, 2013)

Em placas com bordas simplesmente apoiadas, a condição de apoio simples flexível introduz uma camada limite de ordem t adjacente ao lado prescrito para as tensões resultantes Q_s, Q_e e M_{es}, onde e é a direção ortogonal ao lado. Nesses casos, a condição de apoio simples rígido é recomendada, pois a captura da camada limite requer uma discretização muito fina próximo à lateral. A Figura 3.4 mostra uma situação deste tipo para uma placa quadrada simplesmente apoiada sob carregamento uniformemente distribuído ($f_z = q$) e $\frac{t}{L} = 0{,}02$. A distribuição da força cortante Q_y ao longo da linha de suporte AB é traçada para as condições de apoio simples rígido $w = \theta_s = 0$ e apoio simples flexível $w = 0$.

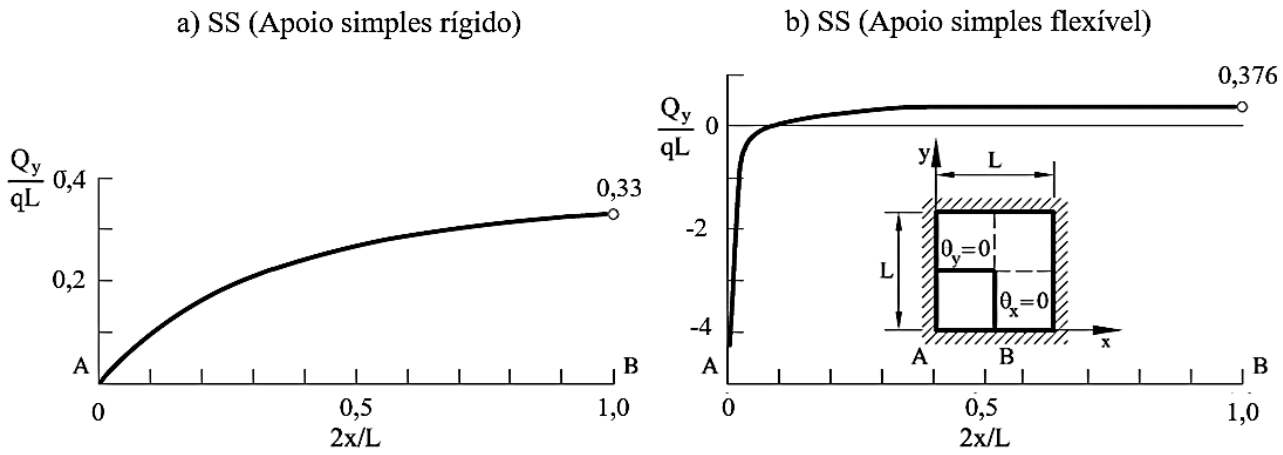

Figura 3.4: Placa quadrada SS sob carregamento uniformemente distribuído *q*. Distribuição da força cortante Q_y ao longo da linha de apoio AB para condições de (a) apoio simples rígido e (b) apoio simples flexível. (Fonte: Adaptado de Oñate, 2013)

Observa-se na Figura 3.4 uma forte variação de Q_y nas proximidades do canto A para a suposição de apoio simples flexível, enquanto o valor no centro é bastante insensível às condições de contorno escolhidas.

3.2. ANSYS MECHANICAL APDL

A modelagem computacional tem ganhado cada vez mais espaço, principalmente devido aos grandes avanços da tecnologia. Neste estudo, a análise da estrutura é realizada através do *software* ANSYS®, na versão *ANSYS Mechanical APDL*, que é baseado no MEF. O ANSYS permite a utilização de diversos tipos de elementos finitos que são escolhidos conforme a análise que se deseja realizar. Como a proposta deste estudo é a análise de estruturas de placas finas, as simulações foram realizadas empregando-se o elemento SHELL281, tanto na placa quanto nos enrijecedores.

3.2.1. Caracterização do elemento SHELL281

Esse elemento finito é adequado para modelar estruturas de placas finas a moderadamente espessas, apresentando bons resultados nas análises de deformações. A Figura 3.5 apresenta a geometria do elemento finito SHELL281. Cada nó deste elemento tem seis graus de liberdade: três translações (*u*, *v*, *w*) e três rotações (*θx, θy, θz*) (ANSYS, 2021).

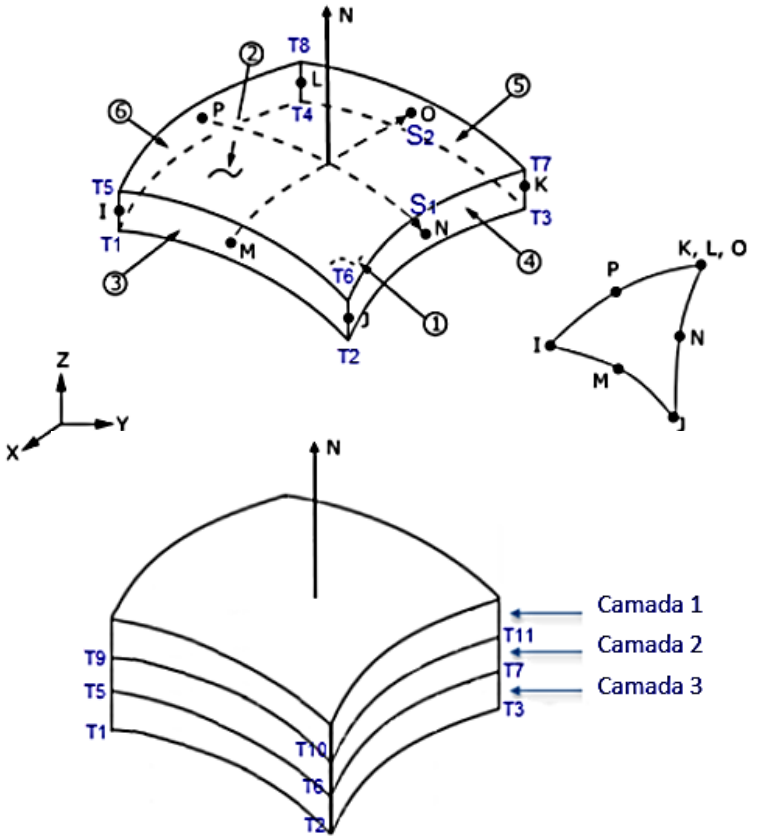

Figura 3.1.2.5.5: Geometria do elemento SHELL281. (Fonte: ANSYS, 2021)

O SHELL281 é adequado para aplicações não lineares, de grande rotação e/ou grande deformação. A mudança na espessura da casca é contabilizada em análises não lineares. O elemento leva em consideração os efeitos de pressões distribuídas (rigidez de carga). Ele pode ser usado para aplicações em camadas para modelagem de cascas compostas ou construção em sanduíche. A precisão na modelagem de cascas compostas é governada pela teoria da deformação por cisalhamento de primeira ordem, também conhecida como a teoria de Reissner-Mindlin (ANSYS, 2021).

Ainda de acordo com o guia de referências ANSYS (2021), a formulação do elemento é baseada em deformações logarítmicas e medidas de tensão verdadeira. A cinemática do SHELL281 permite deformações finitas de membrana (alongamento). No entanto, as mudanças na curvatura dentro de um incremento de tempo são consideradas pequenas.

O número padrão de pontos de integração para cada camada é três, entretanto, quando uma única camada é definida e a plasticidade está presente, o número de pontos de integração é alterado para um mínimo de cinco durante a solução. As camadas são empilhadas a partir da superfície inferior da casca na direção nornal N (Figura 3.5) da casca, que está alinhada com o eixo de coordenadas do terceiro elemento (e3). A definição de (e3) é descrita na Figura 3.6.

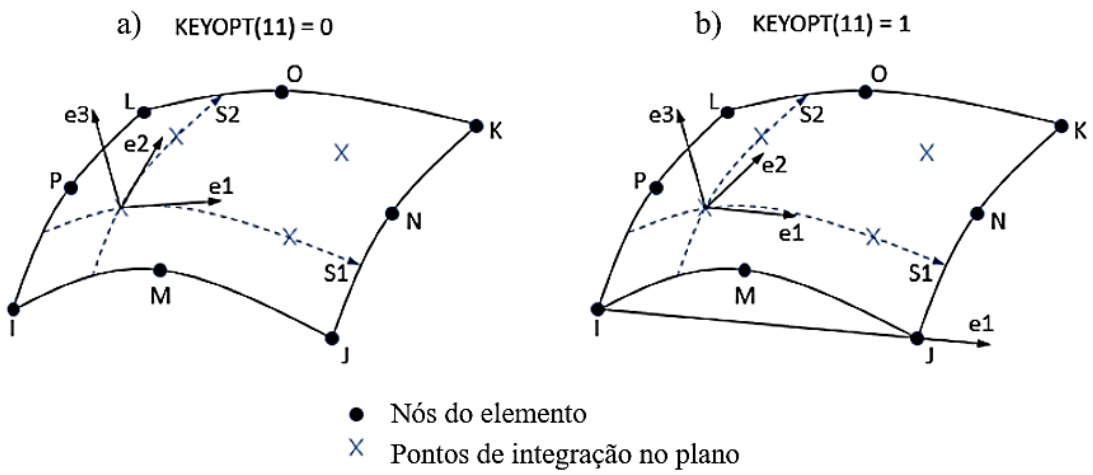

Figura 3.6: Sistemas de coordenadas padrão do elemento SHELL281. (Fonte: ANSYS, 2021)

Quando KEYOPT(11) = 0 (Figura 3.6a), o eixo de coordenadas padrão do primeiro elemento (e1) está alinhado com a primeira direção paramétrica (S1) do elemento nos pontos de integração no plano. A partir disso, (S1) e a segunda direção paramétrica (S2) podem ser definidas respectivamente como:

$$S_1 = \frac{\partial\{x\}}{\partial s} / \left(\left|\frac{\partial\{x\}}{\partial s}\right|\right) \tag{3.28}$$

$$S_2 = \frac{\partial\{x\}}{\partial r} / \left(\left|\frac{\partial\{x\}}{\partial r}\right|\right) \tag{3.29}$$

a geometria $\{x\}$ é dada por:

$$\{x\} = \sum_{i=1}^{8} h^i(s,r)\{x\}^i \tag{3.30}$$

onde (s, r) são duas coordenadas de elemento isoparamétrico; h^i (s,r) são funções de forma associadas aos oito nós do elemento; e $\{x\}^i$ são coordenadas nodais globais dos oito nós do elemento.

Com KEYOPT(11) = 1 (Figura 3.6b), o eixo de coordenadas padrão do primeiro elemento (e1) é direcionado do nó I para o nó J. O eixo de coordenadas padrão do terceiro elemento (e3) é normal à superfície do elemento, e o eixo de coordenadas padrão do segundo elemento (e2) é perpendicular aos eixos (e1) e (e3). Os eixos coordenados (e3) e (e2) são obtidos respectivamente da seguinte forma:

$$e_3 = S_1 * S_2 / |S_1 * S_2| \tag{3.31}$$

$$e_2 = e_3 * e_1 \tag{3.32}$$

A Figura 3.7 mostra que também é possível definir a orientação do elemento através do Sistemas de Coordenadas Local (ESYS). O sistema de coordenadas do elemento definido pelo usuário (e1, e2, e3) é obtido projetando um sistemas de coordenadas local (*x*, *y*, *z*) na superfície da casca. Quando KEYOPT(4) = 0 (Figura 3.3a), o eixo de coordenadas do terceiro elemento definido pelo usuário (e3) está sempre alinhado com o padrão (e3). Quando KEYOPT(4) = 1 (Figura 3.7b), o (e3) determinado pelo usuário é definido como o oposto do padrão (e3) se o eixo de coordenadas local *z* e o padrão (e3) estiverem em direções opostas.

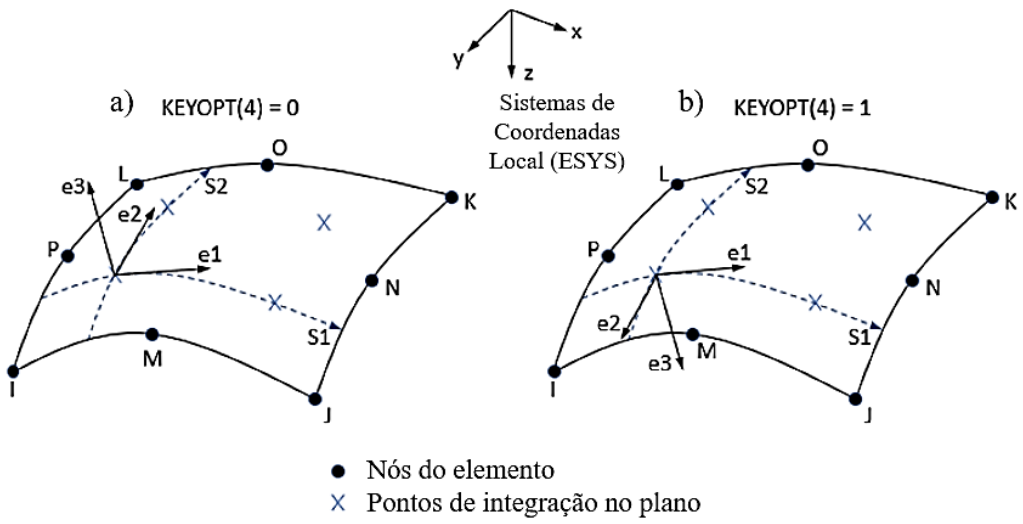

Figura 3.7: Sistemas de coordenadas local do elemento SHELL281. (Fonte: Adaptado de ANSYS, 2021)

3.3. Validação e Verificação do Modelo Numérico

De acordo com Chwif e Medina (2015), o processo de validação e verificação de modelos de simulação numérica é fundamental para que um estudo seja bem-sucedido. A validação de um modelo consiste em checar se ele se comporta como o mundo real sob as mesmas condições (Pidd, 2000). A verificação consiste em avaliar se o comportamento do modelo está de acordo com o modelo conceitual. Portanto, a validação está relacionada ao que será modelado, já a verificação está relacionada ao modo como o modelo é implementado. A partir disso, pretende-se avaliar a funcionalidade do modelo computacional desenvolvido no software *ANSYS Mechanical APDL* com o elemento finito SHELL281 na determinação da deflexão máxima de placas de aço enrijecidas.

Em todos os casos de verificação e validação analisados nesta pesquisa, bem como na proposta de estudo de placas de aço com enrijecedores do tipo viga-caixão trapezoidal, será utilizado o cálculo da diferença relativa na análise dos resultados. Portanto, de acordo com Pinheiro *et al*. (2012), a diferença/erro percentual relativo pode ser determinado a partir da seguinte equação:

$$ER = \frac{|x_{PE} - x_R|}{|x_R|} \times 100 \tag{3.33}$$

onde, x_{PE} se refere ao valor atual (presente estudo), enquanto x_R equivale ao valor anterior apresentados pelos estudos utilizados como referência.

3.3.1. Validação do Modelo Numérico com Enrijecedores tipo I

Para a validação do modelo numérico será realizada a análise de uma placa apresentada no estudo experimental de Carrijo *et al*. (1999), como mostra a Figura 3.8. A placa de aço quadrada com oito enrijecedores do tipo I distribuídos igualmente em ambas as direções ao longo da estrutura, tem como condição de contorno os quatro cantos simplesmente apoiados. A placa foi submetida a um carregamento transversal uniformemente distribuído de 0,96 kN/m² e o material da estrutura possui módulo de elasticidade de 2,5 GPa e coeficiente de Poisson de 0,36. Para esta análise foi gerada uma malha com elementos finitos SHELL281 quadrados, com lado de 2,436 mm.

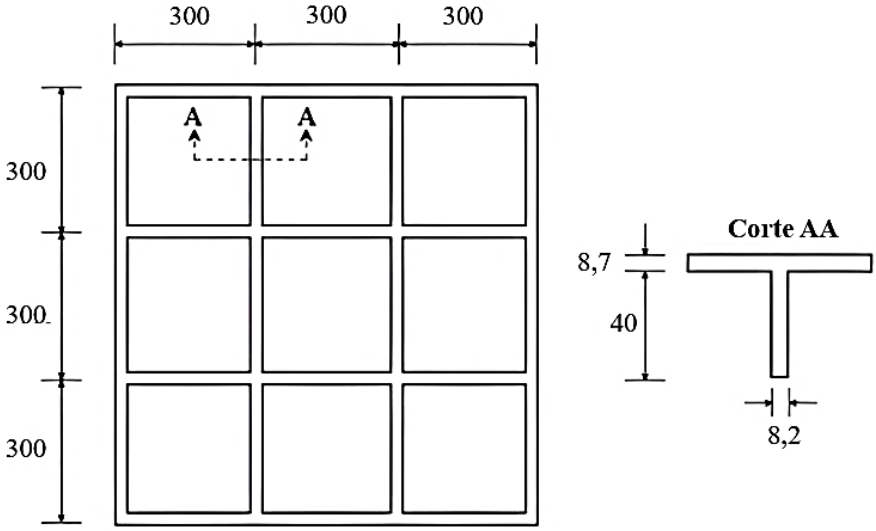

Figura 3.8: Geometria da placa quadrada utilizada no estudo experimental de Carrijo *et al*. (1999), medidas em mm. (Fonte: Nogueira *et al*., 2021).

3.3.2. Verificação do Modelo Numérico com Enrijecedores tipo I

A verificação do modelo computacional foi realizada com base na estrutura apresentada na Figura 3.9, que consiste numa placa com enrijecedores do tipo I em cruz, simplesmente apoiada nas quatro bordas e submetida a uma carga transversal uniformemente distribuída de 0,006895 kN/cm². A placa é de aço com módulo de elasticidade de 20.684,27 kN/cm² e coeficiente de Poisson 0,30. Esta estrutura foi analisada anteriormente por Bedair (1997), Silva (2010) e Troina *et al*. (2018).

Troina *et al*. (2018) por meio do MEF, adotou o elemento tridimensional SOLID95 nas versões tetraédrico e hexaédrico do software ANSYS. Silva (2010) também utilizou o método dos elementos finitos, já Bedair (1997) realizou sua análise através do método da programação sequencial quadrática. Neste estudo, foram utilizados elementos finitos SHELL281 quadrados com elementos de 3,81 mm de lado.

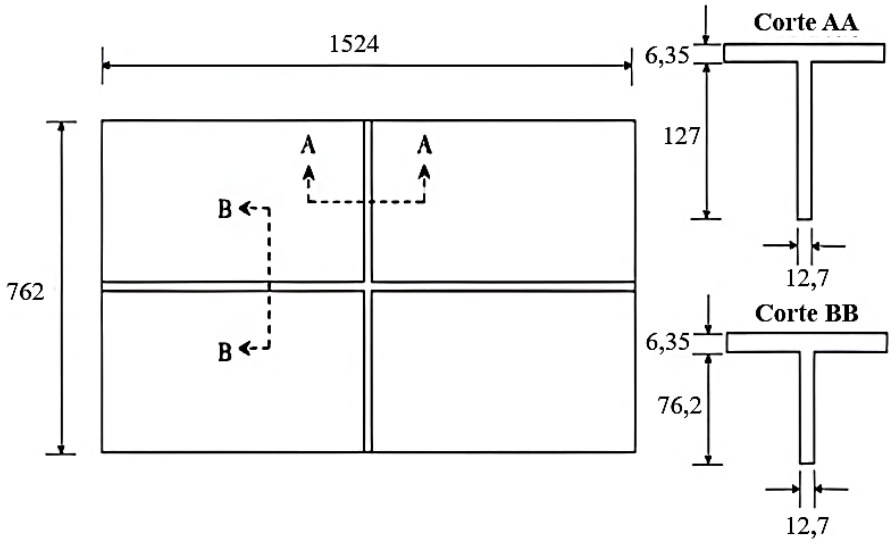

Figura 3.9: Geometria da placa enrijecida utilizada para verificação do modelo computacional, medidas em mm. (Fonte: Nogueira *et al*., 2021).

3.3.2.1. Verificação do Modelo Numérico com Enrijecedores tipo Viga-Caixão (*Hat-stiffeners*)

Como apresentado no estado da arte, há poucos estudos que consideram placas de aço com enrijecedores do tipo viga-caixão com formato trapezoidal (*hat-stiffened plates*) submetidas à flexão. Então, para verificar o modelo computacional a partir de estruturas similares à que se propõem esta pesquisa, foram considerados os resultados numéricos apresentados em Tharian e Nandakumar (2013) e Pal *et al*. (2018).

Portanto, a primeira verificação consiste em uma placa retangular simplesmente apoiada, com 6 mm de espessura, 2,4 m de comprimento e 1,4 m de largura, possuindo dois enrijecedores longitudinais do tipo viga-caixão com formato trapezoidal (Figura 3.10), previamente investigada por Tharian e Nandakumar (2013). Será analisada numericamente a deflexão máxima na placa. De acordo com a Figura 3.10, nos cantos representados pelos pontos vermelho, verde e azul, foram aplicadas as seguintes condições de contorno, respectivamente: $Ux = Uy = 0$; $Ux = 0$; e $Uy = 0$. Além disso, nas bordas da placa e do enrijecedor foi imposto $Uz = 0$. A placa está sob um carregamento transversal uniformemente distribuído de 10 kN/m² que foi aplicado no sentido positivo do eixo *z*. O

módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material (aço) que compõem a estrutura equivalem, respectivamente, a 210 GPa e 0,3.

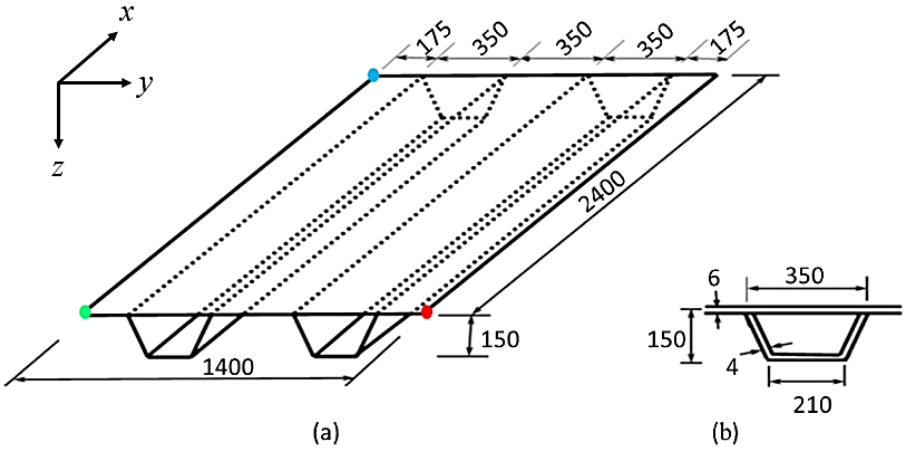

Figura 3.10: (a) Geometria e dimensões da placa com dois enrijecedores do tipo viga-caixão trapezoidal, em mm; (b) Dimensões do enrijecedor, em mm. (Fonte: Adaptado de Tharian e Nandakumar, 2013).

Já na segunda verificação foi empregada uma placa quadrada de aço medindo 1000 mm de comprimento, 1000 mm de largura e 10 mm de espessura, com um enrijecedor central do tipo viga-caixão com formato trapezoidal (Figura 3.11), como em Pal *et al*. (2018).

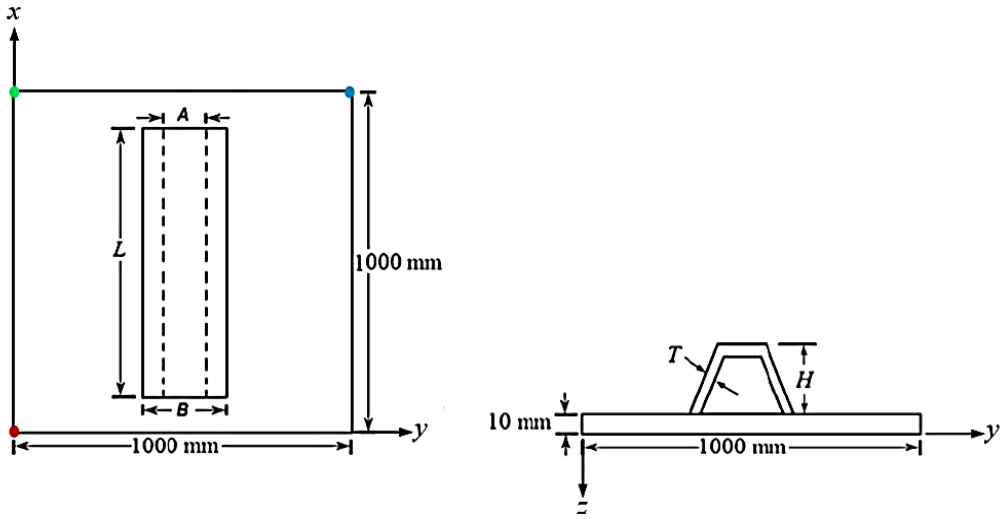

Figura 3.11: Geometria da placa e do enrijecedor. (Fonte: Adaptado de Pal *et al.*, 2018).

Vale salientar que o enrijecedor (ver Figura 3.11) possui dimensões variáveis. Entretanto, apesar dessa variação de dimensões, o volume de aço do enrijcedor é mantido constante e igual a

320000 mm³. A Tabela 3.1 apresenta as dimensões do enrijecedor do tipo viga-caixão trapezoidal para as 25 configurações geométricas avaliadas.

Cabe informar ainda que a placa enrijecida foi submetida a uma carga transversal uniformemente distribuída de 1 kN/m² que foi aplicada no sentido negativo ao eixo *z*, sendo consideradas duas condições de contorno. Para a placa com as bordas simplesmente apoiadas (Figura 3.11), nos cantos representados pelos pontos vermelho, verde e azul foram aplicadas, respectivamente, as seguintes a restrições: $Ux = Uy = 0$; $Ux = 0$; e $Uy = 0$; bem como $Uz = 0$ nas quatro bordas da placa; para a segunda condição a placa foi considerada com as bordas engastadas, sendo imposto $Ux = Uy = Uz = \theta x = \theta y = \theta z = 0$ nos quatro lados da placa. O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do aço adotados nesta análise são de 200 GPa e 0,3, respectivamente.

Tabela 3.1: Dimensões em mm do enrijecedor mantendo volume de material constante (Pal *et al*. 2018).

Caso	Espessura (*T*)	Largura inferior (*A*)	Largura superior (*B*)	Altura (*H*)	Comprimento (*L*)
1	2	35	60	65	955,90
2	3	35	60	65	637.26
3	4	35	60	65	477,95
4	5	35	60	65	382,36
5	6	35	60	65	318,63
6	2	40	60	65	932,78
7	3	40	60	65	621,86
8	4	40	60	65	466,39
9	5	40	60	65	373,11
10	6	40	60	65	310,93
11	2	40	65	70	878,09
12	3	40	65	70	585,39
13	4	40	65	70	439,04
14	5	40	65	70	351,23
15	6	40	65	70	292,70
16	2	40	60	70	881,92
17	3	40	60	70	587,95
18	4	40	60	70	440,96
19	5	40	60	70	352,77
20	6	40	60	70	293,97
21	2	35	65	65	950,02
22	3	35	65	65	633,35
23	4	35	65	65	475,01
24	5	35	65	65	380,01
25	6	35	65	65	316,67

4. TEORIA CONSTRUTAL

A Teoria Construtal proposta por Adrian Bejan em 1996, é a visão mental de que a geração de estruturas de fluxo/escoamento que são vistas em toda parte na natureza (ver Figura 4.1) podem ser raciocinadas com base em um princípio evolutivo de aumento do acesso ao fluxo/escoamento no tempo. Segundo o autor, "para que um sistema de fluxo/escoamento de tamanho finito persista no tempo (para viver/sobreviver), sua configuração deve evoluir no tempo de modo que facilite o acesso às suas correntes (fluido, energia, espécies, etc.)", sendo esse o princípio da Lei Construtal (Bejan e Lorente, 2008).

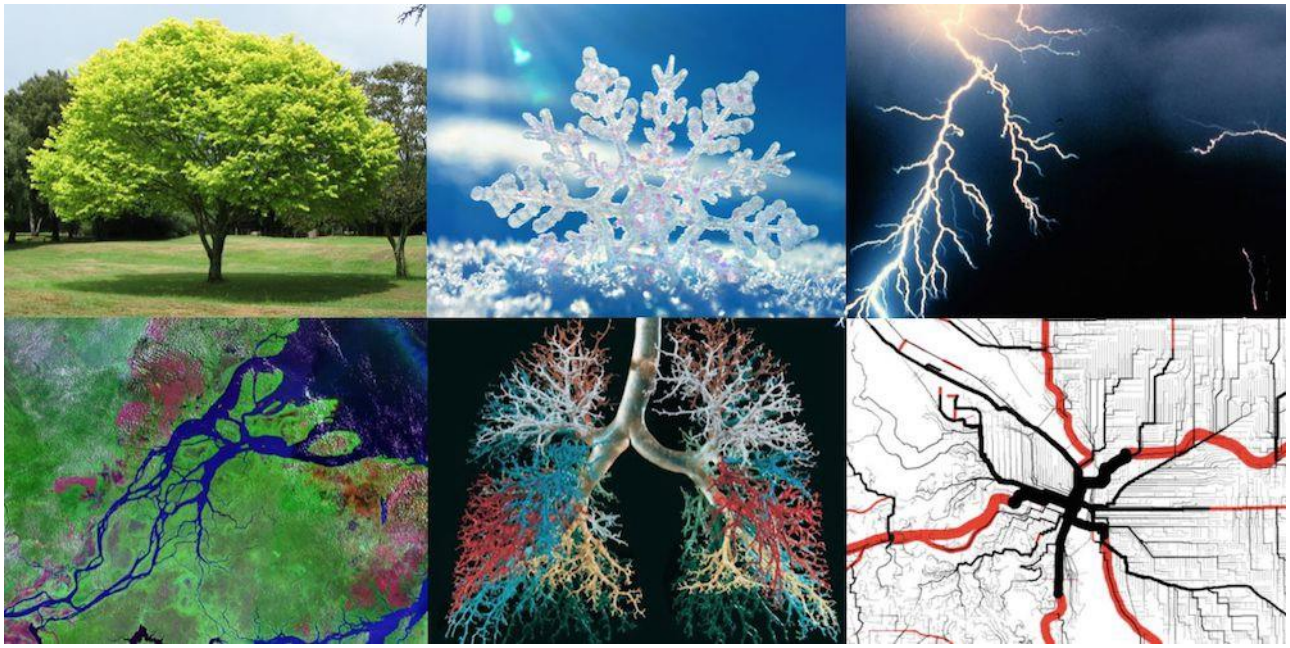

Figura 4.1: Sistemas de fluxo. (Fonte: https://medium.com/@dappsec/o-que-e-descentralizacao-3467e40ce899).

De acordo com Reis (2006) e Rocha, Lorente e Bejan (2013), um resultado básico da Teoria Construtal é que a forma do sistema e a arquitetura do fluxo/escoamento interno não se desenvolvem por acaso, mas resultam da busca permanente por um melhor desempenho e, portanto, devem evoluir com o tempo. A forma real dos sistemas naturais que estavam livres para se transformar no passado é o resultado da distribuição ideal das imperfeições, enquanto os sistemas de engenharia abordam o mesmo objetivo e estrutura conforme tendem ao desempenho ideal.

A Teoria Construtal fornece uma ampla cobertura de "design" em todos os lugares, desde a engenharia até a geofísica e biologia. É possível saber onde esperar oportunidades para descobrir novas configurações que são gradualmente mais eficazes e que demandem menos esforço e tempo, ou seja, através dessa teoria busca-se não apenas melhores configurações, mas também melhores

estratégias para gerar a geometria que está faltando. O fato de as estruturas de fluxo/escoamento natural terem características semelhantes às descobertas no Design Construtal gera uma confiança na busca de um melhor projeto de engenharia (Bejan e Lorente, 2008).

Na análise de estruturas mecânicas, Bejan e Lorente (2008) apresentam que essas estruturas são conexões com volume mínimo através dos quais as tensões "fluem" dos componentes para seus vizinhos e, que o melhor uso de material de suporte mecânico é alcançado quando as tensões máximas permitidas são distribuídas uniformemente pelo material disponível.

4.1. Método Design Construtal

Segundo Bejan e Lorente (2008), o método de Design Construtal orienta o projetista (no tempo) para arquiteturas de fluxo/escoamento que têm desempenho global cada vez maior para as condições de acesso de fluxo/escoamento especificadas (seja escoamento de fluido, fluxo de calor ou fluxo de tensões). Uma configuração desenvolvida para um conjunto de condições não é necessariamente a configuração recomendada para outro conjunto de condições, ou seja, universal é a lei construtiva, não um de seus projetos.

De acordo com Dos Santos *et al*. (2017), o Design Construtal não é um método de otimização, mas de avaliação geométrica. Quando associado a um método de otimização, como é o caso da técnica de busca exaustiva, ele se torna responsável por gerar o espaço de busca (composto pelas configurações geométricas possíveis), e o método de otimização identifica a geometria do sistema que conduz ao seu melhor desempenho. Da Silveira *et al*. (2021) destacam ainda que, para a utilização do Design Construtal é preciso definir restrições (globais ou locais), graus de liberdade e parâmetros de desempenho (deflexão máxima e central).

Nesta pesquisa, o método Design Construtal aliado à técnica de busca exaustiva (como será explicado a seguir) irá permitir que a partir da avaliação dos resultados gerados se obtenha uma solução otimizada para o problema proposto.

4.2. Busca Exaustiva

A técnica de Busca Exaustiva também conhecida como força bruta é aplicada a uma variedade de situações, podendo servir como um parâmetro para julgar alternativas mais eficientes para a resolução de um problema. A maioria das situações que adotam essa técnica envolvem problemas de otimização, ou seja, encontrar um elemento que maximize ou minimize alguma característica desejada (Levitin, 2012).

Levitin (2012) declara ainda que a busca exaustiva é uma abordagem de força bruta para problemas combinatórios, onde sugere gerar todo e qualquer elemento do domínio do problema,

selecionar aqueles que satisfaçam todas as restrições e, em seguida, encontrar um elemento desejado (por exemplo, aquele que otimiza alguma função objetivo). Embora a ideia de busca exaustiva seja bastante direta, sua implementação normalmente requer um algoritmo para gerar certos objetos combinatórios.

Para Khoury e Harder (2016), a busca exaustiva tem a vantagem de conseguir pesquisar qualquer função, mesmo que apresente um comportamento complexo, irregular e até mesmo descontinuidades, embora seja pouco sofisticada. Devido a sua simplicidade, a técnica de busca exaustiva pode ser considerada um bom método para a realização de um processo de otimização.

Então, através da busca exaustiva será realizada a comparação de todos os resultados numéricos de deflexão para as diferentes configurações geométricas propostas pela aplicação do Design Construtal. Essa comparação é consistente, uma vez que todas as geometrias possuem a mesma quantidade de material, mesmas condições de vinculação e mesmo carregamento aplicado.

4.3. Estudo de Caso

A aplicação do método Design Construtal no problema de placas com enrijecedores submetidas a uma carga transversal uniformemente distribuída, é realizado tomando-se como base uma placa de referência e, a partir dela, a adoção de uma fração volumétrica (ϕ) para a distribuição dos enrijecedores na estrutura mantendo o volume total de material constante, a fim de avaliar o comportamento mecânico em termos da deflexão e comparando os resultados com estudos que aplicaram o Design Construtal para a avaliação e otimização geométrica deste tipo de estrutura.

Para a distribuição do volume de material, será adotada a fração volumétrica ϕ que corresponde à porcentagem do material da placa a ser transformado em enrijecedores.

A fração volumétrica (ϕ) é representada por:

$$\phi = \frac{V_s}{V_r} \tag{4.1}$$

onde V_s é o volume da placa transformado em reforços e V_r é o volume da placa sem enrijecedores utilizada como referência. Cabe ressaltar que a fração volumétrica a ser retirada da placa de referência é deduzida apenas da espessura, mantendo-se a largura e o comprimento constantes (Troina, 2017).

Tendo definido o valor da fração volumétrica que será de 0,3, os graus de liberdade avaliados neste estudo são: a quantidade de enrijecedores na direção longitudinal da placa (N_{ls}); a quantidade de enrijecedores na direção transversal da placa (N_{ts}); a altura (h_s) e a espessura (t_s) dos enrijecedores e, a partir disso, avaliar a influência desses parâmetros geométricos no comportamento mecânico em termos das deflexões das placas enrijecidas em análise, assim como foi realizado nos trabalhos de Troina *et al*. (2020), Nogueira *et al*. (2021), Pinto *et al*. (2021) e Kucharski *et al*. (2022).

Todos os arranjos geométricos a serem analisados foram determinados a partir de uma placa não enrijecida de espessura t = 20 mm, largura b = 1000 mm e comprimento a = 2000 mm (Figura 4.2). Essa placa é constituída de um aço com módulo de elasticidade E = 200 GPa e coeficiente de Poisson v = 0,3. São consideradas condições de contorno de bordas simplesmente apoiadas, incluindo as bordas dos enrijecedores para o caso das placas enrijecidas, e uma carga distribuída uniforme no valor de 10 kN/m², cujas características também foram adotadas nos trabalhos citados acima. O elemento finito utilizado nas análises numéricas é o SHELL281.

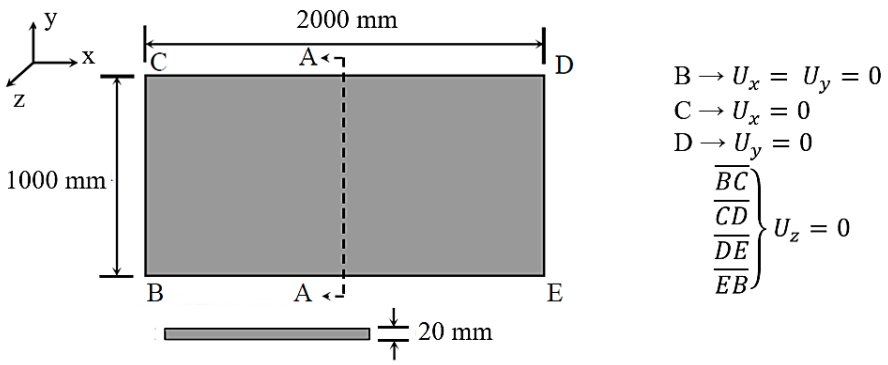

Figura 4.2: Caracterização da placa de referência e condições de contorno. (Fonte: Adaptado de Pinto, 2019).

Considerando a fração volumétrica $\phi = 0{,}3$, a placa enrijecida fica com uma espessura de 14 mm, a partir disso, optou-se por adotar espessuras menores que essa para os enrijecedores. Sendo assim, a espessura dos enrijecedores são baseadas em valores comerciais de chapas de aço e varia de t_s = 4,75 mm (3/16 pol.) a t_s = 12,7 mm (1/2 pol.) tanto para os enrijecedores na direção longitudinal quanto transversal.

Para definir a geometria do enrijecedor, foi utilizado como base o estudo de Aneja *et al*. (2018) que avaliaram a influência do ângulo e altura das placas com *hat-stiffeners*. De acordo com os autores, quando é utilizado um ângulo de 120° o resultado apresenta um aumento de resistência da estrutura. Portanto, esse será o ângulo dos enrijecedores deste estudo para as análises de deflexão na placa.

A altura dos enrijecedores varia de acordo com a quantidade e direção em que eles estão posicionados na placa. No caso de enrijecedores longitudinais, para determinar a altura máxima do enrijecedor foram realizados vários testes aplicando as espessuras definidas e, no caso da placa com apenas um enrijecedor, optou-se por limitar a altura em 300 mm porque com alturas maiores, das cinco espessuras comerciais adotadas só seria possível avaliar a estrutura com uma espessura e as deflexões máxima e central atingiram resultados muito superiores aos da placa de referência. A partir

de dois enrijecedores, a altura máxima adotada foi de 150 mm a fim de obter uma melhor distribuição do volume de material da placa a ser transformado em enrijecedores.

Para a placa com enrijecedores transversais, com apenas um enrijecedor optou-se por limitar a altura em 400 mm, por ser a única altura que permitia a aplicação de todas as espessuras comerciais determinadas para utilização neste estudo. Com dois e três enrijecedores a altura máxima é de 250 mm, e nos demais arranjos a altura máxima foi de 175 mm, alturas essas definidas através de testes visando satisfazer as demais características geométricas do enrijecedor e cujos resultados fossem compatíveis com o objetivo principal que é a minimização das deflexões na placa.

A Figura 4.3 apresenta as configurações geométricas geradas pela aplicação do Design Construtal e simuladas através do *software* Ansys. Como citado acima, as alturas variam de acordo com a quantidade de enrijecedores, por isso não constam no esquema da Figura 4.3.

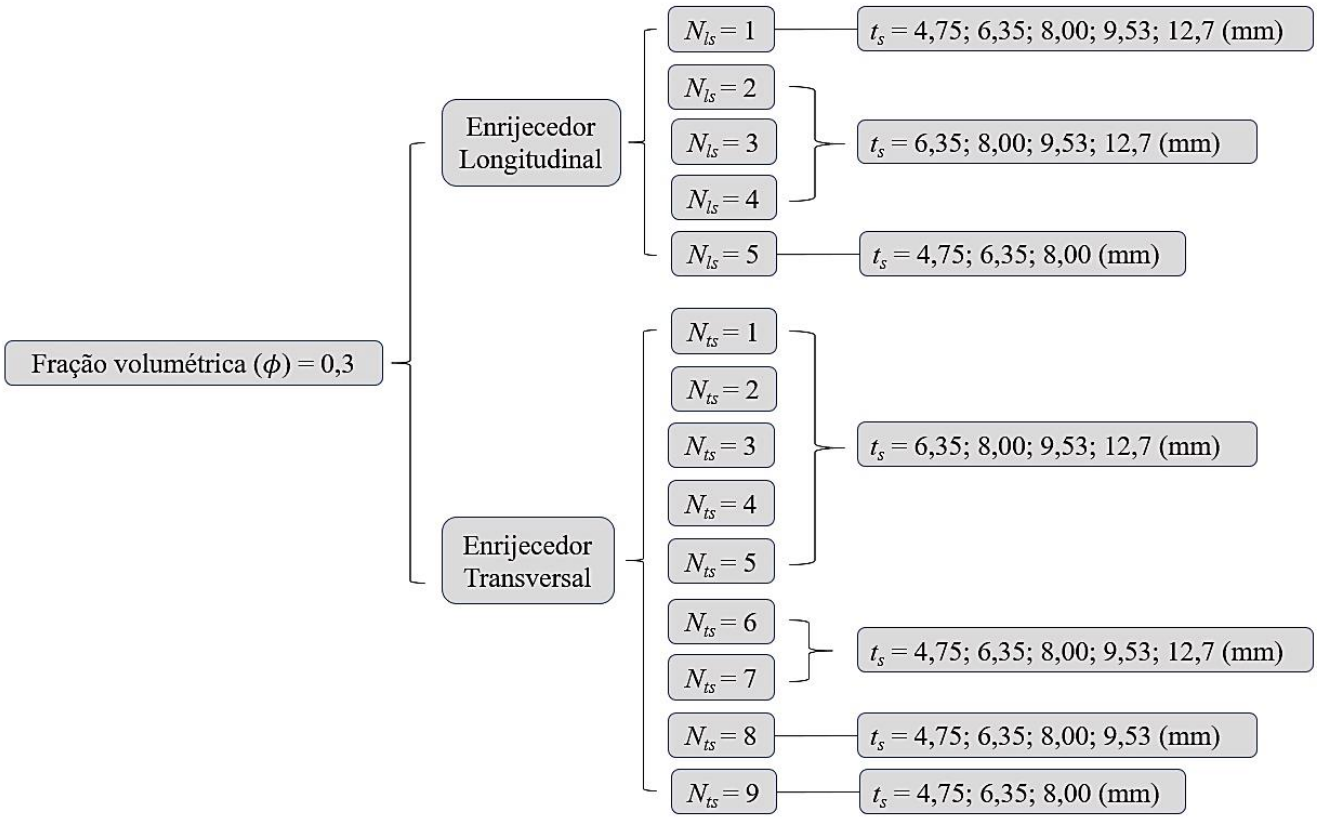

Figura 4.3: Configurações geométricas geradas pela aplicação do método Design Construtal.

Pensando numa estrutura em que se tem a união de várias placas enrijecidas, a partir de dois enrijecedores tanto na direção longitudinal quanto na transversal, a distância entre o enrijecedor e a borda da placa equivale à metade da distância entre dois enrijecedores (ver Figura 4.6), porque com a união das placas, o distanciamento entre os enrijecedores será sempre o mesmo.

As Figuras 4.4 e 4.5 apresentam um esquema de como serão as placas com enrijecedores do tipo viga-caixão trapezoidal na direção longitudinal e das placas com enrijecedores do tipo viga-caixão trapezoidal na direção transversal, respectivamente.

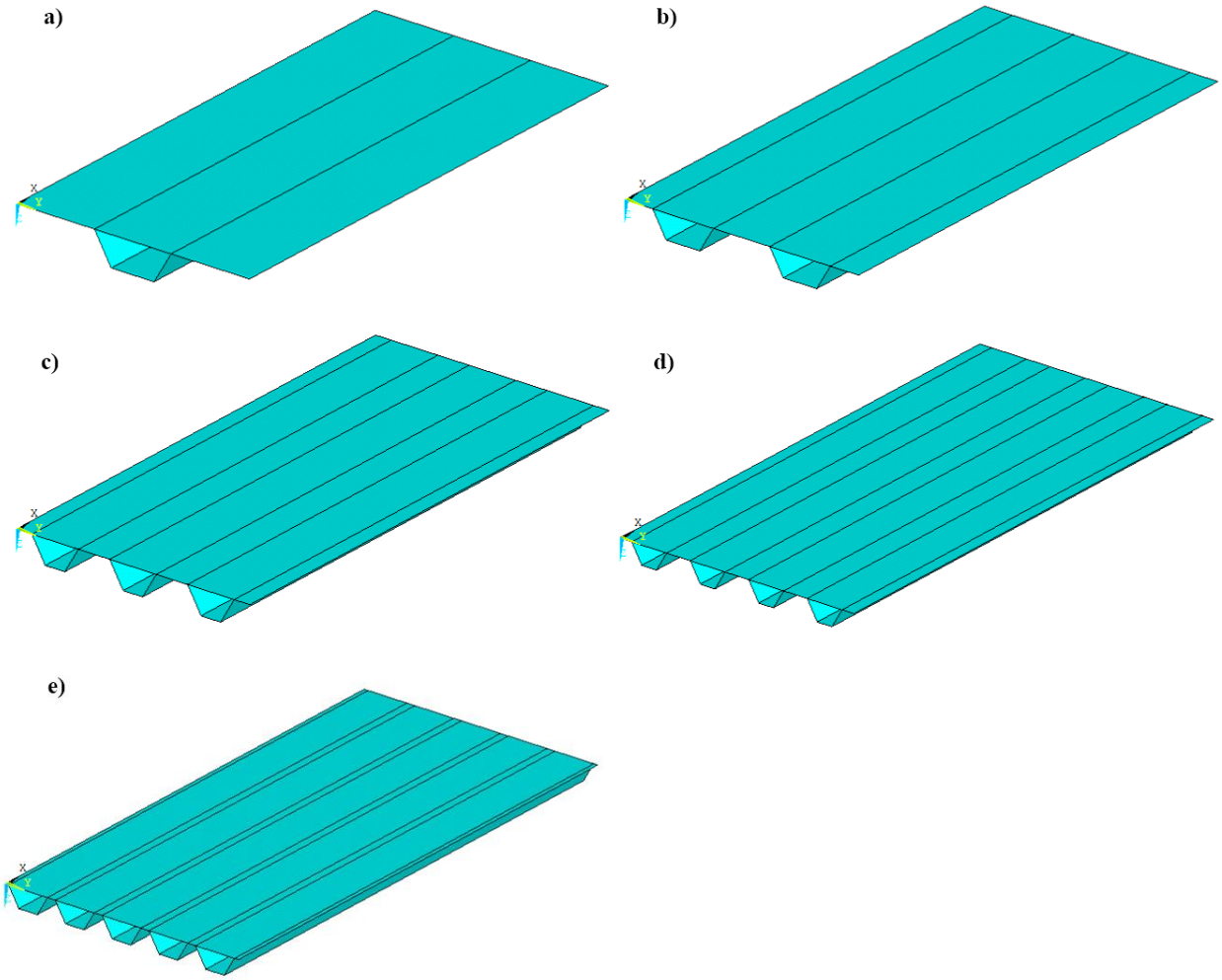

Figura 4.4: Proposta de estudo de placa com enrijecedor do tipo viga-caixão trapezoidal na direção longitudinal com até cinco enrijecedores.

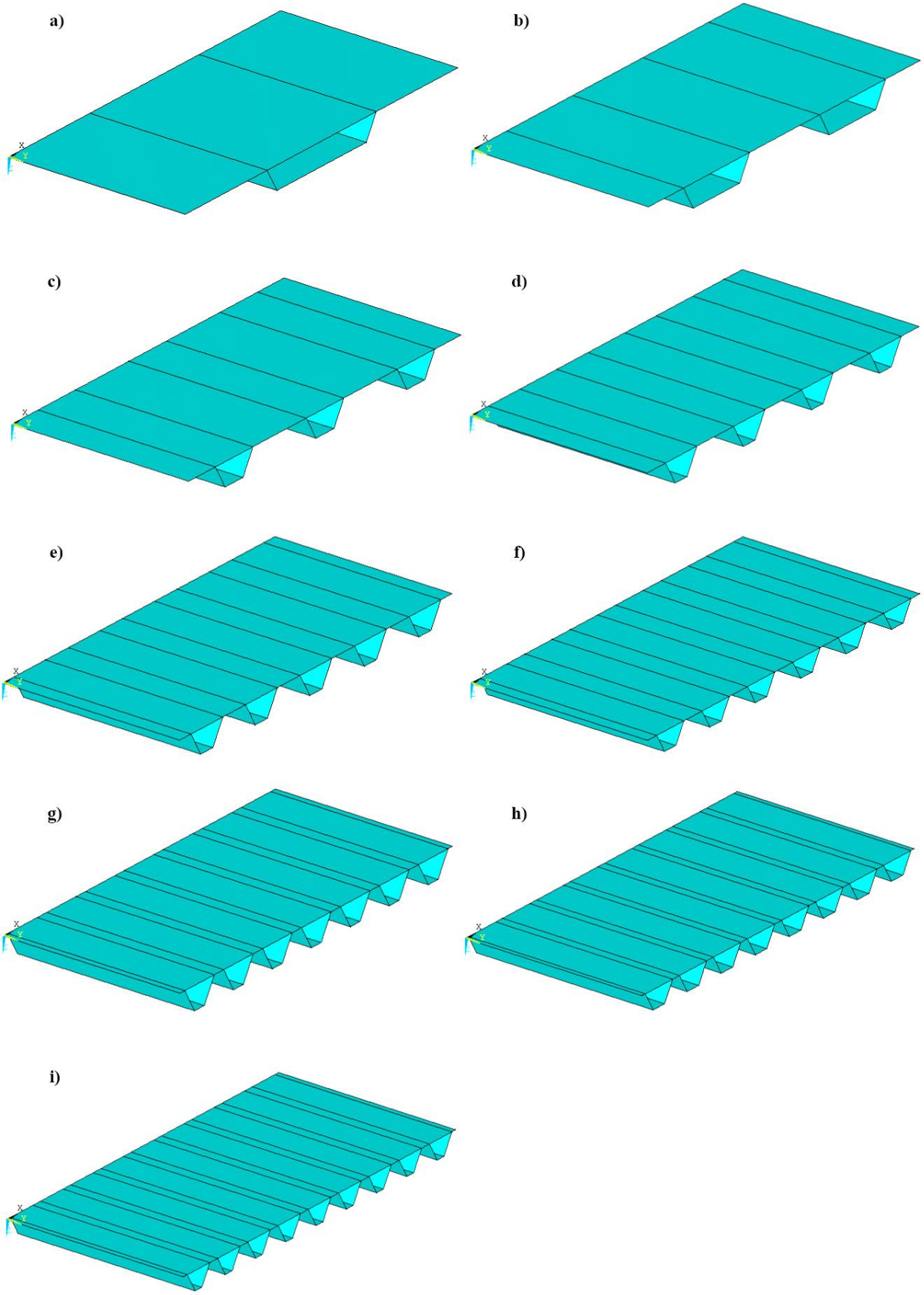

Figura 4.5: Proposta de estudo de placa com enrijecedor do tipo viga-caixão trapezoidal na direção transversal com até nove enrijecedores.

A partir da Figura 4.3 e das informações citadas anteriormente, são apresentadas na Figura 4.6 as informações geométricas das estruturas a serem analisadas, sendo h_s e t_s a altura e espessura do enrijecedor, respectivamente; *n'* representa a distância entre dois enrijecedores; b_t a base do enrijecedor; *y'* a projeção da lateral do enrijecedor no eixo *y* (para o caso de enrijecedores na direção longitudinal; e *x'* a projeção da lateral do enrijecedor no eixo *x* (para o caso de enrijecedores na direção transversal. No APÊNDICE B são apresentados todos os valores correspondentes a esses termos em cada caso analisado nesta pesquisa.

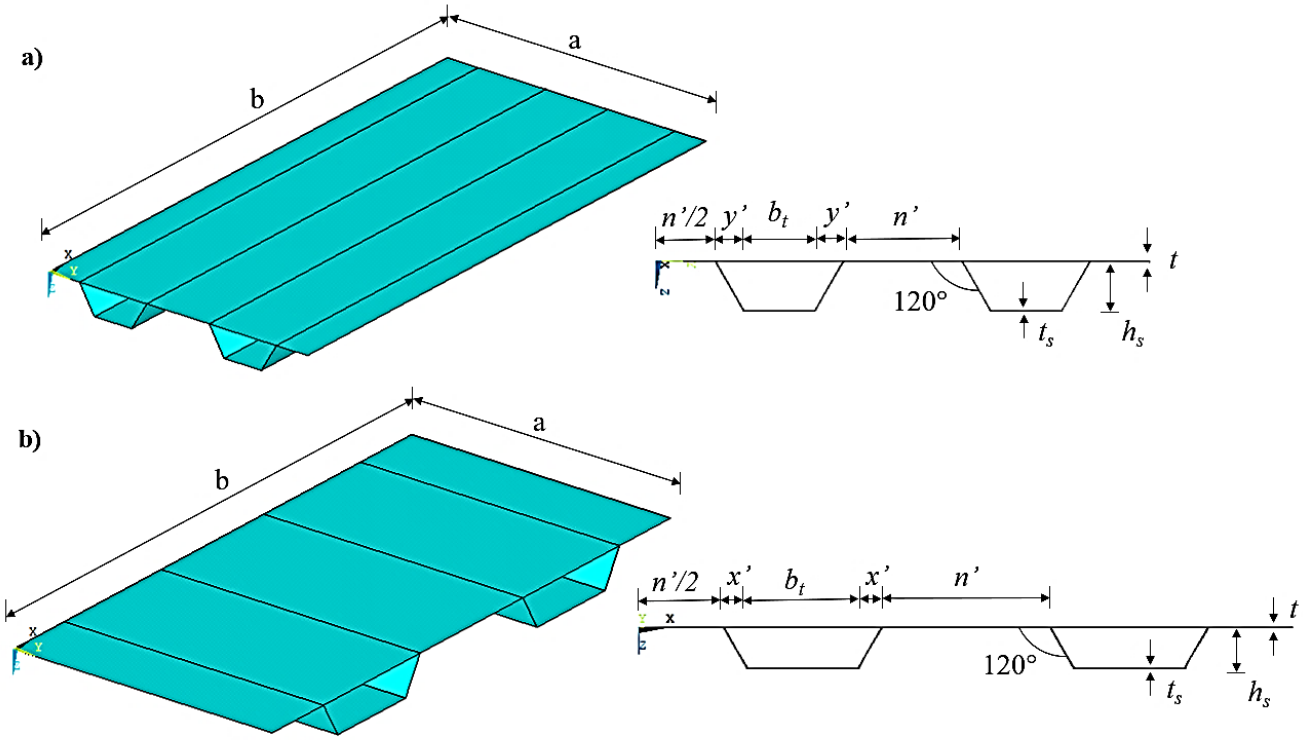

Figura 4.6: Variáveis que caracterizam a dimensão e espaçamento dos enrijecedores (a) para enrijecedores na direção longitudinal e (b) para enrijecedores na direção transversal.

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo apresenta os resultados dos casos de validação e verificação do modelo computacional descritos no item 3.3, além da análise para os casos de aplicação do modelo em placas com enrijecedores do tipo viga-caixão trapezoidal na direção longitudinal e de enrijecedores na direção transversal à placa e a comparação destes resultados com os estudos que utilizam o Design Construtal na análise de deflexão em placas enrijecidas.

5.1. Validação do Modelo Numérico

Para o caso proposto na validação do modelo numérico que é baseado no estudo experimental de Carrijo *et al*. (1999), o resultado numérico para a deflexão no centro da placa foi U_z = 6,5075 mm (ver Figura 5.1), enquanto o estudo experimental de Carrijo *et al*. (1999) foi de U_z = 6,220 mm, existindo uma diferença relativa de 4,58%, validando o modelo computacional.

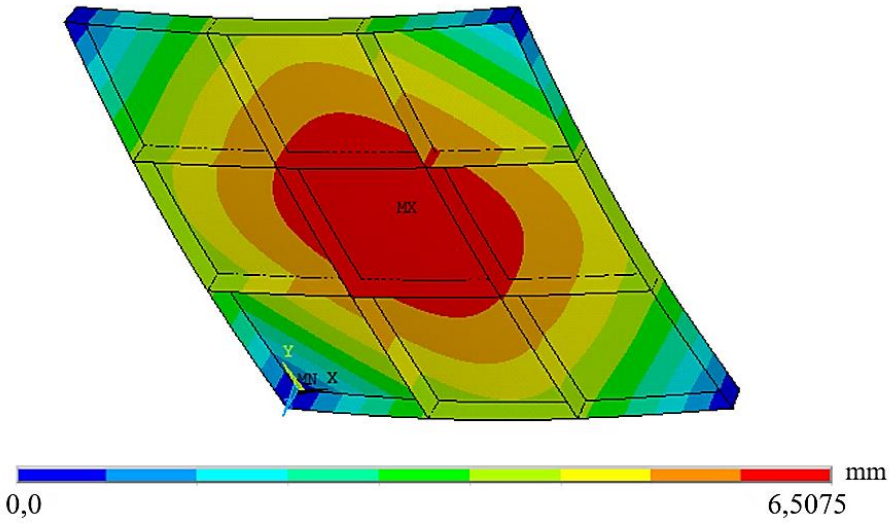

Figura 5.1: Resultado para a deflexão máxima na placa obtido com o elemento finito SHELL281 considerando uma malha com elementos de 2,436 mm.

5.2. Verificação do Modelo Numérico

Para o caso de verificação proposto (item (3.3.2)), a Figura 5.2 apresenta o resultado para a deflexão máxima obtido com o elemento finito SHELL281 no presente estudo.

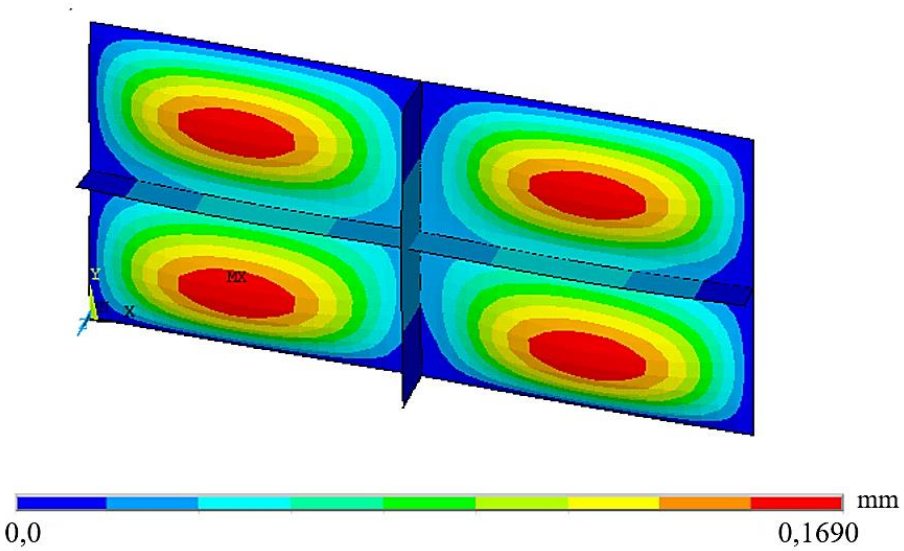

Figura 5.2: Resultado para a deflexão máxima na placa obtido com o elemento finito SHELL281 considerando uma malha com elementos de 3,81 mm.

A deflexão máxima para este caso atingiu 0,1690 mm (nas regiões em vermelho da Figura 5.2). No centro placa, a deflexão foi de 0,02807 mm (ver Figura 5.2), isto porque o enrijecedor cruza o centro da estrutura diminuindo a deflexão neste ponto. Portanto, a deflexão máxima da estrutura não ocorre no centro da mesma. A Tabela 5.1 apresenta o resultado para a deflexão U_z no centro da placa comparado aos resultados obtidos nos estudos realizados anteriormente.

Tabela 5.1: Resultados da deflexão U_z no centro da placa.

	Deflexão Central (mm)	Diferença Relativa (%)
SHELL281 (Presente Estudo)	0,02807	-
Troina (2018) - SOLID95 tetraédrico	0,02782	0,89
Troina (2018) - SOLID95 hexaédrico	0,02781	0,89
Silva (2010)	0,02183	22,23
Bedair (1997)	0,02032	27,61

A partir da Tabela 5.1 pode-se observar que a diferença na deflexão central U_z foi cerca de 1% quando comparado ao elemento tridimensional SOLID95 usado por Troina et al. (2018). Com relação aos resultados de Silva (2010) e Bedair (1997) a diferença relativa fica em torno de 22% e 27%, respectivamente. Essa diferença ocorre porque, no caso de Silva (2010), foi utilizado o elemento finito SHELL63 na placa e os elementos de viga BEAM4 e BEAM44 nos enrijecedores, além disso, adotou uma malha formada por elementos finitos retangulares de 40 × 20 mm de lados. Já Bedair (1997) é um estudo mais antigo e adotou um método de programação sequencial quadrática para análise dos resultados.

5.2.1. Verificação do Modelo Numérico em estruturas *hat-stiffened plates*

A primeira verificação que é baseada no estudo de Tharian e Nandakumar (2013), analisa uma placa simplesmente apoiada com dois enrijecedores longitudinais (Figura 3.10) com características bem simples. A ideia foi comparar os resultados apresentados pelos autores, que adotaram os elementos finitos SHELL63 e SHELL93, com os resultados obtidos no presente trabalho empregando o elemento finito SHELL281. No estudo de referência, os elementos SHELL63 e SHELL93 mostraram convergência para uma densidade de malha de 28 × 30 e uma razão de aspecto de 1,8.

A fim de determinar a discretização espacial a ser utilizada, foi realizado um teste de convergência de malha, considerando elementos finitos quadrados com 8 tamanhos diferentes. Neste teste de convergência (Figura 5.3), foi possível observar que a partir da malha de 20 mm (com 15600 elementos finitos) ocorre uma estabilização no valor da deflexão máxima da placa. Então, foi adotado como tamanho de elemento finito o próximo valor de malha após a estabilização, ou seja, a malha de 10 mm com 60240 elementos finitos.

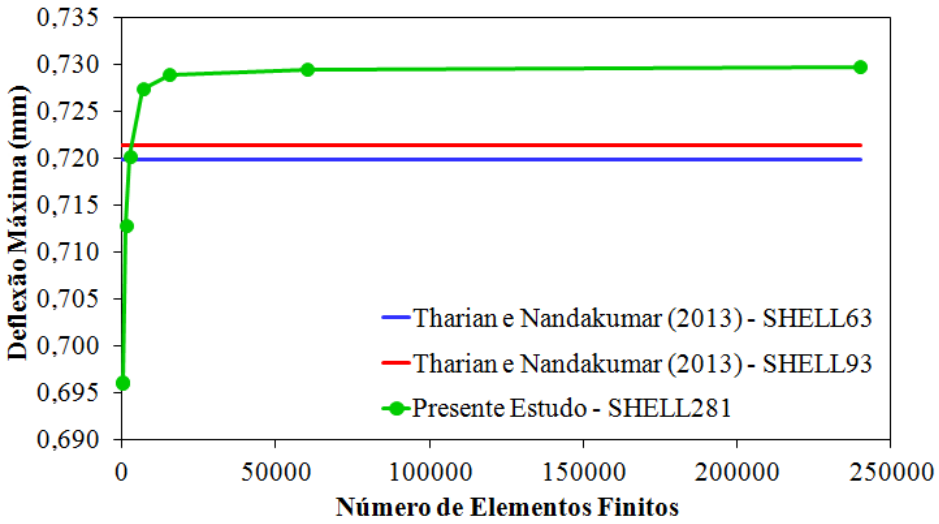

Figura 5.3: Teste de convergência de malha e verificação do modelo computacional.

De acordo com Tharian e Nandakumar (2013), para o elemento SHELL63 a deflexão máxima obtida foi de 0,7198 mm, enquanto para o SHELL93 foi de 0,7214 mm (ver Figura 5.3). No presente estudo com o elemento finito SHELL281, após o refinamento da malha, obteve-se um resultado de 0,7295 mm quando adotada a malha de 10 mm (com 60240 elementos finitos). O resultado obtido no presente estudo apresenta uma diferença de aproximadamente 1,35% e 1,12% em relação aos resultados gerados com o SHELL63 e SHELL93 (Tharian e Nandakumar, 2013). Portanto, é possível

considerar que o modelo computacional proposto foi devidamente verificado em comparação aos resultados obtidos por Tharian e Nandakumar (2013).

Na Figura 5.4 é apresentada a configuração deformada da placa com dois enrijecedores do tipo viga-caixão trapezoidal, sendo possível identificar que sua deflexão máxima ocorre no ponto central da estrutura.

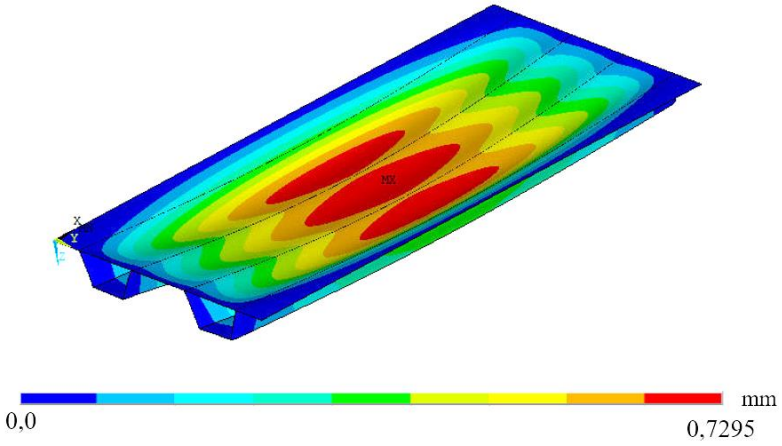

Figura 5.4: Resultado para a deflexão máxima obtido com o elemento finito SHELL281 considerando uma malha com elementos de 10 mm.

Como já mencionado, o mesmo problema foi estudado por Pal *et al.* (2018) na análise de uma placa quadrada com um enrijecedor central (Figura 3.11), que adotou o elemento finito SHELL181 para a placa e o elemento BEAM3 para o enrijecedor. Assim, como no estudo de caso anterior, pretende-se comparar os resultados apresentados em Pal *et al.* (2018) com os resultados obtidos no presente estudo, empregando o elemento finito SHELL281 tanto para o enrijecedor como para a placa. No estudo de referência, o elemento finito SHELL181 mostrou convergência para uma densidade de malha de 20 × 20 e este tamanho de malha foi utilizado para todo o restante da análise.

Visando definir o tamanho ideal para o elemento finito SHELL281 a ser utilizado, foi realizado um teste de convergência de malha, para as condições propostas no Caso 1 (ver Tabela 3.1), considerando elementos finitos quadrados com 7 tamanhos diferentes para as duas condições de contorno propostas (bordas simplesmente apoiadas e bordas fixas). Neste teste de convergência (Figura 5.5), é possível observar que a partir da malha de 40 mm (com 796 elementos finitos) ocorre uma estabilização no valor da deflexão máxima da placa. Poderia ser adotada a malha de 20 mm com 3132 elementos finitos para determinação dos resultados, porém, optou-se em adotar uma malha mais refinada do que aquela indicada no teste de convergência de malha, ou seja, foi utilizado uma malha com 11928 elementos de tamanho 10 mm na discretização dos casos apresentados na Tabela 3.1.

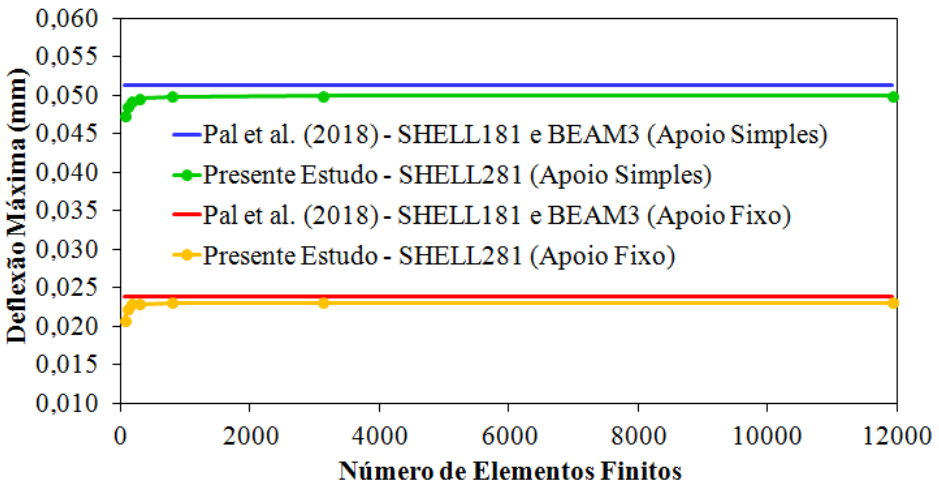

Figura 5.5: Teste de convergência de malha para a condição de bordas simplesmente apoiadas e condição de bordas engastadas.

A Figura 5.6 mostra os resultados obtidos no presente estudo para a deflexão máxima dos casos da Tabela 3.1 em comparação aos resultados de Pal *et al.* (2018), para os dois tipos de vinculação da placa: simplesmente apoiada e engastada. Cabe destacar que a linha pontilhada serve apenas para auxiliar na visualização e comparação dos resultados, não indicando necessariamente uma continuidade entre as diferentes configurações de enrijecedor.

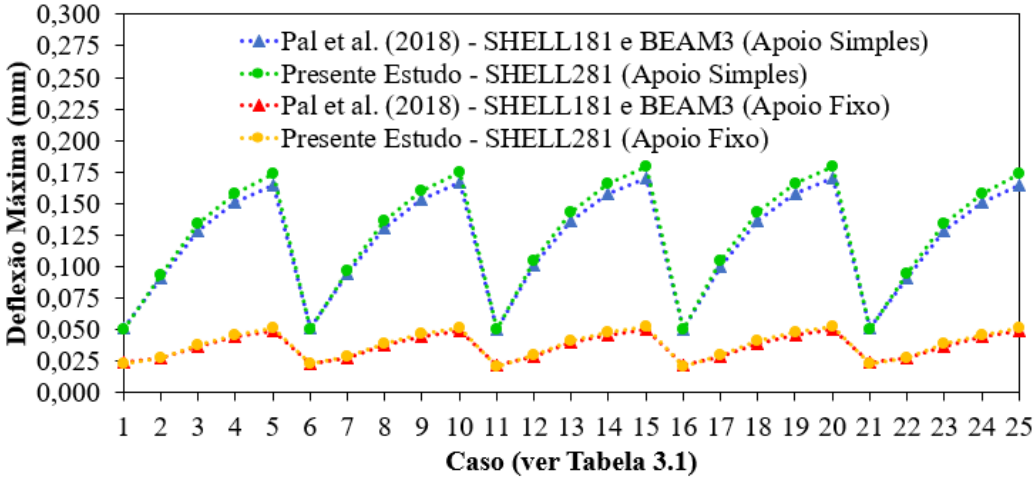

Figura 5.6: Deflexão máxima para os casos da Tabela 3.1 com a condição de bordas simplesmente apoiadas e com a condição de bordas engastadas.

Qualitativamente, é possível notar na Figura 5.6 uma boa concordância entre os resultados gerados com o modelo computacional proposto e os apresentados em Pal *et al.* (2018). Para quantificar as diferenças existentes, os valores de deflexão máxima para os 25 casos da Tabela 3.1,

nos dois tipos de condições de contorno investigados, bem como a diferença relativa entre o presente estudo e Pal *et al.* (2018), são mostrados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Deflexão máxima, em mm, para os casos da Tabela 3.1.

Caso	Placa Simplesmente Apoiada			Placa Engastada		
	Pal *et al.* (2018)	Presente Estudo	Diferença Relativa (%)	Pal *et al.* (2018)	Presente Estudo	Diferença Relativa (%)
1	0,0513	0,0499	-2,73	0,0239	0,0230	-3,77
2	0,0908	0,0936	3,08	0,0271	0,0275	1,48
3	0,1279	0,1338	4,61	0,0369	0,0382	3,52
4	0,1506	0,1580	4,91	0,0440	0,0459	4,32
5	0,1647	0,1732	5,16	0,0486	0,0509	4,73
6	0,0508	0,0498	-1,97	0,0233	0,0225	-3,43
7	0,0939	0,0970	3,30	0,0277	0,0282	1,81
8	0,1306	0,1367	4,67	0,0377	0,0391	3,71
9	0,1527	0,1603	4,98	0,0446	0,0466	4,48
10	0,1664	0,1750	5,17	0,0492	0,0515	4,67
11	0,0505	0,0501	-0,79	0,0213	0,0208	-2,35
12	0,1008	0,1046	3,77	0,0292	0,0300	2,74
13	0,1365	0,1432	4,91	0,0394	0,0411	4,31
14	0,1572	0,1653	5,15	0,0461	0,0482	4,56
15	0,1700	0,1789	5,24	0,0505	0,0528	4,55
16	0,0503	0,0499	-0,80	0,0214	0,0208	-2,80
17	0,1004	0,1043	3,88	0,0291	0,0299	2,75
18	0,1364	0,1430	4,84	0,0394	0,0410	4,06
19	0,1572	0,1653	5,15	0,0461	0,0482	4,56
20	0,1700	0,1789	5,24	0,0504	0,0528	4,76
21	0,0514	0,0500	-2,72	0,0238	0,0231	-2,94
22	0,0915	0,0942	2,95	0,0272	0,0278	2,21
23	0,1284	0,1342	4,52	0,0370	0,0384	3,78
24	0,1508	0,1583	4,97	0,0440	0,0459	4,32
25	0,1648	0,1732	5,10	0,0487	0,0509	4,52

A partir da Tabela 5.2 foi possível inferir que as diferenças relativas máximas foram em torno de 5%, indicando que o modelo computacional proposto conseguiu reproduzir os resultados de Pal *et al.* (2018) de forma adequada. Além disso, diferenças relativas médias de 3,30% e de 2,42%, respectivamente, para as placas com apoio simples e com apoio fixo, foram atingidas se considerados os 25 casos analisados. Portanto, diante desses resultados pode-se considerar que o modelo computacional desenvolvido foi devidamente verificado.

Adicionalmente, a fim de avaliar a influência da geometria do enrijecedor na análise da deflexão máxima que ocorre no centro da placa, foram comparados os casos com maior e menor valores de deflexão central para cada tipo de condição de vinculação da placa. Quando analisada a condição de contorno simplesmente apoiada, o caso que apresentou a menor deflexão central foi o 6 (0,0498 mm) e o caso 15 teve a maior deflexão central (0,1789 mm), ocorrendo uma redução de 3,58

vezes no valor da deflexão máxima entre ambos os casos. Já para as placas com as bordas engastadas, a menor deflexão aconteceu no caso 11 (0,0208 mm) e a maior no caso 15 (0,0528 mm), existindo aqui uma redução de 2,54 vezes no valor da deflexão máxima entre o pior e o melhor caso.

A Figura 5.7 representa a configuração deformada para os casos em que ocorreram a menor e maior deflexão na placa para as condições de bordas com apoios simples e bordas fixas, sendo possível identificar facilmente que sua deflexão máxima ocorre na região central da estrutura.

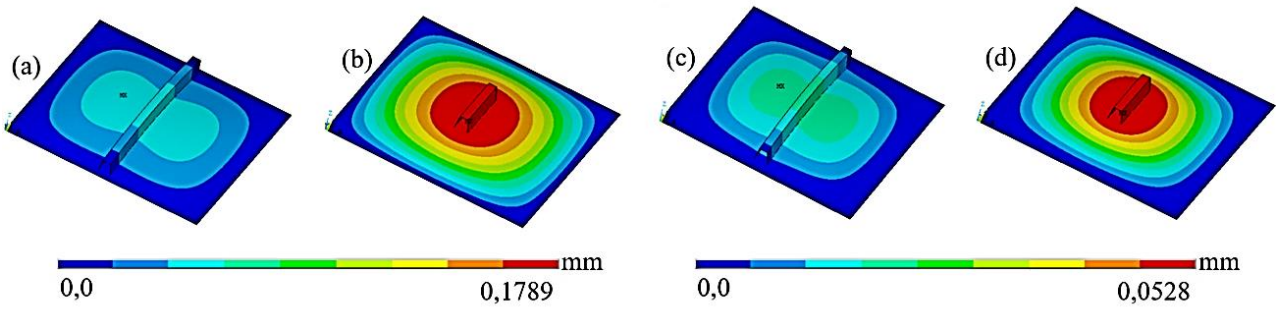

Figura 5.7: Menor e maior deflexão resultantes, sendo (a) Caso 6 e (b) Caso 15 com a condição de bordas simplesmente apoiadas; (c) Caso 11 e (d) Caso 15 considerando as bordas da placa engastadas.

Nas duas condições de vinculação propostas, o caso 15 (Tabela 5.2) que apresenta a menor dimensão do enrijecedor, obteve os maiores valores de deflexão máxima na região central. Já em relação à análise da menor deflexão, apesar de não possuir o maior enrijecedor em termos de comprimento, o caso 6 obteve uma deflexão máxima menor para a condição de bordas simplesmente apoiadas quando comparado ao caso 1 que tem o maior enrijecedor. A diferença de comprimento entre eles é de 23,12 mm e a diferença relativa entre os resultados foi de apenas 0,20%. Quando analisada a vinculação de bordas engastadas, a menor deflexão foi no caso 11 que, apesar de não ser o maior enrijecedor, possui um dos maiores comprimentos. A partir disso, é possível observar que o comprimento do enrijecedor tem influência direta na análise da deflexão máxima em placas.

5.3. APLICAÇÃO DO MODELO

Todos os arranjos geométricos propostos foram determinados a partir da placa de referência, cujas características foram apresentadas no capítulo anterior. Assim como nos casos de verificação do modelo computacional analisando estruturas com enrijecedores do tipo viga-caixão, o primeiro passo para as análises numérico-computacional é a realização do teste de convergência de malhas considerando-se a estrutura com maior complexidade geométrica, representadas pelas placas com cinco enrijecedores no caso da proposta de enrijecedores longitudinais e com nove enrijecedores para a proposta de enrijecedores apenas a direção transversal. Para o teste de convergência de malha, foi considerada a deflexão máxima da estrutura e optou-se pela adoção de uma malha regular formada por elementos finitos quadrados com seis tamanhos diferentes de lado que variam de 5 a 40 mm, conforme apresenta a Figura 5.8.

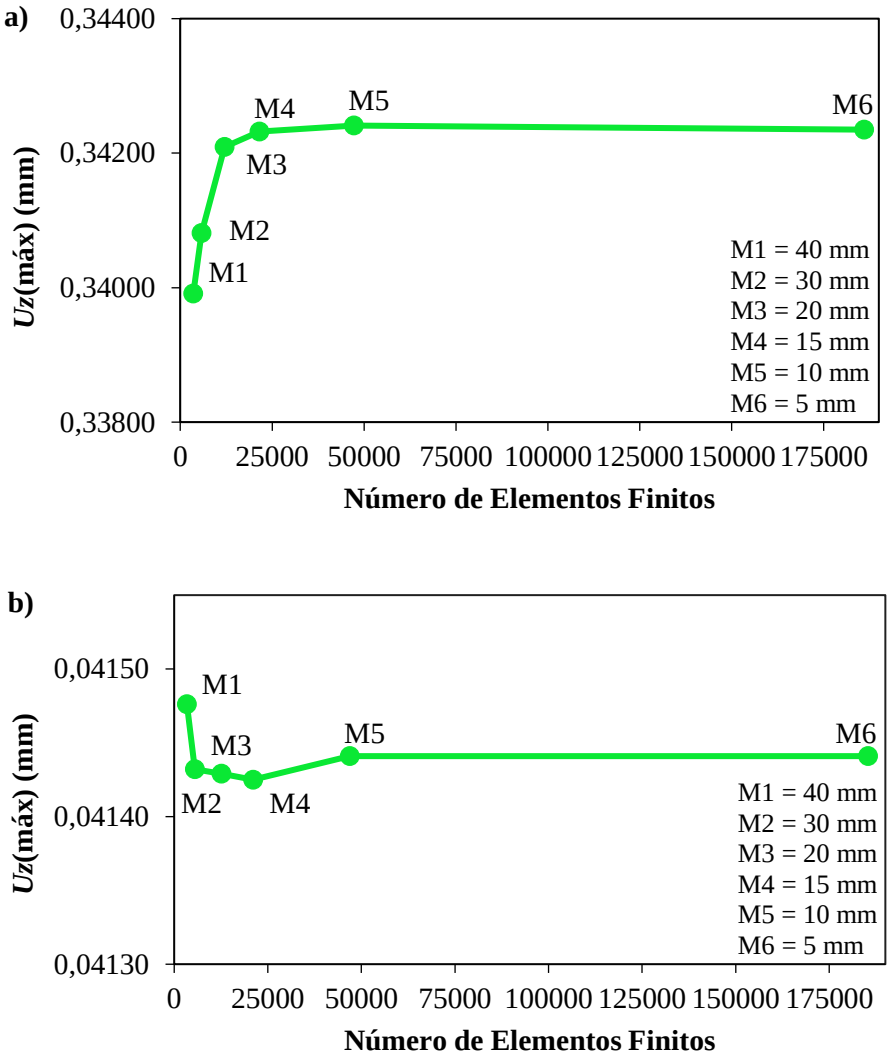

Figura 5.8: Teste de convergência de malha (a) para a placa com cinco enrijecedores longitudinais; (b) para a placa com nove enrijecedores transversais.

A partir dos gráficos da Figura 5.8, é possível observar uma estabilização dos resultados da deflexão máxima a partir da malha M5 com elementos de 10 mm em ambos os casos, sendo essa a malha escolhida para utilização em todos os arranjos geométricos desta pesquisa.

Aplicando essa malha de 10 mm e o elemento finito SHELL281, é obtido um resultado de deflexão máxima e central de 0,69758 mm (Figura 5.9) na placa de referência. Sendo assim, a inserção dos enrijecedores na placa tem por objetivo reduzir esse deslocamento máximo visando aumentar a sua rigidez.

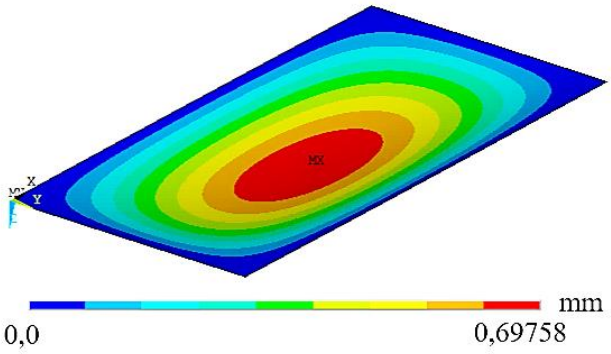

Figura 5.9: Deslocamentos resultantes na placa de referência adotando uma malha quadrada de 10 mm.

A Tabela 5.3 apresenta os resultados de deflexão máxima e central na placa de referência obtidos em outros trabalhos que adotam as mesmas características geométricas, carregamento e condições de contorno.

Tabela 5.3: Resultados da deflexão máxima e central na placa de referência.

	$U_{z(max)}$ = $U_{z(central)}$ (*mm*)	Dif. Rel. (%)
Presente Estudo – SHELL281	0,698	-
Troina *et al*. (2020) – SHELL93	0,664	5,12
Troina *et al*. (2020) – SOLID95	0,663	5,28
Pinto *et al*. (2021) – SHELL281	0,697	0,14
Nogueira *et al*. (2021) – SHELL281	0,697	0,14
Kucharski *et al*. (2022) – SHELL281	0,697	0,14

Através da Tabela 5.3 é possível observar que a diferença entre o resultado do presente estudo com o de trabalhos anteriores é de no máximo 5,28%, sendo justificada devido ao elemento finito utilizado no caso de Troina *et al*. (2020) e da malha empregada nos demais estudos.

Os próximos subitens apresentam as análises dos resultados para os casos de placas com enrijecedores do tipo viga-caixão trapezoidal na direção longitudinal e na direção transversal à placa, empregando a malha M5 (10 mm) definida no teste de convergência (ver Figura 5.8).

5.3.1. Enrijecedores Longitudinais

Aplicando as características estruturais definidas na seção 4.3 e considerando apenas enrijecedores longitudinais, foi possível inserir até cinco enrijecedores na placa mantendo o volume total de material da estrutura constante (ver Figura 4.4). A limitação imposta pela adoção do ângulo de 120° não permite que mais enrijecedores sejam adicionados, mesmo com a variação de altura e espessura, sem que haja uma variação do volume total de material da estrutura.

As Figuras 5.10 a 5.14 apresentam gráficos com os resultados das deflexões máxima e central de acordo a variação de altura e espessura do enrijecedor, para os casos de um a cinco enrijecedores longitudinais (ver Figura 4.4), respectivamente.

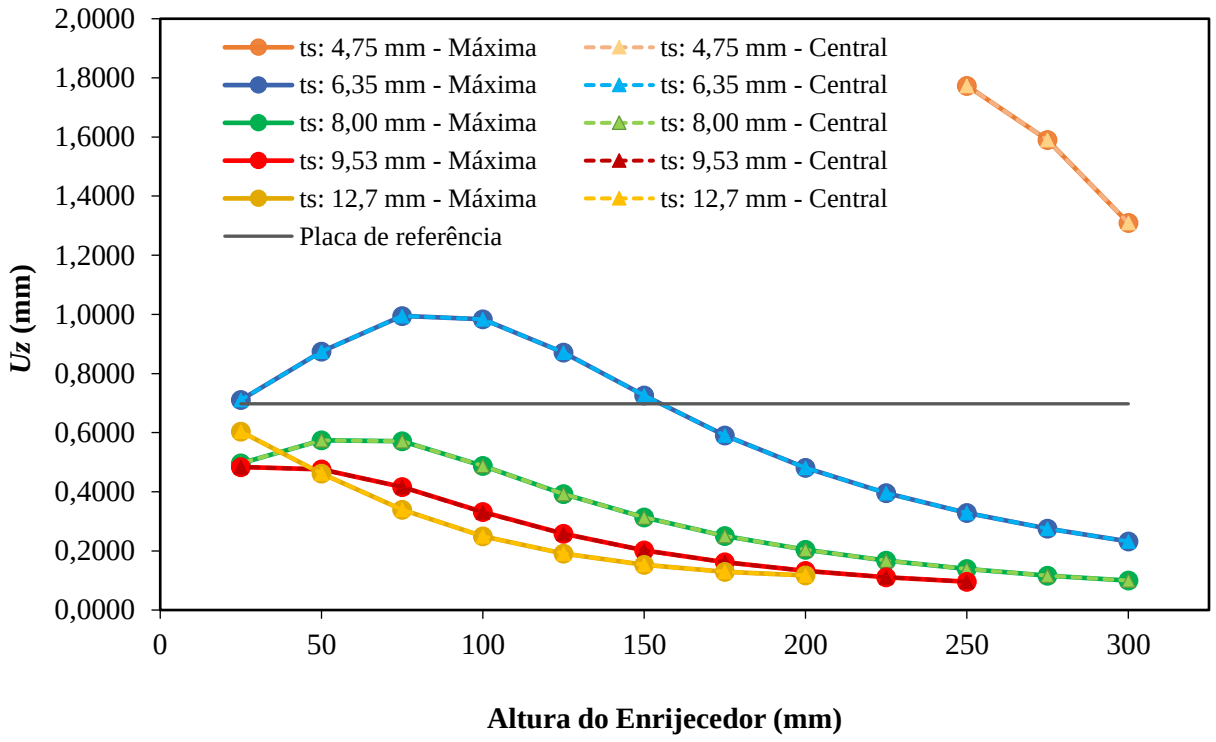

Figura 5.10: Deflexão máxima e central para a placa com um enrijecedor longitudinal.

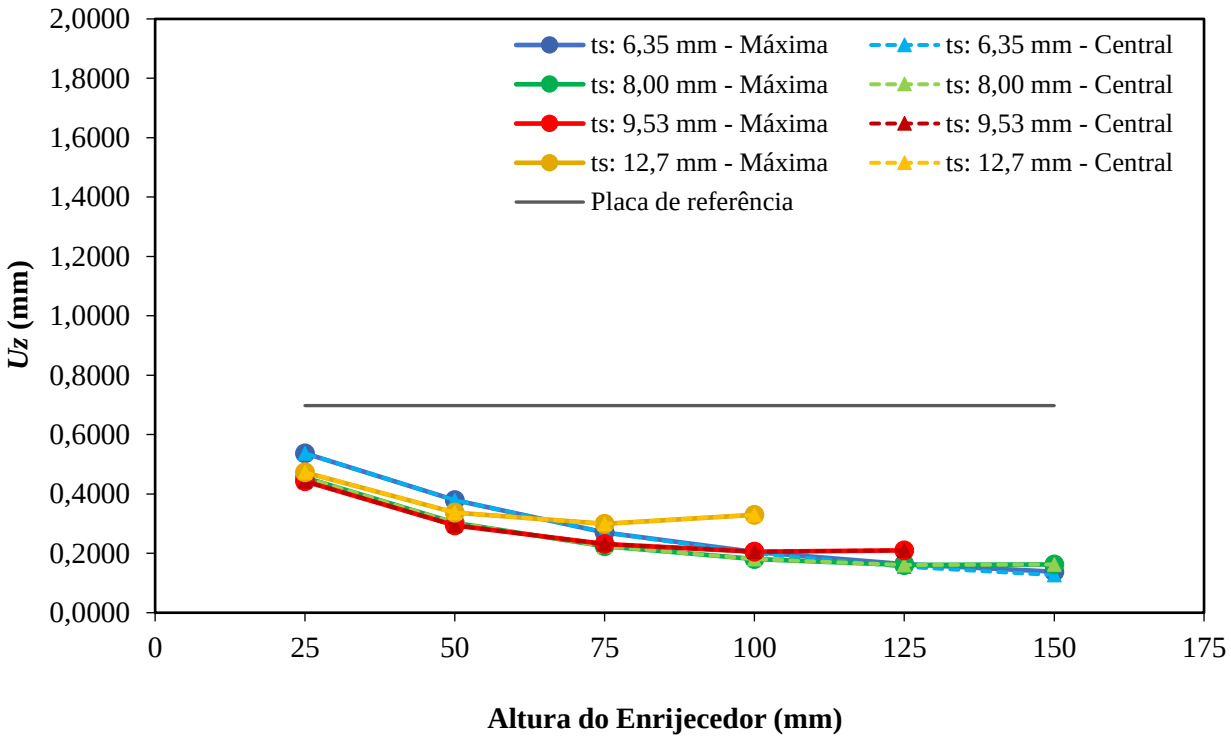

Figura 5.11: Deflexão máxima e central para a placa com dois enrijecedores longitudinais.

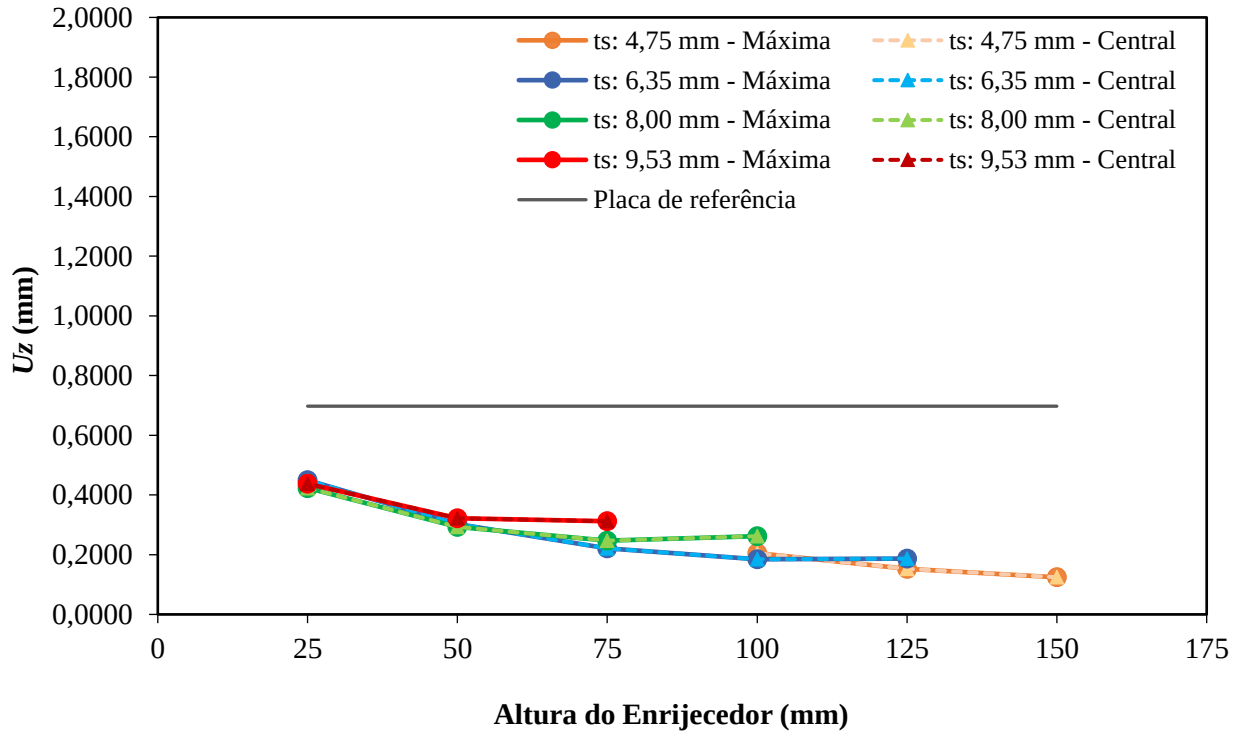

Figura 5.12: Deflexão máxima e central para a placa com três enrijecedores longitudinais.

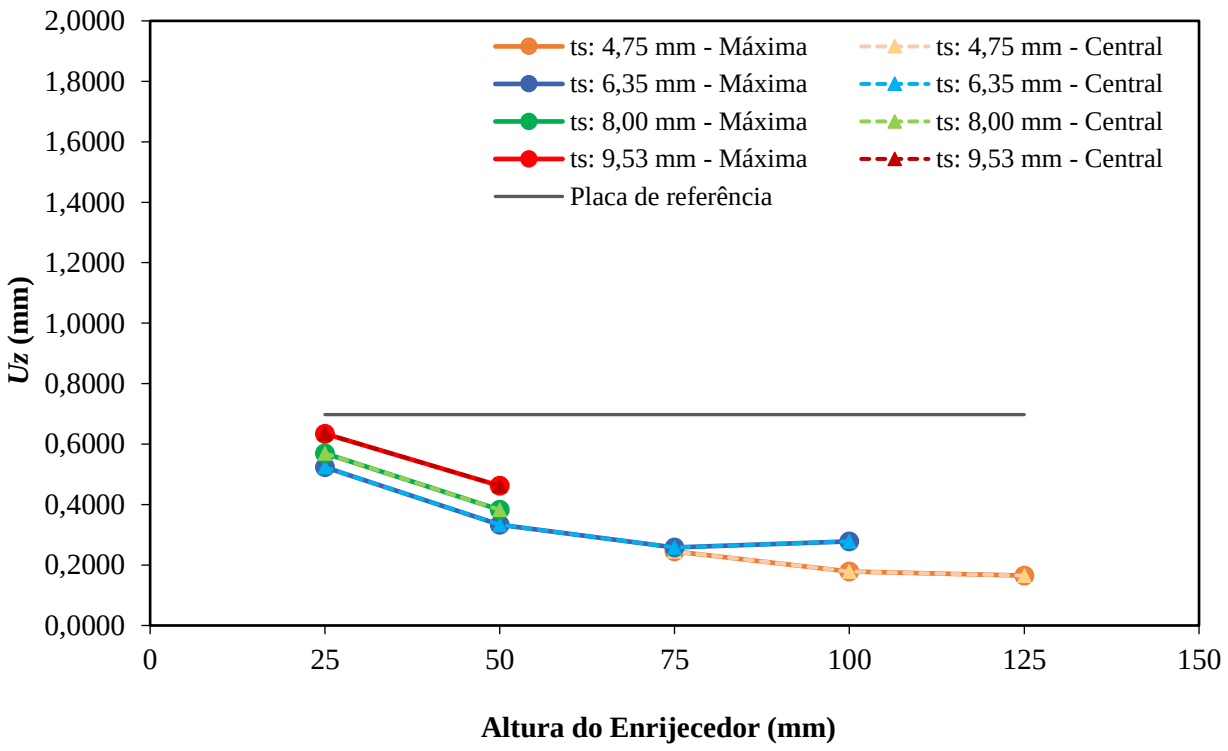

Figura 5.13: Deflexão máxima e central para a placa com quatro enrijecedores longitudinais.

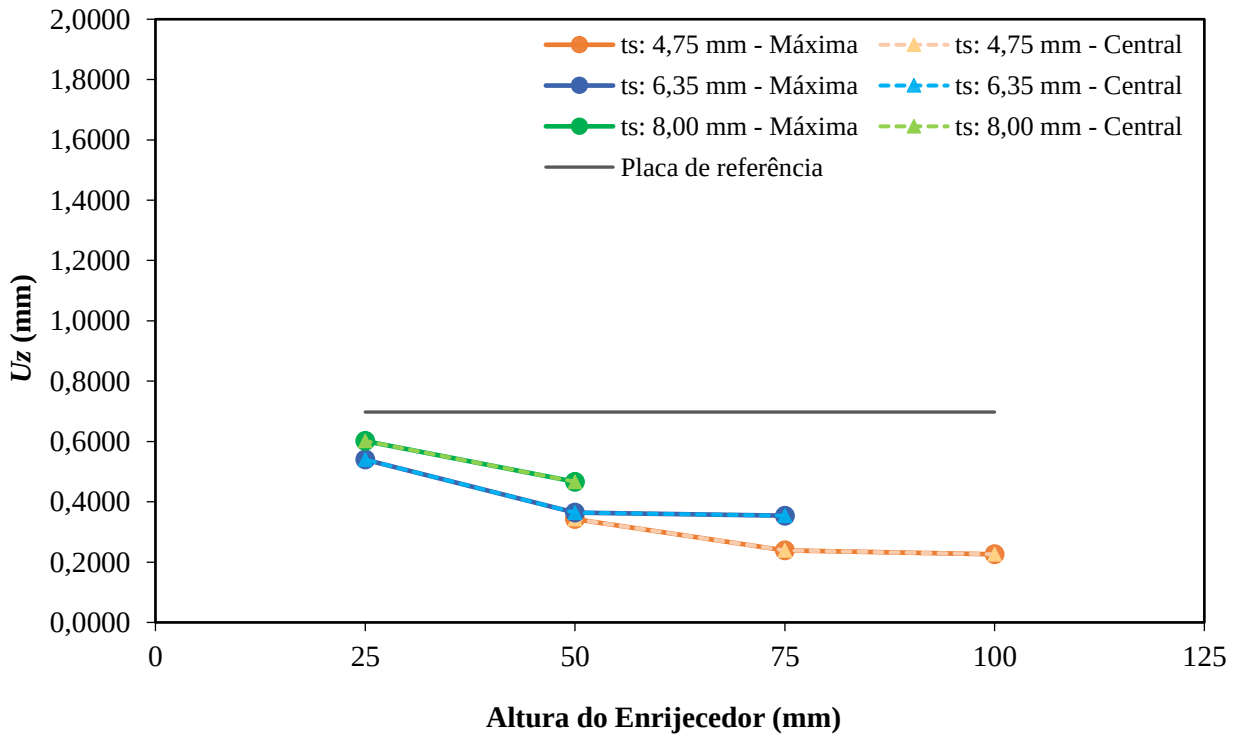

Figura 5.14: Deflexão máxima e central para a placa com cinco enrijecedores longitudinais.

Avaliando de modo geral as Figuras 5.10 – 5.14, as deflexões máxima e central para cada caso analisado coincidem em todos os cinco arranjos propostos com enrijecedores do tipo viga-caixão trapezoidal na direção longitudinal da placa, apresentando praticamente nenhuma variação entre si. Nota-se também que quanto maior a altura do enrijecedor, menores são os deslocamentos resultantes, exceto no caso com um enrijecedor quando são adotadas as espessuras de 6,35 mm e 8,00 mm, onde primeiro ocorre um aumento das deflexões para depois diminuir conforme a altura aumenta, isso acontece porque a relação entre a altura e a largura do enrijecedor ficam desproporcionais à estrutura como um todo, não favorecendo para uma boa distribuição dos deslocamentos.

Quando são inseridos um ou dois enrijecedores na placa, as menores deflexões ocorrem nas maiores espessuras. Já de três a cinco enrijecedores, as menores deflexões acontecem nas menores espessuras. À medida que a quantidade de enrijecedores aumenta, as alturas e espessuras ficam limitadas porque a porção de volume de material da placa transformado em enrijecedor não consegue ser distribuída em sua totalidade conforme as dimensões do enrijecedor vai se alterando em cada geometria proposta.

A Tabela 5.4 apresenta os melhores e os piores resultados de acordo com a quantidade de enrijecedores na direção longitudinal da placa, bem como a diferença relativa (Equação 3.33) dos resultados de deflexão máxima e central da placa de referência em relação a esses casos analisados:

Tabela 5.4: Melhores e piores resultados de deflexões máxima e central de acordo com a quantidade de enrijecedores na direção longitudinal à placa.

Número de Enrijecedores	h_s (*mm*)	t_s (*mm*)	$U_{z(máx)}$ (*mm*)	$U_{z(central)}$ (*mm*)	Dif. Rel. $U_{z(máx)}$ (%)	Dif. Rel. $U_{z(central)}$ (%)
1	250	9,53	0,0958	0,0958	-86,26	-86,26
	250	4,75	1,7735	1,7735	154,23	154,23
2	150	6,35	0,1381	0,1266	-80,20	-81,84
	25	6,35	0,5371	0,5371	-23,01	-23,01
3	150	4,75	0,1244	0,1244	-82,17	-82,17
	25	6,35	0,4497	0,4497	-35,53	-35,53
4	125	4,75	0,1650	0,1650	-76,34	-76,34
	25	9,53	0,6344	0,6345	-9,06	-9,04
5	100	4,75	0,2259	0,2259	-67,61	-67,61
	25	8,00	0,6014	0,6014	-13,79	-13,79

De acordo com a Tabela 5.4, as piores deflexões ocorrem na menor altura de enrijecedor (25 mm) quando a placa tem de dois a cinco enrijecedores, já a espessura que apresenta esses resultados varia, sendo as menores espessuras quando inseridos um a três enrijecedores, enquanto de quatro a cinco enrijecedores os maiores deslocamentos ocorrem quando o enrijecedor tem a maior espessura Na placa com apenas um enrijecedor (ver Figura 5.10), o pior deslocamento acontece ao adotar uma altura de 250 mm e espessura de 4,75 mm que, para esta proposta de arranjo geométrico é a menor

altura possível de se aplicar nessa espessura, inclusive, esse valor é em média 2,5 vezes maior que o resultado obtido na placa de referência, tornando a aplicação dessa espessura inviável porque o objetivo é justamente minimizar as deflexões máxima e central com o auxílio dos enrijecedores, aumentando assim a rigidez da estrutura.

Com apenas um enrijecedor na placa (ver Figura 5.10), foi possível realizar 45 análises com arranjos geométricos diferentes, tendo como 300 mm a altura máxima e utilizando-se cinco espessuras de enrijecedor. A partir disso, a única espessura que não apresentou resultados satisfatórios foi a de 4,75 mm, as três alturas que permitiam o emprego dessa espessura, atingiram valores de deflexões acima de 1,3 mm, ultrapassando os resultados alcançados na placa de referência inviabilizando a sua utilização, como mostra a Figura 5.15, isso é justificado pelo fato de o enrijecedor ocupar praticamente toda a largura de 1000 mm da placa. Com a espessura de 6,35 mm as alturas menores que 150 mm também geraram deslocamentos que ultrapassam U_z = 0,69758 mm da placa de referência. Já nas demais espessuras, independente da altura adotada, todos os resultados são menores que as deflexões máxima e central da placa de referência. De acordo com a Tabela 5.2, a menor deflexão máxima e central é de 0,0958 mm e acontece quando inserido um enrijecedor de 250 mm de altura e espessura de 9,53 mm, que é a maior altura possível para esta espessura, uma redução de 86,26% nas deflexões máxima e central.

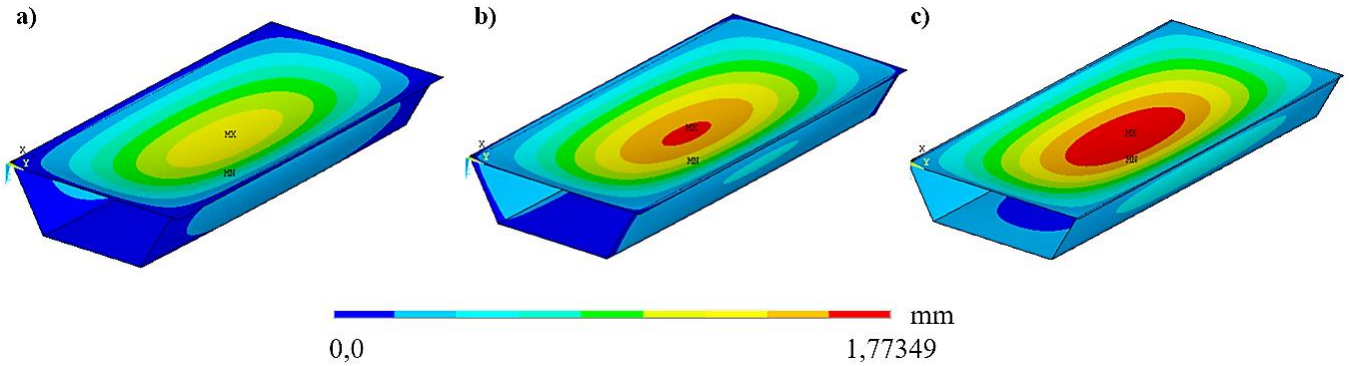

Figura 5.15: Configuração geométrica e distribuição dos deslocamentos na placa com um enrijecedor longitudinal para a espessura de 4,75 mm, sendo (a) h_s = 300 mm; (b) h_s = 275 mm e (c) h_s = 250 mm.

Com dois enrijecedores longitudinais (ver Figura 5.11), foram analisados 21 arranjos geométricos, considerando quatro espessuras de enrijecedores com uma altura máxima de 150 mm. Nesta proposta, o maior e o menor resultados de deflexão máxima e central ocorrem com a espessura de 6,35 mm, sendo o menor deslocamento com a altura de 150 mm e o maior deslocamento na altura de 25 mm. O melhor resultado apresentou uma redução de 80,20% e 81,74% para a deflexão máxima

e central, com deslocamentos de 0,1381 mm e 0,1266 mm, respectivamente. O pior resultado é de 0,5371 mm, tanto para a deflexão máxima como para a central. Ainda na espessura de 6,35 mm, as deflexões máxima e central coincidem entre si até a altura de 75 mm e, acima disso, sofrem uma pequena variação que ocorre devido à posição que o enrijecedor ocupa, tendendo a ficar cada vez mais próximo das bordas da placa na medida que a altura dos enrijecedores diminuem, como exemplo apresentado na Figura 5.15 com apenas um enrijecedor. Nas espessuras 12,70 mm, 9,53 mm e 8,00 mm acontece um pequeno acréscimo no resultado da deflexão nas maiores alturas, cujas estruturas apresentam erijecedores com bases muito pequenas que não ultrapassam 29 mm, conforme informações geométricas da Tabela B.2. Com a espessura de 12,70 mm os enrijecedores não chegam a ocupar 50% da largura da placa, independente da altura, como mostra a Figura 5.16.

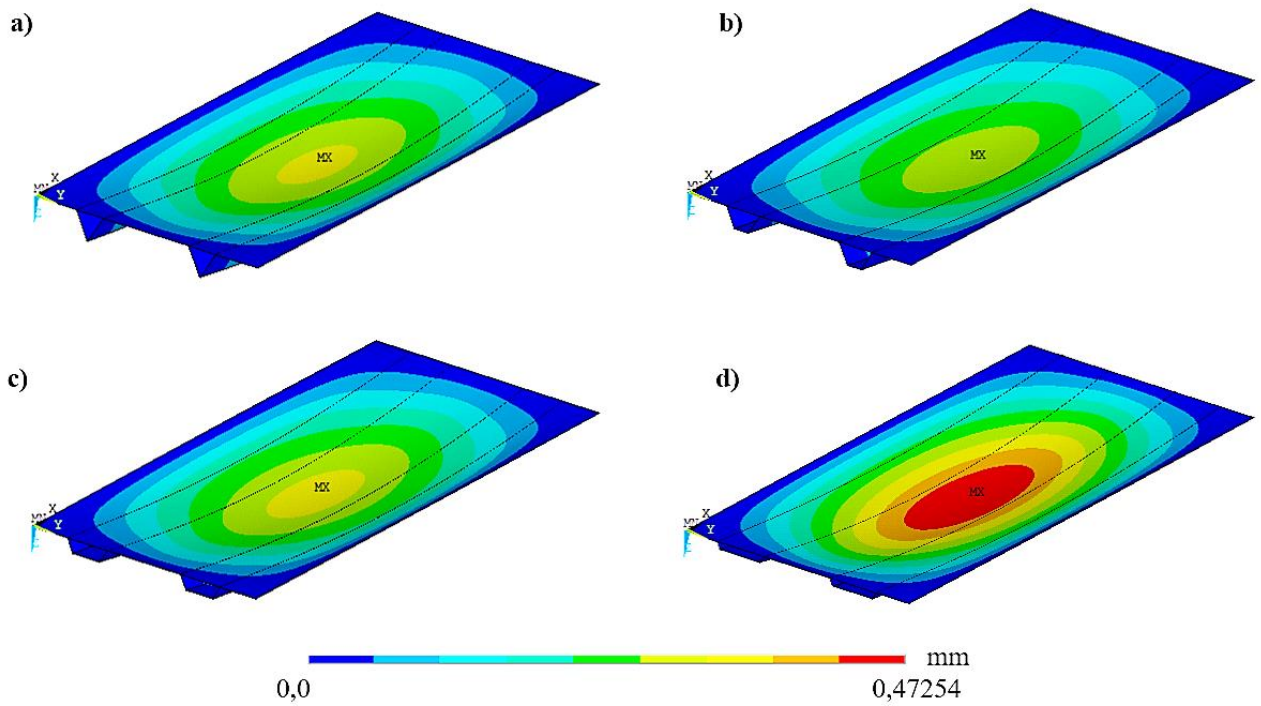

Figura 5.16: Distribuição dos deslocamentos na placa com dois enrijecedores longitudinais para a espessura de 4,75 mm, sendo (a) h_s = 100 mm; (b) h_s = 75 mm; (c) h_s = 50 mm e (d) h_s = 25 mm.

Em todas as 15 análises realizadas na placa com três enrijecedores (ver Figura 5.12), a distribuição dos deslocamentos resultantes é similar ao da placa de referência. Neste arranjo geométrico, já não é possível adotar a espessura de 12,70 mm, as opções de alturas também ficam limitadas de acordo com cada espessura analisada, tendo ainda como máxima a altura de 150 mm alcançada apenas com a espessura de 4,75 mm, sendo inclusive a proposta geométrica que resulta na menor deflexão máxima e central de U_z = 0,1244 mm, 82,17% menor em relação à placa de referência.

Analisando a placa com quatro enrijecedores (ver Figura 5.13), 11 arranjos geométricos foram estudados considerando a menor espessura de 4,75 mm e a maior 9,53 mm. A altura máxima do enrijecedor chegou a 125 mm na menor espessura, resultando no melhor valor de deflexão máxima e central que é de 0,1650 mm, aproximadamente 4,23 vezes menor que o resultado da placa de referência. Já os piores deslocamentos ocorrem na menor altura (25 mm) da maior espessura adotada (9,53 mm), com valores de 0,6344 mm e 0,6345 mm para a deflexão máxima e central, respectivamente, representando uma melhoria de cerca de 9%.

Por fim, com cinco enrijecedores do tipo viga-caixão trapezoidal na direção longitudinal (ver Figura 5.14), como se tem uma quantidade maior de enrijecedores, a porção de volume da placa transformada em enrijecedores só possibilitou a realização de oito análises com três espessuras de enrijecedores e altura máxima de 100 mm. Os melhores resultados são obtidos com a espessura de 4,75 mm e os piores com a espessura de 8,00 mm. Comparado à placa de referência, o menor resultado apresenta uma redução de 67,61% no deslocamento máximo, sendo a deflexão máxima e central de 0,2259 mm. O pior resultado ocorre quando é considerada a menor altura e a menor espessura de enrijecedor, que correspondem a 25 mm e 4,75 mm, respectivamente, cujos resultados foram 0,6014 mm para a deflexão máxima e central, cerca de 13,79% menor que os valores obtidos na placa de referência.

A Figura 5.17 mostra os melhores resultados para a deflexão máxima (ver Tabela 5.4) e a respectiva distribuição de deslocamentos resultantes para cada um dos cinco casos com enrijecedores do tipo viga-caixão trapezoidal na direção longitudinal da placa. É possível observar que apenas no caso com dois enrijecedores as deflexões máxima e central não são as mesmas, isso ocorre porque a geometria da estrutura, como um todo, favorece para uma melhor distribuição dos deslocamentos, enquanto nos demais casos, esses deslocamentos resultantes se concentram na região central da placa. Nota-se também que os menores resultados são gerados quando a placa contém um e três enrijecedores que, por consequência da geometria, sempre há um enrijecedor que passa pela região central da placa auxiliando na redução dos deslocamentos nesse ponto. No entanto, o pior caso entre os apresentados na Figura 5.17 é o que possui cinco enrijecedores, que também apresenta um enrijecedor central. Porém, a combinação entre altura (100 mm) e espessura (4,75 mm) dos enrijecedores conduziu a esse pior comportamento mecânico entre os cinco melhores casos com enrijecedores longitudinais.

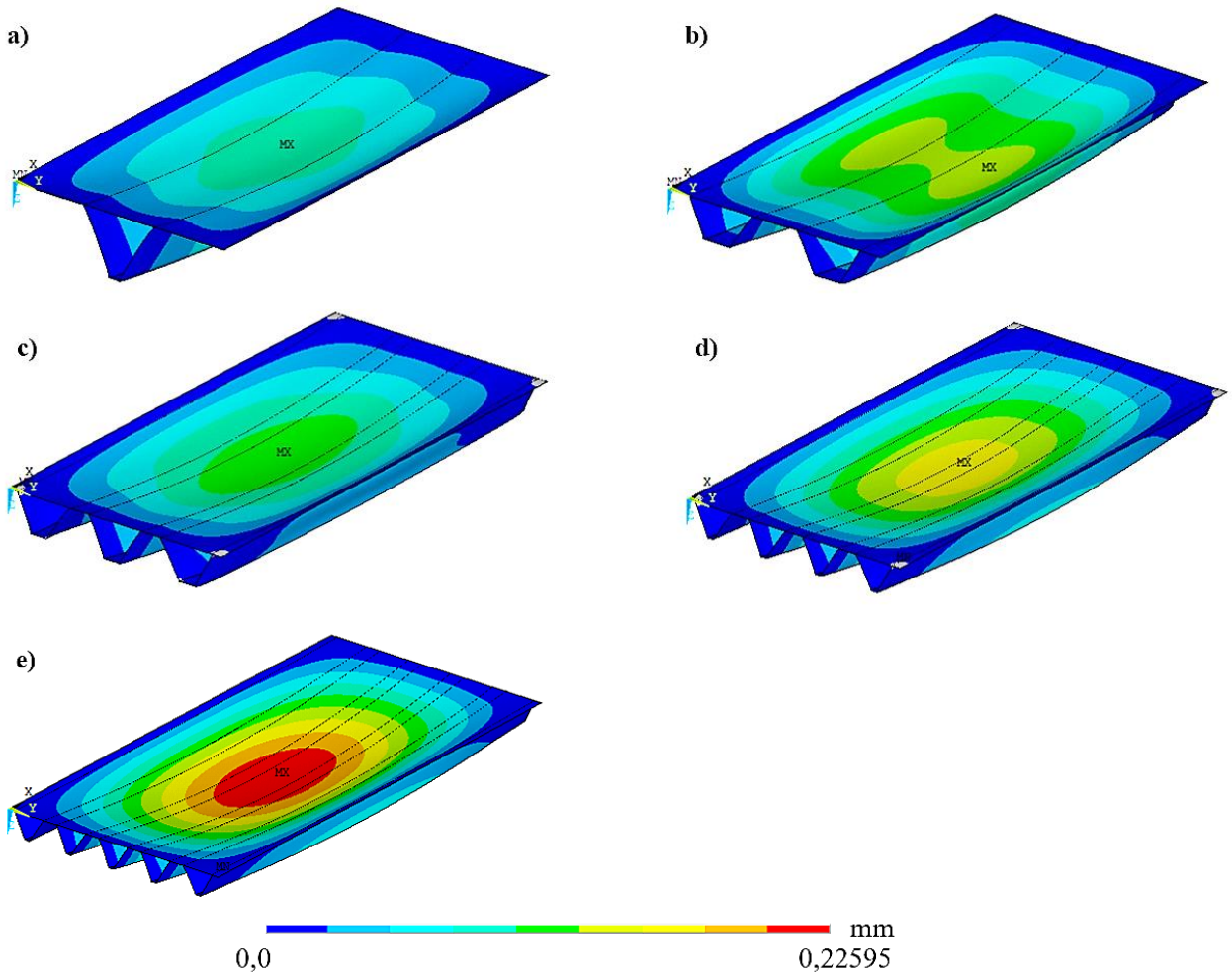

Figura 5.17: Distribuição das deflexões com os melhores resultados de deflexão máxima para as cinco configurações geométricas de enrijecedores na direção longitudinal.

5.3.2. Enrijecedores Transversais

Com 30% do volume de material da placa de referência transformados em enrijecedores através da fração volumétrica ϕ =0,3, foi possível inserir até nove enrijecedores transversais na placa mantendo o volume total da estrutura constante (ver Figura 4.5).

As Figuras 5.18 a 5.26 apresentam os resultados das deflexões máxima e central de acordo a variação de altura e espessura do enrijecedor, para os casos de um a nove enrijecedores na direção transversal da placa, respectivamente.

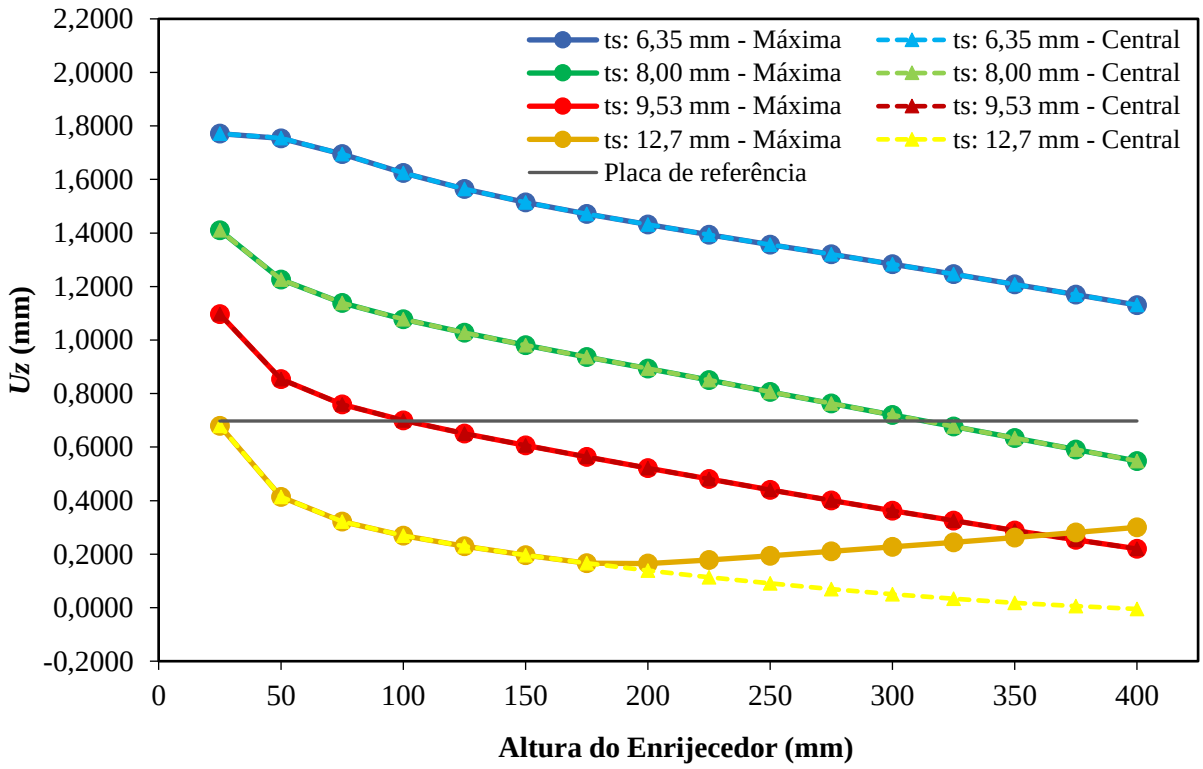

Figura 5.18: Deflexão máxima e central para a placa com um enrijecedor transversal.

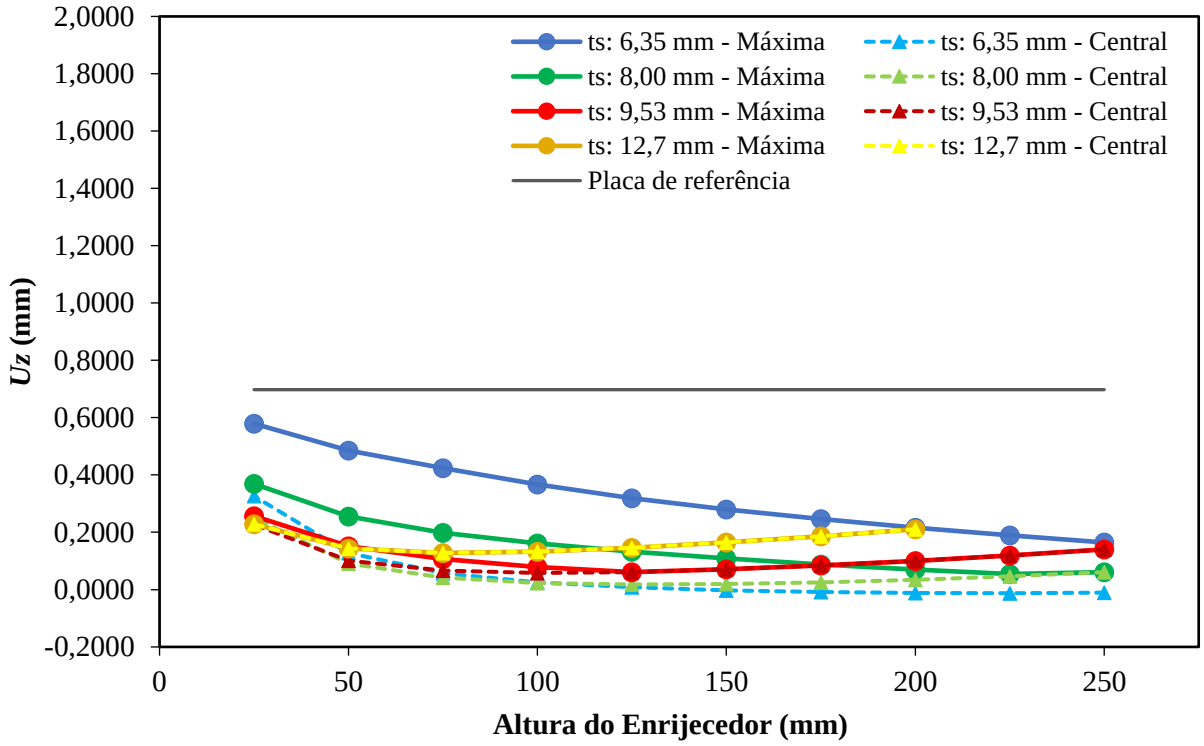

Figura 5.19: Deflexão máxima e central para a placa com dois enrijecedores transversais.

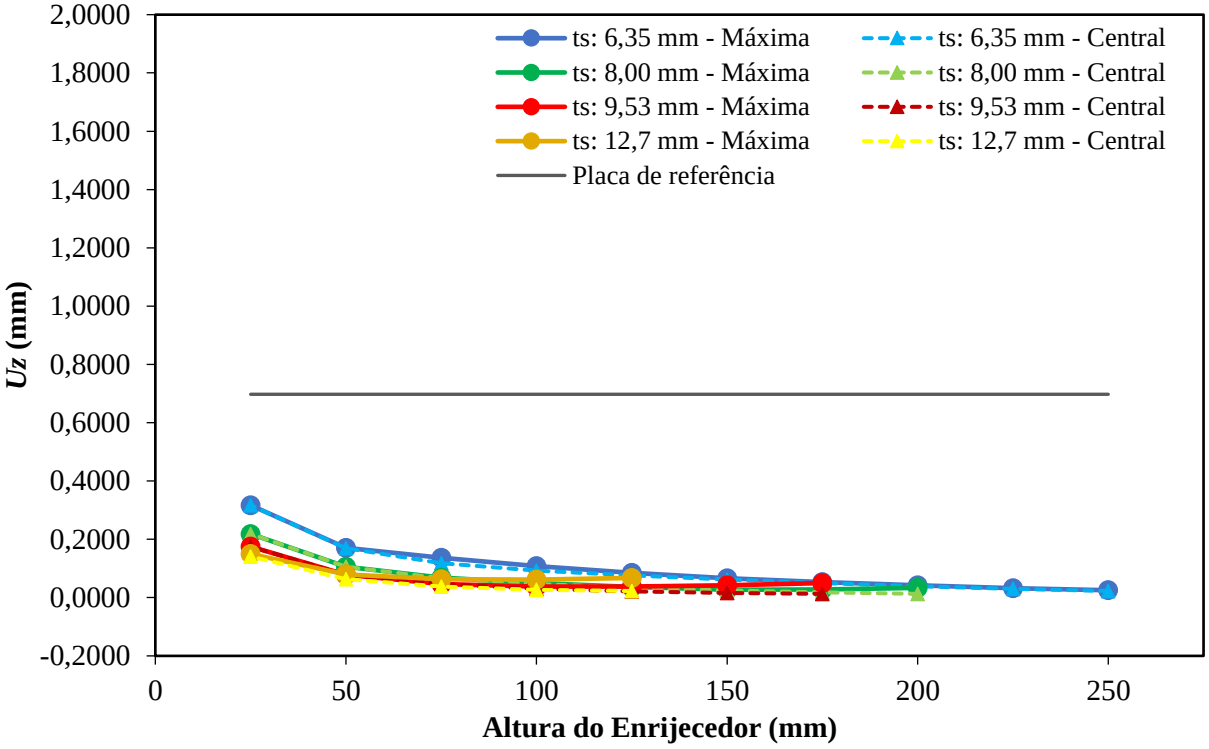

Figura 5.20: Deflexão máxima e central para a placa com três enrijecedores transversais.

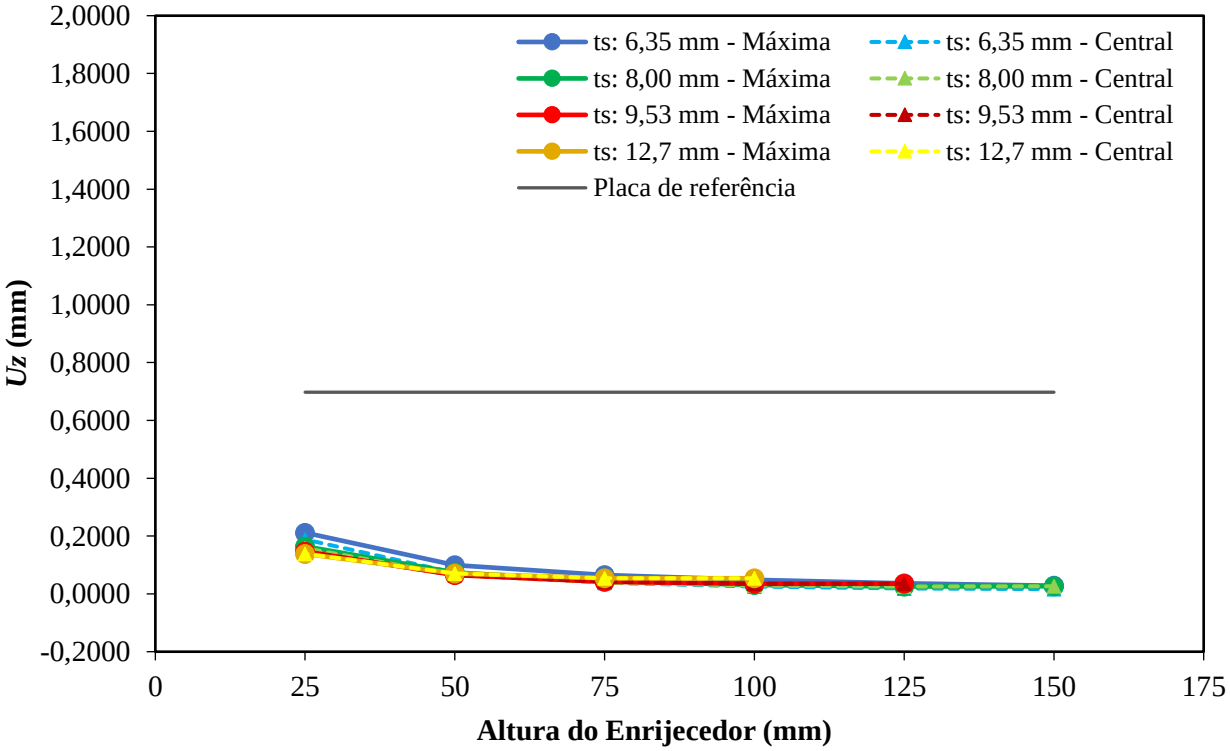

Figura 5.21: Deflexão máxima e central para a placa com quatro enrijecedores transversais.

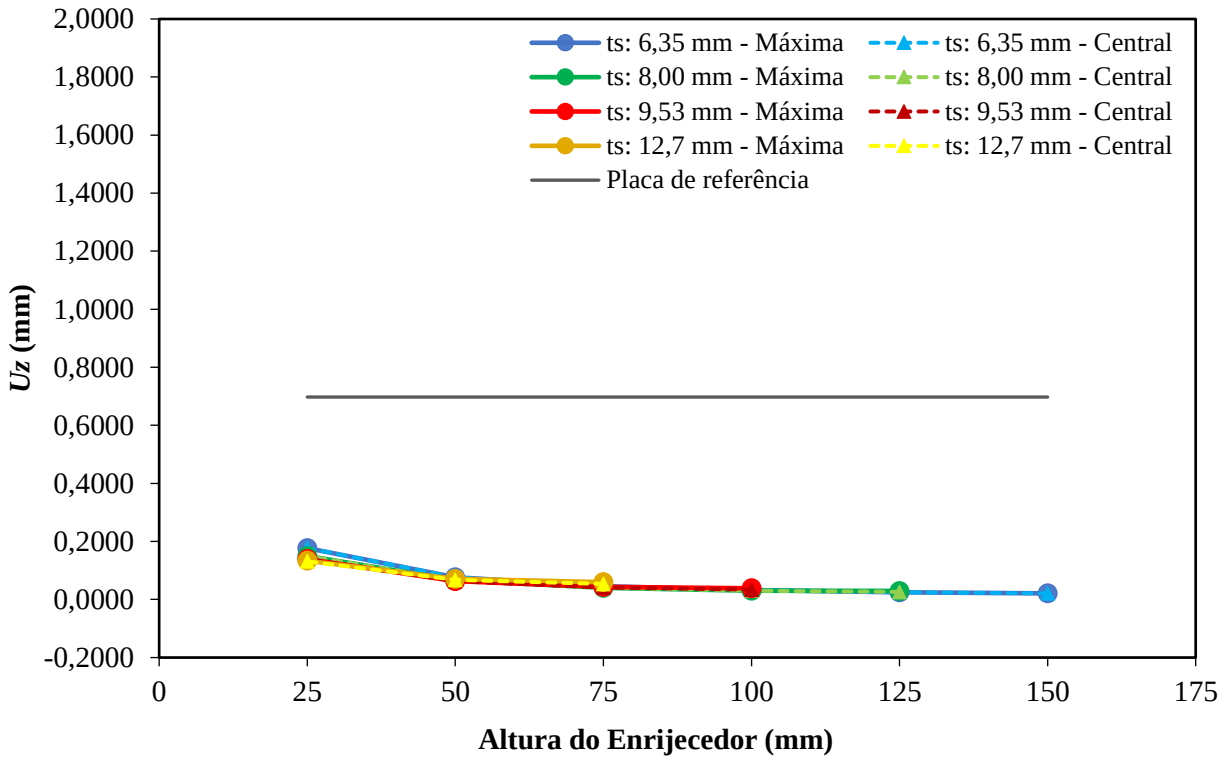

Figura 5.22: Deflexão máxima e central para a placa com cinco enrijecedores transversais.

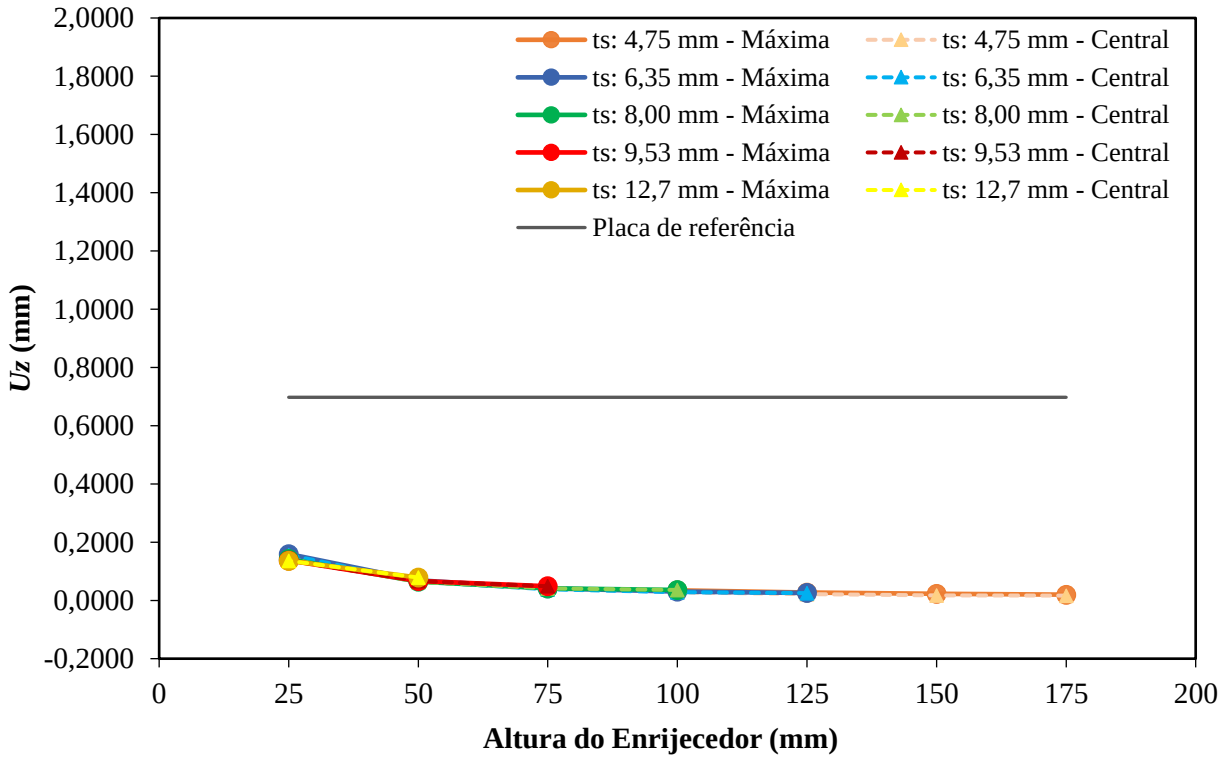

Figura 5.23: Deflexão máxima e central para a placa com seis enrijecedores transversais.

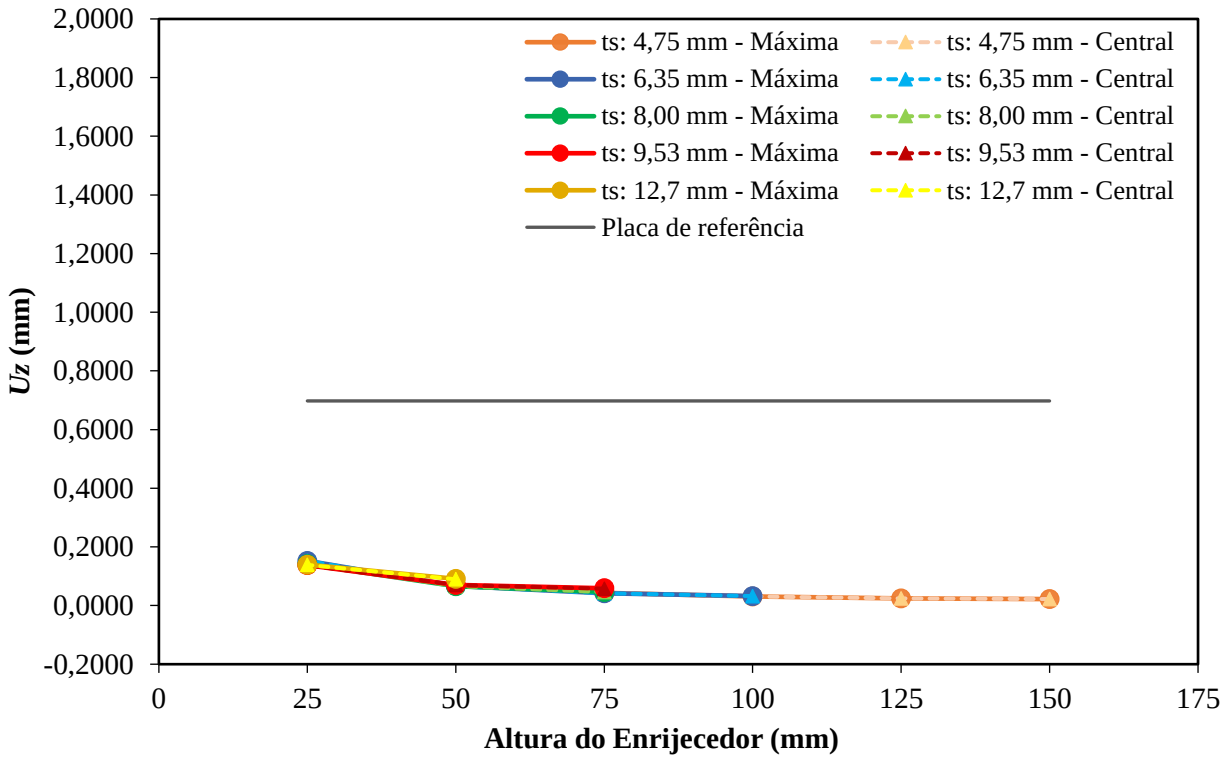

Figura 5.24: Deflexão máxima e central para a placa com sete enrijecedores transversais.

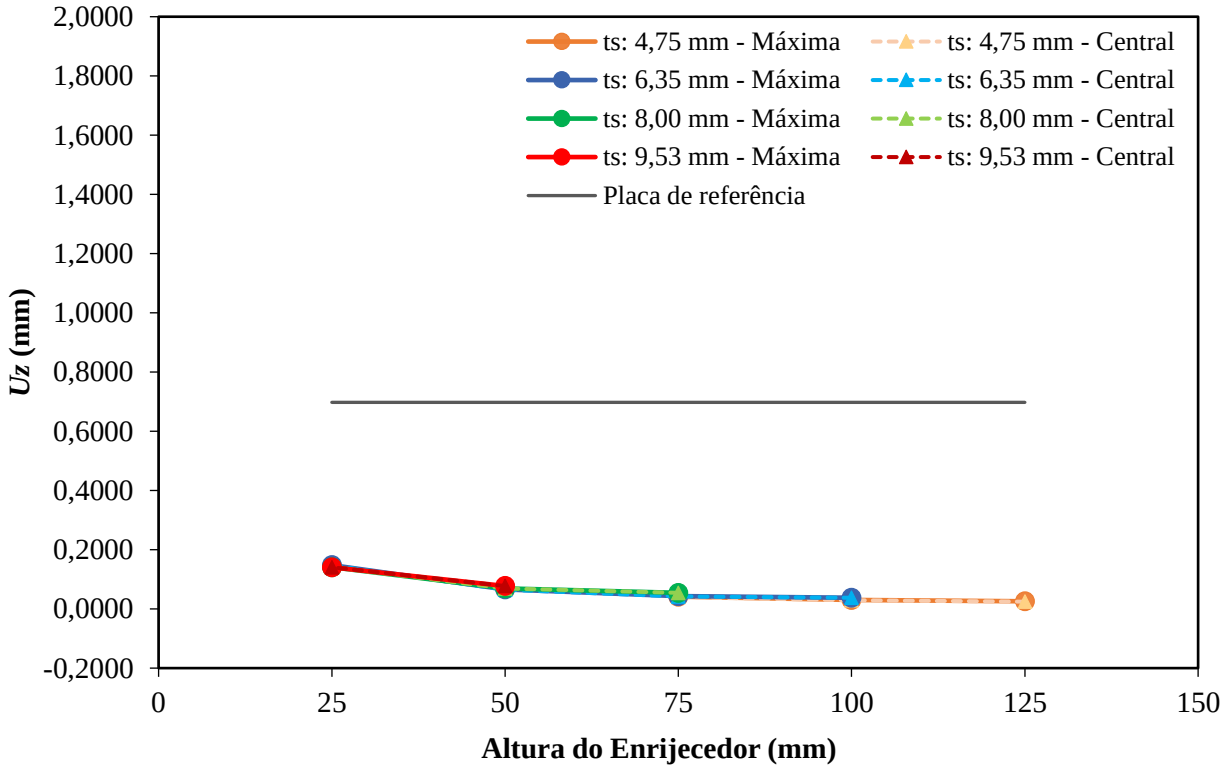

Figura 5.25: Deflexão máxima e central para a placa com oito enrijecedores transversais.

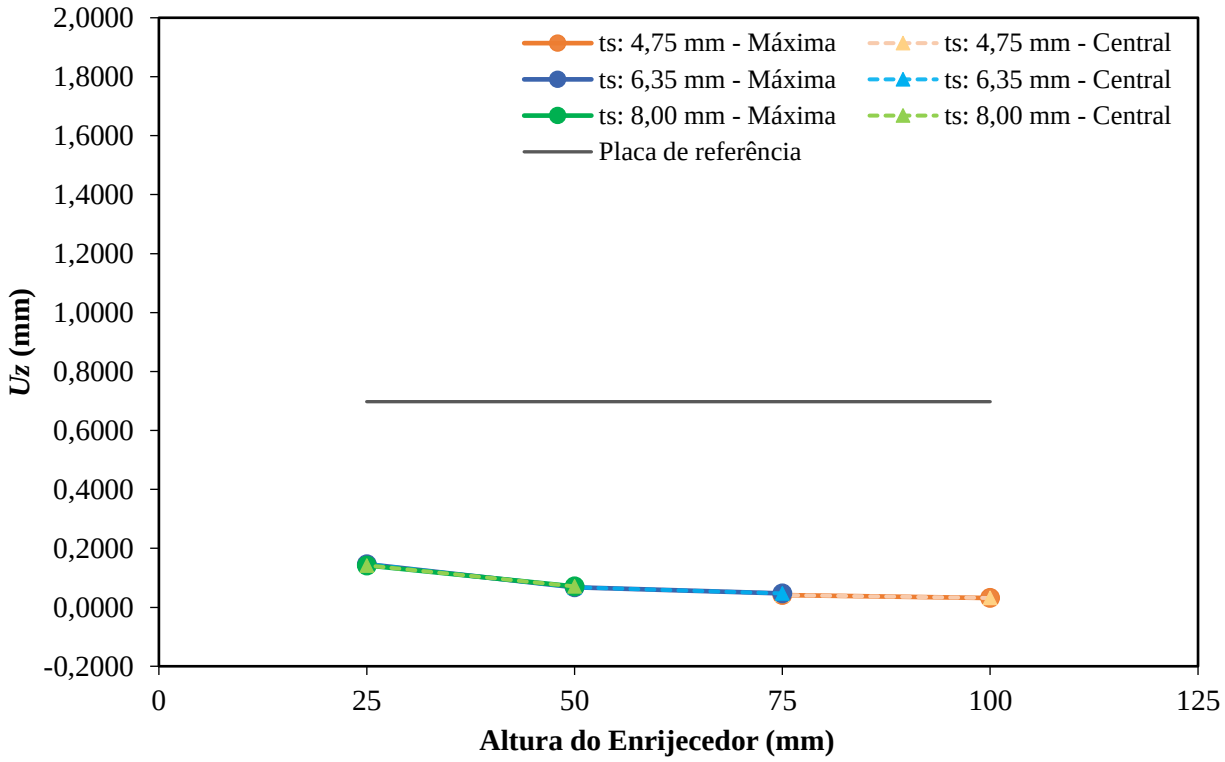

Figura 5.26: Deflexão máxima e central para a placa com nove enrijecedores transversais.

No geral, de acordo com as Figuras 5.18 – 5.26, as deflexões máxima e central também não apresentam praticamente nenhuma variação entre si em todos os nove casos analisados, e quando há diferença entre os valores de deflexão máxima e central, eles ocorrem em apenas algumas espessuras de enrijecedor, como é o caso da placa com um enrijecedor com espessura de 12,70 mm e alturas maiores que 200 mm, e da placa com dois enrijecedores nas espessuras de 6,35 mm e 8,00 mm. Assim como na proposta de enrijecedores longitudinais, aqui também há uma diminuição dos deslocamentos resultantes conforme a altura dos enrijecedores aumenta.

A Tabela 5.5 apresenta os melhores e os piores resultados de acordo com a quantidade de enrijecedores na direção transversal da placa, bem como a diferença relativa em porcentagem dos valores de deflexão máxima e central da placa de referência em relação a esses casos analisados, lembrando que a deflexão máxima e central da placa de referência equivale a U_z = 0,69758 mm.

Tabela 5.5: Melhores e piores resultados de deflexões máxima e central de acordo com a quantidade de enrijecedores na direção transversal à placa.

Número de Enrijecedores	h_s (*mm*)	t_s (*mm*)	$U_{z(máx)}$ (*mm*)	$U_{z(central)}$ (*mm*)	Dif. Rel. $U_{z(máx)}$ (%)	Dif. Rel. $U_{z(central)}$ (%)
1	200	12,7	0,1647	0,1392	-76,39	-80,04
	25	6,35	1,7712	1,7712	153,90	153,90
2	225	8,00	0,0545	0,0466	-92,19	-93,32
	25	6,35	0,5790	0,3262	-17,00	-53,24
3	250	6,35	0,0252	0,0227	-96,38	-96,74
	25	6,35	0,3169	0,3169	-54,56	-54,56
4	125	8,00	0,0253	0,0253	-96,38	-96,38
	25	6,35	0,2115	0,1882	-69,68	-73,03
5	150	6,35	0,0211	0,0211	-96,97	-96,97
	25	6,35	0,1771	0,1771	-74,61	-74,61
6	175	4,75	0,0199	0,0166	-97,15	-97,62
	25	6,35	0,1594	0,1562	-77,15	-77,61
7	150	4,75	0,0220	0,0220	-96,84	-96,84
	25	6,35	0,1525	0,1525	-78,14	-78,14
8	125	4,75	0,0257	0,0245	-96,31	-96,49
	25	6,35	0,1478	0,1473	-78,82	-78,88
9	100	4,75	0,0315	0,0315	-95,48	-95,48
	25	6,35	0,1466	0,1466	-78,98	-78,98

Nas configurações geométricas com três e de cinco a nove enrijecedores, os menores deslocamentos ocorrem nas maiores alturas das menores espessuras adotadas. Com apenas um enrijecedor, o deslocamento máximo ocorre na altura intermediária para a maior espessura. Já com dois e quatro enrijecedores transversais, os deslocamentos máximos ocorrem na segunda maior altura para a espessura de 8 mm, conforme apresentado na Tabela 5.5. Aqui, segue a mesma característica da aplicação dos enrijecedores longitudinais, com uma tendência de menores deflexões quanto maior for a altura do enrijecedor, exceto em alguns casos devido à geometria dos enrijecedores.

De acordo com a Figura 5.18, com apenas um enrijecedor as maiores deflexões ocorrem na menor espessura de enrijecedor, e as menores deflexões na maior espessura. Foram um total de 66 geometrias avaliadas considerando quatro espessuras comerciais para os enrijecedores com altura máxima de 400 mm. O melhor resultado acontece quando o enrijecedor tem uma altura de 200 mm e espessura de 12,70 mm com 0,1647 mm de deflexão máxima e 0,1392 mm de deflexão central, que representa uma melhoria de 76,39% e de 80,04% em relação à placa de referência. Diferente de outros arranjos, na espessura de 12,70 mm, apenas a deflexão central da placa segue o padrão de quanto maior a altura do enrijecedor menor a deflexão, chegando até a gerar uma deflexão central negativa na altura máxima (400 mm), enquanto os resultados da deflexão máxima primeiro decrescem até a altura intermediária adotada e, em seguida, aumentam à medida que a altura do enrijecedor diminui. Isso ocorre porque além do enrijecedor estar localizado bem na região central da placa, o formato

geométrico dele nas maiores alturas resulta numa maior rigidez nesta região da estrutura, fazendo com que os maiores deslocamentos fiquem distribuídos nas duas laterais da placa, como mostra a Figura 5.27. O pior caso avaliado com um enrijecedor transversal (que ocorre com o enrijecedor de 6,35 mm de espessura e 25 mm de altura), tem como resultados 1,7712 mm de deflexão máxima e central, um aumento de 2,54 vezes em relação à deflexão máxima e central da placa de referência.

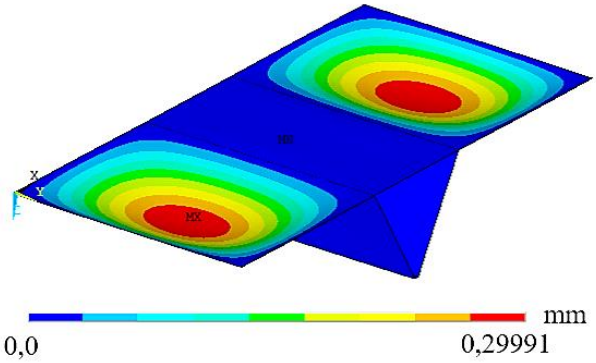

Figura 5.27: Distribuição dos deslocamentos na placa com um enrijecedor transversal considerando h_s = 400 mm e t_s = 12,70 mm.

Para a placa com dois enrijecedores transversais (ver Figura 5.19), as deflexões máxima e central coincidem apenas quando utilizado enrijecedores com 12,70 mm de espessura e em alturas maiores que 100 mm para a espessura de 9,53 mm. Diferente dos outros casos apresentados em que as deflexões diminuem conforme a altura aumenta, nessas espessuras, as deflexões diminuem até uma altura intermediária (75 mm para a espessura de 12,70 mm) e depois aumentam, porque a geometria dos enrijecedores e sua localização influenciam na distribuição dos deslocamentos ao longo da estrutura, como pode ser observado na Figura 5.28. Nas demais espessuras (de 6,35 mm e 8,00 mm), apesar de não coincidirem as deflexões máxima e central, seus valores decrescem com o aumento da altura, sendo a deflexão central sempre menor que a máxima, inclusive com a espessura de 6,35 mm a deflexão central acima da altura de 150 mm tem valores negativos, porque a região central da placa possui uma rigidez maior, assim como no caso da Figura 5.20 para a placa com um enrijecedor transversal. A altura máxima adotada para os enrijecedores neste caso foi de 250 mm, sendo possível realizar 38 análises geométricas. A menor deflexão máxima ocorre na altura de 225 mm quando utilizado um enrijecedor de 8,00 mm de espessura. As deflexões máxima e central foram de 0,0545 mm e 0,0466 mm, respectivamente. Esses resultados apresentam uma redução de 92,19% e 93,32% em relação às deflexões máxima e central da placa de referência. O pior resultado ocorre na altura de 25 mm e espessura de 6,35 mm, com valores de 0,5790 mm e 0,3262 mm de deflexão máxima e central, com uma redução de 17,00% e 53,24%, respectivamente.

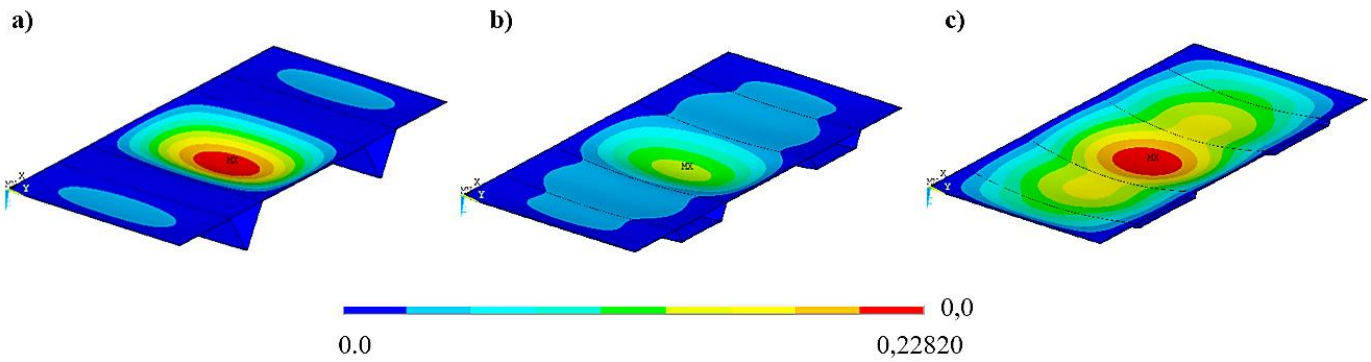

Figura 5.28: Distribuição dos deslocamentos na placa com dois enrijecedores transversais para a espessura de 12,70 mm, sendo (a) h_s = 200 mm; (b) h_s = 75 mm e (b) h_s = 25 mm.

Quando são inseridos três enrijecedores na direção transversal da placa (ver Figura 5.20), as deflexões máxima e central para as espessuras de 6,35 mm e 8,00 mm vão diminuindo conforme aumenta a altura do enrijecedor, só que em alguns pontos há uma pequena variação entre os valores da deflexão máxima e central. Com a espessura de 9,53 mm as deflexões também diminuem com o aumento da altura do enrijecedor, mas a partir de 75 mm de altura, a diferença entre os valores das deflexões máxima e central aumentam conforme aumenta a altura. Quando adotado 12,70 mm de espessura, as deflexões máxima e central apresentam uma diferença de valores um pouco maior, sendo os resultados da deflexão central menor que os da deflexão máxima. Essas diferenças entre deflexão máxima e central acontecem porque há um enrijecedor passando bem na região central da placa e, conforme suas características vão variando, muda também a distribuição dos deslocamentos ao longo da estrutura. Ao contrário das configurações geométricas anteriores onde o menor resultado de deflexão acontece ou na maior espessura ou numa espessura intermediária, o menor resultado de deflexão para este caso ocorre na menor espessura que é de 6,35 mm e na altura de 250 mm, a maior das que foram analisadas, tendo valores de 0,0252 mm de deflexão máxima e 0,0227 mm de deflexão central. Esse resultado apresenta uma redução de 96,38% e 96,74% em relação às deflexões máxima e central da placa de referência. Já o pior resultado ocorre também na espessura de 6,35 mm, mas na menor altura que é de 25 mm, 2,2 vezes menor que o resultado da placa de referência, sendo 0,3169 mm a deflexão máxima e a deflexão central. Foram um total de 30 análises com essa proposta de enrijecedores.

De acordo com a Figura 5.21, as deflexões máxima e central praticamente não apresentam variação quando são adotadas espessuras acima de 8,00 mm, na placa com quatro enrijecedores. Na espessura de 6,35 mm, a diferença entre os resultados das deflexões pode variar em até cerca de 49% conforme Tabela C.9 do Apêndice C que apresenta a diferença relativa entre os valores de deflexão máxima e central. A altura máxima para esse arranjo de enrijecedores foi de 150 mm e resultou num

total de 21 configurações geométricas analisadas neste caso. As maiores deflexões máximas ocorrem com a espessura de 6,35 mm, porém, as menores deflexões centrais também ocorrem com essa espessura a partir da altura de 100 mm. Isso resulta da distribuição dos enrijecedores ao longo da placa e sua consequente influência na distribuição dos deslocamentos, tendo deslocamentos máximos nos enrijecedores próximos as bordas da placa e região central com deslocamentos menores, como representado na Figura 5.29. Neste caso, a menor deflexão máxima se dá ao inserir enrijecedores com 8,00 mm de espessura e altura de 125 mm, tendo como resultado 0,0253 mm a deflexão máxima e central, uma redução de 96,38%. O pior resultado equivale a 0,2115 mm e 0,1882 mm de deflexão máxima e central, respectivamente, com enrijecedores de 25 mm de altura e 6,35 mm de espessura, mas ainda assim apresentam uma melhoria de 69,68% e 73,03% que as deflexões máxima e central da placa de referência.

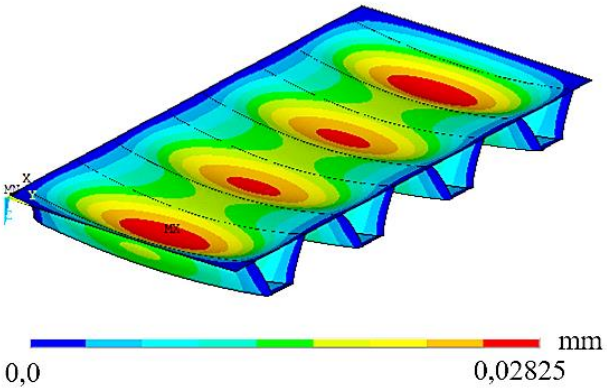

Figura 5.29: Distribuição dos deslocamentos na placa com quatro enrijecedores transversais para a espessura de 6,35 mm e h_s = 150 mm.

Para a placa com cinco enrijecedores (ver Figura 5.22), as alturas começam a ficar restritas à medida que a espessura do enrijecedor aumenta, tendo como máxima a altura de 150 mm para 6,35 mm de espessura e de 75 mm de altura máxima na espessura de 12,70 mm, totalizando 18 análises geométricas. O menor e o maior resultado de deflexão máxima acontecem quando os enrijecedores tem a espessura de 6,35 mm, sendo o melhor resultado na maior altura de 150 mm com a deflexão máxima e central de 0,0211 mm, cerca de 33 vezes menor que as deflexões da placa de referência, enquanto o pior resultado que ocorre na menor altura (25 mm) tem deflexões máxima e central de 0,1771 mm, uma diferença relativa de 74,61% em relação à placa de referência.

Com seis enrijecedores (ver Figura 5.23), é possível avaliar a estrutura adotando cinco espessuras diferentes, os valores variam de 4,75 mm a 12,70 mm. Como citado no caso anterior, a altura dos enrijecedores fica limitada de acordo com a espessura utilizada. Foram realizadas 18 análises e a geometria que obteve o menor resultado de deflexão máxima adotou os enrijecedores

com 175 mm de altura e 4,75 mm de espessura, tendo como resultados a deflexão máxima de 0,0199 mm e 0,0166 mm a deflexão central, ou seja, a maior altura para a menor espessura, cerca de 97% menor que a apresentada na placa de referência. O maior resultado de deflexão ocorre nos enrijecedores com 25 mm de altura e 6,35 mm de espessura, com valores de 0,1594 mm e 0,1562 mm de deflexão máxima e central, respectivamente. São aproximadamente 4,4 vezes menores que os valores da placa de referência, ou seja, uma redução em torno de 77,00%.

Para a placa com sete enrijecedores (ver Figura 5.24), foi possível realizar 16 análises, das quais se obteve o menor resultado de deflexão na altura de 150 mm para uma espessura de 4,75 mm. As deflexões máxima e central equivalem a 0,0220 mm, uma melhoria de 96,84%. Assim como no caso anterior, o pior resultado ocorre na placa com enrijecedores de 25 mm de altura e 6,35 mm de espessura, com deflexões máxima e central de 0,1525 mm, uma redução de 97,81%.

Com oito enrijecedores (ver Figura 5.25), a menor deflexão encontrada ocorre nos enrijecedores cuja geometria apresenta 125 mm de altura e 4,75 mm de espessura. A deflexão máxima e central resultantes apresentam uma redução de cerca de 96% nos deslocamentos da placa, com valores de 0,0257 mm e 0,0255 mm, respectivamente. Já a maior deflexão é de 0,1478 mm para a deflexão máxima e 0,1473 mm de deflexão central, aproximadamente 78,80% menores que os deslocamentos da placa de referência. Foram 12 análises no total, apresentando melhores resultados nas menores espessuras e com pouca variação entre os resultados de deflexão máxima e central.

Por fim, com nove enrijecedores foi possível realizar sete análises geométricas (ver Figura 5.26). O menor resultado foi 0,0315 mm para as deflexões máxima e central ao adotar uma altura de 75 mm e espessura de 4,75 mm, redução de 95,34% em relação à placa de referência. O maior valor de deflexões máxima e central foi de 0,1466 mm com a altura de 25 mm e espessura de 6,35 mm, uma redução de 4,76 vezes nas deflexões da placa.

A Figura 5.30 mostra os melhores resultados e a distribuição dos deslocamentos resultantes para cada um dos nove casos propostos com enrijecedores do tipo viga-caixão trapezoidal na direção transversal da placa.

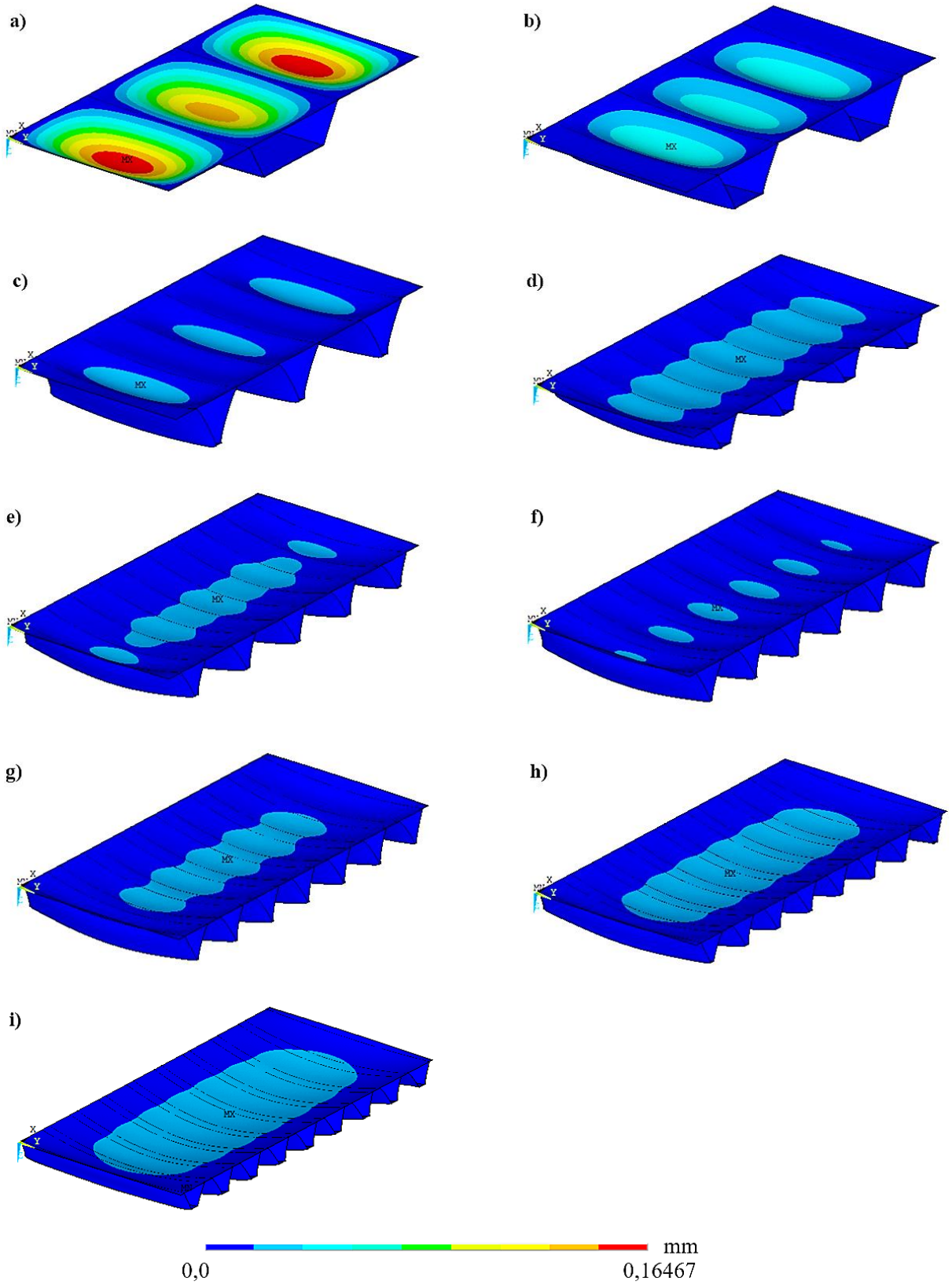

Figura 5.30: Distribuição das deflexões com os melhores resultados para as nove configurações geométricas de enrijecedores na direção transversal.

De acordo com a Fig. 5.30 quanto menor o número de enrijecedores, mais localizados são os deslocamentos e, à medida que a quantidade de enrijecedores aumenta, os deslocamentos apresentam uma distribuição mais uniforme em toda a placa, tendendo a se concentrar na região mais central. Nos arranjos geométricos em que as deflexões máxima e central não são as mesmas, como mostra os exemplos das Figuras 5.27 e 5.29, isso ocorre porque os maiores deslocamentos estão localizados ou nas regiões mais próximas as bordas da placa, ou por passar um enrijecedor na parte central aumentando a rigidez deste local, a tal ponto de em alguns casos apresentar resultados negativos de deflexão central. Apenas na configuração geométrica com um enrijecedor é que se tem resultados de deflexão máxima e central maiores que as deflexões da placa de referência, nos demais casos, independentemente da quantidade de enrijecedores, da altura ou espessura deles, todos os resultados apresentaram minimização dos deslocamentos na placa.

Os resultados obtidos aplicando os enrijecedores na direção transversal da placa apresentaram uma visível redução nos deslocamentos máximo e central comparados ao que foi alcançado na proposta com enrijecedores na direção longitudinal da mesma, estando de acordo com os resultados obtidos por Nogueira *et al*. (2021). Segundo Araújo (2014) e Bastos (2023), os esforços solicitantes de maior magnitude ocorrem na direção do menor vão, o que justifica os resultados encontrados nesta pesquisa. A quantidade de enrijecedores a ser adicionada vai depender de qual seja a aplicação da estrutura, já que em qualquer um dos casos analisados os deslocamentos são inferiores aos da placa de referência. Os resultados obtidos em todas as análises de arranjos propostos tanto de enrijecedores longitudinais e transversais podem ser encontrados no APÊNDICE C.

5.3.3. Comparação dos resultados com estudos anteriores

A presente pesquisa possui relação direta com os trabalhos de Troina *et al*. (2020), Pinto *et al*. (2021), Nogueira *et al*. (2021) e Kucharski *et al*. (2022). Em todos esses estudos o método Design Construtal foi empregado visando minimizar as deflexões máximas e/ou centrais de placas enrijecidas a partir da análise de uma placa de referência que tem parte de seu volume de material transformado em enrijecedores. A estrutura é submetida a um carregamento uniformemente distribuído e cada um dos autores adota uma proposta com diferentes arranjos e geometrias de enrijecedores. Uma diferença importante a se destacar é que, nesses trabalhos, os enrijecedores são inseridos em ambas as direções, enquanto aqui, é analisado os enrijecedores apenas na direção longitudinal ou na direção transversal. Troina *et al*. (2020) e Pinto *et al*. (2021) analisaram cinco frações volumétricas em seus estudos, obtendo melhores resultados com a fração volumétrica de 0,3. Nogueira *et al*. (2021) e Kucharski *et al*. (2022) consideraram apenas a fração volumétrica de 0,3 em suas análises, assim como foi feito neste trabalho. A seguir é apresentado um breve comparativo entre

os resultados alcançados nestas pesquisas de referência com os resultados de menor deflexão encontrados nas placas com enrijecedores longitudinal e na direção transversal.

No estudo proposto por Troina *et al*. (2020), foram utilizados o elemento finito bidimensional SHELL93 e o elemento tridimensional SOLID95, os enrijecedores eram do tipo I e foram adotados de diferentes valores para a fração volumétrica (ϕ) variando de 0,1 a 0,5. O objetivo era avaliar a influência do parâmetro (ϕ) nas placas otimizadas definindo uma configuração com melhor desempenho estrutural. Não houve uma diferença significativa entre os resultados das deflexões centrais das placa para as frações volumétricas dentro do intervalo de $0{,}3 \leq \phi \leq 0{,}5$, tendo como melhor desempenho global a placa P(2,5) com ϕ = 0,5, razão (h_s/t_s) = 35,03 com deslocamento U_z = 0,0086 mm e U_z = 0,0084 mm para os modelos SHELL93 e SOLID95, respectivamente, enquanto com ϕ = 0,3 os deslocamentos foram de U_z = 0,0126 mm e U_z = 0,0123 mm para os modelos SHELL93 e SOLID95. A Figura 5.31 mostra a configuração geométrica obtida por Troina *et al*. (2020) com melhor desempenho estrutural.

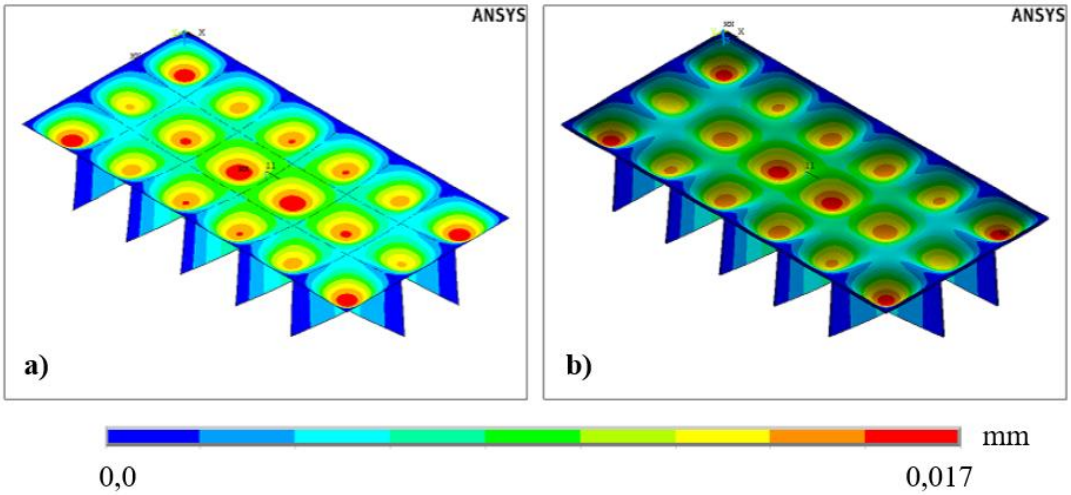

Figura 5.31: Configuração deformada da placa global otimizada para (a) SHELL93 e (b) SOLID95. (Fonte: Troina *et al.*, 2020).

A Tabela 5.6 apresenta a comparação entre os resultados obtidos por Troina *et al*. (2020) com a fração volumétrica ϕ = 0,3 e os melhores resultados alcançados no presente estudo considerando enrijecedores na direção longitudinal e enrijecedores na direção transversal.

Tabela 5.6: Resultados da deflexão $U_{z(central)}$ para a fração volumétrica ϕ = 0,3.

ϕ = 0,3	$U_{z(central)}$ (*mm*)	Dif. Rel. SHELL93 (%)	Dif. Rel. SOLID95 (%)
Troina (2020) – SHELL93	0,0126	-	-
Troina (2020) - SOLID95	0,0123	-	-
SHELL281 (Presente Estudo - 1 Enrij. Long.)	0,0958	660,40	678,94
SHELL281 (Presente Estudo - 6 Enrij. Transv.)	0,0166	31,51	34,72

De acordo com a Tabela 5.6, os resultados obtidos por Troina *et al*. (2020) para a deflexão central na placa são aproximadamente 660,40% para o elemento finito SHELL93, ou seja, 7,6 vezes menor em relação ao melhor resultado alcançado na proposta de enrijecedores do tipo viga-caixão trapezoidal na direção longitudinal e, em relação ao elemento finito SOLID95 essa diferença é de 678,94%, ou seja, 7,8 vezes menor. Com relação ao melhor resultado para a configuração geométrica com enrijecedores do tipo viga-caixão na direção transversal da placa, essa diferença fica em torno de 31,51% quando comparado ao resultado com o elemento finito SHELL93 e de 34,72% em relação ao resultado obtido com o elemento finito SOLID95. Levando-se em consideração a diferença entre a quantidade e distribuição dos enrijecedores ao longo da placa, bem como seu formato e a utilização de elementos finitos diferentes, os resultados estão compatíveis e dentro do aceitável ao que foi proposto.

Pinto *et al*. (2021) também adotaram enrijecedores do tipo I e frações volumétricas de 0,1; 0,2; 0,3; 0,4 e 0,5, considerando os enrijecedores orientados a 0° e 45°, variando a relação entre a altura e a espessura dos enrijecedores a cada arranjo proposto. Na maioria dos arranjos analisados, os enrijecedores orientados a 45° são mais vantajosos para reduzir a deflexão máxima em comparação aos enrijecedores orientados a 0°, principalmente nas frações volumétricas ϕ iguais a 0,1; 0,2 e 0,3, onde foi possível minimizar a deflexão máxima em até 60% em alguns arranjos. Para frações volumétricas de 0,4 e 0,5, orientar os enrijecedores a 45° só é viável nos casos com grandes quantidades de enrijecedores. O melhor resultado para ϕ = 0,3 e enrijecedores a 45° foi a placa P(6,6) com (h_s/t_s) = 92,275 e deflexões $U_{z(máx)}$ = $U_{z(central)}$ = 0,0186 mm, enquanto os melhores resultados para enrijecedores a 0° foi a placa P(2,5), (h_s/t_s) = 59,409 com deflexões central e máxima de $U_{z(central)}$ = 0,0125 mm e $U_{z(máx)}$ = 0,0156 mm, respectivamente. A Figura 5.32 apresenta a distribuição das deflexões ao longo da placa comparando a estrutura com enrijecedores posicionados a 0° e 45° nas propostas que apresentaram melhor desempenho global.

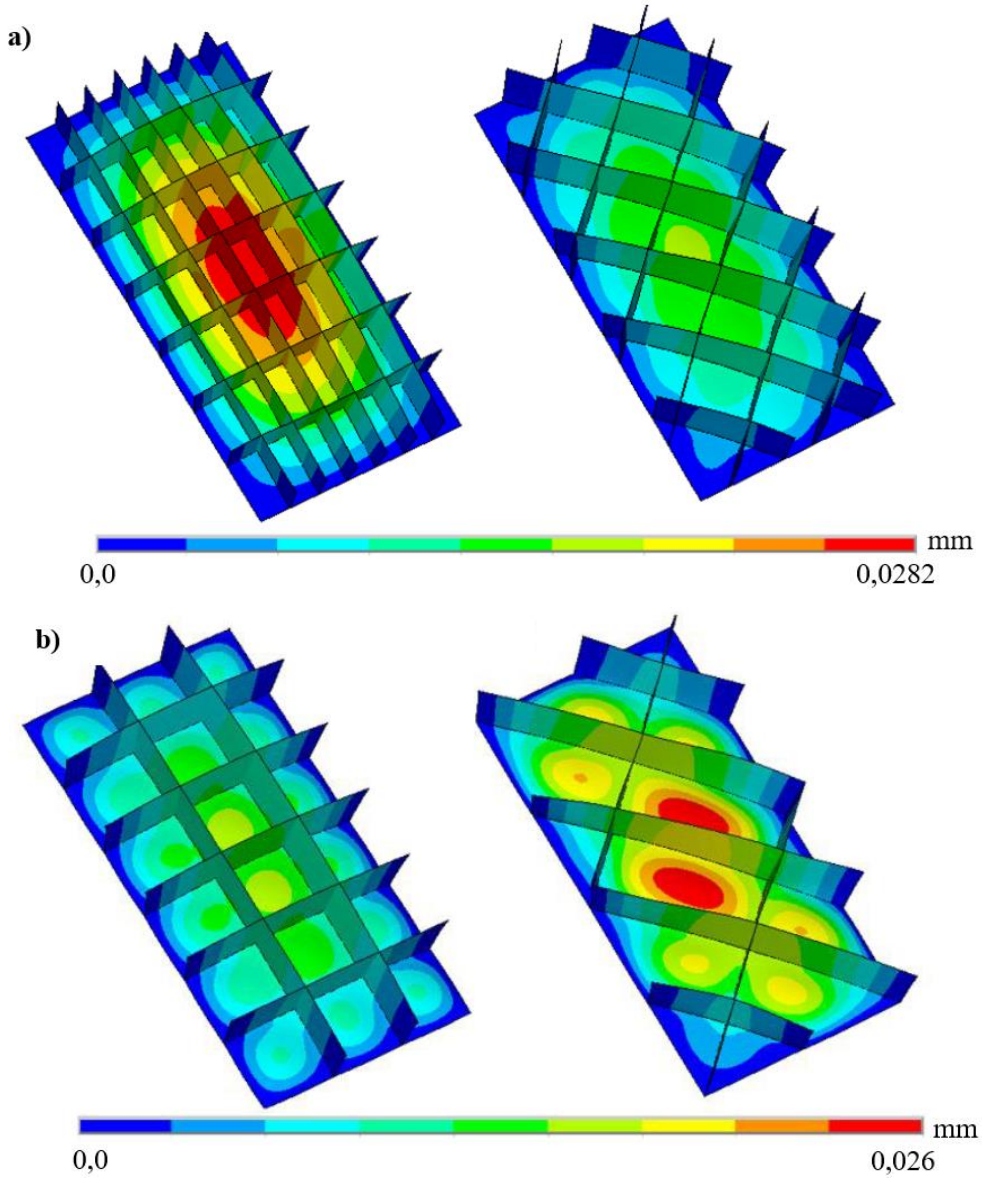

Figura 5.32: Distribuição das deflexões (a) na placa P(6,6) com enrijecedores a 0° e enrijecedores a 45° ;(b) na placa P(2,5) com enrijecedores a 0° e enrijecedores a 45°. (Fonte: Pinto *et al.*, 2021).

A Tabela 5.7 compara os melhores resultados de deflexão central obtidos por Pinto *et al*. (2021) com a fração volumétrica ϕ = 0,3 considerando os enrijecedores posicionados a 0° e a 45°, e os melhores resultados alcançados no presente estudo considerando enrijecedores na direção longitudinal e enrijecedores na direção transversal.

Tabela 5.7: Comparação entre os resultados da deflexão central $U_{z(central)}$ para a fração volumétrica ϕ = 0,3.

ϕ = 0,3	$U_{z(central)}$ (mm)	Dif. Rel. 0° - P(2,5) (%)	Dif. Rel. 45° - P(6,6) (%)
0° - P(2,5)	0,0125	-	-
45° - P(6,6)	0,0186	-	-
SHELL281 (Presente Estudo - 1 Enrij. Long.)	0,0958	666,48	415,11
SHELL281 (Presente Estudo - 6 Enrij. Transv.)	0,0166	32,56	-10,91

A partir da Tabela 5.7, o resultado de deflexão central considerando o melhor desempenho para a placa com enrijecedores na direção longitudinal é 666,48% e 415,11%, ou seja, 5,15 e 7,66 vezes maior que os resultados de deflexão central em relação aos enrijejecedores posicionados a 0° e a 45°, respectivamente. Já na configuração geométrica com melhor resultado para enrijecedores na direção transversal da placa, a deflexão central é 32,56% maior quando comparado à placa com enrijecedores posicionados a 0° e 10,91% menor que o resultado de deflexão central da placa com enrijecedores a 45°.

No trabalho de Nogueira *et al*. (2021) considerando apenas a fração volumétrica ϕ = 0,3, foram utilizados enrijecedores do tipo I e avaliada a influência dos parâmetros geométricos relacionados ao número de enrijecedores nas direções longitudinal e transversal, espessura do enrijecedor e relação entre a altura do enrijecedor transversal e altura do enrijecedor longitudinal nas deflexões máxima e central da placa. Os resultados mostraram que o aumento na altura dos enrijecedores transversais é mais relevante do que dos longitudinais, gerando uma maior redução das deflexões máxima e central. A placa com melhor desempenho foi a geometria P(2,3) (Figura 5.33), com espessura ts = 6,35 mm e (h_{ts}/h_{ls}) = 2 apresentando uma melhoria de 97,98% na deflexão máxima e 98,85% na deflexão central em relação à placa de referência, cujos deslocamentos máximo e central foram respectivamente, 0,01410 e 0,00802 mm.

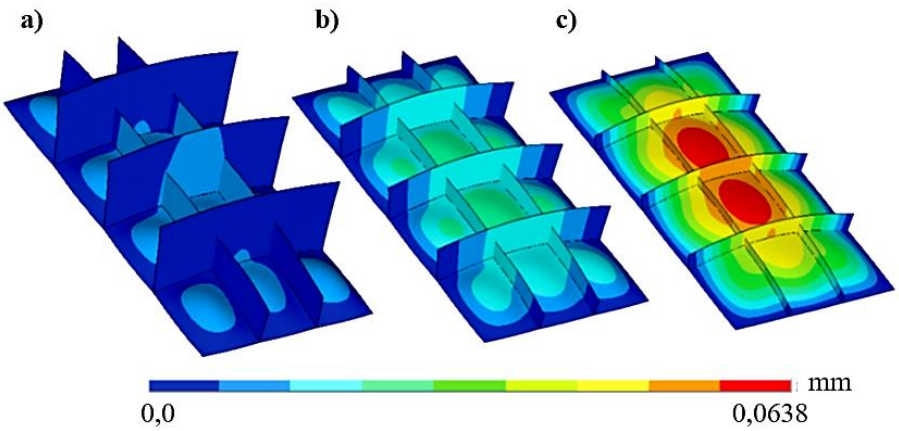

Figura 5.33: Distribuição das deflexões para a placa P(2,3) com a razão h_{ts}/h_{ls} = 2 (a) *ts* = 6,35 mm, (b) *ts* = 12,70 mm e (c) *ts* = 25,40 mm. (Fonte: Nogueira *et al.*, 2021).

A Tabela 5.8 apresenta a comparação entre os resultados de deflexão máxima e central obtidos por Nogueira *et al*. (2021), em relação aos melhores resultados desta pesquisa considerando enrijecedores na direção longitudinal e enrijecedores na direção transversal da placa.

Tabela 5.8: Comparação entre os resultados da deflexão máxima $U_{z(máx)}$ e central $U_{z(central)}$.

	$U_{z(máx)}$ (*mm*)	$U_{z(central)}$ (*mm*)	Dif. Rel. $U_{z(máx)}$ (%)	Dif. Rel. $U_{z(central)}$ (%)
P(2,3)	0,01410	0,00802	-	-
SHELL281 (Presente Estudo - 1 Enrij. Long.)	0,09582	0,09581	579,57	1094,64
SHELL281 (Presente Estudo - 6 Enrij. Transv.)	0,01986	0,01657	40,85	106,61

De acordo com a Tabela 5.8, analisando primeiro a deflexão máxima, o resultado de Nogueira *et al*. (2021) é 579,57% e 40,85% menor que os resultados de deflexão máxima para a placa com um enrijecedor longitudinal e para a placa com seis enrijecedores transversais, respectivamente. Já em relação a deflexão central, as diferenças relativas entre os resultados obtidos nesta pesquisa são maiores, com diferenças de 1094,64% e 106,61%, ou seja, são 11,95 e 2,07 vezes maior quando comparado à deflexão central obtida para a placa com um enrijecedor longitudinal e para a placa com seis enrijecedores transversais, respectivamente. A deflexão central é consideravelmente menor do que foi encontrado aqui porque na geometria ótima desse estudo de referência há um enrijecedor passando bem na região central da placa contribuindo assim para a minimização desse resultado.

Kucharski *et al*. (2022) avaliaram a influência de enrijecedores transversais em forma de I e T no comportamento mecânico de placas. Assumindo a fração volumétrica ϕ = 0,3, foram propostas 25 placas com reforços em formato I tanto na direção longitudinal quanto transversal, e 25 placas com enrijecedores em I na direção longitudinal e T na direção transversal. Os resultados mostraram

que as placas com reforços transversais T são mais eficazes para a redução da tensão de von Mises e deflexão máxima, cuja estrutura que apresentou um melhor desempenho quando comparado os enrijecedores I e T foi a placa $P_T(6,2)$, com tensão máxima de von Misses de 9,231 MPa e deflexão máxima de 0,058 mm, significando uma diminuição em relação à placa $P_I(6,2)$ de 63,00% para a tensão de von Misses (25,00 MPa) e de 52,90% para a deflexão máxima (0,123 mm) (Figura 5.34). Analisando o resultado com maior minimização da flecha máxima, tem-se a placa $P_T(2,2)$ com tensão de von Misses de 3,581 MPa e deflexão máxima de 0,023 mm e a placa $P_I(2,2)$ com valor de 6,920 MPa de tensão e 0,025 mm de deflexão máxima.

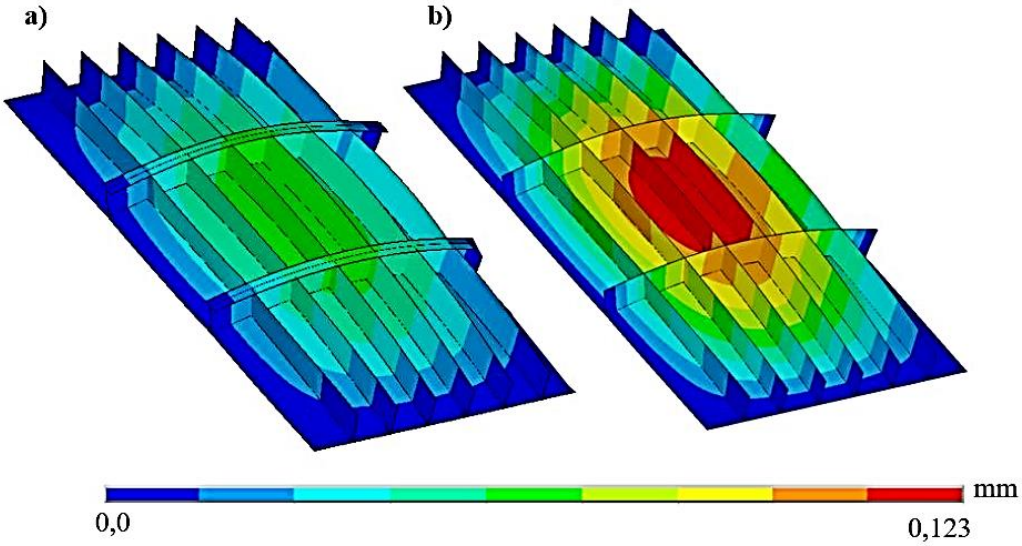

Figura 5.34: Distribuição das deflexões para a placa P(6.2) que apresentou melhor desempenho. (Fonte: Kucharski *et al.*, 2022).

Como pode ser observado, o objetivo da pesquisa não era obter o melhor resultado de tensão ou a menor flecha máxima, mas determinar a geometria que apresentasse uma melhor redução desses parâmetros quando adotado enrijecedores transversais em forma de I ou T. Como o objetivo do presente estudo é avaliar a minimização das deflexões máxima e central, esse foi o motivo de apresentar também a proposta com menor deflexão máxima de Kucharski *et al*. (2022), a fim de comparar esses resultados com os que foram alcançados aqui. A Tabela 5.9 apresenta os melhores resultados de deflexão máxima de Kucharski *et al*. (2022) com enrijecedores do tipo I e T e a diferença relativa com os melhores resultados do presente estudo.

Tabela 5.9: Comparação entre os resultados de deflexão máxima $U_{z(máx)}$.

	$U_{z(máx)}$ (*mm*)	Dif. Rel. $P_T(2,2)$ (%)	Dif. Rel. $P_I(2,2)$ (%)
$P_T(2,2)$	0,023		-
$P_I(2,2)$	0,025		
SHELL281 (Presente Estudo - 1 Enrij. Long.)	0,09582	316,57	283,24
SHELL281 (Presente Estudo - 6 Enrij. Transv.)	0,01986	-27,96	-33,72

Portanto, a partir da Tabela 5.9, observa-se que as maiores diferenças relativas ocorrem em relação aos resultados do presente estudo para a melhor proposta geométrica com enrijecedores longitudinais, cuja diferença é de 316,57% e 283,24%, ou seja, 4,17 e 3,83 vezes maiores que os resultados de Kucharski *et al*. (2022) para as placas $P_T(2,2)$ e $P_I(2,2)$, respectivamente. Quando comparado ao melhor resultado para a placa com enrijecedores transversais, o trabalho de referência apresenta resultados de deflexão máxima 27,96% e 33,72% maiores que o presente estudo, sendo esses valores correspondentes às placas $P_T(2,2)$ e $P_I(2,2)$, respectivamente.

A partir desses dados comparativos, observa-se uma boa concordância entre os melhores resultados desta pesquisa com os resultados das pesquisas citadas que abordam a mesma metodologia, mas tipos de enrijecedores e arranjos geométricos diferentes.

6. CONCLUSÕES

O trabalho desenvolvido no presente estudo apresentou resultados satisfatórios quanto à validação e verificação do modelo computacional proposto. Na validação, o resultado numérico para a deflexão central da placa apresentou uma diferença relativa de 4,58% dos resultados experimentais obtidos por Carrijo *et al*. (1999). Nos casos de verificação, a primeira análise de placa com enrijecedor do tipo I apresentou diferenças relativas de 1% comparado com elemento tridimensional usado por Troina *et al*. (2018), e de 22% e 27% em relação aos estudos de Silva (2010) e Bedair (1997), uma diferença maior devido ao elemento finito e/ou refinamento de malha adotado por esses autores. Considerando os resultados das estruturas com enrijecedores trapezoidais do tipo viga-caixão (*hat-stiffeners*), que são o foco principal da pesquisa, a diferença máxima encontrada na primeira verificação foi de 1,40% em relação aos resultados de Tharian e Nandakumar (2013) para uma placa retangular com dois enrijecedores. Na segunda verificação, que analisa uma placa quadrada com um enrijecedor central, obteve-se uma diferença média de 3,30% para as placas simplesmente apoiadas e de 2,42% para as placas com bordas fixas, comparando com os resultados de Pal *et al*. (2018). Portanto, conclui-se que o modelo computacional proposto foi devidamente validado e verificado.

A aplicação do método de Design Construtal aliado a técnica de busca exaustiva na análise de enrijecedores do tipo viga-caixão trapezoidal na direção longitudinal e na direção transversal da placa, permitiu gerar um total de 314 configurações geométricas simuladas numericamente, sendo cinco arranjos de enrijecedores na direção longitudinal e nove arranjos de enrijecedores na direção transversal.

Observou-se que a posição dos enrijecedores, seja na direção longitudinal ou transversal da placa, bem como a relação entre a altura e espessura deles, tem grande influência na rigidez das placas e, por consequência nas suas deflexões. Em quase todos os casos analisados, quanto maior a altura do enrijecedor, menores são as deflexões máxima e central.

Os resultados gerados nas propostas com enrijecedores apenas na direção transversal diminuem visivelmente a deflexão máxima e central na placa. Há uma redução de 79,27% entre a menor deflexão máxima encontrada na proposta de enrijecedores transverais, que ocorre na placa com seis enrijecedores, comparado ao menor valor de deflexão máxima para a placa com enrijecedores longitudinais, cujo melhor resultado acontece na placa com apenas um enrijecedor.

Como visto, o número de enrijecedores não está diretamente relacionado à redução da flecha máxima e central da placa. No caso dos enrijecedores do tipo viga-caixão trapezoidal, a quantidade a ser adotada vai depender da finalidade e aplicação da estrutura.

Dos graus de liberdade analisados, que são a direção do enrijecedor na placa, a quantidade de enrijecedores, a altura e espessura deles, o que mais tem influência no indicador de performance da estrutura é a orientação dos enrijecedores, como visto, quando são posicionados na direção transversal da placa, os resultados de deflexão máxima e central apresentam uma redução considerável, comparado aos resultados de enrijecedores longitudinais. Além disso, a altura e espessura do enrijecedor também apresentam grande interferência nos resultados. Como pode ser observado nas Figuras 5.10 – 5.14 e Figuras 5.18 – 5.26, a maior parte das configurações geométricas apresentam minimização das deflexões quando são adotadas espessuras menores e a altura do enrijecedor aumenta.

Os resultados do presente estudo comparados aos trabalhos realizados anteriormente, que adotam o mesmo método de análise e as mesmas características estruturais (mas enrijecedores com formatos diferentes), apresentam uma diferença maior quando comparados ao melhor resultado para a placa com enrijecedor longitudinal. Já em relação ao melhor resultado para a placa com enrijecedores transversais, as diferenças entre os resultados são bem menores, como no exemplo de Pinto *et al*. (2021) onde essa diferença é de apenas 11%.

A partir do que foi apresentado, a modelagem computacional combinada ao Design Construtal e à técnica de busca exaustiva, permite avaliar os mais variados tipos de estruturas e assim propor soluções com resultados mais confiáveis, além de auxiliar num aproveitamento eficiente de material. Na análise de placas com enririjecedores, o presente estudo bem como pesquisa anteriores, apresentam a importância da aplicação do Design Construtal e sua influência na minimização de deslocamentos e aumento de rigidez das placas, evidenciando a qualidade e relevância desse método.

6.1. Proposta de Continuidade

A partir do que foi desenvolvido nesta pesquisa, em trabalhos futuros sugere-se:

1. Avaliar diferentes frações volumétricas (ϕ);
2. Considerar diferentes ângulos para o trapézio do enrijecedor como em Aneja et al. (2018), a fim de avaliar sua influência no resultado das deflexões máxima e central;
3. Considerar enrijecedores do tipo viga-caixão trapezoidal nas duas direções da placa;
4. Considerar a combinação de enrijecedores do tipo I em uma direção e viga-caixão na outra direção;
5. Realizar uma análise das tensões resultantes com a utilização dos enrijecedores do tipo viga-caixão trapezoidal.

REFERÊNCIAS

ANEJA, R.; CHOUDHARY, A.; JAIN, K. K.; DAVE, R. K. **Design and Optimization of HAT STIFFENED PLATE using Finite Element Method**. International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET), Vol. 5, p. 578 – 584, 2018.

ANSYS, Inc. **Release 2021 R2 Engineering What's Ahead - Element Reference**, 2021.

ARAÚJO, J. M. **Curso de Concreto Armado**. Editora Dunas, 4 ed., Rio Grande, 2014.

AZEVEDO, A. F. M. **Método dos Elementos Finitos**. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1ª ed., Porto, 2003.

BAO, G.; JIANG, W.; ROBERTS, J. C. **Analytical and Finite Element Solutions for Bending of Orthotropic Rectangular Plates**. Int. J. Solids Structures, 14, p. 1797 – 1822, 1997.

BASTOS, P. S. **Estruturas de Concreto I: Lajes de Concreto Armado - Notas de Aula**. Faculdade de Engenharia, Departamento de Engenharia Civil – UNESP, Universidade Estadual Paulista. Bauru, 2023.

BATHE, K. J.; WILSON, E. L. **Numerical Methods in Finite Element Analysis**. Prentice-Hall, 1976.

BATHE, K. J. **Finite element procedures. Revision of: Finite element procedures in engineering analysis**. Prentice-Hall, 1996.

BEDAIR, O. K. **Analysis of stiffened plates under lateral loading using sequential quadratic programming (SQP)**. Computers & Structures, Vol. 62, N° 1, p. 63 – 80, 1997.

BEJAN, A.; LORENTE. S. **Design with Constructal Theory**. Wiley, Hoboken, 2008.

CARRIJO, E. C.; PAIVA, J. B.; GIOGO, J. S. **A numerical and experimental study of stiffened plates in bending**. Transactions on Modelling and Simulation, Vol. 21, p. 12 – 18, 1999. (DOI: 10.2495/CMEM990021)

CHWIF, L.; MEDINA, A. C. **Modelagem e Simulação de Eventos Discretos: Teoria & Aplicações**. 4ª ed., Elsevier, Rio de Janeiro, 2015.

COOK, R. D. **Concepts and applications of finite element analysis**. 2ed., John Wiley & Sons, Chichester, 1981.

DA SILVEIRA, T.; PINTO, V. T.; NEUFELD, J. P. S.; PAVLOVIC, A.; ROCHA, L. A. O.; DOS SANTOS, E. D.; ISOLDI, L. A. **Applicability Evidence of Constructal Design in Structural Engineering: Case Study of Biaxial Elasto-Plastic Buckling of Square Steel Plates with Elliptical Cutout**. Journal of Applied and Computational Mechanics, Vol. 7, N° 2, p. 922 – 934, 2021. (DOI: 10.22055/JACM.2021.35385.2647)

DESAI, C. S.; ABEL, J. F. **Introduction to the Finite Element Method: A Numerical Method for Engineering Analysis**. Van Nostrand Reinhold Company, 1971.

DOS SANTOS, E. D.; ISOLDI, L. A.; GOMES, M. das N.; ROCHA, L. A. O. **The Constructal Design Applied to Renewable Energy Systems**. In: Rincón-Mejía, E.; Heras, A. (Org.) Sustainable Energy Technologies, CRC Press – Taylor and Francis, Boca Raton, Vol. 1, N° 1, p. 63 – 87, 2017.

DUBAS, P. **Plated structure with closed section stiffeners**. Proceedings of Symposium on Steel Plated Structures, Crosby Lockwood Staples, London, p. 65, 1976.

DYM, C. L.; SHAMES, I. I. **Solid mechanics: A variational approach**. McGraw-Hill, Inc., Tokyo, 1973.

FILIPPATOS, A.; MARKATOS, D.; TZORTZINIS, G.; ABHYANKAR, K.; MALEFAKI, S.; GUDE, M.; PANTELAKIS, S. Sustainability-Driven Design of Aircraft Composite Components. MDPI Aeroespace, Vol. 11, p. 86, 2024. (https://doi.org/10.3390/aerospace11010086)

GALLAGHER, R. H. **Finite Element Analysis: Fundamentals**. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1975.

HOSSEINI, S.; SOLTANI, B. **Analysis of Rectangular Stiffened Plates Based on FSDT and Meshless Collocation Method**. Journal of Solid Mechanic, Vol. 9, n. 3, p. 568 – 586, 2017.

HUGHES, F. O. **Ship Structural Design**. SNAME, New Jersey, p. 123, 1988.

JIA, J.; ULFARSON, **A. Structural behavior of a high tensile stell deck using trapezoidal stiffeners and dynamics of vehicle-deck interactions**. ELSEVIER, Marine Structures, 18, p. 1-24, 2005.

JU, X.; XIAO, J.; WANG, D.; ZHAO, C.; WANG, X. **Research on the Manufacturing Quality of Co-Cured Hat-Stiffened Composite Structure**. MDPI Materials, Vol. 14, p. 2747, 2021. (https://doi.org/10.3390/ma14112747)

KAWAI, T. **The Application of Finite Element Methods to Ship Structures**. Computers and Structures, Vol. 3, p. 1175 – 1194, 1973.

KHOURY S. H.; HARDER, D. W. **Numerical Methods and Modeling for Engineering**. Springer International Publishing, 2016.

KIM, G. -H.; CHOI, J. -H.; KWEON, J. -H. **Manufacture and performance evaluation of the composite hat-stiffened panel**. Composite Structures, Vol. 92, p. 2276 – 2284, 2010. (doi:10.1016/j.compstruct.2009.07.019)

KUCHARSKI, D. M. P.; PINTO, V. T.; ROCHA, L. A. O.; DOS SANTOS, E. D.; FRAGASSA, C.; ISOLDI, L. A. **Geometric Analysis by Constructal Design of Stiffened Steel Plates under Bending with Transverse I-shaped or T-shaped Stiffeners**. Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering, Vol. 20, n. 3, p. 617 – 632, 2022. (https://doi.org/10.22190/FUME211016070K)

KUMAR, S.; KUMAR, R.; MANDAL, S. **Experimental and FE analysis for the buckling behavior of hat-stiffened panels under edge compressive loading**. Indian Academy of Science, n. 45:130, 2020. (https://doi.org/10.1007/s12046-020-01364-8)

KUMAR, S.; KANT, L.; PODDAR, M. K.; YADAV, C. B. K.; KUMAR, S. **A review on buckling of the laminated composite panel under in-plane load**. Engineering Research Express, Vol. 6, 2024. (DOI: 10.1088/2631-8695/ad3893)

LEVITIN, A. **Introduction to The Design and Analysis of Algorithms**. 3 ed. Pearson, 2012.

LI, Z.; ZHOU, L.; LEI, H.; PEI, Y. **Microwave near-field and far-field imaging of composite plate with hat stiffeners**. Composites Part B, Vol. 161, p. 87 – 95, 2019. (https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.10.058)

LI, B.; GONG, Y.; GAO, Y.; HOU, M.; LI, L. **Failure Analysis of Hat-Stringer-Stiffened Aircraft composite Panels under Four-Point Bending Loading**. MDPI Materials, Vol. 15, p. 2430, 2022. (https://doi.org/10.3390/ma15072430)

LIU, L.; GUAN, Z. **Effects of the fillers on the interface strength of the hat-stiffened composite panel**. Polymers and Polymer Composites, Vol. 31, p. 1 – 13, 2023. (DOI: 10.1177/09673911231211450)

MADENCI, E.; GUVEN, I. **The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS**. Ed. Springer, 2006.

MURTHY, R. V.; ANNAMALAI, K.; ELANGO, M. **Numerical analysis of hat stiffened composite panels for pre and post buckling conditions**. Materials Science and Engineering, IOP Conf. Series, n. 1128, 2021. (doi:10.1088/1757-899X/1128/1/012021)

NOGUEIRA, C. M.; CUNHA, M.L.; AMARAL, R.R.; TROINA, G.S.; LIMA, J.P.S.; DOS SANTOS, E.D.; ISOLDI, L.A. **Simulação numérica e design construtal aplicados a placas com enrijecedores com diferentes relações altura/espessura**. SCIENTIA PLENA, Vol. 15, n. 4, 2019.

NOGUEIRA, C. M.; PINTO, V. T.; ROCHA, L. A. O.; DOS SANTOS, E. D.; ISOLDI, L. A. **Numerical simulation and constructal design applied to plates with different heights of transverse and longitudinal stiffeners**. Engineering Solid Mechanics, Vol. 9, p. 221 – 238, 2021.

OÑATE, E. **Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics. Vol. 2. Beans, Plates and Shells**. Springer, 2013.

PAL, A. K.; HARRY, N. N.; UPADHYAY, R.; KUSHWAHA, Y. K. **Static Analysis of hat stiffened plate: A parametric study**. International Journal of Reasearch in Engineering, Science and Management, Vol. 1, p. 128 - 131, 2018.

PIDD, M. **Tools for thinking: modelling in management science**. 4ª ed., Chichester: John Wiley & Sons, 2000.

PINHEIRO, J. I. D.; CARVAJAL, S. S. R.; CUNHA, S. B.; GOMES, G. C. **Probabilidade e Estatística: Quantificando a incerteza**. Elsevier Editora Ltda, 2012.

PINTO, V. T. **Simulação Numérica e Método Design Construtal Aplicados à Análise Geométrica de Placas Retangulares Enrijecidas Submetidas a Carregamento Transversal Uniforme**. Dissertação de Mestrado em Engenharia Oceânica, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio Grande, 2019.

PINTO, V.; CUNHA, M.; MARTINS, K.; ROCHA, L.; DOS SANTOS, E.; ISOLDI, L. **Bending of stiffened plates considering different stiffeners orientations**. Magazine of Civil Engineering, 103(3), 2021. (DOI: 10.34910/MCE.103.10)

PINTO, V.; CUNHA, M.; ROCHA, L.; DOS SANTOS, E.D.; ISOLDI, L.A. **Numerical analysis of stiffened plates subjected to transverse uniform load through the constructal design method**. Engineering Solid Mechanics, Vol. 10, p. 99-108, 2021.

PLATYPODIS, E. L.; ANYFANTIS, K. N**. On the Modeling of Ship Stiffened Panels Subjected to Uniform Pressure Loads**. MDPI Applied Mechanics, Vol. 3, p. 125 – 143, 2022. (https://doi.org/10.3390/applmech3010010)

PRUSTY, B. G.; SATSANGI, S. K. **Analysis of stiffened Shell for ships and ocean structures by finite element method**. Ocean Engineering, Vol. 28, p. 621 – 638, 2001.

PRZEMIENIECKI, J. S. **Finite Element Structural Analysis: New Concepts**. AIAA (American Institute of Aeronautics & Astronautics), Reston, Virgínia, 2009.

RAO, S. S. **The Finite Element Method in Engineering**. 4ª ed., Elsevier Science & Technology Books, 2004.

REIS, A. H. **Constructal theory: from engineering to physics, and how systems flow develop shape and structure**. Applied Mechanics Reviews, Vol. 59, p. 269 – 281, 2006.

ROCHA, L. A. O.; LORENTE, S.; BEJAN, A. **Constructal Law and the Unifying Principle of Desing**. Springer, 2013.

ROSSOWT, M. P.; IBRAHIMKHAIL, A. K. **Constraint Method Analysis of Stiffened Plates**. Computers & Structures, Vol. 8, p. 51 - 60, 1978.

SALIBA, S. S. **Implementação Computacional e Análise Crítica de Elementos Finitos de Placas**. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, 2007.

SILVA, H. B. S. **Análise numérica da influência da excentricidade na ligação placa-viga em pavimentos usuais de edifícios**. Dissertação de mestrado em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia, Universidade Federal de São Carlos, 2010.

SUN, Z.; LEI, Z.; BAI, R.; ZHANG, C. **Numerical and experimental study of buckling behavior of a composite hat-stiffened panel under in-plane shear**. Journal of Physics: Conference Series, n. 1699, AMTME, 2020. (doi:10.1088/1742-6596/1699/1/012037)

SUN, Z.; LEI, Z.; BAI, R.; JIANG, H.; ZOU, J.; MA, Y.; YAN, C. **Prediction of compression buckling load and buckling mode of hat-stiffened panels using artificial neural network**. Engineering Structures, Vol. 242, 2021. (https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.112275)

SZILARD, R. **Theories and Applications of Plate Analysis: Classical Numerical and Engineering Methods**.[S.l.]: John Wiley e Sons, 2004.

THARIAN, M. G.; NANDAKUMAR, C. G. **Hat stiffened plates for ship building. International Journal of Applied Engineering Research and Development**, IJAERD, Vol. 3, p. 1-10, 2013.

THARIAN, M. G.; NANDAKUMAR, C. G. **Superelement for Structural Analysis of Steel Bunkers**. Proceedings of the 7th Biennial International Conference on Emerging Trends in Engineering, Science & Technology (ICETEST), 2023. (http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.451229)

THARIAN, M. G. **Strength Predictions of Hat Stiffened Plate Using Finite Element Method**. Thesis Doctor in Philosophy, Department of Ship Technology Cochin University of Science and Technology Kochi-682022, Kerala, India, 2015.

TIMOSHENKO, S. P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of plates and shells**. McGraw-Hill, New York, 1959.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. **Theory of elastic stability**. McGraw- Hill, 1961.

TROINA, G. S. **Modelagem Computacional e Método Design Construtal Aplicados à Otimização Geométrica de Placas Finas de Aço com Enrijecedores Submetidas a Carregamento Transversal Uniforme**. Dissertação de Mestrado em Engenharia Oceânica, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio Grande, 2017.

TROINA, G.S.; QUEIROZ, J.P.O.; ROCHA, L.A.O.; DOS SANTOS, E.D.; ISOLDI, L.A. **Verificação de modelos computacionais aplicados a placas com enrijecedores sob carga transversal uniforme**. REVISTA CEREUS, Vol. 10, n.2, 2018.

TROINA, G.; CUNHA, M.; PINTO, V.; ROCHA, L.; DOS SANTOS, E.; FRAGASSA, C.; ISOLDI, L. **Computational Modeling and Constructal Design Theory Applied to the Geometric Optimization of Thin Steel Plates with Stiffeners Subjected to Uniform Transverse Load**. MDPI Metals, Vol. 10, p. 220, 2020. (doi:10.3390/met10020220)

TROITSKY, M. S. **Stiffened Plates Bending, Stability and Vibrations**. Elsevier Scientific Publishing Company, Ney York, 1976.

TURNER, M.; CLOUGH, R.; MARTIN, H.; TOPP, L. **Stiffness and deflection analysis of complex structures**. Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 23, p. 805 – 823, 1956.

VAZ, L. E. **Método dos Elementos Finitos em análise de estruturas**. Elsevier, Rio de Janeiro, 2011.

VENTSEL, E.; KRAUTHAMMER, T. **Thin Plates and Shells – Theory, Analysis and Applications**. Marcel Dekker, Inc., 2001.

VIRÁG, Z.; SZIRBIK, S. **Modal Analysis of Optimized Trapezoidal Stiffened Plates under Lateral Pressure and Uniaxial Compression**. MDPI Applied Mechanics, Vol. 2, p. 681 – 693, 2021. (https://doi.org/10.3390/applmech2040039)

WANG, T.; BAI, R.; WEI, C.; HUANG, X.; BAI, H. **Interface damage analysis of composite hat-stiffened panels**. Journal of Physics: Conference Series, n. 1948, IoTAIMA, 2021. (doi:10.1088/1742-6596/1948/1/012139)

WANG, Z.; LIU, K.; YU, T.; ZONG, S.; WANG, X. **Structural deformation mechanism of the hat-stiffened plate used in marine structures under impact load**. Ocean Engineering, Vol. 266, 2022. (https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.112736)

WANG, Z.; WANG, B.; BAO, R.; CHEN, X.; LIANG, Q.; YU, F. **Buckling and Post-buckling Analysis of Composite Hat Stiffened Panels under Axial Compression Loads**. Journal of Physics: Conference Series, n. 2489, ICoACE, 2023. (doi:10.1088/1742-6596/2489/1/012013)

YAKOOB, J. A.; HASAN, I. J**. Study the Increasing of the Cantilever Plate Stiffness by Using Stiffeners**. International Journal of Scientific & Engineering Research, Vol. 6, p. 1678 – 1687, 2015.

YAMAGUCHI, E. **Basic Theory of Plates and Elastic Stability**. Structural Engineering Handbook. CRC Press LLC, 1999.

ZIENCKIEWICZ, O. C. **The Finite Element Method in Engineering Science**. 2ª ed., McGraw-Hill, London, 1971.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. **The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals**. 6ª ed., Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.

APÊNDICE A – Caracterização da Teoria de Kirchhoff para placas finas

A teoria clássica de Kirchhoff de placas finas produz resultados suficientemente precisos sem a necessidade de realizar uma análise de tensão tridimensional completa. Consequentemente, a teoria clássica das placas ocupa uma posição única neste assunto. Ela é formulada em termos de deflexões transversais $w(x, y)$ para as quais a equação governante é de quarta ordem, exigindo apenas que duas condições de contorno sejam satisfeitas em cada aresta (Szilard, 2004). As simplificações usadas na derivação da equação da placa são baseadas nas seguintes hipóteses:

1. O material é homogêneo, isotrópico e elástico linear, isto é, segue a lei de Hooke;
2. A placa é inicialmente plana;
3. A superfície intermediária da placa permanece sem tensão durante a flexão;
4. A espessura constante da placa (t) é pequena em relação às demais dimensões, ou seja, a menor dimensão lateral da placa é pelo menos 10 vezes maior que a sua espessura;
5. As deflexões transversais $w(x, y)$ são pequenas se comparadas com sua espessura, sendo considerada como deflexão máxima permitida o valor de um décimo da espessura;
6. As inclinações da superfície intermediária deformada são pequenas em comparação com a unidade;
7. As seções perpendiculares à superfície intermediária antes da deformação permanecem planas e normais à superfície intermediária defletida. Consequentemente, as deformações de cisalhamento são desprezadas. Essa suposição representa uma extensão da hipótese de Bernoulli para vigas e placas;
8. A tensão normal σz na direção transversal à superfície da placa pode ser desprezada.

A partir das suposições apresentadas acima, segundo Szilard (2004) os problemas de tensão em placas que, originalmente, são tridimensionais passam a ser reduzidos a problemas bidimensionais. Para placas retangulares, o uso de um sistema de coordenadas cartesianas como mostra a Figura A.1 é mais conveniente. As forças externas e internas, tensões e componentes de deflexão u, v e w são considerados positivos quando apontam na direção positiva dos eixos x, y e z.

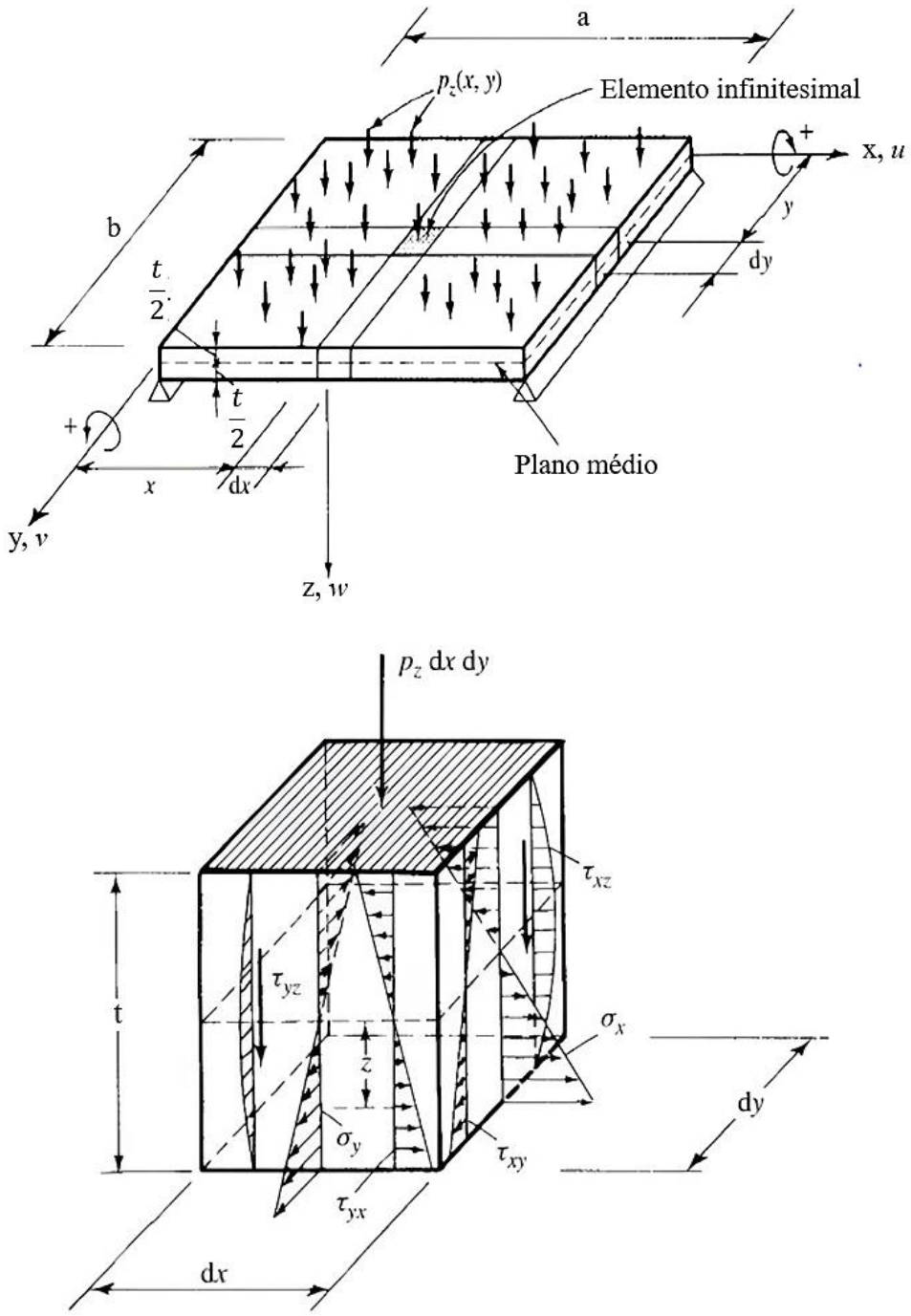

Figura 0: Placa fina com carregamento distribuído transversalmente aplicado. (Fonte: Adaptado de Szilard, 2004)

De acordo com Szilard (2004), na engenharia, convencionalmente, se atribui momentos positivos quando as fibras inferiores da placa são tracionadas. A Figura A.2 apresenta as forças resultantes que agem transversalmente sobre uma porção de um elemento da placa de dimensões *dx*, *dy* e *t*.

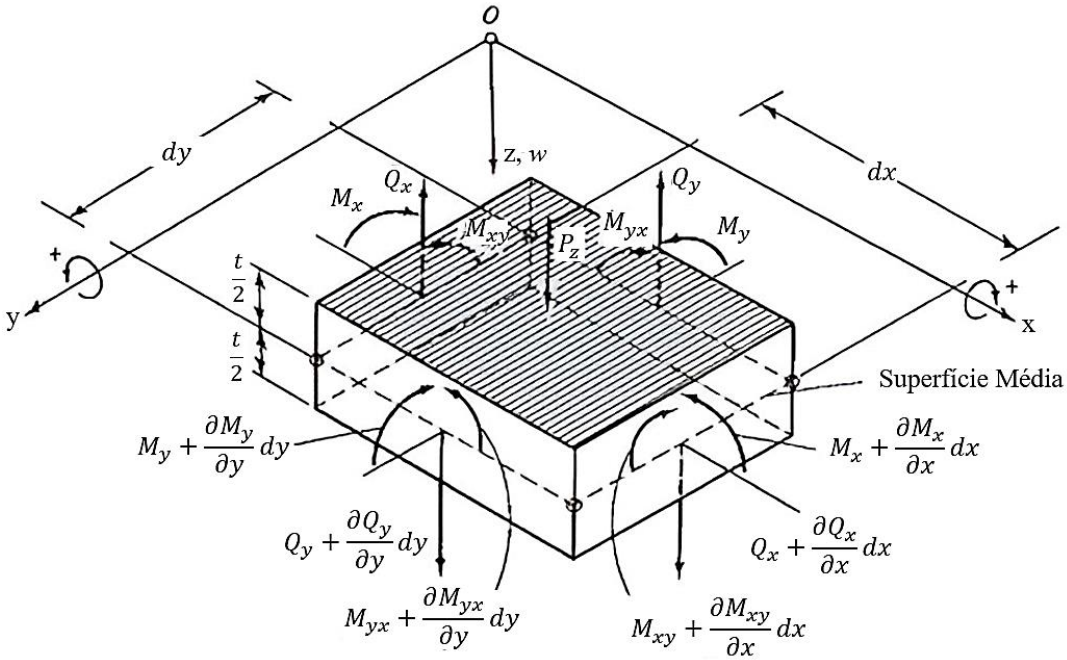

Figura A.2: Forças internas e externas de um elemento de superfície média da placa. (Fonte: Adaptado de Szilard, 2004)

Para satisfazer o equilíbrio do elemento, forças e momentos internos negativos devem atuar em seus lados opostos (Szilard, 2004). Partindo do princípio que a placa está sujeita apenas a esforços laterais, tem-se que:

$$\sum M_x = 0, \sum M_y = 0, \sum P_z = 0 \tag{A.1}$$

O comportamento de uma placa fina se assemelha à uma malha de vigas bidimensionais. Deste modo, a carga externa P_z é equilibrada por forças de cisalhamento transversal Q_x e Q_y, além dos momentos fletores M_x e M_y. A principal diferença quando se compara a malha de vigas bidimensionais à placa é a presença dos momentos de torção M_{xy} e M_{yx}, os quais também contribuem na resistência ao carregamento interno. Além disso, na teoria de placas é comum analisar os esforços solicitantes atuantes por unidade de comprimento da superfície média. Sendo assim, diferencia-se tais esforços distribuídos acima mencionados dos esforços resultantes adotando-se a seguinte notação para os esforços por unidade de comprimento: q_x, q_y, m_x, m_y, e m_{xy} (Szilard, 2004). Na Figura A.3 é apresentado um elemento da superfície média em estado de equilíbrio sob a ação de uma carga distribuída P_z.

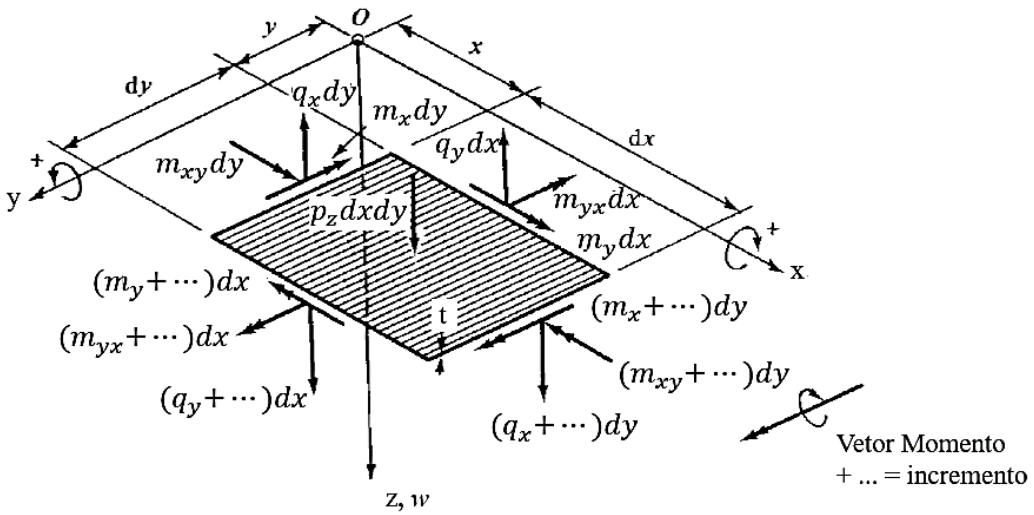

Figura A.3: Estado de equilíbrio de um elemento de superfície média da placa. (Fonte: Szilard, 2004)

Segundo Szilard (2004), primeiramente se considera a soma de todos os momentos de forças em torno do eixo *y* sendo zero. Tal hipótese resulta:

$$\left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x}dx\right)dy - m_x dy + \left(m_{yx} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y}dy\right)dx - m_{yx}dx - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}dx\right)dy\frac{dx}{2} - q_x dy\frac{dx}{2} = 0 \tag{A.2}$$

Após isto, realiza-se a expansão e simplificação da Eq. (A.2). Além disso, negligencia-se o termo contendo $1/2\ (\partial q_x/\partial x)(dx)^2 dy$ uma vez que este é uma pequena parcela de ordem superior, fazendo com que a Eq. (A.2) se torne:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x}dxdy + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y}dydx - q_x dxdy = 0 \tag{A.3}$$

dividindo por $dxdy$ tem-se:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = q_x \tag{A.4}$$

De forma similar, tal situação de equilíbrio de momentos em torno do eixo *x*, supondo que o mesmo passe pelo centro do elemento, resulta em:

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = q_y \tag{A.5}$$

Fazendo o equilíbrio de forças no eixo *z*, tem-se que:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x}dxdy + \frac{\partial q_y}{\partial y}dxdy + p_z dxdy = 0 \tag{A.6}$$

dividindo por $dxdy$:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = -p_z \tag{A.7}$$

Finalmente, substituindo as Eqs. (A.4) e (A.5) em (A.7) e observando que $m_{xy} = m_{yx}$, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p_z(x, y) \tag{A.8}$$

Campo de Deslocamentos

A Figura A.4 apresenta o posicionamento de um ponto qualquer de uma placa, identificado por A, nos estados indeformado e deformado da mesma.

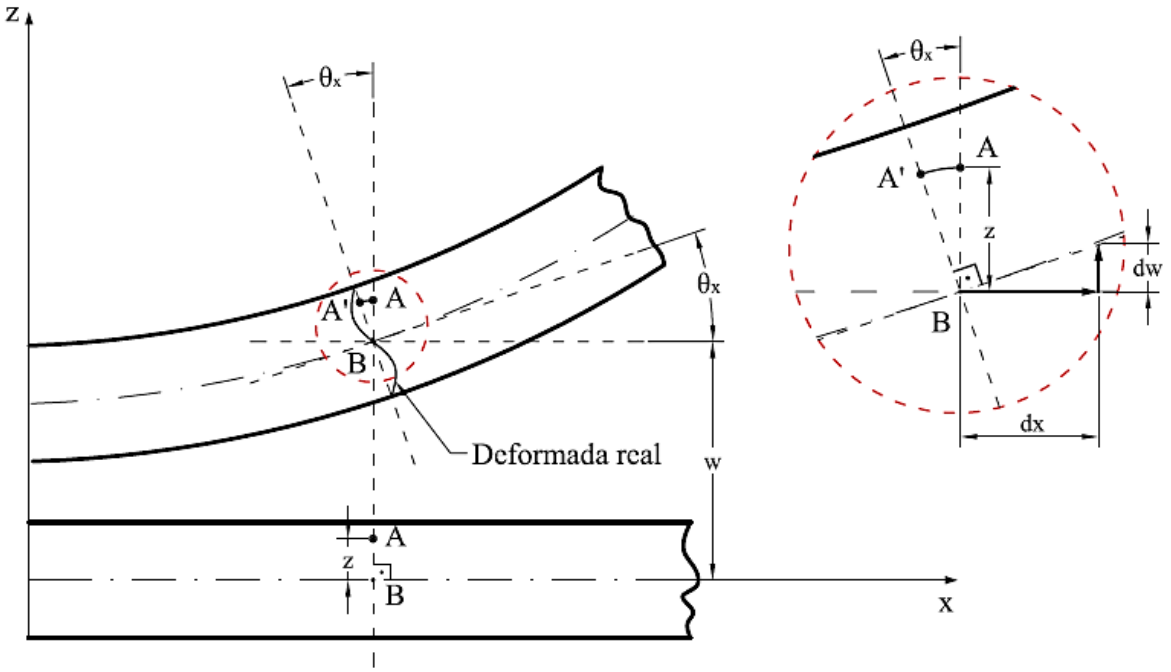

Figura A.4: Representação do deslocamento de um ponto A no plano *xz*, segundo as hipóteses de Kirchhoff. (Fonte: Saliba, 2007)

De acordo com Oñate (2013), se o ponto A está a uma distância *z* do plano médio no estado indeformado, ele permanecerá a esta mesma distância após a deformação da placa. Percebe-se que, no estado deformado, o plano que continha o ponto A sofre uma rotação. Assim, analisando o detalhe em destaque na Figura A.4, tem-se:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} \tag{A.9}$$

De maneira análoga, esta rotação quando analisada no plano *yz* é dada por:

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} \tag{A.10}$$

Desta forma, a análise de flexão da placa nos planos *xz* e *yz* permite descrever o campo de deslocamentos de um ponto qualquer da mesma:

$$u(x,y,z) = -z\,\theta_x(x,y) = -z\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} \tag{A.11a}$$

$$v(x,y,z) = -z\,\theta_y(x,y) = -z\frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \tag{A.11b}$$

$$w(x,y,z) = w(x,y) \tag{A.11c}$$

onde *u*, *v* e *w* são os deslocamentos nas direções *x*, *y* e *z*, respectivamente.

Na análise de placas finas, considera-se que os pontos contidos no plano médio somente se deslocam verticalmente, logo, tem-se que os deslocamentos horizontais *u* e *v* são iguais à zero, isto porque esta superfície está livre de deformações. Portanto, conclui-se que, uma vez encontrado o valor de *w*, o campo de deslocamentos do problema estará determinado, já que as rotações são obtidas a partir das derivadas de *w* em relação aos eixos *x* ou *y* (Oñate, 2013). Assim, pode-se escrever o seguinte vetor de deslocamentos para um ponto contido no plano médio:

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w \\ \partial w/\partial x \\ \partial w/\partial y \end{Bmatrix} \tag{A.12}$$

Relação Deformação-Deslocamento

Segundo Oñate (2013), a teoria da elasticidade clássica para pequenos deslocamentos e deformações fornece as seguintes relações entre deformação e deslocamento:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{A.13a}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \tag{A.13b}$$

As Eqs. (A.13) mostram que a suposição de ortogonalidade normal leva a deformações de cisalhamento transversais nulas (γ_{xz} e γ_{yz}). Portanto, as tensões transversais não contribuem para o trabalho de deformação. Isso não significa que estas tensões sejam insignificantes, elas podem ser calculadas usando as condições de equilíbrio.

A partir do campo de deslocamentos descrito pelas Eqs. (A.11) e das relações da teoria da elasticidade (Eqs. A.13), obtém-se as seguintes relações entre deformações e deslocamentos para um ponto qualquer da placa:

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{A.14a}$$

$$\varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{A.14b}$$

$$\gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{A.14c}$$

$$\varepsilon_z \cong \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \tag{A.14d}$$

Essa relação entre as deformações e os deslocamentos apresentada na forma matricial será:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial x} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial x} \end{Bmatrix} = -z\boldsymbol{X} \tag{A.15}$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o vetor de deformações e $\boldsymbol{X}$ é o vetor de deformações generalizadas de flexão.

Relação Tensão-Deformação

Se a placa está livre para se deformar na direção z e de acordo com a hipótese "8", onde $\sigma_z \cong 0$, pode-se admitir que a relação tensão-deformação é a mesma utilizada nos problemas de Estado Plano de Tensões, então:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{A.16}$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o vetor de tensões e $\boldsymbol{D}$ é a matriz constitutiva para uma placa de material ortotrópico.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \tag{A.17}$$

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{1 - v_{yx}v_{xy}} \begin{bmatrix} E_x & v_{xy}E_x & 0 \\ v_{yx}E_x & E_y & 0 \\ 0 & 0 & (1 - v_{yx}v_{xy})G_{xy} \end{bmatrix} \tag{A.18}$$

Substituindo o vetor deformações dado pela Eq. (A.15) na Eq. (A.16), que relaciona a tensão e a deformação, obtém-se:

$$\boldsymbol{\sigma} = -z\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{X} \tag{A.19}$$

Esforços Internos

Partindo da Eq. (A.19), observa-se que as tensões variam linearmente ao longo da espessura e, também, que os valores máximos das tensões, em módulo, ocorrem nas superfícies limite da placa, conforme representado na Figura A.5.

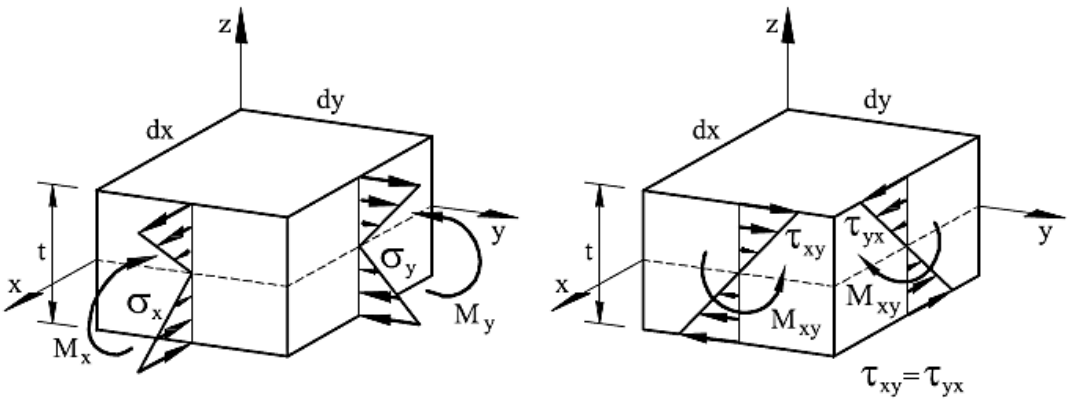

Figura A.5: Distribuição de tensões nas direções *x* e *y* ao longo da espessura. (Fonte: Oñate, 2013)

Os esforços internos são obtidos a partir da integração das tensões ao longo da espessura da placa, como pode ser visto na Figura A.5. Esta integração, quando feita para uma fatia de comprimento unitário da placa resulta em:

$$M_x = \int_{-(t/2)}^{+(t/2)} \sigma_x \, z dz \tag{A.20}$$

Como a obtenção dos esforços internos ocorre segundo a Eq. (A.20), para os demais esforços internos diferentes de zero tem-se:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-(t/2)}^{+(t/2)} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = -\frac{t^3}{12} \boldsymbol{D} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial x} \end{Bmatrix} \tag{A.21}$$

que na forma matricial fica:

$$\boldsymbol{M} = -\frac{t^3}{12} \boldsymbol{DX} \tag{A.22}$$

onde $\boldsymbol{M}$ é o vetor de esforços internos por unidade de comprimento e M_x, M_y e M_{xy} são respectivamente, os momentos fletores nas direções *x* e *y* e o momento de torção.

Na Figura A.6 é apresentada a convenção de sinais adotada, seguindo o mesmo critério da regra da mão direita.

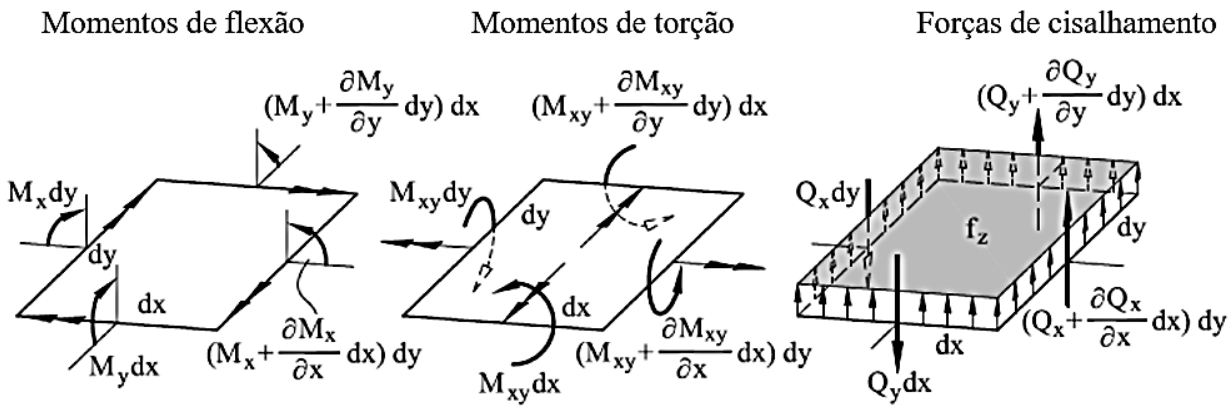

Figura A.6: Convenção de sinais adotada pela Teoria de Kirchhoff. (Fonte: Oñate, 2013)

APÊNDICE B – Caracterização geométrica das estruturas de acordo com a altura e espessura do enrijecedor para cada caso estudado

As Tabelas B.1 - B.14 apresentam as informações geométricas de cada estrutura analisada (de um a cinco enrijecedores longitudinais, e de um a nove enrijecedores transversais), sendo h_s e t_s a altura e espessura do enrijecedor, respectivamente; *n'* representa a distância entre dois enrijecedores; b_t a base do enrijecedor; *y'* a projeção da lateral do enrijecedor no eixo *y* (para o caso de enrijecedores na direção longitudinal; e *x'* a projeção da lateral do enrijecedor no eixo *x* (para o caso de enrijecedores na direção transversal, como esquematizado na Figura 4.6.

Tabela B.1: Um Enrijecedor Longitudinal

h_s (mm)	t_s (mm)	*n'* (mm)	*y'* (mm)	b_t (mm)
300	4,75	83,25	173,21	570,34
275	4,75	54,38	158,77	628,34
250	4,75	25,52	144,34	685,81
300	6,35	401,53	173,21	252,06
275	6,35	372,66	158,77	309,80
250	6,35	343,79	144,34	367,53
225	6,35	314,93	129,90	425,27
200	6,35	286,06	115,47	483,00
175	6,35	257,19	101,04	540,74
150	6,35	228,32	86,60	598,47
125	6,35	199,46	72,17	656,21
100	6,35	170,59	57,74	713,94
75	6,35	141,72	43,30	771,68
50	6,35	112,85	28,87	829,41
25	6,35	83,99	14,43	887,15
300	8,00	596,41	173,21	57,18
275	8,00	567,54	158,77	114,91
250	8,00	538,68	144,34	172,65
225	8,00	509,81	129,90	230,38
200	8,00	480,94	115,47	288,12
175	8,00	452,07	101,04	345,85
150	8,00	423,21	86,60	403,59
125	8,00	394,34	72,17	461,32
100	8,00	365,47	57,74	519,06
75	8,00	336,60	43,30	576,79
50	8,00	307,74	28,87	634,53
25	8,00	278,87	14,43	692,26
250	9,53	659,08	144,34	52,24
225	9,53	630,22	129,90	109,98
200	9,53	601,35	115,47	167,71
175	9,53	572,48	101,04	225,45
150	9,53	543,61	86,60	283,18
125	9,53	514,75	72,17	340,92
100	9,53	485,88	57,74	398,65
75	9,53	457,01	43,30	456,39
50	9,53	428,14	28,87	514,12
25	9,53	399,28	14,43	571,86
200	12,7	758,50	115,47	10,56

175	12,7	729,63	101,04	68,30
150	12,7	700,76	86,60	126,03
125	12,7	671,90	72,17	183,77
100	12,7	643,03	57,74	241,50
75	12,7	614,16	43,30	299,24
50	12,7	585,29	28,87	356,97
25	12,7	556,43	14,43	414,71

Tabela B.2: Dois Enrijecedores Longitudinais

h_s (mm)	t_s (mm)	n' (mm)	y' (mm)	b_t (mm)
150	6,35	200,76	86,60	126,03
125	6,35	171,90	72,17	183,77
100	6,35	143,03	57,74	241,50
75	6,35	114,16	43,30	299,24
50	6,35	85,29	28,87	356,97
25	6,35	56,43	14,43	414,71
150	8,00	298,21	86,60	28,59
125	8,00	269,34	72,17	86,32
100	8,00	240,47	57,74	144,06
75	8,00	211,6	43,30	201,79
50	8,00	182,74	28,87	259,53
25	8,00	153,87	14,43	317,26
125	9,53	329,54	72,17	26,12
100	9,53	300,67	57,74	83,86
75	9,53	271,81	43,30	141,59
50	9,53	242,94	28,87	199,33
25	9,53	214,07	14,43	257,06
100	12,7	379,25	57,74	5,28
75	12,7	350,38	43,30	63,02
50	12,7	321,51	28,87	120,75
25	12,7	292,65	14,43	178,49

Tabela B.3: Três Enrijecedores Longitudinais

h_s (mm)	t_s (mm)	n' (mm)	y' (mm)	b_t (mm)
150	4,75	85,49	86,60	74,64
125	4,75	56,62	72,17	132,38
100	4,75	27,75	57,74	190,11
125	6,35	162,71	72,17	26,29
100	6,35	133,84	57,74	84,02
75	6,35	104,98	43,30	141,76
50	6,35	76,11	28,87	199,49
25	6,35	47,24	14,43	257,23
100	8,00	198,80	57,74	19,06
75	8,00	169,94	43,30	76,79
50	8,00	141,07	28,87	134,53
25	8,00	112,20	14,43	192,26
75	9,53	210,07	43,30	36,66
50	9,53	181,20	28,87	94,39
25	9,53	152,34	14,43	152,13

Tabela B.4: Quatro Enrijecedores Longitudinais

h_s (mm)	t_s (mm)	n' (mm)	y' (mm)	b_t (mm)
125	4,75	78,55	72,17	27,11
100	4,75	49,68	57,74	84,85
75	4,75	20,81	43,30	142,58
100	6,35	129,25	57,74	5,28
75	6,35	100,38	43,30	63,02
50	6,35	71,51	28,87	120,75
25	6,35	42,65	14,43	178,49
50	8,00	120,24	28,87	72,03
25	8,00	91,37	14,43	129,76
50	9,53	150,34	28,87	41,93
25	9,53	124,47	14,43	99,66

Tabela B.5: Cinco Enrijecedores Longitudinais

h_s (mm)	t_s (mm)	n' (mm)	y' (mm)	b_t (mm)
100	4,75	62,84	57,74	21,69
75	4,75	33,97	43,30	79,43
50	4,75	5,10	28,87	137,16
75	6,35	97,63	43,30	15,77
50	6,35	68,76	28,87	73,51
25	6,35	39,89	14,43	131,24
50	8,00	107,74	28,87	34,53
25	8,00	78,87	14,43	92,26

Tabela B.6: Um Enrijecedor Transversal

h_s (mm)	t_s (mm)	n' (mm)	y' (mm)	b_t (mm)
400	6,35	572,12	230,94	966,00
375	6,35	543,25	216,51	1023,74
350	6,35	514,38	202,07	1081,47
325	6,35	485,51	187,64	1139,21
300	6,35	456,65	173,21	1196,94
275	6,35	427,78	158,77	1254,68
250	6,35	398,91	144,34	1312,41
225	6,35	370,04	129,90	1370,15
200	6,35	341,18	115,47	1427,88
175	6,35	312,31	101,04	1485,62
150	6,35	283,44	86,60	1543,35
125	6,35	254,57	72,17	1601,09
100	6,35	225,71	57,74	1658,82
75	6,35	196,84	43,30	1716,56
50	6,35	167,97	28,87	1774,29
25	6,35	139,10	14,43	1832,03
400	8,00	961,88	230,94	576,24
375	8,00	933,01	216,51	633,97
350	8,00	904,15	202,07	691,71
325	8,00	875,28	187,64	749,44
300	8,00	846,41	173,21	807,18
275	8,00	817,54	158,77	864,91
250	8,00	788,68	144,34	922,65
225	8,00	759,81	129,90	980,38
200	8,00	730,94	115,47	1038,12

175	8,00	702,07	101,04	1095,85
150	8,00	673,21	86,60	1153,59
125	8,00	644,34	72,17	1211,32
100	8,00	615,47	57,74	1269,06
75	8,00	586,60	43,30	1326,79
50	8,00	557,74	28,87	1384,53
25	8,00	528,87	14,43	1442,26
400	9,53	1202,70	230,94	335,42
375	9,53	1173,83	216,51	393,16
350	9,53	1144,96	202,07	450,89
325	9,53	1116,10	187,64	508,63
300	9,53	1087,23	173,21	566,36
275	9,53	1058,36	158,77	624,10
250	9,53	1029,49	144,34	681,83
225	9,53	1000,63	129,90	739,57
200	9,53	971,76	115,47	797,30
175	9,53	942,89	101,04	855,04
150	9,53	914,02	86,60	912,77
125	9,53	885,16	72,17	970,51
100	9,53	856,29	57,74	1028,24
75	9,53	827,42	43,30	1085,98
50	9,53	798,55	28,87	1143,71
25	9,53	769,69	14,43	1201,45
400	12,7	1517,00	230,94	21,12
375	12,7	1488,13	216,51	78,86
350	12,7	1459,26	202,07	136,59
325	12,7	1430,40	187,64	194,33
300	12,7	1401,53	173,21	252,06
275	12,7	1372,66	158,77	309,80
250	12,7	1343,79	144,34	367,53
225	12,7	1314,93	129,90	425,27
200	12,7	1286,06	115,47	483,00
175	12,7	1257,19	101,04	540,74
150	12,7	1228,32	86,60	598,47
125	12,7	1199,46	72,17	656,21
100	12,7	1170,59	57,74	713,94
75	12,7	1141,72	43,30	771,68
50	12,7	1112,85	28,87	829,41
25	12,7	1083,99	14,43	887,15

Tabela B.7: Dois Enrijecedores Transversais

h_s (mm)	t_s (mm)	n' (mm)	y' (mm)	b_t (mm)
250	6,35	343,79	144,34	367,53
225	6,35	314,93	129,90	425,27
200	6,35	286,06	115,47	483,00
175	6,35	257,19	101,04	540,74
150	6,35	228,32	86,60	598,47
125	6,35	199,46	72,17	656,21
100	6,35	170,59	57,74	713,94
75	6,35	141,72	43,30	771,68
50	6,35	112,85	28,87	829,41
25	6,35	83,99	14,43	887,15
250	8,00	538,68	144,34	172,65
225	8,00	509,81	129,90	230,38

200	8,00	480,94	115,47	288,12
175	8,00	452,07	101,04	345,85
150	8,00	423,21	86,60	403,59
125	8,00	394,34	72,17	461,32
100	8,00	365,47	57,74	519,06
75	8,00	336,60	43,30	576,79
50	8,00	307,74	28,87	634,53
25	8,00	278,87	14,43	692,26
250	9,53	659,08	144,34	52,24
225	9,53	630,22	129,90	109,98
200	9,53	601,35	115,47	167,71
175	9,53	572,48	101,04	225,45
150	9,53	543,61	86,60	283,18
125	9,53	514,75	72,17	340,92
100	9,53	485,88	57,74	398,65
75	9,53	457,01	43,30	456,39
50	9,53	428,14	28,87	514,12
25	9,53	399,28	14,43	571,86
200	12,7	758,50	115,47	10,56
175	12,7	729,63	101,04	68,30
150	12,7	700,76	86,60	126,03
125	12,7	671,90	72,17	183,77
100	12,7	643,03	57,74	241,50
75	12,7	614,16	43,30	299,24
50	12,7	585,29	28,87	356,97
25	12,7	556,43	14,43	414,71

Tabela B.8: Três Enrijecedores Transversais

h_s (mm)	t_s (mm)	n' (mm)	y' (mm)	b_t (mm)
250	6,35	325,42	144,34	52,57
225	6,35	296,55	129,90	110,31
200	6,35	267,69	115,47	168,04
175	6,35	238,82	101,04	225,78
150	6,35	209,95	86,60	283,51
125	6,35	181,08	72,17	341,25
100	6,35	152,22	57,74	398,98
75	6,35	123,35	43,30	456,72
50	6,35	94,48	28,87	514,45
25	6,35	65,61	14,43	572,19
200	8,00	397,61	115,47	38,12
175	8,00	368,74	101,04	95,85
150	8,00	339,87	86,60	153,59
125	8,00	311,00	72,17	211,32
100	8,00	282,14	57,74	269,06
75	8,00	253,27	43,30	326,79
50	8,00	224,40	28,87	384,53
25	8,00	195,53	14,43	442,26
175	9,53	449,01	101,04	15,58
150	9,53	420,14	86,60	73,32
125	9,53	391,28	72,17	131,05
100	9,53	362,41	57,74	188,79
75	9,53	333,54	43,30	246,52
50	9,53	304,67	28,87	304,26
25	9,53	275,81	14,43	361,99

125	12,7	496,04	72,17	26,29
100	12,7	467,18	57,74	84,02
75	12,7	438,31	43,30	141,76
50	12,7	409,44	28,87	199,49
25	12,7	380,57	14,43	257,23

Tabela B.9: Quatro Enrijecedores Transversais

h_s (mm)	t_s (mm)	n' (mm)	y' (mm)	b_t (mm)
150	6,35	200,76	86,60	126,03
125	6,35	171,90	72,17	183,77
100	6,35	143,03	57,74	241,50
75	6,35	114,16	43,30	299,24
50	6,35	85,29	28,87	356,97
25	6,35	56,43	14,43	414,71
150	8,00	298,21	86,60	28,59
125	8,00	269,34	72,17	86,32
100	8,00	240,47	57,74	144,06
75	8,00	211,60	43,30	201,79
50	8,00	182,74	28,87	259,53
25	8,00	153,87	14,43	317,26
125	9,53	329,54	72,17	26,12
100	9,53	300,67	57,74	83,86
75	9,53	271,81	43,30	141,59
50	9,53	242,94	28,87	199,33
25	9,53	214,07	14,43	257,06
100	12,7	379,25	57,74	5,28
75	12,7	350,38	43,30	63,02
50	12,7	321,51	28,87	120,75
25	12,7	292,65	14,43	178,49

Tabela B.10: Cinco Enrijecedores Transversais

h_s (mm)	t_s (mm)	n' (mm)	y' (mm)	b_t (mm)
150	6,35	195,25	86,60	31,54
125	6,35	166,38	72,17	89,28
100	6,35	137,52	57,74	147,01
75	6,35	108,65	43,30	204,75
50	6,35	79,78	28,87	262,48
25	6,35	50,91	14,43	320,22
125	8,00	244,34	72,17	11,32
100	8,00	215,47	57,74	69,06
75	8,00	186,60	43,30	126,79
50	8,00	157,74	28,87	184,53
25	8,00	128,87	14,43	242,26
100	9,53	263,63	57,74	20,90
75	9,53	234,77	43,30	78,63
50	9,53	205,90	28,87	136,37
25	9,53	177,03	14,43	194,10
75	12,7	297,63	43,30	15,77
50	12,7	268,76	28,87	73,51
25	12,7	239,89	14,43	131,24

Tabela B.11: Seis Enrijecedores Transversais

h_s (mm)	t_s (mm)	n' (mm)	y' (mm)	b_t (mm)
175	4,75	114,35	101,04	16,91
150	4,75	85,49	86,60	74,64
125	4,75	56,62	72,17	132,38
100	4,75	27,75	57,74	190,11
125	6,35	162,71	72,17	26,29
100	6,35	133,84	57,74	84,02
75	6,35	104,98	43,30	141,76
50	6,35	76,11	28,87	199,49
25	6,35	47,24	14,43	257,23
100	8,00	198,80	57,74	19,06
75	8,00	169,94	43,30	76,79
50	8,00	141,07	28,87	134,53
25	8,00	112,20	14,43	192,26
75	9,53	210,07	43,30	36,66
50	9,53	181,20	28,87	94,39
25	9,53	152,34	14,43	152,13
50	12,7	233,59	28,87	42,01
25	12,7	204,72	14,43	99,75

Tabela B.12: Sete Enrijecedores Transversais

h_s (mm)	t_s (mm)	n' (mm)	y' (mm)	b_t (mm)
150	4,75	98,02	86,60	14,49
125	4,75	69,15	72,17	72,23
100	4,75	40,28	57,74	129,96
75	4,75	11,41	43,30	187,70
100	6,35	131,22	57,74	39,03
75	6,35	102,35	43,30	96,76
50	6,35	73,48	28,87	154,50
25	6,35	44,62	14,43	212,23
75	8,00	158,03	43,30	41,08
50	8,00	129,16	28,87	98,82
25	8,00	100,30	14,43	156,55
75	9,53	192,43	43,30	6,68
50	9,53	163,57	28,87	64,41
25	9,53	134,70	14,43	122,15
50	12,7	208,47	28,87	19,51
25	12,7	179,60	14,43	77,25

Tabela B.13: Oito Enrijecedores Transversais

h_s (mm)	t_s (mm)	n' (mm)	y' (mm)	b_t (mm)
125	4,75	78,55	72,17	27,11
100	4,75	49,68	57,74	84,85
75	4,75	20,81	43,30	142,58
100	6,35	129,25	57,74	5,28
75	6,35	100,38	43,30	63,02
50	6,35	71,51	28,87	120,75
25	6,35	42,65	14,43	178,49
75	8,00	149,10	43,30	14,29
50	8,00	120,24	28,87	72,03
25	8,00	91,37	14,43	129,76

50	9,53	150,34	28,87	41,93
25	9,53	121,47	14,43	99,66

Tabela B.14: Nove Enrijecedores Transversais

h_s (mm)	t_s (mm)	n' (mm)	y' (mm)	b_t (mm)
100	4,75	56,99	57,74	49,76
75	4,75	28,12	43,30	107,50
75	6,35	98,85	43,30	36,77
50	6,35	69,98	28,87	94,50
25	6,35	41,12	14,43	152,24
50	8,00	113,29	28,87	51,20
25	8,00	84,42	14,43	108,93

APÊNDICE C – Resultados para a deflexão máxima e central e a diferença relativa entre as deflexões para cada caso analisado

As Tabelas C.1 – C.14 apresentam os resultados de deflexão máxima e central para cada caso proposto de enrijecedores na direção longitudinal e na direção transversal da placa, bem como a diferença percentual relativa (Equação 3.33) entre esses resultados.

Tabela C.1: Um Enrijecedor Longitudinal

h_s (mm)	t_s (mm)	$U_{z(máx)}$ (mm)	$U_{z(central)}$ (mm)	Diferença Relativa (%)
300	4,75	1,30951	1,30950	-0,001
275	4,75	1,58995	1,59010	0,009
250	4,75	1,77349	1,77350	0,001
300	6,35	0,23210	0,23208	-0,008
275	6,35	0,27515	0,27519	0,015
250	6,35	0,32857	0,32854	-0,009
225	6,35	0,39571	0,39575	0,011
200	6,35	0,48157	0,48153	-0,008
175	6,35	0,59097	0,59102	0,008
150	6,35	0,72568	0,72563	-0,006
125	6,35	0,87134	0,87142	0,010
100	6,35	0,98356	0,98367	0,011
75	6,35	0,99490	0,99488	-0,002
50	6,35	0,87462	0,87474	0,014
25	6,35	0,71122	0,71122	0,000
300	8,00	0,09970	0,09970	0,004
275	8,00	0,11669	0,11666	-0,024
250	8,00	0,13870	0,13871	0,004
225	8,00	0,16708	0,16705	-0,017
200	8,00	0,20354	0,20351	-0,017
175	8,00	0,25087	0,25088	0,005
150	8,00	0,31295	0,31291	-0,014
125	8,00	0,39295	0,39297	0,005
100	8,00	0,48827	0,48822	-0,009
75	8,00	0,57142	0,57146	0,008
50	8,00	0,57404	0,57401	-0,006
25	8,00	0,49597	0,49604	0,015
250	9,53	0,09582	0,09581	-0,010
225	9,53	0,11087	0,11087	-0,003
200	9,53	0,13234	0,13231	-0,023
175	9,53	0,16187	0,16186	-0,003
150	9,53	0,20240	0,20236	-0,018
125	9,53	0,25773	0,25773	0,000
100	9,53	0,33128	0,33123	-0,016
75	9,53	0,41662	0,41663	0,003
50	9,53	0,47598	0,47595	-0,007
25	9,53	0,48389	0,48393	0,008
200	12,7	0,11700	0,11697	-0,022
175	12,7	0,12942	0,12939	-0,025
150	12,7	0,15282	0,15279	-0,022
125	12,7	0,19061	0,19059	-0,009
100	12,7	0,24956	0,24952	-0,016

75	12,7	0,33913	0,33911	-0,004
50	12,7	0,46219	0,46216	-0,007
25	12,7	0,60353	0,60355	0,003

Tabela C.2: Dois Enrijecedores Longitudinais

h_s (mm)	t_s (mm)	$U_{z(máx)}$ (mm)	$U_{z(central)}$ (mm)	Diferença Relativa (%)
150	6,35	0,13812	0,12665	-8,306
125	6,35	0,16315	0,15477	-5,139
100	6,35	0,20409	0,20027	-1,871
75	6,35	0,27030	0,27026	-0,014
50	6,35	0,37879	0,37880	0,003
25	6,35	0,53705	0,53705	0,000
150	8,00	0,16236	0,16232	-0,024
125	8,00	0,16076	0,16074	-0,015
100	8,00	0,18045	0,18043	-0,013
75	8,00	0,22377	0,22375	-0,009
50	8,00	0,30227	0,30229	0,008
25	8,00	0,45519	0,45518	-0,001
125	9,53	0,20960	0,20959	-0,006
100	9,53	0,20547	0,20546	-0,006
75	9,53	0,23113	0,23111	-0,010
50	9,53	0,29423	0,29426	0,010
25	9,53	0,44266	0,44266	0,001
100	12,7	0,32981	0,32978	-0,009
75	12,7	0,29945	0,29942	-0,009
50	12,7	0,33666	0,33669	0,009
25	12,7	0,47255	0,47254	-0,001

Tabela C.3: Três Enrijecedores Longitudinais

h_s (mm)	t_s (mm)	$U_{z(máx)}$ (mm)	$U_{z(central)}$ (mm)	Diferença Relativa (%)
150	4,75	0,12436	0,12437	0,011
125	4,75	0,15318	0,15317	-0,007
100	4,75	0,20518	0,20519	0,006
125	6,35	0,18738	0,18737	-0,005
100	6,35	0,18473	0,18473	-0,002
75	6,35	0,22168	0,22171	0,012
50	6,35	0,30289	0,30289	-0,001
25	6,35	0,44971	0,44975	0,009
100	8,00	0,26199	0,26198	-0,005
75	8,00	0,24723	0,24725	0,010
50	8,00	0,29335	0,29334	-0,002
25	8,00	0,42348	0,42351	0,008
75	9,53	0,31217	0,31219	0,005
50	9,53	0,32200	0,32200	-0,001
25	9,53	0,43755	0,43758	0,006

Tabela C.4: Quatro Enrijecedores Longitudinais

h_s (mm)	t_s (mm)	$U_{z(máx)}$ (mm)	$U_{z(central)}$ (mm)	Diferença Relativa (%)
125	4,75	0,16503	0,16502	-0,005
100	4,75	0,17824	0,17824	0,002
75	4,75	0,24494	0,24495	0,003
100	6,35	0,27831	0,27833	0,006
75	6,35	0,25812	0,25814	0,009
50	6,35	0,33317	0,33317	0,001
25	6,35	0,52355	0,52364	0,017
50	8,00	0,38249	0,38253	0,010
25	8,00	0,56959	0,56959	0,000
50	9,53	0,46197	0,46196	-0,001
25	9,53	0,63441	0,63451	0,016

Tabela C.5: Cinco Enrijecedores Longitudinais

h_s (mm)	t_s (mm)	$U_{z(máx)}$ (mm)	$U_{z(central)}$ (mm)	Diferença Relativa (%)
100	4,75	0,22595	0,22595	0,000
75	4,75	0,23852	0,23855	0,013
50	4,75	0,34241	0,34241	0,001
75	6,35	0,35397	0,35400	0,008
50	6,35	0,36385	0,36385	0,000
25	6,35	0,53978	0,53982	0,007
50	8,00	0,46638	0,46638	0,000
25	8,00	0,60137	0,60140	0,005

Tabela C.6: Um Enrijecedor Transversal

h_s (mm)	t_s (mm)	$U_{z(máx)}$ (mm)	$U_{z(central)}$ (mm)	Diferença Relativa (%)
400	6,35	1,13094	1,13100	0,005
375	6,35	1,17004	1,17000	-0,003
350	6,35	1,20832	1,20840	0,007
325	6,35	1,24615	1,24610	-0,004
300	6,35	1,28332	1,28340	0,006
275	6,35	1,32024	1,32020	-0,003
250	6,35	1,35686	1,35690	0,003
225	6,35	1,39380	1,39390	0,007
200	6,35	1,43164	1,43160	-0,003
175	6,35	1,47125	1,47130	0,003
150	6,35	1,51463	1,51460	-0,002
125	6,35	1,56444	1,56450	0,004
100	6,35	1,62477	1,62480	0,002
75	6,35	1,69532	1,69540	0,005
50	6,35	1,75417	1,75420	0,002
25	6,35	1,77116	1,77120	0,002
400	8,00	0,54805	0,54805	0,000
375	8,00	0,59059	0,59067	0,014
350	8,00	0,63365	0,63365	0,000
325	8,00	0,67674	0,67682	0,012
300	8,00	0,72010	0,72010	0,000
275	8,00	0,76337	0,76345	0,010

250	8,00	0,80674	0,80674	0,000
225	8,00	0,84997	0,85005	0,009
200	8,00	0,89329	0,89337	0,009
175	8,00	0,93695	0,93695	0,000
150	8,00	0,98122	0,98130	0,008
125	8,00	1,02741	1,02740	-0,001
100	8,00	1,07764	1,07770	0,006
75	8,00	1,13830	1,13830	0,000
50	8,00	1,22641	1,22650	0,007
25	8,00	1,40999	1,41000	0,001
400	9,53	0,22032	0,22032	0,000
375	9,53	0,25369	0,25375	0,024
350	9,53	0,28867	0,28867	0,000
325	9,53	0,32482	0,32488	0,018
300	9,53	0,36231	0,36231	0,000
275	9,53	0,40068	0,40075	0,017
250	9,53	0,44011	0,44011	0,000
225	9,53	0,48031	0,48031	0,000
200	9,53	0,52118	0,52126	0,015
175	9,53	0,56304	0,56304	0,000
150	9,53	0,60589	0,60596	0,012
125	9,53	0,65082	0,65082	0,000
100	9,53	0,69984	0,69992	0,011
75	9,53	0,75990	0,75990	0,000
50	9,53	0,85449	0,85456	0,008
25	9,53	1,09652	1,09650	-0,002
400	12,7	0,29991	-0,00493	-101,644
375	12,7	0,28102	0,00565	-97,989
350	12,7	0,26249	0,01846	-92,967
325	12,7	0,24446	0,03340	-86,337
300	12,7	0,22685	0,05046	-77,756
275	12,7	0,20996	0,06959	-66,856
250	12,7	0,19390	0,09076	-53,192
225	12,7	0,17873	0,11397	-36,233
200	12,7	0,16467	0,13921	-15,461
175	12,7	0,16657	0,16662	0,030
150	12,7	0,19657	0,19657	0,000
125	12,7	0,22991	0,22997	0,026
100	12,7	0,26924	0,26930	0,022
75	12,7	0,32180	0,32180	0,000
50	12,7	0,41382	0,41388	0,014
25	12,7	0,67994	0,67994	0,000

Tabela C.7: Dois Enrijecedores Transversais

h_s (mm)	t_s (mm)	$U_{z(máx)}$ (mm)	$U_{z(central)}$ (mm)	Diferença Relativa (%)
250	6,35	0,16455	-0,01073	-106,521
225	6,35	0,18940	-0,01253	-106,616
200	6,35	0,21631	-0,01193	-105,515
175	6,35	0,24580	-0,00875	-103,560
150	6,35	0,27930	-0,00251	-100,899
125	6,35	0,31875	0,00792	-97,515
100	6,35	0,36699	0,02547	-93,060
75	6,35	0,42445	0,05780	-86,382

50	6,35	0,48530	0,12774	-73,678
25	6,35	0,57898	0,32622	-43,656
250	8,00	0,06119	0,06119	0,000
225	8,00	0,05450	0,04658	-14,532
200	8,00	0,07022	0,03445	-50,940
175	8,00	0,08815	0,02518	-71,435
150	8,00	0,10859	0,01934	-82,190
125	8,00	0,13231	0,01798	-86,411
100	8,00	0,16107	0,02338	-85,485
75	8,00	0,19886	0,04147	-79,146
50	8,00	0,25560	0,09113	-64,347
25	8,00	0,36895	0,24998	-32,246
250	9,53	0,14037	0,14037	0,000
225	9,53	0,11920	0,11920	0,000
200	9,53	0,10027	0,10031	0,040
175	9,53	0,08389	0,08389	0,000
150	9,53	0,07047	0,07050	0,043
125	9,53	0,06119	0,06119	0,000
100	9,53	0,07934	0,05808	-26,796
75	9,53	0,10661	0,06618	-37,923
50	9,53	0,15149	0,10087	-33,415
25	9,53	0,25657	0,22686	-11,580
200	12,7	0,21067	0,21067	0,000
175	12,7	0,18639	0,18644	0,027
150	12,7	0,16453	0,16458	0,030
125	12,7	0,14615	0,14615	0,000
100	12,7	0,13263	0,13268	0,038
75	12,7	0,12803	0,12803	0,000
50	12,7	0,14361	0,14365	0,028
25	12,7	0,22820	0,22820	0,000

Tabela C.8: Três Enrijecedores Transversais

h_s (mm)	t_s (mm)	$U_{z(máx)}$ (mm)	$U_{z(central)}$ (mm)	Diferença Relativa (%)
250	6,35	0,02524	0,02274	-9,905
225	6,35	0,03255	0,03031	-6,882
200	6,35	0,04163	0,03938	-5,405
175	6,35	0,05283	0,04991	-5,527
150	6,35	0,06678	0,06197	-7,203
125	6,35	0,08471	0,07587	-10,436
100	6,35	0,10798	0,09278	-14,077
75	6,35	0,13688	0,11758	-14,100
50	6,35	0,17102	0,16915	-1,093
25	6,35	0,31692	0,31695	0,009
200	8,00	0,03360	0,01297	-61,399
175	8,00	0,02767	0,01772	-35,960
150	8,00	0,02682	0,02456	-8,427
125	8,00	0,03619	0,03392	-6,272
100	8,00	0,04938	0,04690	-5,022
75	8,00	0,06889	0,06678	-3,063
50	8,00	0,10545	0,10547	0,019
25	8,00	0,21842	0,21842	0,000
175	9,53	0,04965	0,01284	-74,139
150	9,53	0,04215	0,01560	-62,989

125	9,53	0,03792	0,02120	-44,093
100	9,53	0,03797	0,03049	-19,700
75	9,53	0,04634	0,04634	0,000
50	9,53	0,07877	0,07878	0,013
25	9,53	0,17496	0,17495	-0,006
125	12,7	0,06776	0,02263	-66,603
100	12,7	0,06162	0,02655	-56,913
75	12,7	0,06297	0,03738	-40,638
50	12,7	0,07990	0,06292	-21,252
25	12,7	0,14972	0,14096	-5,851

Tabela C.9: Quatro Enrijecedores Transversais

h_s (mm)	t_s (mm)	$U_{z(máx)}$ (mm)	$U_{z(central)}$ (mm)	Diferença Relativa (%)
150	6,35	0,02826	0,01621	-42,640
125	6,35	0,03688	0,01897	-48,563
100	6,35	0,04879	0,02539	-47,961
75	6,35	0,06484	0,03910	-39,698
50	6,35	0,09924	0,07285	-26,592
25	6,35	0,21152	0,18815	-11,049
150	8,00	0,02626	0,02626	0,000
125	8,00	0,02527	0,02528	0,040
100	8,00	0,03064	0,02825	-7,800
75	8,00	0,04445	0,03805	-14,398
50	8,00	0,07434	0,06497	-12,604
25	8,00	0,16419	0,15781	-3,886
125	9,53	0,03497	0,03499	0,057
100	9,53	0,03493	0,03493	0,000
75	9,53	0,04195	0,04195	0,000
50	9,53	0,06513	0,06488	-0,384
25	9,53	0,14641	0,14641	0,000
100	12,7	0,05387	0,05386	-0,019
75	12,7	0,05387	0,05387	0,000
50	12,7	0,07065	0,07066	0,014
25	12,7	0,13834	0,13834	0,000

Tabela C.10: Cinco Enrijecedores Transversais

h_s (mm)	t_s (mm)	$U_{z(máx)}$ (mm)	$U_{z(central)}$ (mm)	Diferença Relativa (%)
150	6,35	0,02114	0,02115	0,047
125	6,35	0,02507	0,02506	-0,040
100	6,35	0,03244	0,03245	0,031
75	6,35	0,04616	0,04615	-0,022
50	6,35	0,07680	0,07681	0,013
25	6,35	0,17709	0,17710	0,006
125	8,00	0,02949	0,02628	-10,885
100	8,00	0,03057	0,02987	-2,290
75	8,00	0,04044	0,04043	-0,025
50	8,00	0,06630	0,06630	0,000
25	8,00	0,14987	0,14986	-0,007
100	9,53	0,03860	0,03413	-11,580
75	9,53	0,04325	0,04111	-4,948
50	9,53	0,06382	0,06365	-0,266

25	9,53	0,13900	0,13899	-0,007
75	12,7	0,05976	0,05365	-10,224
50	12,7	0,07126	0,06738	-5,445
25	12,7	0,13342	0,13124	-1,634

Tabela C.11: Seis Enrijecedores Transversais

h_s (mm)	t_s (mm)	$U_{z(máx)}$ (mm)	$U_{z(central)}$ (mm)	Diferença Relativa (%)
175	4,75	0,01986	0,01657	-16,566
150	4,75	0,02242	0,01779	-20,651
125	4,75	0,02687	0,02118	-21,176
100	4,75	0,03456	0,02773	-19,763
125	6,35	0,02561	0,02503	-2,265
100	6,35	0,03031	0,02825	-6,796
75	6,35	0,04166	0,03832	-8,017
50	6,35	0,06898	0,06476	-6,118
25	6,35	0,15938	0,15621	-1,989
100	8,00	0,03601	0,03601	0,000
75	8,00	0,04171	0,04171	0,000
50	8,00	0,06451	0,06366	-1,318
25	8,00	0,14221	0,14220	-0,007
75	9,53	0,04872	0,04871	-0,021
50	9,53	0,06641	0,06641	0,000
25	9,53	0,13760	0,13760	0,000
50	12,7	0,07853	0,07852	-0,013
25	12,7	0,13611	0,13611	0,000

Tabela C.12: Sete Enrijecedores Transversais

h_s (mm)	t_s (mm)	$U_{z(máx)}$ (mm)	$U_{z(central)}$ (mm)	Diferença Relativa (%)
150	4,75	0,02204	0,02204	0,000
125	4,75	0,02477	0,02477	0,000
100	4,75	0,03089	0,03090	0,032
75	4,75	0,04316	0,04315	-0,023
100	6,35	0,03235	0,03235	0,000
75	6,35	0,04141	0,04141	0,000
50	6,35	0,06651	0,06650	-0,015
25	6,35	0,15248	0,15247	-0,007
75	8,00	0,04642	0,04617	-0,539
50	8,00	0,06612	0,06611	-0,015
25	8,00	0,14075	0,14075	0,000
75	9,53	0,05889	0,05758	-2,224
50	9,53	0,07055	0,07014	-0,581
25	9,53	0,13758	0,13749	-0,065
50	12,7	0,09103	0,08947	-1,714
25	12,7	0,13950	0,13857	-0,667

Tabela C.13: Oito Enrijecedores Transversais

h_s (mm)	t_s (mm)	$U_{z(máx)}$ (mm)	$U_{z(central)}$ (mm)	Diferença Relativa (%)
125	4,75	0,02574	0,02451	-4,779
100	4,75	0,03033	0,02862	-5,638
75	4,75	0,04153	0,03953	-4,816
100	6,35	0,03767	0,03765	-0,053
75	6,35	0,04326	0,04265	-1,410
50	6,35	0,06607	0,06510	-1,468
25	6,35	0,14777	0,14730	-0,318
75	8,00	0,05427	0,05427	0,000
50	8,00	0,06920	0,06919	-0,014
25	8,00	0,14086	0,14085	-0,007
50	9,53	0,07735	0,07735	0,000
25	9,53	0,14060	0,14059	-0,007

Tabela C.14: Nove Enrijecedores Transversais

h_s (mm)	t_s (mm)	$U_{z(máx)}$ (mm)	$U_{z(central)}$ (mm)	Diferença Relativa (%)
100	4,75	0,03154	0,03154	0,000
75	4,75	0,04145	0,04144	-0,024
75	6,35	0,04720	0,04720	0,000
50	6,35	0,06747	0,06747	0,000
25	6,35	0,14660	0,14659	-0,007
50	8,00	0,07084	0,07084	0,000
25	8,00	0,14223	0,14222	-0,007