

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

**ESTUDO DO ALGORITMO DE GAVER E O EMPREGO DE
ACELERADORES NO PROCESSO DE INVERSÃO NUMÉRICA
DA TRANSFORMADA DE LAPLACE**

por

Renan de Almeida Schmidt

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Modelagem Computacional

Profa. Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez
Orientadora
Prof. Dr. João Francisco Prolo Filho
Coorientador

Rio Grande, Outubro, 2024.

Renan de Almeida Schmidt

**“ESTUDO DO ALGORITMO DE GAVER E O EMPREGO DE ACELERADORES NO
PROCESSO DE INVERSAO NUM ERICA DA TRANSFORMADA DE LAPLACE”**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande - FURG, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área de concentração: Modelagem Computacional.

Aprovada em: 30/10/2024

BANCA EXAMINADORA



Documento assinado digitalmente

BARBARA DENICOL DO AMARAL RODRIGUEZ

Data: 30/10/2024 19:08:43-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez (Orientadora – FURG)



Documento assinado digitalmente

JOAO FRANCISCO PROLO FILHO

Data: 30/10/2024 22:32:32-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof Dr. João Francisco Prolo Filho (Coorientador – FURG)



Documento assinado digitalmente

MATHEUS JATKOSKE LAZO

Data: 06/11/2024 10:37:12-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Matheus Jatkoske Lazo (FURG)



Documento assinado digitalmente

ANTONIO GLEDSON DE OLIVEIRA GOULART

Data: 31/10/2024 18:59:24-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Antonio Gledson de Oliveira Goulart (FURG)



Documento assinado digitalmente

CLAUDIO ZEN PETERSEN

Data: 31/10/2024 12:05:48-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Claudio Zen Petersen (UFPel)

Rio Grande - RS
2024

Ficha Catalográfica

S349e Schmidt, Renan de Almeida.

Estudo do algoritmo de Gaver e o emprego de aceleradores no processo de inversão numérica da transformada de *Laplace* / Renan de Almeida Schmidt. – 2024.

142 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Rio Grande/RS, 2024.

Orientadora: Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez.

Coorientador: Dr. João Francisco Prolo Filho.

1. Transformada Inversa de *Laplace* 2. Funcionais de Gaver
3. Soma de Salzer 4. Transformada *u* de Levin 5. *Wynn-Rho*
I. Rodriguez, Bárbara Denicol do Amaral II. Prolo Filho, João
Francisco III. Título.

CDU 004

Catálogo na Fonte: Bibliotecário José Paulo dos Santos CRB 10/2344

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus pela vida, saúde e força ao longo desta jornada.

À minha família, especialmente aos meus pais, Darci e Elenir, por todo amor, apoio incondicional e incentivo. Sem vocês, nada disso seria possível.

Aos meus orientadores, Professora Bárbara e Professor João, por toda dedicação, atenção e paciência.

À minha igreja, meus irmãos em Cristo, pelo suporte emocional e espiritual.

Aos meus amigos e colegas, que compartilharam comigo momentos de aprendizado, desafios e conquistas, enriquecendo minha experiência e tornando o caminho mais leve

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro, ao Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional (PPGMC) e à Universidade Federal do Rio Grande (FURG).

A todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho, meu muito obrigado.

RESUMO

Neste trabalho apresenta-se um estudo sobre os Funcionais de Gaver, uma sequência, que é uma aproximação para a Transformada Inversa de Laplace, e três de seus aceleradores: a Soma de Salzer, a Transformada u de Levin e o Algoritmo Wynn-Rho. Estes métodos são aplicados para a inversão numérica de dois conjuntos: um de oito funções elementares, das quais cinco tem parâmetros variáveis e possuem diferentes comportamentos (4 exponenciais, 1 logarítmica e 3 oscilatórias), e um conjunto de três funções ditas com características especiais, cuja inversa analítica não é facilmente obtida. Os algoritmos implementados também foram empregados na obtenção da solução de quatro problemas de aplicação. A métrica utilizada para análise de desempenho dos métodos foi o Erro Absoluto Médio. Para cada valor do parâmetro variável presente nas funções elementares, foram avaliados o M ótimo (o valor de M que resulta no menor Erro Absoluto Médio), e o tempo de execução para cada M , na tentativa de perceber a sua influência nas técnicas estudadas. Por outro lado, a avaliação do desempenho para a inversão das funções com características especiais foi realizada fazendo uma comparação com os resultados do Método Stehfest, gerados por Freitas (2022), por meio do Erro Absoluto Médio. Esta métrica também foi utilizada para análise de desempenho dos métodos para os problemas de aplicação, porém para três delas o erro foi calculado em relação a uma variável. Os resultados mostraram que os parâmetros influenciam de forma relevante no Erro Absoluto Médio, principalmente em funções com características oscilatórias, mas não no tempo de execução. A inversão da solução do problema de Difusão de Mercúrio na Água apresentou um indicativo de que, a Transformada u de Levin e o Algoritmo Wynn-Rho, não podem ser recomendados para inverter a função de Heaviside.

Palavras-chaves: Transformada Inversa de Laplace; Funcionais de Gaver; Soma de Salzer; Transformada u de Levin, Wynn-Rho.

ABSTRACT

This work presents a study on Gaver's Functionals, a sequence that approximates the Inverse Laplace Transform, and three of its accelerators: Salzer Summation, Levin's u -Transform, and the Wynn-Rho Algorithm. These methods are applied for the numerical inversion of two sets: one consisting of eight elementary functions, five of which have variable parameters and display different behaviors (four exponential, one logarithmic, and three oscillatory), and a set of three functions said to have special characteristics, whose analytical inverse is not easily obtained. The implemented algorithms were also employed to solve four applied problems. The metric used for performance analysis of the methods was the Mean Absolute Error. For each value of the variable parameter present in the elementary functions, the optimal M (the value of M that results in the smallest Mean Absolute Error) and the execution time for each M were evaluated, to observe their influence on the studied techniques. On the other hand, the performance evaluation for the inversion of functions with special characteristics was conducted by comparing the results with Stehfest's Method, generated by Freitas (2022), using the Mean Absolute Error. This metric was also used to analyze the performance of the methods in the applied problems; however, for three of them, the error was calculated concerning a variable. The results showed that the parameters significantly influenced the Mean Absolute Error, especially for functions with oscillatory characteristics, but not the execution time. The inversion of the solution to the problem of Mercury Diffusion in Water indicated that Levin's u -Transform and the Wynn-Rho Algorithm cannot be recommended for inverting the Heaviside function.

Keywords: Inverse Laplace Transform; Gaver Functionals; Salzer Summation; Levin's u -Transform; Wynn-Rho.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	15
2	OBJETIVOS	18
3	MÉTODOS NUMÉRICOS PARA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE	19
	3.1 Funcionais de Gaver	20
	3.2 Soma de Salzer	21
	3.3 Algoritmo Wynn-Rho	22
	3.4 Transformada u de Levin	23
4	RESULTADOS PARA A INVERSÃO DO CONJUNTO DE FUNÇÕES ELEMENTARES	25
	4.1 Inversão de F_1	27
	4.2 Inversão de F_2	32
	4.3 Inversão de F_3	38
	4.4 Inversão de F_4	44
	4.5 Inversão de F_5	47
	4.6 Inversão de F_6	52
	4.7 Inversão de F_7	74
	4.8 Inversão de F_8	77
	4.9 Análise dos Resultados	79
5	RESULTADOS PARA A INVERSÃO DE FUNÇÕES COM CARACTERÍSTICAS ESPECIAIS	82
	5.1 Inversão de F_9	82
	5.2 Inversão de F_{10}	87
	5.3 Inversão de F_{11}	91
6	EMPREGO DOS MÉTODOS NAS APLICAÇÕES	97
	6.1 Análise de Circuitos Elétricos	97
	6.2 Problema de Transporte de Solute em Meio Poroso	109
	6.3 Difusão de Íons	117
	6.4 Difusão de Mercúrio na Água	123
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	131
8	REFERÊNCIAS	133
9	APÊNDICE	137
	9.1 Transformada de Laplace	137
	9.2 Propriedades da Transformada de Laplace	137
	9.3 Transformada Inversa de Laplace	139
	9.4 Propriedades da Transformada Inversa de Laplace	139
	9.5 Métodos Analíticos para a Transformada Inversa de Laplace	140

9.5.1	Método da Expansão em Séries	140
-------	--	-----

LISTA DE FIGURAS

3.1	Fluxograma para os Funcionais de Gaver	21
3.2	Fluxograma para a Soma de Salzer	22
3.3	Fluxograma para o Algoritmo Wynn-Rho.	23
3.4	Fluxograma para a Transformada u de Levin.	24
4.1	Resultados para a inversão de F_1 , com $b = 1$	28
4.2	Resultados para a inversão de F_1 , com $b = 5$	28
4.3	Resultados para a inversão de F_1 , com $b = 10$	29
4.4	Resultados para a inversão de F_1 , com $b = 20$	29
4.5	Resultados para a inversão de F_2 , com $a = 1$	33
4.6	Resultados para a inversão de F_2 , com $a = 3$	34
4.7	Resultados para a inversão de F_2 , com $a = 5$	34
4.8	Resultados para a inversão de F_2 , com $a = 10$	35
4.9	Resultados para a inversão de F_3 , com $a = 1$	39
4.10	Resultados para a inversão de F_3 , com $a = 3$	40
4.11	Resultados para a inversão de F_3 , com $a = 5$	40
4.12	Resultados para a inversão de F_3 , com $a = 10$	41
4.13	Resultados para a inversão de F_4	45
4.14	Resultados para a inversão de F_5 , com $b = 1$	48
4.15	Resultados para a inversão de F_5 , com $b = 1,5$	48
4.16	Resultados para a inversão de F_5 , com $b = 2$	49
4.17	Resultados para a inversão de F_5 , com $b = 3,5$	49
4.18	Resultados para a inversão de F_6 , com $a = 1$ e $b = -3$	54
4.19	Resultados para a inversão de F_6 , com $a = 1$ e $b = -1$	55
4.20	Resultados para a inversão de F_6 , com $a = 1$ e $b = 1$	55
4.21	Resultados para a inversão de F_6 , com $a = 1$ e $b = 2$	56
4.22	Resultados para a inversão de F_6 , com $a = 3$ e $b = -3$	56
4.23	Resultados para a inversão de F_6 , com $a = 3$ e $b = -1$	57
4.24	Resultados para a inversão de F_6 , com $a = 3$ e $b = 1$	57
4.25	Resultados para a inversão de F_6 , com $a = 3$ e $b = 2$	58
4.26	Resultados para a inversão de F_6 , com $a = 5$ e $b = -3$	58
4.27	Resultados para a inversão de F_6 , com $a = 5$ e $b = -1$	59
4.28	Resultados para a inversão de F_6 , com $a = 5$ e $b = 1$	59
4.29	Resultados para a inversão de F_6 , com $a = 5$ e $b = 2$	60
4.30	Resultados para a inversão de F_6 , com $a = 10$ e $b = -3$	60
4.31	Resultados para a inversão de F_6 , com $a = 10$ e $b = -1$	61
4.32	Resultados para a inversão de F_6 , com $a = 10$ e $b = 1$	61
4.33	Resultados para a inversão de F_6 , com $a = 10$ e $b = 2$	62
4.34	Resultados para a inversão de F_7	75

4.35	Resultados para a inversão de F_8	77
5.1	Resultados para a inversão de F_9 , utilizando os Funcionais de Gaver . . .	85
5.2	Resultados para a inversão de F_9 , utilizando a Transformada u de Levin .	86
5.3	Resultados para a inversão de F_9 , utilizando a Soma de Salzer	86
5.4	Resultados para a inversão de F_9 , utilizando o Algoritmo Wynn-Rho . . .	87
5.5	Resultados para a inversão de F_{10} , utilizando os Funcionais de Gaver . . .	90
5.6	Resultados para a inversão de F_{10} , utilizando a Transformada u de Levin .	90
5.7	Resultados para a inversão de F_{10} , utilizando a Soma de Salzer	91
5.8	Resultados para a inversão de F_{10} , utilizando o Algoritmo Wynn-Rho . . .	91
5.9	Resultados para a inversão de F_{11} , utilizando os Funcionais de Gaver . . .	94
5.10	Resultados para a inversão de F_{11} , utilizando a Transformada u de Levin .	95
5.11	Resultados para a inversão de F_{11} , utilizando a Soma de Salzer	95
5.12	Resultados para a inversão de F_{11} , utilizando o Algoritmo Wynn-Rho . . .	96
6.1	Circuito elétrico.	97
6.2	Resultados para as correntes I obtidos por meio dos Funcionais de Gaver, com $M = 17$	106
6.3	Resultados para as Tensões V obtidos por meio dos Funcionais de Gaver, com $M = 17$	106
6.4	Resultados para as correntes I obtidos por meio da Transformada u de Levin, com $M = 17$	107
6.5	Resultados para as Tensões V obtidos por meio da Transformada u de Levin, com $M = 17$	107
6.6	Resultados para as correntes I obtidos por meio da Soma de Salzer, com $M = 12$	108
6.7	Resultados para as Tensões V obtidos por meio da Soma de Salzer, com $M = 12$	108
6.8	Resultados para as correntes I obtidos por meio do Algoritmo Wynn-Rho, com $M = 14$	109
6.9	Resultados para as Tensões V obtidos por meio do Algoritmo Wynn-Rho, com $M = 16$	109
6.10	Resultados para o problema de Transporte de Solute, obtidos por meio dos Funcionais de Gaver, com $M = 17$	111
6.11	Resultados para o problema de Transporte de Solute, obtidos por meio da Transformada u de Levin, com $M = 9$	112
6.12	Resultados para o problema de Transporte de Solute, obtidos por meio da Soma de Salzer, com $M = 10$	112
6.13	Resultados para o problema de Transporte de Solute, obtidos por meio do Algoritmo Wynn-Rho, com $M = 12$	113
6.14	Representação do problema de difusão de íons.	117

6.15	Resultados para o problema de Difusão de Íons, obtidos por meio dos Funcionais de Gaver, com $M = 15$	122
6.16	Resultados para o problema de Difusão de Íons, obtidos por meio da Transformada u de Levin, com $M = 9$	122
6.17	Resultados para o problema de Difusão de Íons, obtidos por meio da Soma de Salzer, com $M = 9$	123
6.18	Resultados para o problema de Difusão de Íons, obtidos por meio do Algoritmo Wynn-Rho, com $M = 12$	123
6.19	Resultado Analítico para o problema de Difusão de Mercúrio na Água. . .	126
6.20	Resultado para o problema de Difusão de Mercúrio na Água, por meio dos Funcionais de Gaver, com $M = 17$	129
6.21	Resultado para o problema de Difusão de Mercúrio na Água, por meio da Transformada u de Levin, com $M = 10$	129
6.22	Resultado para o problema de Difusão de Mercúrio na Água, por meio da Soma de Salzer, com $M = 11$	130
6.23	Resultado para o problema de Difusão de Mercúrio na Água, por meio do Algoritmo Wynn-Rho, com $M = 12$	130

LISTA DE TABELAS

4.1	Transformada de Laplace para funções elementares	25
4.2	M ótimos e ordem do $\overline{E}_{abs}$ para a inversão de F_1	27
4.3	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_1 por meio dos Funcionais de Gaver.	30
4.4	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_1 por meio da Transformada u de Levin.	31
4.5	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_1 por meio da Soma de Salzer.	32
4.6	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_1 por meio do Algoritmo Wynn-Rho.	32
4.7	M ótimos e ordem do $\overline{E}_{abs}$ para a inversão de F_2	33
4.8	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_2 por meio dos Funcionais de Gaver.	36
4.9	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_2 por meio da Transformada u de Levin.	37
4.10	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_2 por meio da Soma de Salzer.	38
4.11	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_2 por meio do Algoritmo Wynn-Rho.	38
4.12	M ótimos e ordem do $\overline{E}_{abs}$ para a inversão de F_3	39
4.13	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_3 por meio dos Funcionais de Gaver.	42
4.14	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_3 por meio da Transformada u de Levin.	43
4.15	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_3 por meio da Soma de Salzer.	44
4.16	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_3 por meio do Algoritmo Wynn-Rho.	44
4.17	M ótimos e ordem do $\overline{E}_{abs}$ para a inversão de F_4	45
4.18	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_4	46
4.19	M ótimos e ordem do $\overline{E}_{abs}$ para a inversão de F_5	47
4.20	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_5 por meio dos Funcionais de Gaver.	50
4.21	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_5 por meio da Transformada u de Levin.	51
4.22	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_5 por meio da Soma de Salzer.	52
4.23	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_5 por meio do Algoritmo Wynn-Rho.	52
4.24	M ótimos e ordem do $\overline{E}_{abs}$ para a inversão de F_6 para os Funcionais de Gaver.	53

4.25	M ótimos e ordem do $\overline{E}_{abs}$ para a inversão de F_6 para a Transformada u de Levin.	53
4.26	M ótimos e ordem do $\overline{E}_{abs}$ para a inversão de F_6 para a Soma de Salzer.	53
4.27	M ótimos e ordem do $\overline{E}_{abs}$ para a inversão de F_6 para o Algoritmo Wynn-Rho.	53
4.28	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_6 , com $a = 1$, por meio dos Funcionais de Gaver.	63
4.29	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_6 , com $a = 3$, por meio dos Funcionais de Gaver.	64
4.30	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_6 , com $a = 5$, por meio dos Funcionais de Gaver.	65
4.31	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_6 , com $a = 10$, por meio dos Funcionais de Gaver.	66
4.32	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_6 , com $a = 1$, por meio da Transformada u de Levin.	67
4.33	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_6 , com $a = 3$, por meio da Transformada u de Levin.	68
4.34	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_6 , com $a = 5$, por meio da Transformada u de Levin.	69
4.35	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_6 , com $a = 10$, por meio da Transformada u de Levin.	70
4.36	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_6 , com $a = 1$, por meio da Soma de Salzer.	71
4.37	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_6 , com $a = 3$, por meio da Soma de Salzer.	71
4.38	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_6 , com $a = 5$, por meio da Soma de Salzer.	72
4.39	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_6 , com $a = 10$, por meio da Soma de Salzer.	72
4.40	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_6 , com $a = 1$, por meio do Algoritmo Wynn-Rho.	73
4.41	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_6 , com $a = 3$, por meio do Algoritmo Wynn-Rho.	73
4.42	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_6 , com $a = 5$, por meio do Algoritmo Wynn-Rho.	73
4.43	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_6 , com $a = 10$, por meio do Algoritmo Wynn-Rho.	74
4.44	M ótimos e ordem do $\overline{E}_{abs}$ para a inversão de F_7	74
4.45	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_7	76
4.46	M ótimos e ordem do $\overline{E}_{abs}$ para a inversão de F_8	77

4.47	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_8	78
4.48	Comparações dos M ótimos para F_6	79
4.49	Comparações dos M ótimos.	80
4.50	Tempos de Execução (s) para F_4	81
5.1	Transformada de Laplace para funções com características especiais	82
5.2	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_9 em relação ao Método Stehfest.	83
5.3	Resultados para a inversão de F_9 por meio dos Funcionais de Gaver. . . .	83
5.4	Resultados para a inversão de F_9 por meio da Transformada u de Levin. .	84
5.5	Resultados para a inversão de F_9 por meio da Soma de Salzer.	84
5.6	Resultados para a inversão de F_9 por meio do Algoritmo Wynn-Rho. . . .	85
5.7	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_{10} em relação ao Método Stehfest.	87
5.8	Resultados para a inversão de F_{10} por meio dos Funcionais de Gaver. . . .	88
5.9	Resultados para a inversão de F_{10} por meio da Transformada u de Levin. .	88
5.10	Resultados para a inversão de F_{10} por meio da Soma de Salzer.	89
5.11	Resultados para a inversão de F_{10} por meio do Algoritmo Wynn-Rho. . . .	89
5.12	Erros Absolutos Médios para a inversão de F_{11} em relação ao Método Stehfest.	92
5.13	Resultados para a inversão de F_{11} por meio dos Funcionais de Gaver. . . .	92
5.14	Resultados para a inversão de F_{11} por meio da Transformada u de Levin. .	93
5.15	Resultados para a inversão de F_{11} por meio da Soma de Salzer.	93
5.16	Resultados para a inversão de F_{11} por meio do Algoritmo Wynn-Rho. . . .	94
6.1	Correntes $I(s)$ e $i(t)$	98
6.2	Tensões $V(s)$ e $v(t)$	98
6.3	M ótimos e ordem do $\overline{E}_{abs}$ para as correntes I	99
6.4	M ótimos e ordem do $\overline{E}_{abs}$ para as tensões V	99
6.5	$\overline{E}_{abs}$ para a inversão das correntes I por meio dos Funcionais de Gaver . .	100
6.6	$\overline{E}_{abs}$ para a inversão das tensões V por meio dos Funcionais de Gaver. . .	101
6.7	$\overline{E}_{abs}$ para a inversão das correntes I por meio da Transformada u de Levin	102
6.8	$\overline{E}_{abs}$ para a inversão das tensões V por meio da Transformada u de Levin.	103
6.9	$\overline{E}_{abs}$ para a inversão das correntes I por meio da Soma de Salzer	104
6.10	$\overline{E}_{abs}$ para a inversão das tensões V por meio da Soma de Salzer.	104
6.11	$\overline{E}_{abs}$ para a inversão das correntes I por meio do Algoritmo Wynn-Rho. .	105
6.12	$\overline{E}_{abs}$ para a inversão das tensões V por meio do Algoritmo Wynn-Rho. . .	105
6.13	M ótimos e ordem do $\overline{E}_{abs}$ em relação a t	111
6.14	$\overline{E}_{abs}$ para o problema de Transporte de Solutos, em relação a t , por meio dos Funcionais de Gaver.	114
6.15	$\overline{E}_{abs}$ para o problema de Transporte de Solutos por meio da Transformada u de Levin.	115

6.16	$\overline{E}_{abs}$ para o problema de Transporte de Solute por meio da Soma de Salzer.	116
6.17	$\overline{E}_{abs}$ para o problema de Transporte de Solute por meio do Algoritmo Wynn-Rho.	116
6.18	Nomenclatura e valores dos parâmetros utilizados.	117
6.19	M ótimos e ordem do $\overline{E}_{abs}$ em relação a t	118
6.20	$\overline{E}_{abs}$ para o problema de Difusão de Íons por meio dos Funcionais de Gaver.	119
6.21	$\overline{E}_{abs}$ para o problema de Difusão de Íons por meio da Transformada u de Levin.	120
6.22	$\overline{E}_{abs}$ para o problema de Difusão de Íons por meio da Soma de Salzer. . .	121
6.23	$\overline{E}_{abs}$ para o problema de Difusão de Íons por meio do Algoritmo Wynn-Rho.	121
6.24	Nomenclatura e valores dos parâmetros utilizados.	124
6.25	$\overline{E}_{abs}$ em relação a y para a solução do problema de Difusão de Mercúrio na Água por meio dos Funcionais de Gaver.	127
6.26	$\overline{E}_{abs}$ em relação a y para a solução do problema de Difusão de Mercúrio na Água por meio da Transformada u de Levin.	127
6.27	$\overline{E}_{abs}$ em relação a y para a solução do problema de Difusão de Mercúrio na Água por meio da Soma de Salzer.	128
6.28	$\overline{E}_{abs}$ para o problema de Difusão de Mercúrio na Água por meio do Algoritmo Wynn-Rho.	128

LISTA DE SÍMBOLOS

F	Função no Domínio s
f	Função no Domínio t
a, b	Parâmetros livres
M	Parâmetro dos métodos numéricos
$\overline{E}_{abs}$	Erro Absoluto Médio
f_k	k-ésimo Funcional de Gaver
τ	Parâmetro dos Funcionais de Gaver
Δ	Operador de diferença
R	Função recursiva para os Funcionais de Gaver
W_k	Pesos associados aos métodos
ρ	Função recursiva do Algoritmo Wynn-Rho
γ	Constante de Euler
c	Capacitância
v	Tensão
V	Tensão no Domínio s
i	Corrente
I	Corrente no Domínio s
D_{hd}	Coefficiente de dispersão hidrodinâmica
C	Concentração
$\overline{C}$	Concentração no Domínio s
L	Comprimento
N_x	Número de pontos avaliados na direção x
N_t	Número de pontos avaliados na direção t
N	Truncamento do somatório
k_x	Coefficiente de Difusão em x
k_y	Coefficiente de Difusão em y
ν	Viscosidade Cinemática
Re	Número de Reynolds
Pe_y	Número de Péclet em y
u	Velocidade média da água
D_f	Coefficiente de difusão
D	Termo fonte

1 INTRODUÇÃO

O emprego de modelos matemáticos desempenha um papel fundamental na compreensão e na resolução de problemas em diversas áreas do conhecimento como a Equação Unidimensional de Advecção-Difusão, que descreve processos de transporte de soluto em meios porosos (Pilatti, 2019) e as Equações de Difusão (que podem ser usadas para analisar o transporte de calor e de massa em diferentes meios). Tais representações quantitativas permitem que fenômenos complexos sejam descritos de forma simplificada ou aproximada, e testados através da comparação com os dados conhecidos ou previstos com as medidas tomadas no mundo real (Sodré, 2007).

Os modelos citados, assim como outros exemplos encontrados na literatura, são representados por Equações Diferenciais Parciais (EDP's), equações que contêm derivadas parciais de uma função de várias variáveis. Estas equações podem ser solucionadas numericamente, utilizando técnicas como o Método das Diferenças Finitas (Franco, 2006), ou analiticamente através do Método de Separação de Variáveis, um dos métodos mais antigos para a solução de EDP's, usado por D'Alembert, Daniel Bernoulli e Euler por volta de 1750 (Boyce e DiPrima, 2001). Existem outras formas de determinar a solução analítica, entre estas maneiras, tem-se o emprego o emprego de Transformadas Integrais como a Transformada de Laplace.

A Transformada de Laplace, desenvolvida por Pierre-Simon de Laplace (1749–1827), é uma Transformada Integral que converte funções no domínio do tempo (t) em funções no domínio das frequências (s) (Irwin, 2000). Ela é uma ferramenta muito versátil utilizada na Eletrotécnica e na Mecânica (Doetsch, 1974), em Sistemas Dinâmicos de Controle (Silva, 2023) e na Geofísica (Buttkus, 2000). A aplicação desta técnica em uma EDP a transforma em um problema, possivelmente de mais fácil solução, em outro domínio. Porém, a solução obtida desta maneira necessita ser “convertida” para o seu domínio original, ou seja, é necessário “fazer o caminho de volta”, do domínio de Laplace para o Real. Para este fim, é empregada a Transformada Inversa de Laplace (Schiff, 2013).

A Transformada Inversa de Laplace é uma integral de contorno, comumente definida no contorno de Bromwich. Porém, resolver esta integral de maneira analítica é muito trabalhoso para funções mais complexas, e dependendo do problema abordado até impossível (Wang et al., 2017). Por esse motivo, é necessário encontrar uma forma de calcular a Transformada Inversa de Laplace. Como alternativa à Fórmula de Inversão de Bromwich tem-se utilizado métodos numéricos. Existem várias técnicas para este processo (Cohen, 2007), algumas delas são baseadas na deformação do contorno de Bromwich (Talbot, 1979), outras utilizam as Séries de Fourier (Davies and Martin, 1979), ou ainda tem como base a Fórmula de Post-Widder (Valkó e Abate, 2004; Gaver, 1966; Zakian, 1969).

É importante ressaltar que, de acordo com Bellman et al. (1966), não se pode esperar que qualquer método para a inversão numérica da Transformada de Laplace irá funcionar igualmente bem para todos os casos. A razão para isso é o fato de que mudanças arbitrariamente

pequenas em $F(s)$ podem produzir mudanças arbitrariamente grandes em $f(t)$. Em Graf (2004), é dito ainda que a inversão numérica de Laplace é um problema mal-condicionado e Egonmwan (2012) fala que o próprio problema da inversão da Transformada de Laplace é extremamente mal-posto (pela definição de Hadamard). Essas características tornam a análise de diferentes algoritmos necessária. Entre eles estão os Funcionais de Gaver, uma técnica que tem como base a Fórmula de Post-Widder (Frolov e Kitaev, 1998).

Os Funcionais de Gaver são uma sequência, utilizada para obter informações numéricas relativas ao comportamento de processos estocásticos dependentes do tempo, e também é uma aproximação para a Transformada Inversa de Laplace (Gaver, 1966). Apesar de sua utilidade neste processo, o comportamento de convergência da sequência é logarítmico, o que faz um esquema de aceleração ser desejável (Valkó e Abate, 2004). Entre os seus aceleradores estão: a Soma de Salzer, o Algoritmo Wynn-Rho e a Transformada u de Levin.

A Soma de Salzer é um método linear de aceleração de séries, proposto por Salzer (1955) como um método simples para a acelerar certas séries que convergem lentamente. Salzer testa esta técnica em quatro séries monótonas com convergência lenta, encontrando problemas para aproximar séries alternadas. Stehfest (1970) utiliza este esquema de aceleração no chamado Método Gaver-Stehfest, no qual o autor acelera os Funcionais de Gaver para calcular numericamente a Transformada Inversa de Laplace, este método tornou-se muito popular devido a sua simplicidade e eficiência (Lemos et al., 2021).

Diferente da Soma de Salzer, que é um acelerador para séries, o Algoritmo Wynn-Rho (Wynn, 1956) é um método de aceleração recursivo não-linear para sequências, o qual Valkó e Abate (2004) avaliaram como sendo superior a Soma de Salzer, uma vez que os resultados foram obtidos com mais dígitos significativos.

Em Levin (1972), se utiliza sequências não lineares para transformar sequências, de maneira a induzir ou acelerar a sua convergência. Em seu trabalho, ele apresenta as Transformadas t , u e v , onde ele ressalta que a Transformada u gera resultados muito bons para sequências monótonas de convergência lenta.

O uso desses aceleradores pode também ser visto nos trabalhos de: Wimp (1981), que trata sobre a transformação de sequências, onde define múltiplos esquemas de aceleração para os Funcionais de Gaver; Adamek et al. (2017) estudaram os algoritmos Gaver-Stehfest, Wynn-Rho, Talbot-Fixo e a Transformada Rápida de Fourier combinada com o Algoritmo Wynn-Épsilon para calcular a Transformada Inversa de Laplace, com o objetivo de encontrar soluções precisas para problemas de elastodinâmica. Neste último, os autores concluíram que a Transformada Rápida de Fourier combinada com o Algoritmo Wynn-Épsilon foi o melhor entre os métodos estudados.

Já em Defreitas e Kane (2022), são analisadas as performances de cinco algoritmos para a inversão numérica da Transformada de Laplace: a Expansão em Séries de Fourier; o esquema de aceleração de Salzer para os Funcionais de Gaver; o acelerador de Stehfest para os Funcionais de Gaver; o Método Talbot com a deformação de contorno proposta por Abate e Valkó (2004), e a transformação proposta por Logan (2013). Estes métodos foram testados com

16 dígitos de precisão e em ambientes de multi-precisão. Além dos autores deste trabalho atestarem a dificuldade do Método de Stehfest e Salzer-Gaver para aproximar funções periódicas, também mostram que, com multi-precisão, Salzer-Gaver é o algoritmo com maior acurácia.

Dentro deste contexto, neste trabalho serão estudados os Funcionais de Gaver e três de seus aceleradores, a Soma de Salzer, a Transformada u de Levin e o Algoritmo Wynn-Who. Estes três aceleradores foram escolhidos porque geraram os melhores resultados no trabalho de Valkó e Abate (2004). Para analisar o desempenho dos métodos, os algoritmos implementados serão aplicados em um conjunto de oito funções elementares, onde cinco destas funções possuem parâmetros variáveis. Além disso, quatro das funções do conjunto possuem comportamento exponencial, três têm características oscilatórias e uma possui comportamento logarítmico. Para cada função e cada parâmetro M dos métodos, o Erro Absoluto Médio será utilizado como métrica para a análise de desempenho, de maneira que quanto menor o valor do Erro Absoluto Médio, melhor é o resultado.

As técnicas aqui estudadas, de maneira similar ao trabalho de Hassanzadeh e Pooladi-Darvish (2007), também serão utilizadas em quatro aplicações: o problema de Análise de Circuitos Elétricos do trabalho de Paz et al. (2023); o problema de Difusão de Mercúrio na Água de Freitas (2022); o problema de Difusão de Íons de Ferreira et al. (2023) e no problema de Transporte de Solute em Meio Poroso do trabalho de Pilatti (2019). A análise dos resultados para estas aplicações também irá utilizar o Erro Absoluto Médio como métrica.

Vale ressaltar, que no estudo bibliográfico realizado para o embasamento teórico deste trabalho, não foram encontradas referências na literatura da aplicação das técnicas aqui propostas na inversão da Transformada de Laplace considerando funções com parâmetros livres e no conjunto de funções destacadas por Abate e Valkó (2004) como questões de aplicação. Destaca-se, ainda, a análise da influência dos parâmetros livres no desempenho dos métodos.

Para atingir os objetivos propostos, o trabalho foi organizado da seguinte forma: no Capítulo 2 são apresentados os objetivos do estudo; no Capítulo 3 são abordados os métodos de inversão numérica, os Funcionais de Gaver, e três aceleradores: a Soma de Salzer, a Transformada u de Levin e o Algoritmo Wynn-Rho; nos Capítulos 4 e 5 são apresentados: o Erro Absoluto Médio, os conjuntos de funções elementares e os das funções destacadas por Abate e Valkó (2004), os resultados obtidos pelos algoritmos implementados (que foram aplicados nestes dois conjuntos) e a discussão sobre os mesmos; no Capítulo 6 os métodos estudados serão empregados na obtenção da solução de quatro problemas de aplicação: de Análise de Circuitos Elétricos, Transporte de Solute em Meio Poroso, Difusão de Íons e Difusão de Mercúrio da Água; no Capítulo 7 estão as considerações finais. No apêndice são apresentadas definições e propriedades da Transformada de Laplace e da Transformada Inversa de Laplace, assim como o Método de Expansão por Séries, que é um método para determinar a inversa da Transformada de Laplace de forma analítica.

2 OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho é realizar um experimento numérico, implementando computacionalmente as técnicas de inversão numérica para a Transformada de Laplace baseadas na aceleração dos Funcionais de Gaver.

No processo será verificada sua aplicabilidade em um conjunto de oito funções elementares, três funções com características especiais e em quatro aplicações. Como objetivos específicos, propõem-se:

- Apresentar os Funcionais de Gaver, e três de seus aceleradores, a saber, a Soma de Salzer, a Transformada u de Levin e o Algoritmo Wynn-Rho;
- Validar os algoritmos dos Funcionais de Gaver, da Soma de Salzer, Transformada u de Levin e Algoritmo Wynn-Rho implementados;
- Analisar os resultados obtidos pelos Funcionais de Gaver, Soma de Salzer, Transformada u de Levin e Algoritmo Wynn-Rho na inversão de um conjunto de oito funções elementares e outras três destacadas por Valkó e Abate (2004) como questões de aplicações.
- Estudar a influência dos parâmetros livres a e b nos métodos analisados;
- Aplicar os algoritmos nos quatro problemas de aplicação propostos, e analisar os resultados obtidos.
- Determinar o M ótimo para cada função do conjunto de funções elementares e para cada uma das aplicações, através do cálculo do Erro Absoluto Médio;
- Comparar os algoritmos e fazer recomendações para a sua utilização.

3 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Spiegel (1965) define a Transformada de Laplace como

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (3.1)$$

onde $F(s)$ é a função $f(t)$ no domínio das frequências, e s é uma variável complexa. Esta mudança de domínio é útil na resolução de EDP's, utilidade que reside na seguinte propriedade:

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{n-1}(0), \quad (3.2)$$

onde $f'(t)$, $f''(t)$, $\dots$, $f^{n-1}(t)$ são contínuas em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial, e $f^n(t)$ é contínua por partes no mesmo intervalo (Boyce e DiPrima, 2001). Esta propriedade permite transformar uma EDP, por meio da equação (3.1), em um problema em outro domínio. Porém, a solução deste novo problema está no domínio complexo. Para trazer-lá de volta ao domínio real, é aplicada a Transformada Inversa de Laplace.

A Transformada Inversa de Laplace é definida pela integral de contorno

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(s) e^{st} ds, \quad (3.3)$$

onde $F(s)$ é uma função que depende da variável complexa s e C é um contorno escolhido cuidadosamente (Bellman et al., 1966). Um dos contornos no qual a transformada inversa pode ser definida é o contorno de Bromwich, dado por

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s) e^{st} ds. \quad (3.4)$$

A inversão da Transformada de Laplace pode ser aplicada na solução de muitos problemas, porém a integral da equação (3.3) é instável (Bellman et al., 1966), ou seja, uma pequena mudança em $F(s)$ não acarreta em uma mudança igualmente pequena em $f(t)$. Além disso, em muitas aplicações, é impossível realizar a inversão analítica (Wang et al., 2017).

Por conta da instabilidade da Transformada Inversa de Laplace, apontada por Bellman et al. (1966), Graf (2004) e Egonmwan (2012), a investigação de diferentes métodos numéricos para este fim torna-se imprescindível, especialmente por não haver um algoritmo que funcione bem para todos os casos.

Neste capítulo serão abordados os Funcionais de Gaver, que são a base para muitos métodos para a inversão numérica da Transformada de Laplace, como a Soma de Salzer, a Transformada u de Levin e o Algoritmo Wynn-Rho, aceleradores dos Funcionais de Gaver. As definições apresentadas aqui podem ser encontradas em Gaver (1966) e Valkó e Abate (2004).

Os métodos estudados possuem um parâmetro $M \in \mathbb{N}$ que melhora a precisão da aproximação quando seu valor é aumentado. A precisão aumenta até um determinado valor

de M , o qual será chamado de M ótimo, e após esse valor a precisão diminui. Esse fato será mostrado no Capítulo 4 para os Funcionais de Gaver e a Soma de Salzer. Isto também ocorre para a Transformada u de Levin e para o Algoritmo Wynn-Rho, porém como estas duas técnicas são não-lineares, este comportamento ocorre de forma um pouco diferente.

3.1 Funcionais de Gaver

A sequência de Funcionais de Gaver, definidas por Gaver (1966), é uma aproximação para a Transformada Inversa de Laplace baseada no Teorema de Post-Widder (Abate e Valkó, 2004), definido pelo Teorema 3.1.

Teorema 3.1. (Teorema de Post-Widder ou Fórmula de Inversão de Post-Widder):
Se a integral

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \quad (3.5)$$

converge para todo $s > \gamma$, então

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{t}\right)^{n+1} F^{(n)}\left(\frac{n}{t}\right) \quad (3.6)$$

para todo ponto $t > 0$ da continuidade de $f(t)$ (Tomaschewski, 2012).

Cohen (2007) afirma que a vantagem do emprego da equação (3.6) está no fato de que f é expressa em termos de F e suas derivadas no eixo real. Porém, a desvantagem é que f converge lentamente. Também pode-se observar que a equação (3.6) emprega derivadas de ordem alta, o que é difícil de ser avaliado numericamente (Tomaschewski, 2012).

O cálculo das derivadas de altas ordens na equação (3.6) pode ser contornado utilizando os Funcionais de Gaver, onde elas são substituídas por diferenças (Adamek et al., 2017), gerando a expressão

$$f_M(t) = (-1)^M \tau M \binom{2M}{M} \Delta^M F(M\tau) = M\tau \sum_{j=0}^M (-1)^j \binom{M}{j} F((M+j)\tau) , \quad (3.7)$$

onde $\tau = \frac{\ln(2)}{t}$ e Δ é o operador de diferença, ou seja,

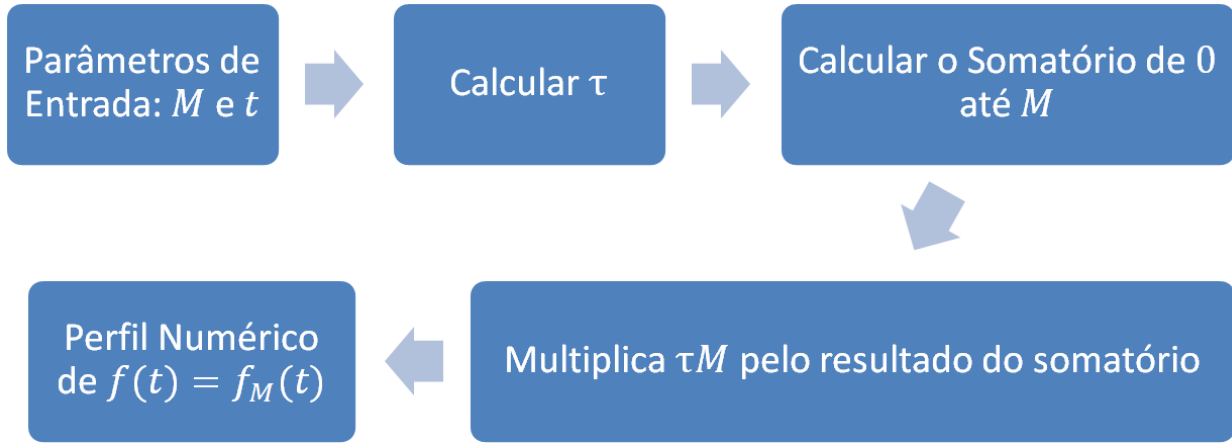
$$\Delta F(n\tau) = F((n+1)\tau) - F(n\tau) . \quad (3.8)$$

Estes funcionais também podem ser definidos de forma recursiva, tal que

$$\begin{aligned} R_0^{(n)} &= n\tau F(n\tau) , & n &\geq 1 ; \\ R_M^{(n)} &= \left(1 + \frac{n}{M}\right) R_{M-1}^{(n)} - \left(\frac{n}{M}\right) R_{M-1}^{(n+1)} , & M &\geq 1, n \geq M ; \\ f_M &= R_M^{(M)} . \end{aligned} \quad (3.9)$$

Apesar da utilidade destes funcionais como aproximação para a inversa da Transformada de Laplace, a sua convergência tem comportamento logarítmico, o que requer um esquema de aceleração (Valkó e Abate, 2004), como a Soma de Salzer, a Transformada u de Levin ou o Algoritmo Wynn-Rho. A implementação dos Funcionais de Gaver é representada pela Figura 3.1.

Figura 3.1: Fluxograma para os Funcionais de Gaver



Fonte: do autor

3.2 Soma de Salzer

A Soma de Salzer é um método de aceleração linear (Valkó e Abate, 2004). Este acelerador consiste em ajustar um polinômio de Lagrange em $1/s$ à transformada da função e inverter o polinômio termo a termo (Shircliffe e Stephenson, 1961). Aplicando a Soma de Salzer aos Funcionais de Gaver obtém-se a seguinte aproximação para $f(t)$:

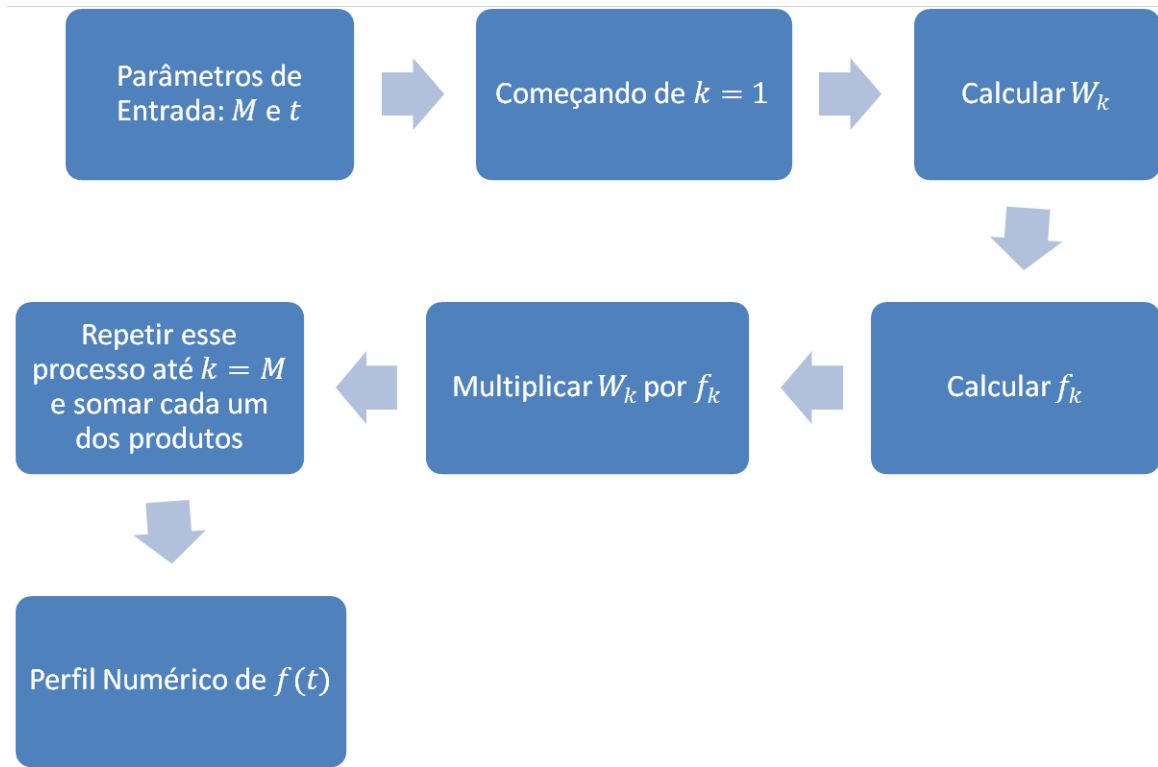
$$f(t, M) \approx \sum_{k=1}^M W_k f_k(t), \quad (3.10)$$

onde f_k é o k -ésimo Funcional de Gaver e os pesos W_k são dados por

$$W_k = (-1)^{k+M} \frac{k^M}{M!} \binom{M}{k}. \quad (3.11)$$

De acordo com Shircliffe e Stephenson, (1961) a dificuldade da abordagem da Soma de Salzer está no fato de que não é possível representar, de maneira acurada, qualquer tipo de função por um polinômio que possui polos apenas na origem. A implementação da Soma de Salzer é representada pela Figura 3.2.

Figura 3.2: Fluxograma para a Soma de Salzer



Fonte: do autor

3.3 Algoritmo Wynn-Rho

O Algoritmo Wynn-Rho é um método não-linear de aceleração de sequências (Valkó e Abate, 2004). Ao contrário dos algoritmos Δ^2 e Épsilon, também desenvolvidos por Wynn, este método não falha nos casos de convergência logarítmica (Chang et al., 2020). A aproximação para $f(t)$ utilizando este acelerador é dada por

$$f(t, 2m) \approx \rho_{2m}^0, \quad (3.12)$$

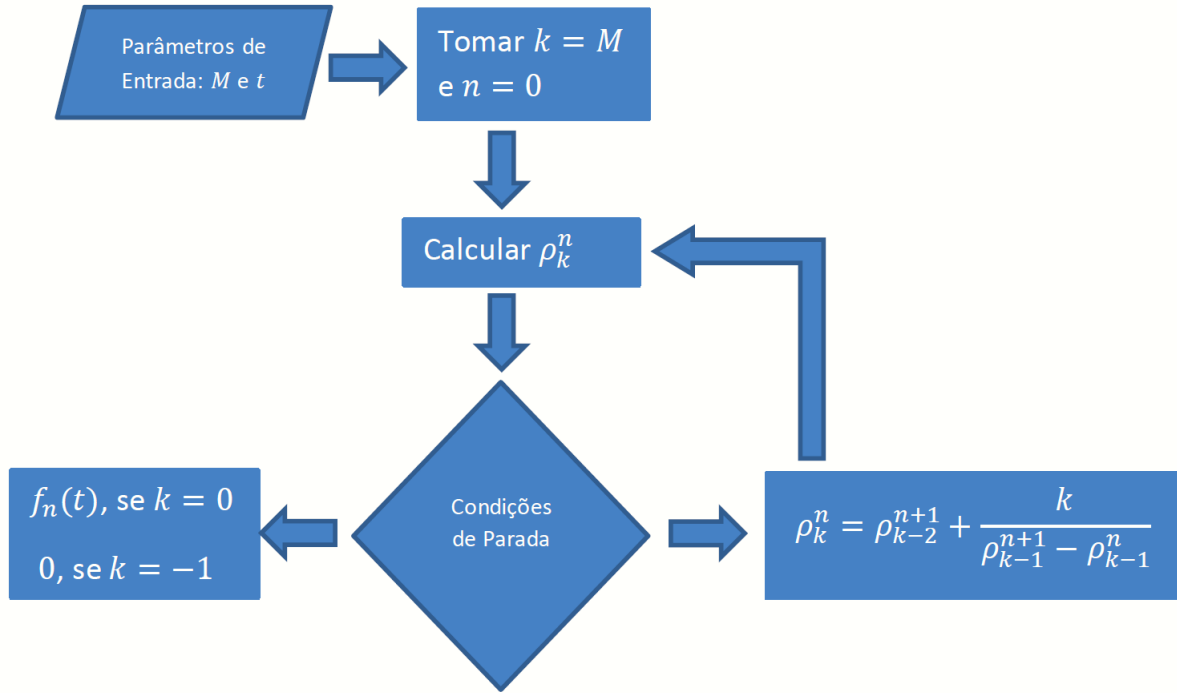
onde $M = 2m$ e ρ é definido como

$$\begin{aligned} \rho_{-1}^n &= 0, & n &\geq 0, \\ \rho_0^n &= f_n(t) & n &\geq 0, \\ \rho_k^n &= p_{k-2}^{n+1} + \frac{k}{\rho_{k-1}^{n+1} - \rho_{k-1}^n}, & k &\geq 1, \end{aligned} \quad (3.13)$$

e f_n é o n -ésimo Funcional de Gaver.

Valkó e Abate (2004) concluíram que este algoritmo foi o único método, entre os aceleradores estudados em seu trabalho, a fornecer resultados melhores aos obtidos pela Soma de Salzer, ou seja, os resultados do Algoritmo Wynn-Rho apresentaram mais dígitos significativos que a Soma de Salzer. A implementação do Algoritmo Wynn-Rho é representada pela Figura 3.3.

Figura 3.3: Fluxograma para o Algoritmo Wynn-Rho.



Fonte: do autor

3.4 Transformada u de Levin

A Transformada u de Levin consiste em usar sequências não lineares para transformar sequências com o fim de induzir ou acelerar a sua convergência, através das Transformações de Shanks (Levin, 1972). Levin (1972) apresenta as Transformadas t , e' (que é uma pequena modificação de t), u e v , onde o diferencial da Transformada u é a sua capacidade de gerar resultados muito bons para sequências monótonas de convergência lenta. Esse fato torna a Transformada u ideal para ser aplicada nos Funcionais de Gaver, que são uma sequência de convergência lenta. A aproximação de $f(t)$ pela Transformada u de Levin é dada por

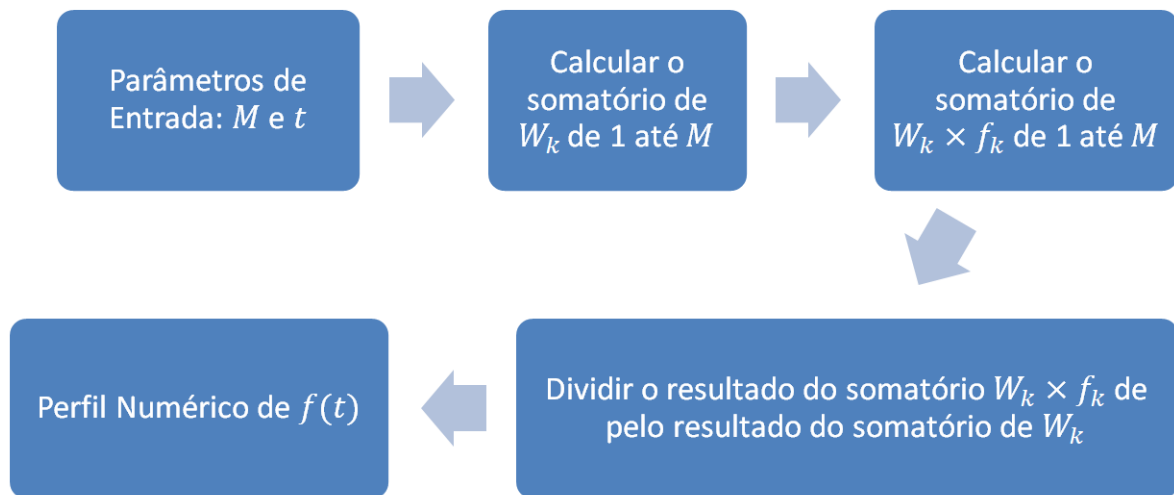
$$f(t, M) \approx \frac{\sum_{k=1}^M W_k f_k(t)}{\sum_{k=1}^M W_k}, \quad (3.14)$$

onde os pesos W_k são

$$W_k = (-1)^k k^{M-2} \binom{M}{k} \frac{1}{f_k(t) - f_{k-1}(t)}, \quad (3.15)$$

e f_k é o k -ésimo Funcional de Gaver.

Vale apenas ressaltar que no trabalho de Valkó e Abate (2004), a Transformada u de Levin foi o terceiro melhor método em termos fornecer resultados com boa precisão, sendo superado apenas pela Soma de Salzer e pelo Algoritmo Wynn-Rho. A implementação da Transformada u de Levin é representada pela Figura 3.4.

Figura 3.4: Fluxograma para a Transformada u de Levin.

Fonte: do autor

4 RESULTADOS PARA A INVERSÃO DO CONJUNTO DE FUNÇÕES ELEMENTARES

Neste capítulo apresentam-se os resultados obtidos a partir da aplicação dos métodos numéricos estudados, a saber os Funcionais de Gaver, a Soma de Salzer, a Transformada u de Levin e o Algoritmo Wynn-Rho. Os métodos foram aplicados para a inversão de um conjunto de funções elementares, mostrado na Tabela 4.1. Tais funções foram escolhidas por conta de seus diferentes comportamentos: 4 exponenciais, 3 oscilatórios e 1 logarítmico.

Tabela 4.1: Transformada de Laplace para funções elementares

$F(s)$	$f(t)$
$F_1(s) = \frac{1}{s+b}$	$f_1(t) = e^{-bt}$
$F_2(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$	$f_2(t) = \text{sen}(at)$
$F_3(s) = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$f_3(t) = t \cos(at)$
$F_4(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$	$f_4(t) = te^{-t}$
$F_5(s) = e^{-b\sqrt{s}}$	$f_5(t) = \frac{b}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{b^2}{4t}}$
$F_6(s) = \frac{a}{(s-b)^2+a^2}$	$f_6(t) = e^{bt} \text{sen}(at)$
$F_7(s) = \frac{\ln(s)}{s}$	$f_7(t) = \ln(t) + \gamma$
$F_8(s) = \ln\left(1 + \frac{1}{s}\right)$	$f_8(t) = \frac{1-e^{-t}}{t}$

Fonte: Adaptado de Valkó e Abate (2004).

onde $\gamma = 0,5772156649\dots$ é a constante de Euler, e $a, b \in \mathbb{R}$.

Cinco, das oito funções da Tabela 4.1, possuem parâmetros livres a ou b (no caso de F_6 , os dois). Neste trabalho será avaliada a influência destes parâmetros nos métodos estudados. A escolha de a e b foi feita a partir do comportamento das funções, através de um estudo preliminar com 51 pontos em $t \in [10^{-10}, 1]$, com exceção de F_5 , que foi testada para $t \in [10^{-2}, 1]$. Então:

- Para F_1 , os valores escolhidos para o parâmetro b foram 1, 3, 10 e 15, devido ao comportamento exponencial. Quanto maior o valor de b , mais rápido a função aproxima-se de

zero, logo não há necessidade de avaliar valores maiores;

- Para as funções F_2 e F_3 , os valores escolhidos para o parâmetro a foram 1, 3, 5 e 10, levando em consideração o comportamento oscilatório. Quanto maior o valor de a , maior a frequência de oscilação no intervalo e menor é a precisão dos métodos numéricos. Então a avaliação de valores altos de a é desnecessária.
- Para F_5 , os valores escolhidos para o parâmetro b foram 1, 1, 5, 2, 5 e 3, 5, por conta de seu comportamento exponencial. Para $t \in [10^{-2}, 1]$, a função decresce muito rapidamente para valores altos de b e, por causa deste fato, não foram analisados valores maiores que $b = 3, 5$.
- Para F_6 , os valores escolhidos para o parâmetro a foram 1, 3, 5 e 10 por conta do comportamento oscilatório, uma vez que para frequências altas tem-se uma divergência dos métodos numéricos. Os valores escolhidos para o parâmetro b foram -3 , -1 , 1 e 2 , a fim de analisar o comportamento dos métodos quando há uma pequena deformação da oscilação.
- Nas funções F_4 , F_7 e F_8 não foram introduzidos parâmetros para variações de amplitude. Assim, a análise de performance foi apenas sobre a capacidade de aproximação dos métodos numéricos.
- Para as funções F_2 , F_3 e F_6 , que possuem características oscilatórias, alguns de seus gráficos apresentam linhas pontilhadas verticais, que representam o valor do argumento do seno ou cosseno no ponto t onde esta linha se encontra.

A métrica utilizada para a análise dos resultados obtidos é o Erro Absoluto Médio, calculado de acordo com a Definição 4.1. Quanto menor o seu valor, melhor é o desempenho do método numérico.

Definição 4.1 (Erro Absoluto Médio). Seja f a inversa da transformada de Laplace da função F , f^* a aproximação numérica para a função f e $N_t \in \mathbb{N}$ o número de pontos utilizados para a aproximação. O Erro Absoluto Médio de f^* é dado por

$$\overline{E}_{abs} = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} |f(t_i) - f^*(t_i)|, \quad (4.1)$$

onde $t_i \in \mathbb{R}$, corresponde aos valores atribuídos a t na geração do perfil da função f (Calixto et al., 2022).

Os métodos numéricos estudados possuem um parâmetro $M \in \mathbb{N}$. Para cada função, e dependendo da função, para cada parâmetro livre, será calculado o Erro Absoluto Médio para cada M . O valor de M que resultar no menor Erro Absoluto Médio, será chamado de M ótimo.

Os valores do parâmetro M analisados foram escolhidos através de uma varredura preliminar. Nesta varredura, concluiu-se que todas as funções estudadas possuem um M ótimo,

e que há um comportamento de convergência para estes valores ótimos, de maneira que os Erros Absolutos Médios crescem após estes valores de M .

Para os Funcionais de Gaver, foram analisados $M \in \{1, 2, \dots, 28\}$, para a Transformada u de Levin, $M \in \{1, 2, \dots, 40\}$, para a Soma de Salzer, $M \in \{1, 2, \dots, 14\}$, e para o Algoritmo Wynn-Rho, $M \in \{2, 4, \dots, 16\}$, com exceção de alguns casos pontuais que serão identificados nas subseções onde ocorrerem.

Os algoritmos foram executados em um computador de sistema operacional Ubuntu v. 22.04 LTS, com processador Intel Core I7 8700@3.2GHz e 8GB de memória RAM DDR4, no software livre Octave 7.3.0.

4.1 Inversão de F_1

As Tabelas 4.3 – 4.6 e as Figuras 4.1 – 4.4 apresentam os resultados para a inversão numérica da Transformada de Laplace da função $F_1(s) = \frac{1}{s+b}$, cuja a inversa analítica é $f_1(t) = e^{-bt}$, para os Funcionais de Gaver, Transformada u de Levin, Soma de Salzer e Algoritmo Wynn-Rho.

Os M ótimos são indicados na Tabela 4.2. Nota-se que, para todos os métodos, o M ótimo muda apenas em um valor de b para cada algoritmo implementado: em $b = 20$ para os Funcionais de Gaver e Algoritmo Wynn-Rho, e $b = 1$ para a Transformada u de Levin e Soma de Salzer.

Tabela 4.2: M ótimos e ordem do $\overline{E}_{abs}$ para a inversão de F_1 .

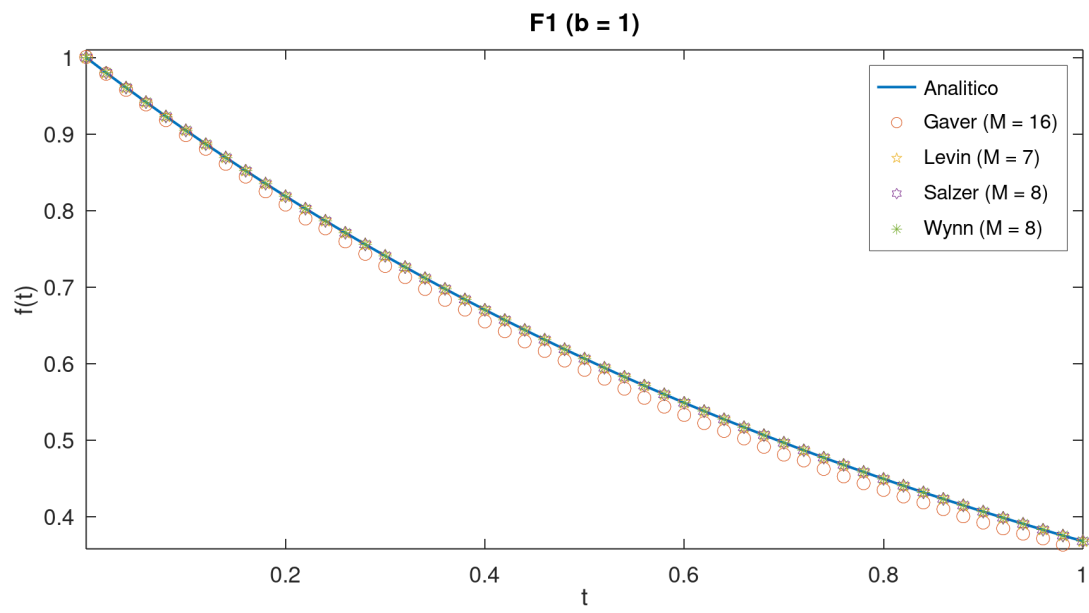
	$b = 1$	$b = 5$	$b = 10$	$b = 20$
Funcionais de Gaver	16 $[10^{-2}]$	16 $[10^{-3}]$	16 $[10^{-3}]$	15 $[10^{-3}]$
Transformada u de Levin	7 $[10^{-8}]$	8 $[10^{-3}]$	8 $[10^{-3}]$	8 $[10^{-3}]$
Soma de Salzer	8 $[10^{-8}]$	9 $[10^{-6}]$	9 $[10^{-6}]$	9 $[10^{-6}]$
Algoritmo Wynn-Rho	8 $[10^{-8}]$	8 $[10^{-8}]$	8 $[10^{-7}]$	10 $[10^{-6}]$

Fonte: do autor

Os Erros Absolutos Médios diminuem a medida que o parâmetro b cresce para os Funcionais de Gaver, e aumentam para a Soma de Salzer. Para a Transformada u de Levin os erros diminuem, com exceção de $b = 1$, e para o Algoritmo Wynn-Rho os erros aumentam, com exceção de $b = 5$, à medida que o parâmetro b cresce.

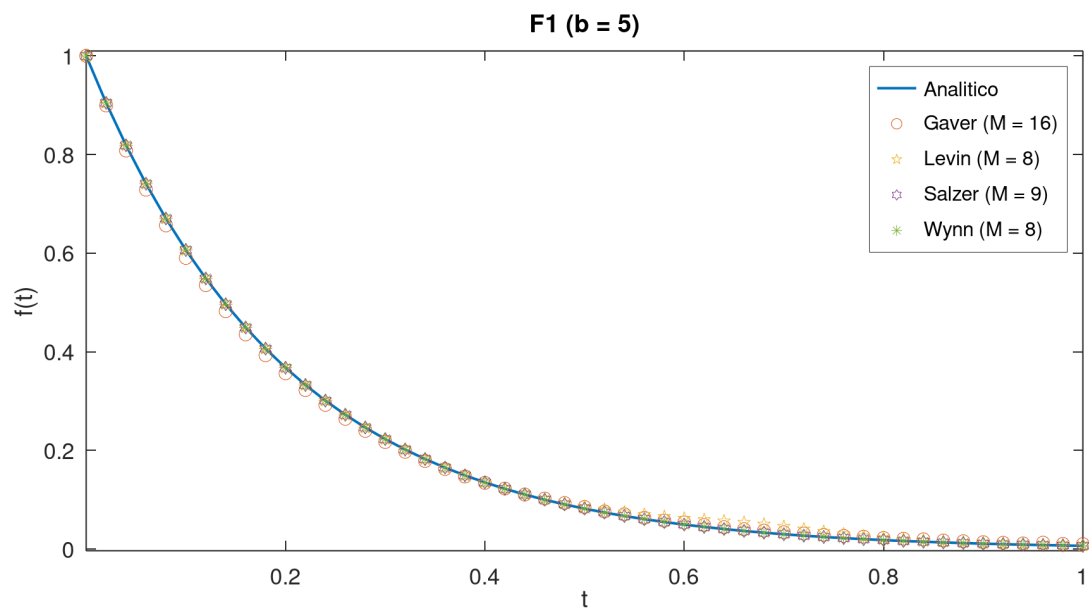
Para esta função, o método que gerou os melhores resultados foi o Algoritmo Wynn-Rho, com Erros Absolutos Médios variando entre a ordem de 10^{-8} e 10^{-6} para os M ótimos. A Soma de Salzer teve um desempenho similar, as maiores diferenças foram em $b = 5$ e $b = 10$, onde este algoritmo gerou Erros Absolutos Médios da ordem de 10^{-6} em comparação com 10^{-8} e 10^{-7} gerados pelo Algoritmo Wynn-Rho no seu respectivo M ótimo.

Figura 4.1: Resultados para a inversão de F_1 , com $b = 1$



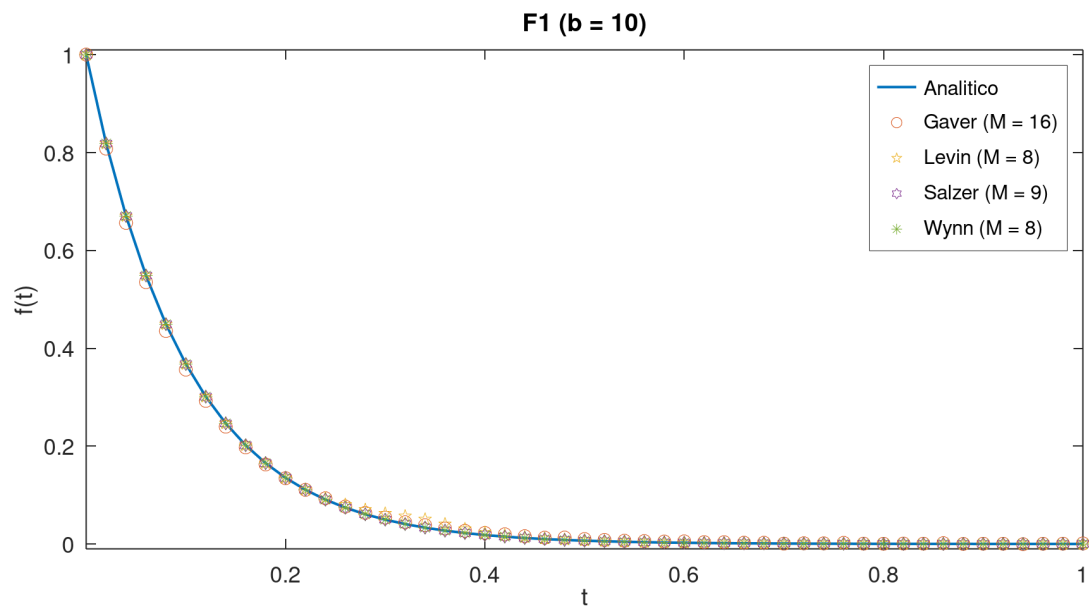
Fonte: do autor

Figura 4.2: Resultados para a inversão de F_1 , com $b = 5$



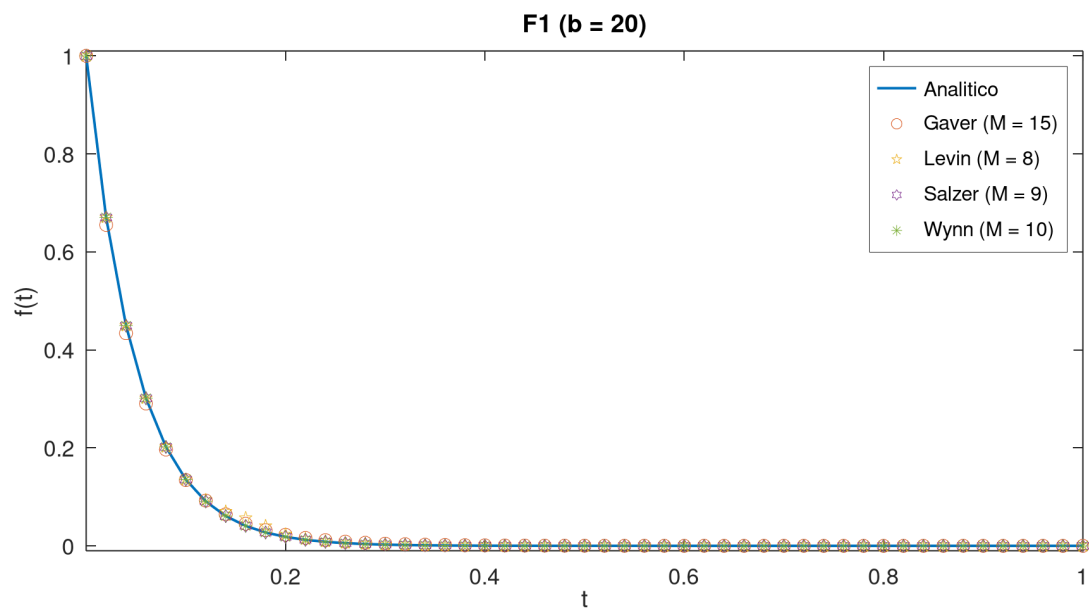
Fonte: do autor

Figura 4.3: Resultados para a inversão de F_1 , com $b = 10$



Fonte: do autor

Figura 4.4: Resultados para a inversão de F_1 , com $b = 20$



Fonte: do autor

Tabela 4.3: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_1 por meio dos Funcionais de Gaver.

M	$b = 1$	$b = 5$	$b = 10$	$b = 20$
1	$1,45277042855 \times 10^{-1}$	$5,24894395251 \times 10^{-2}$	$3,23626224927 \times 10^{-2}$	$1,76890772314 \times 10^{-2}$
2	$8,39924038558 \times 10^{-2}$	$3,31338993845 \times 10^{-2}$	$2,08952863079 \times 10^{-2}$	$1,10856740220 \times 10^{-2}$
3	$5,91333625062 \times 10^{-2}$	$2,44590857273 \times 10^{-2}$	$1,53806875527 \times 10^{-2}$	$7,99929437015 \times 10^{-3}$
4	$4,56413918715 \times 10^{-2}$	$1,94410490530 \times 10^{-2}$	$1,21194701199 \times 10^{-2}$	$6,22300625721 \times 10^{-3}$
5	$3,71663029099 \times 10^{-2}$	$1,61362615338 \times 10^{-2}$	$9,97903193305 \times 10^{-3}$	$5,08199803237 \times 10^{-3}$
6	$3,13472917120 \times 10^{-2}$	$1,37992166151 \times 10^{-2}$	$8,47807516909 \times 10^{-3}$	$4,29093177657 \times 10^{-3}$
7	$2,71044435718 \times 10^{-2}$	$1,20584578702 \times 10^{-2}$	$7,36969192871 \times 10^{-3}$	$3,71148889649 \times 10^{-3}$
8	$2,38735650830 \times 10^{-2}$	$1,07077604827 \times 10^{-2}$	$6,51521737013 \times 10^{-3}$	$3,26925147745 \times 10^{-3}$
9	$2,13310943953 \times 10^{-2}$	$9,62915767766 \times 10^{-3}$	$5,83692347636 \times 10^{-3}$	$2,92084987726 \times 10^{-3}$
10	$1,92781487712 \times 10^{-2}$	$8,74792995676 \times 10^{-3}$	$5,28571264858 \times 10^{-3}$	$2,63937709345 \times 10^{-3}$
11	$1,75857420859 \times 10^{-2}$	$8,01443634634 \times 10^{-3}$	$4,82910390989 \times 10^{-3}$	$2,40728576915 \times 10^{-3}$
12	$1,61665494378 \times 10^{-2}$	$7,39441786045 \times 10^{-3}$	$4,44476327662 \times 10^{-3}$	$2,21264751696 \times 10^{-3}$
13	$1,49593000454 \times 10^{-2}$	$6,86348438764 \times 10^{-3}$	$4,11702618095 \times 10^{-3}$	$2,04721977216 \times 10^{-3}$
14	$1,39196118156 \times 10^{-2}$	$6,40196651219 \times 10^{-3}$	$3,83396964607 \times 10^{-3}$	$1,90700508609 \times 10^{-3}$
15	$1,30198338724 \times 10^{-2}$	$6,01909420166 \times 10^{-3}$	$3,59323667704 \times 10^{-3}$	$1,78592720782 \times 10^{-3}$
16	$1,22483263027 \times 10^{-2}$	$5,50385420059 \times 10^{-3}$	$3,32644671671 \times 10^{-3}$	$1,81397510000 \times 10^{-3}$
17	$1,27135168290 \times 10^{-2}$	$7,78776711221 \times 10^{-3}$	$5,70386759410 \times 10^{-3}$	$3,71093433464 \times 10^{-3}$
18	$4,33021822945 \times 10^{-2}$	$4,27071734341 \times 10^{-2}$	$4,18526037659 \times 10^{-2}$	$3,68977817667 \times 10^{-2}$
19	$3,15581536168 \times 10^{-1}$	$2,46297690213 \times 10^{-1}$	$2,61883632311 \times 10^{-1}$	$1,74276965906 \times 10^{-1}$
20	$2,55838451292 \times 10^0$	$1,67919193314 \times 10^0$	$1,68892950944 \times 10^0$	$1,43652404448 \times 10^0$
21	$1,53123066149 \times 10^1$	$1,35806063699 \times 10^1$	$1,44672420986 \times 10^1$	$1,00537190514 \times 10^1$
22	$1,11866367486 \times 10^2$	$1,05072847216 \times 10^2$	$1,02621585359 \times 10^2$	$9,53543475714 \times 10^1$
23	$8,33810047311 \times 10^2$	$9,66488412339 \times 10^2$	$7,96609929375 \times 10^2$	$7,56798834114 \times 10^2$
24	$1,15935015854 \times 10^4$	$1,05381915167 \times 10^4$	$8,90970317410 \times 10^3$	$8,52309836226 \times 10^3$
25	$6,37267074105 \times 10^4$	$6,57017829773 \times 10^4$	$5,30717345015 \times 10^4$	$4,48974110194 \times 10^4$
26	$4,76726570040 \times 10^5$	$5,24695066208 \times 10^5$	$4,02209779616 \times 10^5$	$3,55503682204 \times 10^5$
27	$3,35037368957 \times 10^6$	$3,18358875974 \times 10^6$	$2,47898695523 \times 10^6$	$2,50253488051 \times 10^6$
28	$6,92699483450 \times 10^7$	$6,71572698196 \times 10^7$	$6,15190130263 \times 10^7$	$5,81065930327 \times 10^7$

Fonte: do autor

Tabela 4.4: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_1 por meio da Transformada u de Levin.

M	$b = 1$	$b = 5$	$b = 10$	$b = 20$
1	$1,45277042855 \times 10^{-1}$	$5,24894395251 \times 10^{-2}$	$3,23626224927 \times 10^{-2}$	$1,76890772314 \times 10^{-2}$
2	$5,29024807542 \times 10^{-2}$	$2,31139670028 \times 10^{-2}$	$1,66115473758 \times 10^{-2}$	$9,55865104178 \times 10^{-3}$
3	$2,09952888392 \times 10^{-3}$	$8,99471111824 \times 10^{-3}$	$1,26463381973 \times 10^{-2}$	$2,68187701016 \times 10^{-2}$
4	$1,99705893384 \times 10^{-4}$	$7,67554413591 \times 10^{-3}$	$7,37305277647 \times 10^{-3}$	$4,05346345408 \times 10^{-3}$
5	$7,94062445454 \times 10^{-6}$	$9,73461151935 \times 10^{-3}$	$2,22054087686 \times 10^{-2}$	$8,53468303452 \times 10^{-3}$
6	$2,32534409985 \times 10^{-7}$	$6,24707992018 \times 10^{-3}$	$3,93184742141 \times 10^{-3}$	$1,98461402703 \times 10^{-3}$
7	$4,57826274767 \times 10^{-8}$	$5,19025240348 \times 10^{-2}$	$5,47906030582 \times 10^{-3}$	$2,75833828454 \times 10^{-3}$
8	$2,41751362742 \times 10^{-7}$	$3,93353965438 \times 10^{-3}$	$2,03111090954 \times 10^{-3}$	$1,01864840139 \times 10^{-3}$
9	$6,26516715742 \times 10^{-6}$	$1,46136056197 \times 10^{-2}$	$1,29672777988 \times 10^{-2}$	$1,22414822694 \times 10^{-2}$
10	$1,23748309765 \times 10^{-4}$	$8,12095321145 \times 10^{-3}$	$5,27530218511 \times 10^{-3}$	$1,22699979404 \times 10^{-3}$
11	$2,41909971214 \times 10^{-3}$	$7,20591066407 \times 10^{-3}$	$4,13522582104 \times 10^{-3}$	$2,34662614324 \times 10^{-3}$
12	$1,92633621422 \times 10^{-2}$	$8,64635042415 \times 10^{-3}$	$4,63457949895 \times 10^{-3}$	$2,84619080517 \times 10^{-3}$
13	$1,65417954009 \times 10^{-2}$	$6,22695161440 \times 10^{-1}$	$6,19596790312 \times 10^{-1}$	$6,17272664697 \times 10^{-1}$
14	$1,69778318919 \times 10^{-2}$	$6,98589839490 \times 10^{-3}$	$4,21639716813 \times 10^{-3}$	$2,13400427985 \times 10^{-3}$
15	$1,45684751767 \times 10^{-2}$	$6,73025274638 \times 10^{-3}$	$3,93603478757 \times 10^{-3}$	$2,00190507976 \times 10^{-3}$
16	$1,31336110671 \times 10^{-2}$	$6,25596254459 \times 10^{-3}$	$3,97924946174 \times 10^{-3}$	$2,05868697864 \times 10^{-3}$
17	$1,30239299925 \times 10^{-2}$	$7,77841634194 \times 10^{-3}$	$4,97466307505 \times 10^{-3}$	$3,16293179454 \times 10^{-3}$
18	$1,42975594611 \times 10^{-2}$	$1,35960783169 \times 10^{-2}$	$1,14430755647 \times 10^{-2}$	$9,49508909245 \times 10^{-3}$
19	$1,43398257113 \times 10^{-2}$	$6,53178805425 \times 10^{-3}$	$3,95708646084 \times 10^{-3}$	$1,69411809882 \times 10^{-3}$
20	$1,36500840971 \times 10^{-2}$	$5,97455825670 \times 10^{-3}$	$3,67684043282 \times 10^{-3}$	$1,78864789057 \times 10^{-3}$
21	$1,37875835686 \times 10^{-2}$	$7,30607066632 \times 10^{-3}$	$4,26442612488 \times 10^{-3}$	$2,46908109599 \times 10^{-3}$
22	$1,25670915350 \times 10^{-2}$	$5,85032595330 \times 10^{-3}$	$3,68423334268 \times 10^{-3}$	$1,78618061710 \times 10^{-3}$
23	$1,16624928907 \times 10^{-2}$	$5,99428311832 \times 10^{-3}$	$3,80700314802 \times 10^{-3}$	$1,93972834852 \times 10^{-3}$
24	$1,30731261130 \times 10^{-2}$	$6,87663926079 \times 10^{-3}$	$3,94335532410 \times 10^{-3}$	$2,46310533680 \times 10^{-3}$
25	$1,66794301880 \times 10^{-2}$	$1,12897422675 \times 10^{-2}$	$6,67036718256 \times 10^{-3}$	$5,05234638169 \times 10^{-3}$
26	$3,41480428983 \times 10^{-2}$	$1,38608336986 \times 10^{-2}$	$8,49160931258 \times 10^{-3}$	$6,56169209008 \times 10^{-3}$
27	$1,92859235517 \times 10^{-1}$	$1,53580977302 \times 10^{-2}$	$2,51794567954 \times 10^{-2}$	$1,64434295185 \times 10^{-2}$
28	$6,14610446472 \times 10^{-1}$	$2,37444389142 \times 10^{-2}$	$3,23602422254 \times 10^{-2}$	$2,61805460140 \times 10^{-2}$
29	$7,86429482918 \times 10^{-1}$	$4,69017766776 \times 10^{-2}$	$4,40104274203 \times 10^{-2}$	$3,24972801447 \times 10^{-2}$
30	$9,14866126347 \times 10^0$	$1,31938009382 \times 10^{-1}$	$1,22568213012 \times 10^{-1}$	$1,03856323133 \times 10^{-1}$
31	$3,10116369545 \times 10^0$	$4,95070049734 \times 10^{-1}$	$5,06113202432 \times 10^{-1}$	$4,17595198076 \times 10^{-1}$
32	$5,68360680317 \times 10^0$	$2,20341109352 \times 10^0$	$2,24418836208 \times 10^0$	$2,32867615716 \times 10^0$
33	$1,28238552176 \times 10^1$	$2,62706872719 \times 10^1$	$2,61511104012 \times 10^1$	$2,48750831002 \times 10^1$
34	$3,13529646915 \times 10^1$	$2,59244764392 \times 10^1$	$2,87950267964 \times 10^1$	$2,76397689766 \times 10^1$
35	$1,20349292965 \times 10^2$	$7,43206727663 \times 10^1$	$7,08341995954 \times 10^1$	$1,98908312848 \times 10^2$
36	$5,64687076505 \times 10^2$	$5,65769984676 \times 10^2$	$5,54549580785 \times 10^2$	$6,50498683307 \times 10^2$
37	$2,27644091763 \times 10^3$	$1,07854480328 \times 10^3$	$8,69575666392 \times 10^2$	$2,21026585517 \times 10^3$
38	$7,56785544924 \times 10^3$	$5,46556214089 \times 10^3$	$3,88984804726 \times 10^3$	$1,47917398565 \times 10^4$
39	$2,67819203339 \times 10^4$	$3,49118570572 \times 10^4$	$1,04826797912 \times 10^4$	$4,33065774543 \times 10^4$
40	$7,10114873905 \times 10^4$	$4,20547142787 \times 10^4$	$3,82369021825 \times 10^4$	$1,53155151211 \times 10^5$

Fonte: do autor

Tabela 4.5: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_1 por meio da Soma de Salzer.

M	$b = 1$	$b = 5$	$b = 10$	$b = 20$
1	$1,45277042855 \times 10^{-1}$	$5,24894395251 \times 10^{-2}$	$3,23626224927 \times 10^{-2}$	$1,76890772314 \times 10^{-2}$
2	$2,27407852519 \times 10^{-2}$	$1,51144806912 \times 10^{-2}$	$1,01161980837 \times 10^{-2}$	$5,30514672076 \times 10^{-3}$
3	$2,82014408596 \times 10^{-3}$	$4,25524047952 \times 10^{-3}$	$2,71887281700 \times 10^{-3}$	$1,89165929364 \times 10^{-3}$
4	$3,04009330655 \times 10^{-4}$	$9,63252806720 \times 10^{-4}$	$9,43386712654 \times 10^{-4}$	$6,02179437012 \times 10^{-4}$
5	$3,04756838016 \times 10^{-5}$	$2,02885511897 \times 10^{-4}$	$2,98676923173 \times 10^{-4}$	$2,08445696523 \times 10^{-4}$
6	$2,89027529764 \times 10^{-6}$	$5,05461242201 \times 10^{-5}$	$7,51828591046 \times 10^{-5}$	$7,42632468042 \times 10^{-5}$
7	$2,32148284354 \times 10^{-7}$	$1,33104378095 \times 10^{-5}$	$2,26282125434 \times 10^{-5}$	$2,21798474587 \times 10^{-5}$
8	$3,56892966204 \times 10^{-8}$	$3,31347793573 \times 10^{-6}$	$7,40611579936 \times 10^{-6}$	$7,95882449217 \times 10^{-6}$
9	$6,75870160406 \times 10^{-7}$	$1,10537343281 \times 10^{-6}$	$2,39862490473 \times 10^{-6}$	$2,60476913295 \times 10^{-6}$
10	$1,20134968404 \times 10^{-5}$	$1,23225082531 \times 10^{-5}$	$1,06673247799 \times 10^{-5}$	$7,71570585583 \times 10^{-6}$
11	$2,16999942409 \times 10^{-4}$	$2,12739532775 \times 10^{-4}$	$2,02504085675 \times 10^{-4}$	$1,53370172985 \times 10^{-4}$
12	$4,22619125511 \times 10^{-3}$	$4,98215571676 \times 10^{-3}$	$4,12215560206 \times 10^{-3}$	$3,41095221286 \times 10^{-3}$
13	$9,42926332875 \times 10^{-2}$	$9,47104065776 \times 10^{-2}$	$8,03971191139 \times 10^{-2}$	$7,48569140124 \times 10^{-2}$
14	$1,68232116289 \times 10^0$	$1,87083929422 \times 10^0$	$1,47726675636 \times 10^0$	$1,40194926912 \times 10^0$

Fonte: do autor

Tabela 4.6: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_1 por meio do Algoritmo Wynn-Rho.

M	$b = 1$	$b = 5$	$b = 10$	$b = 20$
2	$2,22271375815 \times 10^{-3}$	$9,52366154599 \times 10^{-3}$	$8,17611416791 \times 10^{-3}$	$4,68621360035 \times 10^{-3}$
4	$1,45780306422 \times 10^{-5}$	$1,14930404391 \times 10^{-4}$	$5,00545404880 \times 10^{-4}$	$4,42805955441 \times 10^{-4}$
6	$1,09506097197 \times 10^{-7}$	$1,37395915808 \times 10^{-7}$	$1,58563687992 \times 10^{-5}$	$3,57614286022 \times 10^{-5}$
8	$9,92198464510 \times 10^{-8}$	$6,35819500577 \times 10^{-8}$	$2,82824794254 \times 10^{-7}$	$2,36284847660 \times 10^{-6}$
10	$2,24945862014 \times 10^{-7}$	$1,15692459799 \times 10^{-7}$	$4,13568974916 \times 10^{-7}$	$2,27042415341 \times 10^{-6}$
12	$4,01569729307 \times 10^{-7}$	$2,22684517065 \times 10^{-7}$	$1,03997810587 \times 10^{-5}$	$2,85868068116 \times 10^{-6}$
14	$2,65946918022 \times 10^{-7}$	$3,67151563942 \times 10^{-7}$	$1,53068487534 \times 10^{-6}$	$1,22538653785 \times 10^{-5}$
16	$1,04626342627 \times 10^{-6}$	$1,01089682273 \times 10^{-6}$	$2,43238840597 \times 10^{-5}$	$2,58370993686 \times 10^{-5}$

Fonte: do autor

4.2 Inversão de F_2

As Tabelas 4.8 – 4.11 e as Figuras 4.5 – 4.8 apresentam os resultados para a inversão numérica da Transformada de Laplace da função $F_2(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$, cuja a inversa analítica é $f_2(t) = \text{sen}(at)$, para os Funcionais de Gaver, Transformada u de Levin, Soma de Salzer e Algoritmo Wynn-Rho. Nesta função, para $a = 10$, o $\bar{E}_{abs}$ do Algoritmo Wynn-Rho também foi calculado para $M = 18$.

Os M ótimos estão listados na Tabela 4.7. Em geral, à medida que o parâmetro a cresce o M ótimo dos métodos aumenta.

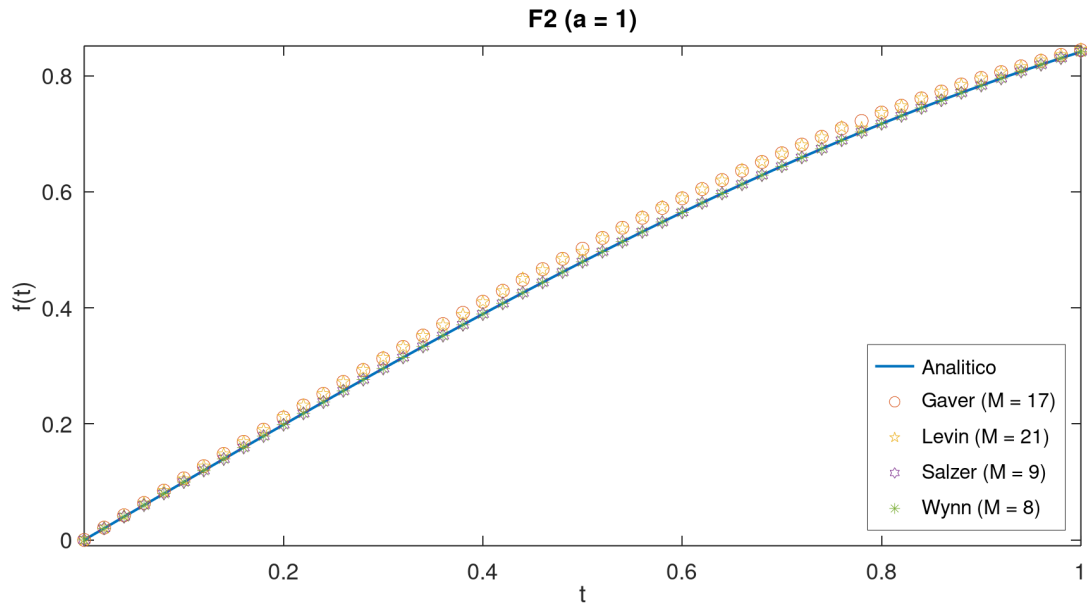
Tabela 4.7: M ótimos e ordem do $\overline{E}_{abs}$ para a inversão de F_2 .

	$a = 1$	$a = 3$	$a = 5$	$a = 10$
Funcionais de Gaver	17 $[10^{-2}]$	18 $[10^{-2}]$	19 $[10^{-1}]$	18 $[10^{-1}]$
Transformada u de Levin	21 $[10^{-2}]$	9 $[10^{-2}]$	12 $[10^{-2}]$	24 $[10^{-1}]$
Soma de Salzer	9 $[10^{-7}]$	11 $[10^{-4}]$	12 $[10^{-3}]$	12 $[10^{-2}]$
Algoritmo Wynn-Rho	8 $[10^{-7}]$	10 $[10^{-5}]$	10 $[10^{-4}]$	16 $[10^{-1}]$

Fonte: do autor

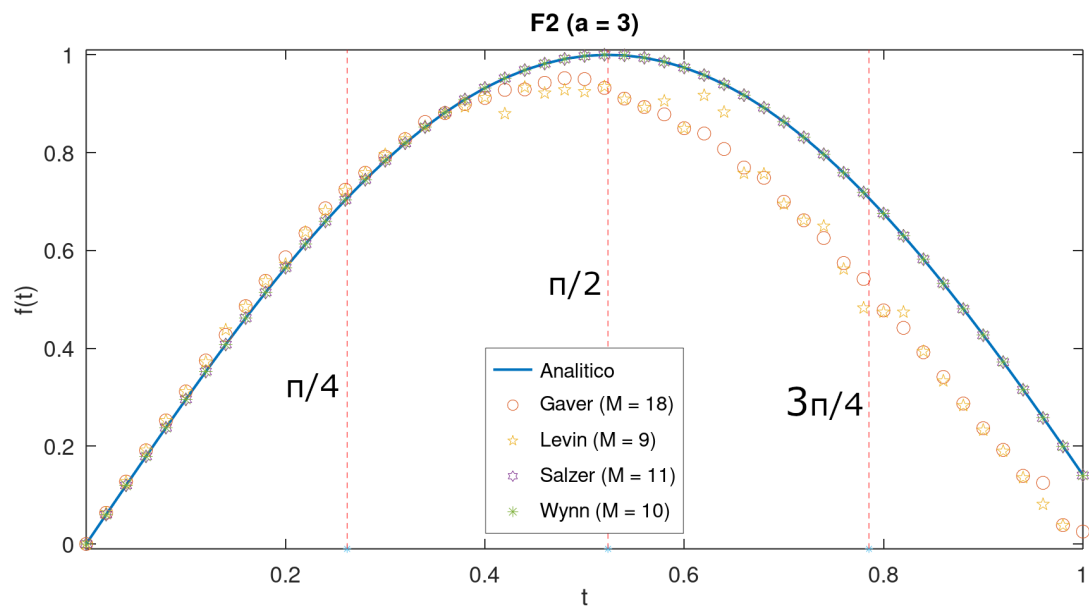
Os Erros Absolutos Médios, para todos os algoritmos, aumentam a medida que o parâmetro a aumenta. Esse fato ocorre devido ao aumento da frequência de oscilação da função decorrente do aumento do valor de a . Pode-se observar nas Figuras 4.6 – 4.8 que, quando o argumento do seno é maior que $\pi/4$ radianos, os Funcionais de Gaver e a Transformada u perdem precisão em relação aos outros métodos. Já para a Soma de Salzer e o Algoritmo Wynn-Rho, a precisão é perdida quando o argumento do seno é maior que 2π radianos, como observa-se na Figura 4.8.

Para esta função, a Soma de Salzer e o Algoritmo Wynn-Rho tiveram um desempenho similar, porém para $a = 3$ e $a = 5$, o Algoritmo Wynn-Rho gerou $\overline{E}_{abs}$ um pouco menor que Soma de Salzer, e para $a = 10$ ocorre o oposto.

Figura 4.5: Resultados para a inversão de F_2 , com $a = 1$ 

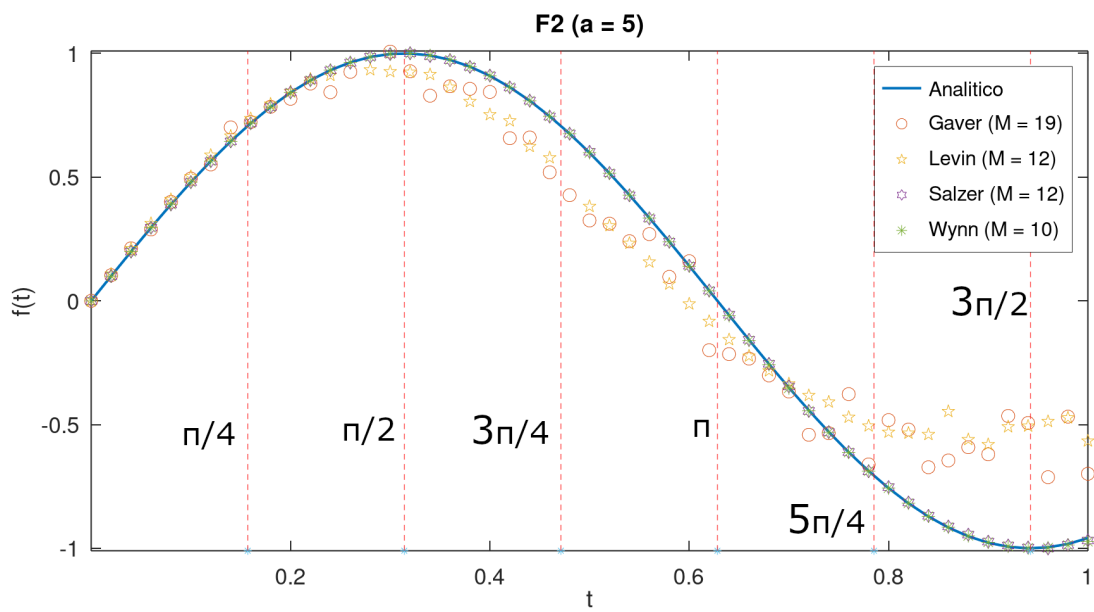
Fonte: do autor

Figura 4.6: Resultados para a inversão de F_2 , com $a = 3$



Fonte: do autor

Figura 4.7: Resultados para a inversão de F_2 , com $a = 5$



Fonte: do autor

Figura 4.8: Resultados para a inversão de F_2 , com $a = 10$

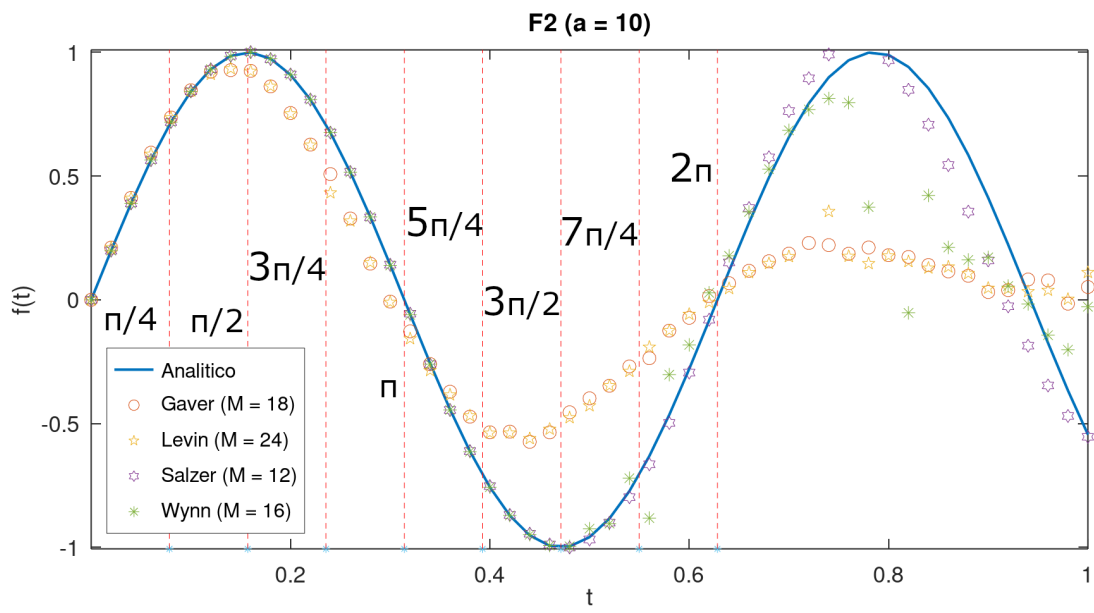


Tabela 4.8: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_2 por meio dos Funcionais de Gaver.

M	$a = 1$	$a = 3$	$a = 5$	$a = 10$
1	$1,61967292196 \times 10^{-1}$	$4,31357498603 \times 10^{-1}$	$5,30835464525 \times 10^{-1}$	$5,48733541351 \times 10^{-1}$
2	$9,23103756903 \times 10^{-2}$	$3,45514090367 \times 10^{-1}$	$4,65201838745 \times 10^{-1}$	$5,16323100164 \times 10^{-1}$
3	$6,64953012247 \times 10^{-2}$	$2,92494710329 \times 10^{-1}$	$4,17504824336 \times 10^{-1}$	$4,91502087383 \times 10^{-1}$
4	$5,30246446542 \times 10^{-2}$	$2,54418315584 \times 10^{-1}$	$3,78405706951 \times 10^{-1}$	$4,69406305422 \times 10^{-1}$
5	$4,44817989127 \times 10^{-2}$	$2,25152594456 \times 10^{-1}$	$3,46544658108 \times 10^{-1}$	$4,50587076935 \times 10^{-1}$
6	$3,84988087540 \times 10^{-2}$	$2,01636996598 \times 10^{-1}$	$3,18843391804 \times 10^{-1}$	$4,33322658863 \times 10^{-1}$
7	$3,40097065632 \times 10^{-2}$	$1,82467429980 \times 10^{-1}$	$2,94794516170 \times 10^{-1}$	$4,17398224023 \times 10^{-1}$
8	$3,05022130353 \times 10^{-2}$	$1,66436728941 \times 10^{-1}$	$2,74120002574 \times 10^{-1}$	$4,02650827469 \times 10^{-1}$
9	$2,76440021257 \times 10^{-2}$	$1,52863637708 \times 10^{-1}$	$2,55767068357 \times 10^{-1}$	$3,88944696334 \times 10^{-1}$
10	$2,53127599653 \times 10^{-2}$	$1,41245431909 \times 10^{-1}$	$2,39468328149 \times 10^{-1}$	$3,76316004979 \times 10^{-1}$
11	$2,33375140869 \times 10^{-2}$	$1,31203521524 \times 10^{-1}$	$2,24889557583 \times 10^{-1}$	$3,64499782147 \times 10^{-1}$
12	$2,16418636680 \times 10^{-2}$	$1,22448121563 \times 10^{-1}$	$2,12015014136 \times 10^{-1}$	$3,53590775760 \times 10^{-1}$
13	$2,01717635765 \times 10^{-2}$	$1,14779344772 \times 10^{-1}$	$2,00484418943 \times 10^{-1}$	$3,43355242245 \times 10^{-1}$
14	$1,88860385315 \times 10^{-2}$	$1,07988785237 \times 10^{-1}$	$1,90033143128 \times 10^{-1}$	$3,33637369334 \times 10^{-1}$
15	$1,77511912994 \times 10^{-2}$	$1,01940244038 \times 10^{-1}$	$1,80528022334 \times 10^{-1}$	$3,24394429601 \times 10^{-1}$
16	$1,67483074759 \times 10^{-2}$	$9,65056715052 \times 10^{-2}$	$1,71861000134 \times 10^{-1}$	$3,15626870459 \times 10^{-1}$
17	$1,58097713409 \times 10^{-2}$	$9,16896926448 \times 10^{-2}$	$1,64006054379 \times 10^{-1}$	$3,06633151766 \times 10^{-1}$
18	$1,63021798815 \times 10^{-2}$	$8,46253536614 \times 10^{-2}$	$1,56820028432 \times 10^{-1}$	$3,00357441148 \times 10^{-1}$
19	$1,71439074604 \times 10^{-2}$	$1,02891058125 \times 10^{-1}$	$1,43537120952 \times 10^{-1}$	$3,07162739567 \times 10^{-1}$
20	$9,29664564248 \times 10^{-2}$	$2,69144692951 \times 10^{-1}$	$3,49857739637 \times 10^{-1}$	$7,47387695147 \times 10^{-1}$
21	$4,61902984353 \times 10^{-1}$	$1,39234270886 \times 10^0$	$2,68231717341 \times 10^0$	$5,25005498293 \times 10^0$
22	$3,07854549655 \times 10^0$	$1,05209451898 \times 10^1$	$1,44463251886 \times 10^1$	$2,89086375757 \times 10^1$
23	$3,19627644425 \times 10^1$	$1,01603462129 \times 10^2$	$1,33189556378 \times 10^2$	$2,68715520413 \times 10^2$
24	$2,90979958865 \times 10^2$	$9,08738186229 \times 10^2$	$1,35254410634 \times 10^3$	$2,47950510067 \times 10^3$
25	$1,85198045385 \times 10^3$	$5,41657277986 \times 10^3$	$8,48644299320 \times 10^3$	$1,86852523669 \times 10^4$
26	$1,27213830223 \times 10^4$	$3,76171372204 \times 10^4$	$6,71787689621 \times 10^4$	$1,33391902229 \times 10^5$
27	$8,48706723824 \times 10^4$	$2,87117724852 \times 10^5$	$4,83223811240 \times 10^5$	$9,88464017351 \times 10^5$
28	$1,63795913843 \times 10^6$	$4,26502613839 \times 10^6$	$7,71734448285 \times 10^6$	$1,38016679615 \times 10^7$

Fonte: do autor

Tabela 4.9: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_2 por meio da Transformada u de Levin.

M	$a = 1$	$a = 3$	$a = 5$	$a = 10$
1	$1,61967292196 \times 10^{-1}$	$4,31357498603 \times 10^{-1}$	$5,30835464525 \times 10^{-1}$	$5,48733541351 \times 10^{-1}$
2	$3,02926645040 \times 10^{-1}$	$1,00243880749 \times 10^0$	$8,72075504726 \times 10^{-1}$	$6,57685855159 \times 10^{-1}$
3	$1,96593760906 \times 10^{-1}$	$4,33322258690 \times 10^{-1}$	$5,51214393683 \times 10^{-1}$	$5,54229462713 \times 10^{-1}$
4	$5,79843155575 \times 10^{-2}$	$2,74649967227 \times 10^{-1}$	$4,58794337632 \times 10^{-1}$	$5,04678196847 \times 10^{-1}$
5	$8,96625827151 \times 10^{-2}$	$2,06414776268 \times 10^{-1}$	$4,16843097227 \times 10^{-1}$	$5,21565296719 \times 10^{-1}$
6	$4,12711371441 \times 10^{-2}$	$3,34282316370 \times 10^{-1}$	$4,69740422110 \times 10^{-1}$	$4,72623035004 \times 10^{-1}$
7	$5,94465531056 \times 10^{-2}$	$1,49166318959 \times 10^{-1}$	$3,04461197093 \times 10^0$	$1,21353572576 \times 10^0$
8	$3,64954596028 \times 10^{-2}$	$2,38715780167 \times 10^{-1}$	$2,62814472259 \times 10^{-1}$	$4,79350694014 \times 10^{-1}$
9	$2,53202450907 \times 10^{-2}$	$7,52975287095 \times 10^{-2}$	$7,76693455029 \times 10^{-1}$	$7,76476120550 \times 10^{-1}$
10	$3,69298768574 \times 10^{-2}$	$7,67718533788 \times 10^{-2}$	$2,34266620150 \times 10^{-1}$	$4,45717989007 \times 10^{-1}$
11	$1,65089135752 \times 10^{-2}$	$5,95482633480 \times 10^{-2}$	$8,01378075867 \times 10^{-2}$	$3,18166155430 \times 10^{-1}$
12	$1,70908739742 \times 10^{-2}$	$8,49265745888 \times 10^{-2}$	$7,76101570828 \times 10^{-2}$	$3,16675676536 \times 10^{-1}$
13	$3,16383463344 \times 10^{-2}$	$1,47516827231 \times 10^{-1}$	$5,64591734844 \times 10^{-1}$	$4,18244603527 \times 10^{-1}$
14	$2,34061672144 \times 10^{-2}$	$1,32195057709 \times 10^{-1}$	$2,17981173985 \times 10^{-1}$	$3,77406698793 \times 10^{-1}$
15	$1,94760687288 \times 10^{-2}$	$1,16023441930 \times 10^{-1}$	$1,96903072853 \times 10^{-1}$	$3,68597347824 \times 10^{-1}$
16	$1,92538620855 \times 10^{-2}$	$1,07932553832 \times 10^{-1}$	$1,78728839667 \times 10^{-1}$	$3,28344233326 \times 10^{-1}$
17	$1,69424338507 \times 10^{-2}$	$1,02469372324 \times 10^{-1}$	$1,82682511294 \times 10^{-1}$	$3,31796894070 \times 10^{-1}$
18	$1,75363624050 \times 10^{-2}$	$9,56693594055 \times 10^{-2}$	$1,67765140091 \times 10^{-1}$	$3,12799375152 \times 10^{-1}$
19	$1,60636818246 \times 10^{-2}$	$9,27567510570 \times 10^{-2}$	$1,68320962018 \times 10^{-1}$	$3,13763909391 \times 10^{-1}$
20	$1,79810639613 \times 10^{-2}$	$9,13008990108 \times 10^{-2}$	$1,63128336562 \times 10^{-1}$	$3,16401776448 \times 10^{-1}$
21	$1,56506584501 \times 10^{-2}$	$9,37372514160 \times 10^{-2}$	$1,70821836142 \times 10^{-1}$	$3,09567175943 \times 10^{-1}$
22	$1,65248726813 \times 10^{-2}$	$9,74347812496 \times 10^{-2}$	$1,75807837052 \times 10^{-1}$	$2,97467575076 \times 10^{-1}$
23	$1,61881235707 \times 10^{-2}$	$8,57080041211 \times 10^{-2}$	$1,60272144308 \times 10^{-1}$	$3,03669803058 \times 10^{-1}$
24	$2,32851277128 \times 10^{-2}$	$8,84507194171 \times 10^{-2}$	$1,61825743905 \times 10^{-1}$	$2,95984251570 \times 10^{-1}$
25	$1,58532114879 \times 10^{-2}$	$9,34502989966 \times 10^{-2}$	$1,70170353015 \times 10^{-1}$	$2,98150490850 \times 10^{-1}$
26	$1,57321434238 \times 10^{-2}$	$8,93654264228 \times 10^{-2}$	$2,41193927163 \times 10^{-1}$	$3,69559383707 \times 10^{-1}$
27	$1,58434991374 \times 10^{-2}$	$9,00274587087 \times 10^{-2}$	$1,54607470778 \times 10^{-1}$	$2,98435699741 \times 10^{-1}$
28	$1,85872724799 \times 10^{-2}$	$9,24531301287 \times 10^{-2}$	$2,12261880236 \times 10^{-1}$	$3,23379548999 \times 10^{-1}$
29	$6,88209047741 \times 10^{-2}$	$1,04093952380 \times 10^{-1}$	$2,06736725726 \times 10^{-1}$	$3,96456703060 \times 10^{-1}$
30	$4,01120892067 \times 10^{-2}$	$2,00367940595 \times 10^{-1}$	$3,04884503483 \times 10^{-1}$	$6,55202833455 \times 10^{-1}$
31	$7,42323922573 \times 10^{-2}$	$1,15791043119 \times 10^0$	$9,06530338545 \times 10^{-1}$	$1,44547750567 \times 10^0$
32	$1,67992881221 \times 10^{-1}$	$1,12542575556 \times 10^0$	$1,41396935459 \times 10^0$	$2,97906138394 \times 10^0$
33	$7,65769815587 \times 10^{-1}$	$5,63806527320 \times 10^0$	$1,12430011743 \times 10^1$	$4,57442686062 \times 10^1$
34	$1,32392472233 \times 10^0$	$5,72004264316 \times 10^1$	$4,30485604494 \times 10^0$	$1,84822418949 \times 10^1$
35	$4,15939735130 \times 10^0$	$7,62618513363 \times 10^1$	$1,02738736025 \times 10^1$	$4,41990380748 \times 10^1$
36	$9,11947366479 \times 10^0$	$1,44197411315 \times 10^3$	$3,83269943435 \times 10^1$	$1,39124518987 \times 10^2$
37	$3,37164190849 \times 10^1$	$1,56048880774 \times 10^3$	$4,24903566163 \times 10^2$	$5,48838212877 \times 10^2$
38	$2,68825148324 \times 10^2$	$1,95599533543 \times 10^4$	$1,19703997268 \times 10^3$	$1,76926978431 \times 10^3$
39	$1,74791649230 \times 10^4$	$4,58860708828 \times 10^3$	$1,78639011527 \times 10^3$	$4,88299445022 \times 10^3$
40	$1,73931795332 \times 10^3$	$9,53661856211 \times 10^3$	$7,90374979342 \times 10^3$	$2,22907150856 \times 10^4$

Fonte: do autor

Tabela 4.10: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_2 por meio da Soma de Salzer.

M	$a = 1$	$a = 3$	$a = 5$	$a = 10$
1	$1,61967292196 \times 10^{-1}$	$4,31357498603 \times 10^{-1}$	$5,30835464525 \times 10^{-1}$	$5,48733541351 \times 10^{-1}$
2	$9,05738939592 \times 10^{-2}$	$2,83019220036 \times 10^{-1}$	$4,14824127813 \times 10^{-1}$	$4,92261042095 \times 10^{-1}$
3	$3,27968462263 \times 10^{-2}$	$1,81243712059 \times 10^{-1}$	$3,05224236394 \times 10^{-1}$	$4,31657378694 \times 10^{-1}$
4	$4,30271522666 \times 10^{-3}$	$1,04554579885 \times 10^{-1}$	$2,11151865023 \times 10^{-1}$	$3,68157728055 \times 10^{-1}$
5	$1,51266571508 \times 10^{-3}$	$4,87776989523 \times 10^{-2}$	$1,35561763679 \times 10^{-1}$	$3,07397486751 \times 10^{-1}$
6	$2,35856867990 \times 10^{-4}$	$1,74810687601 \times 10^{-2}$	$7,95146341241 \times 10^{-2}$	$2,49410637835 \times 10^{-1}$
7	$3,60043073634 \times 10^{-5}$	$6,82185273859 \times 10^{-3}$	$4,24749514881 \times 10^{-2}$	$1,98014747333 \times 10^{-1}$
8	$7,22852199957 \times 10^{-6}$	$3,89569982134 \times 10^{-3}$	$2,24459490139 \times 10^{-2}$	$1,52308584078 \times 10^{-1}$
9	$6,40359696606 \times 10^{-7}$	$1,17532965054 \times 10^{-3}$	$1,47608401768 \times 10^{-2}$	$1,15956455575 \times 10^{-1}$
10	$1,11394481542 \times 10^{-6}$	$2,73226979361 \times 10^{-4}$	$8,39382923156 \times 10^{-3}$	$8,56901030971 \times 10^{-2}$
11	$1,58874752287 \times 10^{-5}$	$1,62126371206 \times 10^{-4}$	$3,46590698340 \times 10^{-3}$	$6,21475381458 \times 10^{-2}$
12	$2,99442489419 \times 10^{-4}$	$8,57130177475 \times 10^{-4}$	$1,77484943710 \times 10^{-3}$	$4,71917209489 \times 10^{-2}$
13	$6,92938724329 \times 10^{-3}$	$2,08418729598 \times 10^{-2}$	$2,68813430067 \times 10^{-2}$	$6,74960675828 \times 10^{-2}$
14	$1,37449385669 \times 10^{-1}$	$3,72697459598 \times 10^{-1}$	$5,45715742135 \times 10^{-1}$	$1,01396873341 \times 10^0$

Fonte: do autor

Tabela 4.11: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_2 por meio do Algoritmo Wynn-Rho.

M	$a = 1$	$a = 3$	$a = 5$	$a = 10$
2	$1,63361559741 \times 10^{-1}$	$3,26475636491 \times 10^{-1}$	$4,56617182306 \times 10^{-1}$	$5,11006223915 \times 10^{-1}$
4	$3,04304141892 \times 10^{-3}$	$8,76018422051 \times 10^{-1}$	$7,03166284015 \times 10^{-1}$	$6,49864490469 \times 10^{-1}$
6	$8,25560741883 \times 10^{-5}$	$1,62509954139 \times 10^{-2}$	$9,20288104638 \times 10^{-1}$	$8,79771566480 \times 10^{-1}$
8	$6,26091225540 \times 10^{-7}$	$2,02597261071 \times 10^{-3}$	$2,39770381116 \times 10^{-2}$	$1,24948949941 \times 10^0$
10	$2,26731142497 \times 10^{-6}$	$7,69653364443 \times 10^{-5}$	$9,24650647892 \times 10^{-4}$	$1,22814436551 \times 10^{-1}$
12	$2,60410333371 \times 10^{-6}$	$9,75536877784 \times 10^{-5}$	$7,79896153913 \times 10^{-2}$	$1,88590565509 \times 10^{-1}$
14	$2,39942196003 \times 10^{-6}$	$8,97205429235 \times 10^{-5}$	$9,55130077834 \times 10^{-3}$	$1,20961241124 \times 10^{-1}$
16	$5,88190644949 \times 10^{-6}$	$1,62865847739 \times 10^{-4}$	$1,81133018752 \times 10^{-3}$	$1,12622319053 \times 10^{-1}$
18	-	-	-	$1,59541753436 \times 10^{-1}$

Fonte: do autor

4.3 Inversão de F_3

As Tabelas 4.13 – 4.16 e as Figuras 4.9 – 4.12 apresentam os resultados para a inversão numérica da Transformada de Laplace da função $F_3(s) = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$, cuja a inversa analítica é $f_3(t) = t \cos(at)$, para os Funcionais de Gaver, Transformada u de Levin, Soma de Salzer e Algoritmo Wynn-Rho.

Os M ótimos estão representados na Tabela 4.12. De modo geral, da mesma forma que em F_2 e pela mesma razão, os M ótimos e os Erros Absolutos Médios aumentam à medida que a cresce. Em comparação a F_2 , os Erros Absolutos Médios são maiores nesta função, vale

a pena ressaltar que F_3 tem a variável t multiplicando a função cosseno, o que causa uma deformação na oscilação.

Tabela 4.12: M ótimos e ordem do $\bar{E}_{abs}$ para a inversão de F_3 .

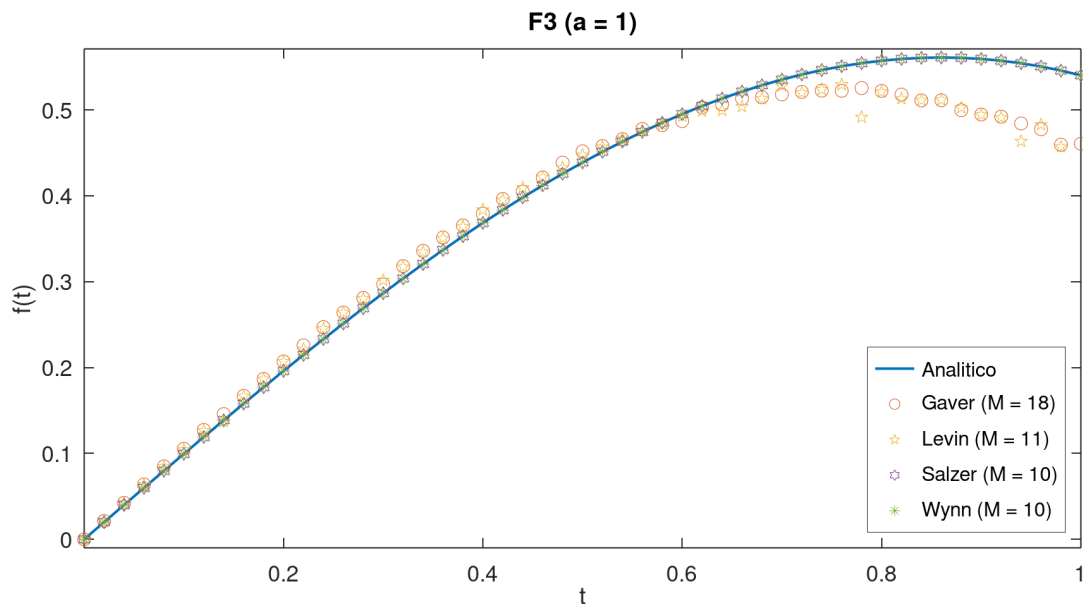
	$a = 1$	$a = 3$	$a = 5$	$a = 10$
Funcionais de Gaver	18 $[10^{-2}]$	19 $[10^{-2}]$	19 $[10^{-1}]$	19 $[10^{-1}]$
Transformada u de Levin	11 $[10^{-3}]$	24 $[10^{-2}]$	28 $[10^{-1}]$	20 $[10^{-1}]$
Soma de Salzer	10 $[10^{-6}]$	11 $[10^{-4}]$	12 $[10^{-3}]$	13 $[10^{-2}]$
Algoritmo Wynn-Rho	10 $[10^{-6}]$	10 $[10^{-5}]$	12 $[10^{-3}]$	14 $[10^{-1}]$

Fonte: do autor

A Soma de Salzer e o Algoritmo Wynn-Who tiveram desempenhos similares para esta função, porém para $a = 3$, o Algoritmo Wynn-Rho gerou um $\bar{E}_{abs}$ um pouco menor do que a Soma de Salzer, e para $a = 10$ ocorreu o oposto.

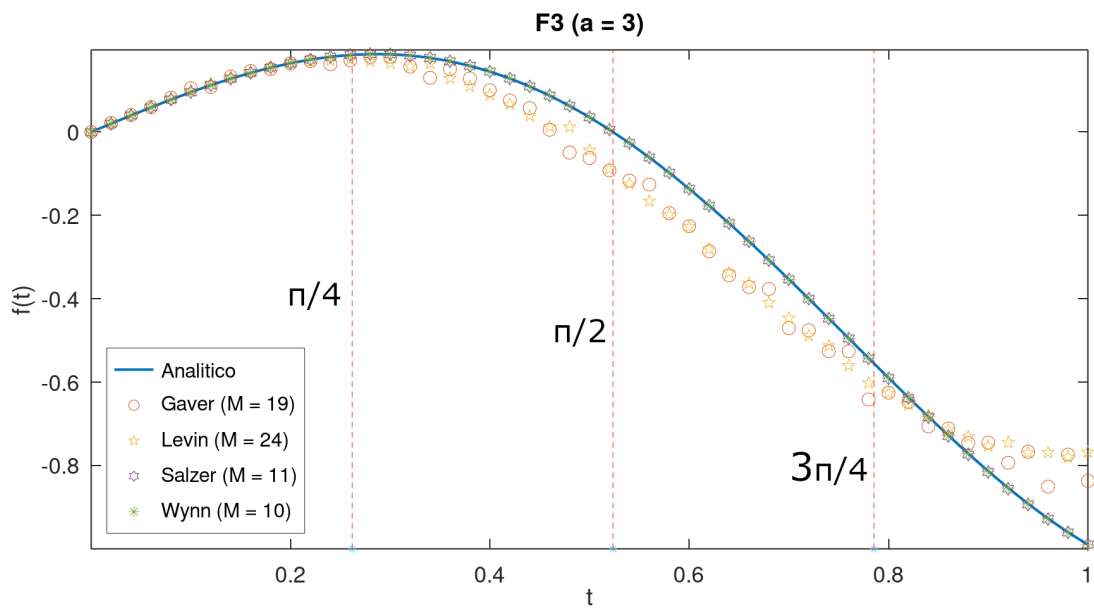
De forma similar a F_2 , os Funcionais de Gaver e a Transformada u de Levin perdem precisão quando argumento do cosseno é maior que $\pi/4$ radianos. Há uma exceção quando $a = 10$, o que pode ser observado na Figura 4.12, onde estes métodos perdem precisão quando o argumento do cosseno é maior que $3\pi/4$ radianos. Já para os outros dois métodos, a precisão é perdida quando o argumento é maior que 2π radianos.

Figura 4.9: Resultados para a inversão de F_3 , com $a = 1$



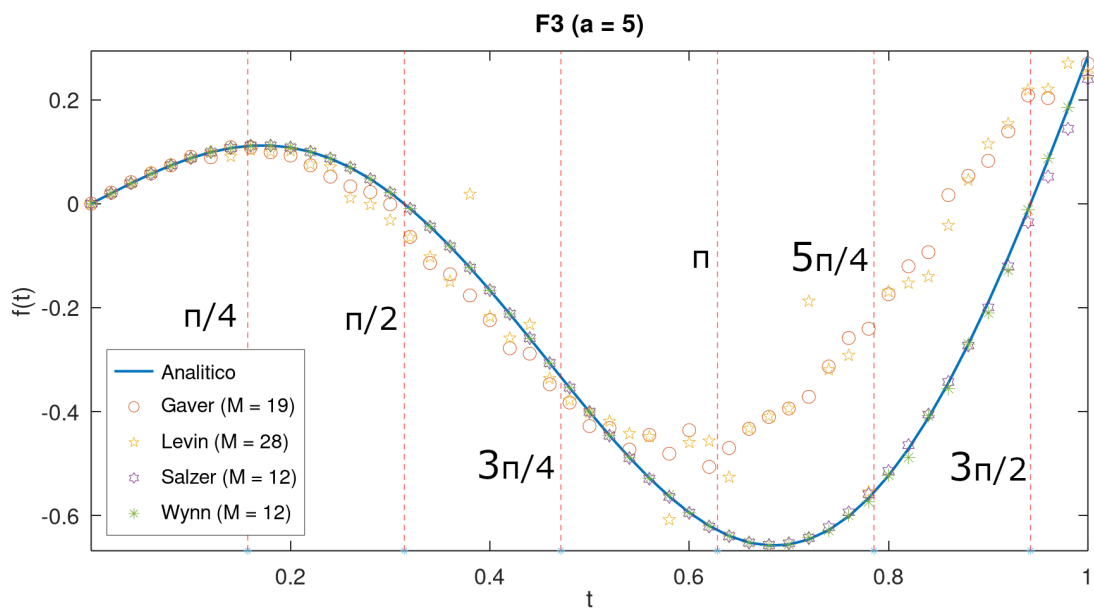
Fonte: do autor

Figura 4.10: Resultados para a inversão de F_3 , com $a = 3$



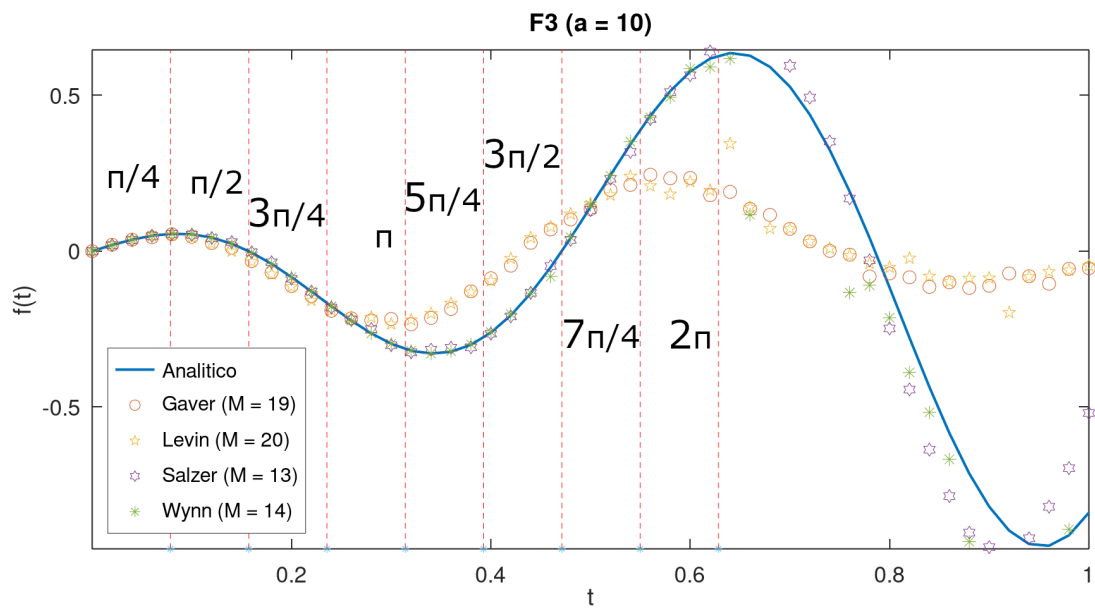
Fonte: do autor

Figura 4.11: Resultados para a inversão de F_3 , com $a = 5$



Fonte: do autor

Figura 4.12: Resultados para a inversão de F_3 , com $a = 10$



Fonte: do autor

Tabela 4.13: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_3 por meio dos Funcionais de Gaver.

M	$a = 1$	$a = 3$	$a = 5$	$a = 10$
1	$4,61633826853 \times 10^{-1}$	$3,11495759901 \times 10^{-1}$	$2,76665233849 \times 10^{-1}$	$3,36988580913 \times 10^{-1}$
2	$2,70758264052 \times 10^{-1}$	$2,75298935203 \times 10^{-1}$	$2,62003905167 \times 10^{-1}$	$3,32694111826 \times 10^{-1}$
3	$1,73871847678 \times 10^{-1}$	$2,37567204582 \times 10^{-1}$	$2,47045942741 \times 10^{-1}$	$3,27611965940 \times 10^{-1}$
4	$1,23649369384 \times 10^{-1}$	$2,03993194996 \times 10^{-1}$	$2,32789868135 \times 10^{-1}$	$3,22023387710 \times 10^{-1}$
5	$9,44984209547 \times 10^{-2}$	$1,76154927597 \times 10^{-1}$	$2,19339468140 \times 10^{-1}$	$3,16171830906 \times 10^{-1}$
6	$7,59051027244 \times 10^{-2}$	$1,53694066839 \times 10^{-1}$	$2,07051915081 \times 10^{-1}$	$3,10486333428 \times 10^{-1}$
7	$6,31773873999 \times 10^{-2}$	$1,35614475545 \times 10^{-1}$	$1,96284696985 \times 10^{-1}$	$3,04999938895 \times 10^{-1}$
8	$5,39799048642 \times 10^{-2}$	$1,20801550973 \times 10^{-1}$	$1,86344305690 \times 10^{-1}$	$2,99412762973 \times 10^{-1}$
9	$4,70650787116 \times 10^{-2}$	$1,08740637416 \times 10^{-1}$	$1,76938282369 \times 10^{-1}$	$2,93789504669 \times 10^{-1}$
10	$4,16718394557 \times 10^{-2}$	$9,86405263829 \times 10^{-2}$	$1,68614411075 \times 10^{-1}$	$2,88212763574 \times 10^{-1}$
11	$3,73573609089 \times 10^{-2}$	$9,03131839579 \times 10^{-2}$	$1,61359232935 \times 10^{-1}$	$2,82750205266 \times 10^{-1}$
12	$3,38506295595 \times 10^{-2}$	$8,31304806539 \times 10^{-2}$	$1,54522879768 \times 10^{-1}$	$2,77316166835 \times 10^{-1}$
13	$3,09376988464 \times 10^{-2}$	$7,69381582461 \times 10^{-2}$	$1,48102112622 \times 10^{-1}$	$2,71935615089 \times 10^{-1}$
14	$2,84778339779 \times 10^{-2}$	$7,17199696036 \times 10^{-2}$	$1,42083284664 \times 10^{-1}$	$2,66626830088 \times 10^{-1}$
15	$2,63755909853 \times 10^{-2}$	$6,71125277243 \times 10^{-2}$	$1,36766169366 \times 10^{-1}$	$2,61561849037 \times 10^{-1}$
16	$2,45473384003 \times 10^{-2}$	$6,30328280868 \times 10^{-2}$	$1,31936469049 \times 10^{-1}$	$2,56654654648 \times 10^{-1}$
17	$2,29981881123 \times 10^{-2}$	$5,93559868881 \times 10^{-2}$	$1,27430010298 \times 10^{-1}$	$2,51804699205 \times 10^{-1}$
18	$2,14951546614 \times 10^{-2}$	$5,60206187390 \times 10^{-2}$	$1,23903707886 \times 10^{-1}$	$2,47338515767 \times 10^{-1}$
19	$2,67812546911 \times 10^{-2}$	$5,26106464188 \times 10^{-2}$	$1,17554163563 \times 10^{-1}$	$2,41972072870 \times 10^{-1}$
20	$8,83986696612 \times 10^{-2}$	$1,04893118592 \times 10^{-1}$	$1,48371096573 \times 10^{-1}$	$2,49637839258 \times 10^{-1}$
21	$5,43070005861 \times 10^{-1}$	$6,28616475079 \times 10^{-1}$	$5,89297908590 \times 10^{-1}$	$5,55692164455 \times 10^{-1}$
22	$3,67984226472 \times 10^0$	$4,64756840462 \times 10^0$	$3,76776157193 \times 10^0$	$3,26523438594 \times 10^0$
23	$3,12748356694 \times 10^1$	$3,25085912972 \times 10^1$	$2,54176997720 \times 10^1$	$2,60238409385 \times 10^1$
24	$3,54812643372 \times 10^2$	$3,03158195846 \times 10^2$	$2,43892416290 \times 10^2$	$2,36628402564 \times 10^2$
25	$2,30612556338 \times 10^3$	$1,90843550049 \times 10^3$	$1,82294426574 \times 10^3$	$1,57837911837 \times 10^3$
26	$1,45157555346 \times 10^4$	$1,32406777151 \times 10^4$	$1,39309601601 \times 10^4$	$1,41861561532 \times 10^4$
27	$1,20224865290 \times 10^5$	$1,07804492969 \times 10^5$	$9,23184020116 \times 10^4$	$1,02332986894 \times 10^5$
28	$1,42316358892 \times 10^6$	$1,45765407044 \times 10^6$	$1,39704162795 \times 10^6$	$1,24883639365 \times 10^6$

Fonte: do autor

Tabela 4.14: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_3 por meio da Transformada u de Levin.

M	$a = 1$	$a = 3$	$a = 5$	$a = 10$
1	$4,61633826853 \times 10^{-1}$	$3,11495759901 \times 10^{-1}$	$2,76665233849 \times 10^{-1}$	$3,36988580913 \times 10^{-1}$
2	$4,82990975086 \times 10^{-1}$	$3,75994484449 \times 10^{-1}$	$3,13216087683 \times 10^{-1}$	$3,53079058921 \times 10^{-1}$
3	$5,46003653263 \times 10^{-1}$	$3,77286296368 \times 10^{-1}$	$2,83962671836 \times 10^{-1}$	$3,39075894525 \times 10^{-1}$
4	$2,74142423237 \times 10^{-1}$	$2,70043781281 \times 10^{-1}$	$2,60804812470 \times 10^{-1}$	$3,34096884129 \times 10^{-1}$
5	$6,20222140195 \times 10^{-1}$	$2,69095960206 \times 10^{-1}$	$2,60567718362 \times 10^{-1}$	$3,29818076210 \times 10^{-1}$
6	$6,78541674035 \times 10^{-2}$	$3,89024023853 \times 10^{-1}$	$2,94856785579 \times 10^{-1}$	$3,37778871866 \times 10^{-1}$
7	$4,30099247106 \times 10^{-2}$	$1,32306296427 \times 10^{-1}$	$3,04637293485 \times 10^{-1}$	$3,20917043946 \times 10^{-1}$
8	$2,09110322813 \times 10^{-2}$	$1,06137185557 \times 10^{-1}$	$1,82078265600 \times 10^{-1}$	$3,27154238059 \times 10^{-1}$
9	$9,72550624804 \times 10^{-3}$	$9,15763922257 \times 10^{-2}$	$2,34502390131 \times 10^{-1}$	$3,65348378554 \times 10^{-1}$
10	$9,86558148517 \times 10^{-3}$	$1,00735109090 \times 10^{-1}$	$1,89313020472 \times 10^{-1}$	$5,15540443092 \times 10^{-1}$
11	$6,26884950131 \times 10^{-3}$	$7,04591426393 \times 10^{-2}$	$1,49834331338 \times 10^{-1}$	$5,55506305989 \times 10^{-1}$
12	$6,87772143468 \times 10^{-3}$	$7,29984227480 \times 10^{-2}$	$1,33415531975 \times 10^{-1}$	$2,70075140896 \times 10^{-1}$
13	$5,50573681275 \times 10^{-2}$	$8,89426302932 \times 10^{-2}$	$1,59003000999 \times 10^{-1}$	$3,35158924928 \times 10^{-1}$
14	$3,14589423220 \times 10^{-2}$	$8,78529010698 \times 10^{-2}$	$1,88726015204 \times 10^{-1}$	$2,85309341095 \times 10^{-1}$
15	$3,17652189998 \times 10^{-2}$	$8,29985141073 \times 10^{-2}$	$1,57049898996 \times 10^{-1}$	$2,77828708829 \times 10^{-1}$
16	$2,72130071232 \times 10^{-2}$	$7,38212175670 \times 10^{-2}$	$1,47161474487 \times 10^{-1}$	$2,70078460909 \times 10^{-1}$
17	$2,41234145985 \times 10^{-2}$	$6,87816961507 \times 10^{-2}$	$1,60983629205 \times 10^{-1}$	$2,65748228952 \times 10^{-1}$
18	$2,40817445619 \times 10^{-2}$	$6,07267434882 \times 10^{-2}$	$1,64092185700 \times 10^{-1}$	$2,60703909981 \times 10^{-1}$
19	$2,36594323526 \times 10^{-2}$	$6,11121997676 \times 10^{-2}$	$1,33852207217 \times 10^{-1}$	$2,52880773544 \times 10^{-1}$
20	$2,31267016132 \times 10^{-2}$	$5,97659230376 \times 10^{-2}$	$1,30180603043 \times 10^{-1}$	$2,44594010498 \times 10^{-1}$
21	$2,40692147824 \times 10^{-2}$	$5,79347958300 \times 10^{-2}$	$1,23241871320 \times 10^{-1}$	$2,48128551479 \times 10^{-1}$
22	$2,62575687459 \times 10^{-2}$	$1,04419024567 \times 10^{-1}$	$1,22862941197 \times 10^{-1}$	$2,49661272046 \times 10^{-1}$
23	$2,30373911011 \times 10^{-2}$	$5,63684588199 \times 10^{-2}$	$1,23151859776 \times 10^{-1}$	$2,61655277048 \times 10^{-1}$
24	$2,59143566637 \times 10^{-2}$	$5,61106195562 \times 10^{-2}$	$1,41298393665 \times 10^{-1}$	$2,78208376712 \times 10^{-1}$
25	$1,49118859458 \times 10^{-1}$	$5,69371897293 \times 10^{-2}$	$1,22682612316 \times 10^{-1}$	$2,79638505657 \times 10^{-1}$
26	$5,29699283623 \times 10^{-2}$	$5,75935759306 \times 10^{-2}$	$1,36320555022 \times 10^{-1}$	$3,44504720210 \times 10^{-1}$
27	$2,74449133797 \times 10^{-2}$	$6,38518687192 \times 10^{-2}$	$1,62597307514 \times 10^{-1}$	$2,58065842974 \times 10^{-1}$
28	$3,21647733728 \times 10^{-2}$	$6,06328953267 \times 10^{-2}$	$1,13551364269 \times 10^{-1}$	$3,15169160979 \times 10^{-1}$
29	$7,75069719860 \times 10^{-2}$	$7,02054915560 \times 10^{-2}$	$1,26877246494 \times 10^{-1}$	$2,54145796356 \times 10^{-1}$
30	$4,21376821685 \times 10^{-1}$	$1,09037546561 \times 10^{-1}$	$1,56838853129 \times 10^{-1}$	$2,84714424423 \times 10^{-1}$
31	$3,20091325069 \times 10^{-1}$	$2,51878699896 \times 10^{-1}$	$2,48466645305 \times 10^{-1}$	$4,75984764493 \times 10^{-1}$
32	$5,62646854337 \times 10^{-1}$	$6,25036575007 \times 10^{-1}$	$7,26864691416 \times 10^{-1}$	$2,56478330946 \times 10^0$
33	$1,59169693697 \times 10^0$	$1,76065672629 \times 10^0$	$1,92040253919 \times 10^0$	$2,59508400730 \times 10^1$
34	$2,86567085060 \times 10^0$	$3,76383760726 \times 10^0$	$5,19665578968 \times 10^0$	$2,16166535799 \times 10^1$
35	$2,06967198477 \times 10^1$	$1,81850407033 \times 10^1$	$8,89843679274 \times 10^0$	$4,06011193145 \times 10^1$
36	$1,66813276451 \times 10^1$	$4,53306492215 \times 10^1$	$1,83782475768 \times 10^1$	$9,71091361116 \times 10^1$
37	$3,51664222289 \times 10^1$	$1,81322807609 \times 10^2$	$1,09863070516 \times 10^2$	$2,23257143449 \times 10^2$
38	$1,01431893137 \times 10^2$	$6,08735341817 \times 10^2$	$1,76279810311 \times 10^2$	$4,40433670205 \times 10^2$
39	$3,71122388233 \times 10^2$	$2,89878176653 \times 10^3$	$7,13638186656 \times 10^2$	$9,92077214837 \times 10^2$
40	$2,83405838155 \times 10^3$	$1,56544483502 \times 10^5$	$1,54629572170 \times 10^4$	$2,54602183821 \times 10^3$

Fonte: do autor

Tabela 4.15: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_3 por meio da Soma de Salzer.

M	$a = 1$	$a = 3$	$a = 5$	$a = 10$
1	$4,61633826853 \times 10^{-1}$	$3,11495759901 \times 10^{-1}$	$2,76665233849 \times 10^{-1}$	$3,36988580913 \times 10^{-1}$
2	$1,76770118678 \times 10^{-1}$	$2,62121112376 \times 10^{-1}$	$2,55346806818 \times 10^{-1}$	$3,30577733340 \times 10^{-1}$
3	$8,64075579940 \times 10^{-2}$	$1,84382903198 \times 10^{-1}$	$2,23891905061 \times 10^{-1}$	$3,17060638371 \times 10^{-1}$
4	$3,13175241393 \times 10^{-2}$	$1,17607334069 \times 10^{-1}$	$1,90293633563 \times 10^{-1}$	$2,98351884901 \times 10^{-1}$
5	$4,22205759826 \times 10^{-3}$	$8,95893377841 \times 10^{-2}$	$1,60748921100 \times 10^{-1}$	$2,73887535087 \times 10^{-1}$
6	$1,90374698548 \times 10^{-3}$	$5,54092467318 \times 10^{-2}$	$1,28940659350 \times 10^{-1}$	$2,45065788223 \times 10^{-1}$
7	$1,68445375754 \times 10^{-4}$	$2,15991480794 \times 10^{-2}$	$9,06597491358 \times 10^{-2}$	$2,12777868305 \times 10^{-1}$
8	$6,30466457934 \times 10^{-5}$	$7,41638964927 \times 10^{-3}$	$5,32121695182 \times 10^{-2}$	$1,81240466360 \times 10^{-1}$
9	$4,76221421703 \times 10^{-6}$	$4,56467068668 \times 10^{-3}$	$2,61493150922 \times 10^{-2}$	$1,49298531170 \times 10^{-1}$
10	$1,86130929875 \times 10^{-6}$	$1,36407830513 \times 10^{-3}$	$1,32957573125 \times 10^{-2}$	$1,18989104611 \times 10^{-1}$
11	$1,58698320480 \times 10^{-5}$	$3,49702013221 \times 10^{-4}$	$9,34581473219 \times 10^{-3}$	$9,02548289004 \times 10^{-2}$
12	$2,77462060505 \times 10^{-4}$	$4,30517082785 \times 10^{-4}$	$4,48463025801 \times 10^{-3}$	$6,55544141516 \times 10^{-2}$
13	$7,29342625660 \times 10^{-3}$	$7,19789857346 \times 10^{-3}$	$7,54068959713 \times 10^{-3}$	$4,65721437546 \times 10^{-2}$
14	$1,52125143580 \times 10^{-1}$	$1,46248834889 \times 10^{-1}$	$1,34322960107 \times 10^{-1}$	$1,00468298936 \times 10^{-1}$

Fonte: do autor

Tabela 4.16: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_3 por meio do Algoritmo Wynn-Rho.

M	$a = 1$	$a = 3$	$a = 5$	$a = 10$
2	$4,89238755449 \times 10^{-1}$	$1,94840224332 \times 10^0$	$2,65843355099 \times 10^0$	$6,08004258785 \times 10^{-1}$
4	$1,12841984913 \times 10^{-2}$	$3,87020292996 \times 10^{-1}$	$6,22678281008 \times 10^{-1}$	$4,76732990155 \times 10^{-1}$
6	$4,09326165643 \times 10^{-3}$	$2,96904213665 \times 10^{-2}$	$1,10841628137 \times 10^{-1}$	$2,82963661765 \times 10^{-1}$
8	$2,72496246735 \times 10^{-6}$	$1,66523281624 \times 10^{-2}$	$1,39287825030 \times 10^{-1}$	$5,78445476801 \times 10^{-1}$
10	$1,77118985893 \times 10^{-6}$	$9,31225906279 \times 10^{-5}$	$6,65463834092 \times 10^{-2}$	$2,04402362222 \times 10^{-1}$
12	$3,75001297661 \times 10^{-5}$	$1,33067089503 \times 10^{-4}$	$2,27941839350 \times 10^{-3}$	$2,57243706648 \times 10^{-1}$
14	$3,19204861555 \times 10^{-6}$	$1,13236734459 \times 10^{-4}$	$3,11009706353 \times 10^{-3}$	$1,85827367122 \times 10^{-1}$
16	$2,58623372893 \times 10^{-5}$	$1,05715727710 \times 10^{-4}$	$8,37813684542 \times 10^{-3}$	$4,73535793724 \times 10^{-1}$

Fonte: do autor

4.4 Inversão de F_4

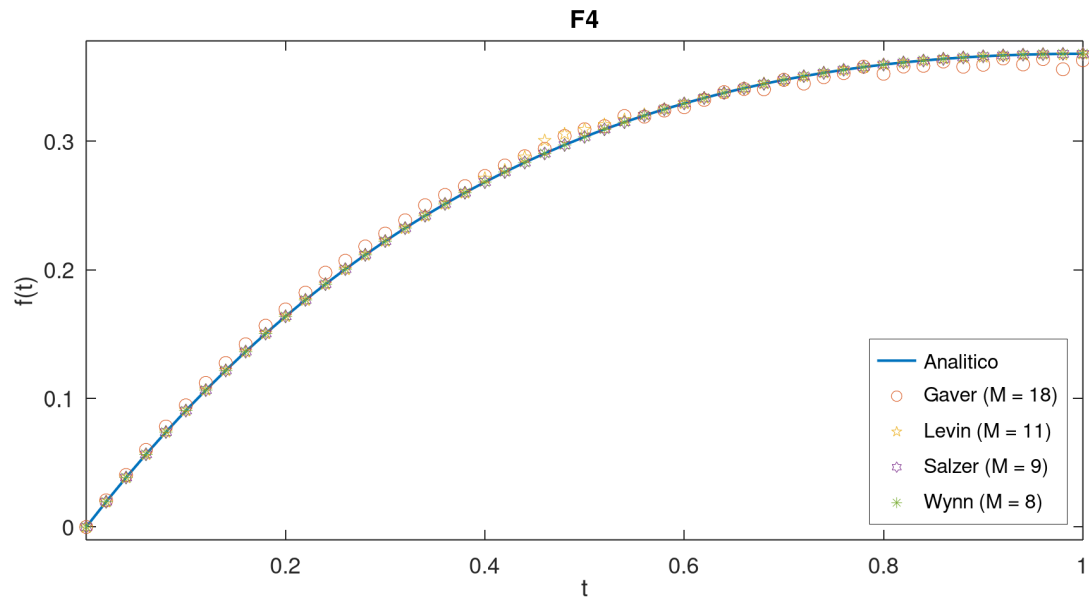
A Tabela 4.18 e a Figura 4.13 apresentam os resultados para a inversão numérica da Transformada de Laplace da função $F_4(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$, cuja inversa analítica é $f_4(t) = te^{-t}$, para os Funcionais de Gaver, Transformada u de Levin, Soma de Salzer e Algoritmo Wynn-Rho.

Os M ótimos são dados pela Tabela 4.17. Para esta função, o Algoritmo Wynn-Rho foi o que gerou menor Erro Absoluto Médio, na ordem de 10^{-9} , seguido da Soma de Salzer, com um erro na ordem de 10^{-8} .

Tabela 4.17: M ótimos e ordem do $\overline{E}_{abs}$ para a inversão de F_4 .

	M ótimo	Ordem do $\overline{E}_{abs}$
Funcionais de Gaver	18	10^{-3}
Transformada u de Levin	11	10^{-4}
Soma de Salzer	9	10^{-8}
Algoritmo Wynn-Rho	8	10^{-9}

Fonte: do autor

Figura 4.13: Resultados para a inversão de F_4 

Fonte: do autor

Tabela 4.18: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_4 .

M	Gaver	Levin	Salzer	Wynn-Rho
1	$6,18173797490 \times 10^{-2}$	$6,18173797490 \times 10^{-2}$	$6,18173797490 \times 10^{-2}$	-
2	$3,56157366987 \times 10^{-2}$	$2,85462937626 \times 10^{-2}$	$1,39101486264 \times 10^{-2}$	$1,48815158138 \times 10^{-2}$
3	$2,50364095180 \times 10^{-2}$	$7,53347233251 \times 10^{-2}$	$2,67492646824 \times 10^{-3}$	-
4	$1,93112311146 \times 10^{-2}$	$8,44795260467 \times 10^{-3}$	$4,32332430823 \times 10^{-4}$	$5,78663344104 \times 10^{-5}$
5	$1,57102759780 \times 10^{-2}$	$2,21566035562 \times 10^{-1}$	$6,07934437160 \times 10^{-5}$	-
6	$1,32486924434 \times 10^{-2}$	$3,69117204169 \times 10^{-3}$	$7,19388580380 \times 10^{-6}$	$4,13903162704 \times 10^{-7}$
7	$1,14517734088 \times 10^{-2}$	$3,75811596358 \times 10^{-3}$	$7,29832510894 \times 10^{-7}$	-
8	$1,00829329503 \times 10^{-2}$	$2,33501818589 \times 10^{-3}$	$6,46118399105 \times 10^{-8}$	$7,33357657100 \times 10^{-9}$
9	$9,00576169150 \times 10^{-3}$	$1,54604173511 \times 10^{-3}$	$5,16340617286 \times 10^{-8}$	-
10	$8,13615641644 \times 10^{-3}$	$2,63236538128 \times 10^{-3}$	$1,04616390630 \times 10^{-6}$	$1,35081959519 \times 10^{-8}$
11	$7,41980702247 \times 10^{-3}$	$8,90267218109 \times 10^{-4}$	$1,46487320362 \times 10^{-5}$	-
12	$6,82107658496 \times 10^{-3}$	$4,02324751360 \times 10^{-3}$	$2,58836524198 \times 10^{-4}$	$2,89797538519 \times 10^{-8}$
13	$6,31167543483 \times 10^{-3}$	$9,54464141261 \times 10^{-3}$	$5,87724198962 \times 10^{-3}$	-
14	$5,87282871417 \times 10^{-3}$	$7,11564567133 \times 10^{-3}$	$1,11849957915 \times 10^{-1}$	$1,70747747752 \times 10^{-7}$
15	$5,49285274802 \times 10^{-3}$	$8,35927222715 \times 10^{-3}$	-	-
16	$5,14702545056 \times 10^{-3}$	$8,27884360768 \times 10^{-3}$	-	$1,20106013027 \times 10^{-6}$
17	$4,87055098504 \times 10^{-3}$	$5,62692468258 \times 10^{-3}$	-	-
18	$4,43180045600 \times 10^{-3}$	$5,13934698304 \times 10^{-3}$	-	-
19	$1,21619119378 \times 10^{-2}$	$5,46222118810 \times 10^{-3}$	-	-
20	$8,74785647508 \times 10^{-2}$	$5,34144292809 \times 10^{-3}$	-	-
21	$5,11866008487 \times 10^{-1}$	$5,04437449838 \times 10^{-3}$	-	-
22	$3,80794176090 \times 10^0$	$5,18189244548 \times 10^{-3}$	-	-
23	$3,35266179457 \times 10^1$	$6,13113866662 \times 10^{-3}$	-	-
24	$2,94177490216 \times 10^2$	$6,02044252417 \times 10^{-3}$	-	-
25	$2,00984415405 \times 10^3$	$5,98659359657 \times 10^{-3}$	-	-
26	$1,61630786656 \times 10^4$	$1,28514281758 \times 10^{-2}$	-	-
27	$1,10239018486 \times 10^5$	$6,42911240069 \times 10^{-3}$	-	-
28	$1,40857004897 \times 10^6$	$8,32160112242 \times 10^{-3}$	-	-
29	-	$1,95573498923 \times 10^{-2}$	-	-
30	-	$6,74125703683 \times 10^{-2}$	-	-
31	-	$2,89643132184 \times 10^{-1}$	-	-
32	-	$5,72550669305 \times 10^{-1}$	-	-
33	-	$1,60560135605 \times 10^0$	-	-
34	-	$4,97685646959 \times 10^0$	-	-
35	-	$2,13362250421 \times 10^1$	-	-
36	-	$3,67104384672 \times 10^1$	-	-
37	-	$4,64121948909 \times 10^1$	-	-
38	-	$1,43219924920 \times 10^2$	-	-
39	-	$8,07671115769 \times 10^2$	-	-
40	-	$1,26425400154 \times 10^3$	-	-

Fonte: do autor

4.5 Inversão de F_5

As Tabelas 4.20 – 4.23 e as Figuras 4.14 – 4.17 apresentam os resultados para a inversão numérica da Transformada de Laplace da função $F_5(s) = e^{-b\sqrt{s}}$, cuja inversa analítica é $f_5(t) = \frac{b}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{b^2}{4t}}$, para os Funcionais de Gaver, Transformada u de Levin, Soma de Salzer e Algoritmo Wynn-Rho.

Nesta função foi utilizado $t \in [10^{-2}, 1]$ por conta da Transformada u de Levin e do Algoritmo Wynn-Rho, que resultaram em um problema de overflow nos Erros Absolutos Médios para valores de t menores que 0,01. Além disso, para $b = 3, 5$, o $\overline{E}_{abs}$ do Algoritmo Wynn-Rho também foi calculado para $M = 18$.

Os valores dos M ótimos são dados pela Tabela 4.19. Há uma variação relevante nos valores dos M ótimos dos métodos, principalmente se comparado à F_1 , que também tem comportamento exponencial. O que diferencia esta função de F_1 , são o expoente fracionário e a constante que multiplica a base da exponencial. Essas mudanças geram uma diferença considerável nos gráficos. De maneira geral, os Erros Absolutos Médios diminuem à medida que o parâmetro b cresce para os dois métodos.

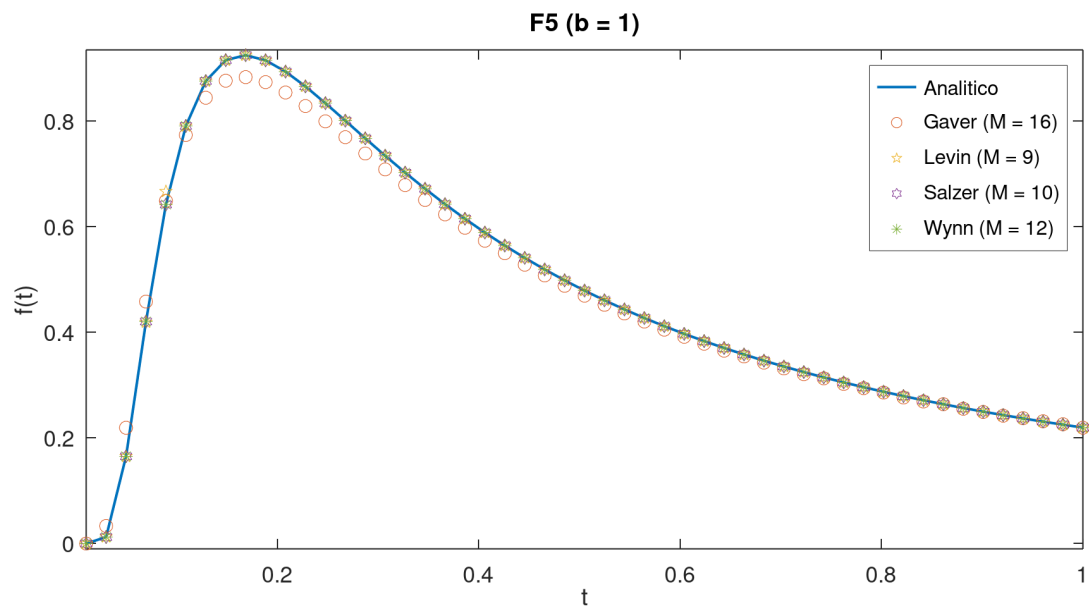
Tabela 4.19: M ótimos e ordem do $\overline{E}_{abs}$ para a inversão de F_5 .

	$b = 1$	$b = 1, 5$	$b = 2, 5$	$b = 3, 5$
Funcionais de Gaver	16 $[10^{-2}]$	18 $[10^{-2}]$	18 $[10^{-3}]$	22 $[10^{-3}]$
Transformada u de Levin	9 $[10^{-4}]$	9 $[10^{-4}]$	11 $[10^{-4}]$	11 $[10^{-5}]$
Soma de Salzer	10 $[10^{-5}]$	10 $[10^{-6}]$	10 $[10^{-6}]$	11 $[10^{-7}]$
Algoritmo Wynn-Rho	12 $[10^{-5}]$	12 $[10^{-5}]$	12 $[10^{-6}]$	16 $[10^{-7}]$

Fonte: do autor

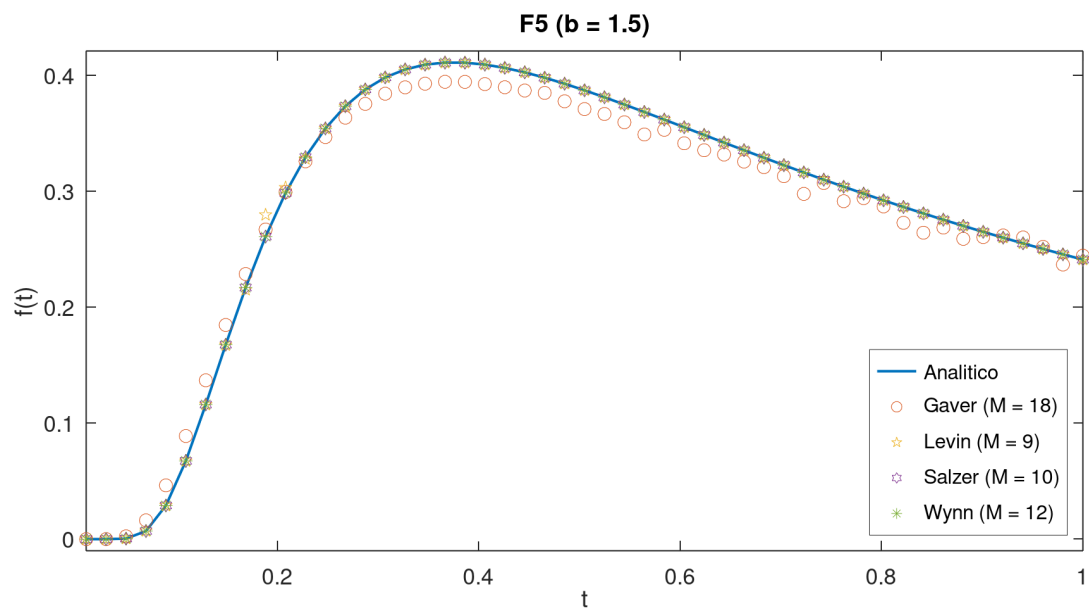
Para esta função, da mesma maneira que em F_1 , a Soma de Salzer e o Algoritmo Wynn-Rho tiveram desempenho similar, com uma diferença pontual em $b = 1, 5$ onde a Soma de Salzer gera um $\overline{E}_{abs}$ um pouco menor.

Figura 4.14: Resultados para a inversão de F_5 , com $b = 1$



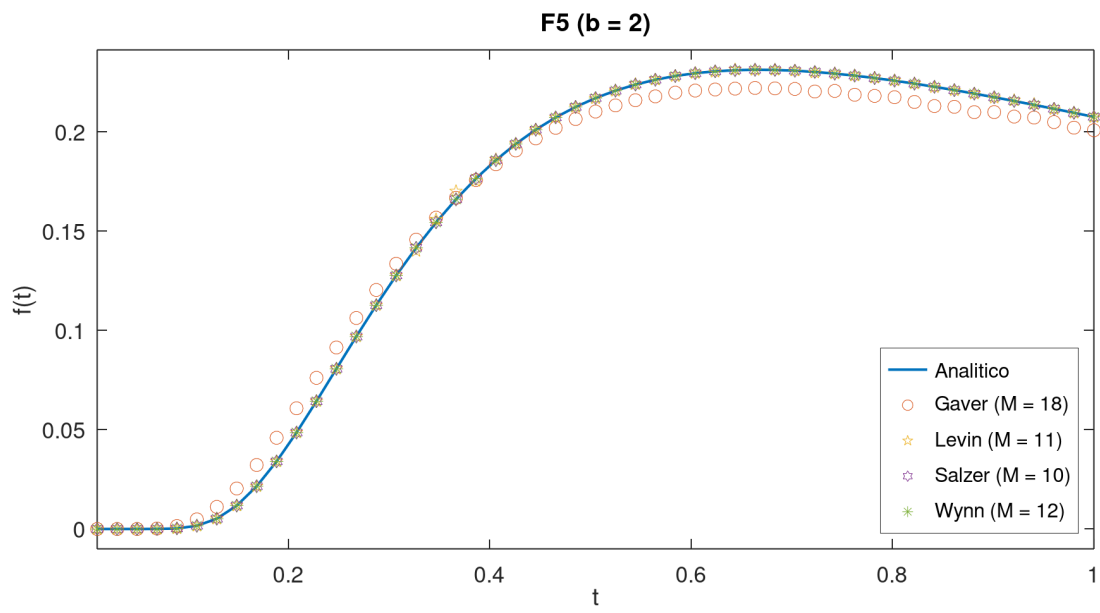
Fonte: do autor

Figura 4.15: Resultados para a inversão de F_5 , com $b = 1,5$



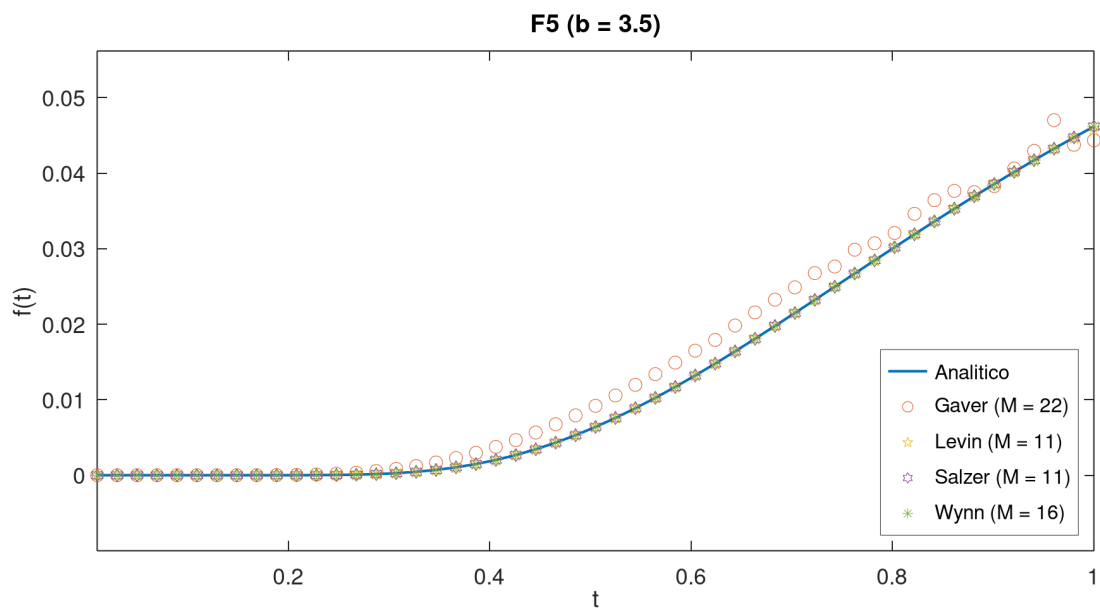
Fonte: do autor

Figura 4.16: Resultados para a inversão de F_5 , com $b = 2$



Fonte: do autor

Figura 4.17: Resultados para a inversão de F_5 , com $b = 3,5$



Fonte: do autor

Tabela 4.20: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_5 por meio dos Funcionais de Gaver.

M	$b = 1$	$b = 1,5$	$b = 2$	$b = 3,5$
1	$1,57647453614 \times 10^{-1}$	$1,06881666619 \times 10^{-1}$	$6,02346562772 \times 10^{-2}$	$1,78801127922 \times 10^{-2}$
2	$9,54448660923 \times 10^{-2}$	$6,94096727855 \times 10^{-2}$	$4,03638311268 \times 10^{-2}$	$1,20840220430 \times 10^{-2}$
3	$6,80728426077 \times 10^{-2}$	$5,16427833246 \times 10^{-2}$	$3,07495259553 \times 10^{-2}$	$9,14418997221 \times 10^{-3}$
4	$5,27898427029 \times 10^{-2}$	$4,11236037356 \times 10^{-2}$	$2,49255042477 \times 10^{-2}$	$7,36865805734 \times 10^{-3}$
5	$4,30758566707 \times 10^{-2}$	$3,41551605146 \times 10^{-2}$	$2,09834685720 \times 10^{-2}$	$6,17682741622 \times 10^{-3}$
6	$3,63687275447 \times 10^{-2}$	$2,91988144132 \times 10^{-2}$	$1,81272437245 \times 10^{-2}$	$5,31988835502 \times 10^{-3}$
7	$3,14637705686 \times 10^{-2}$	$2,54939930847 \times 10^{-2}$	$1,59587793167 \times 10^{-2}$	$4,67331628075 \times 10^{-3}$
8	$2,77222769935 \times 10^{-2}$	$2,26205870578 \times 10^{-2}$	$1,42549392536 \times 10^{-2}$	$4,16773772758 \times 10^{-3}$
9	$2,47748457591 \times 10^{-2}$	$2,03274711549 \times 10^{-2}$	$1,28802682664 \times 10^{-2}$	$3,76136916869 \times 10^{-3}$
10	$2,23932468387 \times 10^{-2}$	$1,84553024567 \times 10^{-2}$	$1,17475339154 \times 10^{-2}$	$3,42750733593 \times 10^{-3}$
11	$2,04289669619 \times 10^{-2}$	$1,68981177969 \times 10^{-2}$	$1,07979250873 \times 10^{-2}$	$3,14827209595 \times 10^{-3}$
12	$1,87812232144 \times 10^{-2}$	$1,55827278753 \times 10^{-2}$	$9,99030896664 \times 10^{-3}$	$2,91123180624 \times 10^{-3}$
13	$1,73793298010 \times 10^{-2}$	$1,44569052910 \times 10^{-2}$	$9,29503065967 \times 10^{-3}$	$2,70747025355 \times 10^{-3}$
14	$1,61711735976 \times 10^{-2}$	$1,34826717607 \times 10^{-2}$	$8,69015588108 \times 10^{-3}$	$2,53042364058 \times 10^{-3}$
15	$1,51297751486 \times 10^{-2}$	$1,26315160331 \times 10^{-2}$	$8,15948570081 \times 10^{-3}$	$2,37514977557 \times 10^{-3}$
16	$1,41576281548 \times 10^{-2}$	$1,18750336244 \times 10^{-2}$	$7,68664152411 \times 10^{-3}$	$2,23787281636 \times 10^{-3}$
17	$1,44199456351 \times 10^{-2}$	$1,12504025212 \times 10^{-2}$	$7,28772485459 \times 10^{-3}$	$2,11553546113 \times 10^{-3}$
18	$2,28048096365 \times 10^{-2}$	$1,08222997850 \times 10^{-2}$	$6,80301023273 \times 10^{-3}$	$2,00627390960 \times 10^{-3}$
19	$9,81434518065 \times 10^{-2}$	$2,08708481944 \times 10^{-2}$	$6,90996685548 \times 10^{-3}$	$1,90668842098 \times 10^{-3}$
20	$6,79371481497 \times 10^{-1}$	$1,22644411751 \times 10^{-1}$	$1,13376476913 \times 10^{-2}$	$1,81765302198 \times 10^{-3}$
21	$4,15839618837 \times 10^0$	$6,95941252748 \times 10^{-1}$	$5,25488478791 \times 10^{-2}$	$1,75250210844 \times 10^{-3}$
22	$2,81736352089 \times 10^1$	$3,85454003746 \times 10^0$	$2,19760201807 \times 10^{-1}$	$1,62661975216 \times 10^{-3}$
23	$2,13855235838 \times 10^2$	$2,69758635479 \times 10^1$	$1,56282594583 \times 10^0$	$3,06638229783 \times 10^{-3}$
24	$1,68532797037 \times 10^3$	$2,08850651680 \times 10^2$	$1,15199310063 \times 10^1$	$1,13381140367 \times 10^{-2}$
25	$1,14664391018 \times 10^4$	$1,66972949217 \times 10^3$	$7,86078778178 \times 10^1$	$6,19227966808 \times 10^{-2}$
26	$7,31228777546 \times 10^4$	$1,13835343315 \times 10^4$	$4,96879441728 \times 10^2$	$3,38861642962 \times 10^{-1}$
27	$5,48292582969 \times 10^5$	$7,42056822161 \times 10^4$	$3,50203090921 \times 10^3$	$1,45877662815 \times 10^0$
28	$6,12067954621 \times 10^6$	$5,46211169183 \times 10^5$	$2,95332193239 \times 10^4$	$1,01175824574 \times 10^1$

Fonte: do autor

Tabela 4.21: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_5 por meio da Transformada u de Levin.

M	$b = 1$	$b = 1,5$	$b = 2$	$b = 3,5$
1	$1,57647453614 \times 10^{-1}$	$1,06881666619 \times 10^{-1}$	$6,02346562772 \times 10^{-2}$	$1,78801127922 \times 10^{-2}$
2	$6,29729288552 \times 10^{-2}$	$5,18234308458 \times 10^{-2}$	$3,54444413734 \times 10^{-2}$	$1,42231496829 \times 10^{-2}$
3	$9,37146758951 \times 10^{-2}$	$6,51519217912 \times 10^{-2}$	$7,88742462881 \times 10^{-2}$	$5,30481134991 \times 10^{-2}$
4	$1,60995049570 \times 10^{-2}$	$1,40943130403 \times 10^{-2}$	$1,22613160019 \times 10^{-2}$	$8,45935992294 \times 10^{-3}$
5	$1,60411859744 \times 10^{-2}$	$1,95632920209 \times 10^{-2}$	$4,24860724030 \times 10^{-2}$	$2,68411864665 \times 10^{-2}$
6	$4,14683564632 \times 10^{-3}$	$4,34788037179 \times 10^{-3}$	$3,86886991088 \times 10^{-3}$	$2,44445715513 \times 10^{-3}$
7	$1,91081934920 \times 10^{-3}$	$3,58899479036 \times 10^{-3}$	$6,94611471554 \times 10^{-2}$	$8,65003746064 \times 10^{-2}$
8	$9,57590407553 \times 10^{-4}$	$1,20040716831 \times 10^{-3}$	$1,06179489337 \times 10^{-3}$	$4,40934857583 \times 10^{-4}$
9	$5,84139348519 \times 10^{-4}$	$5,90631763056 \times 10^{-4}$	$1,53797196520 \times 10^{-3}$	$6,40603826568 \times 10^{-4}$
10	$8,84378296346 \times 10^{-4}$	$7,34291765307 \times 10^{-4}$	$5,71577877782 \times 10^{-4}$	$5,71702947299 \times 10^{-5}$
11	$3,29903495888 \times 10^{-3}$	$6,41854338551 \times 10^{-4}$	$2,57355835785 \times 10^{-4}$	$1,57865357808 \times 10^{-5}$
12	$1,60704181218 \times 10^{-2}$	$5,35753775934 \times 10^{-2}$	$1,36587805201 \times 10^{-3}$	$1,61674268310 \times 10^{-5}$
13	$1,28060819014 \times 10^{-2}$	$1,27434288826 \times 10^{-2}$	$7,90407387058 \times 10^{-3}$	$2,40409637768 \times 10^{-3}$
14	$1,85270165215 \times 10^{-2}$	$1,26577885758 \times 10^{-2}$	$1,07711680295 \times 10^{-2}$	$1,21768892907 \times 10^{-3}$
15	$1,62141166992 \times 10^{-2}$	$1,34912500953 \times 10^{-2}$	$9,63177605080 \times 10^{-3}$	$2,77239691674 \times 10^{-3}$
16	$1,52728079544 \times 10^{-2}$	$1,34860735031 \times 10^{-2}$	$8,18604187647 \times 10^{-3}$	$3,30322995674 \times 10^{-3}$
17	$1,51912488614 \times 10^{-2}$	$1,22620572710 \times 10^{-2}$	$8,11994223228 \times 10^{-3}$	$2,38629253725 \times 10^{-3}$
18	$1,41487060305 \times 10^{-2}$	$1,22078925174 \times 10^{-2}$	$9,35818044529 \times 10^{-3}$	$2,28403968500 \times 10^{-3}$
19	$1,77229821922 \times 10^{-2}$	$1,21000991430 \times 10^{-2}$	$7,27299196677 \times 10^{-3}$	$2,20763744299 \times 10^{-3}$
20	$1,35401300918 \times 10^{-2}$	$1,17666835329 \times 10^{-2}$	$8,00106274413 \times 10^{-3}$	$2,24584296648 \times 10^{-3}$
21	$1,33288461341 \times 10^{-2}$	$1,13789501113 \times 10^{-2}$	$6,98428488078 \times 10^{-3}$	$1,96396587058 \times 10^{-3}$
22	$1,55047746957 \times 10^{-2}$	$1,12154725245 \times 10^{-2}$	$8,57018490427 \times 10^{-3}$	$1,91257923229 \times 10^{-3}$
23	$1,39292595208 \times 10^{-2}$	$1,08776181994 \times 10^{-2}$	$7,02916183648 \times 10^{-3}$	$1,80729272010 \times 10^{-3}$
24	$1,67519750591 \times 10^{-2}$	$1,10155857705 \times 10^{-2}$	$6,78993993513 \times 10^{-3}$	$1,94166101551 \times 10^{-3}$
25	$1,31478043619 \times 10^{-2}$	$1,15305636655 \times 10^{-2}$	$7,96981194825 \times 10^{-3}$	$1,68810021801 \times 10^{-3}$
26	$5,65927240783 \times 10^{-2}$	$1,17831514263 \times 10^{-2}$	$8,24919070044 \times 10^{-3}$	$1,72661488367 \times 10^{-3}$
27	$1,38440741170 \times 10^{-2}$	$1,34986161062 \times 10^{-2}$	$1,10158792922 \times 10^{-2}$	$2,04957162235 \times 10^{-3}$
28	$4,16087303105 \times 10^{-2}$	$4,76293413871 \times 10^{-2}$	$8,48200515915 \times 10^{-3}$	$1,62948970250 \times 10^{-3}$
29	$3,59661086581 \times 10^{-2}$	$2,30469530257 \times 10^{-2}$	$7,59325917151 \times 10^{-3}$	$1,67887537256 \times 10^{-3}$
30	$6,33247160855 \times 10^{-2}$	$3,23389765702 \times 10^{-2}$	$1,30803512800 \times 10^{-2}$	$1,71616163420 \times 10^{-3}$
31	$1,61161321017 \times 10^{-1}$	$5,37402130571 \times 10^{-2}$	$2,85716903825 \times 10^{-2}$	$1,67853590048 \times 10^{-3}$
32	$1,40256634518 \times 10^0$	$1,41379807101 \times 10^{-1}$	$3,49764438028 \times 10^{-2}$	$1,84510800821 \times 10^{-3}$
33	$1,11991954668 \times 10^0$	$3,02369596921 \times 10^{-1}$	$1,30514705887 \times 10^{-1}$	$1,63976775493 \times 10^{-3}$
34	$3,08169788194 \times 10^0$	$6,76503381895 \times 10^{-1}$	$3,27903212189 \times 10^{-1}$	$1,71497575878 \times 10^{-3}$
35	$1,31619784094 \times 10^1$	$2,35393843645 \times 10^0$	$5,21897882622 \times 10^{-1}$	$1,89439983050 \times 10^{-3}$
36	$4,31580000164 \times 10^1$	$4,50886453715 \times 10^0$	$1,75609203410 \times 10^0$	$2,38208587628 \times 10^{-3}$
37	$2,29726942993 \times 10^2$	$2,83669661712 \times 10^1$	$6,26969201610 \times 10^0$	$3,22872453469 \times 10^{-3}$
38	$1,57698362484 \times 10^3$	$5,44711524431 \times 10^1$	$1,71438275861 \times 10^1$	$5,37449384210 \times 10^{-3}$
39	$4,08870727910 \times 10^4$	$1,88830970484 \times 10^2$	$3,21189884049 \times 10^1$	$1,51703170295 \times 10^{-2}$
40	$4,63141475992 \times 10^4$	$4,83359823188 \times 10^2$	$9,63194452711 \times 10^1$	$3,68164323240 \times 10^{-1}$

Fonte: do autor

Tabela 4.22: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_5 por meio da Soma de Salzer.

M	$b = 1$	$b = 1,5$	$b = 2$	$b = 3,5$
1	$1,57647453614 \times 10^{-1}$	$1,06881666619 \times 10^{-1}$	$6,02346562772 \times 10^{-2}$	$1,78801127922 \times 10^{-2}$
2	$3,80038929722 \times 10^{-2}$	$3,31322046878 \times 10^{-2}$	$2,16633590262 \times 10^{-2}$	$7,22139141891 \times 10^{-3}$
3	$1,38596046440 \times 10^{-2}$	$9,12559429615 \times 10^{-3}$	$7,63744455543 \times 10^{-3}$	$2,39701173878 \times 10^{-3}$
4	$5,04853589190 \times 10^{-3}$	$3,32549851818 \times 10^{-3}$	$2,46793221353 \times 10^{-3}$	$7,73013383283 \times 10^{-4}$
5	$1,66221812051 \times 10^{-3}$	$1,30841801364 \times 10^{-3}$	$7,87629206515 \times 10^{-4}$	$2,44499176871 \times 10^{-4}$
6	$6,33772924532 \times 10^{-4}$	$4,29901695975 \times 10^{-4}$	$3,08998396163 \times 10^{-4}$	$8,12286634366 \times 10^{-5}$
7	$2,09180030768 \times 10^{-4}$	$1,52009623441 \times 10^{-4}$	$1,20155989341 \times 10^{-4}$	$2,98302616797 \times 10^{-5}$
8	$7,81654979551 \times 10^{-5}$	$5,91104355943 \times 10^{-5}$	$4,00511016814 \times 10^{-5}$	$1,17946269100 \times 10^{-5}$
9	$2,78947968742 \times 10^{-5}$	$2,01462005749 \times 10^{-5}$	$1,44671071967 \times 10^{-5}$	$4,70365717597 \times 10^{-6}$
10	$1,65834064613 \times 10^{-5}$	$8,07111858128 \times 10^{-6}$	$5,66005721150 \times 10^{-6}$	$1,77846758233 \times 10^{-6}$
11	$1,67779066107 \times 10^{-4}$	$4,14197963390 \times 10^{-5}$	$6,20341810403 \times 10^{-6}$	$6,48793571568 \times 10^{-7}$
12	$2,92546340434 \times 10^{-3}$	$6,67894872657 \times 10^{-4}$	$8,32140521941 \times 10^{-5}$	$8,18260221380 \times 10^{-7}$
13	$5,69573351048 \times 10^{-2}$	$1,23245595185 \times 10^{-2}$	$1,35398870036 \times 10^{-3}$	$1,03969209110 \times 10^{-5}$
14	$1,16388432815 \times 10^0$	$2,52820730065 \times 10^{-1}$	$2,85031286348 \times 10^{-2}$	$1,30294449872 \times 10^{-4}$

Fonte: do autor

Tabela 4.23: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_5 por meio do Algoritmo Wynn-Rho.

M	$b = 1$	$b = 1,5$	$b = 2$	$b = 3,5$
2	$3,13045015476 \times 10^{-2}$	$2,06919326593 \times 10^{-2}$	$1,79428621724 \times 10^{-2}$	$9,01939426916 \times 10^{-3}$
4	$1,75724587529 \times 10^{-2}$	$2,63093567293 \times 10^{-3}$	$1,37643506048 \times 10^{-3}$	$3,36321206296 \times 10^{-4}$
6	$6,06838387034 \times 10^{-4}$	$1,26683542439 \times 10^{-3}$	$7,93024107967 \times 10^{-4}$	$2,54663699957 \times 10^{-5}$
8	$8,22909018169 \times 10^{-5}$	$4,20728371630 \times 10^{-5}$	$3,74270540979 \times 10^{-5}$	$2,01324030040 \times 10^{-6}$
10	$4,60381892673 \times 10^{-5}$	$4,40767498114 \times 10^{-5}$	$4,69979056888 \times 10^{-6}$	$7,02955297682 \times 10^{-7}$
12	$3,04488810658 \times 10^{-5}$	$1,48902350433 \times 10^{-5}$	$4,45304330443 \times 10^{-6}$	$7,93218668338 \times 10^{-7}$
14	$1,46578673955 \times 10^{-4}$	$4,70297916147 \times 10^{-4}$	$6,73369317075 \times 10^{-6}$	$6,49791394765 \times 10^{-7}$
16	$1,52880543050 \times 10^{-4}$	$4,89030663174 \times 10^{-5}$	$1,98450714047 \times 10^{-5}$	$6,27074869995 \times 10^{-7}$
18	-	-	-	$2,44756647033 \times 10^{-6}$

Fonte: do autor

4.6 Inversão de F_6

As Tabelas 4.28 – 4.43 e as Figuras 4.18 – 4.33 apresentam os resultados para a inversão numérica da Transformada de Laplace da função $F_6(s) = \frac{a}{(s-b)^2 + a^2}$, cuja inversa analítica é $f_6(t) = e^{bt}\text{sen}(at)$, para os Funcionais de Gaver, Transformada u de Levin, Soma de Salzer e Algoritmo Wynn-Rho. Nesta função, o $\bar{E}_{abs}$ do Algoritmo Wynn-Rho também foi calculado para $M = 18$ e $M = 20$ para parâmetros específicos.

Os M ótimos são dados pelas Tabelas 4.24 - 4.27. De modo geral, tais valores variam de acordo com a variação dos parâmetros.

Tabela 4.24: M ótimos e ordem do $\overline{E}_{abs}$ para a inversão de F_6 para os Funcionais de Gaver.

	$b = -3$	$b = -1$	$b = 1$	$b = 2$
$a = 1$	18 $[10^{-3}]$	18 $[10^{-3}]$	19 $[10^{-1}]$	19 $[10^{-1}]$
$a = 3$	18 $[10^{-3}]$	18 $[10^{-2}]$	18 $[10^{-1}]$	20 $[10^{-1}]$
$a = 5$	17 $[10^{-2}]$	19 $[10^{-2}]$	19 $[10^{-1}]$	19 $[10^{-1}]$
$a = 10$	17 $[10^{-2}]$	18 $[10^{-1}]$	19 $[10^{-1}]$	19 $[10^0]$

Fonte: do autor

Tabela 4.25: M ótimos e ordem do $\overline{E}_{abs}$ para a inversão de F_6 para a Transformada u de Levin.

	$b = -3$	$b = -1$	$b = 1$	$b = 2$
$a = 1$	9 $[10^{-4}]$	11 $[10^{-3}]$	20 $[10^{-1}]$	24 $[10^{-1}]$
$a = 3$	11 $[10^{-3}]$	10 $[10^{-3}]$	24 $[10^{-1}]$	23 $[10^{-1}]$
$a = 5$	11 $[10^{-3}]$	11 $[10^{-2}]$	23 $[10^{-1}]$	24 $[10^{-1}]$
$a = 10$	11 $[10^{-2}]$	23 $[10^{-1}]$	27 $[10^{-1}]$	27 $[10^0]$

Fonte: do autor

Tabela 4.26: M ótimos e ordem do $\overline{E}_{abs}$ para a inversão de F_6 para a Soma de Salzer.

	$b = -3$	$b = -1$	$b = 1$	$b = 2$
$a = 1$	9 $[10^{-7}]$	9 $[10^{-8}]$	11 $[10^{-5}]$	13 $[10^{-2}]$
$a = 3$	10 $[10^{-6}]$	10 $[10^{-5}]$	12 $[10^{-3}]$	13 $[10^{-2}]$
$a = 5$	11 $[10^{-5}]$	11 $[10^{-4}]$	12 $[10^{-2}]$	13 $[10^{-1}]$
$a = 10$	12 $[10^{-3}]$	12 $[10^{-2}]$	13 $[10^{-1}]$	13 $[10^{-1}]$

Fonte: do autor

Tabela 4.27: M ótimos e ordem do $\overline{E}_{abs}$ para a inversão de F_6 para o Algoritmo Wynn-Rho.

	$b = -3$	$b = -1$	$b = 1$	$b = 2$
$a = 1$	8 $[10^{-8}]$	8 $[10^{-7}]$	10 $[10^{-6}]$	12 $[10^{-5}]$
$a = 3$	8 $[10^{-6}]$	12 $[10^{-5}]$	10 $[10^{-4}]$	10 $[10^{-2}]$
$a = 5$	10 $[10^{-4}]$	10 $[10^{-4}]$	12 $[10^{-3}]$	14 $[10^{-2}]$
$a = 10$	10 $[10^{-3}]$	10 $[10^{-2}]$	18 $[10^{-1}]$	8 $[10^0]$

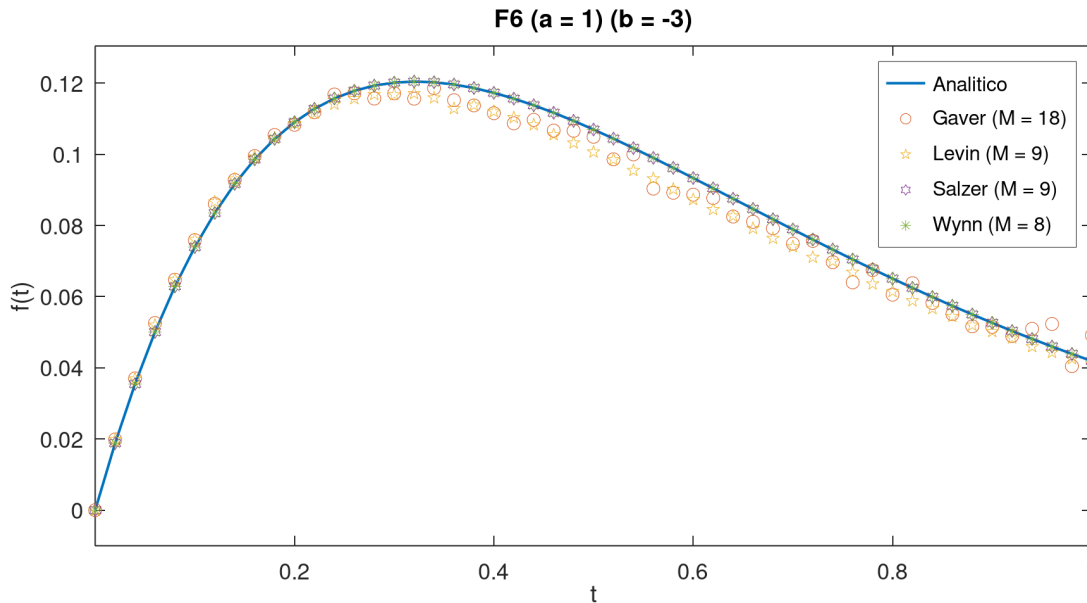
Fonte: do autor

Nota-se que, de modo geral, quando a oscilação aumenta, ou seja, quando o valor de a cresce, a ordem do Erro Absoluto Médio também cresce. Da mesma maneira, quando essa oscilação é deformada para a direita, ou seja, quando b aumenta, a ordem do Erro Absoluto Médio cresce mais ainda. Os Funcionais de Gaver e a Transformada u de Levin parecem ser menos sensíveis a variação do valor do parâmetro a , quando $b = 1$ e $b = 2$.

Comparando a Soma de Salzer com o Algoritmo Wynn-Rho, constata-se que: para $a = 1$, o Algoritmo Wynn-Rho tem Erros Absolutos Médios com menor ordem em relação a Soma de Salzer, com exceção de $b = -1$; para $a = 3$, eles possuem a mesma ordem do erro, exceto para $b = 1$, onde o Algoritmo Wynn-Rho gera Erro Absoluto Médio com ordem de 10^{-4} e a Soma de Salzer 10^{-3} ; para $a = 5$, a Soma de Salzer só gerou Erros Absolutos Médios menores que os do Algoritmo Wynn-Rho quando $b = -3$, onde a ordem dos erros foi de 10^{-5} e 10^{-4} , respectivamente; já para $a = 10$, a ordem dos erros destes dois métodos são mesmas, exceto para $b = 2$, onde a Soma de Salzer gera Erros Absolutos Médios com ordem de 10^{-1} e o Algoritmo Wynn-Rho de 10^0 .

Observando as Figuras 4.22 – 4.33, nota-se que, para $a \leq 3$, os Funcionais de Gaver e a Transformada u de Levin perdem precisão quando o argumento do seno é maior que $\pi/4$ radianos. Este comportamento se mantém para $a = 5$, quando $b = -3$ e $b = -1$. Já para $a = 5$, quando $b = 1$ e $b = 2$, a precisão é perdida após $\pi/2$. Este padrão se mantém para $a = 10$. A Soma de Salzer e o Algoritmo Wynn-Rho mostram perda de precisão, para $a = 3$, para argumentos maiores que $3\pi/4$ radianos, quando $b = 2$. Esta perda de precisão também é visível quando o argumento do seno é maior $5\pi/4$ radianos para $a = 10$, quando $b = 1$ e $b = 2$. Para este mesmo valor de a , quando $b = -3$ e $b = -1$, a perda de precisão é visível após 2π radianos.

Figura 4.18: Resultados para a inversão de F_6 , com $a = 1$ e $b = -3$



Fonte: do autor

Figura 4.19: Resultados para a inversão de F_6 , com $a = 1$ e $b = -1$

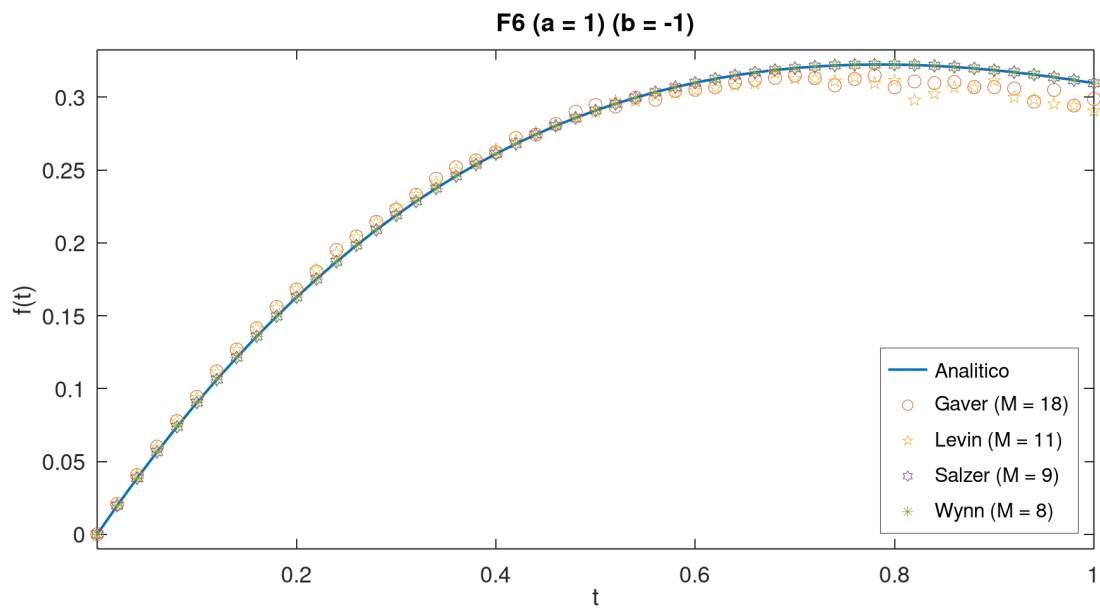


Figura 4.20: Resultados para a inversão de F_6 , com $a = 1$ e $b = 1$

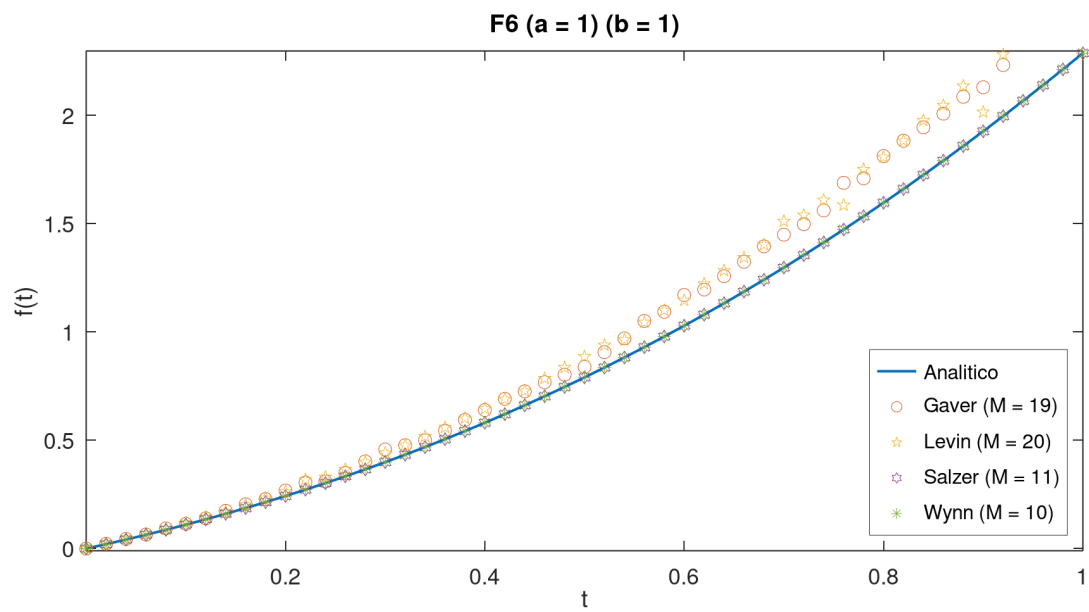
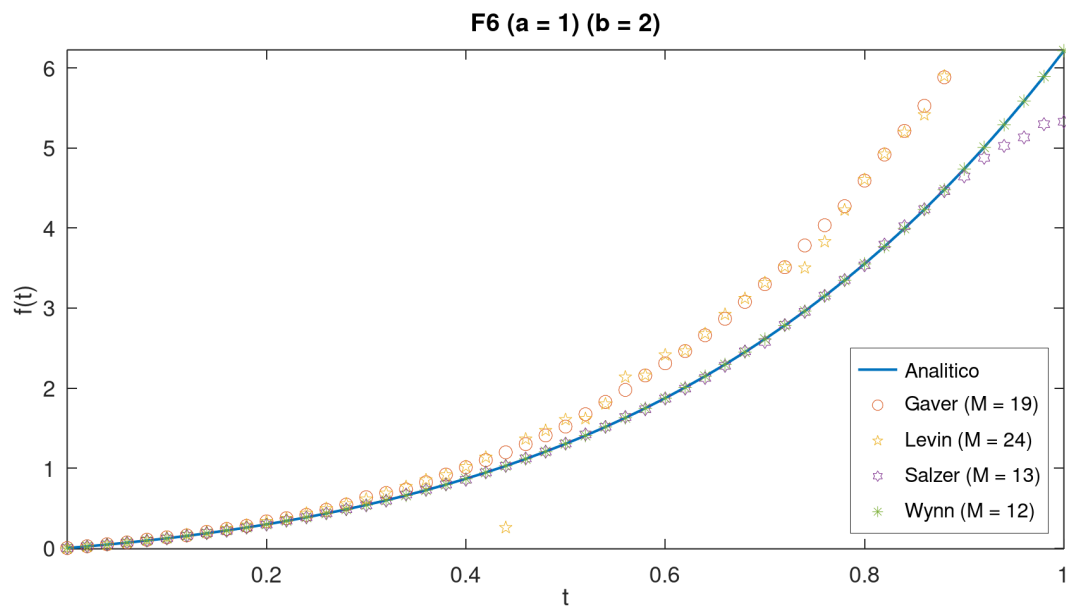
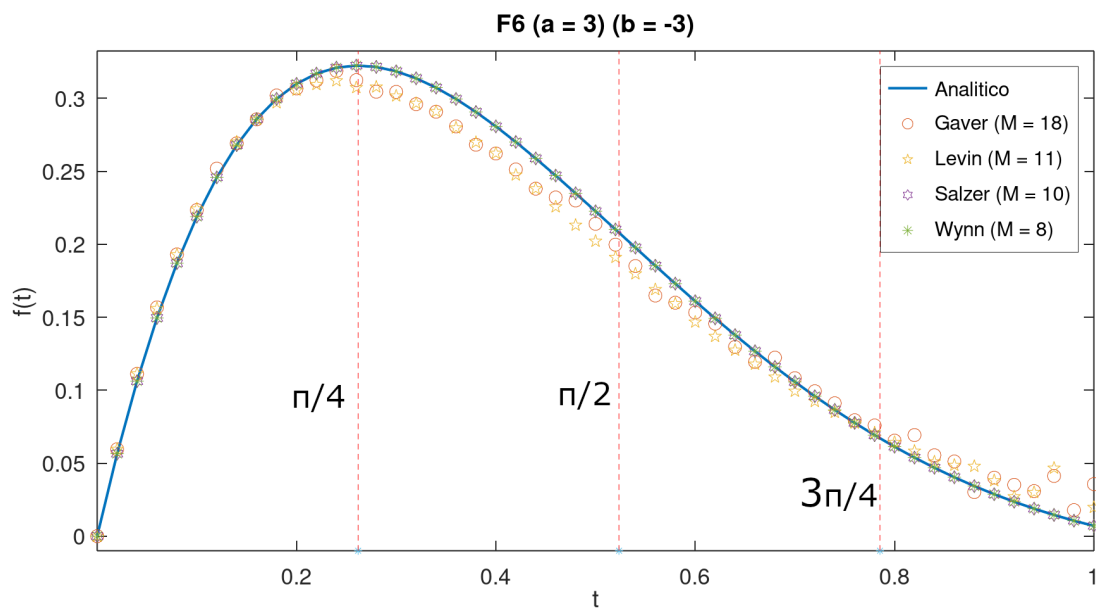


Figura 4.21: Resultados para a inversão de F_6 , com $a = 1$ e $b = 2$



Fonte: do autor

Figura 4.22: Resultados para a inversão de F_6 , com $a = 3$ e $b = -3$



Fonte: do autor

Figura 4.23: Resultados para a inversão de F_6 , com $a = 3$ e $b = -1$

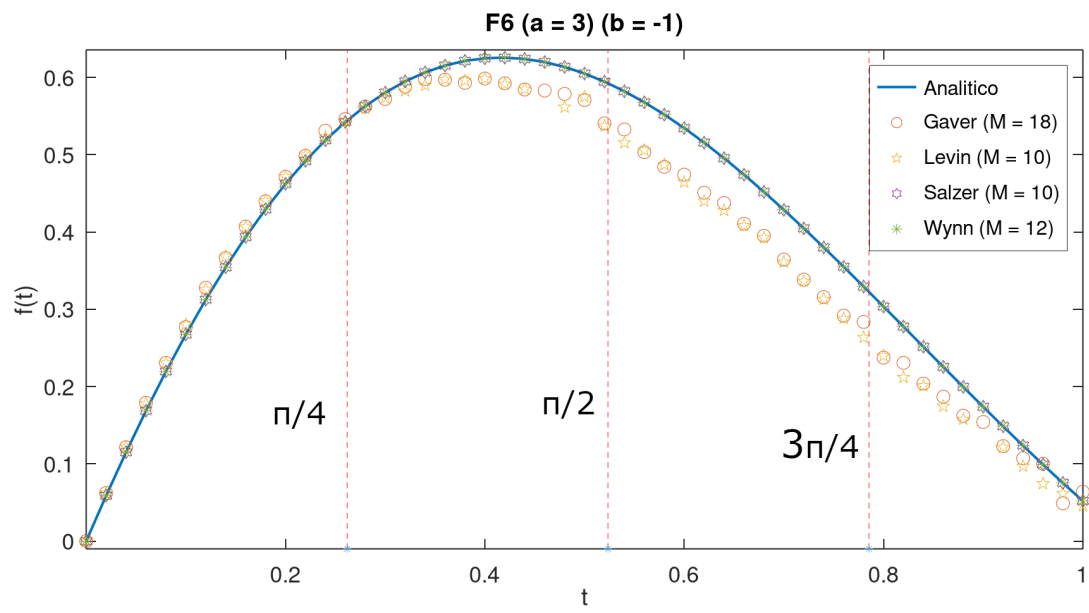


Figura 4.24: Resultados para a inversão de F_6 , com $a = 3$ e $b = 1$

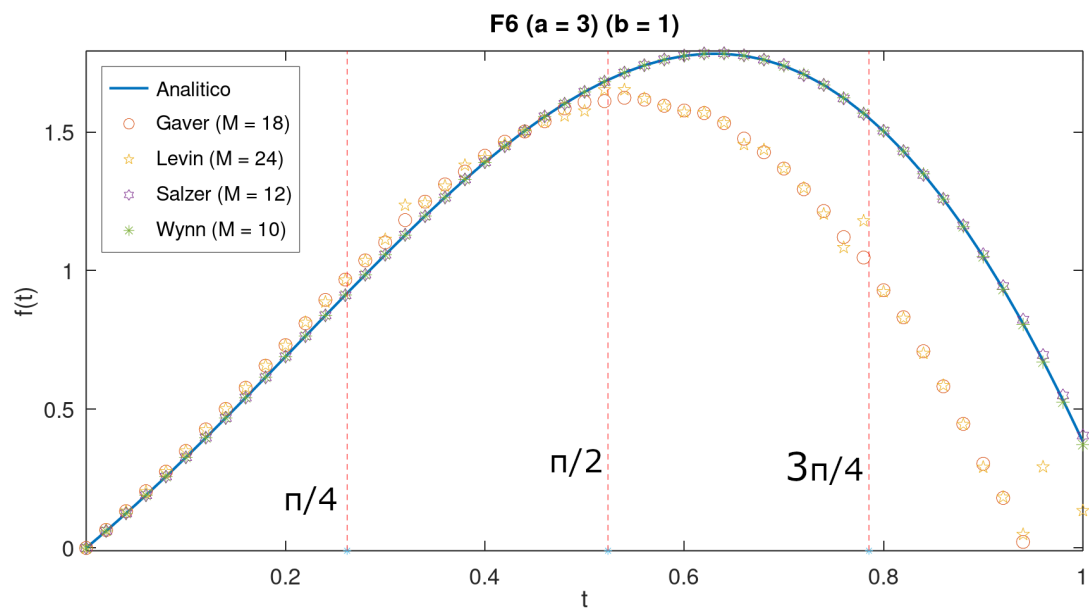
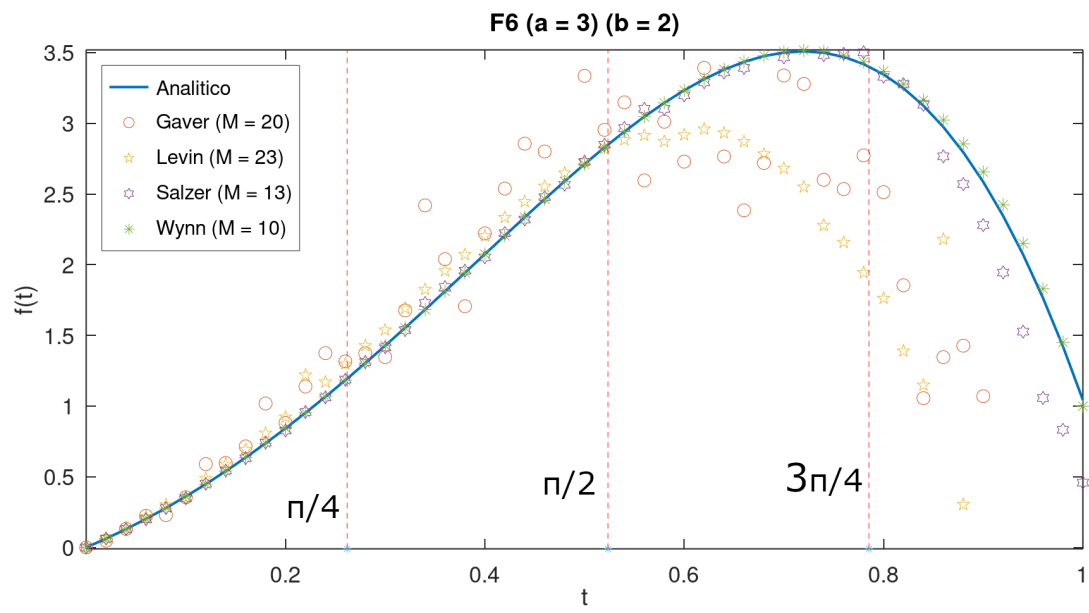
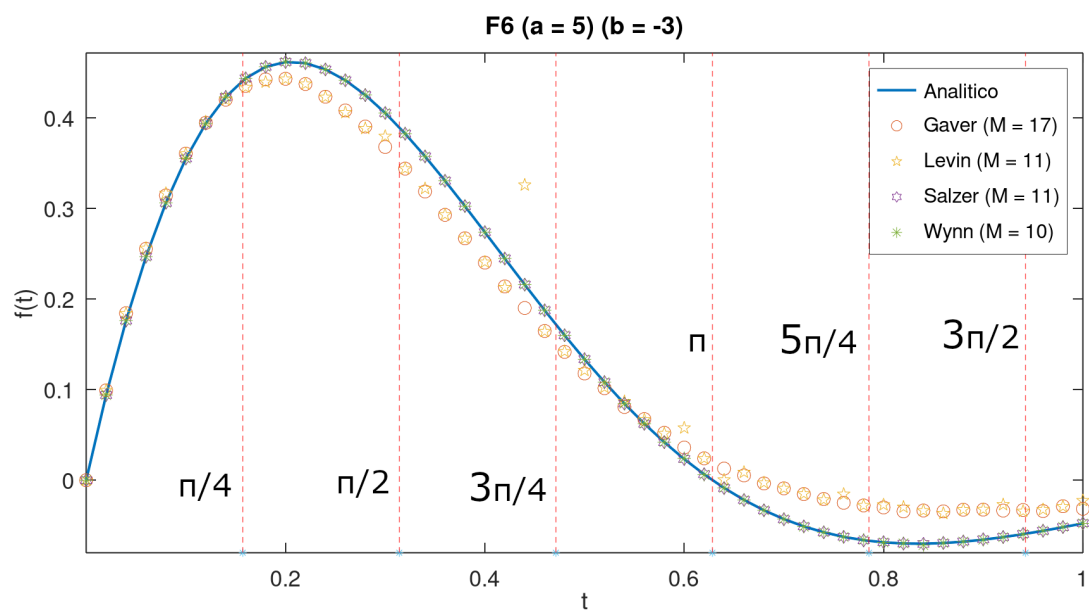


Figura 4.25: Resultados para a inversão de F_6 , com $a = 3$ e $b = 2$



Fonte: do autor

Figura 4.26: Resultados para a inversão de F_6 , com $a = 5$ e $b = -3$



Fonte: do autor

Figura 4.27: Resultados para a inversão de F_6 , com $a = 5$ e $b = -1$

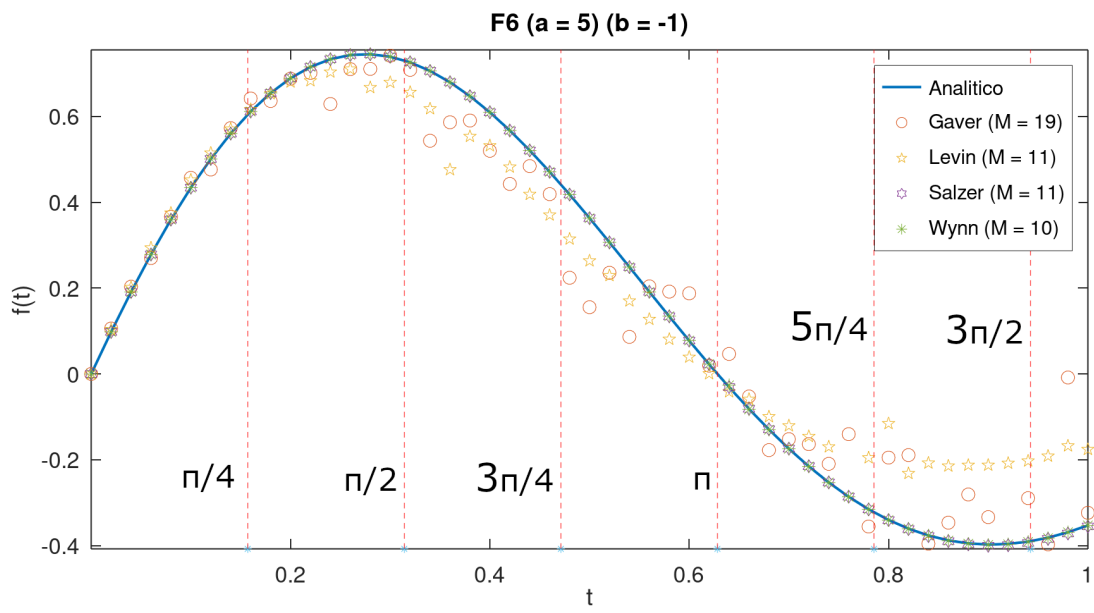


Figura 4.28: Resultados para a inversão de F_6 , com $a = 5$ e $b = 1$

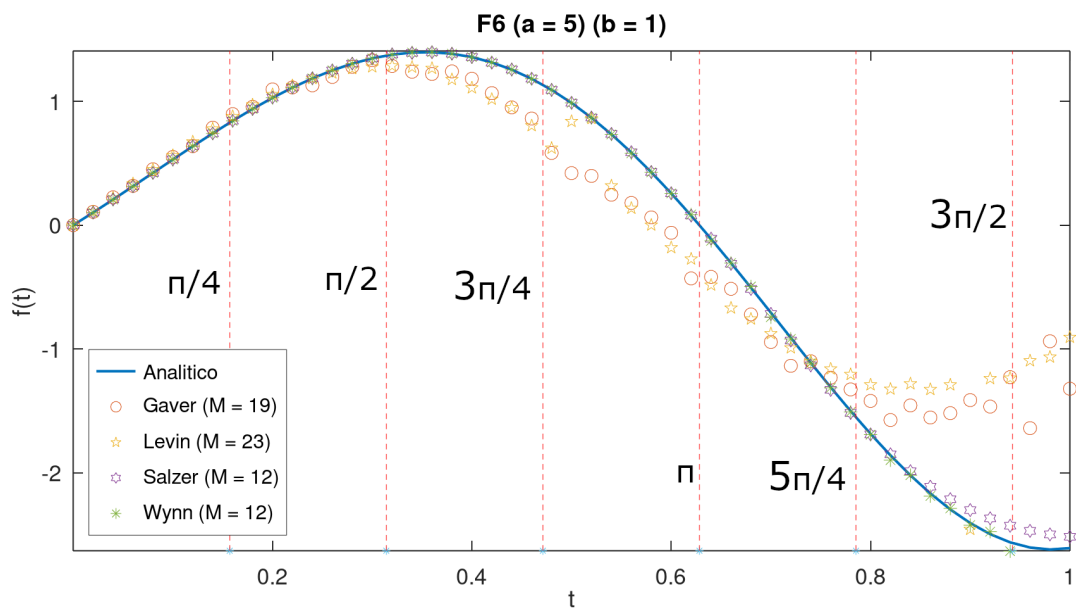
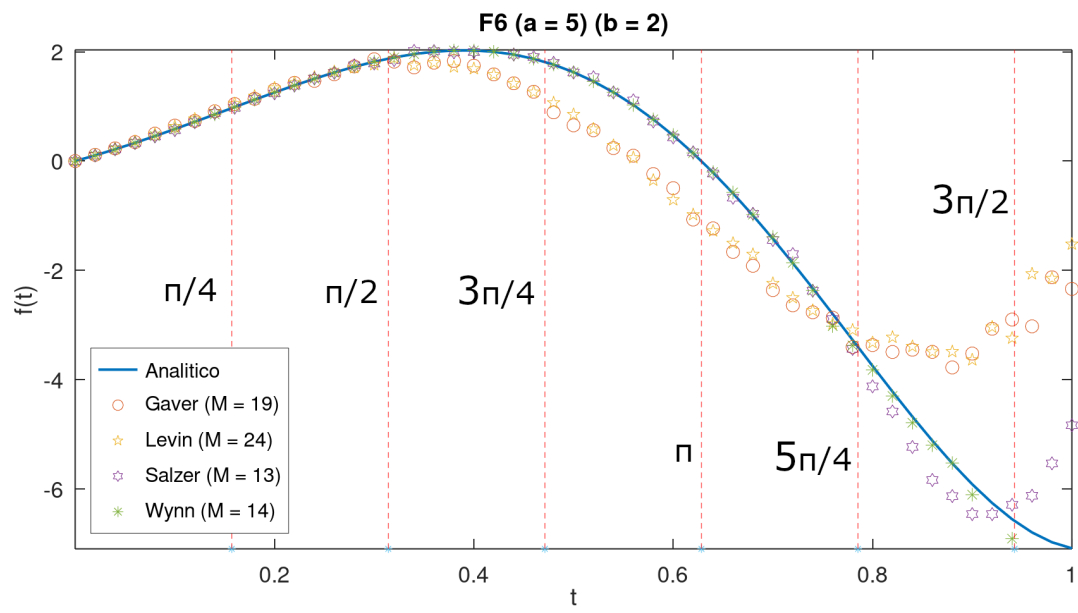
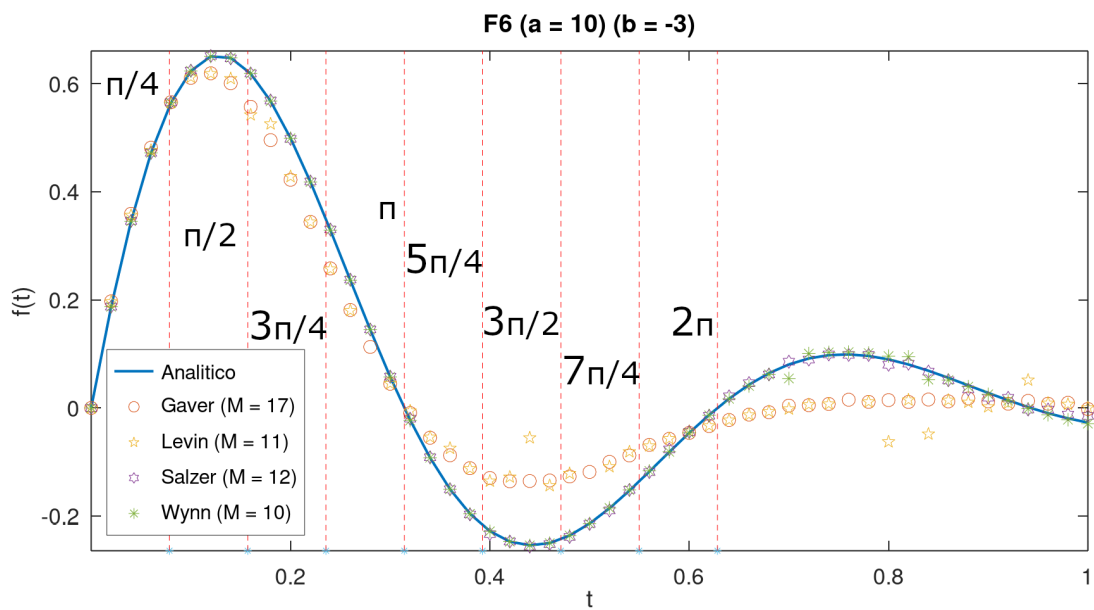


Figura 4.29: Resultados para a inversão de F_6 , com $a = 5$ e $b = 2$



Fonte: do autor

Figura 4.30: Resultados para a inversão de F_6 , com $a = 10$ e $b = -3$



Fonte: do autor

Figura 4.31: Resultados para a inversão de F_6 , com $a = 10$ e $b = -1$

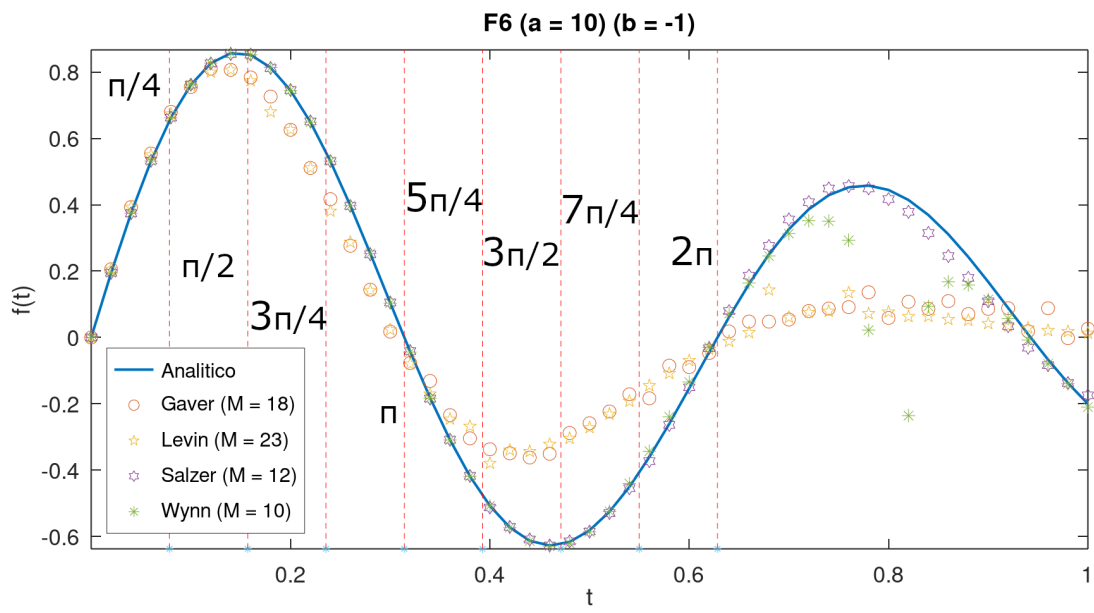


Figura 4.32: Resultados para a inversão de F_6 , com $a = 10$ e $b = 1$

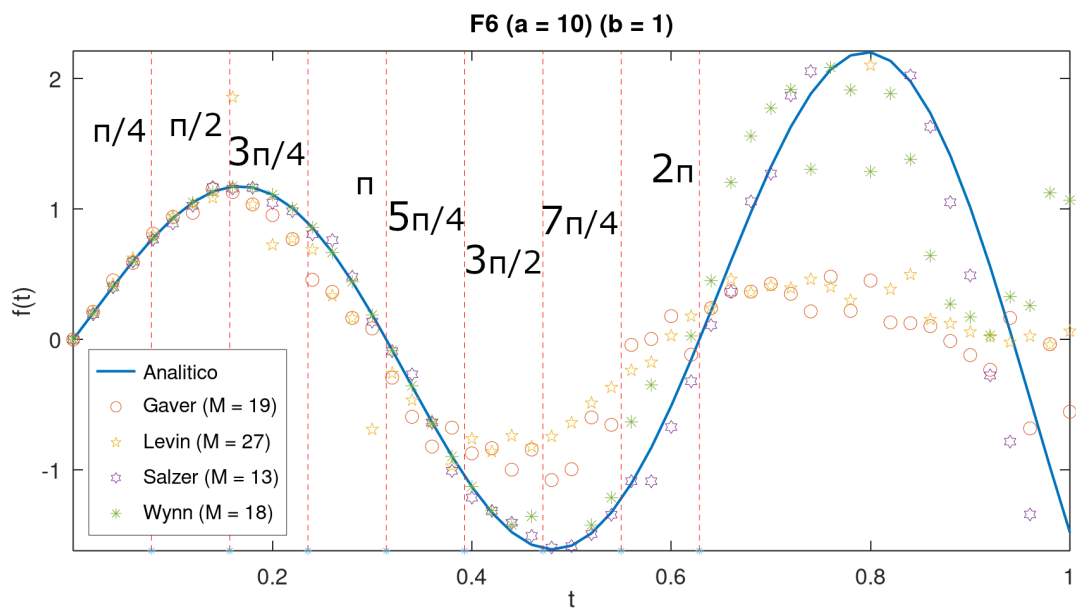


Figura 4.33: Resultados para a inversão de F_6 , com $a = 10$ e $b = 2$

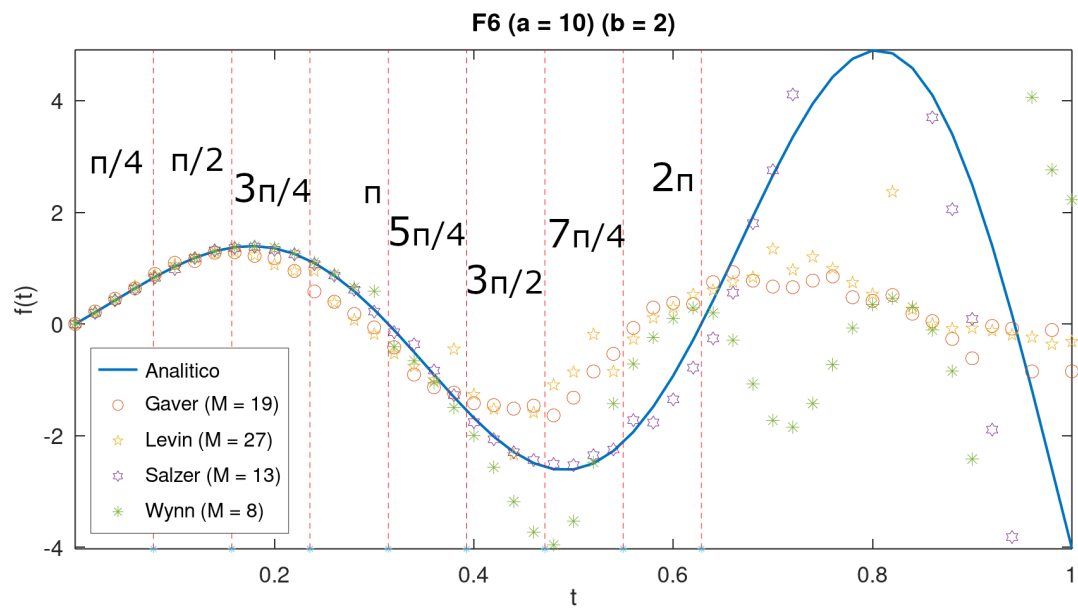


Tabela 4.28: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_6 , com $a = 1$, por meio dos Funcionais de Gaver.

M	$b = -3$	$b = -1$	$b = 1$	$b = 2$
1	$3,20930697986 \times 10^{-2}$	$8,17498989755 \times 10^{-2}$	$8,30521735242 \times 10^{-1}$	$2,65906444559 \times 10^0$
2	$2,07870057527 \times 10^{-2}$	$4,98172084722 \times 10^{-2}$	$5,84674138340 \times 10^{-1}$	$3,55837799127 \times 10^0$
3	$1,54583036353 \times 10^{-2}$	$3,57118602693 \times 10^{-2}$	$5,75484684069 \times 10^{-1}$	$2,72556941779 \times 10^0$
4	$1,23197077690 \times 10^{-2}$	$2,77822463479 \times 10^{-2}$	$4,93074459339 \times 10^{-1}$	$2,73051009662 \times 10^0$
5	$1,02513499065 \times 10^{-2}$	$2,27265717940 \times 10^{-2}$	$4,11592207754 \times 10^{-1}$	$2,53874345607 \times 10^0$
6	$8,78247409862 \times 10^{-3}$	$1,92124589376 \times 10^{-2}$	$3,48271862622 \times 10^{-1}$	$2,11873731248 \times 10^0$
7	$7,68277796575 \times 10^{-3}$	$1,66337617268 \times 10^{-2}$	$3,00142277887 \times 10^{-1}$	$1,76787332572 \times 10^0$
8	$6,82836365902 \times 10^{-3}$	$1,46698815029 \times 10^{-2}$	$2,62997165636 \times 10^{-1}$	$1,50118443473 \times 10^0$
9	$6,14527575272 \times 10^{-3}$	$1,31185808472 \times 10^{-2}$	$2,33700473868 \times 10^{-1}$	$1,29830276283 \times 10^0$
10	$5,58661163021 \times 10^{-3}$	$1,18626800749 \times 10^{-2}$	$2,10102591289 \times 10^{-1}$	$1,14092619984 \times 10^0$
11	$5,12117567144 \times 10^{-3}$	$1,08254067645 \times 10^{-2}$	$1,90735229811 \times 10^{-1}$	$1,01614278140 \times 10^0$
12	$4,72740627738 \times 10^{-3}$	$9,95440152757 \times 10^{-3}$	$1,74578538123 \times 10^{-1}$	$9,15166379116 \times 10^{-1}$
13	$4,38991742115 \times 10^{-3}$	$9,21274261888 \times 10^{-3}$	$1,60908532375 \times 10^{-1}$	$8,31972777696 \times 10^{-1}$
14	$4,09730930390 \times 10^{-3}$	$8,57361266965 \times 10^{-3}$	$1,49199969294 \times 10^{-1}$	$7,62350735319 \times 10^{-1}$
15	$3,84272478130 \times 10^{-3}$	$8,01782590291 \times 10^{-3}$	$1,39063373539 \times 10^{-1}$	$7,03289913127 \times 10^{-1}$
16	$3,60970563971 \times 10^{-3}$	$7,51900698282 \times 10^{-3}$	$1,30206323568 \times 10^{-1}$	$6,52601511700 \times 10^{-1}$
17	$3,44883173305 \times 10^{-3}$	$7,13838369848 \times 10^{-3}$	$1,22339257235 \times 10^{-1}$	$6,08570446028 \times 10^{-1}$
18	$3,12110017498 \times 10^{-3}$	$6,42044268826 \times 10^{-3}$	$1,16734380656 \times 10^{-1}$	$5,71983412742 \times 10^{-1}$
19	$1,27224087200 \times 10^{-2}$	$1,52777993515 \times 10^{-2}$	$1,02663008812 \times 10^{-1}$	$5,27783623153 \times 10^{-1}$
20	$8,88497211333 \times 10^{-2}$	$8,85236130715 \times 10^{-2}$	$1,56117979646 \times 10^{-1}$	$5,89117827079 \times 10^{-1}$
21	$4,59766643900 \times 10^{-1}$	$5,40597368358 \times 10^{-1}$	$5,32403882069 \times 10^{-1}$	$5,69470066514 \times 10^{-1}$
22	$2,88913737011 \times 10^0$	$3,52017051748 \times 10^0$	$3,51103441856 \times 10^0$	$3,73997087978 \times 10^0$
23	$2,95157982731 \times 10^1$	$2,87789227131 \times 10^1$	$2,93870548053 \times 10^1$	$3,44093320850 \times 10^1$
24	$2,76608635280 \times 10^2$	$2,69877503637 \times 10^2$	$3,77251957888 \times 10^2$	$3,14382006893 \times 10^2$
25	$1,68936122892 \times 10^3$	$1,72442901498 \times 10^3$	$1,91566573262 \times 10^3$	$1,99739015706 \times 10^3$
26	$1,37870445818 \times 10^4$	$1,45712007216 \times 10^4$	$1,60519714228 \times 10^4$	$1,60441956282 \times 10^4$
27	$1,04673436221 \times 10^5$	$8,83169998557 \times 10^4$	$1,12061552434 \times 10^5$	$1,23614454272 \times 10^5$
28	$1,31190990539 \times 10^6$	$1,42502309730 \times 10^6$	$1,69305968419 \times 10^6$	$1,61965545550 \times 10^6$

Fonte: do autor

Tabela 4.29: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_6 , com $a = 3$, por meio dos Funcionais de Gaver.

M	$b = -3$	$b = -1$	$b = 1$	$b = 2$
1	$7,27360880995 \times 10^{-2}$	$2,10979327625 \times 10^{-1}$	$9,31532911010 \times 10^{-1}$	$1,96154167186 \times 10^0$
2	$5,04908424077 \times 10^{-2}$	$1,54338541092 \times 10^{-1}$	$8,35521453250 \times 10^{-1}$	$1,94194207519 \times 10^0$
3	$3,93419682179 \times 10^{-2}$	$1,23561977251 \times 10^{-1}$	$7,64014622063 \times 10^{-1}$	$1,94572339293 \times 10^0$
4	$3,24328977252 \times 10^{-2}$	$1,03574816942 \times 10^{-1}$	$7,01018366932 \times 10^{-1}$	$1,94442480039 \times 10^0$
5	$2,76660898745 \times 10^{-2}$	$8,94637649898 \times 10^{-2}$	$6,41654139346 \times 10^{-1}$	$1,91100718311 \times 10^0$
6	$2,41486150603 \times 10^{-2}$	$7,88155138934 \times 10^{-2}$	$5,86746842357 \times 10^{-1}$	$1,83498828781 \times 10^0$
7	$2,14391469352 \times 10^{-2}$	$7,04654779270 \times 10^{-2}$	$5,36529480788 \times 10^{-1}$	$1,72909953058 \times 10^0$
8	$1,92844719510 \times 10^{-2}$	$6,37590927633 \times 10^{-2}$	$4,92027375762 \times 10^{-1}$	$1,60966113630 \times 10^0$
9	$1,75281760597 \times 10^{-2}$	$5,82681864531 \times 10^{-2}$	$4,52625032122 \times 10^{-1}$	$1,48932208013 \times 10^0$
10	$1,60680943179 \times 10^{-2}$	$5,36562985251 \times 10^{-2}$	$4,17937220335 \times 10^{-1}$	$1,37531023406 \times 10^0$
11	$1,48345102996 \times 10^{-2}$	$4,97257747786 \times 10^{-2}$	$3,87466184062 \times 10^{-1}$	$1,27110445214 \times 10^0$
12	$1,37781403487 \times 10^{-2}$	$4,63431477945 \times 10^{-2}$	$3,60732894415 \times 10^{-1}$	$1,17700010875 \times 10^0$
13	$1,28631861112 \times 10^{-2}$	$4,33948278480 \times 10^{-2}$	$3,37089059586 \times 10^{-1}$	$1,09279541200 \times 10^0$
14	$1,20626339677 \times 10^{-2}$	$4,07998817317 \times 10^{-2}$	$3,16097166999 \times 10^{-1}$	$1,01794710943 \times 10^0$
15	$1,13572751695 \times 10^{-2}$	$3,85002614171 \times 10^{-2}$	$2,97386733699 \times 10^{-1}$	$9,51347658938 \times 10^{-1}$
16	$1,07304145708 \times 10^{-2}$	$3,64543640446 \times 10^{-2}$	$2,80615751927 \times 10^{-1}$	$8,91863560077 \times 10^{-1}$
17	$1,02411940350 \times 10^{-2}$	$3,45682430331 \times 10^{-2}$	$2,65693949661 \times 10^{-1}$	$8,38574874084 \times 10^{-1}$
18	$9,76050524600 \times 10^{-3}$	$3,09590914568 \times 10^{-2}$	$2,48172497519 \times 10^{-1}$	$7,88868822227 \times 10^{-1}$
19	$3,42078780575 \times 10^{-2}$	$4,84620846365 \times 10^{-2}$	$2,58146050883 \times 10^{-1}$	$7,55879075813 \times 10^{-1}$
20	$2,71076968355 \times 10^{-1}$	$2,80917887522 \times 10^{-1}$	$2,79046193976 \times 10^{-1}$	$7,02467550934 \times 10^{-1}$
21	$1,59698354247 \times 10^0$	$1,59822696408 \times 10^0$	$1,58015065623 \times 10^0$	$2,64956279416 \times 10^0$
22	$8,72161922819 \times 10^0$	$1,01434609619 \times 10^1$	$1,09310804586 \times 10^1$	$1,10959776245 \times 10^1$
23	$9,43963232780 \times 10^1$	$9,93366673310 \times 10^1$	$9,47925176169 \times 10^1$	$7,86265775267 \times 10^1$
24	$9,03637456019 \times 10^2$	$1,01102036935 \times 10^3$	$1,00367939697 \times 10^3$	$9,48115540666 \times 10^2$
25	$5,47517957875 \times 10^3$	$5,47779982926 \times 10^3$	$5,96877422538 \times 10^3$	$5,56707409789 \times 10^3$
26	$4,49928309680 \times 10^4$	$3,80930029008 \times 10^4$	$5,02303066196 \times 10^4$	$4,65830436891 \times 10^4$
27	$2,90275115227 \times 10^5$	$2,60604138198 \times 10^5$	$2,72332821351 \times 10^5$	$3,01356942325 \times 10^5$
28	$4,23564968978 \times 10^6$	$4,26526124156 \times 10^6$	$4,50771742809 \times 10^6$	$4,86836140880 \times 10^6$

Fonte: do autor

Tabela 4.30: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_6 , com $a = 5$, por meio dos Funcionais de Gaver.

M	$b = -3$	$b = -1$	$b = 1$	$b = 2$
1	$1,11960917907 \times 10^{-1}$	$2,91329074553 \times 10^{-1}$	$1,03747290329 \times 10^0$	$2,14738043615 \times 10^0$
2	$8,76968715896 \times 10^{-2}$	$2,44243087800 \times 10^{-1}$	$9,55419980139 \times 10^{-1}$	$2,06252667045 \times 10^0$
3	$7,30418284713 \times 10^{-2}$	$2,12744967834 \times 10^{-1}$	$8,88008673574 \times 10^{-1}$	$1,99097542101 \times 10^0$
4	$6,28610480094 \times 10^{-2}$	$1,88861293464 \times 10^{-1}$	$8,27913454314 \times 10^{-1}$	$1,91902699186 \times 10^0$
5	$5,52953899906 \times 10^{-2}$	$1,70048126406 \times 10^{-1}$	$7,73972792198 \times 10^{-1}$	$1,84582631286 \times 10^0$
6	$4,94559588456 \times 10^{-2}$	$1,54793299779 \times 10^{-1}$	$7,22855566352 \times 10^{-1}$	$1,76848397056 \times 10^0$
7	$4,47625450629 \times 10^{-2}$	$1,42115985148 \times 10^{-1}$	$6,77072185659 \times 10^{-1}$	$1,68516680188 \times 10^0$
8	$4,08996407024 \times 10^{-2}$	$1,31316565195 \times 10^{-1}$	$6,34129390757 \times 10^{-1}$	$1,60273767245 \times 10^0$
9	$3,76611370414 \times 10^{-2}$	$1,22004969498 \times 10^{-1}$	$5,94638881882 \times 10^{-1}$	$1,51684586421 \times 10^0$
10	$3,49048531510 \times 10^{-2}$	$1,13894852544 \times 10^{-1}$	$5,59089851568 \times 10^{-1}$	$1,43575237737 \times 10^0$
11	$3,25292490609 \times 10^{-2}$	$1,06769902102 \times 10^{-1}$	$5,26146676976 \times 10^{-1}$	$1,35533807033 \times 10^0$
12	$3,04597408451 \times 10^{-2}$	$1,00463072598 \times 10^{-1}$	$4,95790463966 \times 10^{-1}$	$1,28021540743 \times 10^0$
13	$2,86401570807 \times 10^{-2}$	$9,48430331815 \times 10^{-2}$	$4,68574499726 \times 10^{-1}$	$1,21019502591 \times 10^0$
14	$2,70275563495 \times 10^{-2}$	$8,98642124169 \times 10^{-2}$	$4,43880260404 \times 10^{-1}$	$1,14380986160 \times 10^0$
15	$2,55917314818 \times 10^{-2}$	$8,53713279454 \times 10^{-2}$	$4,21160808372 \times 10^{-1}$	$1,08149250148 \times 10^0$
16	$2,42797870470 \times 10^{-2}$	$8,13138921006 \times 10^{-2}$	$4,00217040804 \times 10^{-1}$	$1,02617948497 \times 10^0$
17	$2,32329385295 \times 10^{-2}$	$7,75058297458 \times 10^{-2}$	$3,80994613020 \times 10^{-1}$	$9,74058879282 \times 10^{-1}$
18	$2,41896912554 \times 10^{-2}$	$7,65161224084 \times 10^{-2}$	$3,63444011211 \times 10^{-1}$	$9,27468005437 \times 10^{-1}$
19	$5,76519151743 \times 10^{-2}$	$6,57710865650 \times 10^{-2}$	$3,31535028591 \times 10^{-1}$	$8,74469676369 \times 10^{-1}$
20	$3,83711871892 \times 10^{-1}$	$5,09626389864 \times 10^{-1}$	$5,75980906079 \times 10^{-1}$	$9,67137218107 \times 10^{-1}$
21	$2,08623736208 \times 10^0$	$2,94028348111 \times 10^0$	$2,63357893108 \times 10^0$	$3,16829177082 \times 10^0$
22	$1,47403461561 \times 10^1$	$1,91273989943 \times 10^1$	$1,41964405455 \times 10^1$	$1,29051903162 \times 10^1$
23	$1,65164060389 \times 10^2$	$1,39728589088 \times 10^2$	$1,35536681102 \times 10^2$	$1,31853367187 \times 10^2$
24	$1,39081878671 \times 10^3$	$1,31558755308 \times 10^3$	$1,85918868008 \times 10^3$	$1,53793133227 \times 10^3$
25	$8,18998255158 \times 10^3$	$8,13957156930 \times 10^3$	$9,55204614712 \times 10^3$	$8,86612064996 \times 10^3$
26	$6,23684381646 \times 10^4$	$6,70355259506 \times 10^4$	$7,74299283810 \times 10^4$	$7,53905150198 \times 10^4$
27	$4,61841247684 \times 10^5$	$4,25498433505 \times 10^5$	$5,06027139675 \times 10^5$	$5,00096947485 \times 10^5$
28	$6,63205062886 \times 10^6$	$6,67758406676 \times 10^6$	$8,30947800419 \times 10^6$	$7,90663817713 \times 10^6$

Fonte: do autor

Tabela 4.31: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_6 , com $a = 10$, por meio dos Funcionais de Gaver.

M	$b = -3$	$b = -1$	$b = 1$	$b = 2$
1	$1,43559328935 \times 10^{-1}$	$3,29879931237 \times 10^{-1}$	$9,70789377688 \times 10^{-1}$	$1,82215343903 \times 10^0$
2	$1,24803541120 \times 10^{-1}$	$3,03287557133 \times 10^{-1}$	$9,33208302526 \times 10^{-1}$	$1,77987085843 \times 10^0$
3	$1,12102348316 \times 10^{-1}$	$2,83159477943 \times 10^{-1}$	$9,01579585735 \times 10^{-1}$	$1,74285638371 \times 10^0$
4	$1,02403789934 \times 10^{-1}$	$2,66761984279 \times 10^{-1}$	$8,74361320421 \times 10^{-1}$	$1,70922880601 \times 10^0$
5	$9,45993850952 \times 10^{-2}$	$2,52430924140 \times 10^{-1}$	$8,48684517773 \times 10^{-1}$	$1,67609309966 \times 10^0$
6	$8,81660169731 \times 10^{-2}$	$2,39833373040 \times 10^{-1}$	$8,24582360091 \times 10^{-1}$	$1,64310169418 \times 10^0$
7	$8,26298017514 \times 10^{-2}$	$2,29001991205 \times 10^{-1}$	$8,01557397577 \times 10^{-1}$	$1,61317598157 \times 10^0$
8	$7,77971043604 \times 10^{-2}$	$2,19179489450 \times 10^{-1}$	$7,80117356759 \times 10^{-1}$	$1,58372969646 \times 10^0$
9	$7,35537958161 \times 10^{-2}$	$2,10316994925 \times 10^{-1}$	$7,60253523812 \times 10^{-1}$	$1,55449829083 \times 10^0$
10	$6,98119514857 \times 10^{-2}$	$2,02165978073 \times 10^{-1}$	$7,41115819670 \times 10^{-1}$	$1,52556830448 \times 10^0$
11	$6,64580024359 \times 10^{-2}$	$1,94638168084 \times 10^{-1}$	$7,22686445719 \times 10^{-1}$	$1,49698647652 \times 10^0$
12	$6,34386970360 \times 10^{-2}$	$1,87695977134 \times 10^{-1}$	$7,04940082041 \times 10^{-1}$	$1,46877897248 \times 10^0$
13	$6,06941621145 \times 10^{-2}$	$1,81276358944 \times 10^{-1}$	$6,87848319224 \times 10^{-1}$	$1,44162301712 \times 10^0$
14	$5,81865215991 \times 10^{-2}$	$1,75293065718 \times 10^{-1}$	$6,71383215959 \times 10^{-1}$	$1,41703299908 \times 10^0$
15	$5,58834052828 \times 10^{-2}$	$1,69691637680 \times 10^{-1}$	$6,55513981778 \times 10^{-1}$	$1,39272008467 \times 10^0$
16	$5,38259713664 \times 10^{-2}$	$1,64493941857 \times 10^{-1}$	$6,40260720755 \times 10^{-1}$	$1,36866861486 \times 10^0$
17	$5,15897942940 \times 10^{-2}$	$1,59470123707 \times 10^{-1}$	$6,25065936567 \times 10^{-1}$	$1,34405364390 \times 10^0$
18	$5,16993829830 \times 10^{-2}$	$1,51998652284 \times 10^{-1}$	$6,12601398789 \times 10^{-1}$	$1,32146084900 \times 10^0$
19	$9,48846404761 \times 10^{-2}$	$1,99885479587 \times 10^{-1}$	$6,08203555901 \times 10^{-1}$	$1,30863767408 \times 10^0$
20	$6,18781814491 \times 10^{-1}$	$8,63051068563 \times 10^{-1}$	$8,94546828142 \times 10^{-1}$	$1,39926780495 \times 10^0$
21	$3,59087653018 \times 10^0$	$4,90847846412 \times 10^0$	$4,36416029716 \times 10^0$	$5,91005868941 \times 10^0$
22	$2,75810692557 \times 10^1$	$3,27655047515 \times 10^1$	$2,94186081422 \times 10^1$	$3,31276710889 \times 10^1$
23	$2,93375566878 \times 10^2$	$2,74066912628 \times 10^2$	$2,48056493321 \times 10^2$	$3,07593568171 \times 10^2$
24	$2,85328101522 \times 10^3$	$2,38922618042 \times 10^3$	$2,91738293737 \times 10^3$	$2,73658482568 \times 10^3$
25	$1,70454635157 \times 10^4$	$1,48815269677 \times 10^4$	$1,68661474418 \times 10^4$	$1,62123477814 \times 10^4$
26	$1,20992072823 \times 10^5$	$1,20571983614 \times 10^5$	$1,34459747601 \times 10^5$	$1,21315853760 \times 10^5$
27	$8,97377768948 \times 10^5$	$7,65193918981 \times 10^5$	$8,99321852038 \times 10^5$	$8,54339703293 \times 10^5$
28	$1,24410873530 \times 10^7$	$1,15325079105 \times 10^7$	$1,55662442001 \times 10^7$	$1,53289590484 \times 10^7$

Fonte: do autor

Tabela 4.32: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_6 , com $a = 1$, por meio da Transformada u de Levin.

M	$b = -3$	$b = -1$	$b = 1$	$b = 2$
1	$3,20930697986 \times 10^{-2}$	$8,17498989755 \times 10^{-2}$	$8,30521735242 \times 10^{-1}$	$2,65906444559 \times 10^0$
2	$8,94978049320 \times 10^{-3}$	$2,03960810972 \times 10^{-2}$	$1,19429688884 \times 10^0$	$2,38366090862 \times 10^0$
3	$7,56618135532 \times 10^{-3}$	$4,00586087812 \times 10^{-2}$	$9,83705061611 \times 10^{-1}$	$3,25145532567 \times 10^1$
4	$1,07063200671 \times 10^{-3}$	$8,44443603499 \times 10^{-3}$	$9,52779864818 \times 10^{-1}$	$8,34049698333 \times 10^0$
5	$1,97495464697 \times 10^{-3}$	$8,59405333655 \times 10^{-2}$	$7,21146303168 \times 10^{-1}$	$3,61345944751 \times 10^0$
6	$4,23136395741 \times 10^{-4}$	$3,38617833603 \times 10^{-3}$	$5,95996316894 \times 10^{-1}$	$5,25669735124 \times 10^0$
7	$6,68584546731 \times 10^{-4}$	$5,62411693792 \times 10^{-3}$	$5,95212149210 \times 10^{-1}$	$3,03642180844 \times 10^0$
8	$2,34319927932 \times 10^{-4}$	$2,32355983210 \times 10^{-3}$	$1,03557616661 \times 10^0$	$3,18560916690 \times 10^0$
9	$1,55338710070 \times 10^{-4}$	$1,69430067290 \times 10^{-3}$	$3,96260636871 \times 10^{-1}$	$2,90548182669 \times 10^0$
10	$2,52952081566 \times 10^{-3}$	$2,46900934158 \times 10^{-3}$	$5,01945285867 \times 10^{-1}$	$2,91247074218 \times 10^0$
11	$2,71279758516 \times 10^{-4}$	$1,10033077426 \times 10^{-3}$	$3,33173897864 \times 10^{-1}$	$4,00997390123 \times 10^0$
12	$1,50662388437 \times 10^{-2}$	$5,08937072005 \times 10^{-3}$	$3,11291830758 \times 10^{-1}$	$2,34265107401 \times 10^0$
13	$5,95108558583 \times 10^{-3}$	$1,27435771740 \times 10^{-1}$	$4,83641757133 \times 10^{-1}$	$3,93318396721 \times 10^0$
14	$4,59963750649 \times 10^{-3}$	$9,71448346087 \times 10^{-3}$	$2,76663289015 \times 10^{-1}$	$2,40668113629 \times 10^0$
15	$4,28885341393 \times 10^{-3}$	$8,89040113440 \times 10^{-3}$	$1,52672480320 \times 10^{-1}$	$1,61304164319 \times 10^0$
16	$3,88350753851 \times 10^{-3}$	$8,64225078060 \times 10^{-3}$	$1,48925731312 \times 10^{-1}$	$1,36955388504 \times 10^0$
17	$3,63409794333 \times 10^{-3}$	$7,59835323252 \times 10^{-3}$	$1,46772075500 \times 10^{-1}$	$7,00732294635 \times 10^{-1}$
18	$3,69634338168 \times 10^{-3}$	$7,59987226069 \times 10^{-3}$	$1,23156923880 \times 10^{-1}$	$6,01377680848 \times 10^{-1}$
19	$3,77061792760 \times 10^{-3}$	$7,99053779730 \times 10^{-3}$	$1,48550333245 \times 10^{-1}$	$5,87974115957 \times 10^{-1}$
20	$4,44523164901 \times 10^{-3}$	$1,00082039818 \times 10^{-2}$	$1,14267381082 \times 10^{-1}$	$5,70672630212 \times 10^{-1}$
21	$3,70270066903 \times 10^{-3}$	$1,06599938739 \times 10^{-2}$	$1,22194177642 \times 10^{-1}$	$6,10889906268 \times 10^{-1}$
22	$3,32702161951 \times 10^{-3}$	$8,05370548091 \times 10^{-3}$	$1,17573300791 \times 10^{-1}$	$6,02447376234 \times 10^{-1}$
23	$3,50675088569 \times 10^{-3}$	$7,24210606868 \times 10^{-3}$	$1,17847916650 \times 10^{-1}$	$6,70028716371 \times 10^{-1}$
24	$3,46334175191 \times 10^{-3}$	$7,39218131333 \times 10^{-3}$	$1,20208110128 \times 10^{-1}$	$5,30088947349 \times 10^{-1}$
25	$3,51559527629 \times 10^{-3}$	$7,07389141303 \times 10^{-3}$	$1,54376316829 \times 10^{-1}$	$5,49648659241 \times 10^{-1}$
26	$3,58107903166 \times 10^{-3}$	$6,56380376896 \times 10^{-3}$	$1,16451309371 \times 10^{-1}$	$5,32810473567 \times 10^{-1}$
27	$4,55734463063 \times 10^{-3}$	$6,85185441492 \times 10^{-3}$	$1,18615937264 \times 10^{-1}$	$5,31100070881 \times 10^{-1}$
28	$5,80698923438 \times 10^{-3}$	$7,66915839868 \times 10^{-3}$	$1,74061805182 \times 10^{-1}$	$5,81769667698 \times 10^{-1}$
29	$1,12116607777 \times 10^{-2}$	$1,48801774802 \times 10^{-2}$	$2,87450614242 \times 10^{-1}$	$5,78425198885 \times 10^{-1}$
30	$4,25388155782 \times 10^{-2}$	$2,49245416994 \times 10^{-2}$	$5,76939821479 \times 10^{-1}$	$8,72152865042 \times 10^{-1}$
31	$6,77754924134 \times 10^{-2}$	$5,19912542574 \times 10^{-2}$	$1,46799115741 \times 10^0$	$8,68485307691 \times 10^{-1}$
32	$2,38604443723 \times 10^{-1}$	$1,94062265829 \times 10^{-1}$	$3,96937554441 \times 10^0$	$1,40458755956 \times 10^0$
33	$1,10936014013 \times 10^0$	$3,35891275134 \times 10^0$	$1,01072289546 \times 10^1$	$2,91097305953 \times 10^0$
34	$2,70691376513 \times 10^0$	$1,79082217090 \times 10^0$	$2,13322539061 \times 10^1$	$8,09814078061 \times 10^0$
35	$4,17822303285 \times 10^0$	$3,08583947752 \times 10^1$	$3,51526092536 \times 10^1$	$8,10537075260 \times 10^1$
36	$9,92139381834 \times 10^0$	$5,66921932563 \times 10^1$	$5,63307708683 \times 10^1$	$5,05056234741 \times 10^1$
37	$3,34347808066 \times 10^1$	$8,31477546468 \times 10^1$	$8,89612856371 \times 10^1$	$6,51827177884 \times 10^1$
38	$1,06957971631 \times 10^2$	$4,78332244749 \times 10^2$	$3,05450398546 \times 10^2$	$2,07369809719 \times 10^2$
39	$4,18537603988 \times 10^2$	$6,69558011313 \times 10^2$	$6,52330700934 \times 10^2$	$9,78220811525 \times 10^2$
40	$2,08902330455 \times 10^3$	$2,99868437061 \times 10^3$	$4,80394491412 \times 10^3$	$5,96300188179 \times 10^3$

Fonte: do autor

Tabela 4.33: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_6 , com $a = 3$, por meio da Transformada u de Levin.

M	$b = -3$	$b = -1$	$b = 1$	$b = 2$
1	$7,27360880995 \times 10^{-2}$	$2,10979327625 \times 10^{-1}$	$9,31532911010 \times 10^{-1}$	$1,96154167186 \times 10^0$
2	$1,83651835865 \times 10^{-2}$	$3,79591871483 \times 10^{-1}$	$6,56599131326 \times 10^0$	$2,10608798463 \times 10^0$
3	$3,38811650620 \times 10^{-2}$	$3,41830335733 \times 10^{-1}$	$9,25821138983 \times 10^{-1}$	$1,99169058043 \times 10^0$
4	$9,08897876093 \times 10^{-3}$	$9,38927532417 \times 10^{-2}$	$7,27151537984 \times 10^{-1}$	$2,23985124676 \times 10^0$
5	$8,58860280352 \times 10^{-2}$	$5,88707333264 \times 10^{-2}$	$2,20648783744 \times 10^0$	$2,24607849760 \times 10^0$
6	$5,65302303368 \times 10^{-3}$	$2,41737808964 \times 10^{-2}$	$6,64400285653 \times 10^{-1}$	$2,89822177925 \times 10^0$
7	$5,23990221305 \times 10^{-3}$	$3,61252876785 \times 10^{-2}$	$7,14010855830 \times 10^{-1}$	$2,27145861033 \times 10^0$
8	$5,14885372512 \times 10^{-3}$	$4,75388636581 \times 10^{-2}$	$5,67925976017 \times 10^{-1}$	$2,40706584515 \times 10^0$
9	$4,95247926328 \times 10^{-3}$	$1,07964282325 \times 10^{-2}$	$5,52861726369 \times 10^{-1}$	$2,11285837089 \times 10^0$
10	$5,64601505862 \times 10^{-3}$	$6,23363204297 \times 10^{-3}$	$5,33371863640 \times 10^{-1}$	$2,35132373251 \times 10^0$
11	$4,56445563208 \times 10^{-3}$	$1,13168885176 \times 10^{-2}$	$4,66300230207 \times 10^{-1}$	$1,95748354932 \times 10^0$
12	$1,38087598922 \times 10^{-2}$	$2,17745968295 \times 10^{-1}$	$5,03839193581 \times 10^{-1}$	$2,16717396684 \times 10^0$
13	$5,02260948707 \times 10^{-2}$	$7,55550197687 \times 10^{-2}$	$4,75306472842 \times 10^{-1}$	$2,40154002680 \times 10^0$
14	$1,34442647165 \times 10^{-2}$	$4,53820882262 \times 10^{-2}$	$4,61770910546 \times 10^{-1}$	$2,13938481831 \times 10^0$
15	$1,28768079383 \times 10^{-2}$	$4,19881244554 \times 10^{-2}$	$3,99508440883 \times 10^{-1}$	$1,52131880463 \times 10^0$
16	$1,17657239175 \times 10^{-2}$	$3,87730721123 \times 10^{-2}$	$3,58920740707 \times 10^{-1}$	$1,34722281481 \times 10^0$
17	$1,12677844996 \times 10^{-2}$	$3,85965103597 \times 10^{-2}$	$3,30609146431 \times 10^{-1}$	$1,46658797861 \times 10^0$
18	$1,06646699778 \times 10^{-2}$	$3,50017598502 \times 10^{-2}$	$2,79573428318 \times 10^{-1}$	$1,02246215696 \times 10^0$
19	$1,03949812728 \times 10^{-2}$	$3,53153746708 \times 10^{-2}$	$2,72149601156 \times 10^{-1}$	$9,17544725284 \times 10^{-1}$
20	$1,08158434624 \times 10^{-2}$	$3,49427102550 \times 10^{-2}$	$2,60280484831 \times 10^{-1}$	$7,57379071830 \times 10^{-1}$
21	$1,22700292159 \times 10^{-2}$	$3,84339597352 \times 10^{-2}$	$2,58166424168 \times 10^{-1}$	$7,92715458841 \times 10^{-1}$
22	$1,12670722891 \times 10^{-2}$	$3,45122063071 \times 10^{-2}$	$2,75492489955 \times 10^{-1}$	$8,21192975323 \times 10^{-1}$
23	$1,12582264589 \times 10^{-2}$	$3,46808367366 \times 10^{-2}$	$2,48152677144 \times 10^{-1}$	$7,55520338465 \times 10^{-1}$
24	$1,07484336259 \times 10^{-2}$	$4,29772427575 \times 10^{-2}$	$2,29914548354 \times 10^{-1}$	$7,83450713626 \times 10^{-1}$
25	$2,13120214297 \times 10^{-2}$	$3,47541618545 \times 10^{-2}$	$2,39033201367 \times 10^{-1}$	$8,97668296090 \times 10^{-1}$
26	$1,73690224971 \times 10^{-2}$	$3,78244285659 \times 10^{-2}$	$2,44602672602 \times 10^{-1}$	$9,28954821330 \times 10^{-1}$
27	$2,60957580959 \times 10^{-2}$	$4,20144821212 \times 10^{-2}$	$2,42184887896 \times 10^{-1}$	$8,29415189532 \times 10^{-1}$
28	$2,58200402597 \times 10^{-2}$	$6,50394848831 \times 10^{-2}$	$5,29339859726 \times 10^0$	$8,44268081593 \times 10^{-1}$
29	$5,63252263029 \times 10^{-2}$	$7,24701656142 \times 10^{-2}$	$3,05554076105 \times 10^{-1}$	$9,64944023567 \times 10^{-1}$
30	$7,14014057303 \times 10^{-2}$	$1,39990544424 \times 10^{-1}$	$4,86433177857 \times 10^{-1}$	$1,17789660751 \times 10^0$
31	$1,91558063079 \times 10^{-1}$	$2,01189641260 \times 10^0$	$4,61958602001 \times 10^{-1}$	$2,22109287196 \times 10^0$
32	$4,59023815437 \times 10^{-1}$	$6,50934393487 \times 10^{-1}$	$1,17751631217 \times 10^0$	$1,84086104785 \times 10^1$
33	$1,14877540043 \times 10^0$	$1,41981326994 \times 10^0$	$3,39949517825 \times 10^0$	$1,35874650667 \times 10^1$
34	$3,33135746416 \times 10^0$	$3,15219397476 \times 10^0$	$9,42662020798 \times 10^0$	$3,43135358641 \times 10^1$
35	$1,50158220404 \times 10^1$	$9,66136291588 \times 10^0$	$3,54350086893 \times 10^1$	$3,54513467651 \times 10^3$
36	$8,00710338493 \times 10^1$	$3,36665016972 \times 10^1$	$1,45606784458 \times 10^2$	$3,25140534093 \times 10^2$
37	$2,50315809353 \times 10^2$	$1,12869191770 \times 10^2$	$5,88665969387 \times 10^2$	$9,28431805509 \times 10^2$
38	$1,26894757463 \times 10^3$	$1,40256138582 \times 10^3$	$2,57644230663 \times 10^3$	$2,50326390292 \times 10^3$
39	$3,33064120070 \times 10^3$	$1,74737205561 \times 10^3$	$1,25098588556 \times 10^4$	$6,23373869929 \times 10^3$
40	$8,33273742403 \times 10^3$	$5,89180897420 \times 10^3$	$2,37129813442 \times 10^4$	$1,61370660498 \times 10^4$

Fonte: do autor

Tabela 4.34: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_6 , com $a = 5$, por meio da Transformada u de Levin.

M	$b = -3$	$b = -1$	$b = 1$	$b = 2$
1	$1,11960917907 \times 10^{-1}$	$2,91329074553 \times 10^{-1}$	$1,03747290329 \times 10^0$	$2,14738043615 \times 10^0$
2	$5,63168154395 \times 10^{-2}$	$1,04796531840 \times 10^0$	$1,35406037781 \times 10^0$	$2,36957055067 \times 10^0$
3	$1,00675857634 \times 10^1$	$3,42994757351 \times 10^{-1}$	$9,86572702650 \times 10^{-1}$	$2,11685576882 \times 10^0$
4	$6,61934250042 \times 10^{-2}$	$2,00212105265 \times 10^{-1}$	$9,27165187070 \times 10^{-1}$	$2,00288157037 \times 10^0$
5	$6,26079135839 \times 10^{-2}$	$1,78440851092 \times 10^{-1}$	$1,08634890334 \times 10^0$	$2,17752485372 \times 10^0$
6	$3,67710886464 \times 10^{-2}$	$1,42886290674 \times 10^{-1}$	$8,14051382107 \times 10^{-1}$	$2,48176057754 \times 10^0$
7	$7,46951938373 \times 10^{-2}$	$3,39897006708 \times 10^{-1}$	$6,97367940844 \times 10^0$	$2,52493290948 \times 10^0$
8	$2,41956283839 \times 10^{-2}$	$6,42432725983 \times 10^{-2}$	$9,11152773424 \times 10^{-1}$	$2,57455511553 \times 10^0$
9	$5,52365575640 \times 10^{-2}$	$2,41453122227 \times 10^{-2}$	$5,54320419616 \times 10^{-1}$	$1,79818905775 \times 10^0$
10	$1,75493038663 \times 10^{-2}$	$3,24963048743 \times 10^{-2}$	$5,32748014030 \times 10^{-1}$	$2,55331049653 \times 10^0$
11	$9,81214976452 \times 10^{-3}$	$1,66118707187 \times 10^{-2}$	$3,88424848077 \times 10^{-1}$	$1,79123532859 \times 10^0$
12	$3,13336842455 \times 10^{-2}$	$9,87279242082 \times 10^{-2}$	$7,09299937607 \times 10^{-1}$	$1,63342729838 \times 10^0$
13	$3,46246908335 \times 10^{-2}$	$1,27064208534 \times 10^{-1}$	$4,59500900011 \times 10^{-1}$	$1,85519186847 \times 10^0$
14	$2,92724549233 \times 10^{-2}$	$1,03886977328 \times 10^{-1}$	$5,34315358738 \times 10^{-1}$	$1,38027300670 \times 10^0$
15	$2,27124387757 \times 10^{-1}$	$9,25187390528 \times 10^{-2}$	$4,88515161758 \times 10^{-1}$	$1,62782324479 \times 10^0$
16	$2,55936436156 \times 10^{-2}$	$8,80203617621 \times 10^{-2}$	$4,49555018396 \times 10^{-1}$	$1,22756090647 \times 10^0$
17	$2,49304794675 \times 10^{-2}$	$8,15113018792 \times 10^{-2}$	$4,11405320085 \times 10^{-1}$	$1,29144680646 \times 10^0$
18	$2,43518903212 \times 10^{-2}$	$9,52160932353 \times 10^{-2}$	$4,02274588195 \times 10^{-1}$	$1,10420500027 \times 10^0$
19	$2,35254049445 \times 10^{-2}$	$8,00711516071 \times 10^{-2}$	$3,86927042534 \times 10^{-1}$	$9,45705317113 \times 10^{-1}$
20	$2,70430105864 \times 10^{-2}$	$8,32617462721 \times 10^{-2}$	$4,18978546199 \times 10^{-1}$	$9,61069592769 \times 10^{-1}$
21	$2,31197229073 \times 10^{-2}$	$7,74205373097 \times 10^{-2}$	$3,66262858725 \times 10^{-1}$	$9,27386681946 \times 10^{-1}$
22	$2,48852071309 \times 10^{-2}$	$8,00516591030 \times 10^{-2}$	$5,12322148961 \times 10^{-1}$	$9,10071663097 \times 10^{-1}$
23	$2,30779939307 \times 10^{-2}$	$1,20096698087 \times 10^{-1}$	$3,43106523319 \times 10^{-1}$	$1,42882758176 \times 10^0$
24	$2,37539209681 \times 10^{-2}$	$7,86109669522 \times 10^{-2}$	$3,80067025790 \times 10^{-1}$	$9,04769137962 \times 10^{-1}$
25	$2,55740506817 \times 10^{-2}$	$8,34325454464 \times 10^{-2}$	$4,31028786738 \times 10^{-1}$	$9,06179690395 \times 10^{-1}$
26	$3,16719911660 \times 10^{-2}$	$8,16541832222 \times 10^{-2}$	$4,04561406294 \times 10^{-1}$	$9,24976086218 \times 10^{-1}$
27	$3,26222440439 \times 10^{-2}$	$9,32336828635 \times 10^{-2}$	$3,58041259153 \times 10^{-1}$	$1,04276886475 \times 10^0$
28	$9,40859669882 \times 10^{-2}$	$1,27548298904 \times 10^{-1}$	$1,34077260370 \times 10^0$	$1,53806072042 \times 10^0$
29	$1,08106381292 \times 10^{-1}$	$1,44207236886 \times 10^{-1}$	$4,98043563782 \times 10^{-1}$	$4,02178269501 \times 10^0$
30	$1,36211898392 \times 10^{-1}$	$2,72756372197 \times 10^{-1}$	$8,82424363789 \times 10^{-1}$	$9,97043862858 \times 10^0$
31	$3,07094690860 \times 10^{-1}$	$4,96351146142 \times 10^{-1}$	$2,07145031634 \times 10^0$	$1,00339237935 \times 10^1$
32	$8,74167225196 \times 10^{-1}$	$6,71224730966 \times 10^{-1}$	$2,20333539395 \times 10^0$	$9,90808500937 \times 10^0$
33	$1,84975965354 \times 10^0$	$1,41596322378 \times 10^0$	$6,67446475605 \times 10^0$	$1,54381851182 \times 10^1$
34	$3,28593495638 \times 10^0$	$5,95507537709 \times 10^0$	$1,11426483747 \times 10^1$	$8,46206167349 \times 10^1$
35	$8,63279833298 \times 10^0$	$2,97788387472 \times 10^1$	$7,53931174545 \times 10^1$	$7,02502353580 \times 10^1$
36	$2,52631002027 \times 10^1$	$1,26185343486 \times 10^2$	$6,88189865195 \times 10^1$	$1,06766005997 \times 10^2$
37	$8,20258897405 \times 10^1$	$2,35580023212 \times 10^2$	$3,31496816060 \times 10^2$	$2,61926634659 \times 10^2$
38	$6,44112325421 \times 10^2$	$1,09578342055 \times 10^3$	$8,89786615278 \times 10^2$	$8,77649312479 \times 10^2$
39	$2,78747371202 \times 10^3$	$2,17282025301 \times 10^3$	$3,66010361087 \times 10^3$	$3,66741464955 \times 10^3$
40	$5,24840516124 \times 10^3$	$7,26680257051 \times 10^3$	$2,41446651534 \times 10^4$	$1,34834587683 \times 10^4$

Fonte: do autor

Tabela 4.35: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_6 , com $a = 10$, por meio da Transformada u de Levin.

M	$b = -3$	$b = -1$	$b = 1$	$b = 2$
1	$1,43559328935 \times 10^{-1}$	$3,29879931237 \times 10^{-1}$	$9,70789377688 \times 10^{-1}$	$1,82215343903 \times 10^0$
2	$4,09080451795 \times 10^{-1}$	$4,66890294800 \times 10^{-1}$	$1,08336771763 \times 10^0$	$1,88478118458 \times 10^0$
3	$2,15055280305 \times 10^{-1}$	$3,44232478549 \times 10^{-1}$	$9,98870146626 \times 10^{-1}$	$1,87189721027 \times 10^0$
4	$1,07837843799 \times 10^{-1}$	$2,85404540622 \times 10^{-1}$	$9,23525995199 \times 10^{-1}$	$1,77028789322 \times 10^0$
5	$1,10224216084 \times 10^{-1}$	$3,09681218124 \times 10^{-1}$	$1,06501586082 \times 10^0$	$1,86082522412 \times 10^0$
6	$8,13954877832 \times 10^{-2}$	$3,52303384518 \times 10^{-1}$	$9,12692824074 \times 10^{-1}$	$1,70880827409 \times 10^0$
7	$1,26291805022 \times 10^{-1}$	$1,12723045218 \times 10^0$	$2,57257526878 \times 10^0$	$1,87073254866 \times 10^0$
8	$5,64418651328 \times 10^{-2}$	$1,93676874390 \times 10^{-1}$	$2,06144440466 \times 10^0$	$1,84586103214 \times 10^0$
9	$9,68753928517 \times 10^{-2}$	$1,64092764770 \times 10^{-1}$	$8,52892679473 \times 10^{-1}$	$1,55278783845 \times 10^0$
10	$3,64138878300 \times 10^{-2}$	$1,69704152283 \times 10^{-1}$	$7,06448719833 \times 10^{-1}$	$1,54926352945 \times 10^0$
11	$2,98810580017 \times 10^{-2}$	$1,89934206507 \times 10^{-1}$	$6,93109234098 \times 10^{-1}$	$3,95420001522 \times 10^0$
12	$7,64187218820 \times 10^{-2}$	$1,61325328635 \times 10^{-1}$	$6,93074613576 \times 10^{-1}$	$1,58435475019 \times 10^0$
13	$7,10138246679 \times 10^{-2}$	$2,07014696015 \times 10^{-1}$	$8,41133520600 \times 10^{-1}$	$2,89297065032 \times 10^0$
14	$6,55860046780 \times 10^{-2}$	$1,96289311204 \times 10^{-1}$	$8,17352927274 \times 10^{-1}$	$1,64985879914 \times 10^0$
15	$6,26186403439 \times 10^{-2}$	$1,87783489461 \times 10^{-1}$	$6,86215952411 \times 10^{-1}$	$1,48670428850 \times 10^0$
16	$5,65171752990 \times 10^{-2}$	$1,75853052024 \times 10^{-1}$	$6,69789177978 \times 10^{-1}$	$1,38439441692 \times 10^0$
17	$5,71242336319 \times 10^{-2}$	$1,66758229198 \times 10^{-1}$	$6,49045703688 \times 10^{-1}$	$1,35530224268 \times 10^0$
18	$5,45922955752 \times 10^{-2}$	$1,69281386233 \times 10^{-1}$	$6,64673532753 \times 10^{-1}$	$1,35731154923 \times 10^0$
19	$5,34296879589 \times 10^{-2}$	$1,60754728962 \times 10^{-1}$	$6,24820575534 \times 10^{-1}$	$1,35887781911 \times 10^0$
20	$5,61336212113 \times 10^{-2}$	$1,65093920583 \times 10^{-1}$	$6,25074720322 \times 10^{-1}$	$1,34087992272 \times 10^0$
21	$5,31937774014 \times 10^{-2}$	$1,57195182396 \times 10^{-1}$	$6,24632270645 \times 10^{-1}$	$1,30124032507 \times 10^0$
22	$5,30815946761 \times 10^{-2}$	$4,25922625416 \times 10^{-1}$	$6,30918185997 \times 10^{-1}$	$1,39599809011 \times 10^0$
23	$5,29762975206 \times 10^{-2}$	$1,56392393989 \times 10^{-1}$	$7,65882671793 \times 10^{-1}$	$1,32901645299 \times 10^0$
24	$8,25833755290 \times 10^{-2}$	$1,57486274626 \times 10^{-1}$	$6,70178918639 \times 10^{-1}$	$1,36802824467 \times 10^0$
25	$1,22104496748 \times 10^{-1}$	$1,67513695763 \times 10^{-1}$	$6,33744544547 \times 10^{-1}$	$1,52259322023 \times 10^0$
26	$7,21653052288 \times 10^{-2}$	$1,60454458555 \times 10^{-1}$	$6,42517139027 \times 10^{-1}$	$1,28195680711 \times 10^0$
27	$1,42187482090 \times 10^{-1}$	$1,70730298957 \times 10^{-1}$	$6,02921951960 \times 10^{-1}$	$1,25670928719 \times 10^0$
28	$2,88389002350 \times 10^{-1}$	$1,87669313118 \times 10^{-1}$	$6,58448986359 \times 10^{-1}$	$1,46534615972 \times 10^0$
29	$2,08751762875 \times 10^{-1}$	$3,83824693948 \times 10^{-1}$	$8,79816040803 \times 10^{-1}$	$1,61898656604 \times 10^0$
30	$3,89410868688 \times 10^{-1}$	$6,80707018680 \times 10^{-1}$	$9,45038749684 \times 10^{-1}$	$1,84630529994 \times 10^0$
31	$1,02766241585 \times 10^0$	$2,00122494445 \times 10^1$	$1,33224035202 \times 10^0$	$2,53991010354 \times 10^0$
32	$4,51511845329 \times 10^0$	$2,93047413031 \times 10^0$	$2,30427583247 \times 10^0$	$5,87570642641 \times 10^0$
33	$1,94223491000 \times 10^1$	$9,85606134909 \times 10^0$	$6,92089684832 \times 10^0$	$7,73155452227 \times 10^0$
34	$2,90332584162 \times 10^1$	$7,82242353333 \times 10^1$	$2,55200027010 \times 10^1$	$1,83900036136 \times 10^1$
35	$9,55051264345 \times 10^1$	$1,16489908903 \times 10^2$	$8,58670556055 \times 10^1$	$7,34496723997 \times 10^1$
36	$1,40040318050 \times 10^2$	$3,54078230913 \times 10^2$	$2,78201250342 \times 10^2$	$1,99188143516 \times 10^2$
37	$3,99115245273 \times 10^2$	$6,20202150932 \times 10^2$	$1,10725228183 \times 10^3$	$2,43402902321 \times 10^2$
38	$1,50835607550 \times 10^3$	$1,85009123020 \times 10^3$	$3,30103890116 \times 10^3$	$7,79380382324 \times 10^2$
39	$5,66306635234 \times 10^3$	$7,08488936385 \times 10^3$	$8,21051528890 \times 10^3$	$3,42281526911 \times 10^3$
40	$3,63278123592 \times 10^4$	$3,83578177464 \times 10^4$	$4,58291058024 \times 10^4$	$2,40380678030 \times 10^4$

Fonte: do autor

Tabela 4.36: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_6 , com $a = 1$, por meio da Soma de Salzer.

M	$b = -3$	$b = -1$	$b = 1$	$b = 2$
1	$3,20930697986 \times 10^{-2}$	$8,17498989755 \times 10^{-2}$	$8,30521735242 \times 10^{-1}$	$2,65906444559 \times 10^0$
2	$9,99143506067 \times 10^{-3}$	$2,24917924957 \times 10^{-2}$	$1,07773794845 \times 10^0$	$5,79660552123 \times 10^0$
3	$2,67508445038 \times 10^{-3}$	$4,89716724646 \times 10^{-3}$	$8,16620568397 \times 10^{-1}$	$1,15701628941 \times 10^1$
4	$6,71504831823 \times 10^{-4}$	$9,18254728068 \times 10^{-4}$	$4,66115825592 \times 10^{-1}$	$1,84573620924 \times 10^1$
5	$1,60290294464 \times 10^{-4}$	$2,01634631592 \times 10^{-4}$	$1,43422671152 \times 10^{-1}$	$2,35917434101 \times 10^1$
6	$3,61227302169 \times 10^{-5}$	$4,48965202384 \times 10^{-5}$	$9,01433608014 \times 10^{-2}$	$1,19540782039 \times 10^1$
7	$7,60259126229 \times 10^{-6}$	$6,88009524311 \times 10^{-6}$	$1,82075331567 \times 10^{-2}$	$8,07452731600 \times 10^0$
8	$1,48837994004 \times 10^{-6}$	$7,07645633550 \times 10^{-7}$	$4,49150902379 \times 10^{-3}$	$6,57188279335 \times 10^0$
9	$2,83760389926 \times 10^{-7}$	$7,27085587823 \times 10^{-8}$	$1,87988497838 \times 10^{-3}$	$3,32218326086 \times 10^0$
10	$8,19411423231 \times 10^{-7}$	$9,72715593997 \times 10^{-7}$	$2,96176732280 \times 10^{-4}$	$9,14374788477 \times 10^{-1}$
11	$1,45562303473 \times 10^{-5}$	$1,32029509999 \times 10^{-5}$	$4,63558932719 \times 10^{-5}$	$2,20603909046 \times 10^{-1}$
12	$2,86921440031 \times 10^{-4}$	$2,48640133670 \times 10^{-4}$	$2,97839026965 \times 10^{-4}$	$1,19832225649 \times 10^{-1}$
13	$5,94690589552 \times 10^{-3}$	$5,30803148140 \times 10^{-3}$	$7,16826690298 \times 10^{-3}$	$5,43464275427 \times 10^{-2}$
14	$1,17390261277 \times 10^{-1}$	$1,12327555404 \times 10^{-1}$	$1,55689823403 \times 10^{-1}$	$1,42714301928 \times 10^{-1}$

Fonte: do autor

Tabela 4.37: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_6 , com $a = 3$, por meio da Soma de Salzer.

M	$b = -3$	$b = -1$	$b = 1$	$b = 2$
1	$7,27360880995 \times 10^{-2}$	$2,10979327625 \times 10^{-1}$	$9,31532911010 \times 10^{-1}$	$1,96154167186 \times 10^0$
2	$3,05844210424 \times 10^{-2}$	$1,05877657019 \times 10^{-1}$	$8,07120621307 \times 10^{-1}$	$2,07467019830 \times 10^0$
3	$1,25937662802 \times 10^{-2}$	$5,14879143400 \times 10^{-2}$	$7,01186680198 \times 10^{-1}$	$2,43641577145 \times 10^0$
4	$4,92282763621 \times 10^{-3}$	$2,48735045873 \times 10^{-2}$	$5,37447192331 \times 10^{-1}$	$2,87136934078 \times 10^0$
5	$1,78243413156 \times 10^{-3}$	$1,11422899057 \times 10^{-2}$	$3,11920922947 \times 10^{-1}$	$2,72974323055 \times 10^0$
6	$5,95902966931 \times 10^{-4}$	$4,30348274330 \times 10^{-3}$	$1,56159948624 \times 10^{-1}$	$1,93982090793 \times 10^0$
7	$1,82779835398 \times 10^{-4}$	$1,35014856012 \times 10^{-3}$	$1,31085267225 \times 10^{-1}$	$2,23399052439 \times 10^0$
8	$5,15247534401 \times 10^{-5}$	$3,43312718203 \times 10^{-4}$	$5,56984209228 \times 10^{-2}$	$1,34463832613 \times 10^0$
9	$1,33797483580 \times 10^{-5}$	$9,38133696584 \times 10^{-5}$	$2,15860629193 \times 10^{-2}$	$9,41238310154 \times 10^{-1}$
10	$4,54701865747 \times 10^{-6}$	$4,06952962982 \times 10^{-5}$	$1,30996548720 \times 10^{-2}$	$5,40358777176 \times 10^{-1}$
11	$3,79157834765 \times 10^{-5}$	$4,28809064884 \times 10^{-5}$	$3,01834822327 \times 10^{-3}$	$2,88401343908 \times 10^{-1}$
12	$9,08191716057 \times 10^{-4}$	$8,99102278091 \times 10^{-4}$	$2,57874578375 \times 10^{-3}$	$1,30826964179 \times 10^{-1}$
13	$2,00029887572 \times 10^{-2}$	$1,92804030454 \times 10^{-2}$	$2,25892496162 \times 10^{-2}$	$8,71267491844 \times 10^{-2}$
14	$3,45145645072 \times 10^{-1}$	$3,39804359691 \times 10^{-1}$	$4,08522577871 \times 10^{-1}$	$4,67071188934 \times 10^{-1}$

Fonte: do autor

Tabela 4.38: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_6 , com $a = 5$, por meio da Soma de Salzer.

M	$b = -3$	$b = -1$	$b = 1$	$b = 2$
1	$1,11960917907 \times 10^{-1}$	$2,91329074553 \times 10^{-1}$	$1,03747290329 \times 10^0$	$2,14738043615 \times 10^0$
2	$6,59627741521 \times 10^{-2}$	$2,04499067339 \times 10^{-1}$	$9,01413160982 \times 10^{-1}$	$2,03042660577 \times 10^0$
3	$3,56791822051 \times 10^{-2}$	$1,33756783645 \times 10^{-1}$	$7,54006765166 \times 10^{-1}$	$1,91279718382 \times 10^0$
4	$1,77209909712 \times 10^{-2}$	$8,19319771539 \times 10^{-2}$	$6,04324917266 \times 10^{-1}$	$1,79858999743 \times 10^0$
5	$8,24777473759 \times 10^{-3}$	$4,69317546805 \times 10^{-2}$	$4,54179993533 \times 10^{-1}$	$1,64674269040 \times 10^0$
6	$3,66860129695 \times 10^{-3}$	$2,48935440775 \times 10^{-2}$	$3,13282005674 \times 10^{-1}$	$1,41604214009 \times 10^0$
7	$1,58779368893 \times 10^{-3}$	$1,20034192197 \times 10^{-2}$	$2,05727171784 \times 10^{-1}$	$1,16490751356 \times 10^0$
8	$6,70317719963 \times 10^{-4}$	$5,25280224337 \times 10^{-3}$	$1,55720497537 \times 10^{-1}$	$1,11434414453 \times 10^0$
9	$2,73627811845 \times 10^{-4}$	$2,17268280125 \times 10^{-3}$	$1,22628518746 \times 10^{-1}$	$1,07568362325 \times 10^0$
10	$1,07519973747 \times 10^{-4}$	$1,00580059647 \times 10^{-3}$	$6,63907371762 \times 10^{-2}$	$6,79359745305 \times 10^{-1}$
11	$8,62028949772 \times 10^{-5}$	$5,55507410487 \times 10^{-4}$	$2,84268476314 \times 10^{-2}$	$3,91973490452 \times 10^{-1}$
12	$1,36430023721 \times 10^{-3}$	$1,23934981347 \times 10^{-3}$	$2,02549050123 \times 10^{-2}$	$3,61721977592 \times 10^{-1}$
13	$2,86620168994 \times 10^{-2}$	$2,41739338160 \times 10^{-2}$	$3,12094230909 \times 10^{-2}$	$1,83409882493 \times 10^{-1}$
14	$5,34384703048 \times 10^{-1}$	$4,76426711694 \times 10^{-1}$	$6,10366293863 \times 10^{-1}$	$7,39784653814 \times 10^{-1}$

Fonte: do autor

Tabela 4.39: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_6 , com $a = 10$, por meio da Soma de Salzer.

M	$b = -3$	$b = -1$	$b = 1$	$b = 2$
1	$1,43559328935 \times 10^{-1}$	$3,29879931237 \times 10^{-1}$	$9,70789377688 \times 10^{-1}$	$1,82215343903 \times 10^0$
2	$1,08801636529 \times 10^{-1}$	$2,81473316773 \times 10^{-1}$	$9,06206710403 \times 10^{-1}$	$1,75226207873 \times 10^0$
3	$8,08423356143 \times 10^{-2}$	$2,34555173800 \times 10^{-1}$	$8,31719629617 \times 10^{-1}$	$1,66516490333 \times 10^0$
4	$5,80870616471 \times 10^{-2}$	$1,89766221260 \times 10^{-1}$	$7,47171912187 \times 10^{-1}$	$1,56299878579 \times 10^0$
5	$4,02803613622 \times 10^{-2}$	$1,48864253009 \times 10^{-1}$	$6,59104176727 \times 10^{-1}$	$1,44487925248 \times 10^0$
6	$2,74279258114 \times 10^{-2}$	$1,13128619220 \times 10^{-1}$	$5,70197635672 \times 10^{-1}$	$1,33217457758 \times 10^0$
7	$1,81932726140 \times 10^{-2}$	$8,39034733605 \times 10^{-2}$	$4,84726172096 \times 10^{-1}$	$1,21802218709 \times 10^0$
8	$1,18098676472 \times 10^{-2}$	$6,05414994958 \times 10^{-2}$	$4,07329597868 \times 10^{-1}$	$1,10131883224 \times 10^0$
9	$7,39318371514 \times 10^{-3}$	$4,25628739757 \times 10^{-2}$	$3,33618244157 \times 10^{-1}$	$9,95860040836 \times 10^{-1}$
10	$4,48139826794 \times 10^{-3}$	$2,88087204982 \times 10^{-2}$	$2,73141988497 \times 10^{-1}$	$8,99893845747 \times 10^{-1}$
11	$2,63866738210 \times 10^{-3}$	$1,89627352183 \times 10^{-2}$	$2,23991032657 \times 10^{-1}$	$8,29307996612 \times 10^{-1}$
12	$2,58736165977 \times 10^{-3}$	$1,31557919272 \times 10^{-2}$	$1,90671264087 \times 10^{-1}$	$7,81192632757 \times 10^{-1}$
13	$4,67261727072 \times 10^{-2}$	$4,77406270550 \times 10^{-2}$	$1,76223912998 \times 10^{-1}$	$7,09713812390 \times 10^{-1}$
14	$8,23879593501 \times 10^{-1}$	$9,57550927109 \times 10^{-1}$	$1,06517504738 \times 10^0$	$1,45603466696 \times 10^0$

Fonte: do autor

Tabela 4.40: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_6 , com $a = 1$, por meio do Algoritmo Wynn-Rho.

M	$b = -3$	$b = -1$	$b = 1$	$b = 2$
2	$3,58974005458 \times 10^{-3}$	$1,54657184867 \times 10^{-2}$	$2,96373725495 \times 10^0$	$2,29191324388 \times 10^0$
4	$1,15307895507 \times 10^{-4}$	$1,55643026138 \times 10^{-3}$	$2,59507587510 \times 10^{-2}$	$9,30175604115 \times 10^{-1}$
6	$6,74238678800 \times 10^{-7}$	$2,78744046458 \times 10^{-6}$	$2,04267067046 \times 10^{-2}$	$3,56220982529 \times 10^{-1}$
8	$1,15293831662 \times 10^{-8}$	$1,24510676602 \times 10^{-7}$	$2,24200461479 \times 10^{-5}$	$5,02224080252 \times 10^{-3}$
10	$3,79372778457 \times 10^{-8}$	$1,52339583023 \times 10^{-7}$	$1,23350131162 \times 10^{-6}$	$5,52748127306 \times 10^{-5}$
12	$7,03719195442 \times 10^{-8}$	$2,09450503382 \times 10^{-7}$	$3,18182553493 \times 10^{-6}$	$3,67685542378 \times 10^{-5}$
14	$4,68100504182 \times 10^{-7}$	$8,09669200151 \times 10^{-7}$	$2,66841721810 \times 10^{-6}$	$1,04374287251 \times 10^{-4}$
16	$1,11773036866 \times 10^{-6}$	$1,66149477104 \times 10^{-6}$	$9,50853714837 \times 10^{-6}$	$1,13422364375 \times 10^{-4}$

Fonte: do autor

Tabela 4.41: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_6 , com $a = 3$, por meio do Algoritmo Wynn-Rho.

M	$b = -3$	$b = -1$	$b = 1$	$b = 2$
2	$1,76770064523 \times 10^{-2}$	$7,48323284269 \times 10^{-2}$	$2,52433832368 \times 10^0$	$2,58579758786 \times 10^0$
4	$1,61081820306 \times 10^{-3}$	$7,56896100648 \times 10^{-2}$	$1,08469075795 \times 10^0$	$2,75270605358 \times 10^0$
6	$4,40580230729 \times 10^{-4}$	$2,36189720738 \times 10^{-3}$	$1,23343066000 \times 10^{-1}$	$1,75190052055 \times 10^0$
8	$4,40156047727 \times 10^{-6}$	$4,50002039568 \times 10^{-5}$	$2,34891378953 \times 10^{-1}$	$4,10825341616 \times 10^0$
10	$1,03521984095 \times 10^{-5}$	$5,87308581212 \times 10^{-4}$	$6,56652886239 \times 10^{-4}$	$1,21099462481 \times 10^{-2}$
12	$4,64017516909 \times 10^{-6}$	$3,74142414663 \times 10^{-5}$	$1,77135836127 \times 10^{-3}$	$1,72430738447 \times 10^{-2}$
14	$1,23342949650 \times 10^{-5}$	$8,28189384622 \times 10^{-5}$	$1,23413507898 \times 10^{-3}$	$1,41928821838 \times 10^{-2}$
16	$1,01731653506 \times 10^{-5}$	$1,32726443366 \times 10^{-4}$	$5,55439362126 \times 10^{-3}$	$1,56445076040 \times 10^{-2}$

Fonte: do autor

Tabela 4.42: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_6 , com $a = 5$, por meio do Algoritmo Wynn-Rho.

M	$b = -3$	$b = -1$	$b = 1$	$b = 2$
2	$5,22889287664 \times 10^{-2}$	$1,92254780568 \times 10^{-1}$	$6,81369200474 \times 10^0$	$3,02416366972 \times 10^0$
4	$1,29936094791 \times 10^{-2}$	$1,29058635113 \times 10^{-1}$	$1,19750351168 \times 10^1$	$5,88486789737 \times 10^0$
6	$2,51286463938 \times 10^{-3}$	$4,31457959577 \times 10^{-2}$	$8,15704696120 \times 10^{-1}$	$1,66131799137 \times 10^0$
8	$3,35239078448 \times 10^{-2}$	$4,78087334361 \times 10^{-3}$	$2,71268803308 \times 10^{-1}$	$9,64591876668 \times 10^0$
10	$1,03958943809 \times 10^{-4}$	$2,91157940581 \times 10^{-4}$	$2,14219692723 \times 10^0$	$1,42557634003 \times 10^0$
12	$2,87700646362 \times 10^{-4}$	$5,11033540151 \times 10^{-4}$	$8,61983051253 \times 10^{-3}$	$9,13356447211 \times 10^{-2}$
14	$1,45640613409 \times 10^{-4}$	$4,07174126802 \times 10^{-4}$	$1,58124468291 \times 10^{-2}$	$9,00672591662 \times 10^{-2}$
16	$6,49043573351 \times 10^{-4}$	$1,56084848126 \times 10^{-3}$	$4,29206252714 \times 10^{-2}$	$1,08280787892 \times 10^{-1}$

Fonte: do autor

Tabela 4.43: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_6 , com $a = 10$, por meio do Algoritmo Wynn-Rho.

M	$b = -3$	$b = -1$	$b = 1$	$b = 2$
2	$9,93446637487 \times 10^{-2}$	$2,81379884942 \times 10^{-1}$	$9,93062468684 \times 10^{-1}$	$6,72550147051 \times 10^0$
4	$1,25706312480 \times 10^{-1}$	$2,41144644471 \times 10^{-1}$	$2,25939157914 \times 10^0$	$1,14794685203 \times 10^1$
6	$2,18617521090 \times 10^{-2}$	$1,69447508709 \times 10^{-1}$	$2,23048009765 \times 10^0$	$7,75316482636 \times 10^0$
8	$7,95508284780 \times 10^{-3}$	$1,40971022902 \times 10^{-1}$	$2,70136948241 \times 10^0$	$2,08233261650 \times 10^0$
10	$2,31749393359 \times 10^{-3}$	$6,78502922019 \times 10^{-2}$	$5,51811242455 \times 10^{-1}$	$3,29218737205 \times 10^0$
12	$2,57999625794 \times 10^{-3}$	$8,47657931322 \times 10^{-2}$	$4,47099913550 \times 10^{-1}$	$2,86974614411 \times 10^0$
14	$3,64620897651 \times 10^{-2}$	$7,52719128132 \times 10^{-2}$	$1,49963762778 \times 10^0$	$3,39927437442 \times 10^0$
16	$1,41774712801 \times 10^{-2}$	$6,95676347700 \times 10^{-2}$	$4,19026521702 \times 10^{-1}$	$2,89181013611 \times 10^0$
18	-	$1,52296001642 \times 10^{-1}$	$3,82075965774 \times 10^{-1}$	$1,09138155255 \times 10^1$
20	-	-	$4,69850697657 \times 10^{-1}$	-

Fonte: do autor

4.7 Inversão de F_7

A Tabela 4.45 e a Figura 4.34 apresentam os resultados para a inversão numérica da Transformada de Laplace da função $F_7(s) = \frac{\ln(s)}{s}$, cuja inversa analítica é $f_7(t) = \ln(t) + \gamma$, para os Funcionais de Gaver, Transformada u de Levin, Soma de Salzer e Algoritmo Wynn-Rho.

Os M ótimos são dados pela Tabela 4.44. Para esta função, a Soma de Salzer e o Algoritmo Wynn-Rho tiveram desempenho similar, onde ambos geraram um Erro Absoluto Médio na ordem de 10^{-7} , utilizando o mesmo M ótimo.

Tabela 4.44: M ótimos e ordem do $\overline{E}_{abs}$ para a inversão de F_7 .

	M ótimo	Ordem do $\overline{E}_{abs}$
Funcionais de Gaver	16	10^{-2}
Transformada u de Levin	9	10^{-5}
Soma de Salzer	8	10^{-7}
Algoritmo Wynn-Rho	8	10^{-7}

Fonte: do autor

Figura 4.34: Resultados para a inversão de F_7

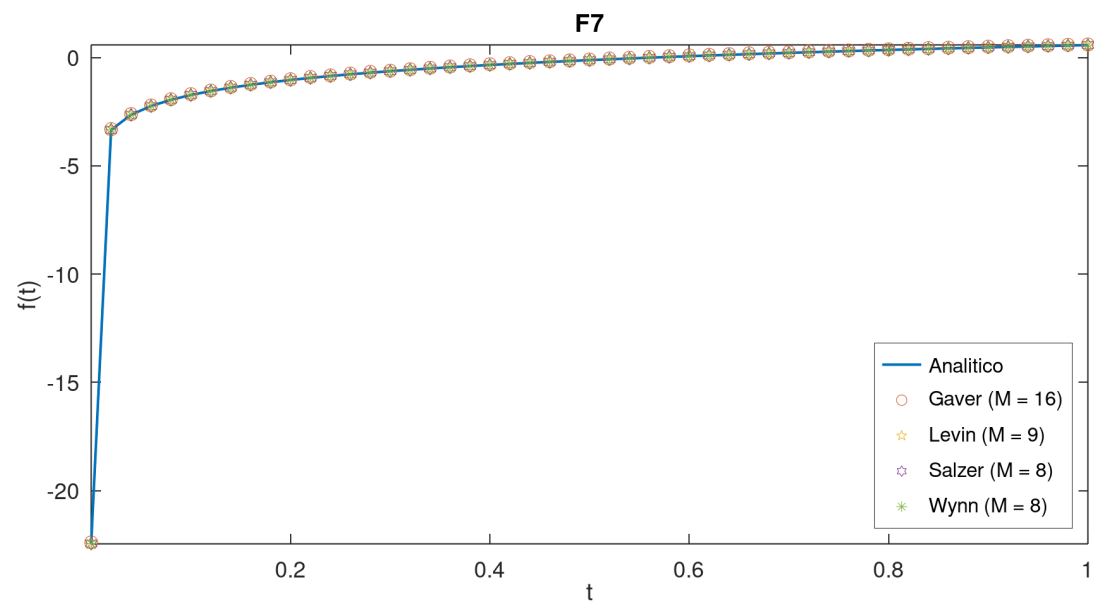


Tabela 4.45: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_7 .

M	Gaver	Levin	Salzer	Wynn-Rho
1	$4,82444436241 \times 10^{-1}$	$4,82444436241 \times 10^{-1}$	$4,82444436241 \times 10^{-1}$	-
2	$2,60429398307 \times 10^{-1}$	$5,50608379746 \times 10^{-1}$	$3,84143603727 \times 10^{-2}$	$4,54730505656 \times 10^{-1}$
3	$1,78127577367 \times 10^{-1}$	$1,07186020230 \times 10^0$	$1,07872304567 \times 10^{-3}$	-
4	$1,35302868728 \times 10^{-1}$	$1,88611574040 \times 10^{-1}$	$1,81507504238 \times 10^{-4}$	$2,02644278427 \times 10^{-4}$
5	$1,09063439819 \times 10^{-1}$	$4,88233835899 \times 10^{-2}$	$2,17560521532 \times 10^{-5}$	-
6	$9,13424218702 \times 10^{-2}$	$9,38072664351 \times 10^{-3}$	$3,94559275392 \times 10^{-7}$	$1,82720940769 \times 10^{-6}$
7	$7,85726789142 \times 10^{-2}$	$1,45382813105 \times 10^{-3}$	$2,89518799571 \times 10^{-7}$	-
8	$6,89341787678 \times 10^{-2}$	$2,09236353595 \times 10^{-4}$	$1,25657820468 \times 10^{-7}$	$1,54008276588 \times 10^{-7}$
9	$6,14013169460 \times 10^{-2}$	$3,76996991230 \times 10^{-5}$	$2,37303738362 \times 10^{-6}$	-
10	$5,53521994050 \times 10^{-2}$	$4,70799743890 \times 10^{-4}$	$4,76169449436 \times 10^{-5}$	$7,81438325799 \times 10^{-7}$
11	$5,03878325173 \times 10^{-2}$	$1,14887795046 \times 10^{-2}$	$1,01349612755 \times 10^{-3}$	-
12	$4,62406988711 \times 10^{-2}$	$8,88147942062 \times 10^{-2}$	$1,94940484958 \times 10^{-2}$	$3,44188021068 \times 10^{-6}$
13	$4,27239554429 \times 10^{-2}$	$4,62589001397 \times 10^{-2}$	$4,34154920039 \times 10^{-1}$	-
14	$3,97099921073 \times 10^{-2}$	$4,42696204149 \times 10^{-2}$	$1,05695285968 \times 10^1$	$7,84633517136 \times 10^{-6}$
15	$3,71098978421 \times 10^{-2}$	$4,15609311260 \times 10^{-2}$	-	-
16	$3,46112392016 \times 10^{-2}$	$3,78495443774 \times 10^{-2}$	-	$2,82791819286 \times 10^{-5}$
17	$4,39703047434 \times 10^{-2}$	$3,84723508882 \times 10^{-2}$	-	-
18	$2,44908551979 \times 10^{-1}$	$3,78515886516 \times 10^{-2}$	-	-
19	$1,50408438574 \times 10^0$	$3,97627061110 \times 10^{-2}$	-	-
20	$1,03389372596 \times 10^1$	$3,97787654274 \times 10^{-2}$	-	-
21	$7,39597594544 \times 10^1$	$3,63712257150 \times 10^{-2}$	-	-
22	$5,33191555675 \times 10^2$	$4,89965530968 \times 10^{-2}$	-	-
23	$5,89725510201 \times 10^3$	$6,48954192446 \times 10^{-2}$	-	-
24	$6,11016938865 \times 10^4$	$9,47924648378 \times 10^{-2}$	-	-
25	$3,05896082183 \times 10^5$	$3,89362829878 \times 10^1$	-	-
26	$2,61098207649 \times 10^6$	$6,91117858041 \times 10^{-1}$	-	-
27	$1,57793166636 \times 10^7$	$1,31837871357 \times 10^0$	-	-
28	$3,69093271290 \times 10^8$	$3,36378421762 \times 10^0$	-	-
29	-	$2,46163891470 \times 10^2$	-	-
30	-	$8,29730656590 \times 10^0$	-	-
31	-	$1,24818701557 \times 10^1$	-	-
32	-	$3,71104755066 \times 10^1$	-	-
33	-	$7,90353810846 \times 10^1$	-	-
34	-	$4,42367727372 \times 10^2$	-	-
35	-	$1,01399200539 \times 10^4$	-	-
36	-	$1,00519719689 \times 10^4$	-	-
37	-	$2,98423807250 \times 10^5$	-	-
38	-	$1,48399996535 \times 10^5$	-	-
39	-	$3,76947545826 \times 10^5$	-	-
40	-	$1,13152068619 \times 10^6$	-	-

Fonte: do autor

4.8 Inversão de F_8

A Tabela 4.47 e a Figura 4.35 apresentam os resultados para a inversão numérica da Transformada de Laplace da função $F_8(s) = \ln\left(1 + \frac{1}{s}\right)$, cuja inversa analítica é $f_8(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t}$, para os Funcionais de Gaver, Transformada u de Levin, Soma de Salzer e Algoritmo Wynn-Rho.

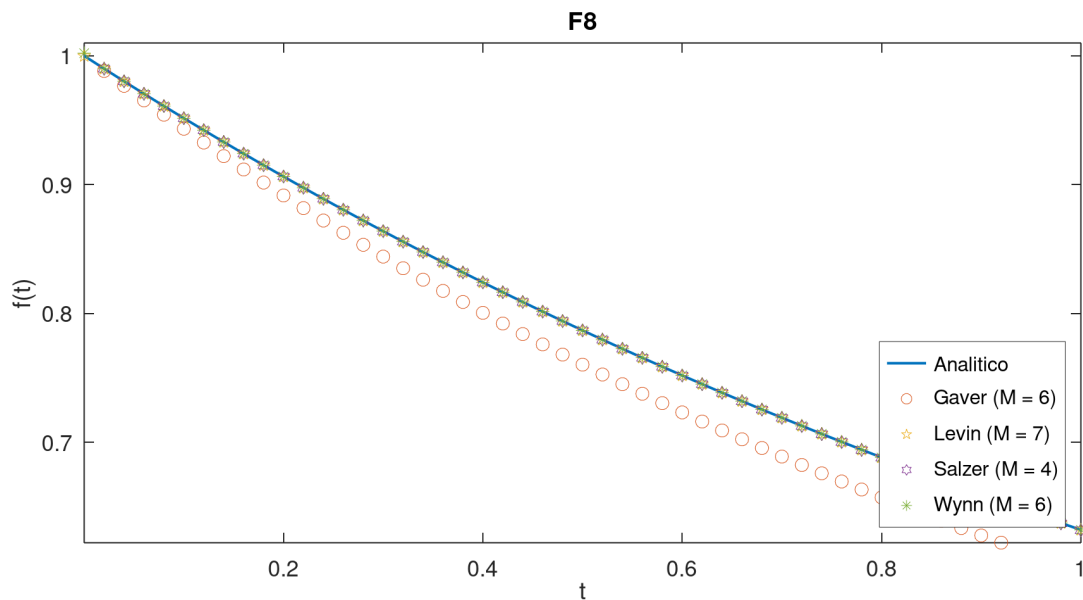
Os valores de M ótimos são dados pela Tabela 4.46. Para esta função, o algoritmo com melhor desempenho foi a Transformada u de Levin, com Erro Absoluto Médio da ordem de 10^{-6} . Esta foi a única função onde esta técnica se saiu melhor do que a Soma de Salzer e o Algoritmo Wynn-Rho, este que obteve um erro na ordem de 10^{-5} .

Tabela 4.46: M ótimos e ordem do $\overline{E}_{abs}$ para a inversão de F_8 .

	M ótimo	Ordem do $\overline{E}_{abs}$
Funcionais de Gaver	6	10^{-2}
Transformada u de Levin	7	10^{-6}
Soma de Salzer	4	10^{-4}
Algoritmo Wynn-Rho	6	10^{-5}

Fonte: do autor

Figura 4.35: Resultados para a inversão de F_8



Fonte: do autor

Tabela 4.47: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_8 .

M	Gaver	Levin	Salzer	Wynn-Rho
1	$1,15272246175 \times 10^{-1}$	$1,15272246175 \times 10^{-1}$	$1,15272246175 \times 10^{-1}$	-
2	$6,38085351162 \times 10^{-2}$	$5,14898142009 \times 10^{-2}$	$1,23858411894 \times 10^{-2}$	$2,04545662717 \times 10^{-3}$
3	$4,41423945466 \times 10^{-2}$	$2,54517155792 \times 10^{-3}$	$1,09641910807 \times 10^{-3}$	-
4	$3,37741678397 \times 10^{-2}$	$7,71522304026 \times 10^{-4}$	$4,52595463526 \times 10^{-4}$	$9,42001042735 \times 10^{-5}$
5	$2,76054058370 \times 10^{-2}$	$2,11803867397 \times 10^{-4}$	$8,93524693352 \times 10^{-3}$	-
6	$2,45833700937 \times 10^{-2}$	$3,94268267201 \times 10^{-5}$	$1,46837466317 \times 10^{-1}$	$4,11897909735 \times 10^{-5}$
7	$3,06205865275 \times 10^{-2}$	$7,15578367363 \times 10^{-6}$	$1,03561667498 \times 10^0$	-
8	$1,33310792986 \times 10^{-1}$	$1,58552556024 \times 10^{-5}$	$5,85654215286 \times 10^1$	$5,68627152014 \times 10^{-4}$
9	$3,52441099784 \times 10^{-1}$	$2,26892262895 \times 10^{-4}$	$7,85012877209 \times 10^2$	-
10	$3,37897643258 \times 10^0$	$3,23733873336 \times 10^{-3}$	$1,41495055293 \times 10^4$	$4,20209371565 \times 10^{-4}$
11	$5,12777971083 \times 10^1$	$2,72609247563 \times 10^{-2}$	$4,78010539046 \times 10^5$	-
12	$1,87074486788 \times 10^2$	$1,41590144489 \times 10^{-2}$	$8,02847960421 \times 10^6$	$8,37709306066 \times 10^{-3}$
13	$4,65190181065 \times 10^2$	$1,61375168592 \times 10^{-2}$	$4,29839066354 \times 10^7$	-
14	$1,55935080194 \times 10^3$	$1,42437585645 \times 10^{-1}$	$2,40669078055 \times 10^8$	$2,80822456854 \times 10^{-1}$
15	$8,63679053117 \times 10^3$	$2,87986370723 \times 10^{-1}$	-	-
16	$1,17254474331 \times 10^6$	$7,53688067491 \times 10^{-1}$	-	$7,34145748983 \times 10^0$
17	$1,89052160870 \times 10^7$	$1,50443724129 \times 10^0$	-	-
18	$1,51889210441 \times 10^8$	$1,51390934833 \times 10^0$	-	-
19	$7,78641790131 \times 10^8$	$4,03018233765 \times 10^0$	-	-
20	$2,59799146849 \times 10^9$	$2,99763677524 \times 10^1$	-	-
21	$6,70981021048 \times 10^8$	$1,14364827805 \times 10^2$	-	-
22	$9,46050145901 \times 10^{10}$	$3,69586592788 \times 10^2$	-	-
23	$1,29838916753 \times 10^{12}$	$1,39110192738 \times 10^3$	-	-
24	$1,54902545986 \times 10^{13}$	$6,20040648466 \times 10^3$	-	-
25	$1,61130691243 \times 10^{14}$	$2,53992353421 \times 10^4$	-	-
26	$9,84854433738 \times 10^{14}$	$8,87627176054 \times 10^4$	-	-
27	$3,44438420532 \times 10^{15}$	$2,72855395287 \times 10^5$	-	-
28	$1,70015244794 \times 10^{17}$	$7,58414275090 \times 10^5$	-	-
29	-	$1,89227025813 \times 10^6$	-	-
30	-	$3,86849719867 \times 10^6$	-	-
31	-	$3,44189710773 \times 10^6$	-	-
32	-	$2,63497709677 \times 10^7$	-	-
33	-	$2,42477159732 \times 10^8$	-	-
34	-	$1,45449193975 \times 10^9$	-	-
35	-	$7,72992313492 \times 10^9$	-	-
36	-	$4,13150016406 \times 10^{10}$	-	-
37	-	$2,78789727133 \times 10^{11}$	-	-
38	-	$6,74540530318 \times 10^{12}$	-	-
39	-	$1,81429723712 \times 10^{12}$	-	-
40	-	$2,50998396248 \times 10^{12}$	-	-

Fonte: do autor

4.9 Análise dos Resultados

Os algoritmos, com exceção do Algoritmo Wynn-Rho, têm um tempo de execução muito baixo. A exemplo disso, para qualquer uma das funções elementares testadas, usando 51 valores de t , o tempo máximo de execução foi menor que 9 segundos para um computador com as especificações descritas no início do Capítulo 4, exceto para o Algoritmo Wynn-Rho.

A variação dos parâmetros a e b não acarretou mudança nos tempos de execução, por outro lado, os fatores M alteram, de forma muito relevante, o tempo. Quando maior o M , maior o tempo de execução.

Os resultados obtidos validam os algoritmos implementados, evidenciando o fato de que os Funcionais de Gaver podem ser usados como aproximação para a Transformada Inversa de Laplace, e que os aceleradores estudados de fato aceleram a convergência dos funcionais e que o Erro Absoluto Médio diminui, como pode-se ver nas Tabelas 4.48 e 4.49.

Também comprovou-se que os métodos estudados divergem para funções oscilatórias com frequências altas. Pode-se ver na análise do processo de inversão de F_2 e de F_3 que, a medida que o parâmetro a aumenta, o que acarreta em um aumento da frequência, menor é a precisão (medida pelo Erro Absoluto Médio) dos métodos. Isso também ocorre para F_6 , quando altera-se o parâmetro a .

Tabela 4.48: Comparações dos M ótimos para F_6 .

	$b = -3$	$b = -1$	$b = 1$	$b = 2$
$F_6, a = 1, \text{Gaver}$	18 $[10^{-3}]$	18 $[10^{-3}]$	19 $[10^{-1}]$	19 $[10^{-1}]$
$F_6, a = 1, \text{Levin}$	9 $[10^{-4}]$	11 $[10^{-3}]$	20 $[10^{-1}]$	24 $[10^{-1}]$
$F_6, a = 1, \text{Salzer}$	9 $[10^{-7}]$	9 $[10^{-8}]$	11 $[10^{-5}]$	13 $[10^{-2}]$
$F_6, a = 1, \text{Wynn}$	8 $[10^{-8}]$	8 $[10^{-7}]$	10 $[10^{-6}]$	12 $[10^{-5}]$
$F_6, a = 3, \text{Gaver}$	18 $[10^{-3}]$	18 $[10^{-2}]$	18 $[10^{-1}]$	20 $[10^{-1}]$
$F_6, a = 3, \text{Levin}$	11 $[10^{-3}]$	10 $[10^{-3}]$	24 $[10^{-1}]$	23 $[10^{-1}]$
$F_6, a = 3, \text{Salzer}$	10 $[10^{-6}]$	10 $[10^{-5}]$	12 $[10^{-3}]$	13 $[10^{-2}]$
$F_6, a = 3, \text{Wynn}$	8 $[10^{-6}]$	12 $[10^{-5}]$	10 $[10^{-4}]$	10 $[10^{-2}]$
$F_6, a = 5, \text{Gaver}$	17 $[10^{-2}]$	19 $[10^{-2}]$	19 $[10^{-1}]$	19 $[10^{-1}]$
$F_6, a = 5, \text{Levin}$	11 $[10^{-3}]$	11 $[10^{-2}]$	23 $[10^{-1}]$	24 $[10^{-1}]$
$F_6, a = 5, \text{Salzer}$	11 $[10^{-5}]$	11 $[10^{-4}]$	12 $[10^{-2}]$	13 $[10^{-1}]$
$F_6, a = 5, \text{Wynn}$	10 $[10^{-4}]$	10 $[10^{-4}]$	12 $[10^{-3}]$	14 $[10^{-2}]$
$F_6, a = 10, \text{Gaver}$	17 $[10^{-2}]$	18 $[10^{-1}]$	19 $[10^{-1}]$	19 $[10^0]$
$F_6, a = 10, \text{Levin}$	11 $[10^{-2}]$	23 $[10^{-1}]$	27 $[10^{-1}]$	27 $[10^0]$
$F_6, a = 10, \text{Salzer}$	12 $[10^{-3}]$	12 $[10^{-2}]$	13 $[10^{-1}]$	13 $[10^{-1}]$
$F_6, a = 10, \text{Wynn}$	10 $[10^{-3}]$	10 $[10^{-2}]$	18 $[10^{-1}]$	8 $[10^0]$

Para F_5 , o aumento dos valores dos parâmetros livres, ocasiona uma melhora no Erro Absoluto Médio, o que não ocorreu para F_1 , função que também possui comportamento exponencial. Já, para F_6 , o aumento do valor do parâmetro livre b causa um aumento no Erro Absoluto Médio, com exceção de quando $b = -1$ e $a = 1$, para a Soma de Salzer.

Quanto aos M ótimos, para os Funcionais de Gaver, com exceção de F_8 , onde $M = 6$,

os valores ficaram entre 15 e 22. Para a Transformada u de Levin, entre 7 e 28. Para a Soma de Salzer, exceto F_8 , onde $M = 4$, entre 8 e 13. E para o Algoritmo Wynn-Rho, salvo F_6 quando $a = 10$ e $b = 1$ e F_8 , onde $M = 18$ e $M = 6$ respectivamente, os M ótimos ficaram entre 8 e 16.

Tabela 4.49: Comparações dos M ótimos.

	$b = 1$	$b = 3$	$b = 10$	$b = 15$
F_1 Gaver	16 $[10^{-2}]$	16 $[10^{-3}]$	16 $[10^{-3}]$	15 $[10^{-3}]$
F_1 Levin	7 $[10^{-8}]$	8 $[10^{-3}]$	8 $[10^{-3}]$	8 $[10^{-3}]$
F_1 Salzer	8 $[10^{-8}]$	9 $[10^{-6}]$	9 $[10^{-6}]$	9 $[10^{-6}]$
F_1 Wynn	8 $[10^{-8}]$	8 $[10^{-8}]$	8 $[10^{-7}]$	10 $[10^{-6}]$
	$a = 1$	$a = 3$	$a = 10$	$a = 15$
F_2 Gaver	17 $[10^{-2}]$	18 $[10^{-2}]$	19 $[10^{-1}]$	18 $[10^{-1}]$
F_2 Levin	21 $[10^{-2}]$	9 $[10^{-2}]$	12 $[10^{-2}]$	24 $[10^{-1}]$
F_2 Salzer	9 $[10^{-7}]$	11 $[10^{-4}]$	12 $[10^{-3}]$	12 $[10^{-2}]$
F_2 Wynn	8 $[10^{-7}]$	10 $[10^{-5}]$	10 $[10^{-4}]$	16 $[10^{-1}]$
F_3 Gaver	18 $[10^{-2}]$	19 $[10^{-2}]$	19 $[10^{-1}]$	19 $[10^{-1}]$
F_3 Levin	11 $[10^{-3}]$	24 $[10^{-2}]$	28 $[10^{-1}]$	20 $[10^{-1}]$
F_3 Salzer	10 $[10^{-6}]$	11 $[10^{-4}]$	12 $[10^{-3}]$	13 $[10^{-2}]$
F_3 Wynn	10 $[10^{-6}]$	10 $[10^{-5}]$	12 $[10^{-3}]$	14 $[10^{-1}]$
	$b = 1$	$b = 1,5$	$b = 2,5$	$b = 3,5$
F_5 Gaver	16 $[10^{-2}]$	18 $[10^{-2}]$	18 $[10^{-3}]$	22 $[10^{-3}]$
F_5 Levin	9 $[10^{-4}]$	9 $[10^{-4}]$	11 $[10^{-4}]$	11 $[10^{-5}]$
F_5 Salzer	10 $[10^{-5}]$	10 $[10^{-6}]$	10 $[10^{-6}]$	11 $[10^{-7}]$
F_5 Wynn	12 $[10^{-5}]$	12 $[10^{-5}]$	12 $[10^{-6}]$	16 $[10^{-7}]$
Sem parâmetro				
F_4 Gaver	18 $[10^{-3}]$			
F_4 Levin	11 $[10^{-4}]$			
F_4 Salzer	9 $[10^{-8}]$			
F_4 Wynn	8 $[10^{-9}]$			
F_7 Gaver	16 $[10^{-2}]$			
F_7 Levin	9 $[10^{-5}]$			
F_7 Salzer	8 $[10^{-7}]$			
F_7 Wynn	8 $[10^{-7}]$			
F_8 Gaver	6 $[10^{-2}]$			
F_8 Levin	7 $[10^{-6}]$			
F_8 Salzer	4 $[10^{-4}]$			
F_8 Wynn	6 $[10^{-5}]$			

É importante fazer um destaque sobre os tempos de execução do Algoritmo Wynn-Rho em comparação aos demais métodos. Por ser um método recursivo, demanda um tempo de execução substancialmente maior que os demais métodos. A exemplo, para cada aproximação feita para a função F_6 , o método levou em torno de 380.000 s (um pouco mais de 4 dias, quando $M = 18$) e 2.453.362 s (um pouco mais de 28 dias, quando $M = 20$) para fornecer um perfil de resultados com 51 valores de t . Como outro exemplo, tem-se a Tabela 4.50, gerada a partir das simulações feitas para F_4 , onde pode-se notar que os dois métodos recursivos demoram

muito mais para gerar resultados à medida que M cresce, o que pode indicar um problema do Octave em lidar com algoritmos recursivos. Este autor não encontrou referências sobre esta característica do Octave na literatura. A Tabela 4.50 é interessante por dar uma percepção sobre o tempo de execução dos métodos.

O Algoritmo Gaver-Recurso, que aparece na Tabela 4.50, é a implementação dos Funcionais de Gaver utilizando a definição recursiva dada pela equação (3.9). É importante ressaltar que esta implementação não foi a usada nos resultados apresentados nas subseções anteriores. A definição recursiva não foi utilizada por conta dos tempos de execução elevados, fato que é atestado pela Tabela 4.50.

Tabela 4.50: Tempos de Execução (s) para F_4

M	Gaver	Gaver Recursivo	Levin	Salzer	Wynn-Rho
1	0,01	0,00	0,06	0,03	-
2	0,02	0,01	0,11	0,07	0,13
3	0,02	0,01	0,19	0,11	-
4	0,02	0,02	0,25	0,15	0,90
5	0,03	0,04	0,34	0,20	-
6	0,03	0,08	0,42	0,25	5,84
7	0,04	0,15	0,52	0,31	-
8	0,04	0,29	0,63	0,37	37,93
9	0,05	0,59	0,74	0,43	-
10	0,05	1,18	0,86	0,50	243,60
11	0,06	2,39	1,03	0,57	-
12	0,06	4,83	1,13	0,65	1551,53
13	0,06	9,60	1,28	0,75	-
14	0,07	18,95	1,43	0,83	9808,62
15	0,09	36,73	1,60	-	-
16	0,08	73,94	1,76	-	61728,80
17	0,08	147,71	1,94	-	-
18	0,08	295,24	2,13	-	-
19	0,09	589,98	2,32	-	-
20	0,09	1186,39	2,52	-	-
21	0,09	2367,56	2,73	-	-
22	0,10	4742,71	2,95	-	-
23	0,10	9464,81	3,20	-	-
24	0,11	18904,66	3,41	-	-
25	0,11	37857,44	3,64	-	-
26	0,11	75647,85	3,91	-	-
27	0,12	152289,19	4,16	-	-
28	0,12	306933,81	4,41	-	-

Fonte: do autor

5 RESULTADOS PARA A INVERSÃO DE FUNÇÕES COM CARACTERÍSTICAS ESPECIAIS

Nesta seção, os algoritmos estudados serão aplicados a um conjunto de funções, cuja a transformada inversa é de difícil obtenção. Estas funções, apresentadas na Tabela 5.1, são baseadas nas funções apresentadas no trabalho de Abate e Valkó (2004). Segundo os autores, tais funções representam soluções de problemas na engenharia.

Tabela 5.1: Transformada de Laplace para funções com características especiais

$F(s)$
$F_9(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2 - \frac{s}{2}\sqrt{s^2 - 1}}}$
$F_{10}(s) = \frac{\sqrt{s+1}}{2\sqrt{s}\sqrt{1 + \frac{2s}{5}}}$
$F_{11}(s) = \frac{1}{s}e^{-sF_{10}(s)}$
Fonte: Abate e Valkó (2004).

Para obter os Erros Absolutos Médios associados aos correspondentes valores de M (como pode ser visto na Tabela 5.2), os resultados usados como referência são gerados pelo algoritmo Stehfest, com o seu respectivo parâmetro $N = 18$, encontrados no trabalho de Freitas (2022). A escolha do método Stehfest deve-se ao fato de não só ser um algoritmo muito utilizado na literatura, mas também por ser baseado nos Funcionais de Gaver. É importante destacar que a análise dos tempos de execução não é feita neste capítulo, porque os tempos seguem o mesmo padrão do conjunto de funções elementares. As simulações foram feitas utilizando 11 pontos, com $t \in [10^{-3}, 1]$.

5.1 Inversão de F_9

As Tabelas 5.3 – 5.6 e as Figuras 5.1 – 5.4 apresentam os resultados para a inversão numérica da Transformada de Laplace da função $F_9(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2 - \frac{s}{2}\sqrt{s^2 - 1}}}$ para os Funcionais de Gaver, Transformada u de Levin, Soma de Salzer e Algoritmo Wynn-Rho.

Tabela 5.2: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_9 em relação ao Método Stehfest.

Funcionais Gaver		Transformada u de Levin	
$M = 14$	$1,45898853064 \times 10^{-2}$	$M = 8$	$1,33013120727 \times 10^{-3}$
$M = 15$	$1,37540075778 \times 10^{-2}$	$M = 9$	$4,60331610138 \times 10^{-4}$
$M = 16$	$1,23187407121 \times 10^{-2}$	$M = 10$	$2,27577598609 \times 10^{-4}$
$M = 17$	$1,60331495031 \times 10^{-2}$	$M = 11$	$6,19900163627 \times 10^{-3}$
$M = 18$	$1,03497322348 \times 10^{-1}$	$M = 12$	$2,33968167583 \times 10^{-2}$
Soma de Salzer		Algoritmo Wynn-Rho	
$M = 7$	$2,58677495137 \times 10^{-4}$	$M = 2$	$4,86514021613 \times 10^{-3}$
$M = 8$	$5,78345934122 \times 10^{-5}$	$M = 4$	$6,05617836524 \times 10^{-6}$
$M = 9$	$6,48827136412 \times 10^{-6}$	$M = 6$	$1,11097369738 \times 10^{-5}$
$M = 10$	$1,77948242925 \times 10^{-5}$	$M = 8$	$1,12042246537 \times 10^{-5}$
$M = 11$	$3,96637477637 \times 10^{-4}$	$M = 10$	$1,13429498448 \times 10^{-5}$

Fonte: do autor.

Em relação ao Método Stehfest, os Funcionais de Gaver mantiveram mesma ordem do Erro Absoluto Médio independente do M utilizado. A Transformada u de Levin apresentou erros com duas ordens de grandeza menores em relação aos Funcionais de Gaver. Já a Soma de Salzer (para $M = 9$) e o Wynn-Rho (para $M = 4$) apresentaram erros da ordem de 10^{-6} .

Tabela 5.3: Resultados para a inversão de F_9 por meio dos Funcionais de Gaver.

t	$M = 14$	$M = 15$	$M = 16$	$M = 17$	$M = 18$
0,001	1,41422774807	1,41403095262	1,41564621064	1,40533986486	1,36276127168
0,100	1,41204918250	1,41193751252	1,41201001416	1,41807744505	1,40255234021
0,200	1,40549117965	1,40539298996	1,40485010284	1,41259892556	1,38635571022
0,300	1,39447456770	1,39460447302	1,39567437349	1,39455137373	1,39111360941
0,400	1,37923270931	1,37936677523	1,37932967436	1,38798207949	1,30865666955
0,500	1,35951549935	1,36012185324	1,36327422181	1,33087105385	1,59907367689
0,600	1,33564570191	1,33667453559	1,33767171587	1,34148120739	1,17709915285
0,700	1,30747047657	1,30867129105	1,31153390445	1,30665828054	1,50306365041
0,800	1,27511827919	1,27697448476	1,27880239392	1,28305209337	1,23574138978
0,900	1,23861859547	1,24080314229	1,24083939192	1,27310648560	1,16501813512
1,000	1,19804281805	1,20046790637	1,20807426997	1,17824641742	1,46013149734

Fonte: do autor

Tabela 5.4: Resultados para a inversão de F_9 por meio da Transformada u de Levin.

t	$M = 8$	$M = 9$	$M = 10$	$M = 11$	$M = 12$
0,001	1,41421338303	1,41421330828	1,41421331163	1,41421330644	1,41421331763
0,100	1,41244606499	1,41245239797	1,41227180361	1,41169400814	1,41186746638
0,200	1,40714538715	1,40715227886	1,40705755056	1,40702171477	1,40489665024
0,300	1,39832046769	1,39831481996	1,39810054475	1,43368900247	1,39341610266
0,400	1,38598566718	1,38597778422	1,38582726031	1,38755929089	1,37607336610
0,500	1,37018343550	1,37011306180	1,37003332660	1,38257791098	1,35716422831
0,600	1,35105473084	1,35074760062	1,35075526746	1,34897204777	1,32830521312
0,700	1,33006252988	1,32749607323	1,32841143381	1,32436544620	1,29343608916
0,800	1,30281519071	1,30165130338	1,30165831331	1,30212728902	1,23311389188
0,900	1,27011142685	1,27308669965	1,27184350527	1,27697361677	1,24295524001
1,000	1,23014398685	1,24268403771	1,23845381999	1,23191818170	1,16754008543

Fonte: do autor

Tabela 5.5: Resultados para a inversão de F_9 por meio da Soma de Salzer.

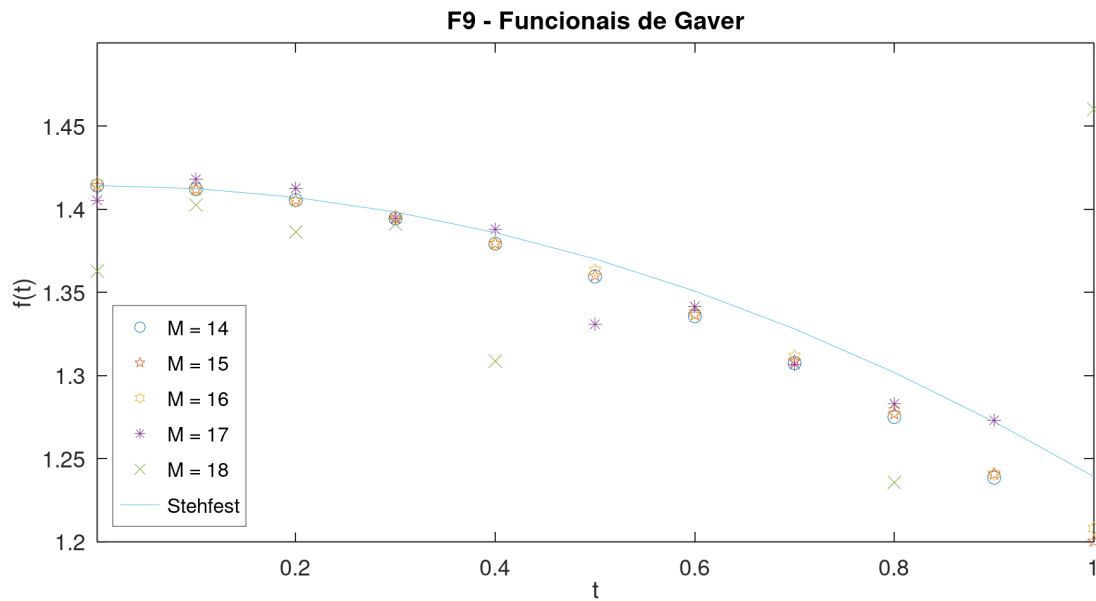
t	$M = 7$	$M = 8$	$M = 9$	$M = 10$	$M = 11$
0,001	1,41421338300	1,41421338254	1,41421245453	1,41422323880	1,41421584250
0,100	1,41244598323	1,41244599481	1,41244703544	1,41241441071	1,41294842282
0,200	1,40714546211	1,40714540633	1,40714652405	1,40713384619	1,40711506168
0,300	1,39831858959	1,39831863676	1,39831808200	1,39828614524	1,39889238670
0,400	1,38597624746	1,38597625216	1,38597679057	1,38595558202	1,38612296716
0,500	1,37013288317	1,37013394458	1,37013213285	1,37011752500	1,37096531121
0,600	1,35080137067	1,35081157094	1,35080917746	1,35079986658	1,35055091221
0,700	1,32786796782	1,32805131649	1,32802572576	1,32806408438	1,32756357428
0,800	1,30197757515	1,30178993767	1,30182463853	1,30179583904	1,30182926921
0,900	1,27292631364	1,27208335279	1,27222704095	1,27219820978	1,27271775943
1,000	1,24107279143	1,23888976010	1,23928793285	1,23927015555	1,23823939860

Fonte: do autor

Tabela 5.6: Resultados para a inversão de F_9 por meio do Algoritmo Wynn-Rho.

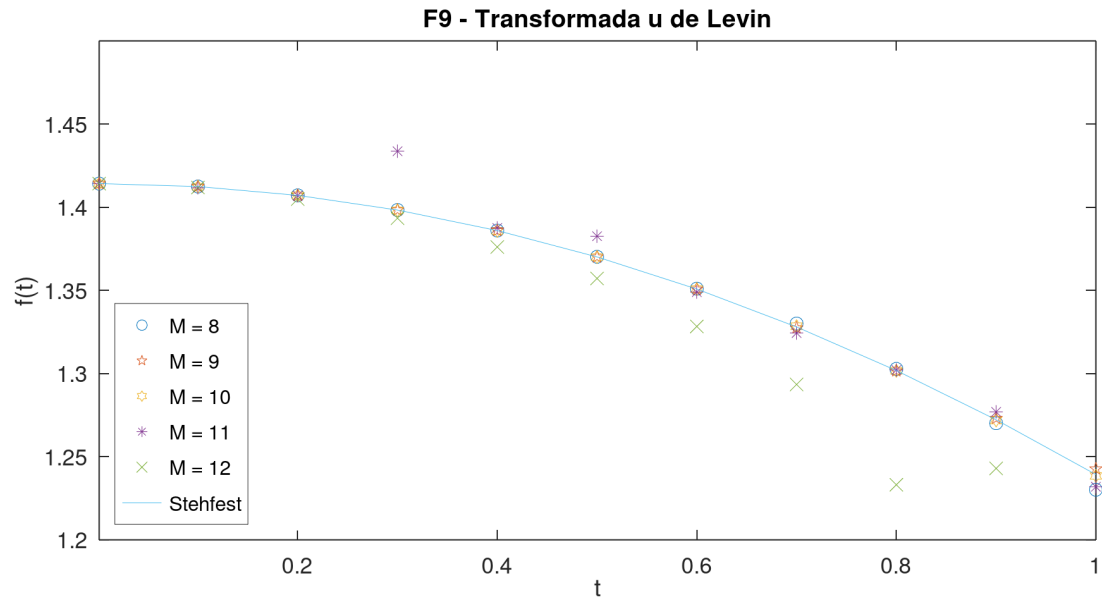
t	$M = 2$	$M = 4$	$M = 6$	$M = 8$	$M = 10$
0,001	1,41421338463	1,41421338600	1,41421338462	1,41421338697	1,41421338101
0,100	1,41243662134	1,41244605559	1,41244599347	1,41244585889	1,41244639028
0,200	1,40711260519	1,40714580617	1,40714540231	1,40714538601	1,40714565102
0,300	1,39827402977	1,39832080866	1,39831863740	1,39831870108	1,39831864717
0,400	1,38602020419	1,38597118481	1,38597628186	1,38597624768	1,38597626170
0,500	1,37060308894	1,37012836097	1,37013390712	1,37013431810	1,37013436500
0,600	1,35262496111	1,35080148785	1,35081067967	1,35081106710	1,35081106525
0,700	1,33491037551	1,32802288097	1,32803017345	1,32803030276	1,32803055741
0,800	1,31205455199	1,30181216667	1,30181808035	1,30181808885	1,30181828422
0,900	1,28677940341	1,27220784082	1,27220704143	1,27220720772	1,27220674362
1,000	1,25867382890	1,23926334557	1,23922985622	1,23922932337	1,23922922422

Fonte: do autor

Figura 5.1: Resultados para a inversão de F_9 , utilizando os Funcionais de Gaver

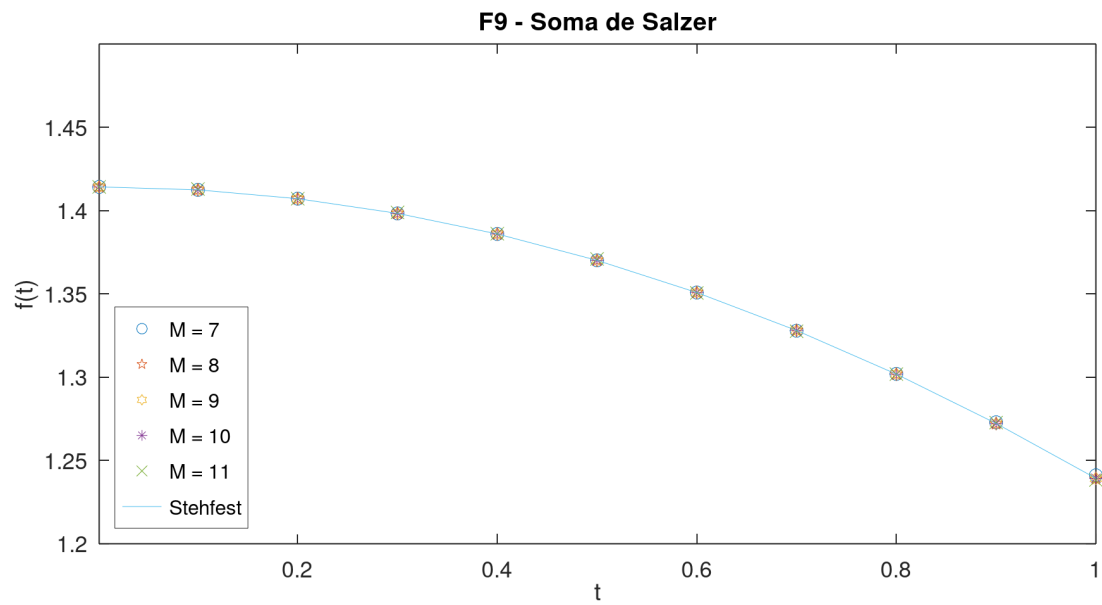
Fonte: do autor

Figura 5.2: Resultados para a inversão de F_9 , utilizando a Transformada u de Levin

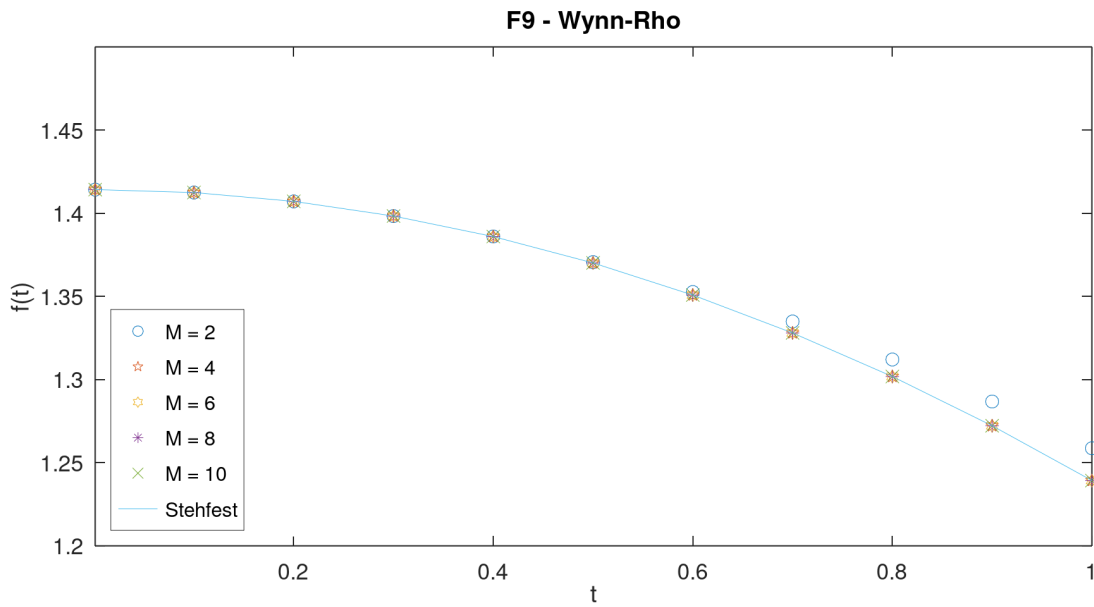


Fonte: do autor

Figura 5.3: Resultados para a inversão de F_9 , utilizando a Soma de Salzer



Fonte: do autor

Figura 5.4: Resultados para a inversão de F_9 , utilizando o Algoritmo Wynn-Rho

Fonte: do autor

5.2 Inversão de F_{10}

As Tabelas 5.8 – 5.11 e as Figuras 5.5 – 5.8 apresentam os resultados para a inversão numérica da Transformada de Laplace da função $F_{10}(s) = \frac{\sqrt{s+1}}{2\sqrt{s}\sqrt{1+\frac{2s}{5}}}$ para os Funcionais de Gaver, Transformada u de Levin, Soma de Salzer e Algoritmo Wynn-Rho.

Tabela 5.7: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_{10} em relação ao Método Stehfest.

Funcionais Gaver		Transformada u de Levin	
$M = 14$	$1,79268708937 \times 10^{-2}$	$M = 6$	$4,70735695851 \times 10^{-4}$
$M = 15$	$1,69584777025 \times 10^{-2}$	$M = 7$	$3,94540142525 \times 10^{-4}$
$M = 16$	$9,91347835117 \times 10^{-3}$	$M = 8$	$3,75767068337 \times 10^{-4}$
$M = 17$	$5,81790726661 \times 10^{-2}$	$M = 9$	$3,98993033038 \times 10^{-4}$
$M = 18$	$5,23092251976 \times 10^{-1}$	$M = 10$	$7,77178975904 \times 10^{-4}$
Soma de Salzer		Algoritmo Wynn-Rho	
$M = 7$	$1,53210664204 \times 10^{-5}$	$M = 8$	$1,35588235464 \times 10^{-5}$
$M = 8$	$1,53296672412 \times 10^{-5}$	$M = 10$	$1,34485688791 \times 10^{-5}$
$M = 9$	$9,55539804825 \times 10^{-6}$	$M = 12$	$1,29600870996 \times 10^{-5}$
$M = 10$	$6,78410118971 \times 10^{-5}$	$M = 14$	$2,13636532841 \times 10^{-5}$
$M = 11$	$1,67149037433 \times 10^{-3}$	$M = 16$	$3,59698299645 \times 10^{-5}$

Fonte: do autor.

Na Tabela 5.7, os Funcionais de Gaver, e a Transformada u de Levin, apresentaram ordens de erro ligeiramente menores em relação a F_9 (Tabela 5.2). Para a Soma de Salzer,

$M = 9$ fornece as menores ordens de erro entre os quatro métodos para F_{10} . O método Wynn-Rho fornece resultados com mesma ordem de erro para os cinco valores de M testados.

Tabela 5.8: Resultados para a inversão de F_{10} por meio dos Funcionais de Gaver.

t	$M = 14$	$M = 15$	$M = 16$	$M = 17$	$M = 18$
0,001	13,93108767742	13,93952123272	14,03700756414	13,79067619554	16,11108994694
0,100	1,20882370757	1,20975406326	1,20169991305	1,37471008576	-0,12808026300
0,200	0,75871303551	0,75943012214	0,75681692567	0,76693930371	0,13822328960
0,300	0,56254542766	0,56341755686	0,56144784626	0,58750590460	0,62881003288
0,400	0,45171545555	0,45181894310	0,45083983748	0,43504930471	0,64159160822
0,500	0,38138996836	0,38090900352	0,38458863699	0,35653260389	1,00368037284
0,600	0,33339698002	0,33347821619	0,33450625869	0,31359296822	0,27187396767
0,700	0,29949888183	0,29859688285	0,30044182867	0,30691103025	0,08468198190
0,800	0,27430294414	0,27362313309	0,27507783639	0,28499654340	0,19400993586
0,900	0,25486803580	0,25555878377	0,25072591845	0,30046190598	0,03937439293
1,000	0,23985697016	0,23981635851	0,24282670618	0,19451229459	0,54304711584

Fonte: do autor

Tabela 5.9: Resultados para a inversão de F_{10} por meio da Transformada u de Levin.

t	$M = 8$	$M = 9$	$M = 10$	$M = 11$	$M = 12$
0,001	14,08268920054	14,08374869830	14,08361561806	14,08321980314	14,08309377266
0,100	1,22631206272	1,22642326464	1,22641391459	1,22633281424	1,22546751010
0,200	0,76971450949	0,76980121237	0,76978765324	0,76976773988	0,77025896199
0,300	0,56944169448	0,56949232211	0,56948708775	0,56947004352	0,56814789956
0,400	0,45559540047	0,45562606616	0,45562409717	0,45566487547	0,45445712053
0,500	0,38309902212	0,38315402129	0,38316800811	0,38319223838	0,38292967258
0,600	0,33390943545	0,33393621511	0,33395195171	0,33395644276	0,33403741262
0,700	0,29940997789	0,29938072858	0,29936625896	0,29935962731	0,29935956267
0,800	0,27438618864	0,27437505862	0,27437411271	0,27437417331	0,27437415994
0,900	0,25539212458	0,25539117518	0,25539131608	0,25539127011	0,25539129410
1,000	0,24041012682	0,24041065202	0,24041053334	0,24041058233	0,24041055287

Fonte: do autor

Tabela 5.10: Resultados para a inversão de F_{10} por meio da Soma de Salzer.

t	$M = 7$	$M = 8$	$M = 9$	$M = 10$	$M = 11$
0,001	14,08361070380	14,08361516894	14,08356803328	14,08349443184	14,08435724961
0,100	1,22640834868	1,22640950798	1,22640077777	1,22629344819	1,23163264221
0,200	0,76978953671	0,76978957690	0,76978696407	0,76983400354	0,76708518033
0,300	0,56948564579	0,56948601405	0,56948421985	0,56931974822	0,57212934206
0,400	0,45562433881	0,45562433132	0,45562965609	0,45546420608	0,45686716392
0,500	0,38317732465	0,38317663785	0,38317962498	0,38313968335	0,38378580550
0,600	0,33398448102	0,33398349621	0,33398045646	0,33400874496	0,33385544064
0,700	0,29906926641	0,29906792990	0,29906229278	0,29919682254	0,29558303294
0,800	0,27343129521	0,27342954143	0,27342873201	0,27347457416	0,27293519154
0,900	0,25406170451	0,25406057329	0,25405718241	0,25407914231	0,25449607040
1,000	0,23905156376	0,23905151110	0,23904875523	0,23905148129	0,23958996586

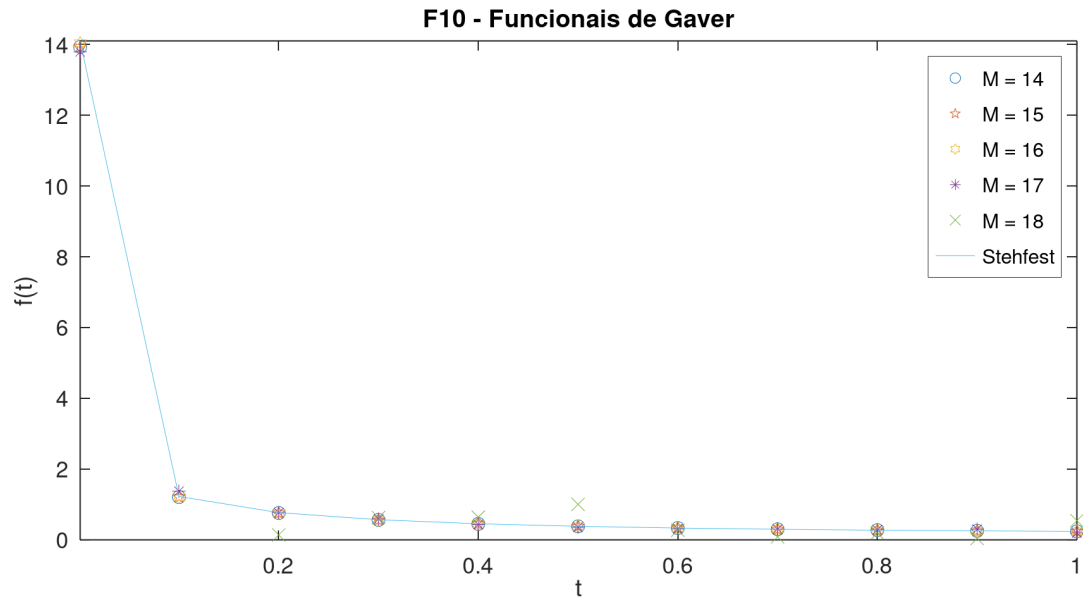
Fonte: do autor

Tabela 5.11: Resultados para a inversão de F_{10} por meio do Algoritmo Wynn-Rho.

t	$M = 8$	$M = 10$	$M = 12$	$M = 14$	$M = 16$
0,001	14,08360285572	14,08360168377	14,08359014422	14,08367640208	14,08368411453
0,100	1,22640743529	1,22640730855	1,22640491438	1,22640670130	1,22641475834
0,200	0,76978971588	0,76978456173	0,76978744758	0,76978914242	0,76978809231
0,300	0,56948475589	0,56948457240	0,56948485736	0,56948485272	0,56948299584
0,400	0,45562468804	0,45562462250	0,45562462136	0,45562474040	0,45562656679
0,500	0,38317361766	0,38317811514	0,38317794751	0,38317848159	0,38318487454
0,600	0,33398336894	0,33398342873	0,33398625853	0,33398628704	0,33398570163
0,700	0,29906806346	0,29906890927	0,29907041869	0,29907394785	0,29908347654
0,800	0,27342933720	0,27342946254	0,27343125911	0,27343480036	0,27343991794
0,900	0,25406027315	0,25406155475	0,25406146058	0,25405983654	0,25392616004
1,000	0,23905064723	0,23904995987	0,23904947435	0,23904628869	0,23904632972

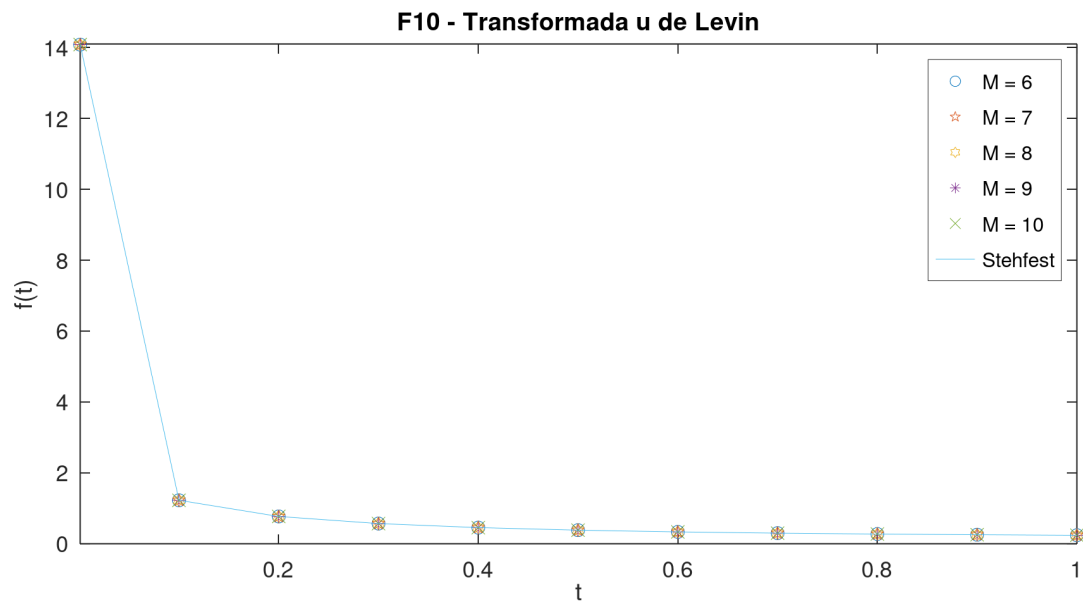
Fonte: do autor

Figura 5.5: Resultados para a inversão de F_{10} , utilizando os Funcionais de Gaver



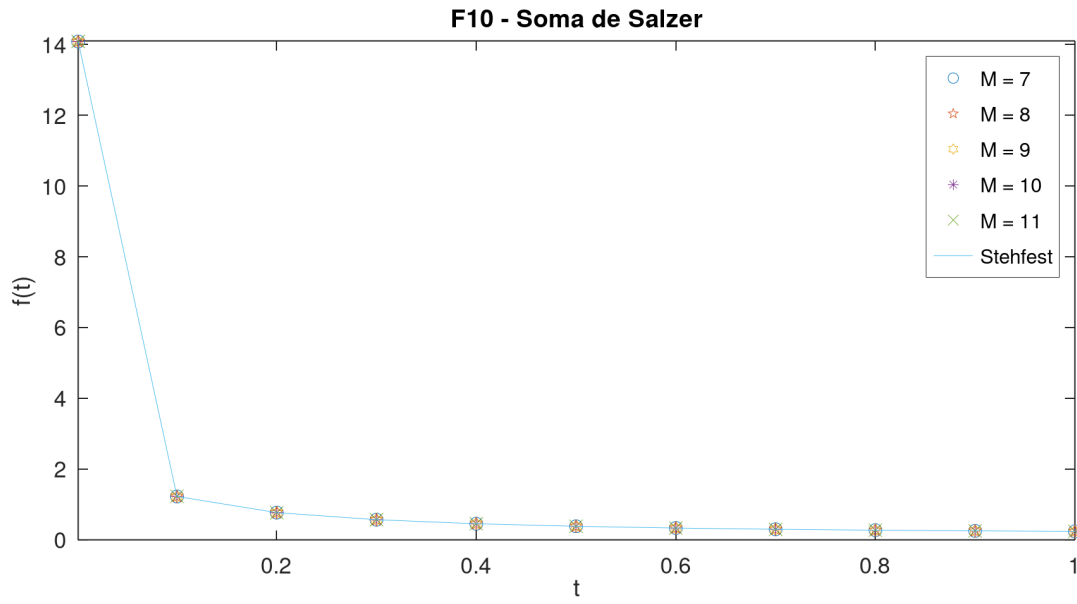
Fonte: do autor

Figura 5.6: Resultados para a inversão de F_{10} , utilizando a Transformada u de Levin



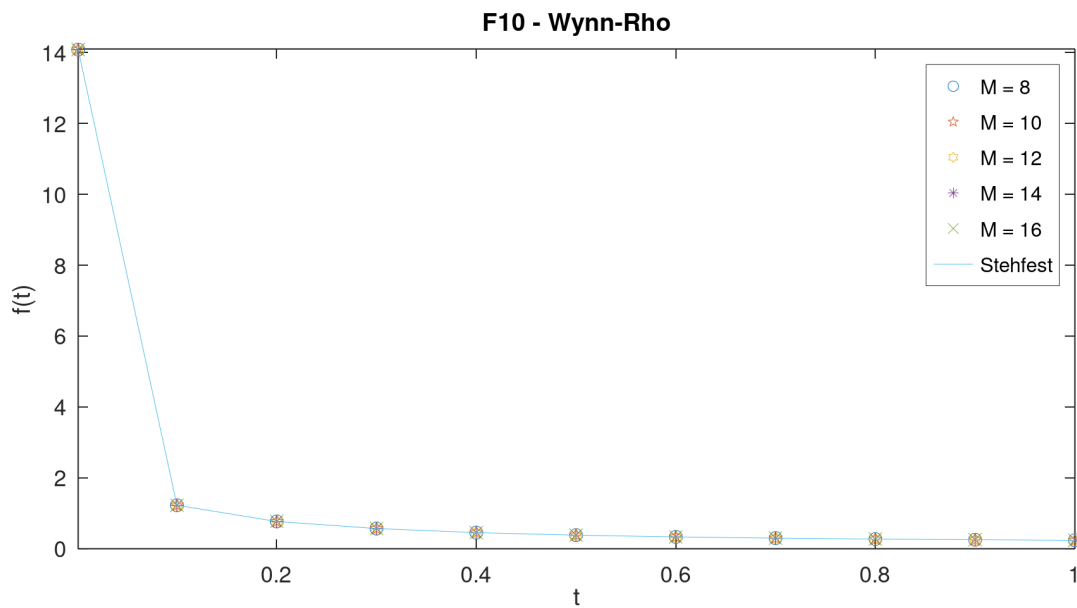
Fonte: do autor

Figura 5.7: Resultados para a inversão de F_{10} , utilizando a Soma de Salzer



Fonte: do autor

Figura 5.8: Resultados para a inversão de F_{10} , utilizando o Algoritmo Wynn-Rho



Fonte: do autor

5.3 Inversão de F_{11}

As Tabelas 5.13 – 5.16 e as Figuras 5.9 – 5.12 apresentam os resultados para a inversão numérica da Transformada de Laplace da função $F_{11}(s) = \frac{1}{s} e^{-sF_{10}(s)}$ para os Funcionais de Gaver, Transformada u de Levin, Soma de Salzer e Algoritmo Wynn-Rho.

Tabela 5.12: Erros Absolutos Médios para a inversão de F_{11} em relação ao Método Stehfest.

Funcionais Gaver		Transformada u de Levin	
$M = 15$	$7,08410433612 \times 10^{-3}$	$M = 7$	$1,11586326825 \times 10^{-4}$
$M = 16$	$6,62698435116 \times 10^{-3}$	$M = 8$	$2,42555394352 \times 10^{-5}$
$M = 17$	$6,31185025414 \times 10^{-3}$	$M = 9$	$7,20202274976 \times 10^{-6}$
$M = 18$	$6,74277685603 \times 10^{-3}$	$M = 10$	$1,91802592510 \times 10^{-5}$
$M = 19$	$1,50414686134 \times 10^{-2}$	$M = 11$	$2,39006677361 \times 10^{-4}$
Soma de Salzer		Algoritmo Wynn-Rho	
$M = 7$	$4,40254807728 \times 10^{-6}$	$M = 6$	$9,95466715033 \times 10^{-7}$
$M = 8$	$1,23808801780 \times 10^{-6}$	$M = 8$	$1,06275536783 \times 10^{-6}$
$M = 9$	$5,74095858278 \times 10^{-7}$	$M = 10$	$8,22499335084 \times 10^{-7}$
$M = 10$	$2,47002002533 \times 10^{-6}$	$M = 12$	$9,99243883423 \times 10^{-7}$
$M = 11$	$2,25354367014 \times 10^{-5}$	$M = 14$	$4,01049083228 \times 10^{-6}$

Fonte: do autor.

Na Tabela 5.12, o método de Funcionais de Gaver apresenta uma ligeira melhora para F_{11} em relação a F_9 e F_{10} , mas com a maioria dos erros de mesma ordem. Com isso, ele se mantém como o método que menos se aproxima dos resultados de Freitas (2022), para o Método Stehfest, entre os quatro métodos testados. O mesmo ocorre com a Transformada u de Levin, que forneceu ordem de erro menor em comparação as funções de aplicação anteriores. Já o algoritmos Soma de Salzer e Wynn-Rho apresentaram os menores erros entre os quatro métodos testados, e foram os que mais se aproximaram dos resultados do Método Stehfest nas três funções estudadas.

Tabela 5.13: Resultados para a inversão de F_{11} por meio dos Funcionais de Gaver.

t	$M = 15$	$M = 16$	$M = 17$	$M = 18$	$M = 19$
0,001	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000
0,100	0,09822252471	0,09743246929	0,09673496217	0,09611210066	0,09549801471
0,200	0,26186134585	0,26095539210	0,26015606900	0,25960976791	0,25706439361
0,300	0,38536588032	0,38454283320	0,38388656950	0,38271064979	0,38788114976
0,400	0,47691277297	0,47621998137	0,47565021439	0,47557629079	0,46925055498
0,500	0,54621415166	0,54568210468	0,54490800485	0,54522368224	0,54194218877
0,600	0,59968950422	0,59927659750	0,59886611956	0,60082696103	0,58661934028
0,700	0,64165836949	0,64128183143	0,64138667520	0,64044047585	0,62453467752
0,800	0,67503625884	0,67457091012	0,67573402855	0,67346113029	0,63563346193
0,900	0,70182561624	0,70192303469	0,70050554349	0,70987930670	0,66118139741
1,000	0,72370562338	0,72357857349	0,72416906608	0,72289708016	0,69527036994

Fonte: do autor

Tabela 5.14: Resultados para a inversão de F_{11} por meio da Transformada u de Levin.

t	$M = 7$	$M = 8$	$M = 9$	$M = 10$	$M = 11$
0,001	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000
0,100	0,08505224209	0,08532561026	0,08527550883	0,08527381671	0,08528658091
0,200	0,24686536487	0,24711873457	0,24708586728	0,24708810659	0,24722386737
0,300	0,37187399523	0,37211202379	0,37209354230	0,37210971095	0,37169383400
0,400	0,46566987331	0,46586191656	0,46584438382	0,46585667904	0,46575275860
0,500	0,53732870781	0,53746668397	0,53744757050	0,53747864497	0,53716557717
0,600	0,59302507637	0,59311653993	0,59310314864	0,59305884267	0,59362162168
0,700	0,63691538655	0,63696785458	0,63695931054	0,63691874823	0,63782280355
0,800	0,67190726380	0,67191752971	0,67190839645	0,67186158162	0,67202314820
0,900	0,70008431316	0,70005635803	0,70003507425	0,70000255451	0,70019784399
1,000	0,72291361886	0,72289045954	0,72287213880	0,72284469822	0,72286227753

Fonte: do autor

Tabela 5.15: Resultados para a inversão de F_{11} por meio da Soma de Salzer.

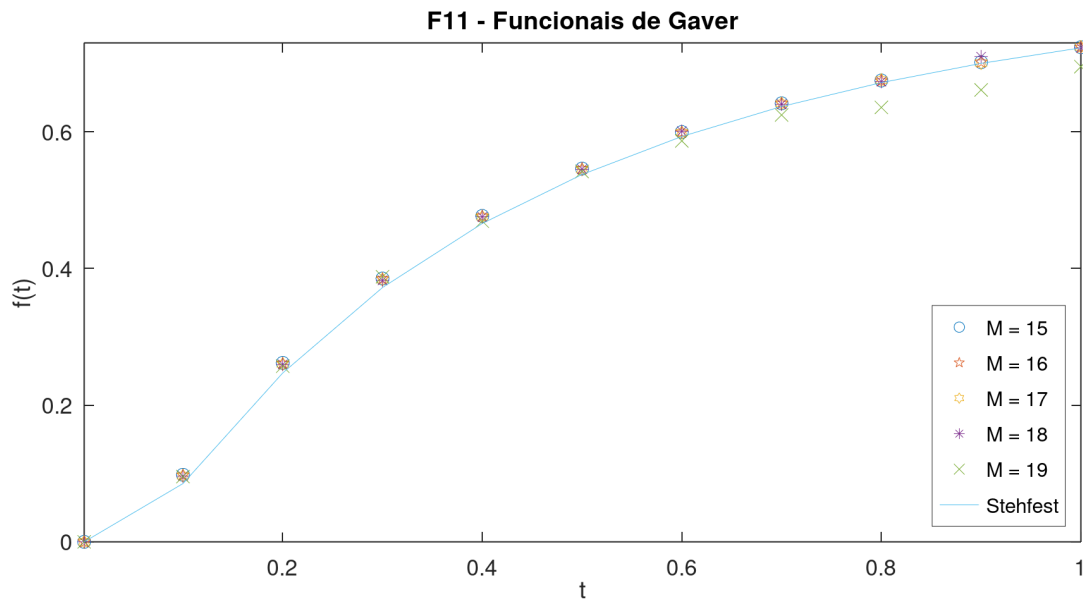
t	$M = 7$	$M = 8$	$M = 9$	$M = 10$	$M = 11$
0,001	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000
0,100	0,08526855515	0,08527116672	0,08527391198	0,08527471816	0,08527588652
0,200	0,24709132501	0,24709642541	0,24709562218	0,24709425742	0,24710555219
0,300	0,37210079304	0,37209770911	0,37209596173	0,37209699007	0,37206202118
0,400	0,46584894850	0,46584400353	0,46584312964	0,46584452425	0,46583709476
0,500	0,53745246428	0,53744806431	0,53744768147	0,53745086806	0,53742717597
0,600	0,59310399278	0,59310101184	0,59310132978	0,59309718845	0,59314686631
0,700	0,63695720777	0,63695633273	0,63695706442	0,63695303333	0,63705126870
0,800	0,67190066085	0,67190247555	0,67190370508	0,67189839388	0,67191126823
0,900	0,70001242910	0,70001710471	0,70001861509	0,70001481642	0,70004408756
1,000	0,72282690823	0,72283408098	0,72283619369	0,72283134083	0,72283584780

Fonte: do autor

Tabela 5.16: Resultados para a inversão de F_{11} por meio do Algoritmo Wynn-Rho.

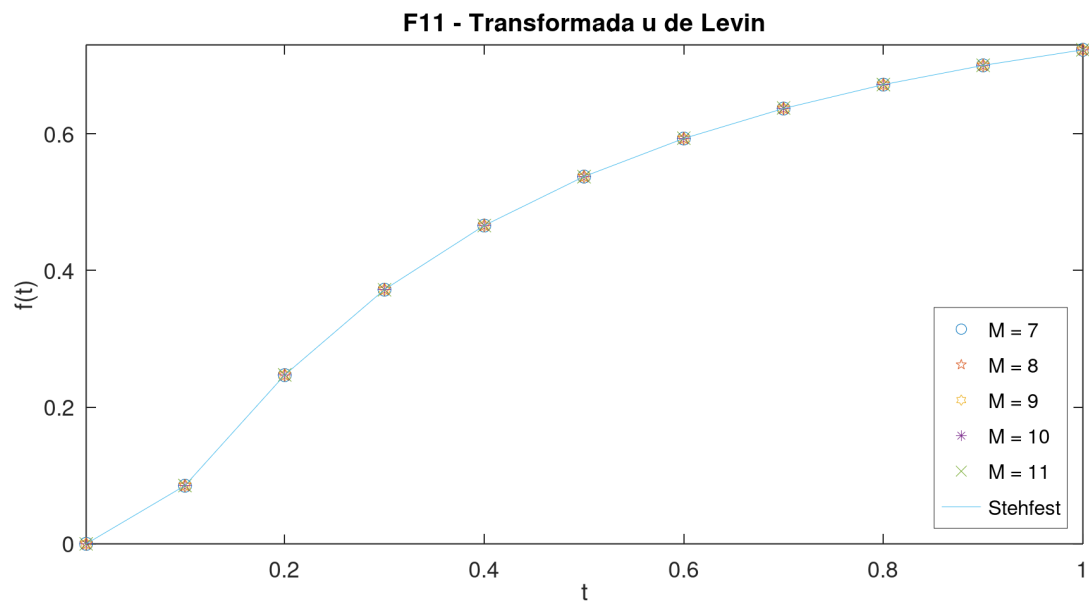
t	$M = 6$	$M = 8$	$M = 10$	$M = 12$	$M = 14$
0,001	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000
0,100	0,08527559707	0,08527563767	0,08527555152	0,08527562979	0,08527561929
0,200	0,24709494818	0,24709507069	0,24709508083	0,24709508748	0,24709506311
0,300	0,37209521116	0,37209497526	0,37209496305	0,37209493484	0,37209494261
0,400	0,46584287742	0,46584267961	0,46584273301	0,46584270334	0,46584216320
0,500	0,53744786446	0,53744786792	0,53744785864	0,53744750340	0,53742543297
0,600	0,59310109691	0,59310108773	0,59310096409	0,59310095533	0,59309934152
0,700	0,63695632971	0,63695638650	0,63695620706	0,63695582939	0,63695431855
0,800	0,67190078258	0,67190140080	0,67190126642	0,67190296908	0,67190306424
0,900	0,70002124715	0,70002247909	0,70001899185	0,70002327151	0,70003174320
1,000	0,72283711185	0,72283711639	0,72283825599	0,72283788083	0,72283972440

Fonte: do autor

Figura 5.9: Resultados para a inversão de F_{11} , utilizando os Funcionais de Gaver

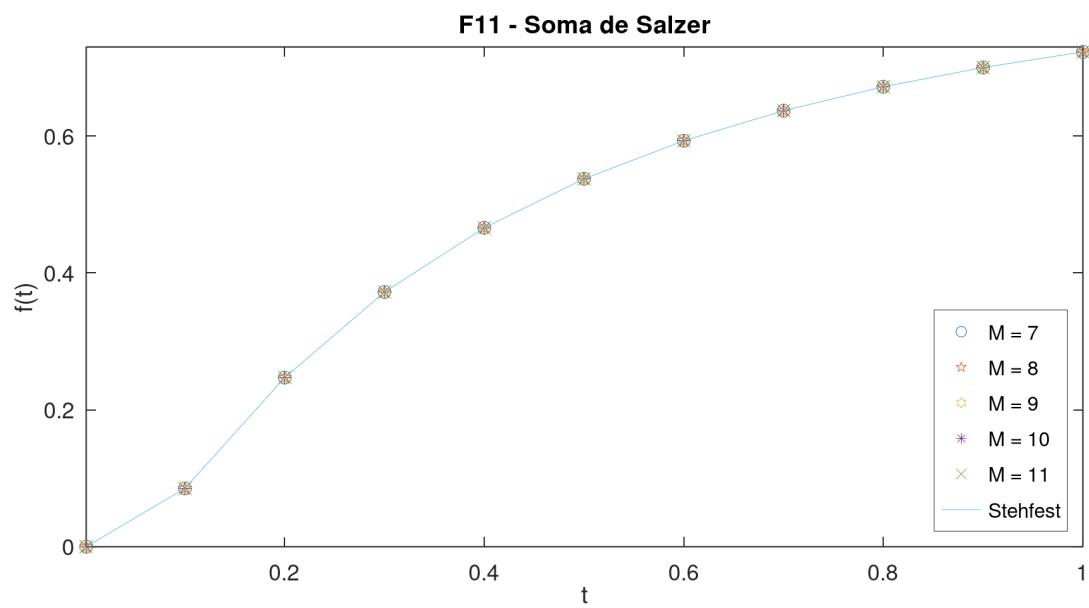
Fonte: do autor

Figura 5.10: Resultados para a inversão de F_{11} , utilizando a Transformada u de Levin



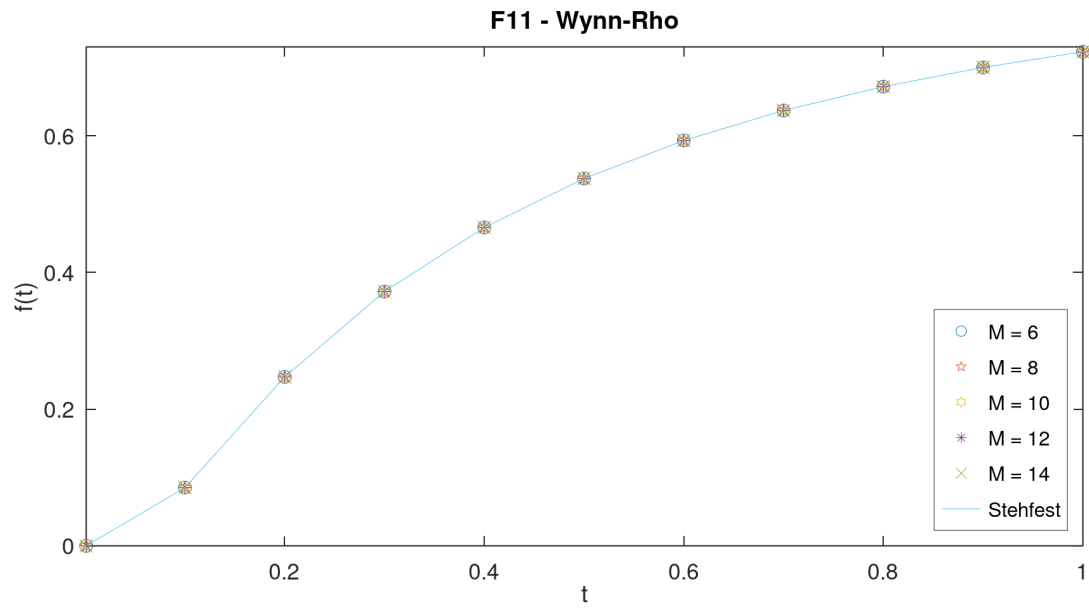
Fonte: do autor

Figura 5.11: Resultados para a inversão de F_{11} , utilizando a Soma de Salzer



Fonte: do autor

Figura 5.12: Resultados para a inversão de F_{11} , utilizando o Algoritmo Wynn-Rho



Fonte: do autor

6 EMPREGO DOS MÉTODOS NAS APLICAÇÕES

Neste capítulo, os métodos estudados são empregados na obtenção da solução de quatro problemas de aplicação: Análise de Circuitos Elétricos (Paz et al., 2023), Transporte de Solute em Meio Poroso (Pilatti, 2019), Difusão de Íons (Ferreira et al., 2023) e Difusão de Mercúrio na Água (Freitas, 2022). É importante ressaltar que a dedução das equações e o desenvolvimento das soluções podem ser encontrados nos respectivos trabalhos de onde as aplicações foram retiradas.

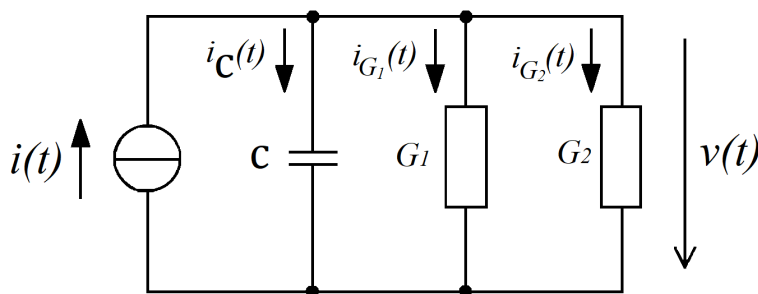
6.1 Análise de Circuitos Elétricos

A relação entre a tensão $v(t)$ e a corrente $i(t)$, no circuito representado pela Figura 6.1, é dada pela equação

$$c \frac{dv(t)}{dt} + Gv(t) = i(t) , \quad (6.1)$$

onde $G = G_1 + G_2$ é a condutância equivalente, G_1 e G_2 são a condutância, e c é a capacitância.

Figura 6.1: Circuito elétrico.



Fonte: Paz et al. (2023).

Aplicando a Transformada de Laplace na equação (6.1), tem-se

$$V(s) = \frac{I(s) + cv(0)}{G + sc} , \quad (6.2)$$

onde $V(s)$ e $I(s)$ são, respectivamente, as tensões $v(t)$ e correntes $i(t)$ no domínio de Laplace. As soluções da equação (6.2) são dadas pelas Tabelas 6.1 e 6.2.

Tabela 6.1: Correntes $I(s)$ e $i(t)$

$I(s)$	$i(t)$
$I_1(s) = \frac{I_0}{s}$	$i_1(t) = I_0$
$I_2(s) = \frac{I_0}{s+5}$	$i_2(t) = I_0 e^{-5t}$
$I_3(s) = \frac{2\pi I_0}{s^2 + 4\pi^2}$	$i_3(t) = I_0 \text{sen}(2\pi t)$
$I_4(s) = \frac{s I_0}{s^2 + 4\pi^2}$	$i_4(t) = I_0 \cos(2\pi t)$

Fonte: adaptado de Paz et al. (2023).

Tabela 6.2: Tensões $V(s)$ e $v(t)$

$V(s)$	$v(t)$
$V_1(s) = \frac{1}{s(s+20)}$	$v_1(t) = \frac{1 - e^{-20t}}{20}$
$V_2(s) = \frac{1}{(s+5)(s+20)}$	$v_2(t) = \frac{e^{-5t} - e^{-20t}}{15}$
$V_3(s) = \frac{2\pi}{(s^2 + 4\pi^2)(s+20)}$	$v_3(t) = \frac{-\pi \cos(2\pi t) + 10\text{sen}(2\pi t) + \pi e^{-20t}}{2\pi^2 + 200}$
$V_4(s) = \frac{s}{(s^2 + 4\pi^2)(s+20)}$	$v_4(t) = \frac{5(\cos(2\pi t) - e^{-20t})}{\pi^2 + 100} + \frac{\pi \text{sen}(2\pi t)}{2(\pi^2 + 100)}$

Fonte: adaptado de Paz et al. (2023).

As Tabelas 6.3 – 6.12 apresentam os M ótimos e os Erros Absolutos Médios respectivamente, e as Figuras 6.2 – 6.9 mostram as representações gráficas dos resultados obtidos. Para as simulações foram tomados $G_1 = G_2 = 10$ mS, $c = 1$ mF e $I_0 = 1$ mA.

Tabela 6.3: M ótimos e ordem do $\overline{E}_{abs}$ para as correntes I .

Correntes	I_1	I_2	I_3	I_4
Funcionais de Gaver	1 $[10^{-17}]$	16 $[10^{-3}]$	18 $[10^{-1}]$	17 $[10^{-1}]$
Transformada u de Levin	1 $[10^{-17}]$	16 $[10^{-3}]$	18 $[10^{-1}]$	17 $[10^{-1}]$
Soma de Salzer	1 $[10^{-17}]$	9 $[10^{-6}]$	12 $[10^{-3}]$	12 $[10^{-2}]$
Algoritmo Wynn-Rho	2 $[10^{-15}]$	8 $[10^{-8}]$	14 $[10^{-2}]$	10 $[10^{-2}]$

Fonte: do autor.

Tabela 6.4: M ótimos e ordem do $\overline{E}_{abs}$ para as tensões V .

Tensões	V_1	V_2	V_3	V_4
Funcionais de Gaver	15 $[10^{-5}]$	17 $[10^{-4}]$	19 $[10^{-3}]$	18 $[10^{-3}]$
Transformada u de Levin	15 $[10^{-5}]$	17 $[10^{-4}]$	19 $[10^{-3}]$	18 $[10^{-3}]$
Soma de Salzer	9 $[10^{-7}]$	9 $[10^{-7}]$	12 $[10^{-4}]$	12 $[10^{-4}]$
Algoritmo Wynn-Rho	10 $[10^{-7}]$	8 $[10^{-7}]$	14 $[10^{-4}]$	12 $[10^{-4}]$

Fonte: do autor.

A Soma de Salzer e o Algoritmo Wynn-Rho geraram resultados similares para os seus respectivos M ótimos. No caso das tensões, a ordem dos Erros Absolutos Médios foi a mesma para os quatro casos. Isto também ocorre entre os Funcionais de Gaver e a Transformada u de Levin, que tanto para a tensão quanto para a corrente, os dois métodos, em seus M ótimos, geram Erros Absolutos Médios com a mesma ordem para todos os casos.

Como mostrado no Capítulo 4, o desempenho dos métodos piora para funções trigonométricas, como o caso das correntes I_3 e I_4 e das tensões V_3 e V_4 . Porém, mesmo que os resultados para funções com este comportamento sejam piores do que para as outras tensões e correntes, a Soma de Salzer e o Algoritmo Wynn-Rho geraram bons resultados, especialmente para V_3 e V_4 .

Para a corrente I_1 (uma função constante) todos os algoritmos testados obtiveram seus M ótimos no primeiro M possível, com ordem do Erro Absoluto Médio de 10^{-15} para o Algoritmo Wynn-Rho, e de ordem de 10^{-17} para os demais métodos.

Tabela 6.5: $\overline{E}_{abs}$ para a inversão das correntes I por meio dos Funcionais de Gaver

M	I_1	I_2	I_3	I_4
1	$1,00929365875 \times 10^{-17}$	$4,61156773451 \times 10^{-2}$	$4,66736377134 \times 10^{-1}$	$5,45338270084 \times 10^{-1}$
2	$8,07434927000 \times 10^{-16}$	$2,96450709116 \times 10^{-2}$	$4,26816839564 \times 10^{-1}$	$4,90878640096 \times 10^{-1}$
3	$3,48206312269 \times 10^{-15}$	$2,21066149286 \times 10^{-2}$	$3,90649283496 \times 10^{-1}$	$4,48223288347 \times 10^{-1}$
4	$4,92636234836 \times 10^{-14}$	$1,76325695500 \times 10^{-2}$	$3,63280039222 \times 10^{-1}$	$4,21487061333 \times 10^{-1}$
5	$1,21781372865 \times 10^{-13}$	$1,46651125889 \times 10^{-2}$	$3,39470930458 \times 10^{-1}$	$3,96923858432 \times 10^{-1}$
6	$8,70011133843 \times 10^{-13}$	$1,25520694770 \times 10^{-2}$	$3,18335200579 \times 10^{-1}$	$3,74463179407 \times 10^{-1}$
7	$1,11583772525 \times 10^{-11}$	$1,09707473073 \times 10^{-2}$	$2,99345608978 \times 10^{-1}$	$3,53940016127 \times 10^{-1}$
8	$5,18208405480 \times 10^{-11}$	$9,74289587678 \times 10^{-3}$	$2,82165247639 \times 10^{-1}$	$3,35165080252 \times 10^{-1}$
9	$5,98515469509 \times 10^{-10}$	$8,76195279203 \times 10^{-3}$	$2,66553375910 \times 10^{-1}$	$3,17959268557 \times 10^{-1}$
10	$1,83259116972 \times 10^{-9}$	$7,96028130743 \times 10^{-3}$	$2,52322036333 \times 10^{-1}$	$3,02162577912 \times 10^{-1}$
11	$1,72899229176 \times 10^{-8}$	$7,29285813269 \times 10^{-3}$	$2,39316003966 \times 10^{-1}$	$2,87633756251 \times 10^{-1}$
12	$2,34191950499 \times 10^{-7}$	$6,72860448222 \times 10^{-3}$	$2,27402883397 \times 10^{-1}$	$2,74247968878 \times 10^{-1}$
13	$2,58974325191 \times 10^{-6}$	$6,24534169837 \times 10^{-3}$	$2,16651338882 \times 10^{-1}$	$2,61894971409 \times 10^{-1}$
14	$1,33229421106 \times 10^{-5}$	$5,82374186062 \times 10^{-3}$	$2,07836630142 \times 10^{-1}$	$2,50465145649 \times 10^{-1}$
15	$9,55620916317 \times 10^{-5}$	$5,47135055645 \times 10^{-3}$	$1,99722094502 \times 10^{-1}$	$2,39950004259 \times 10^{-1}$
16	$4,11386953554 \times 10^{-4}$	$5,19310759133 \times 10^{-3}$	$1,92163042542 \times 10^{-1}$	$2,29989751681 \times 10^{-1}$
17	$4,80845148188 \times 10^{-3}$	$5,55663121968 \times 10^{-3}$	$1,85673507900 \times 10^{-1}$	$2,21343850606 \times 10^{-1}$
18	$6,43536397578 \times 10^{-2}$	$3,05026550960 \times 10^{-2}$	$1,82129844279 \times 10^{-1}$	$2,24596172879 \times 10^{-1}$
19	$4,41142570887 \times 10^{-1}$	$1,39384246950 \times 10^{-1}$	$1,91139261600 \times 10^{-1}$	$5,22860270497 \times 10^{-1}$
20	$2,36873470437 \times 10^0$	$1,57411154678 \times 10^0$	$8,54273245838 \times 10^{-1}$	$3,34679611376 \times 10^0$
21	$9,41124545059 \times 10^0$	$1,40655538185 \times 10^1$	$3,71326736615 \times 10^0$	$2,13199066587 \times 10^1$
22	$1,57784982143 \times 10^2$	$1,17998111744 \times 10^2$	$1,84312008625 \times 10^1$	$1,34500991496 \times 10^2$
23	$1,12292092274 \times 10^3$	$1,14217024212 \times 10^3$	$2,00393078555 \times 10^2$	$9,10508912401 \times 10^2$
24	$1,46308862475 \times 10^4$	$1,01979883502 \times 10^4$	$2,56726352435 \times 10^3$	$8,45672580319 \times 10^3$
25	$7,44743366761 \times 10^4$	$1,04876206376 \times 10^5$	$1,57821318868 \times 10^4$	$8,40523006262 \times 10^4$
26	$9,80917322815 \times 10^5$	$4,02068665247 \times 10^5$	$1,06620105876 \times 10^5$	$4,65773740839 \times 10^5$
27	$4,38844084541 \times 10^6$	$3,60244013634 \times 10^6$	$5,01317742930 \times 10^5$	$4,20592620106 \times 10^6$
28	$9,79197093438 \times 10^7$	$6,85949276794 \times 10^7$	$8,70700538529 \times 10^6$	$7,33176911316 \times 10^7$

Fonte: do autor

Tabela 6.6: $\overline{E}_{abs}$ para a inversão das tensões V por meio dos Funcionais de Gaver.

M	V_1	V_2	V_3	V_4
1	$5,72778883369 \times 10^{-4}$	$3,18663005896 \times 10^{-3}$	$2,48194695411 \times 10^{-2}$	$2,44373347966 \times 10^{-2}$
2	$3,42312642996 \times 10^{-4}$	$2,09508123628 \times 10^{-3}$	$2,25647229663 \times 10^{-2}$	$2,24457625465 \times 10^{-2}$
3	$2,36571754223 \times 10^{-4}$	$1,58248871115 \times 10^{-3}$	$2,06019687276 \times 10^{-2}$	$2,07794658946 \times 10^{-2}$
4	$1,78500539156 \times 10^{-4}$	$1,27647389515 \times 10^{-3}$	$1,89966517089 \times 10^{-2}$	$1,93015456640 \times 10^{-2}$
5	$1,42521176548 \times 10^{-4}$	$1,06871428531 \times 10^{-3}$	$1,76480284176 \times 10^{-2}$	$1,79835485183 \times 10^{-2}$
6	$1,18281143234 \times 10^{-4}$	$9,18601896061 \times 10^{-4}$	$1,64898988711 \times 10^{-2}$	$1,68055845289 \times 10^{-2}$
7	$1,00932328542 \times 10^{-4}$	$8,05174380862 \times 10^{-4}$	$1,54806934096 \times 10^{-2}$	$1,57489554587 \times 10^{-2}$
8	$8,79413112403 \times 10^{-5}$	$7,16509546805 \times 10^{-4}$	$1,45919121269 \times 10^{-2}$	$1,47973895197 \times 10^{-2}$
9	$7,78681952629 \times 10^{-5}$	$6,45331286580 \times 10^{-4}$	$1,38025177670 \times 10^{-2}$	$1,39881315028 \times 10^{-2}$
10	$6,98388809032 \times 10^{-5}$	$5,86951302301 \times 10^{-4}$	$1,30962784891 \times 10^{-2}$	$1,33071645178 \times 10^{-2}$
11	$6,32941913304 \times 10^{-5}$	$5,38214464601 \times 10^{-4}$	$1,24603567801 \times 10^{-2}$	$1,26853613628 \times 10^{-2}$
12	$5,78584713059 \times 10^{-5}$	$4,96921810911 \times 10^{-4}$	$1,18844462166 \times 10^{-2}$	$1,21147563594 \times 10^{-2}$
13	$5,33025601297 \times 10^{-5}$	$4,61497344053 \times 10^{-4}$	$1,13601673567 \times 10^{-2}$	$1,15890376490 \times 10^{-2}$
14	$4,92221307669 \times 10^{-5}$	$4,30800323046 \times 10^{-4}$	$1,08807541921 \times 10^{-2}$	$1,11032897981 \times 10^{-2}$
15	$4,69404377583 \times 10^{-5}$	$4,03315797546 \times 10^{-4}$	$1,04402420177 \times 10^{-2}$	$1,06518556424 \times 10^{-2}$
16	$5,27415420174 \times 10^{-5}$	$3,85530282591 \times 10^{-4}$	$1,00336615632 \times 10^{-2}$	$1,02394564826 \times 10^{-2}$
17	$2,02020755139 \times 10^{-4}$	$3,66131680579 \times 10^{-4}$	$9,67223646457 \times 10^{-3}$	$9,80529820529 \times 10^{-3}$
18	$1,15725382938 \times 10^{-3}$	$1,08965194185 \times 10^{-3}$	$9,41432521055 \times 10^{-3}$	$9,72748728008 \times 10^{-3}$
19	$9,76961492588 \times 10^{-3}$	$6,43418165370 \times 10^{-3}$	$8,56572914308 \times 10^{-3}$	$1,54867610682 \times 10^{-2}$
20	$4,03565343741 \times 10^{-2}$	$3,85559441925 \times 10^{-2}$	$2,74815241146 \times 10^{-2}$	$4,49378436830 \times 10^{-2}$
21	$2,81486739384 \times 10^{-1}$	$3,60125260879 \times 10^{-1}$	$6,87984955876 \times 10^{-2}$	$2,23462187584 \times 10^{-1}$
22	$1,79100919758 \times 10^0$	$2,30496403483 \times 10^0$	$2,91501136490 \times 10^{-1}$	$1,61442925689 \times 10^0$
23	$1,97015066902 \times 10^1$	$2,32811891977 \times 10^1$	$6,24865677127 \times 10^0$	$1,95190119743 \times 10^1$
24	$2,17495762229 \times 10^2$	$1,95959233751 \times 10^2$	$4,96977240121 \times 10^1$	$2,02988739758 \times 10^2$
25	$1,25361732345 \times 10^3$	$9,67416404182 \times 10^2$	$2,35201071101 \times 10^2$	$1,28825015053 \times 10^3$
26	$1,17668441141 \times 10^4$	$6,52260096726 \times 10^3$	$1,97020051910 \times 10^3$	$6,21364500964 \times 10^3$
27	$8,93697706160 \times 10^4$	$6,99977847856 \times 10^4$	$8,67547978023 \times 10^3$	$4,48649204728 \times 10^4$
28	$1,41680049328 \times 10^6$	$1,08748415657 \times 10^6$	$1,43173669581 \times 10^5$	$8,99396895782 \times 10^5$

Fonte: do autor

Tabela 6.7: $\overline{E}_{abs}$ para a inversão das correntes I por meio da Transformada u de Levin

M	I_1	I_2	I_3	I_4
1	$1,00929365875 \times 10^{-17}$	$4,61156773451 \times 10^{-2}$	$4,66736377134 \times 10^{-1}$	$5,45338270084 \times 10^{-1}$
2	$8,07434927000 \times 10^{-16}$	$2,96450709116 \times 10^{-2}$	$4,26816839564 \times 10^{-1}$	$4,90878640096 \times 10^{-1}$
3	$3,48206312269 \times 10^{-15}$	$2,21066149286 \times 10^{-2}$	$3,90649283496 \times 10^{-1}$	$4,48223288347 \times 10^{-1}$
4	$4,92636234836 \times 10^{-14}$	$1,76325695500 \times 10^{-2}$	$3,63280039222 \times 10^{-1}$	$4,21487061333 \times 10^{-1}$
5	$1,21781372865 \times 10^{-13}$	$1,46651125889 \times 10^{-2}$	$3,39470930458 \times 10^{-1}$	$3,96923858432 \times 10^{-1}$
6	$8,70011133843 \times 10^{-13}$	$1,25520694770 \times 10^{-2}$	$3,18335200579 \times 10^{-1}$	$3,74463179407 \times 10^{-1}$
7	$1,11583772525 \times 10^{-11}$	$1,09707473073 \times 10^{-2}$	$2,99345608978 \times 10^{-1}$	$3,53940016127 \times 10^{-1}$
8	$5,18208405480 \times 10^{-11}$	$9,74289587678 \times 10^{-3}$	$2,82165247639 \times 10^{-1}$	$3,35165080252 \times 10^{-1}$
9	$5,98515469509 \times 10^{-10}$	$8,76195279203 \times 10^{-3}$	$2,66553375910 \times 10^{-1}$	$3,17959268557 \times 10^{-1}$
10	$1,83259116972 \times 10^{-9}$	$7,96028130743 \times 10^{-3}$	$2,52322036333 \times 10^{-1}$	$3,02162577912 \times 10^{-1}$
11	$1,72899229176 \times 10^{-8}$	$7,29285813269 \times 10^{-3}$	$2,39316003966 \times 10^{-1}$	$2,87633756251 \times 10^{-1}$
12	$2,34191950499 \times 10^{-7}$	$6,72860448222 \times 10^{-3}$	$2,27402883397 \times 10^{-1}$	$2,74247968878 \times 10^{-1}$
13	$2,58974325191 \times 10^{-6}$	$6,24534169837 \times 10^{-3}$	$2,16651338882 \times 10^{-1}$	$2,61894971409 \times 10^{-1}$
14	$1,33229421106 \times 10^{-5}$	$5,82374186062 \times 10^{-3}$	$2,07836630142 \times 10^{-1}$	$2,50465145649 \times 10^{-1}$
15	$9,55620916317 \times 10^{-5}$	$5,47135055645 \times 10^{-3}$	$1,99722094502 \times 10^{-1}$	$2,39950004259 \times 10^{-1}$
16	$4,11386953554 \times 10^{-4}$	$5,19310759133 \times 10^{-3}$	$1,92163042542 \times 10^{-1}$	$2,29989751681 \times 10^{-1}$
17	$4,80845148188 \times 10^{-3}$	$5,55663121968 \times 10^{-3}$	$1,85673507900 \times 10^{-1}$	$2,21343850606 \times 10^{-1}$
18	$6,43536397578 \times 10^{-2}$	$3,05026550960 \times 10^{-2}$	$1,82129844279 \times 10^{-1}$	$2,24596172879 \times 10^{-1}$
19	$4,41142570887 \times 10^{-1}$	$1,39384246950 \times 10^{-1}$	$1,91139261600 \times 10^{-1}$	$5,22860270497 \times 10^{-1}$
20	$2,36873470437 \times 10^0$	$1,57411154678 \times 10^0$	$8,54273245838 \times 10^{-1}$	$3,34679611376 \times 10^0$
21	$9,41124545059 \times 10^0$	$1,40655538185 \times 10^1$	$3,71326736615 \times 10^0$	$2,13199066587 \times 10^1$
22	$1,57784982143 \times 10^2$	$1,17998111744 \times 10^2$	$1,84312008625 \times 10^1$	$1,34500991496 \times 10^2$
23	$1,12292092274 \times 10^3$	$1,14217024212 \times 10^3$	$2,00393078555 \times 10^2$	$9,10508912401 \times 10^2$
24	$1,46308862475 \times 10^4$	$1,01979883502 \times 10^4$	$2,56726352435 \times 10^3$	$8,45672580319 \times 10^3$
25	$7,44743366761 \times 10^4$	$1,04876206376 \times 10^5$	$1,57821318868 \times 10^4$	$8,40523006262 \times 10^4$
26	$9,80917322815 \times 10^5$	$4,02068665247 \times 10^5$	$1,06620105876 \times 10^5$	$4,65773740839 \times 10^5$
27	$4,38844084541 \times 10^6$	$3,60244013634 \times 10^6$	$5,01317742930 \times 10^5$	$4,20592620106 \times 10^6$
28	$9,79197093438 \times 10^7$	$6,85949276794 \times 10^7$	$8,70700538529 \times 10^6$	$7,33176911316 \times 10^7$

Fonte: do autor

Tabela 6.8: $\overline{E}_{abs}$ para a inversão das tensões V por meio da Transformada u de Levin.

M	V_1	V_2	V_3	V_4
1	$5,72778883369 \times 10^{-4}$	$3,18663005896 \times 10^{-3}$	$2,48194695411 \times 10^{-2}$	$2,44373347966 \times 10^{-2}$
2	$3,42312642996 \times 10^{-4}$	$2,09508123628 \times 10^{-3}$	$2,25647229663 \times 10^{-2}$	$2,24457625465 \times 10^{-2}$
3	$2,36571754223 \times 10^{-4}$	$1,58248871115 \times 10^{-3}$	$2,06019687276 \times 10^{-2}$	$2,07794658946 \times 10^{-2}$
4	$1,78500539156 \times 10^{-4}$	$1,27647389515 \times 10^{-3}$	$1,89966517089 \times 10^{-2}$	$1,93015456640 \times 10^{-2}$
5	$1,42521176548 \times 10^{-4}$	$1,06871428531 \times 10^{-3}$	$1,76480284176 \times 10^{-2}$	$1,79835485183 \times 10^{-2}$
6	$1,18281143234 \times 10^{-4}$	$9,18601896061 \times 10^{-4}$	$1,64898988711 \times 10^{-2}$	$1,68055845289 \times 10^{-2}$
7	$1,00932328542 \times 10^{-4}$	$8,05174380862 \times 10^{-4}$	$1,54806934096 \times 10^{-2}$	$1,57489554587 \times 10^{-2}$
8	$8,79413112403 \times 10^{-5}$	$7,16509546805 \times 10^{-4}$	$1,45919121269 \times 10^{-2}$	$1,47973895197 \times 10^{-2}$
9	$7,78681952629 \times 10^{-5}$	$6,45331286580 \times 10^{-4}$	$1,38025177670 \times 10^{-2}$	$1,39881315028 \times 10^{-2}$
10	$6,98388809032 \times 10^{-5}$	$5,86951302301 \times 10^{-4}$	$1,30962784891 \times 10^{-2}$	$1,33071645178 \times 10^{-2}$
11	$6,32941913304 \times 10^{-5}$	$5,38214464601 \times 10^{-4}$	$1,24603567801 \times 10^{-2}$	$1,26853613628 \times 10^{-2}$
12	$5,78584713059 \times 10^{-5}$	$4,96921810911 \times 10^{-4}$	$1,18844462166 \times 10^{-2}$	$1,21147563594 \times 10^{-2}$
13	$5,33025601297 \times 10^{-5}$	$4,61497344053 \times 10^{-4}$	$1,13601673567 \times 10^{-2}$	$1,15890376490 \times 10^{-2}$
14	$4,92221307669 \times 10^{-5}$	$4,30800323046 \times 10^{-4}$	$1,08807541921 \times 10^{-2}$	$1,11032897981 \times 10^{-2}$
15	$4,69404377583 \times 10^{-5}$	$4,03315797546 \times 10^{-4}$	$1,04402420177 \times 10^{-2}$	$1,06518556424 \times 10^{-2}$
16	$5,27415420174 \times 10^{-5}$	$3,85530282591 \times 10^{-4}$	$1,00336615632 \times 10^{-2}$	$1,02394564826 \times 10^{-2}$
17	$2,02020755139 \times 10^{-4}$	$3,66131680579 \times 10^{-4}$	$9,67223646457 \times 10^{-3}$	$9,80529820529 \times 10^{-3}$
18	$1,15725382938 \times 10^{-3}$	$1,08965194185 \times 10^{-3}$	$9,41432521055 \times 10^{-3}$	$9,72748728008 \times 10^{-3}$
19	$9,76961492588 \times 10^{-3}$	$6,43418165370 \times 10^{-3}$	$8,56572914308 \times 10^{-3}$	$1,54867610682 \times 10^{-2}$
20	$4,03565343741 \times 10^{-2}$	$3,85559441925 \times 10^{-2}$	$2,74815241146 \times 10^{-2}$	$4,49378436830 \times 10^{-2}$
21	$2,81486739384 \times 10^{-1}$	$3,60125260879 \times 10^{-1}$	$6,87984955876 \times 10^{-2}$	$2,23462187584 \times 10^{-1}$
22	$1,79100919758 \times 10^0$	$2,30496403483 \times 10^0$	$2,91501136490 \times 10^{-1}$	$1,61442925689 \times 10^0$
23	$1,97015066902 \times 10^1$	$2,32811891977 \times 10^1$	$6,24865677127 \times 10^0$	$1,95190119743 \times 10^1$
24	$2,17495762229 \times 10^2$	$1,95959233751 \times 10^2$	$4,96977240121 \times 10^1$	$2,02988739758 \times 10^2$
25	$1,25361732345 \times 10^3$	$9,67416404182 \times 10^2$	$2,35201071101 \times 10^2$	$1,28825015053 \times 10^3$
26	$1,17668441141 \times 10^4$	$6,52260096726 \times 10^3$	$1,97020051910 \times 10^3$	$6,21364500964 \times 10^3$
27	$8,93697706160 \times 10^4$	$6,99977847856 \times 10^4$	$8,67547978023 \times 10^3$	$4,48649204728 \times 10^4$
28	$1,41680049328 \times 10^6$	$1,08748415657 \times 10^6$	$1,43173669581 \times 10^5$	$8,99396895782 \times 10^5$

Fonte: do autor

Tabela 6.9: $\overline{E}_{abs}$ para a inversão das correntes I por meio da Soma de Salzer

M	I_1	I_2	I_3	I_4
1	$1,00929365875 \times 10^{-17}$	$4,61156773451 \times 10^{-2}$	$4,66736377134 \times 10^{-1}$	$5,45338270084 \times 10^{-1}$
2	$1,60477691741 \times 10^{-15}$	$1,43711161162 \times 10^{-2}$	$3,89524551648 \times 10^{-1}$	$4,44705312052 \times 10^{-1}$
3	$1,48568026568 \times 10^{-14}$	$4,08243411007 \times 10^{-3}$	$3,10976787979 \times 10^{-1}$	$3,69524489320 \times 10^{-1}$
4	$5,65204448900 \times 10^{-13}$	$8,77704403946 \times 10^{-4}$	$2,29728885927 \times 10^{-1}$	$2,77059157046 \times 10^{-1}$
5	$5,09814412908 \times 10^{-12}$	$1,99726145637 \times 10^{-4}$	$1,61464795807 \times 10^{-1}$	$2,04012286975 \times 10^{-1}$
6	$6,17371204664 \times 10^{-11}$	$5,29940958173 \times 10^{-5}$	$1,22269174139 \times 10^{-1}$	$1,44116171574 \times 10^{-1}$
7	$1,82444120417 \times 10^{-9}$	$1,39081715215 \times 10^{-5}$	$8,92318506798 \times 10^{-2}$	$9,54241352939 \times 10^{-2}$
8	$3,41851928583 \times 10^{-8}$	$3,55070508593 \times 10^{-6}$	$6,69528038672 \times 10^{-2}$	$5,64588865338 \times 10^{-2}$
9	$8,27915156068 \times 10^{-7}$	$1,40330075309 \times 10^{-6}$	$4,29286229295 \times 10^{-2}$	$3,27727800336 \times 10^{-2}$
10	$1,08716459512 \times 10^{-5}$	$1,27114186774 \times 10^{-5}$	$2,60423097230 \times 10^{-2}$	$1,77892752574 \times 10^{-2}$
11	$1,59093183273 \times 10^{-4}$	$2,41593883071 \times 10^{-4}$	$1,26702868337 \times 10^{-2}$	$1,31262791876 \times 10^{-2}$
12	$5,23784189698 \times 10^{-3}$	$4,34779247184 \times 10^{-3}$	$5,97780040947 \times 10^{-3}$	$1,05599693552 \times 10^{-2}$
13	$1,83477444208 \times 10^{-1}$	$8,13291339850 \times 10^{-2}$	$4,01101616501 \times 10^{-2}$	$9,88433506486 \times 10^{-2}$
14	$3,52440871088 \times 10^0$	$1,55236545268 \times 10^0$	$9,83817760724 \times 10^{-1}$	$2,60620908633 \times 10^0$

Fonte: do autor

Tabela 6.10: $\overline{E}_{abs}$ para a inversão das tensões V por meio da Soma de Salzer.

M	V_1	V_2	V_3	V_4
1	$5,72778883369 \times 10^{-4}$	$3,18663005896 \times 10^{-3}$	$2,48194695411 \times 10^{-2}$	$2,44373347966 \times 10^{-2}$
2	$1,53459462285 \times 10^{-4}$	$1,12424552169 \times 10^{-3}$	$2,03108494615 \times 10^{-2}$	$2,04583372560 \times 10^{-2}$
3	$7,89872996947 \times 10^{-5}$	$3,77340953539 \times 10^{-4}$	$1,60322545989 \times 10^{-2}$	$1,62890957854 \times 10^{-2}$
4	$2,78737903267 \times 10^{-5}$	$9,43490238184 \times 10^{-5}$	$1,15559263312 \times 10^{-2}$	$1,23987671507 \times 10^{-2}$
5	$9,53940650848 \times 10^{-6}$	$2,25416203210 \times 10^{-5}$	$8,98963920181 \times 10^{-3}$	$9,18244577903 \times 10^{-3}$
6	$3,37890508641 \times 10^{-6}$	$5,64284113072 \times 10^{-6}$	$6,49922000584 \times 10^{-3}$	$6,64961506195 \times 10^{-3}$
7	$1,05459458756 \times 10^{-6}$	$1,52967262161 \times 10^{-6}$	$4,79182455791 \times 10^{-3}$	$3,81409619886 \times 10^{-3}$
8	$3,96312386998 \times 10^{-7}$	$3,38093252013 \times 10^{-7}$	$3,22726389047 \times 10^{-3}$	$2,68510539471 \times 10^{-3}$
9	$1,18817655462 \times 10^{-7}$	$1,27844817001 \times 10^{-7}$	$2,08752562405 \times 10^{-3}$	$1,40079529512 \times 10^{-3}$
10	$4,06263556616 \times 10^{-7}$	$4,61410001335 \times 10^{-7}$	$1,07159100180 \times 10^{-3}$	$1,01937417916 \times 10^{-3}$
11	$6,33251163866 \times 10^{-6}$	$7,46979160071 \times 10^{-6}$	$5,87303939458 \times 10^{-4}$	$7,21613073746 \times 10^{-4}$
12	$1,42161356105 \times 10^{-4}$	$1,10139287226 \times 10^{-4}$	$2,43534628567 \times 10^{-4}$	$4,25474740126 \times 10^{-4}$
13	$3,72932681638 \times 10^{-3}$	$1,71521867264 \times 10^{-3}$	$1,43447030154 \times 10^{-3}$	$3,41889882704 \times 10^{-3}$
14	$7,54630589742 \times 10^{-2}$	$2,10012146551 \times 10^{-2}$	$2,82577899685 \times 10^{-2}$	$9,32826037883 \times 10^{-2}$

Fonte: do autor

Tabela 6.11: $\overline{E}_{abs}$ para a inversão das correntes I por meio do Algoritmo Wynn-Rho.

M	I_1	I_2	I_3	I_4
2	$1,60477691741 \times 10^{-15}$	$9,21481048117 \times 10^{-3}$	$4,17386123124 \times 10^{-1}$	$1,27693098829 \times 10^0$
4	$2,55351295664 \times 10^{-15}$	$1,28706981270 \times 10^{-4}$	$4,54653688783 \times 10^{-1}$	$3,96135474255 \times 10^{-1}$
6	$1,90857430870 \times 10^{-14}$	$1,94353047917 \times 10^{-7}$	$4,01732762569 \times 10^{-1}$	$1,44838055176 \times 10^2$
8	$9,39854255028 \times 10^{-14}$	$3,31357733500 \times 10^{-8}$	$5,70527504796 \times 10^{-2}$	$3,20844686232 \times 10^{-1}$
10	$1,80365823287 \times 10^{-12}$	$1,88051021898 \times 10^{-7}$	$2,19572139150 \times 10^{-2}$	$1,47936788152 \times 10^{-2}$
12	$1,34078939870 \times 10^{-10}$	$3,77405495220 \times 10^{-7}$	$1,57269073591 \times 10^{-2}$	$4,59201373873 \times 10^{-1}$
14	$3,25139935178 \times 10^{-10}$	$3,67626795257 \times 10^{-7}$	$1,13952902346 \times 10^{-2}$	$1,34520109378 \times 10^{-1}$
16	$1,49028547079 \times 10^{-10}$	$8,76380125762 \times 10^{-7}$	$1,38516034383 \times 10^{-2}$	$2,17233058493 \times 10^{-2}$

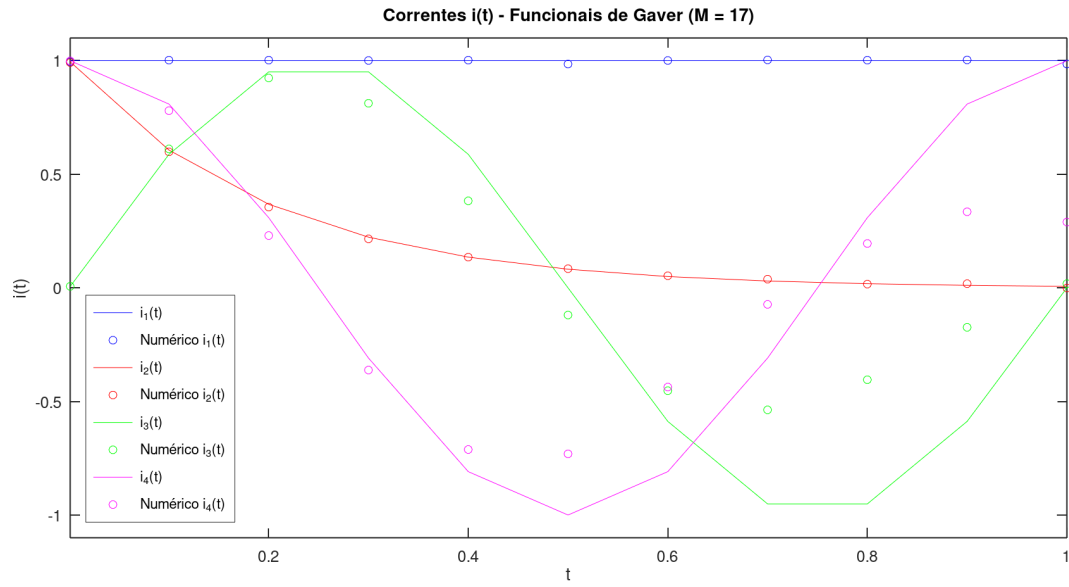
Fonte: do autor

Tabela 6.12: $\overline{E}_{abs}$ para a inversão das tensões V por meio do Algoritmo Wynn-Rho.

M	V_1	V_2	V_3	V_4
2	$1,68096220792 \times 10^{-4}$	$7,11936637704 \times 10^{-4}$	$2,08824227331 \times 10^{-2}$	$4,52566655676 \times 10^{-2}$
4	$4,47318857568 \times 10^{-5}$	$5,02490189188 \times 10^{-5}$	$2,84007362277 \times 10^{-2}$	$1,63480660615 \times 10^{-2}$
6	$1,78520618749 \times 10^{-6}$	$1,04820618511 \times 10^{-6}$	$3,97160008771 \times 10^{-2}$	$2,64688086730 \times 10^{-2}$
8	$2,74913374588 \times 10^{-7}$	$2,20299693355 \times 10^{-7}$	$2,63046909660 \times 10^{-3}$	$1,52986795513 \times 10^{-2}$
10	$2,17451235042 \times 10^{-7}$	$2,59440235545 \times 10^{-7}$	$5,22662011884 \times 10^{-4}$	$8,71094667915 \times 10^{-4}$
12	$5,75603828579 \times 10^{-7}$	$4,94001803213 \times 10^{-7}$	$1,30546047550 \times 10^{-3}$	$5,31903268863 \times 10^{-4}$
14	$5,15352194001 \times 10^{-7}$	$3,17059713158 \times 10^{-7}$	$4,31106741551 \times 10^{-4}$	$6,33935725012 \times 10^{-4}$
16	$1,06230212785 \times 10^{-6}$	$4,97793222952 \times 10^{-7}$	$1,84152332903 \times 10^{-3}$	$8,92003088240 \times 10^{-4}$

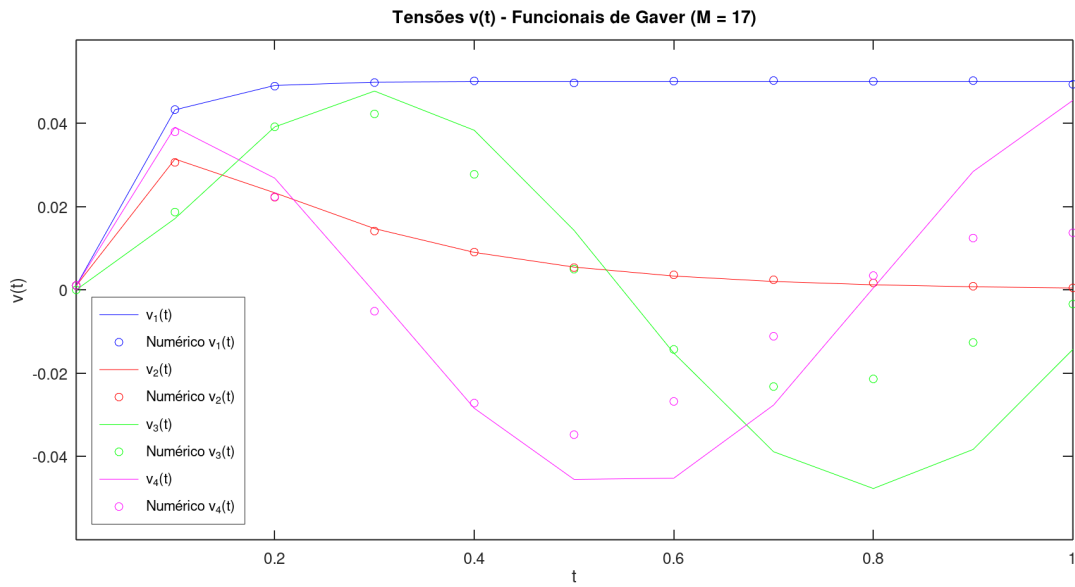
Fonte: do autor

Figura 6.2: Resultados para as correntes I obtidos por meio dos Funcionais de Gaver, com $M = 17$.



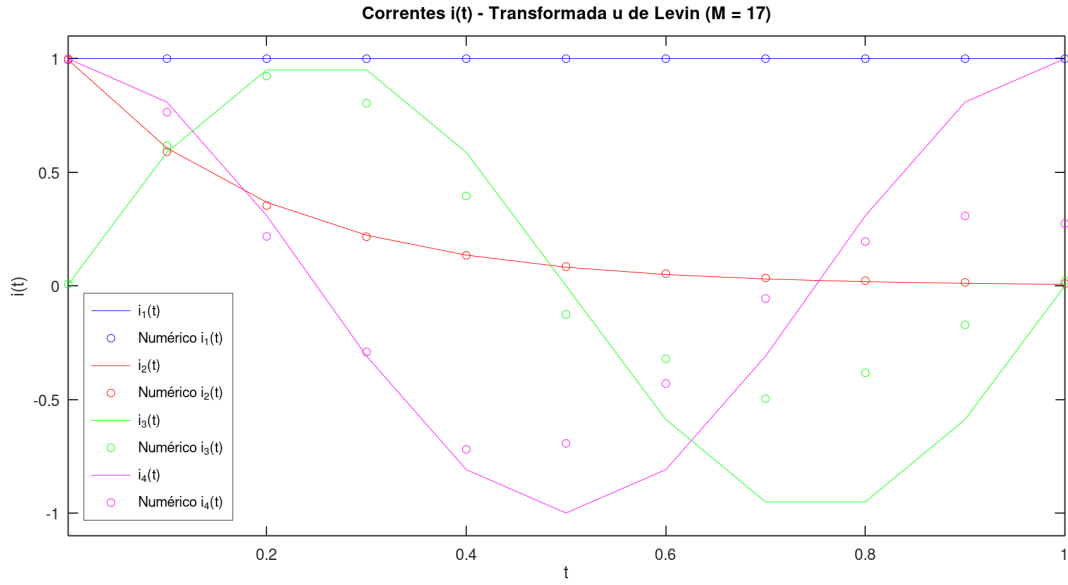
Fonte: do autor

Figura 6.3: Resultados para as Tensões V obtidos por meio dos Funcionais de Gaver, com $M = 17$.



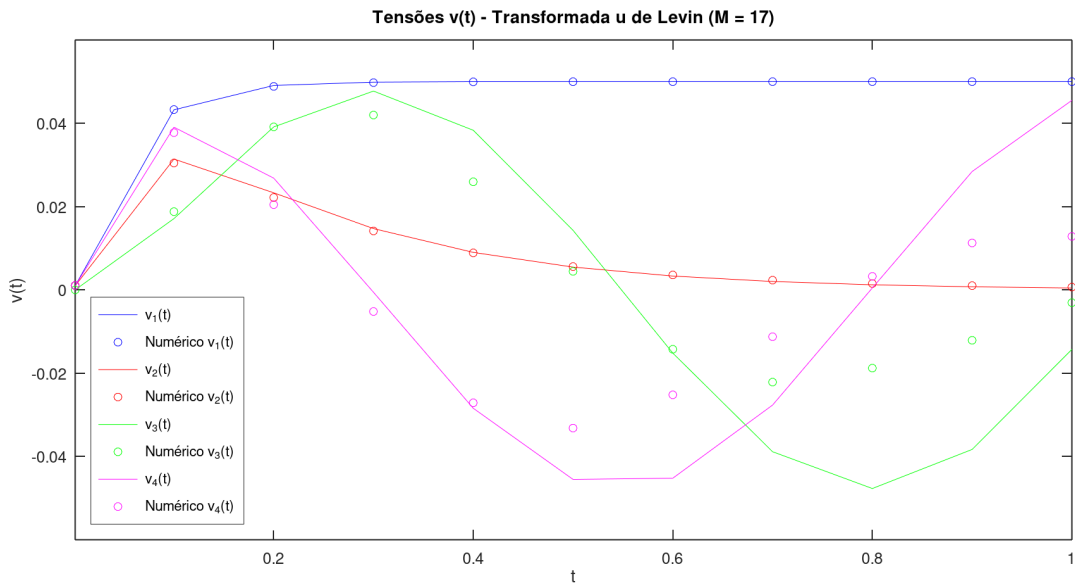
Fonte: do autor

Figura 6.4: Resultados para as correntes I obtidos por meio da Transformada u de Levin, com $M = 17$.



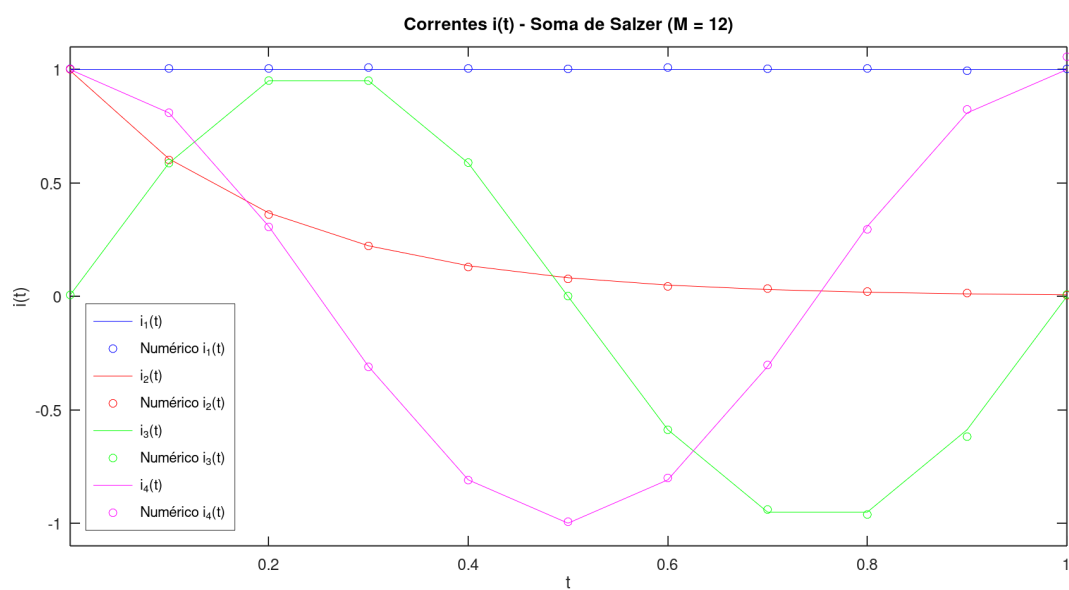
Fonte: do autor

Figura 6.5: Resultados para as Tensões V obtidos por meio da Transformada u de Levin, com $M = 17$.



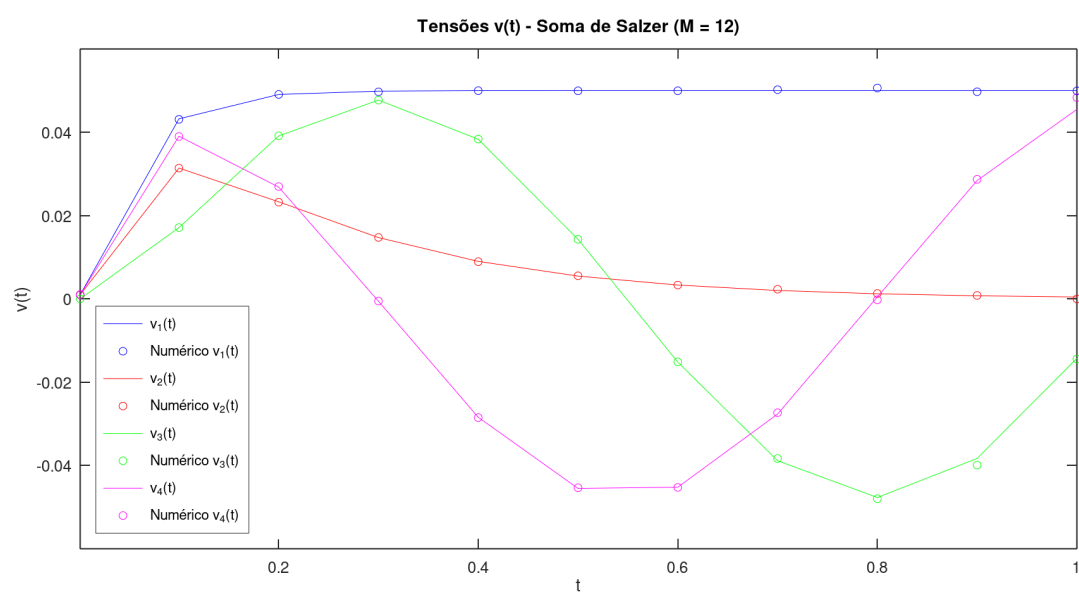
Fonte: do autor

Figura 6.6: Resultados para as correntes I obtidos por meio da Soma de Salzer, com $M = 12$.



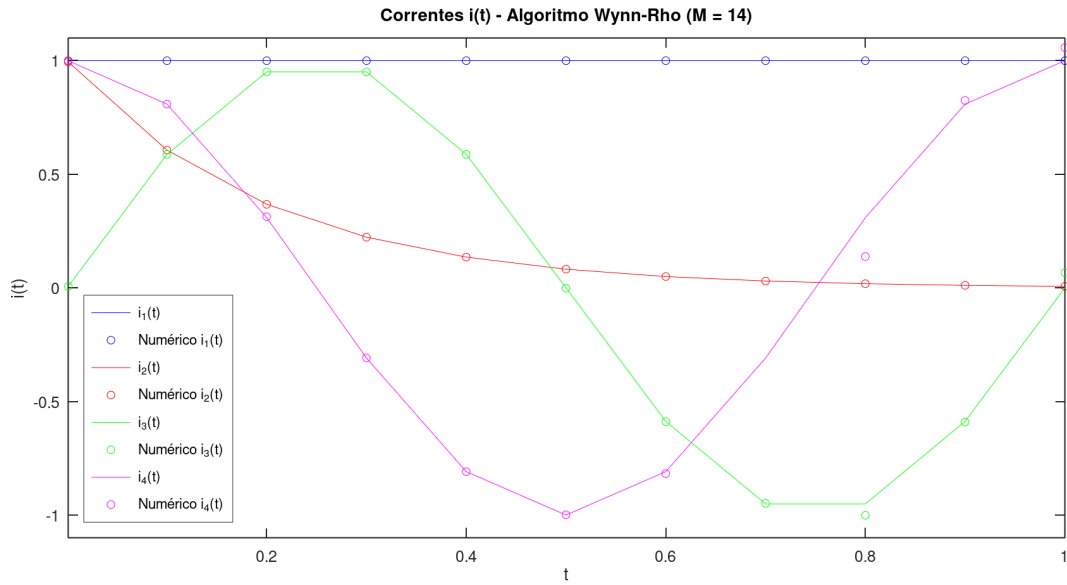
Fonte: do autor

Figura 6.7: Resultados para as Tensões V obtidos por meio da Soma de Salzer, com $M = 12$.



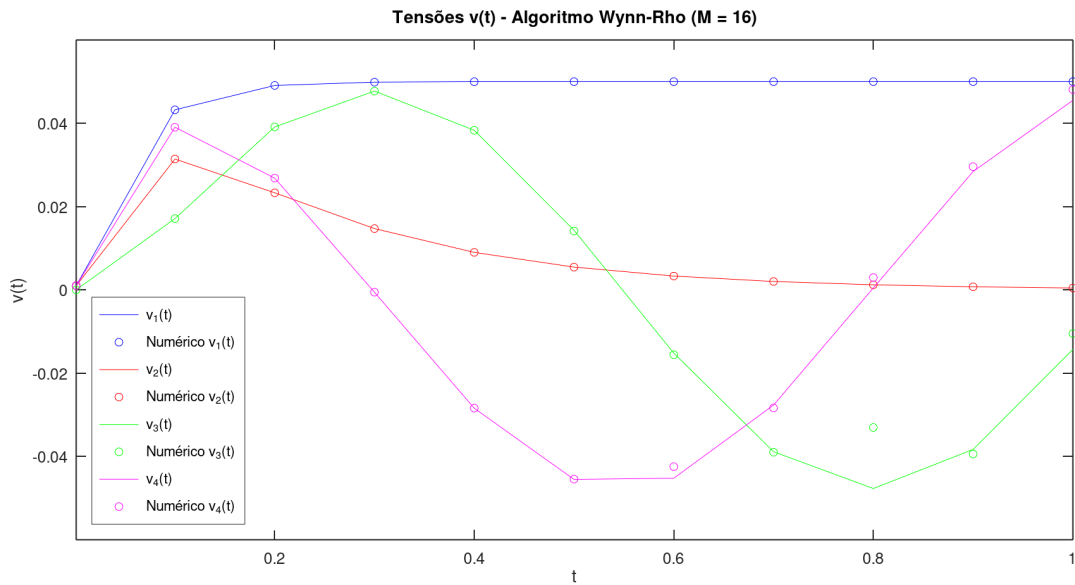
Fonte: do autor

Figura 6.8: Resultados para as correntes I obtidos por meio do Algoritmo Wynn-Rho, com $M = 14$.



Fonte: do autor

Figura 6.9: Resultados para as Tensões V obtidos por meio do Algoritmo Wynn-Rho, com $M = 16$.



Fonte: do autor

6.2 Problema de Transporte de Solute em Meio Poroso

O modelo de Transporte de Solute em Meio Poroso é descrito pela equação

$$D_{hd} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = u \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial t} , \quad (6.3)$$

sujeita as condições:

$$C(x, 0) = 0, \quad x \geq 0 ; \quad (6.4)$$

$$C(0, t) = C_0, \quad t \geq 0 ; \quad (6.5)$$

$$C(x \rightarrow \infty, t) = 0, \quad t \geq 0 . \quad (6.6)$$

A solução no domínio de Laplace da equação (6.3), sujeita as condições (6.4), (6.5) e (6.6), aplicando a Transformada de Laplace na variável t , é dada por

$$\frac{\bar{C}(x, s)}{C_0} = \frac{1}{s} e^{\left(\frac{u}{2D_{hd}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4s}{D_{hd}} + \left(\frac{u}{D_{hd}} \right)^2} \right) x} , \quad (6.7)$$

onde D_{hd} é o coeficiente de dispersão hidrodinâmica e u é a velocidade média do fluido.

Aplicando a Transformada Inversa de Laplace em (6.7), tem-se

$$\frac{C(x, t)}{C_0} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\alpha - \frac{\epsilon}{\alpha} \right) + e^{4\epsilon} \operatorname{erfc} \left(\alpha - \frac{\epsilon}{\alpha} \right) \right] , \quad (6.8)$$

onde C é concentração do soluto no fluido, $\epsilon = \frac{ux}{4D_{hd}}$, $\alpha = \frac{x}{2\sqrt{D_{hd}t}}$ e erfc é a função erro complementar, definida como

$$\operatorname{erfc}(t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du . \quad (6.9)$$

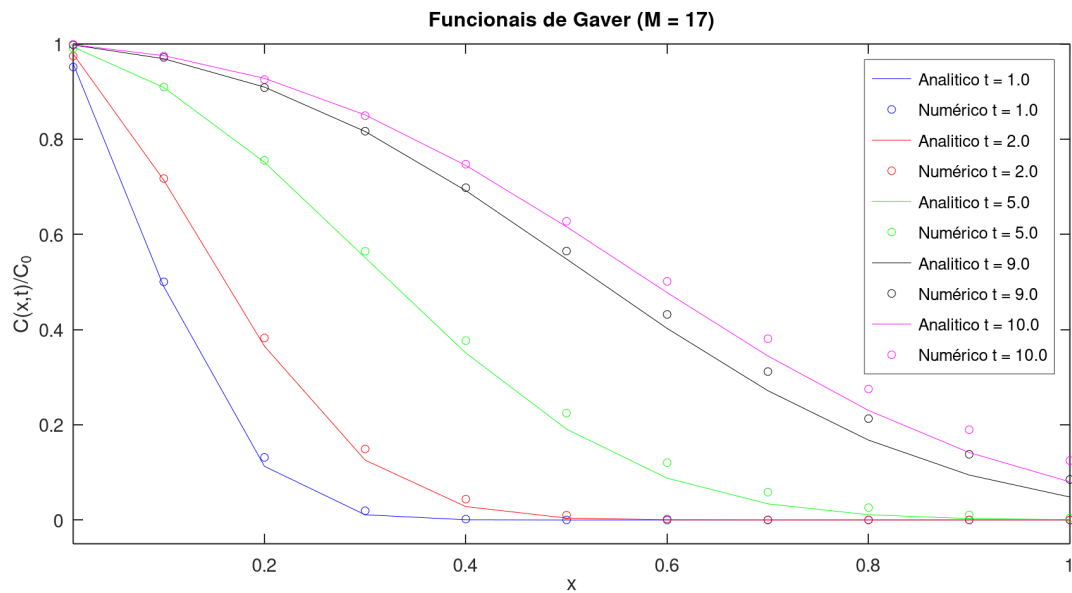
As Tabelas 6.14 – 6.17 e as Figuras 6.10 – 6.13 apresentam os resultados da inversão numérica da equação (6.7). Para esta aplicação foi utilizado o Erro Absoluto Médio em relação a t , a fim de fazer uma comparação com o trabalho de Pilatti (2019), que mostra os resultados para cada um dos cinco valores de t . A Tabela 6.13 mostra os M ótimos para cada valor de t . Para as simulações foram utilizados $D_{hd} = 0,005 \text{ m}^2/\text{s}$, $u = 0,05 \text{ m/s}$, $x \in [10^{-2}, 1]$ e $t = \{1, 2, 5, 9, 10\}$.

De modo geral, os Erros Absolutos Médios crescem quando o valor de t aumenta, porém a ordem deles se mantém similar para os M ótimos. Nesta aplicação, a Soma de Salzer e o Algoritmo Wynn-Rho tiveram um desempenho melhor que os demais métodos.

Tabela 6.13: M ótimos e ordem do $\overline{E}_{abs}$ em relação a t .

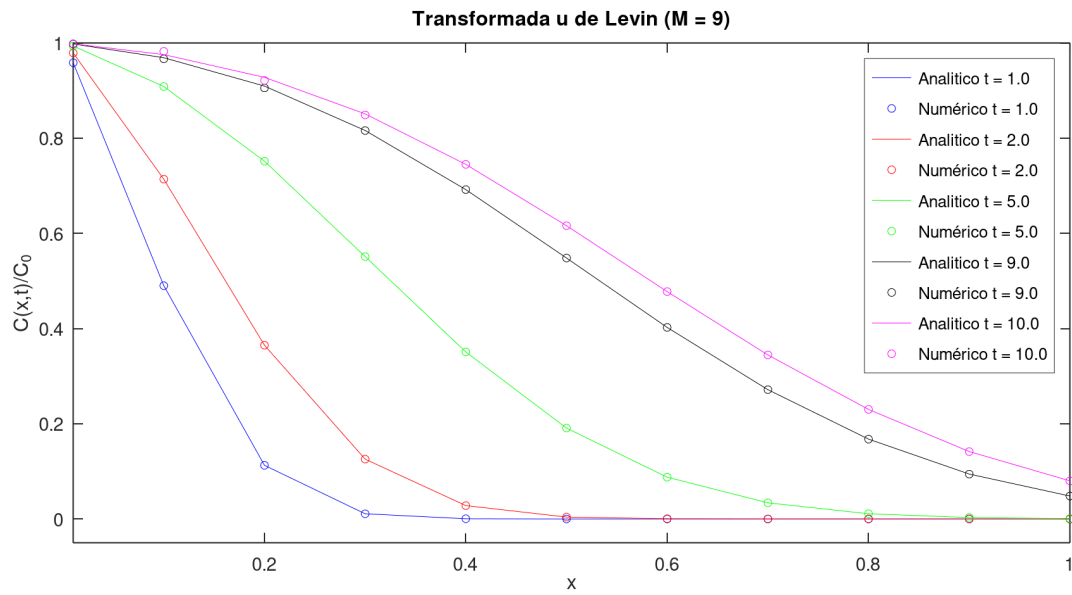
	Funcionais de Gaver	Transformada u de Levin	Soma de Salzer	Wynn-Rho
$t = 1$	16 $[10^{-3}]$	9 $[10^{-6}]$	9 $[10^{-7}]$	12 $[10^{-7}]$
$t = 2$	17 $[10^{-3}]$	9 $[10^{-5}]$	10 $[10^{-6}]$	12 $[10^{-8}]$
$t = 5$	17 $[10^{-2}]$	10 $[10^{-5}]$	10 $[10^{-6}]$	12 $[10^{-7}]$
$t = 9$	17 $[10^{-2}]$	10 $[10^{-4}]$	10 $[10^{-6}]$	12 $[10^{-6}]$
$t = 10$	17 $[10^{-2}]$	11 $[10^{-4}]$	10 $[10^{-6}]$	16 $[10^{-6}]$

Fonte: do autor

Figura 6.10: Resultados para o problema de Transporte de Soluto, obtidos por meio dos Funcionais de Gaver, com $M = 17$.

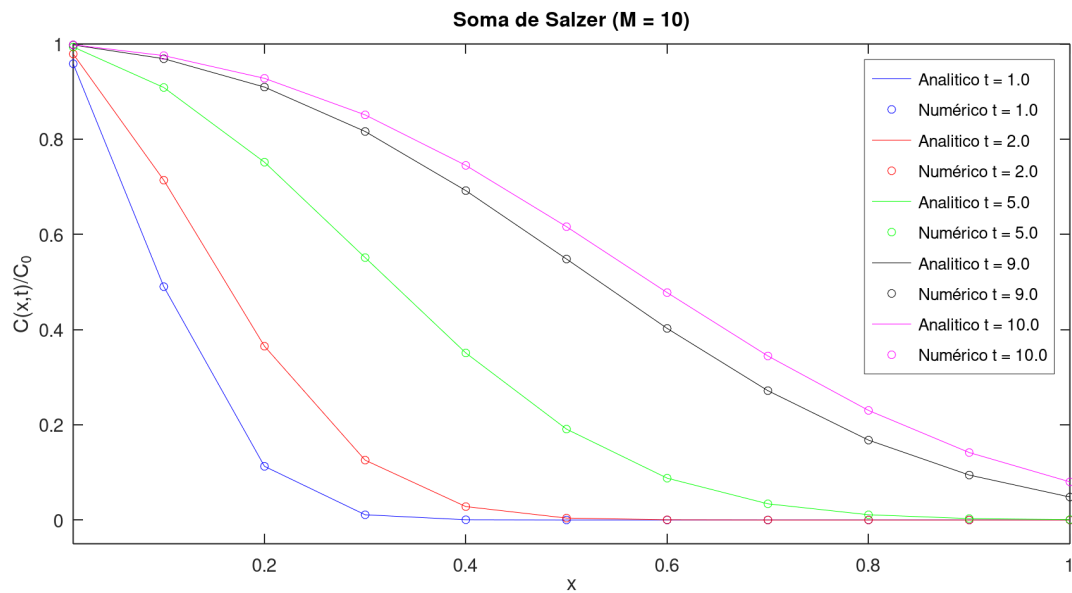
Fonte: do autor

Figura 6.11: Resultados para o problema de Transporte de Solute, obtidos por meio da Transformada u de Levin, com $M = 9$.



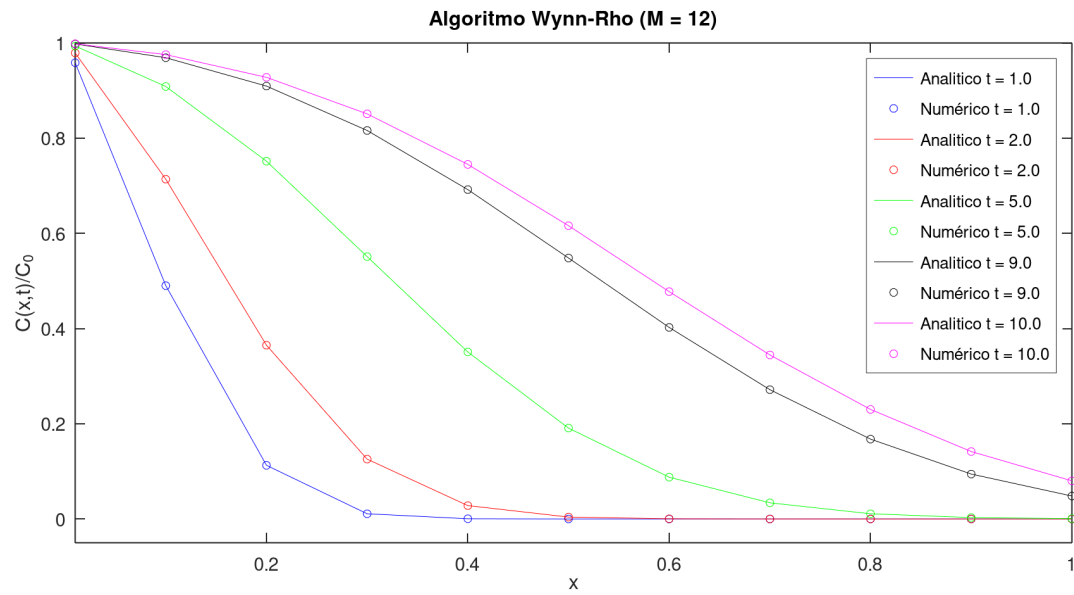
Fonte: do autor

Figura 6.12: Resultados para o problema de Transporte de Solute, obtidos por meio da Soma de Salzer, com $M = 10$.



Fonte: do autor

Figura 6.13: Resultados para o problema de Transporte de Solute, obtidos por meio do Algoritmo Wynn-Rho, com $M = 12$.



Fonte: do autor

Tabela 6.14: $\overline{E}_{abs}$ para o problema de Transporte de Solutos, em relação a t , por meio dos Funcionais de Galerkin.

M	$t = 1$	$t = 2$	$t = 5$	$t = 9$	$t = 10$
$M = 1$	$6,1867468234 \times 10^{-2}$	$1,1026855921 \times 10^{-1}$	$1,9622787453 \times 10^{-1}$	$1,8578153351 \times 10^{-1}$	$1,7171579481 \times 10^{-1}$
$M = 2$	$3,0647056449 \times 10^{-2}$	$5,5066756756 \times 10^{-2}$	$1,1257676883 \times 10^{-1}$	$1,2055556652 \times 10^{-1}$	$1,1315185733 \times 10^{-1}$
$M = 3$	$2,0350971284 \times 10^{-2}$	$3,6497810049 \times 10^{-2}$	$7,8335891188 \times 10^{-2}$	$8,9925932756 \times 10^{-2}$	$8,4971172824 \times 10^{-2}$
$M = 4$	$1,5231209380 \times 10^{-2}$	$2,7271568382 \times 10^{-2}$	$5,9891883262 \times 10^{-2}$	$7,1832847491 \times 10^{-2}$	$6,8408321993 \times 10^{-2}$
$M = 5$	$1,2169239094 \times 10^{-2}$	$2,1764524721 \times 10^{-2}$	$4,8413603891 \times 10^{-2}$	$5,9846770892 \times 10^{-2}$	$5,7359290936 \times 10^{-2}$
$M = 6$	$1,0132237811 \times 10^{-2}$	$1,8106870079 \times 10^{-2}$	$4,0598645345 \times 10^{-2}$	$5,1309023135 \times 10^{-2}$	$4,9409295161 \times 10^{-2}$
$M = 7$	$8,6793987480 \times 10^{-3}$	$1,5501380885 \times 10^{-2}$	$3,4941697625 \times 10^{-2}$	$4,4913371349 \times 10^{-2}$	$4,3408072675 \times 10^{-2}$
$M = 8$	$7,5909635541 \times 10^{-3}$	$1,3551275266 \times 10^{-2}$	$3,0660675019 \times 10^{-2}$	$3,9941083273 \times 10^{-2}$	$3,8714168061 \times 10^{-2}$
$M = 9$	$6,7451119736 \times 10^{-3}$	$1,2036942799 \times 10^{-2}$	$2,7309698044 \times 10^{-2}$	$3,5963348828 \times 10^{-2}$	$3,4940753770 \times 10^{-2}$
$M = 10$	$6,0688767545 \times 10^{-3}$	$1,0827013583 \times 10^{-2}$	$2,4616299188 \times 10^{-2}$	$3,2708227990 \times 10^{-2}$	$3,1840356600 \times 10^{-2}$
$M = 11$	$5,5158878759 \times 10^{-3}$	$9,8380955748 \times 10^{-3}$	$2,2404733071 \times 10^{-2}$	$2,9994815601 \times 10^{-2}$	$2,9247149048 \times 10^{-2}$
$M = 12$	$5,0552496730 \times 10^{-3}$	$9,0146736415 \times 10^{-3}$	$2,0556666824 \times 10^{-2}$	$2,7698060699 \times 10^{-2}$	$2,7045733306 \times 10^{-2}$
$M = 13$	$4,6657749433 \times 10^{-3}$	$8,3184272885 \times 10^{-3}$	$1,8989248591 \times 10^{-2}$	$2,5728459900 \times 10^{-2}$	$2,5153281543 \times 10^{-2}$
$M = 14$	$4,3320085872 \times 10^{-3}$	$7,7221533757 \times 10^{-3}$	$1,7644446154 \times 10^{-2}$	$2,4022101784 \times 10^{-2}$	$2,3510498934 \times 10^{-2}$
$M = 15$	$4,0379120595 \times 10^{-3}$	$7,1948134418 \times 10^{-3}$	$1,6482059476 \times 10^{-2}$	$2,2524061996 \times 10^{-2}$	$2,2054821737 \times 10^{-2}$
$M = 16$	$3,8450951786 \times 10^{-3}$	$6,8817585840 \times 10^{-3}$	$1,5507178189 \times 10^{-2}$	$2,1244916402 \times 10^{-2}$	$2,0815768496 \times 10^{-2}$
$M = 17$	$4,1434743521 \times 10^{-3}$	$6,6013161309 \times 10^{-3}$	$1,4911804233 \times 10^{-2}$	$2,0214275408 \times 10^{-2}$	$1,9798746190 \times 10^{-2}$
$M = 18$	$5,8525344274 \times 10^{-3}$	$1,1865900011 \times 10^{-2}$	$2,0030760658 \times 10^{-2}$	$2,4866506890 \times 10^{-2}$	$2,0216944846 \times 10^{-2}$
$M = 19$	$4,3270307784 \times 10^{-2}$	$4,9837552016 \times 10^{-2}$	$3,7665494807 \times 10^{-2}$	$7,6293521284 \times 10^{-2}$	$4,6718449598 \times 10^{-2}$
$M = 20$	$4,1991810949 \times 10^{-1}$	$9,4688625547 \times 10^{-2}$	$5,2421831336 \times 10^{-1}$	$4,3716230362 \times 10^{-1}$	$2,7978875307 \times 10^{-1}$

Fonte: do autor

Tabela 6.15: $\overline{E}_{abs}$ para o problema de Transporte de Solute por meio da Transformada u de Levin.

M	$t = 1$	$t = 2$	$t = 5$	$t = 9$	$t = 10$
$M = 1$	$6,1867468234 \times 10^{-2}$	$1,1026855921 \times 10^{-1}$	$1,9622787453 \times 10^{-1}$	$1,8578153351 \times 10^{-1}$	$1,7171579481 \times 10^{-1}$
$M = 2$	$4,3779827798 \times 10^{-2}$	$7,8899036492 \times 10^{-2}$	$1,4430926296 \times 10^{-1}$	$1,3874506301 \times 10^{-1}$	$1,2820621689 \times 10^{-1}$
$M = 3$	$8,0699947184 \times 10^{-2}$	$2,3138535963 \times 10^{-1}$	$5,0219874161 \times 10^0$	$6,3949719415 \times 10^{-1}$	$7,5069995837 \times 10^{-1}$
$M = 4$	$8,4260766038 \times 10^{-3}$	$1,6577661406 \times 10^{-2}$	$4,2708861632 \times 10^{-2}$	$5,5443824754 \times 10^{-2}$	$5,3078320083 \times 10^{-2}$
$M = 5$	$2,4403468977 \times 10^{-3}$	$4,9093460083 \times 10^{-3}$	$1,3994687222 \times 10^{-2}$	$2,4566034300 \times 10^{-2}$	$2,5422221107 \times 10^{-2}$
$M = 6$	$5,0631507615 \times 10^{-4}$	$1,0279484925 \times 10^{-3}$	$2,9036227932 \times 10^{-3}$	$4,8694514945 \times 10^{-3}$	$5,1913291002 \times 10^{-3}$
$M = 7$	$8,0912852252 \times 10^{-5}$	$1,7112899557 \times 10^{-4}$	$4,5294833421 \times 10^{-4}$	$1,4297498781 \times 10^{-3}$	$2,0986861538 \times 10^{-3}$
$M = 8$	$2,4251588664 \times 10^{-5}$	$5,3944108877 \times 10^{-5}$	$1,7010120232 \times 10^{-4}$	$1,0193332114 \times 10^{-3}$	$1,2343940218 \times 10^{-3}$
$M = 9$	$7,2624404869 \times 10^{-6}$	$2,2778880556 \times 10^{-5}$	$7,0852439620 \times 10^{-5}$	$6,1646343333 \times 10^{-4}$	$1,4700525862 \times 10^{-3}$
$M = 10$	$1,2294755833 \times 10^{-5}$	$3,0488416320 \times 10^{-5}$	$4,1872972706 \times 10^{-5}$	$5,4197730315 \times 10^{-4}$	$9,0250789161 \times 10^{-4}$
$M = 11$	$2,0819901553 \times 10^{-5}$	$5,0737089357 \times 10^{-5}$	$4,8554411313 \times 10^{-5}$	$6,2229446916 \times 10^{-4}$	$8,7703221262 \times 10^{-4}$
$M = 12$	$1,1203290932 \times 10^{-4}$	$5,9106042555 \times 10^{-4}$	$1,1399194399 \times 10^{-3}$	$1,5705973274 \times 10^{-3}$	$1,5016266378 \times 10^{-3}$
$M = 13$	$2,1594308757 \times 10^{-3}$	$5,3134730418 \times 10^{-3}$	$1,6907924260 \times 10^{-3}$	$2,6776938880 \times 10^{-3}$	$9,7907040912 \times 10^{-3}$
$M = 14$	$2,0407389706 \times 10^{-3}$	$4,7812360024 \times 10^{-3}$	$1,0889829733 \times 10^{-1}$	$1,0234857617 \times 10^{-2}$	$8,7751991311 \times 10^{-3}$
$M = 15$	$1,8108528607 \times 10^{-3}$	$8,1771657618 \times 10^{-3}$	$1,1333876466 \times 10^{-2}$	$1,9188502810 \times 10^{-1}$	$1,6722597057 \times 10^{-2}$
$M = 16$	$3,4663346602 \times 10^{-3}$	$7,1154566369 \times 10^{-3}$	$2,5494298001 \times 10^{-2}$	$2,2662284310 \times 10^{-2}$	$2,1559609273 \times 10^{-2}$
$M = 17$	$3,4731731388 \times 10^{-3}$	$7,2123754463 \times 10^{-3}$	$1,7029434111 \times 10^{-2}$	$2,3286980756 \times 10^{-2}$	$2,1387291411 \times 10^{-2}$
$M = 18$	$3,0357197213 \times 10^{-3}$	$6,6951803284 \times 10^{-3}$	$1,4762283318 \times 10^{-2}$	$8,2830412291 \times 10^{-2}$	$2,1425361999 \times 10^{-2}$
$M = 19$	$3,9585963640 \times 10^{-3}$	$6,4221976966 \times 10^{-3}$	$1,4176586676 \times 10^{-2}$	$1,9591867579 \times 10^{-2}$	$2,2079065703 \times 10^{-2}$
$M = 20$	$3,2891681404 \times 10^{-3}$	$6,1551822548 \times 10^{-3}$	$1,3818400083 \times 10^{-2}$	$1,8557254510 \times 10^{-2}$	$1,8672610021 \times 10^{-2}$

Fonte: do autor

Tabela 6.16: $\overline{E}_{abs}$ para o problema de Transporte de Solute por meio da Soma de Salzer.

M	$t = 1$	$t = 2$	$t = 5$	$t = 9$	$t = 10$
$M = 1$	$6,1867468234 \times 10^{-2}$	$1,1026855921 \times 10^{-1}$	$1,9622787453 \times 10^{-1}$	$1,8578153351 \times 10^{-1}$	$1,7171579481 \times 10^{-1}$
$M = 2$	$1,1112573205 \times 10^{-2}$	$2,2650479532 \times 10^{-2}$	$3,6081545000 \times 10^{-2}$	$5,7510311763 \times 10^{-2}$	$5,6702712243 \times 10^{-2}$
$M = 3$	$2,2571220322 \times 10^{-3}$	$4,6194429326 \times 10^{-3}$	$1,1534004961 \times 10^{-2}$	$1,6769096552 \times 10^{-2}$	$1,8301470632 \times 10^{-2}$
$M = 4$	$5,8671705306 \times 10^{-4}$	$1,2173092457 \times 10^{-3}$	$3,7172745385 \times 10^{-3}$	$4,6442141677 \times 10^{-3}$	$5,7920560169 \times 10^{-3}$
$M = 5$	$1,3858722678 \times 10^{-4}$	$2,9429843381 \times 10^{-4}$	$1,0482189962 \times 10^{-3}$	$1,4626861367 \times 10^{-3}$	$1,7598841910 \times 10^{-3}$
$M = 6$	$2,8577553795 \times 10^{-5}$	$8,9511238063 \times 10^{-5}$	$2,8738216344 \times 10^{-4}$	$4,6455216131 \times 10^{-4}$	$5,5631713714 \times 10^{-4}$
$M = 7$	$6,5951686770 \times 10^{-6}$	$2,4195155483 \times 10^{-5}$	$9,4317252657 \times 10^{-5}$	$1,5521472408 \times 10^{-4}$	$1,7343208939 \times 10^{-4}$
$M = 8$	$1,6446349015 \times 10^{-6}$	$6,4526399413 \times 10^{-6}$	$2,8375393574 \times 10^{-5}$	$4,9736357042 \times 10^{-5}$	$5,7862654389 \times 10^{-5}$
$M = 9$	$5,0571680307 \times 10^{-7}$	$2,6378961336 \times 10^{-6}$	$8,9799355245 \times 10^{-6}$	$1,4873708877 \times 10^{-5}$	$2,0109011723 \times 10^{-5}$
$M = 10$	$1,0484101334 \times 10^{-6}$	$2,2491923977 \times 10^{-6}$	$4,6984569632 \times 10^{-6}$	$8,3591717769 \times 10^{-6}$	$8,8271585808 \times 10^{-6}$
$M = 11$	$3,6198126043 \times 10^{-6}$	$2,0472506285 \times 10^{-5}$	$3,6042925604 \times 10^{-5}$	$1,0077344873 \times 10^{-4}$	$4,8536480932 \times 10^{-5}$

Fonte: do autor

Tabela 6.17: $\overline{E}_{abs}$ para o problema de Transporte de Solute por meio do Algoritmo Wynn-Rho.

M	$t = 1$	$t = 2$	$t = 5$	$t = 9$	$t = 10$
$M = 2$	$1,6820116934 \times 10^{-2}$	$3,1536894377 \times 10^{-2}$	$6,9921698119 \times 10^{-2}$	$7,8920775799 \times 10^{-2}$	$7,4204048199 \times 10^{-2}$
$M = 4$	$6,9287789333 \times 10^{-4}$	$1,4853378455 \times 10^{-3}$	$3,4033018956 \times 10^{-3}$	$2,5456697189 \times 10^{-3}$	$4,1865211317 \times 10^{-3}$
$M = 6$	$2,2192423793 \times 10^{-5}$	$1,6123306540 \times 10^{-4}$	$7,2544093437 \times 10^{-5}$	$3,6689805751 \times 10^{-4}$	$1,5273836649 \times 10^{-4}$
$M = 8$	$1,2251555224 \times 10^{-6}$	$2,2946283193 \times 10^{-5}$	$3,7669674896 \times 10^{-6}$	$9,3376262651 \times 10^{-6}$	$1,3940588639 \times 10^{-5}$
$M = 10$	$1,7477199998 \times 10^{-7}$	$2,4528064323 \times 10^{-7}$	$4,8592791906 \times 10^{-6}$	$2,7201605301 \times 10^{-6}$	$6,8294249842 \times 10^{-6}$
$M = 12$	$1,4545926591 \times 10^{-7}$	$7,0649286432 \times 10^{-8}$	$8,8219240608 \times 10^{-7}$	$2,3236236085 \times 10^{-6}$	$8,7889614950 \times 10^{-6}$
$M = 14$	$2,5327451891 \times 10^{-7}$	$4,3181407532 \times 10^{-7}$	$1,1516031916 \times 10^{-6}$	$3,1569490893 \times 10^{-6}$	$9,8229085595 \times 10^{-6}$
$M = 16$	$2,1779823063 \times 10^{-7}$	$6,7995941272 \times 10^{-7}$	$6,4085242008 \times 10^{-6}$	$5,2880017588 \times 10^{-6}$	$5,9277819956 \times 10^{-6}$

Fonte: do autor

6.3 Difusão de Íons

O modelo de Difusão de Íons, representado pela Figura 6.14, é descrito pela equação

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = D_f \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2}, \quad (6.10)$$

sujeita as condições:

$$C(x, 0) = 0, \quad x \geq 0; \quad (6.11)$$

$$\frac{\partial C(0, t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0; \quad (6.12)$$

$$C(L, t) = C_0, \quad t \geq 0, \quad (6.13)$$

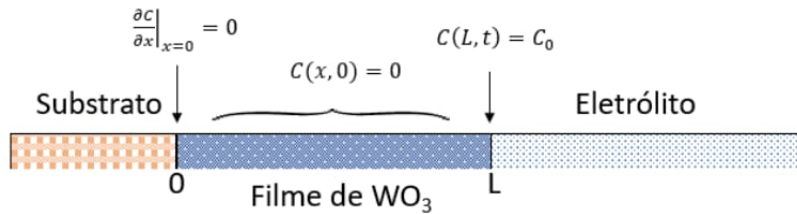
onde C é a concentração do intercalante, e os demais parâmetros, assim como seus respectivos valores, são apresentados na Tabela 6.18.

Tabela 6.18: Nomenclatura e valores dos parâmetros utilizados.

Símbolos	Descrição	Valores
C_0 (mol/cm ³)	Concentração inicial	0, 1
D_f (cm ² /s)	Coeficiente de difusão	1×10^{-13}
L (cm)	Comprimento do filme	$2, 3 \times 10^{-6}$
N_x	Número de pontos avaliados na direção x	11
N_t	Número de pontos avaliados na direção t	5
N	Truncamento do somatório da solução analítica	13

Fonte: Adaptado de Ferreira et al. (2023).

Figura 6.14: Representação do problema de difusão de íons.



Fonte: Adaptado de Rodrigues (2022).

Aplicando a Transformada de Laplace na equação (6.10), na variável t , obtém-se

$$\bar{C}(x, s) = \frac{C_0 \cosh\left(\sqrt{\frac{s}{D_f}} x\right)}{s \cosh\left(\sqrt{\frac{s}{D_f}} L\right)}. \quad (6.14)$$

A solução das equações (6.10) – (6.13) é dada por

$$C(x, t) = C_0 - \frac{4C_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} e^{\left(-\frac{D_f(2n+1)^2\pi^2 t}{4L^2}\right)} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right). \quad (6.15)$$

As Tabelas 6.20 – 6.23 e as Figuras 6.15 – 6.18 apresentam os resultados da inversão numérica da equação (6.14). Para esta aplicação, foi utilizado o Erro Absoluto Médio em relação a t , a fim de fazer uma comparação com o trabalho de Ferreira et al. (2023), que mostra os resultados para cada um dos cinco valores de t . A Tabela 6.19 mostra os M ótimos para cada valor de t . Para as simulações foram utilizados $x \in [0, L]$ e $t = \{0, 5, 1, 5, 10, 50\}$.

Da mesma maneira que na aplicação da seção 6.2, a ordem dos Erros Absolutos Médios são similares para os diferentes valores de t , com exceção da Transformada u de Levin que tem uma variação de 10^{-7} para 10^{-4} (em $t = 50$).

Neste modelo, o método com o melhor desempenho foi a Soma de Salzer, com Erros Absolutos Médios na ordem de 10^{-8} para todos os valores de t . O Algoritmo Wynn-Rho gerou Erros Absolutos Médios com ordem similar a Soma de Salzer, porém com erros de ordem maior para $t = 10$ e $t = 50$.

Tabela 6.19: M ótimos e ordem do $\overline{E}_{abs}$ em relação a t .

	Funcionais de Gaver	Transformada u de Levin	Soma de Salzer	Wynn-Rho
$t = 0, 5$	15 [10^{-4}]	10 [10^{-7}]	9 [10^{-8}]	12 [10^{-8}]
$t = 1$	15 [10^{-4}]	9 [10^{-7}]	9 [10^{-8}]	10 [10^{-8}]
$t = 5$	16 [10^{-4}]	9 [10^{-7}]	9 [10^{-8}]	14 [10^{-8}]
$t = 10$	16 [10^{-3}]	9 [10^{-7}]	9 [10^{-8}]	8 [10^{-7}]
$t = 50$	15 [10^{-4}]	16 [10^{-4}]	9 [10^{-8}]	8 [10^{-7}]

Fonte: do autor

Tabela 6.20: $\overline{E}_{abs}$ para o problema de Difusão de Íons por meio dos Funcionais de Gaver.

M	$t = 0,5$	$t = 1$	$t = 5$	$t = 10$	$t = 50$
$M = 1$	$3,6980769991 \times 10^{-3}$	$5,3056791526 \times 10^{-3}$	$1,2086155842 \times 10^{-2}$	$1,4127248613 \times 10^{-2}$	$9,1237687598 \times 10^{-4}$
$M = 2$	$1,9274512977 \times 10^{-3}$	$2,7549550626 \times 10^{-3}$	$6,5115135242 \times 10^{-3}$	$8,1359653993 \times 10^{-3}$	$1,2606208829 \times 10^{-4}$
$M = 3$	$1,3039295353 \times 10^{-3}$	$1,8614920659 \times 10^{-3}$	$4,4445062640 \times 10^{-3}$	$5,7058915033 \times 10^{-3}$	$7,7990169176 \times 10^{-5}$
$M = 4$	$9,8528821228 \times 10^{-4}$	$1,4058620653 \times 10^{-3}$	$3,3714705476 \times 10^{-3}$	$4,3922805497 \times 10^{-3}$	$1,4423975955 \times 10^{-4}$
$M = 5$	$7,9181785188 \times 10^{-4}$	$1,1294942857 \times 10^{-3}$	$2,7152054529 \times 10^{-3}$	$3,5699487983 \times 10^{-3}$	$1,6553390214 \times 10^{-4}$
$M = 6$	$6,6186449777 \times 10^{-4}$	$9,4396358077 \times 10^{-4}$	$2,2725892002 \times 10^{-3}$	$3,0068404710 \times 10^{-3}$	$1,6963395355 \times 10^{-4}$
$M = 7$	$5,6855699953 \times 10^{-4}$	$8,1079794247 \times 10^{-4}$	$1,9539635675 \times 10^{-3}$	$2,5971145659 \times 10^{-3}$	$1,6665083401 \times 10^{-4}$
$M = 8$	$4,9830902879 \times 10^{-4}$	$7,1056587060 \times 10^{-4}$	$1,7136552745 \times 10^{-3}$	$2,2856312279 \times 10^{-3}$	$1,6074317712 \times 10^{-4}$
$M = 9$	$4,4351200622 \times 10^{-4}$	$6,3239282163 \times 10^{-4}$	$1,5259609170 \times 10^{-3}$	$2,0408463909 \times 10^{-3}$	$1,5375648653 \times 10^{-4}$
$M = 10$	$3,9957314754 \times 10^{-4}$	$5,6971786050 \times 10^{-4}$	$1,3753117730 \times 10^{-3}$	$1,8434124047 \times 10^{-3}$	$1,4654400900 \times 10^{-4}$
$M = 11$	$3,6355572238 \times 10^{-4}$	$5,1834677872 \times 10^{-4}$	$1,2517273728 \times 10^{-3}$	$1,6808017804 \times 10^{-3}$	$1,3950843103 \times 10^{-4}$
$M = 12$	$3,3349898814 \times 10^{-4}$	$4,7548054323 \times 10^{-4}$	$1,1485282949 \times 10^{-3}$	$1,5445732158 \times 10^{-3}$	$1,3281202908 \times 10^{-4}$
$M = 13$	$3,0802310306 \times 10^{-4}$	$4,3913735980 \times 10^{-4}$	$1,0610320774 \times 10^{-3}$	$1,4286040092 \times 10^{-3}$	$1,2659325932 \times 10^{-4}$
$M = 14$	$2,8623577748 \times 10^{-4}$	$4,0819334038 \times 10^{-4}$	$9,8618017659 \times 10^{-4}$	$1,3297518777 \times 10^{-3}$	$1,2080531663 \times 10^{-4}$
$M = 15$	$2,6750945151 \times 10^{-4}$	$3,8185811777 \times 10^{-4}$	$9,2025922974 \times 10^{-4}$	$1,2441376032 \times 10^{-3}$	$1,1665265759 \times 10^{-4}$
$M = 16$	$2,7206602563 \times 10^{-4}$	$3,8236196828 \times 10^{-4}$	$8,7008741528 \times 10^{-4}$	$1,1528329496 \times 10^{-3}$	$1,6018755452 \times 10^{-4}$
$M = 17$	$3,4654696662 \times 10^{-4}$	$5,0947852382 \times 10^{-4}$	$9,2230763310 \times 10^{-4}$	$1,3614247564 \times 10^{-3}$	$3,3186808906 \times 10^{-4}$
$M = 18$	$1,1160288180 \times 10^{-3}$	$1,6493114600 \times 10^{-3}$	$1,9946649606 \times 10^{-3}$	$3,0275422033 \times 10^{-3}$	$1,8016734692 \times 10^{-3}$
$M = 19$	$4,9442826467 \times 10^{-3}$	$6,1334977549 \times 10^{-3}$	$5,5248499870 \times 10^{-3}$	$1,9956148654 \times 10^{-2}$	$6,9198877879 \times 10^{-3}$
$M = 20$	$1,6180867130 \times 10^{-2}$	$2,1887732183 \times 10^{-2}$	$4,5958816644 \times 10^{-2}$	$1,2554600305 \times 10^{-1}$	$9,2192572339 \times 10^{-2}$

Fonte: do autor

Tabela 6.21: $\overline{E}_{abs}$ para o problema de Difusão de Íons por meio da Transformada u de Levin.

M	$t = 0,5$	$t = 1$	$t = 5$	$t = 10$	$t = 50$
$M = 1$	$3,6980769991 \times 10^{-3}$	$5,3056791526 \times 10^{-3}$	$1,2086155842 \times 10^{-2}$	$1,4127248613 \times 10^{-2}$	$9,1237687598 \times 10^{-4}$
$M = 2$	$2,5590354166 \times 10^{-3}$	$3,6638483403 \times 10^{-3}$	$8,2264033252 \times 10^{-3}$	$9,5208581056 \times 10^{-3}$	$1,4380125941 \times 10^{-4}$
$M = 3$	$3,2710831686 \times 10^{-3}$	$4,5403418482 \times 10^{-3}$	$1,0353767747 \times 10^{-2}$	$1,8121271222 \times 10^{-2}$	$3,0590602943 \times 10^{-4}$
$M = 4$	$4,6320101788 \times 10^{-4}$	$6,4925228482 \times 10^{-4}$	$1,5325100593 \times 10^{-3}$	$2,0987071188 \times 10^{-3}$	$1,7951283645 \times 10^{-4}$
$M = 5$	$1,3277168974 \times 10^{-4}$	$1,8369160518 \times 10^{-4}$	$4,6996828299 \times 10^{-4}$	$6,5511380606 \times 10^{-4}$	$1,7297344622 \times 10^{-4}$
$M = 6$	$2,6498386440 \times 10^{-5}$	$3,6806955450 \times 10^{-5}$	$9,0335139287 \times 10^{-5}$	$1,2457586050 \times 10^{-4}$	$1,6906678463 \times 10^{-4}$
$M = 7$	$4,2766298298 \times 10^{-6}$	$5,7972642533 \times 10^{-6}$	$1,5196350248 \times 10^{-5}$	$2,0807398255 \times 10^{-5}$	$1,6877761845 \times 10^{-4}$
$M = 8$	$1,0086250361 \times 10^{-6}$	$1,3095475324 \times 10^{-6}$	$2,1471064159 \times 10^{-6}$	$2,9043158388 \times 10^{-6}$	$1,6880430369 \times 10^{-4}$
$M = 9$	$2,5286382582 \times 10^{-7}$	$5,6671023108 \times 10^{-7}$	$4,8139531792 \times 10^{-7}$	$3,4139766618 \times 10^{-7}$	$1,6879725883 \times 10^{-4}$
$M = 10$	$1,9630239490 \times 10^{-7}$	$4,4284207598 \times 10^{-6}$	$2,8614923163 \times 10^{-6}$	$6,3701349952 \times 10^{-6}$	$1,6880023248 \times 10^{-4}$
$M = 11$	$1,6233711492 \times 10^{-5}$	$2,2915949965 \times 10^{-4}$	$6,5031573474 \times 10^{-5}$	$8,2692260249 \times 10^{-5}$	$1,6879683740 \times 10^{-4}$
$M = 12$	$7,7883814988 \times 10^{-5}$	$1,1754510757 \times 10^{-4}$	$1,7929607598 \times 10^{-4}$	$3,1236295453 \times 10^{-4}$	$1,6877701555 \times 10^{-4}$
$M = 13$	$2,7117574805 \times 10^{-4}$	$5,2242353009 \times 10^{-4}$	$2,4779401569 \times 10^{-3}$	$1,8497277500 \times 10^{-3}$	$1,6852530632 \times 10^{-4}$
$M = 14$	$2,5179657500 \times 10^{-4}$	$2,8653541335 \times 10^{-4}$	$7,4765507774 \times 10^{-4}$	$1,3191695112 \times 10^{-3}$	$1,6657969882 \times 10^{-4}$
$M = 15$	$1,4560234741 \times 10^{-3}$	$4,6638282588 \times 10^{-4}$	$1,0679891151 \times 10^{-3}$	$1,3896922582 \times 10^{-3}$	$1,7838123745 \times 10^{-4}$
$M = 16$	$2,9113584289 \times 10^{-4}$	$4,2105016360 \times 10^{-4}$	$9,4914919031 \times 10^{-4}$	$3,4279477690 \times 10^{-3}$	$1,0797417958 \times 10^{-4}$
$M = 17$	$2,5128474631 \times 10^{-4}$	$3,7788739709 \times 10^{-4}$	$9,2650384466 \times 10^{-4}$	$1,1774443109 \times 10^{-3}$	$1,1700338327 \times 10^{-4}$
$M = 18$	$2,4966067334 \times 10^{-4}$	$3,4352197124 \times 10^{-4}$	$1,5086286078 \times 10^{-3}$	$1,1532949685 \times 10^{-3}$	$1,1425064232 \times 10^{-4}$
$M = 19$	$2,4042844845 \times 10^{-4}$	$3,4107099353 \times 10^{-4}$	$8,8715916050 \times 10^{-4}$	$1,1264610253 \times 10^{-3}$	$1,1718151033 \times 10^{-4}$
$M = 20$	$2,3333790856 \times 10^{-4}$	$3,3966783212 \times 10^{-4}$	$7,5010438010 \times 10^{-4}$	$1,0469205735 \times 10^{-3}$	$1,0922356172 \times 10^{-4}$

Fonte: do autor

Tabela 6.22: $\overline{E}_{abs}$ para o problema de Difusão de Íons por meio da Soma de Salzer.

M	$t = 0,5$	$t = 1$	$t = 5$	$t = 10$	$t = 50$
$M = 1$	$3,6980769991 \times 10^{-3}$	$5,3056791526 \times 10^{-3}$	$1,2086155842 \times 10^{-2}$	$1,4127248613 \times 10^{-2}$	$9,1237687598 \times 10^{-4}$
$M = 2$	$4,9618039465 \times 10^{-4}$	$7,1173376607 \times 10^{-4}$	$9,3687120631 \times 10^{-4}$	$2,1446821855 \times 10^{-3}$	$6,6025269940 \times 10^{-4}$
$M = 3$	$7,8870951369 \times 10^{-5}$	$9,3268629892 \times 10^{-5}$	$1,0367751729 \times 10^{-4}$	$2,0893718047 \times 10^{-4}$	$3,9901567646 \times 10^{-4}$
$M = 4$	$1,6499574037 \times 10^{-5}$	$2,2824367468 \times 10^{-5}$	$3,4668391506 \times 10^{-5}$	$2,8413652892 \times 10^{-5}$	$1,3350461084 \times 10^{-4}$
$M = 5$	$3,7249593059 \times 10^{-6}$	$5,2097450209 \times 10^{-6}$	$1,0424786617 \times 10^{-5}$	$1,4916299327 \times 10^{-6}$	$3,3999752274 \times 10^{-5}$
$M = 6$	$1,3300539302 \times 10^{-6}$	$1,4783230479 \times 10^{-6}$	$3,1489509452 \times 10^{-6}$	$2,0455238325 \times 10^{-6}$	$7,0655944212 \times 10^{-6}$
$M = 7$	$3,3637380461 \times 10^{-7}$	$4,5667553665 \times 10^{-7}$	$8,5786981788 \times 10^{-7}$	$9,5171438874 \times 10^{-7}$	$1,1926980909 \times 10^{-6}$
$M = 8$	$5,8099987290 \times 10^{-8}$	$1,1742463392 \times 10^{-7}$	$1,8888462843 \times 10^{-7}$	$2,7606730562 \times 10^{-7}$	$2,7075119824 \times 10^{-7}$
$M = 9$	$2,1145839806 \times 10^{-8}$	$6,0137122759 \times 10^{-8}$	$6,4740236147 \times 10^{-8}$	$7,6044298435 \times 10^{-8}$	$7,9969256423 \times 10^{-8}$
$M = 10$	$4,5095949230 \times 10^{-8}$	$5,8829178650 \times 10^{-7}$	$4,3102173880 \times 10^{-7}$	$7,1195097650 \times 10^{-7}$	$2,1218199084 \times 10^{-6}$
$M = 11$	$1,5390208950 \times 10^{-6}$	$1,0599330084 \times 10^{-5}$	$1,1886635567 \times 10^{-5}$	$1,8676144106 \times 10^{-5}$	$3,8181252698 \times 10^{-5}$

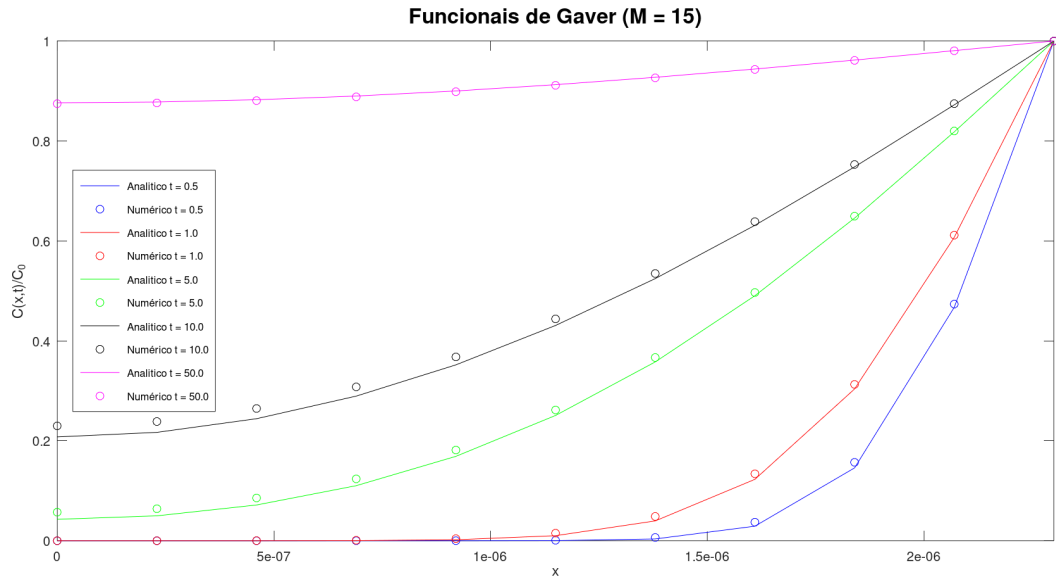
Fonte: do autor

Tabela 6.23: $\overline{E}_{abs}$ para o problema de Difusão de Íons por meio do Algoritmo Wynn-Rho.

M	$t = 0,5$	$t = 1$	$t = 5$	$t = 10$	$t = 50$
$M = 2$	$9.6307361203 \times 10^{-4}$	$1.3664526043 \times 10^{-3}$	$3.0199345663 \times 10^{-3}$	$3.7347325686 \times 10^{-3}$	$6.4229223934 \times 10^{-4}$
$M = 4$	$1.9994859702 \times 10^{-5}$	$2.9150455176 \times 10^{-5}$	$3.5261720245 \times 10^{-5}$	$1.3479320024 \times 10^{-5}$	$1.5200301285 \times 10^{-3}$
$M = 6$	$9.0015404256 \times 10^{-7}$	$1.2080847968 \times 10^{-6}$	$2.0509056202 \times 10^{-6}$	$2.2220949368 \times 10^{-6}$	$1.7771142000 \times 10^{-6}$
$M = 8$	$3.2445567594 \times 10^{-8}$	$4.7523310118 \times 10^{-8}$	$9.3217533938 \times 10^{-8}$	$1.0577946747 \times 10^{-7}$	$4.3262074572 \times 10^{-7}$
$M = 10$	$3.9917803673 \times 10^{-7}$	$2.3441235707 \times 10^{-8}$	$1.1020911074 \times 10^{-7}$	$1.1540910819 \times 10^{-7}$	$5.4563188450 \times 10^{-7}$
$M = 12$	$2.9829037512 \times 10^{-8}$	$2.3555140099 \times 10^{-8}$	$1.2548414823 \times 10^{-7}$	$1.6407798474 \times 10^{-7}$	$5.2618784381 \times 10^{-7}$
$M = 14$	$3.3043113402 \times 10^{-8}$	$4.4050391534 \times 10^{-8}$	$7.6191813570 \times 10^{-8}$	$2.5324797569 \times 10^{-7}$	$8.7289102811 \times 10^{-7}$
$M = 16$	$3.6940279752 \times 10^{-8}$	$3.6879797636 \times 10^{-8}$	$2.8363366322 \times 10^{-7}$	$2.3834415823 \times 10^{-7}$	$1.7727321517 \times 10^{-6}$

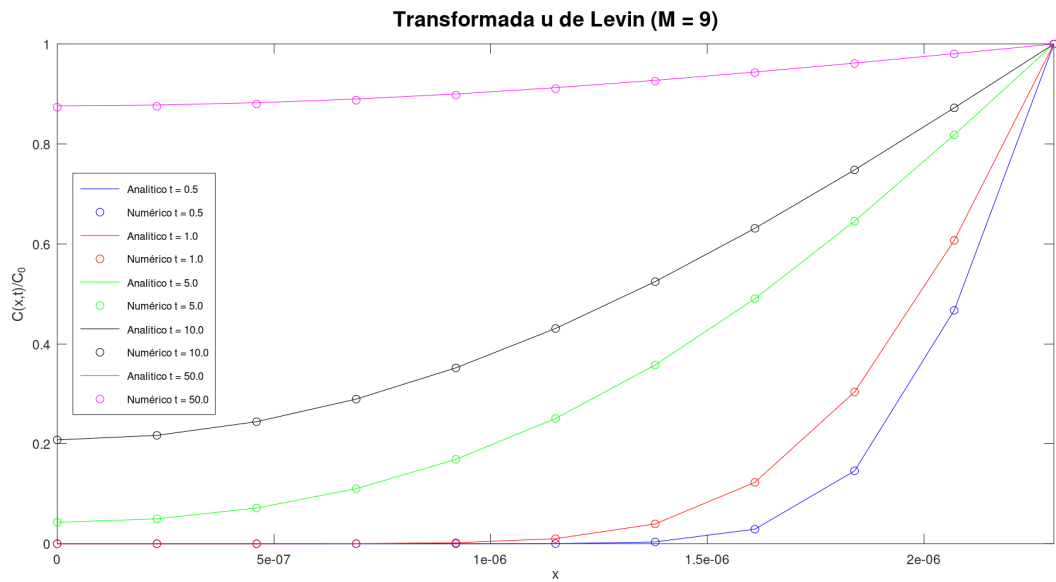
Fonte: do autor

Figura 6.15: Resultados para o problema de Difusão de Íons, obtidos por meio dos Funcionais de Gaver, com $M = 15$.



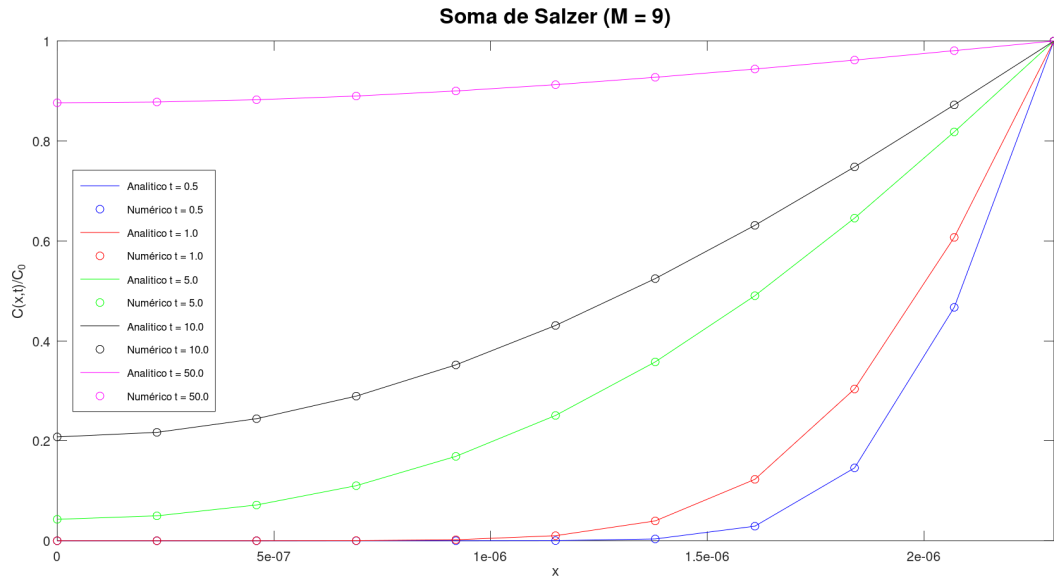
Fonte: do autor

Figura 6.16: Resultados para o problema de Difusão de Íons, obtidos por meio da Transformada u de Levin, com $M = 9$.



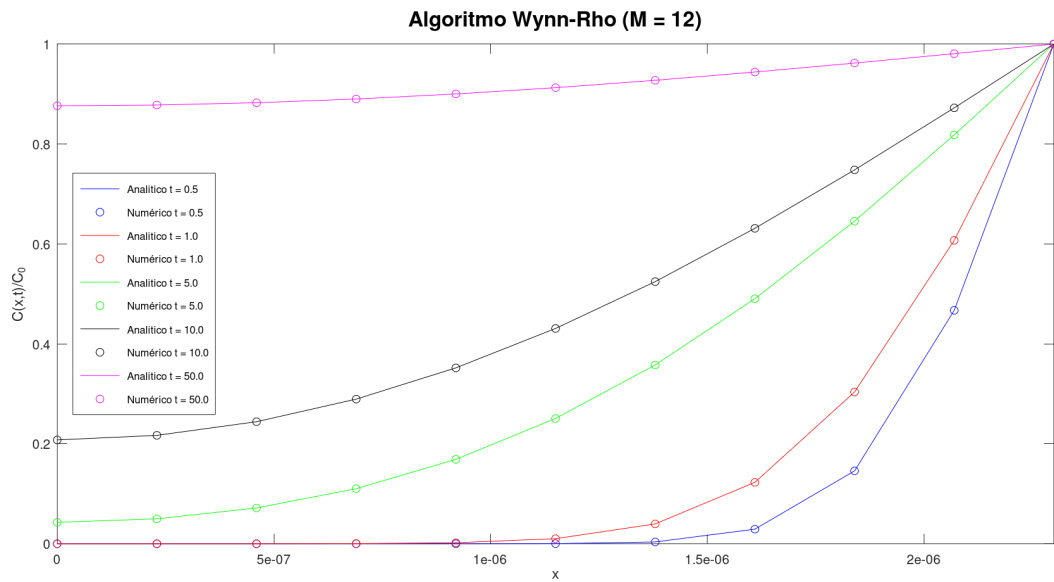
Fonte: do autor

Figura 6.17: Resultados para o problema de Difusão de Íons, obtidos por meio da Soma de Salzer, com $M = 9$.



Fonte: do autor

Figura 6.18: Resultados para o problema de Difusão de Íons, obtidos por meio do Algoritmo Wynn-Rho, com $M = 12$.



Fonte: do autor

6.4 Difusão de Mercúrio na Água

O modelo de Difusão de Mercúrio na Água é dado pela equação

$$u \frac{\partial C(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{P_{e_y}} \frac{\partial^2 C(x, y)}{\partial y^2} + D, \quad (6.16)$$

sujeita as condições:

$$C(0, y) = 0; \quad (6.17)$$

$$C(x, 0) = \mathcal{H}(x - 0, 25) - \mathcal{H}(x - 0, 3); \quad (6.18)$$

$$C\left(x, \frac{1}{10}\right) = 0, \quad (6.19)$$

onde C é a concentração do mercúrio na água (kg/m^3), $\mathcal{H}$ é a função de Heaviside e os demais parâmetros, assim como seus respectivos valores, são dados pela Tabela 6.24.

Tabela 6.24: Nomenclatura e valores dos parâmetros utilizados.

Símbolos	Descrição	Valores
x (m)	$[x_0, x_f]$	$[0, 01, 1]$
y (m)	$[y_0, y_f]$	$[0, 01, \frac{1}{10}]$
k_x (m^2/s)	Coeficiente de Difusão em x	$1,67 \times 10^{-9}$
k_y (m^2/s)	Coeficiente de Difusão em y	$300 \times k_x$
V (m/s)	Velocidade	$\frac{Re \ v}{L}$
L (m)	Comprimento Característico	10
v (m^2/s)	Viscosidade Cinemática	$1,003 \times 10^{-6}$
Re	Número de Reynolds	700
P_{e_y}	Número de Péclet em y	$\frac{VL}{k_y}$
u (m/s)	Velocidade média da água	0,5
D	Termo fonte	0,5

Fonte: Adaptado de Freitas (2022).

Aplicando a Transformada de Laplace na equação (6.16), sujeita as condições (6.17), (6.18) e (6.19), tem-se

$$\begin{aligned}
\bar{C}(x, y) = & \left(\frac{e^{-0,25s} - e^{-0,3s}}{s} \right) \frac{\sinh \left[\sqrt{P_{e_y} u s} \left(\frac{1}{10} - y \right) \right]}{\sinh \left[\sqrt{P_{e_y} u s} \frac{1}{10} \right]} \\
& - \frac{D}{us^2} \frac{\sinh \left[\sqrt{P_{e_y} u s} \left(\frac{1}{10} - y \right) \right]}{\sinh \left[\sqrt{P_{e_y} u s} \frac{1}{10} \right]} \\
& - \frac{D}{us^2} \frac{\sinh(\sqrt{P_{e_y} u s} y)}{\sinh \left(\sqrt{P_{e_y} u s} \frac{1}{10} \right)} + \frac{D}{us^2} .
\end{aligned} \tag{6.20}$$

A solução analítica é dada por

$$\begin{aligned}
C(x, y) = & \left((1 - 10y) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(10n\pi y) e^{-\frac{100n^2\pi^2}{P_{e_y} u} (x-0,25)} \right) \mathcal{H}(x - 0, 25) \\
& - \left((1 - 10y) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(10n\pi y) e^{-\frac{100n^2\pi^2}{P_{e_y} u} (x-0,3)} \right) \mathcal{H}(x - 0, 3) \\
& + \frac{P_{e_y} D}{50\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^n)}{n^3} \sin(10n\pi y) \left(1 - e^{-\frac{100n^2\pi^2}{P_{e_y} u} x} \right) .
\end{aligned} \tag{6.21}$$

As Tabelas 6.25 – 6.28, e as Figuras 6.20 – 6.23 apresentam os resultados da inversão numérica da equação (6.20). A Figura 6.19 mostra a solução analítica da equação (6.21).

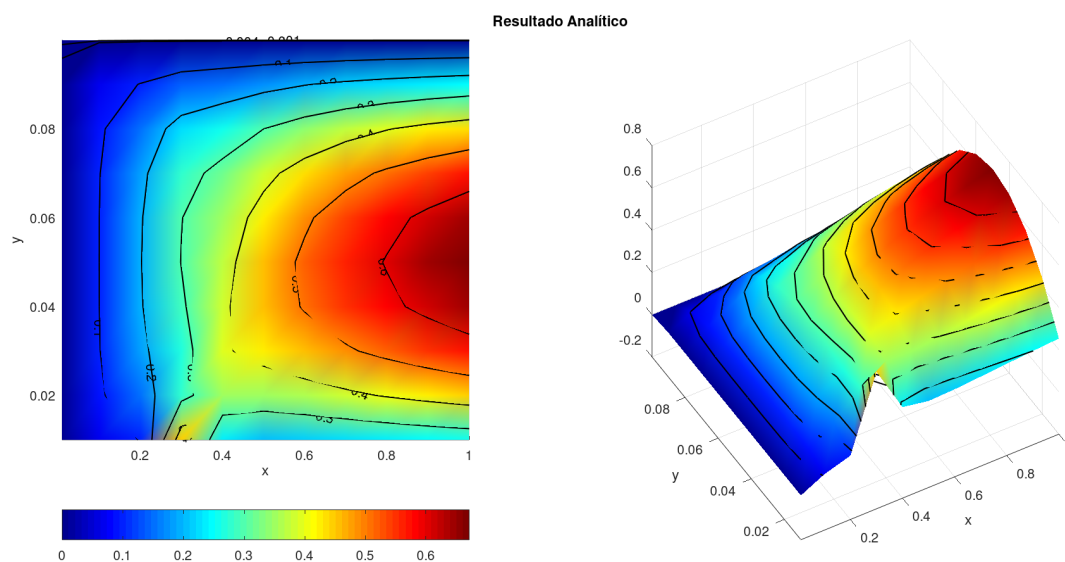
Diferentemente do trabalho de Freitas (2022), x e y não iniciam em zero, mas sim de 0,01. Esta escolha foi feita por conta de um problema de overflow para a Transformada u de Levin e para o Algoritmo Wynn-Rho. Por este mesmo motivo, foi utilizado o Erro Absoluto Médio em relação a y , a fim de uma melhor comparação entre os métodos estudados. É importante ressaltar que, mesmo com x e y não começando em zero, a Transformada u de Levin e o Algoritmo Wynn-Rho apresentam problemas de overflow para $y = 0, 1$.

De modo geral, para as configurações do modelo utilizadas neste trabalho, os métodos tiveram um desempenho similar. Também pode-se ressaltar o fato de que, na maioria dos valores calculados, os Erros Absolutos Médios diminuem à medida que y cresce.

A Soma de Salzer foi o método com o melhor desempenho, pois não apresentou overflow em $y = 0, 1$ (assim como na configuração original do problema), e os Erros Absolutos Médios foram um pouco menores que os gerados pelos Funcionais de Gaver. O problema de

overflow com a Transformada u de Levin e o Algoritmo Wynn-Rho pode ser um indicativo de que estes métodos não lidam bem com a inversão da função de Heaviside. É importante ressaltar que problemas similares foram apontados por Freitas (2022) para os métodos de Talbot e Talbot-Racional.

Figura 6.19: Resultado Analítico para o problema de Difusão de Mercúrio na Água.



Fonte: do autor

Tabela 6.25: $\overline{E}_{abs}$ em relação a y para a solução do problema de Difusão de Mercúrio na Água por meio dos Funcionais de Gaver.

	$M = 1$	$M = 14$	$M = 15$	$M = 16$	$M = 17$	$M = 18$
$y = 0,0100$	$5,8801661654 \times 10^{-2}$	$2,8404827432 \times 10^{-2}$	$2,7578799478 \times 10^{-2}$	$2,6815501949 \times 10^{-2}$	$2,6011648338 \times 10^{-2}$	$2,7159368746 \times 10^{-2}$
$y = 0,0200$	$5,9198718455 \times 10^{-2}$	$1,0225608097 \times 10^{-2}$	$9,7160139284 \times 10^{-3}$	$9,2561952229 \times 10^{-3}$	$8,7938659347 \times 10^{-3}$	$8,8175890683 \times 10^{-3}$
$y = 0,0300$	$8,4903031538 \times 10^{-2}$	$1,0879927752 \times 10^{-2}$	$1,0374053453 \times 10^{-2}$	$9,9420515487 \times 10^{-3}$	$9,4404065819 \times 10^{-3}$	$1,0096595567 \times 10^{-2}$
$y = 0,0400$	$1,0113932737 \times 10^{-1}$	$8,8395801952 \times 10^{-3}$	$8,2040288604 \times 10^{-3}$	$7,6449690182 \times 10^{-3}$	$7,2010918880 \times 10^{-3}$	$7,9034822423 \times 10^{-3}$
$y = 0,0500$	$1,0783047180 \times 10^{-1}$	$8,7752566219 \times 10^{-3}$	$8,0919988314 \times 10^{-3}$	$7,4934177186 \times 10^{-3}$	$7,0526467204 \times 10^{-3}$	$8,2105946267 \times 10^{-3}$
$y = 0,0600$	$1,0374746539 \times 10^{-1}$	$8,9975718954 \times 10^{-3}$	$8,5264909252 \times 10^{-3}$	$8,1360152134 \times 10^{-3}$	$7,6499826401 \times 10^{-3}$	$8,6651194209 \times 10^{-3}$
$y = 0,0700$	$8,9092724890 \times 10^{-2}$	$8,1468205809 \times 10^{-3}$	$7,7257316461 \times 10^{-3}$	$7,3665631441 \times 10^{-3}$	$6,9809126973 \times 10^{-3}$	$7,9488484526 \times 10^{-3}$
$y = 0,0800$	$6,5310561628 \times 10^{-2}$	$6,1556472391 \times 10^{-3}$	$5,8404985132 \times 10^{-3}$	$5,5709171932 \times 10^{-3}$	$5,2952858022 \times 10^{-3}$	$6,5048915133 \times 10^{-3}$
$y = 0,0900$	$3,4755370843 \times 10^{-2}$	$3,3911564962 \times 10^{-3}$	$3,2186532744 \times 10^{-3}$	$3,0849910667 \times 10^{-3}$	$2,8425998080 \times 10^{-3}$	$4,1991748768 \times 10^{-3}$
$y = 0,1000$	$1,5582101918 \times 10^{-16}$	$6,1883892403 \times 10^{-7}$	$3,9049828428 \times 10^{-6}$	$2,5725496369 \times 10^{-5}$	$1,3805248156 \times 10^{-4}$	$9,8930603294 \times 10^{-4}$

Fonte: do autor

Tabela 6.26: $\overline{E}_{abs}$ em relação a y para a solução do problema de Difusão de Mercúrio na Água por meio da Transformada u de Levin.

	$M = 7$	$M = 8$	$M = 9$	$M = 10$	$M = 17$	$M = 18$
$y = 0,0100$	$3,4623201497 \times 10^{-2}$	$3,8906045204 \times 10^{-2}$	$3,5292701773 \times 10^{-2}$	$5,2635334852 \times 10^{-2}$	$3,3182092601 \times 10^{-2}$	$2,5650640563 \times 10^{-2}$
$y = 0,0200$	$9,8890792371 \times 10^{-3}$	$1,6855215672 \times 10^{-2}$	$7,2509453458 \times 10^{-3}$	$5,4309143403 \times 10^{-3}$	$9,0164328793 \times 10^{-3}$	$8,6356416256 \times 10^{-3}$
$y = 0,0300$	$5,5390501862 \times 10^{-3}$	$1,0110131422 \times 10^{-2}$	$3,3101868670 \times 10^{-2}$	$3,0538578602 \times 10^{-2}$	$9,9754244116 \times 10^{-3}$	$9,9790712915 \times 10^{-3}$
$y = 0,0400$	$3,0992342526 \times 10^{-3}$	$2,8074140086 \times 10^{-3}$	$2,4866910450 \times 10^{-3}$	$2,3131033740 \times 10^{-3}$	$7,6978986507 \times 10^{-3}$	$7,6773175227 \times 10^{-3}$
$y = 0,0500$	$2,5374360155 \times 10^{-3}$	$2,2766362375 \times 10^{-3}$	$2,1037747421 \times 10^{-3}$	$2,0525164504 \times 10^{-3}$	$7,6068872984 \times 10^{-3}$	$7,5638385317 \times 10^{-3}$
$y = 0,0600$	$2,1943167861 \times 10^{-3}$	$2,1166551317 \times 10^{-3}$	$2,1187869019 \times 10^{-3}$	$2,0478691377 \times 10^{-3}$	$7,9663887674 \times 10^{-3}$	$8,1820403051 \times 10^{-3}$
$y = 0,0700$	$1,9548305034 \times 10^{-3}$	$1,8515746750 \times 10^{-3}$	$1,8401868152 \times 10^{-3}$	$1,8207105338 \times 10^{-3}$	$7,4504918550 \times 10^{-3}$	$7,4102529652 \times 10^{-3}$
$y = 0,0800$	$1,4720317259 \times 10^{-3}$	$1,3863541655 \times 10^{-3}$	$1,3598655930 \times 10^{-3}$	$1,3603626911 \times 10^{-3}$	$5,9570427351 \times 10^{-3}$	$5,6166116606 \times 10^{-3}$
$y = 0,0900$	$7,8538794687 \times 10^{-4}$	$8,0825767407 \times 10^{-4}$	$8,0903204841 \times 10^{-4}$	$8,1962105626 \times 10^{-4}$	$3,0805050988 \times 10^{-3}$	$3,2195291789 \times 10^{-3}$
$y = 0,1000$	-	-	-	-	-	-

Fonte: do autor

Tabela 6.27: $\bar{E}_{abs}$ em relação a y para a solução do problema de Difusão de Mercúrio na Água por meio da Soma de Salzer.

	$M = 1$	$M = 8$	$M = 9$	$M = 10$	$M = 11$	$M = 12$
$y = 0,0100$	$5,8801661654 \times 10^{-2}$	$1,6351950036 \times 10^{-2}$	$1,5952886525 \times 10^{-2}$	$1,4204606373 \times 10^{-2}$	$1,1849455479 \times 10^{-2}$	$9,7561795449 \times 10^{-3}$
$y = 0,0200$	$5,9198718455 \times 10^{-2}$	$5,4814466524 \times 10^{-3}$	$5,3835960606 \times 10^{-3}$	$4,9763085574 \times 10^{-3}$	$4,5672486138 \times 10^{-3}$	$4,4488582880 \times 10^{-3}$
$y = 0,0300$	$8,4903031538 \times 10^{-2}$	$3,4952023176 \times 10^{-3}$	$2,7197962050 \times 10^{-3}$	$2,0893364184 \times 10^{-3}$	$1,8271354652 \times 10^{-3}$	$1,7659603323 \times 10^{-3}$
$y = 0,0400$	$1,0113932737 \times 10^{-1}$	$1,2247953828 \times 10^{-3}$	$1,2334061164 \times 10^{-3}$	$1,2660886211 \times 10^{-3}$	$1,2424945868 \times 10^{-3}$	$1,4268486724 \times 10^{-3}$
$y = 0,0500$	$1,0783047180 \times 10^{-1}$	$1,8839366707 \times 10^{-3}$	$1,8642171687 \times 10^{-3}$	$1,8373813778 \times 10^{-3}$	$1,7927597999 \times 10^{-3}$	$1,9330895956 \times 10^{-3}$
$y = 0,0600$	$1,0374746539 \times 10^{-1}$	$2,1222889328 \times 10^{-3}$	$2,0520440258 \times 10^{-3}$	$2,0100194140 \times 10^{-3}$	$1,9755709862 \times 10^{-3}$	$2,1580133216 \times 10^{-3}$
$y = 0,0700$	$8,9092724890 \times 10^{-2}$	$1,8464914081 \times 10^{-3}$	$1,8102685802 \times 10^{-3}$	$1,7895493671 \times 10^{-3}$	$1,7810583515 \times 10^{-3}$	$2,0367248677 \times 10^{-3}$
$y = 0,0800$	$6,5310561628 \times 10^{-2}$	$1,3785351528 \times 10^{-3}$	$1,3580781237 \times 10^{-3}$	$1,3466117421 \times 10^{-3}$	$1,3405577738 \times 10^{-3}$	$1,6921876811 \times 10^{-3}$
$y = 0,0900$	$3,4755370843 \times 10^{-2}$	$7,9080206006 \times 10^{-4}$	$7,9446552460 \times 10^{-4}$	$7,9805553735 \times 10^{-4}$	$8,0524608765 \times 10^{-4}$	$1,4503108166 \times 10^{-3}$
$y = 0,1000$	$1,5582101918 \times 10^{-16}$	$2,6392605832 \times 10^{-9}$	$3,7271283368 \times 10^{-8}$	$7,0545580816 \times 10^{-7}$	$1,2107677036 \times 10^{-5}$	$2,3567356268 \times 10^{-4}$

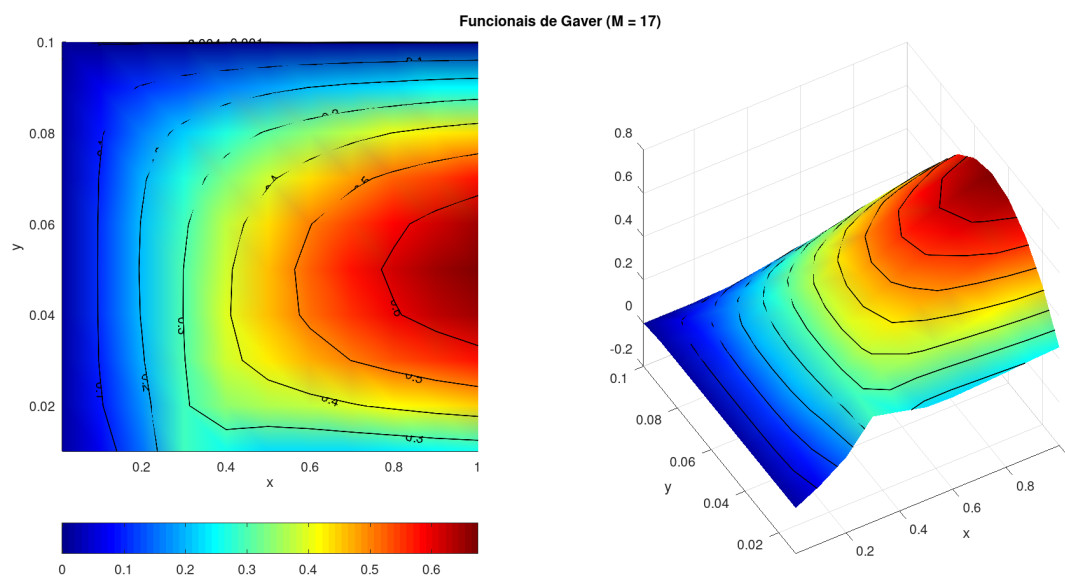
Fonte: do autor

Tabela 6.28: $\bar{E}_{abs}$ para o problema de Difusão de Mercúrio na Água por meio do Algoritmo Wynn-Rho.

M	$M = 6$	$M = 8$	$M = 10$	$M = 12$	$M = 14$	$M = 16$
$y = 0,0100$	$9,2304329090 \times 10^{-2}$	$1,7879242486 \times 10^{-2}$	$1,0129323864 \times 10^{-2}$	$9,4914924159 \times 10^{-3}$	$9,3686155197 \times 10^{-3}$	$8,4626611464 \times 10^{-2}$
$y = 0,0200$	$1,0714899415 \times 10^{-2}$	$6,1381762823 \times 10^{-3}$	$9,7569350024 \times 10^{-3}$	$5,8477030196 \times 10^{-3}$	$6,0950932548 \times 10^{-3}$	$6,9444379419 \times 10^{-3}$
$y = 0,0300$	$8,2441257390 \times 10^{-3}$	$2,4444250052 \times 10^{-3}$	$2,4727907625 \times 10^{-3}$	$2,9445887816 \times 10^{-3}$	$5,4862158056 \times 10^{-3}$	$2,0026739969 \times 10^{-3}$
$y = 0,0400$	$3,0418906633 \times 10^{-3}$	$1,7255505180 \times 10^{-3}$	$1,4122222933 \times 10^{-3}$	$1,3304826554 \times 10^{-3}$	$1,7042135118 \times 10^{-3}$	$3,0874598237 \times 10^{-3}$
$y = 0,0500$	$2,7516525353 \times 10^{-3}$	$1,9667535670 \times 10^{-3}$	$1,8782564359 \times 10^{-3}$	$1,9321046839 \times 10^{-3}$	$1,9759564917 \times 10^{-3}$	$2,4458462730 \times 10^{-3}$
$y = 0,0600$	$2,2260658042 \times 10^{-3}$	$1,9813282849 \times 10^{-3}$	$1,2388552712 \times 10^{-3}$	$2,1109262452 \times 10^{-3}$	$1,7522010999 \times 10^{-3}$	$1,9787210777 \times 10^{-3}$
$y = 0,0700$	$1,9586605573 \times 10^{-3}$	$1,7945792107 \times 10^{-3}$	$1,8112985243 \times 10^{-3}$	$1,8195799826 \times 10^{-3}$	$1,8180644485 \times 10^{-3}$	$1,8286021647 \times 10^{-3}$
$y = 0,0800$	$1,4371444887 \times 10^{-3}$	$1,3552915807 \times 10^{-3}$	$1,3419446770 \times 10^{-3}$	$1,3768098637 \times 10^{-3}$	$1,3662553321 \times 10^{-3}$	$1,3776207464 \times 10^{-3}$
$y = 0,0900$	$8,2450651916 \times 10^{-4}$	$7,9857581657 \times 10^{-4}$	$8,0161660348 \times 10^{-4}$	$8,0072457202 \times 10^{-4}$	$8,0716626050 \times 10^{-4}$	$8,0885829971 \times 10^{-4}$
$y = 0,1000$	-	-	-	-	-	-

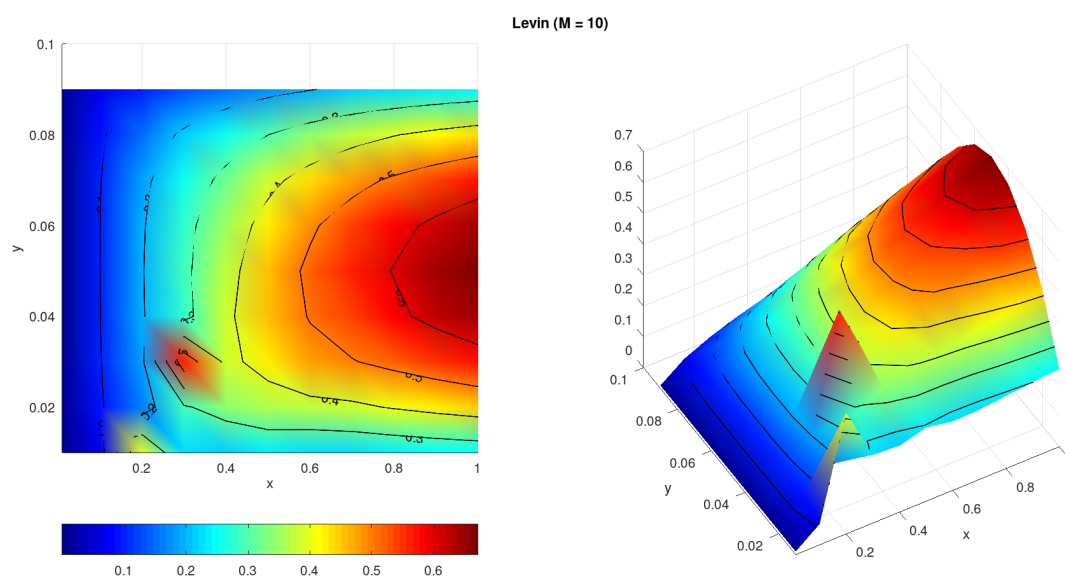
Fonte: do autor

Figura 6.20: Resultado para o problema de Difusão de Mercúrio na Água, por meio dos Funcionais de Gaver, com $M = 17$.



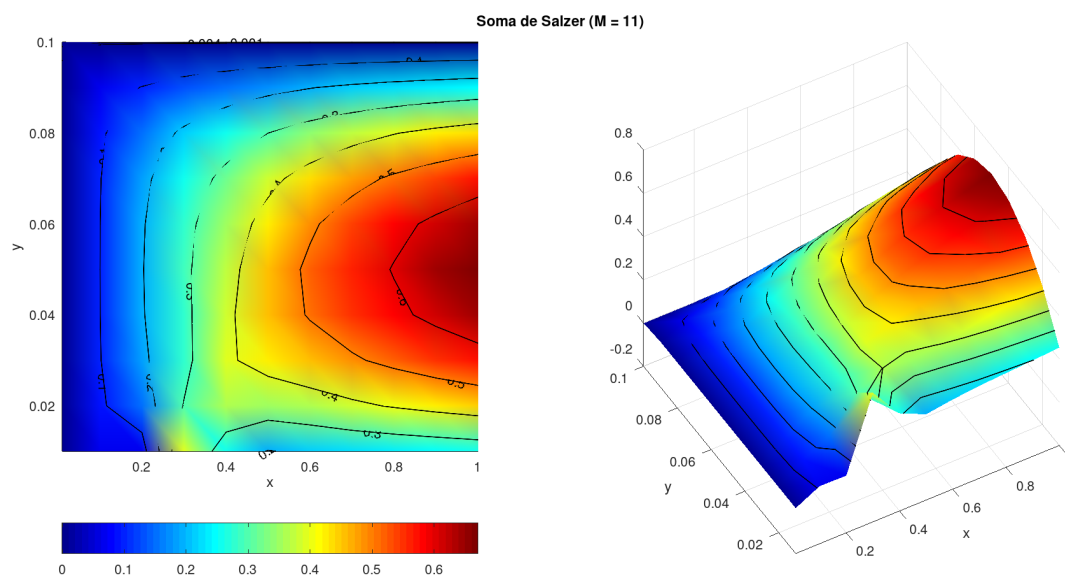
Fonte: do autor

Figura 6.21: Resultado para o problema de Difusão de Mercúrio na Água, por meio da Transformada u de Levin, com $M = 10$.



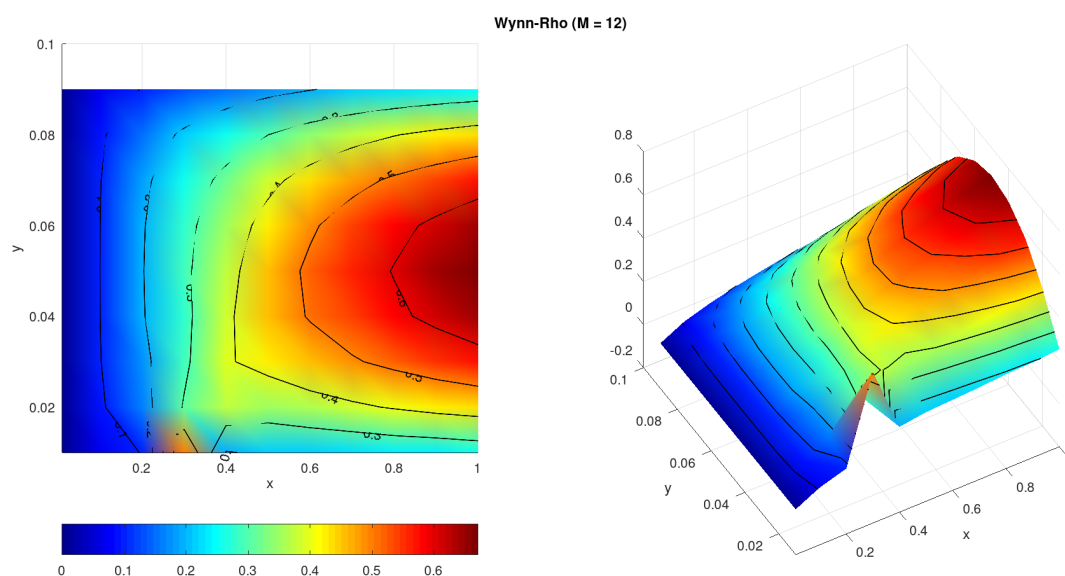
Fonte: do autor

Figura 6.22: Resultado para o problema de Difusão de Mercúrio na Água, por meio da Soma de Salzer, com $M = 11$.



Fonte: do autor

Figura 6.23: Resultado para o problema de Difusão de Mercúrio na Água, por meio do Algoritmo Wynn-Rho, com $M = 12$.



Fonte: do autor

No próximo capítulo serão feitas as considerações finais e apresentada a proposta de continuidade do trabalho.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram abordados quatro métodos numéricos para a Transformada Inversa de Laplace: os Funcionais de Gaver, a Soma de Salzer, a Transformada u de Levin e o Algoritmo Wynn-Rho, seus aceleradores.

Além de apresentar a fundamentação das técnicas estudadas, também foi feita a validação de seus algoritmos. Tais algoritmos foram aplicados a um conjunto de funções elementares, e a avaliação do desempenho foi realizada por meio do Erro Absoluto Médio, métrica utilizada para determinar os M ótimos para cada função do conjunto. Os resultados obtidos foram representados na forma de tabelas e gráficos. Também foram feitas simulações para um conjunto de funções cuja inversa é de difícil obtenção, utilizando os resultados do Método Stehfest, do trabalho de Freitas (2022), como referencial. Os algoritmos estudados também foram aplicados na inversão da solução de quatro problemas de aplicação: Análise de Circuitos Elétricos, Transporte de Solute em Meio Poroso, Difusão de Íons e Difusão de Mercúrio na Água.

Os resultados gerados, a partir da aplicação dos métodos, foram comparados. Foi constatado que utilizar os aceleradores melhoram os resultados dos Funcionais de Gaver. Além disso, mesmo que os aceleradores não aproximem bem funções com alta frequência de oscilação (assim como para deformações na oscilação), eles produzem melhores resultados que os Funcionais de Gaver com um M ótimo menor. Existem algumas exceções para a Transformada u de Levin, onde M ótimo é maior, porém o Erro Absoluto Médio continua menor. É importante ressaltar que, de modo geral, a Soma de Salzer e o Algoritmo Wynn-Rho apenas tem uma grande perda de precisão para argumentos (dos senos ou cossenos) maiores que 2π radianos. A exemplo disso, nas simulações para o problema de Análise de Circuitos Elétricos, estes dois métodos geraram Erros Absolutos Médios da ordem de 10^{-2} e 10^{-3} para as correntes I_3 e I_4 , e para as duas tensões V_3 e V_4 ambos apresentaram ordem de 10^{-4} . Observou-se ainda que a Transformada u de Levin e o Algoritmo Wynn-Rho não podem ser recomendados para inverter numericamente a função de Heaviside. Apesar disso, os métodos de inversão estudados são de fácil implementação, não necessitando utilizar variáveis complexas ou mesmo cadeias lógicas extensas, porém é importante ressaltar que o Algoritmo Wynn-Rho utiliza recursividade.

Como esperado, os Funcionais de Gaver mostraram o pior desempenho entre os métodos implementados. Para praticamente todos os casos estudados neste trabalho, a Soma de Salzer e o Algoritmo Wynn-Rho apresentaram os melhores resultados dentro do critério do Erro Absoluto Médio. Porém, o Wynn-Rho demanda um tempo de execução muito maior do que todos os outros algoritmos. Estes dois métodos geraram os menores Erros Absolutos Médios em relação ao Método Stehfest para inversão do conjunto de funções com características especiais.

Em se tratando do M ótimo obtido para as funções elementares: os Funcionais de Gaver ficaram na faixa de 6 a 22, a Transformada u de Levin entre 7 e 28, a Soma de Salzer

entre 4 e 13, e o Algoritmo Wynn-Rho entre 6 e 18. Importante destacar que o M ótimo é o parâmetro que caracteriza a melhor aproximação possível de cada método e que, na necessidade de resultados mais precisos, é necessário que se faça a troca do método. Quanto as funções de aplicação apresentadas por Abate e Valkó (2004) (funções F_9 a F_{11}), em relação ao Método Stehfest, os valores dos M ótimos ficam entre 16 e 17 para os Funcionais de Gaver, 8 a 10 para a Transformada u de Levin, 9 para a Soma de Salzer, e de 4 a 12 para o Algoritmo Wynn-Rho. E por fim, considerando os quatro últimos problemas de aplicação, tem-se M ótimos na faixa: 15 a 19 para os Funcionais de Gaver, 9 a 19 para a Transformada u de Levin, 9 a 12 para a Soma de Salzer, e de 8 a 16 para o Algoritmo Wynn-Rho. Aqui foi desconsiderada a aproximação da função constante pois todos os métodos atingem o melhor resultado para o primeiro M testado. Em especial, essas constatações mostram que o aumento progressivo do valor de M (acima do M ótimo) não implica em melhoria dos resultados.

O objetivo desta pesquisa é estabelecer critérios de escolha dos métodos baseados em pontos-chave (precisão e tempo de computação por exemplo) baseado nas características de cada função. Nesse sentido, o uso de nenhum dos métodos aqui trabalhados é desencorajado.

Para estudos futuros, pretende-se implementar os métodos estudados em outras linguagens de programação, para averiguar se o tempos de execução do Algoritmo Wynn-Rho diminuem. Propõe-se, ainda, realizar simulações considerando mais casas decimais de precisão para as técnicas estudadas, a fim de verificar se isso afeta o valor do Erro Absoluto Médio de forma relevante. Por fim, analisar o desempenho dos algoritmos implementados para a inversão da função de Heaviside.

8 REFERÊNCIAS

- Abate, J. and Valkó, P. P. (2004). Multi-precision Laplace transform inversion. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60:979–993.
- Adamek, V., Vales, F., and Cerv, J. (2017). Numerical Laplace inversion in problems of elastodynamics: Comparison of four algorithms. *Advances in Engineering Software*, 113:120–129.
- Bellman, R., Kalaba, R. E., and Locket, J. A. (1966). *Numerical Inversion of the Laplace Transform: Applications to Biology, Economics, Engeneering and Physics*. Elsevier, New York.
- Boyce, W. E. and DiPrima, R. C. (2001). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Wiley, New York, 7th edition.
- Buttkus, B. (2000). *Spectral Analysis and Filter Theory in Applied Geophysics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 1st edition.
- Calixto, G. R. L., Freitas, E. K., Ferreira, J. A., do Amaral Rodriguez, B. D., and Prolo Filho, J. F. (2022). Parameter n influence on the fixed-Talbot algorithm for the Laplace transform numerical inversion. *VETOR-Revista de Ciências Exatas e Engenharias*, 32(1):42–51.
- Chang, X.-K., He, Y., Hu, X.-B., Sun, J.-Q., and Weniger, E. J. (2020). Construction of new generalizations of Wynn’s epsilon and rho algorithm by solving finite difference equations in the transformation order. *Numer Algor*, 83:593—627.
- Cohen, A. M. (2007). *Numerical Methods for Laplace Transform Inversion*. Springer, New York, 1st edition.
- Cullen, M. R. and Zill, D. G. (2009). *Matemática avançada para engenharia 1: equações diferenciais elemetares e transformada de Laplace*. Bookman, Porto Alegre.
- Davies, B. and Martin, B. (1979). Numerical inversion of the Laplace transform: a survey and comparison of methods. *Journal of Computational Physics*, 33:1–32.
- Defreitas, C. and Kane, S. (2022). The numerical inversion of the Laplace transform in a multi-precision environment. *Applied Mathematics*, 13:401–418.
- Doetsch, G. (1974). *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York.
- Duffy, D. G. (2004). *Transform methods for solving partial differential equations*. CRC Press LLC, Boca Raton, Florida, 2nd edition.

- Egonmwan, A. O. (2012). The numerical inversion of the Laplace transform. Dissertação de mestrado, Eindhoven University of Technology. Masterstudium Industriemathematik.
- Ferreira, J. A., Freitas, E. K., Rofriguez, B. D. A., and Prolo Filho, J. F. (2023). Algoritmo de talbot e a inversão numérica da transformada de Laplace: aplicação a um problema de difusão de íons. *Revista Mundi*.
- Franco, N. M. B. (2006). *Cálculo Numérico*. Pearson, São Paulo.
- Freitas, E. K. (2022). Algoritmos de inversão numérica da transformada de Laplace aplicados à solução de um problema de difusão de mercúrio na água. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Instituto de Matemática, Estatística e Física, Rio Grande, Rio Grande do Sul. Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional.
- Frolov, G. A. and Kitaev, M. Y. (1998). Improvement of accuracy in numerical methods for inverting Laplace transforms based on the Post-Widder formula. *Computers and Mathematics with Applications*, 36(5):23–34.
- Gaver, D. P. (1966). Observing stochastic processes, and approximate transform inversion. *Operations Research*, 14(3):444–459.
- Graf, U. (2004). *Applied Laplace Transforms and z-Transforms for Scientists and Engineers: A Computational Approach using a Mathematica Package*. Birkhäuser Basel, Basel.
- Hassanzadeh, H. and Pooladi-Darvish, M. (2007). Comparison of different numerical Laplace inversion methods for engineering applications. *Applied Mathematics and Computation*, 189(2):1966–1981.
- Irwin, J. D. (2000). *Análise de Circuitos em Engenharia*. Pearson Makron Books, São Paulo, 4a edition.
- Lemos, C. F., da Costa, C. P., Pérez-Fernández, L. D., Ferreira, A. M., and da Silva, E. C. (2021). Análise do desempenho de métodos numéricos de inversão da transformada de Laplace. *NTERMATHS*, 2(2):75–90.
- Levin, D. (1972). Development of non-linear transformations for improving convergence of sequences. *International Journal of Computer Mathematics*, 13(1–4):371–388.
- Logan, J. D. (2013). Transport modeling in hydrogeochemical systems. *Springer Science & Business Media, Berlin*, 15:979–993.
- Paz, M. C., Schmidt, R. A., Freitas, E. K., Rofriguez, B. D. A., and Prolo Filho, J. F. (2023). Aspectos computacionais da inversão numérica da transformada de Laplace aplicada a um problema de engenharia elétrica. *Anais do Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional do Rio Grande do Sul*.

- Pilatti, C. (2019). Análise comparativa do desempenho numérico de técnicas de inversão da transformada de Laplace aplicadas a um problema de transporte de soluto em meio poroso. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande– FURG, Instituto de Matemática, Estatística e Física, Rio Grande, Rio Grande do Sul. Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional.
- Rodrigues, M. P. (2022). Filmes finos eletrocromicos: Simulação de processos difusionais. Tese de doutorado em Ciência e Engenharia de materiais, Universidade Federal de Pelotas – UFPel.
- Salzer, H. E. (1955). A simple method for summing certain slowly convergent series. *Journal of Mathematics and Physics*, 33:356–359.
- Schiff, J. L. (2013). *The Laplace Transform: Theory and Applications*. Springer-Verlag New York, New York.
- Shirliffe, C. J. and Stephenson, D. G. (1961). A computer oriented adaption of Salzer’s method for inverting Laplace transforms. *Journal of Mathematics and Physics*, 40(2):135–141.
- Silva, C. W. D. (2023). *Modeling of Dynamic Systems with Engineering Applications*. CRC Press, New York, 2nd edition.
- Sodré, U. (2007). Modelos matemáticos. <https://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pdfs/modelos.pdf>.
- Spiegel, M. R. (1965). *Schaum’s Outline of Laplace Transforms*. McGraw-Hill.
- Stehfest, H. (1970). Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms [d5]. *Commun. ACM*, 13(1):47–49.
- Talbot, A. (1979). The accurate numerical inversion of Laplace transforms. oxford university press. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 23:97–120.
- Tomaschewski, F. K. (2012). Solução da equação s_N multigrupo de transporte dependente do tempo em meio heterogêneo. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS, Instituto de Matemática, Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, Rio Grande do Sul. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada.
- Valkó, P. P. and Abate, J. (2004). Comparison of sequence accelerators for the Gaver method of numerical Laplace transform inversion. *Computers and Mathematics with Applications*, 48:629–636.
- Wang, T., Gu, Y., and Zhang, Z. (2017). An algorithm for the inversion of Laplace transforms using puiseux expansions. *Numerical Algorithms*, 78:107–132.
- Wimp, J. (1981). *Sequence Transformations and Their Applications*. Academic Press, New York.

- Wynn, P. (1956). On a procrustean technique for the numerical transformation of slowly convergent sequences and series. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 52:663–671.
- Zakian, V. (1969). Numerical inversion of Laplace transform. *Electronics Letters Institution of Engineering and Technology*, 5:120–121.
- Zill, D. G. and Cullen, M. R. (1996). *Differential Equations With Boundary-Value Problems*. Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove, California, 4th edition.

9 APÊNDICE

9.1 Transformada de Laplace

A Transformada de Laplace, que recebe esse nome em homenagem a Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827), é uma transformada integral.

Definição 9.1 (Definição da Transformada de Laplace). Seja $f(t)$ uma função definida para $t \geq 0$, então

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s), \quad (9.1)$$

é chamada Transformada de Laplace de $f(t)$, se a integral (9.1) convergir.

Definição 9.2 (Função contínua por partes). Uma função $f(t)$ é dita contínua por partes em um intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ se o intervalo pode ser subdividido em um número finito de intervalos, nos quais $f(t)$ é contínua em cada um deles e possui limites finitos à direita e à esquerda.

Definição 9.3 (Função de Ordem Exponencial). Sejam $N > 0$ e γ constantes, então se para todo $t > A$

$$|e^{\gamma t} f(t)| < N \quad \text{ou} \quad |f(t)| < e^{\gamma t}, \quad (9.2)$$

se diz que a função $f(t)$ é de ordem exponencial γ quando $t \rightarrow \infty$, ou simplesmente de ordem exponencial.

Teorema 9.1 (Condições suficientes de existência). Se $f(t)$ é seccionalmente contínua em cada intervalo finito em $0 \leq t \leq N$ e de ordem exponencial γ , para $t > N$, então a Transformada de Laplace $F(s)$ existe para todo $s > \gamma$.

9.2 Propriedades da Transformada de Laplace

A Transformada de Laplace possui diversas propriedades, as quais ajudam a calculá-la. A seguir apresentam-se algumas de suas propriedades, para as quais $f(t)$ e $g(t)$ satisfazem (9.1) e, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ e $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$.

Estas propriedades, assim como as suas demonstrações, podem ser encontradas em Cullen e Zill (2009).

Propriedade 9.1 (Linearidade). Sejam $f(t)$ e $g(t)$ funções, e α e β constantes quaisquer, então

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}. \quad (9.3)$$

Propriedade 9.2 (Deslocamento no Eixo s). Seja $f(t)$ uma função e, α uma constante qualquer, então

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}f(t)\} = F(s - \alpha) . \quad (9.4)$$

Propriedade 9.3 (Deslocamento no Eixo t). Seja $f(t)$, $\alpha > 0$, e $u(t)$ a função de Heaviside definida como

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} , \quad (9.5)$$

então

$$\mathcal{L}\{f(t - \alpha) u(t - \alpha)\} = e^{-\alpha s} F(s) . \quad (9.6)$$

Propriedade 9.4 (Transformada da Derivada). Sejam $f'(t)$, $f''(t)$, ..., $f^{n-1}(t)$ contínuas em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial, e $f^n(t)$ é contínua por partes no mesmo intervalo, então

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{n-1}(0) . \quad (9.7)$$

Propriedade 9.5 (Teorema da Convolução). Sejam $f(t)$ e $g(t)$ contínuas por partes em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial, então

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s) G(s) , \quad (9.8)$$

onde

$$(f * g)(t) = \int_0^\infty f(\tau) g(t - \tau) d\tau . \quad (9.9)$$

Propriedade 9.6 (Transformada de Funções Periódicas). Seja $f(t)$ contínua por partes em $[0, \infty)$, de ordem exponencial e periódica de período T , então

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt . \quad (9.10)$$

Propriedade 9.7 (Transformada da Integral). Sejam $g(t) = 1$ e $G(s) = \frac{1}{s}$, de (9.5) tem-se que

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s} . \quad (9.11)$$

Propriedade 9.8 (Derivada da Transformada). Seja $f(t)$ uma função, então

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d}{ds^n} F(s) , \quad (9.12)$$

onde $n \in \mathbb{N}$.

9.3 Transformada Inversa de Laplace

A Transformada Inversa de Laplace transforma uma função que está no domínio das frequências, uma função em que já foi aplicada a Transformada de Laplace, para o domínio do tempo, de volta ao seu domínio original. Para muitas aplicações, como em problemas físicos, aplicar a transformada inversa, fazer o caminho de volta, é necessária (Schiff, 2013) para se encontrar o resultado desejado.

Em 1916 Bromwich, mostrou que pode-se expressar a inversa de Laplace como a integral de contorno definida como:

Definição 9.4. Seja $F(s)$ tal que $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, então

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st} ds, \quad (9.13)$$

onde σ é a abcissa de convergência de Laplace. O valor de σ deve ser maior que a parte real de qualquer singularidade de $F(s)$ (Duffy, 2004). A integral (9.13) é chamada Transformada Inversa de Laplace de $F(s)$, se a integral convergir.

9.4 Propriedades da Transformada Inversa de Laplace

A Transformada Inversa de Laplace tem muitas propriedades, que auxiliam a encontrar o seu resultado. Em seguida serão mostradas algumas de suas propriedades, lembrando que $F(s)$ e $G(s)$ satisfazem a Definição 9.4 e $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ e $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$.

As propriedades apresentadas a seguir, assim como as suas demonstrações, podem ser encontradas em Spiegel (1965) e Cullen e Zill (1996).

Propriedade 9.9 (Linearidade). Sejam $F(s)$ e $G(s)$ funções no domínio de Laplace, e α e β constantes reais, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}. \quad (9.14)$$

Propriedade 9.10 (Translação sobre o eixo s). Sejam $F(s)$ uma função no domínio de Laplace, e α uma constante real, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s - \alpha)\} = e^{\alpha s} f(t). \quad (9.15)$$

Propriedade 9.11 (Translação sobre o eixo t). Sejam $F(s)$ uma função no domínio de Laplace, $\alpha > 0$ uma constante real, e $u(t)$ a função de Heaviside, definida em (9.5), então

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\alpha s} F(s - \alpha)\} = f(t - \alpha) u(t - \alpha). \quad (9.16)$$

Propriedade 9.12 (Transformada Inversa de Laplace de uma Derivada). Sejam $F(s)$ uma função no domínio de Laplace e $n = 1, 2, 3, \dots$, então

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \right\} = t^n f(t) . \quad (9.17)$$

Propriedade 9.13 (Multiplicação por s^n). Sejam $F(s)$ uma função no domínio de Laplace e $f(0) = 0$, então

$$\mathcal{L}^{-1} \{ s F(s) \} = f'(t) . \quad (9.18)$$

Propriedade 9.14 (Forma Inversa do Teorema da Convolução). Sejam $F(s)$ e $G(s)$ funções no domínio de Laplace, então

$$\mathcal{L}^{-1} \{ F(s) G(s) \} = (f * g)(t) , \quad (9.19)$$

onde

$$(f * g)(t) = \int_0^\infty f(\tau) g(t - \tau) d\tau . \quad (9.20)$$

Propriedade 9.15 (Transformada Inversa da Integral). Seja $F(s)$ uma função no domínio de Laplace, então

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \int_s^\infty F(s) ds \right\} = \frac{f(t)}{t} . \quad (9.21)$$

Propriedade 9.16 (Divisão por s). Sejam $F(s)$ uma função no domínio de Laplace, então

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{F(s)}{s} \right\} = \int_0^t f(\tau) d\tau . \quad (9.22)$$

9.5 Métodos Analíticos para a Transformada Inversa de Laplace

Há muitas maneiras de obter a Transformada Inversa de Laplace de forma analítica, entre elas pode-se destacar o Método de Frações Parciais, a Fórmula de Desenvolvimento de Heaviside, a Fórmula Complexa de Inversão, o Método da Expansão em Séries e as formas tabeladas, todos estes métodos podem ser encontradas em Spiegel (1965).

Aqui se irá abordar uma destas técnicas, o Método da Expansão em Séries, lembrando que este método pode ser encontrado em Spiegel (1965).

9.5.1 Método da Expansão em Séries

Se $F(s)$, função no domínio de Laplace, possuir uma expansão em séries de potência em s da forma

$$F(s) = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{a_2}{s^3} + \frac{a_3}{s^4} + \dots , \quad (9.23)$$

então, sob as condições adequadas, pode-se inverter $F(s)$ termo a termo para obter

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \frac{a_2 t^2}{2!} + \frac{a_3 t^3}{3!} + \dots \quad (9.24)$$