

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

**MÉTODOS DE INVERSÃO NUMÉRICA DA TRANSFORMADA
DE LAPLACE BASEADOS NA DEFORMAÇÃO DO
CONTORNO DE BROMWICH**

Murilo da Cunha Paz

Profa. Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez

Orientadora

Prof. Dr. João Francisco Prolo Filho

Coorientador

Murilo da Cunha Paz

**“MÉTODOS DE INVERSÃO NUMÉRICA DA TRANSFORMADA DE LAPLACE
BASEADOS NA DEFORMAÇÃO DO CONTORNO DE BROMWICH”**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande - FURG, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área de concentração: Modelagem Computacional.

Aprovada em: 17/10/2024

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 **BARBARA DENICOL DO AMARAL RODRIGUEZ**
Data: 18/10/2024 13:59:19-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez (Orientadora – FURG)

Documento assinado digitalmente
 **JOAO FRANCISCO PROLO FILHO**
Data: 18/10/2024 18:46:29-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. João Francisco Prolo Filho (Coorientador – FURG)

Documento assinado digitalmente
 **MATHEUS JATKOSKE LAZO**
Data: 22/10/2024 20:04:11-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Matheus Jatkoske Lazo (FURG)

Documento assinado digitalmente
 **CATIA MARIA DOS SANTOS MACHADO**
Data: 19/10/2024 13:51:36-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Catia Maria dos Santos Machado (FURG)

Documento assinado digitalmente
 **JAIRO VALOES DE ALENCAR RAMALHO**
Data: 19/10/2024 10:40:21-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Jairo Valões de Alencar Ramalho (UFPel)

Rio Grande - RS
2024

Ficha Catalográfica

P348m Paz, Murilo da Cunha.

Métodos de inversão numérica da transformada de *Laplace* baseados na deformação do contorno de *Bromwich* / Murilo da Cunha Paz. – 2024.

124 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Rio Grande/RS, 2024.

Orientadora: Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez.

Coorientador: Dr. João Francisco Prolo Filho.

1. Transformada de *Laplace* 2. Contorno de *Bromwich*
3. Método *Talbot* 4. Inversão numérica 5. Circuitos elétricos
I. Rodriguez, Bárbara Denicol do Amaral II. Prolo Filho, João Francisco II. Título.

CDU 004

Catálogo na Fonte: Bibliotecário José Paulo dos Santos CRB 10/2344

RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo avaliar a eficiência de cinco métodos baseados na deformação do contorno de Bromwich para a inversão numérica da Transformada de Laplace, uma vez que a inversão analítica pode ser de difícil execução em certos problemas. Assim, realizou-se uma comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos algoritmos Talbot-Fixo, Talbot-Dingfelder-Weideman, Talbot-Weideman, Talbot-Parábola e Talbot-Hipérbole e a solução analítica, quando aplicados a um conjunto de funções elementares com caráter exponencial, oscilatório ou logarítmico. Nessa análise, parâmetros a e b foram incorporados com o intuito de investigar a eficiência dos métodos em lidar com funções de mesma classe, porém exibindo comportamentos distintos. Além disso, para avaliar quão boa é a aproximação numérica em relação à inversão analítica, utilizou-se como critério o erro absoluto médio para estimar o parâmetro M ótimo (M_o), que melhor ajusta esses perfis. Por fim, essa análise se estende a três modelos de circuitos elétricos, onde as soluções são obtidas pela Transformada de Laplace. Vale ressaltar que, com base nos requisitos adotados neste trabalho, foi possível determinar qual método numérico apresentou o melhor desempenho nas funções teste e nos problemas analisados.

Palavras-chaves: Transformada de Laplace; Contorno de Bromwich; Método Talbot; Inversão numérica; Circuitos Elétricos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus e aos meus orientadores, Professora Bárbara e Professor João, por toda a paciência, dedicação, disponibilidade, ensinamentos e incentivo, que foram essenciais ao longo de todo o curso.

Agradeço aos professores Jairo, Matheus e à professora Cátia por suas colaborações, disponibilidade e valiosas contribuições.

À minha família, pelo apoio incondicional, paciência e compreensão. Muito obrigado por estarem comigo em todas as etapas da minha vida.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional (PPGMC) e à Universidade Federal do Rio Grande (FURG).

ABSTRACT

This dissertation aims to evaluate the efficiency of five methods based on Bromwich contour deformation for the numerical inversion of the Laplace Transform, as analytical inversion can be challenging to execute in certain problems. A comparison was made between the numerical solutions obtained by the Talbot-Fixed, Talbot-Dingfelder-Weideman, Talbot-Weideman, Talbot-Parabola, and Talbot-Hyperbola algorithms and the analytical solution when applied to a set of elementary functions with exponential, oscillatory, or logarithmic characteristics. In this analysis, parameters a and b were incorporated to investigate the efficiency of the methods in handling functions of the same class but displaying distinct behaviors. Additionally, to assess how well the numerical approximation aligns with the analytical inversion, the mean absolute error criterion was used to estimate the optimal parameter M (M_o), which best adjusts these profiles. Finally, this analysis extends to three electrical circuit models, where solutions are obtained using the Laplace Transform. It is worth noting that, based on the requirements adopted in this study, it was possible to determine which numerical method presented the best performance for the test functions and analyzed problems.

Keywords: Laplace Transform; Bromwich Contour; Talbot Method; Numerical Inversion; Electrical Circuits.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	13
2	OBJETIVOS	17
3	MÉTODOS NUMÉRICOS DE INVERSÃO	18
3.1	Algoritmo Talbot-Fixo	18
3.2	Algoritmo Talbot-Weideman	20
3.3	Algoritmo Talbot para os contornos Parábola e Hipérbole	21
3.4	Algoritmo Talbot-Dingfelder-Weideman (TDW)	22
4	RESULTADOS NUMÉRICOS	24
4.1	Funções Testes	25
4.2	Inversão de $F_1(s)$	26
4.3	Inversão de $F_2(s)$	32
4.4	Inversão de $F_3(s)$	38
4.5	Inversão de $F_4(s)$	44
4.6	Inversão de $F_5(s)$	47
4.7	Inversão de $F_6(s)$	53
4.8	Inversão de $F_7(s)$	56
4.9	Análise Geral dos Resultados das Funções Testes	58
5	CIRCUITOS ELÉTRICOS	61
5.1	Tipos de Circuitos Elétricos	63
5.1.1	Circuito Elétrico RC	63
5.1.2	Circuito Elétrico RL	64
5.1.3	Circuito Elétrico RCL	64
5.2	Circuito elétrico 1	67
5.2.1	Tensão $V_1(s)$	68
5.2.2	Tensão $V_2(s)$	71
5.2.3	Tensão $V_3(s)$	73
5.2.4	Tensão $V_4(s)$	76
5.2.5	Corrente $I_1(s)$	78
5.2.6	Corrente $I_2(s)$	81
5.2.7	Corrente $I_3(s)$	83
5.2.8	Corrente $I_4(s)$	86
5.3	Circuito Elétrico 2	88
5.3.1	Tensão $V(s)$	89
5.3.2	Corrente $I(s)$	92
5.4	Circuito Elétrico 3	95
5.4.1	Malha $I_1(s)$	95
5.4.2	Malha $I_2(s)$	98
5.5	Análise Geral dos Circuitos Elétricos	101

6	CONCLUSÕES	103
7	REFERÊNCIAS	105
7.1	Fundamentação Matemática	110
7.2	Transformada de Laplace	110
7.3	Conceitos Básicos e Condição de Existência	110
7.4	Propriedades Operacionais da Transformada de Laplace	111
7.5	Convolução de Funções	112
7.6	Propriedades da Convolução:	112
7.7	Transformada Inversa de Laplace	113
7.8	Propriedades Operacionais	113
7.9	Métodos Analíticos para determinar a Transformada Inversa de Laplace	114
7.10	Método de Frações Parciais	114
7.11	Fórmula de Desenvolvimento de Heaviside	115
8	APÊNDICE II	116
8.1	Regra do Trapézio (Simples)	116
8.2	Regra dos Trapézios (Composta)	116
8.3	Regra do Ponto Médio	117
9	APÊNDICE III	119
10	APÊNDICE IV	120
11	APÊNDICE V	122

LISTA DE FIGURAS

3.1	Contorno de Talbot	19
4.1	Fluxograma dos algoritmos	25
4.2	Fluxograma do Erro Absoluto Médio.	26
4.3	$\overline{E}_{abs}$ através dos Método de Inversão Numérica $F_1(s)$ com $b = 0, 5$	27
4.4	$\overline{E}_{abs}$ através dos Método de Inversão Numérica $F_1(s)$ com $b = 2$	27
4.5	$\overline{E}_{abs}$ através dos Método de Inversão Numérica $F_1(s)$ com $b = 30$	28
4.6	Representação gráfica dos resultados tabelados para $F_1(s)$ com $b = 0, 5$	31
4.7	Representação gráfica dos resultados tabelados para $F_1(s)$ com $b = 2$	31
4.8	Representação gráfica dos resultados tabelados para $F_1(s)$ com $b = 30$	32
4.9	$\overline{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica $F_2(s)$ com $a = 0, 5$	33
4.10	$\overline{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica $F_2(s)$ com $a = 2$	33
4.11	$\overline{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica $F_2(s)$ com $a = 30$	34
4.12	Representação gráfica dos resultados tabelados para $F_2(s)$ com $a = 0, 5$	37
4.13	Representação gráfica dos resultados tabelados para $F_2(s)$ com $a = 2$	37
4.14	Representação gráfica dos resultados tabelados para $F_2(s)$ com $a = 30$	38
4.15	$\overline{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica $F_3(s)$ com $a = 0, 5$	39
4.16	$\overline{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica $F_3(s)$ com $a = 2$	39
4.17	$\overline{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica $F_3(s)$ com $a = 30$	40
4.18	Representação gráfica dos resultados tabelados para $F_3(s)$ com $a = 0, 5$	43
4.19	Representação gráfica dos resultados tabelados para $F_3(s)$ com $a = 2$	43
4.20	Representação gráfica dos resultados tabelados para $F_3(s)$ com $a = 30$	44
4.21	$\overline{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica para $F_4(s)$	45
4.22	Representação gráfica dos resultados tabelados para $F_4(s)$	45
4.23	$\overline{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica $F_5(s)$ com $b = 0, 5$	47
4.24	$\overline{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica $F_5(s)$ com $b = 2$	48
4.25	$\overline{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica $F_5(s)$ com $b = 5$	48
4.26	Representação gráfica dos resultados tabelados para $F_5(s)$ com $b = 0, 5$	52
4.27	Representação gráfica dos resultados tabelados para $F_5(s)$ com $b = 2$	52
4.28	Representação gráfica dos resultados tabelados para $F_5(s)$ com $b = 5$	53
4.29	$\overline{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica $F_6(s)$	54
4.30	Representação gráfica dos resultados tabelados para $F_6(s)$	54
4.31	$\overline{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica $F_7(s)$	56
4.32	Representação gráfica dos resultados tabelados para $F_7(s)$	58
5.1	Circuito Elétrico RC sem fonte	63
5.2	Circuito Elétrico RL sem fonte	64
5.3	Circuito Elétrico RLC em série sem fonte	65
5.4	Circuito Elétrico RLC em série	66
5.5	Fluxograma do algoritmo dos circuitos elétricos.	67

5.6	Circuito Elétrico 1.	67
5.7	$\overline{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica para $V_1(s)$	69
5.8	Representação gráfica dos resultados tabelados para $V_1(s)$	69
5.9	$\overline{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica para $V_2(s)$	71
5.10	Representação gráfica dos resultados tabelados para $V_2(s)$	73
5.11	$\overline{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica para $V_3(s)$	74
5.12	Representação gráfica dos resultados tabelados para $V_3(s)$	74
5.13	$\overline{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica para $V_4(s)$	76
5.14	Representação gráfica dos resultados tabelados para $V_4(s)$	78
5.15	$\overline{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica para $I_1(s)$	79
5.16	Representação gráfica dos resultados tabelados para $I_1(s)$	79
5.17	$\overline{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica para $I_2(s)$	81
5.18	Representação gráfica dos resultados tabelados para $I_2(s)$	83
5.19	$\overline{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica para $I_3(s)$	84
5.20	Representação gráfica dos resultados tabelados para $I_3(s)$	84
5.21	$\overline{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica para $I_4(s)$	86
5.22	Representação gráfica dos resultados tabelados para $I_4(s)$	88
5.23	Circuito Elétrico 2.	88
5.24	$\overline{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica para $V(s)$	90
5.25	Representação gráfica dos resultados tabelados para $V(s)$	92
5.26	$\overline{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica para $I(s)$	93
5.27	Representação gráfica dos resultados tabelados para $I(s)$	93
5.28	Circuito Elétrico	95
5.29	$\overline{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica para $I_1(s)$	96
5.30	Representação gráfica dos resultados tabelados para $I_1(s)$	98
5.31	$\overline{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica para $I_2(s)$	99
5.32	Representação gráfica dos resultados tabelados para $I_2(s)$	99
8.1	Representação gráfica	116
8.2	Representação gráfica da Regra dos Trapézios Composta	117

LISTA DE TABELAS

4.1	Transformada de Laplace para funções elementares	24
4.2	M_o obtidos para função $F_1(s)$ com $b = 0, 5$	26
4.3	M_o obtidos para função $F_1(s)$ com $b = 2$	27
4.4	M_o obtidos para função $F_1(s)$ com $b = 30$	28
4.5	Perfis de inversão para $F_1(s)$ para $b = 0, 5$	29
4.6	Perfis de inversão para $F_1(s)$, para $b = 2$	30
4.7	Perfis de inversão para $F_1(s)$, para $b = 30$	30
4.8	M_o obtidos para função $F_2(s)$ com $a = 0, 5$	32
4.9	M_o obtidos para função $F_2(s)$ com $a = 2$	33
4.10	M_o obtidos para função $F_2(s)$ com $a = 30$	34
4.11	Perfis de inversão para $F_2(s)$, para $a = 0, 5$	35
4.12	Perfil de inversão para $F_2(s)$ para $a = 2$	35
4.13	Perfil de inversão para $F_2(s)$, para $a = 30$	36
4.14	M_o obtidos para função $F_3(s)$ com $a = 0, 5$	38
4.15	M_o obtidos para função $F_3(s)$ com $a = 2$	39
4.16	M_o obtidos para função $F_3(s)$ com $a = 30$	40
4.17	Perfil de inversão para $F_3(s)$, para $a = 0, 5$	41
4.18	Perfil de inversão para $F_3(s)$, para $a = 2$	41
4.19	Perfil de inversão para $F_3(s)$, para $a = 30$	42
4.20	M_o obtidos para função $F_4(s)$	44
4.21	Perfil de inversão para $F_4(s)$	46
4.22	M_o obtidos para função $F_5(s)$ com $b = 0, 5$	47
4.23	M_o obtidos para função $F_5(s)$ com $b = 2$	47
4.24	M_o obtidos para função $F_5(s)$ com $b = 5$	48
4.25	Perfil de inversão para $F_5(s)$, para $b = 0, 5$	49
4.26	Perfil de inversão para $F_5(s)$ para $b = 2$	50
4.27	Perfil de inversão para $F_5(s)$, para $b = 5$	51
4.28	M_o obtidos para função $F_6(s)$	53
4.29	Perfil de inversão para $F_6(s)$	55
4.30	M_o obtidos para função $F_7(s)$	56
4.31	Perfil de inversão para $F_7(s)$	57
5.1	M_o obtidos para a tensão $V_1(s)$	69
5.2	Simulações para $V_1(s)$	70
5.3	M_o obtidos para a tensão $V_2(s)$	71
5.4	Simulações para $V_2(s)$	72
5.5	M_o obtidos para a tensão $V_3(s)$	73
5.6	Simulações para $V_3(s)$	75
5.7	M_o obtidos para a tensão $V_4(s)$	76

5.8	Simulações para $V_4(s)$	77
5.9	M_o obtidos para a corrente $I_1(s)$	78
5.10	Simulações para $I_1(s)$	80
5.11	M_o obtidos para a corrente $I_2(s)$	81
5.12	Simulações para $I_2(s)$	82
5.13	M_o obtidos para a corrente $I_3(s)$	83
5.14	Simulações para $I_3(s)$	85
5.15	M_o obtidos para a corrente $I_4(s)$	86
5.16	Simulações para $I_4(s)$	87
5.17	M_o obtidos para a tensão $V(s)$	89
5.18	Simulações para $V(s)$	91
5.19	M_o obtidos para a corrente $I(s)$	92
5.20	Simulações para $I(s)$	94
5.21	M_o obtidos para a corrente $I_1(s)$	96
5.22	Simulações para $I_1(s)$	97
5.23	M_o obtidos para a corrente $I_2(s)$	98
5.24	Simulações para $I_2(s)$	100
5.25	M_o e $\overline{E}_{abs}$ obtidos no circuito elétrico 1 proposto por Brančík (2011). . . .	101
5.26	M_o e $\overline{E}_{abs}$ obtidos no circuito elétrico 2 proposto por Alexander e Sadiku (2013).	101
5.27	M_o e $\overline{E}_{abs}$ obtidos no circuito elétrico 3 proposto por Alexander e Sadiku (2013).	101

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Parâmetro das funções elementares
b	Parâmetro das funções elementares
F	Função no domínio de Laplace
$F^{(n)}$	Enésima derivada de F
f	Função no domínio real
$f^{(n)}$	Enésima derivada de f
G	Função no domínio de Laplace
g	Função no domínio real
$\mathcal{U}$	Função Degrau Unitário
$\mathcal{L}$	Operador da Transformada de Laplace
$\mathcal{L}^{-1}$	Operador da Transformada Inversa de Laplace
s	Parâmetro na transformação de Laplace
t	tempo
M	Número de termos do somatório dos métodos numéricos
M_o	Valor de M que melhor ajusta os perfis numéricos aos analíticos
$f_{TF}(t, M)$	Aproximação do método Talbot-Fixo
$f_{TDW}(t, M)$	Aproximação do método Talbot-Dingfelder-Weideman (TDW)
$f_{TW}(t, M)$	Aproximação do método Talbot-Weideman
$f_{TP}(t, M)$	Aproximação do método Talbot-Parábola
$f_{TW}(t, M)$	Aproximação do método Talbot-Hipérbole
$\Re$	Parte Real da aproximação do método Talbot-Fixo
$\Im$	Parte Imaginária da aproximação do método Talbot-Weideman

Símbolos Gregos

α	Parâmetro livre dos métodos numéricos
σ	Parâmetro livre dos métodos numéricos
γ	Parâmetro livre dos métodos numéricos
ν	Parâmetro livre dos métodos numéricos
μ	Parâmetro livre dos métodos numéricos
θ	Variável dos métodos numéricos

LISTA DE ABREVIATURAS

BEM	Método de Elementos de Contorno
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
ED	Equação Diferencial
MMC	Mínimo Múltiplo Comum
TF	Método Talbot-Fixo
TDW	Método Talbot-Dingfelder-Weideman
TW	Método Talbot-Weideman
TP	Método Talbot-Parábola
TH	Método Talbo-Hipérbole
TL	Transformada de Laplace
KCL	Lei da Correntes de Kichhoff
KVL	Lei da Tensões de Kichhoff
CE	Circuito Elétrico
CC	Corrente Contínua
CA	Corrente Alternada
fem	Força Eletromotriz

1 INTRODUÇÃO

A modelagem matemática consiste em representar um problema propriamente dito através de uma formulação matemática, cuja solução possa ser utilizada para realizar previsões do seu comportamento a curto, médio ou longo prazo ou auxiliar na tomada de decisões. Compostos por uma ou mais equações, os modelos matemáticos, usualmente, representam fenômenos de maneira simplificada, facilitando assim a análise das características consideradas fundamentais em um determinado estudo. Quando empregados em campos da ciência e tecnologia, tais como a matemática, física, química, biologia, economia e engenharias, esses modelos são frequentemente descritos por Equações Diferenciais.

Segundo Zill e Cullen (2001), fenômenos que representam variações de suas grandezas ao longo do tempo ou espaço são usualmente descritos a partir de Equações Diferenciais (ED), que nada mais são do que equações matemáticas escritas em termos de funções incógnitas (variáveis dependentes) e suas derivadas, e variáveis ditas independentes. Os tipos de ED existentes podem ser classificados em dois grandes grupos: Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), cuja variável incógnita e suas derivadas dependem de apenas uma variável independente; e as Equações Diferenciais Parciais (EDP), que envolvem duas ou mais variáveis independentes. Existe uma infinidade de métodos dedicados à resolução de ED, cada qual aplicável a grupos específicos de equações que satisfaçam determinadas características. Nesse contexto, destaca-se aqui o método da Transformada de Laplace (TL) por conta de sua eficácia no tratamento de diferentes classes de ED.

A Transformada de Laplace é uma ferramenta matemática bastante versátil e amplamente utilizada para resolver problemas em diversas áreas da ciência. Encontram-se na literatura inúmeros trabalhos sobre análise de circuitos elétricos (Zahra, Hikal e Bahnasy, 2017), sistemas de controle (Li et al., 2019), mecânica dos fluidos (Kulish e Lage, 2002 e Reyaz et al., 2021), processamento de sinais (Lavery e Gazonas, 2006), entre outros, nos quais a TL é utilizada como método de resolução. Entre suas vantagens destaca-se a redução do grau de complexidade das ED envolvidas por meio da aplicação de um operador integral (Pilatti, 2019). No entanto, como principal limitação, tem-se a dificuldade em se obter expressões analíticas para as transformadas inversas (Pilatti, 2019). Nesse sentido, o uso de abordagens numéricas torna-se uma alternativa bastante viável e a literatura dispõe de uma variedade de métodos para sua realização, que costumam ser distribuídos em cinco grandes categorias: as fundamentadas na aproximação da integral complexa de inversão: Dubner e Abate (1968), Piessens (1971), Durbin (1974), De Hoog, Knigh e Stokes (1982); na utilização de aproximações por Série de Fourier: Dubner e Abate (1968); na fórmula de Post-Widder: Gaver (1966), Zakian (1969), Stehfest (1970), Abate e Valkó (2004); na expansão da função original em funções ortogonais: Weeks (1966), Chung e Sun (1986), ou ainda, na deformação do contorno de Bromwich: Talbot (1979), Abate e Valkó (2004), Weideman (2006), Trefethen, Weideman e Schmelzer (2006), Dingfelder e Weideman (2014).

De acordo com Pilatti (2019), a demanda por métodos para o cálculo numérico da Transformada Inversa de Laplace, juntamente com a ausência de um método universal capaz de lidar eficientemente com todos os tipos de funções, tem motivado a realização de diversos estudos. Nesse contexto, a literatura apresenta inúmeros trabalhos que testam e validam esses métodos aplicando-os a um conjunto de funções transformadas, cujas inversões são conhecidas. Essa questão é abordada, por exemplo, no estudo realizado por Davies e Martin (1979), que propuseram a avaliação de quatorze técnicas para a inversão numérica da Transformada de Laplace, aplicadas a um conjunto de dezesseis funções elementares, cujos comportamentos são amplamente conhecidos e possuem soluções analíticas simples. Além deste trabalho, destacam-se: Duffy (1993), Galdino (1995), Cohen (2007), Kuhlman (2012), Amaral (2016), Smith e Brancík (2016), Defreitas e Kane (2017), Brzeziński (2018), Ferreira et al. (2021), Lemos et al. (2021), Calixto et al. (2022).

No estudo conduzido por Duffy (1993), os métodos Crump (1976), Weeks (1966) e Talbot (1979) foram empregados na inversão numérica da Transformada de Laplace de cinco funções teste. Tais funções representam soluções de problemas que podem ser encontrados em, por exemplo, teoria dos circuitos, análise do impacto longitudinal de um corpo rígido em uma barra, estudo de fluidos viscoelásticos e teoria das vigas.

Galdino (1995) estuda métodos de inversão numérica para a Transformada de Laplace, incluindo as aproximações por Série de Fourier (Dubner e Abate, 1968), Método Talbot (Talbot, 1979), Método Talbot modificado (Piessens, 1971) e Método Weeks (Weeks, 1966). O trabalho avalia e testa essas técnicas com funções elementares e discute os desafios encontrados na implementação das rotinas de inversão numérica.

No livro de Cohen (2007) é apresentada uma fundamentação teórica e as conclusões sobre a eficiência de vários métodos já desenvolvidos para a inversão numérica da TL.

Kuhlman (2012) apresenta um método de simulação de elemento de fronteira (BEM) para comparar a eficácia das estratégias numéricas na Transformada Inversa de Laplace, considerando os requisitos gerais dos métodos no espaço de Laplace. O autor compara cinco algoritmos para a inversão da TL: os métodos Scharpery (Scharpery, 1962), Weeks (Weeks, 1966), Stehfest (Stehfest, 1970), Talbot (Talbot, 1979), e o método Hoog (De Hoog, Knigh, Stokes, 1982).

No trabalho de Amaral (2016), foram implementados os métodos de Expansão em Série de Potências (Chung e Sun, 1986), Talbot-Fixo (Abate e Valkó, 2004) e Quadratura Gaussiana (Burden e Faires, 2011) para avaliar seus desempenhos na inversão da Transformada de Laplace. A análise foi aplicada ao problema de transporte de nêutrons em geometria cartesiana unidimensional, considerando a versão em ordenadas discretas.

Smith e Brancík (2016) conduziram uma revisão detalhada de três métodos numéricos amplamente utilizados: Talbot (1979), Zakian (1969) e Stehfest (1970), analisando-os em relação a funções comumente aplicadas em engenharia e telecomunicações. O estudo tem como objetivo avaliar esses métodos com base em critérios de desempenho, precisão, estabilidade e velocidade computacional, buscando identificar um método de Transformada Inversa de Laplace Numérica unidimensional que seja relativamente adequado e universal.

Defreitas e Kane (2017) investigaram as propriedades e o tratamento de erros na inversão numérica da Transformada de Laplace, utilizando funções elementares com ruído adicionado à transformação inversa. Os autores examinaram três algoritmos amplamente utilizados para a inversão da Transformada de Laplace: o algoritmo Stehfest (1970), o algoritmo Talbot (1979) e o algoritmo baseado na aproximação por Série de Fourier (Dubner e Abate, 1968). Desse modo, o objetivo do estudo foi avaliar o desempenho, precisão e confiabilidade desses métodos de inversão numérica.

Brzeziński (2018) avalia a precisão de diversos algoritmos para a aproximação da Transformada Inversa de Laplace, incluindo os métodos Stehfest (1970), Abate e Whitt (1992), Vlach e Singhai (1983), De Hoog, Knight e Stokes (1982), Talbot (1979), Zakian (1969) e um método que utiliza a Transformada Rápida de Fourier (FFT) para acelerar a convergência das séries de Fourier. O autor utilizou linguagens C++ e Python com bibliotecas matemáticas de precisão arbitrária para resolver questões de implementação. Os resultados indicam que os métodos estudados são de alta precisão e adequados para uma ampla gama de problemas de inversão.

No estudo conduzido por Ferreira et al. (2021), foram exploradas técnicas baseadas na aproximação por Série de Fourier (Dubner e Abate, 1968), além dos métodos Zakian (1969), Stehfest (1970) e Talbot-Fixo (Abate e Valkó, 2004). Os autores testaram e avaliaram os aspectos computacionais desses métodos aplicados a um conjunto de funções elementares, analisando o desempenho na inversão de diferentes classes de funções e a eficácia dos algoritmos. Além disso, esses métodos foram aplicados à resolução do problema de condução de calor em uma placa unidimensional, permitindo uma comparação dos resultados para avaliar o desempenho das técnicas em condições específicas.

Lemos et al. (2021) realizaram uma avaliação detalhada da precisão e do desempenho computacional de vários métodos numéricos: Talbot-Fixo (Abate e Valkó, 2004), Dubner-Abate (Dubner e Abate, 1968), Durbin (1974), Gaver-Stehfest (Kuznetsov, 2013) e Euler (Abate e Whitt, 1995). Utilizando um conjunto de funções teste com características constantes, lineares, trigonométricas, hiperbólicas e exponenciais. Os autores variaram os parâmetros dos métodos, correspondentes ao número de termos no somatório, para identificar a técnica mais adequada para aplicações futuras, como na distribuição de temperatura em uma barra e na equação de onda homogeneizada.

A pesquisa desenvolvida por Calixto et al. (2022) avaliou os aspectos computacionais do método Talbot-Fixo (Abate e Valkó, 2004) e sua eficácia no tratamento de funções exponenciais, oscilatórias e logarítmicas, considerando a influência do parâmetro livre M . Os autores compararam soluções numéricas e analíticas para cada função testada e calcularam o erro absoluto médio. A análise revelou que o valor ideal para M varia conforme a natureza da função, e aumentar o parâmetro além do valor ideal não melhora os resultados.

Na dissertação de Freitas (2022), a eficiência de métodos de inversão numérica para a Transformada de Laplace foi avaliada, incluindo as técnicas Zakian (1969), Stehfest (1970), Talbot-Fixo (Abate e Valkó, 2004) e uma modificação do contorno de Talbot proposta por Dingfelder e Weideman (2014). O estudo comparou os resultados obtidos com essas técnicas em relação

às soluções analíticas para funções elementares e outras cuja inversão analítica é complexa. Os métodos foram aplicados a um problema de difusão de mercúrio na água, e os resultados mostraram um desempenho geral satisfatório. No entanto, os métodos Talbot-Fixo e a modificação proposta por Dingfelder e Weideman (2014) apresentaram dificuldades em lidar com a função de Heaviside.

Dentro desse contexto, não identificou-se um método que possa ser usado de forma eficiente para inversão numérica de todas as classes de funções. Mas, dependendo das características do modelo a ser resolvido, um método pode ser melhor indicado de que outro. Com isso, a proposta desta dissertação é avaliar os aspectos computacionais de cinco métodos de inversão numérica da Transformada de Laplace, já mencionados no resumo, quando aplicados em um conjunto de funções elementares e a três modelos de circuitos elétricos. Desse modo, optou-se trabalhar com os métodos da categoria que utilizam a deformação do contorno de integração de Bromwich. Os selecionados foram: Talbot-Fixo, proposto por Abate e Valkó (2004); Talbot-Weideman, proposto por Weideman (2006); Talbot-Parábola e Talbot-Hipérbole, ambos propostos por Trefethen et al. (2006); e uma variação do Talbot-Fixo, proposta por Dingfelder e Weideman (2014) que, por simplicidade, será referenciado aqui como Talbot-DW. No processo, realizou-se uma análise comparativa e uma investigação acerca da eficiência dos algoritmos de aproximação.

Vale destacar como contribuições desta dissertação de mestrado que, até então, existem lacunas na literatura sobre a eficiência da utilização desses métodos para a inversão numérica da TL quando aplicados a funções com características exponenciais, logarítmicas e oscilatórias, influenciadas não só pela ordem de aproximação dos métodos numéricos, mas também por parâmetros que gerem grandes variações de amplitude ou frequência de oscilação das funções. Destaca-se, ainda, a utilização do erro absoluto médio, proposto primeiramente por Calixto et al. (2022), como critério de avaliação dos resultados obtidos. Além disso, não identificou-se na revisão da literatura realizada nesse trabalho, estudos sobre a aplicação de métodos numéricos para a inversão da Transformada de Laplace em problemas de circuitos elétricos utilizando o critério mencionado anteriormente.

Dessa forma, para atingir os objetivos propostos, o presente trabalho está estruturado da seguinte maneira: no Capítulo dois, são descritos os objetivos gerais e específicos; no Capítulo três, são definidas as técnicas de inversão numérica: Talbot-Fixo, Talbot-DW, Talbot-Weideman, Talbot-Parábola e Talbot-Hipérbole; o Capítulo quatro apresenta os resultados obtidos, juntamente com uma análise da aplicação dos cinco algoritmos em um conjunto de funções elementares, considerando a variação dos parâmetros a e b ; no Capítulo cinco, são descritos três problemas de aplicação envolvendo circuitos elétricos, além da aplicação dos algoritmos de inversão numérica e a análise dos resultados obtidos; no Capítulo seis, as considerações finais. Nos apêndices, apresenta-se uma fundamentação matemática sobre a TL e três métodos de integração numérica, a explicação sobre a obtenção da integral complexa de inversão em termos de θ , a demonstração da propriedade da simetria do conjugado, além da transição entre duas equações e a aplicação da Regra dos Trapézios Composta.

2 OBJETIVOS

O objetivo geral desta dissertação consiste em realizar um estudo teórico e implementar computacionalmente cinco métodos de inversão da Transformada de Laplace, avaliando a eficiência de cada um deles em um conjunto de funções elementares. Por meio desta análise, busca-se indicar a técnica mais adequada para resolver três modelos de circuitos elétricos.

Desse modo, propõem-se os seguintes objetivos específicos:

- Apresentar uma revisão bibliográfica sobre os métodos de inversão numérica da Transformada de Laplace;
- Apresentar uma fundamentação teórica das técnicas numéricas de inversão: Talbot-Fixo (TF), Talbot-DW (TDW), Talbot-Weideman (TW), Talbot-Parábola (TP) e Talbot-Hipérbole (TH);
- Implementar computacionalmente os métodos mencionados no item anterior;
- Analisar os resultados obtidos por meio dos métodos TF, TDW, TW, TP e TH na inversão de um conjunto de funções elementares com características exponenciais, logarítmicas e oscilatórias;
- Incorporar os parâmetros a e b , responsáveis por modificar as amplitudes ou frequências de oscilação das funções elementares, e analisar sua influência na convergência dos métodos de inversão numérica em comparação a solução analítica;
- Utilizar o erro absoluto médio como critério de escolha do melhor valor para o parâmetro M (indicado aqui como M_o ou M ótimo), utilizado na expansão dos somatórios dos métodos de inversão numérica da TL;
- Avaliar o desempenho dos métodos numéricos em três circuitos elétricos;
- Validar os algoritmos implementados;
- Recomendar a utilização dos métodos.

3 MÉTODOS NUMÉRICOS DE INVERSÃO

Nesta dissertação serão examinados cinco métodos de inversão numérica da Transformada de Laplace: Talbot-Fixo, Talbot-Dingfelder-Weideman, Talbot-Weideman, Talbot-Parábola e Talbot-Hipérbole. O objetivo é explorar para quais categorias de funções elementares as abordagens selecionadas demonstram melhores resultados em termos da capacidade de inversão.

3.1 Algoritmo Talbot-Fixo

Segundo Cohen (2007), a metodologia introduzida por Talbot (1979) desempenhou um papel pioneiro quando se trata de explorar a deformação do contorno de Bromwich. Dentro dessa abordagem, para realizar o cálculo numérico da TL avalia-se a integral dada por

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st}ds = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\beta} F(s)e^{st}ds, \quad (3.1)$$

onde o contorno β é uma linha vertical definida por $s = c + i\omega$, com $\omega \in (-\infty, +\infty)$, c possui um valor fixo tal que todas as singularidades da transformação estejam à esquerda da reta $s = c$ paralela ao eixo imaginário.

Segundo Abate e Valkó (2004), a convergência da integral da Eq. (3.1) seria muito maior se s pudesse assumir valores com uma componente real suficientemente grande, porém negativa. Dessa forma, o método proposto por Talbot considera ser possível deformar o contorno β em algum caminho aberto em torno do eixo real negativo, desde que nenhuma singularidade de $F(s)$ seja atravessada durante essa deformação. A intenção dessa mudança é reduzir a magnitude do fator exponencial e^{st} no integrando.

Em geral, a trajetória da linha β em $\omega \in (-\infty, +\infty)$ é substituída por uma equivalente β' , que tem início e fim no semiplano esquerdo do plano complexo, onde $\Re\{s\} \rightarrow -\infty$. De acordo com Murli e Rizzard (1990), essa substituição é viável se a função transformada $F(s)$ satisfizer as seguintes condições:

(i) Todas as singularidades s_i devem ser conhecidas tais que $\Im\{s\} < \gamma$, onde γ é um número conhecido.

(ii) $|F(s)| \rightarrow 0$ uniformemente em $\Re\{s\} < \gamma$ quando $|s| \rightarrow \infty$.

No entanto, a dificuldade encontra-se na validação da condição (i) para uma função $F(s)$ ao longo de um novo contorno β' . Conforme apontado por Cohen (2007), essa dificuldade pode ser contornada, tomando-se a função modificada $F(\lambda s + \sigma)$, através de uma escolha adequada dos parâmetros λ e de deslocamento σ , de forma que se $F(s)$ tem singularidades em s_0 , $F(\lambda s + \sigma)$ tem uma singularidade s_0^* correspondente, tal que

$$s_0^* = \frac{(s_0 - \sigma)}{\lambda}. \quad (3.2)$$

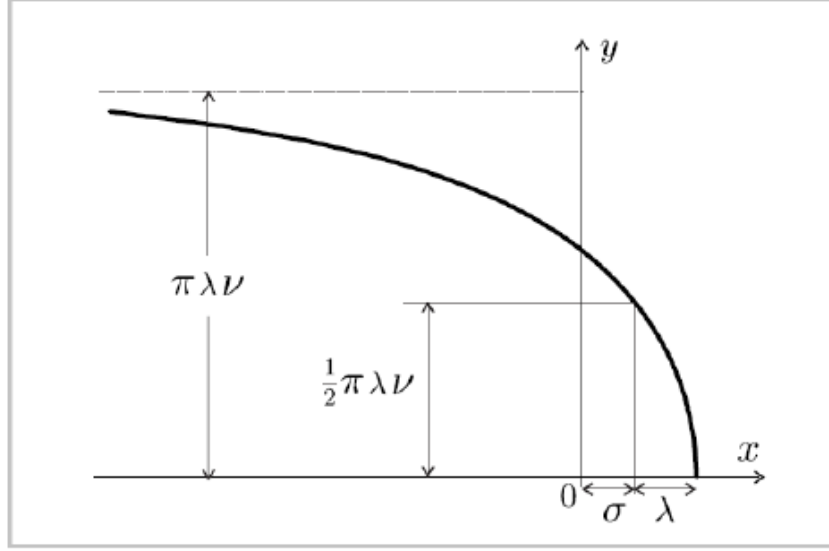
Assim, se $s = \lambda s + \sigma$, então $F(s) = F(\lambda s + \sigma)$, $e^{st} = e^{t(\lambda s + \sigma)} = e^{t\lambda s} \cdot e^{t\sigma}$ e $ds = \lambda ds$.

Com isso, a Eq. (3.1) pode ser substituída por

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta'} F(\lambda s + \sigma) e^{t\lambda s} \cdot e^{t\sigma} \lambda ds = \frac{\lambda e^{\sigma t}}{2\pi i} \int_{\beta'} e^{t\lambda s} F(\lambda s + \sigma) ds, t > 0, \quad (3.3)$$

onde os parâmetros λ e σ podem ser visualizados na Figura 3.1.

Figura 3.1: Contorno de Talbot



Fonte: Murli e Rizzard (1990)

Para garantir que as singularidades de $F(s)$ não sejam atravessadas pela deformação do contorno de Bromwich ao mapear as singularidades s_i , o método Talbot estabelece uma função de varredura para a região do novo contorno, definido por

$$s(z) = \frac{z}{1 - e^{-z}} + z \frac{\nu - 1}{2}, z \in (-2\pi i, 2\pi i) \quad (3.4)$$

e ν é um parâmetro positivo arbitrário.

Baseados na técnica de inversão da Transformada de Laplace proposta por Talbot (1979), Abate e Valkó (2004) apresentaram uma nova, utilizando uma modificação particular do contorno de Bromwich, e a chamaram de Talbot-Fixo. Assim a Eq. (3.4) é expressa como uma parametrização dada por

$$s(\theta) = r\theta(\cot(\theta) + i), -\pi < \theta < \pi, \quad (3.5)$$

onde r é um parâmetro fixo apropriado.

Após diferenciar a Eq. (3.5), obtêm-se

$$s'(\theta) = ir(1 + i\sigma(\theta)), \quad (3.6)$$

para

$$\sigma(\theta) = \theta + (\theta \cot(\theta) - 1) \cot(\theta). \quad (3.7)$$

Utilizando a Eq. (3.5), a integral complexa de inversão da Eq. (3.1) pode ser escrita, em termos de θ (o passo a passo encontra-se no Apêndice III):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ts(\theta)} F(s(\theta)) s'(\theta) d\theta. \quad (3.8)$$

Aplicando a propriedade da simetria do conjugado da Transformada de Laplace, a qual estipula que $F(s) = \overline{F(\bar{s})}$, e realizando manipulações algébricas e adequação dos limites de integração, obtêm-se (a demonstração completa encontra-se no Apêndice IV)

$$f(t) = \frac{r}{\pi} \int_0^{\pi} \Re[e^{ts(\theta)} F(s(\theta))(1 + i\sigma(\theta))] d\theta, \quad (3.9)$$

onde s é o parâmetro da Transformada de Laplace e t é uma variável dimensional. Aplicando a Regra dos Trapézios Composta (Eq. (8.3)) na Eq. (3.9), têm-se (o passo a passo e encontra-se no Apêndice V)

$$f_{TF}(t, M) \approx \frac{r}{M} \left(\frac{1}{2} F(r) e^{rt} + \sum_{k=1}^{M-1} \Re[e^{ts(\theta_k)} F(s(\theta_k))(1 + i\sigma(\theta_k))] \right). \quad (3.10)$$

Como Abate e Valkó (2004) sugerem que $r = 2M/5t$, e o parâmetro M representa o número de termos do somatório da Eq. (3.10), segue que a aproximação de f_{TF} torna-se dependente de apenas um parâmetro.

3.2 Algoritmo Talbot-Weideman

Conforme mencionado anteriormente, a deformação do contorno de Bromwich tem sido uma contribuição fundamental no desenvolvimento de novos métodos numéricos para a inversão da Transformada de Laplace. Nessa perspectiva, esta seção apresentará a aproximação da integral da Eq. (3.1), conforme proposta por Weideman (2006), onde o contorno será parametrizado por

$$s(\theta) = -\sigma + \mu\theta \cot(\theta) + \mu\nu i\theta, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad (3.11)$$

para σ , μ e ν parâmetros reais que determinam a geometria da curva.

Usando o contorno, Eq. (3.11), a integral dada pela Eq. (3.1) pode ser expressa, em termos de θ como:

$$f(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{s(\theta)t} F(s(\theta)) s'(\theta) d\theta, \quad (3.12)$$

com

$$s'(\theta) = \mu(\cot(\theta) - \theta \csc^2(\theta) + \nu i). \quad (3.13)$$

Contudo, Weideman (2006) utiliza a Regra do Ponto Médio com $2M$ intervalos igualmente espaçados, argumentando que essa escolha evita a amostragem do integrando nas singularidades removíveis em $\theta = 0$ e nas singularidades fundamentais em $\theta = \pm\pi$. Com isso, a aproximação é dada por

$$f_{TW}(t, M) \approx \frac{1}{M} \Im \left\{ \sum_{k=0}^{M-1} e^{s(\theta_k)t} F(s(\theta_k)) s'(\theta_k) \right\} \quad (3.14)$$

e

$$\theta_k = (2k+1)\frac{\pi}{2M}, \text{ com } k = 0 \cdots M-1 \quad (3.15)$$

se a simetria for utilizada.

3.3 Algoritmo Talbot para os contornos Parábola e Hipérbole

Nesta seção, são apresentados matematicamente dois contornos, classificados como da parábola e da hipérbole. Segundo Trefethen et al. (2006) os contornos da parábola (Eq. (3.16)) e da hipérbole (Eq. (3.17)) são respectivamente definidos por:

$$s(\theta) = M[0, 1309 - 0, 1194\theta^2 + 0, 2500i\theta] \quad (3.16)$$

e

$$s(\theta) = 2, 246M[1 - \text{sen}(1, 1721 - 0, 3443i\theta)]. \quad (3.17)$$

Em qualquer um dos contornos mencionados, (3.16) e (3.17), a integral de Bromwich Eq. (3.1) pode ser escrita como

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ts(\theta)} F(s(\theta)) s'(\theta) d\theta. \quad (3.18)$$

Devido ao termo $e^{ts(\theta)}$, o integrando diminui exponencialmente à medida que $|\theta| \rightarrow \infty$. Neste contexto, truncar o domínio $\mathbb{R}$ para um intervalo finito resulta em um erro exponencialmente pequeno. Com isso, Trefethen et al. (2006) fixaram arbitrariamente este intervalo como $[-\pi, \pi]$, considerando M pontos θ_k igualmente espaçados, a uma distância de $2\pi/M$. Além disso, os autores aproximaram a integral da Eq. (3.18) utilizando a Regra dos Trapézios Composta e chegaram na seguinte expressão:

$$f(t, M) \approx -iM^{-1} \sum_{k=1}^M e^{ts(\theta_k)} F(s(\theta_k)) s'(\theta_k), \quad (3.19)$$

dependendo apenas da equação $s(\theta)$ utilizada.

3.4 Algoritmo Talbot-Dingfelder-Weideman (TDW)

O método proposto por Dingfelder e Weideman (2014) baseia-se no uso de outra alternativa de contorno, mas ainda inspirado no trabalho de Talbot (1979). Pelo Teorema de Cauchy (Brown e Churchill, 1960), a deformação do contorno de Bromwich pode ser feita, desde que esse contorno permaneça no domínio de analiticidade de $F(s)$. Assim, suponha que o contorno possa ser parametrizado por

$$C : s = s(\theta) = -\sigma + \mu\theta \cot(\theta) + \nu i\theta, -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad (3.20)$$

onde σ, μ e ν são constantes. Nessa parametrização, o parâmetro σ simboliza um deslocamento para à esquerda, ν define a largura do contorno quando ele aproxima-se de duas assíntotas a uma distância proporcional para $\mu\nu$ do eixo real $\Re(\pm\pi) = -\infty$. Além disso, $\mu\nu$ também determina o espaçamento dos nós próximos ao eixo real. Por fim, o parâmetro μ controla o espaço que os dois nós extremos se expandem no semiplano esquerdo.

Usando a Eq. (3.20), a integral de Bromwich da Eq. (3.1) pode ser expressa como

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{st} F(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{s(\theta)t} F(s(\theta)) s'(\theta) d\theta, \quad (3.21)$$

onde

$$s'(\theta) = \mu(\cot(\theta) - \theta \csc^2(\theta)) + \nu i. \quad (3.22)$$

A integral na Eq. (3.21) é, geralmente, aproximada pela Regra dos Trapézios em uma partição uniforme de $[-\pi, \pi]$. Entretanto, Dingfelder e Weideman (2014) aproximam a integral da Eq. (3.21) utilizando a Regra do Ponto Médio, com um intervalo uniforme de $h = \frac{2\pi}{M}$, o qual produz

$$f_{TDW}(t, M) \approx \frac{1}{Mi} \sum_{k=1}^M e^{s(\theta_k)t} F(s(\theta_k)) s'(\theta_k), \quad (3.23)$$

onde

$$\theta_k = -\pi + \left(k - \frac{1}{2}\right) h. \quad (3.24)$$

Se o contorno dado pela Eq. (3.20) for simétrico em relação ao eixo real, é possível reduzir pela metade o número de avaliações da transformação. Assim, basta considerar apenas os nós de quadratura na região superior (ou inferior) do plano complexo. Para a comparação dos resultados numéricos, consideram-se as regras de quadratura com total de $2M$ nós (Dingfelder e Weideman, 2014). Com isso,

$$s(\theta) = \frac{M}{t} \zeta(\theta), \zeta(\theta) = -\sigma + \mu\theta \cot(\alpha\theta) + \nu i\theta, -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad (3.25)$$

e

$$s'(\theta) = \frac{M}{t} [\mu \cot(\alpha\theta) - \mu\alpha\theta \csc^2(\alpha\theta) + \nu i]. \quad (3.26)$$

No contorno de Talbot (1979) não consta o parâmetro α , ou seja, $\alpha = 1$. Desse modo, os autores Dingfelder e Weideman (2014) propuseram uma modificação no método Talbot, onde é considerado $0 < \alpha < 1$. O fator de escala $\frac{M}{t}$ adota um valor fixo de t e deve ser adequada para maximizar a taxa de convergência na aproximação do método conforme $M \rightarrow \infty$.

A Eq. (3.25) é uma questão prática abordada pelos escritores Dingfelder e Weideman (2014), os quais sugerem a fixação dos parâmetros σ, μ, ν e α . Destaca-se que o presente estudo segue tal abordagem.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, são apresentados os resultados obtidos para a inversão da Transformada de Laplace por meio dos algoritmos Talbot-Fixo, Talbot-DW, Talbot-Weideman, Talbot-Parábola e Talbot-Hipérbole. Inicialmente, os métodos foram implementados para a inversão numérica de um conjunto de funções elementares com comportamento exponencial, logarítmico e oscilatório, conforme apresentado na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Transformada de Laplace para funções elementares

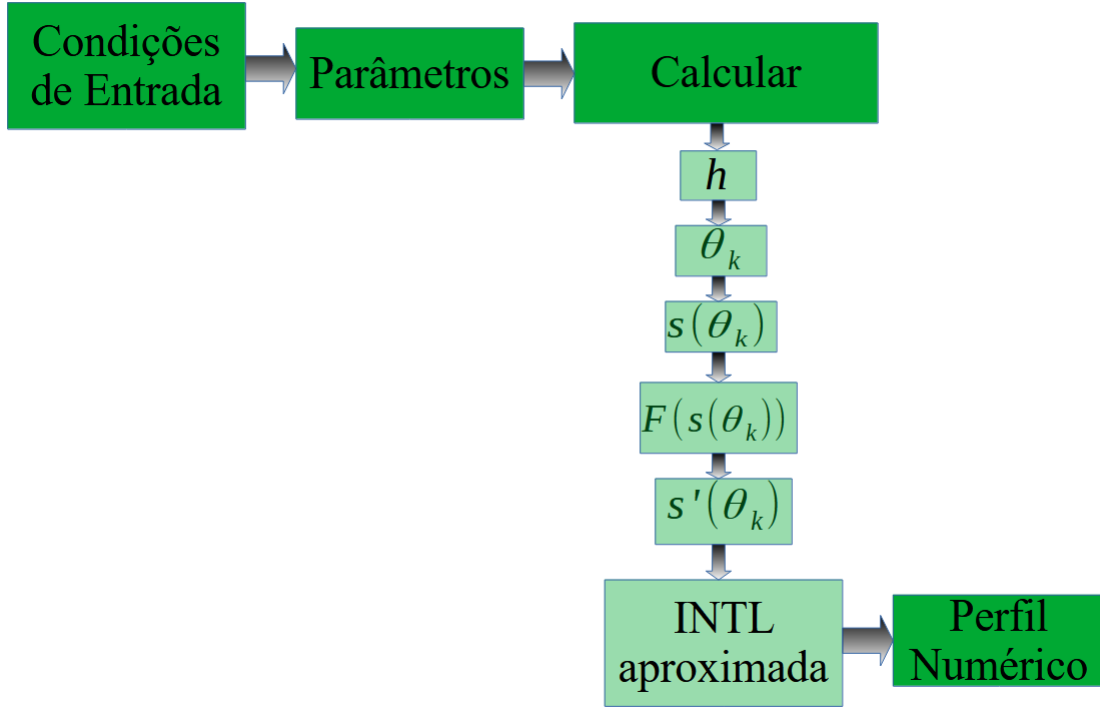
$F(s)$	$f(t)$
$F_1(s) = \frac{1}{s + b}$	$f_1(t) = e^{-bt}$
$F_2(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$	$f_2(t) = \text{sen}(at)$
$F_3(s) = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$f_3(t) = t \cos(at)$
$F_4(s) = \frac{1}{(s + 1)^2}$	$f_4(t) = te^{-t}$
$F_5(s) = e^{-b\sqrt{s}}$	$f_5(t) = \frac{b}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-b^2/4t}$
$F_6(s) = -\frac{\ln(s)}{s}$	$f_6(t) = \ln(t) + {}^1\gamma$
$F_7(s) = \ln\left(1 + \frac{1}{s}\right)$	$f_7(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t}$

O intuito é validar e verificar a aplicabilidade dos algoritmos mencionados, além de identificar a influência do parâmetro a , que modifica a amplitude, e do parâmetro b , que altera a frequência de oscilação das funções elementares, na eficiência desses algoritmos em determinadas situações, bem como, aprimorar a compreensão de suas capacidades e limitações em contextos diversos. Para alcançar tais objetivos, utilizou-se o software de código aberto Octave, versão 7.3.0, em um notebook Core i5-11^a Geração, com Windows 11, equipado com armazenamento SSD de 256GB e 8GB de memória RAM. Nesse ambiente, foram implementados computacionalmente os métodos numéricos descritos neste trabalho. A estrutura do algoritmo está representada na Figura 4.1, onde a sigla INTL significa (Inversa Numérica da Transformada de

¹ γ constante de Euler-Mascheroni = 0,57721566

Laplace).

Figura 4.1: Fluxograma dos algoritmos



Fonte: Autor

4.1 Funções Testes

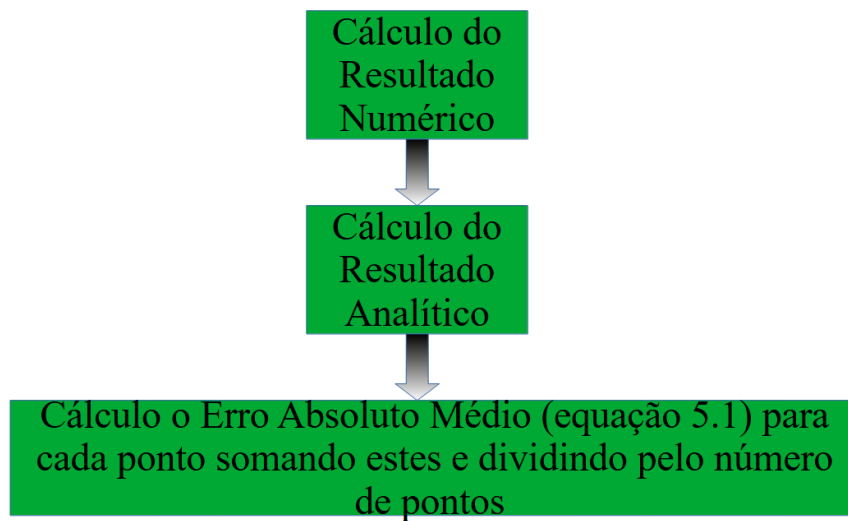
Nesta seção, as tabelas exibidas apresentam os resultados para a Transformada Inversa Analítica, $f_a(t)$, e a Transformada Inversa Numérica, $f_n(t)$, de cada método analisado para auxiliar na avaliação qualitativa de eficiência dos métodos. Tais soluções também são representadas graficamente, a fim de uma melhor visualização dos resultados.

No processo, para cada valor dos parâmetros a e b empregados e analisados nas funções elementares, o erro absoluto médio $\overline{E}_{abs}$ foi usado como critério para escolha do M (corresponde ao número de termos do somatório para uma aproximação de $f(t)$ que melhor ajusta o perfil numérico $f_n(t)$ ao analítico $f_a(t)$). Este valor será referido como M_o ou M ótimo e é definido pela fórmula

$$\overline{E}_{abs} = \frac{1}{M_t} \sum_{i=1}^{M_t} E_{abs}(f(t_i)), \quad (4.1)$$

onde M_t é o número de componentes do vetor t utilizados para gerar os perfis das funções elementares e $E_{abs}(f(t_i))$ é o erro absoluto calculado entre as inversões numérica e analítica para cada função f em cada ponto t_i (Calixto et al., 2022). A estrutura do algoritmo para erro absoluto médio está representada na Figura 4.2.

Figura 4.2: Fluxograma do Erro Absoluto Médio.



Fonte: Autor

A função $F_1(s)$ foi analisada considerando-se três valores diferentes para o parâmetro b , (0,5; 2; 30). Já em $F_5(s)$, utilizou-se os valores (0,5; 2; 5). Além disso, as funções $F_2(s)$ e $F_3(s)$ foram estudadas, levando em consideração três valores distintos para o parâmetro a , (0,5; 2; 30). Durante as análises, as funções elementares foram inicialmente estudadas com o vetor t , variando no intervalo $(0 \leq t \leq 10)$. No entanto, para as funções $F_1(s)$, $F_2(s)$ e $F_3(s)$, quando os parâmetros fixos foram definidos como $a = 30$ ou $b = 30$, modificações nesse intervalo de t foram necessárias a fim de permitir uma visualização gráfica mais clara do comportamento. Assim, ajustou-se o intervalo para $(0 \leq t \leq 1)$.

4.2 Inversão de $F_1(s)$

Os valores de M_o , que oferecem o melhor ajuste nas inversões numéricas em relação a $f_a(t)$, são apresentados nas Tabelas 4.2-4.4. Esses valores foram determinados usando o critério do erro absoluto médio para cada valor do parâmetro b da função $F_1(s) = \frac{1}{s+b}$, cuja transformada inversa é $\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} = f_1(t) = e^{-bt}$. As Figuras 4.3-4.5 exibem a evolução do erro absoluto médio a medida que o valor aumenta, para cada valor do parâmetros b .

Tabela 4.2: M_o obtidos para função $F_1(s)$ com $b = 0, 5$.

Métodos	M_o	Erro Absoluto Médio
Talbot-Fixo	20	$4,124320834348277 \times 10^{-14}$
Talbot-DW	24	$6,607303524511776 \times 10^{-15}$
Talbot-Weideman	20	$1,963549272671566 \times 10^{-15}$
Talbot-Parábola	36	$1,432645037955573 \times 10^{-15}$
Talbot-Hipérbole	32	$7,413577327788155 \times 10^{-15}$

Figura 4.3: $\bar{E}_{abs}$ através dos Método de Inversão Numérica $F_1(s)$ com $b = 0, 5$.

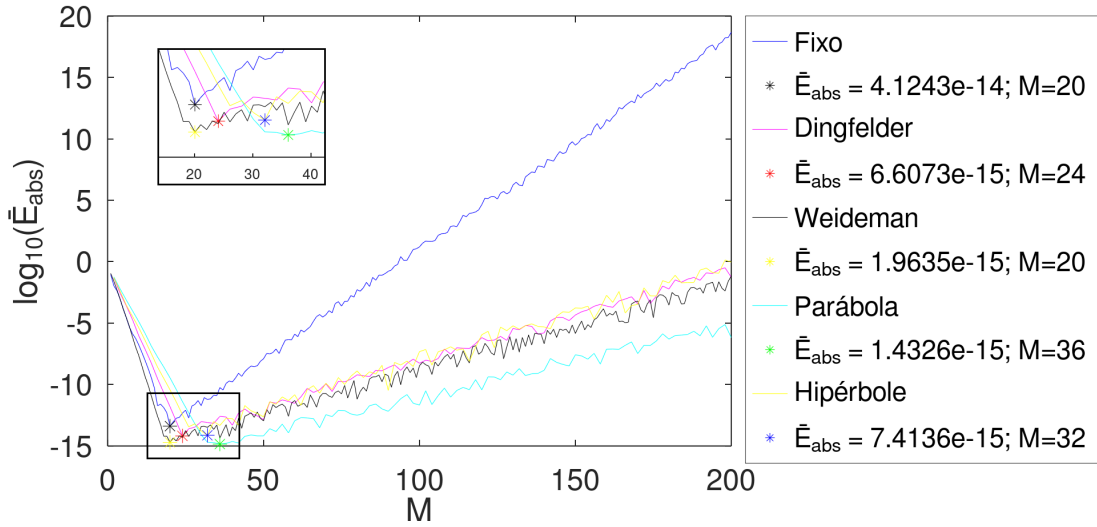


Tabela 4.3: M_o obtidos para função $F_1(s)$ com $b = 2$.

Métodos	M_o	Erro Absoluto Médio
Talbot-Fixo	21	$7,842532943539093 \times 10^{-14}$
Talbot-DW	24	$3,408670076528439 \times 10^{-15}$
Talbot-Weideman	22	$1,205137611647269 \times 10^{-15}$
Talbot-Parábola	36	$7,524523821553874 \times 10^{-16}$
Talbot-Hipérbole	32	$2,976614310426583 \times 10^{-15}$

Figura 4.4: $\bar{E}_{abs}$ através dos Método de Inversão Numérica $F_1(s)$ com $b = 2$.

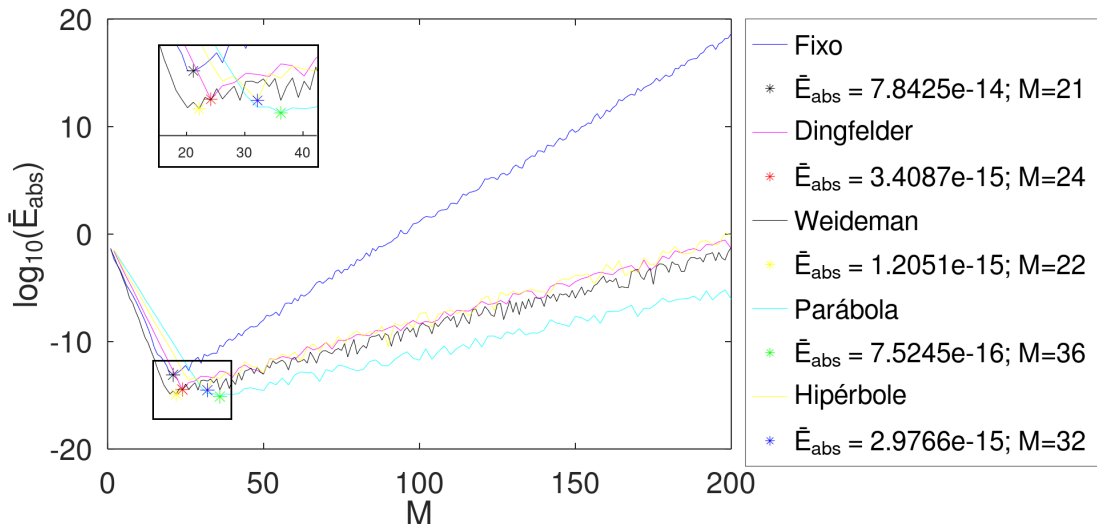
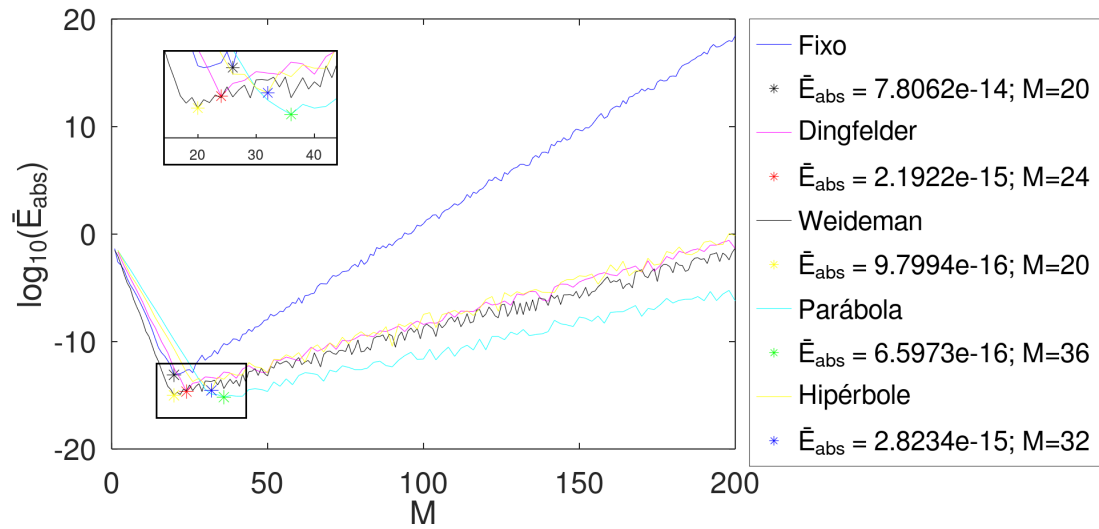


Tabela 4.4: M_o obtidos para função $F_1(s)$ com $b = 30$.

Métodos	M_o	Erro Absoluto Médio
Talbot-Fixo	20	$7,806167575960977 \times 10^{-14}$
Talbot-DW	24	$2,192191195433402 \times 10^{-15}$
Talbot-Weideman	20	$9,799419770381197 \times 10^{-16}$
Talbot-Parábola	36	$6,597317388238557 \times 10^{-16}$
Talbot-Hipérbole	32	$2,823381383930818 \times 10^{-15}$

Figura 4.5: $\bar{E}_{abs}$ através dos Método de Inversão Numérica $F_1(s)$ com $b = 30$.

Fonte: Autor

Nas Tabelas 4.5 a 4.7, são apresentados os resultados correspondentes à Transformada Inversa Analítica ($f_a(t)$) e às Transformadas Inversas Numéricas para todos os métodos analisados, em conformidade com os respectivos valores de M_o .

Tabela 4.5: Perfis de inversão para $F_1(s)$ para $b = 0, 5$.

		TF - $M = 20$	TDW - $M = 24$	TW - $M = 20$	TP - $M = 36$	TH - $M = 32$
t	f_a	f_{TF}	f_{TDW}	f_{TW}	f_{TP}	f_{TH}
10^{-4}	$9,9995000124 \times 10^{-1}$	$9,9995000124 \times 10^{-1}$	$9,9995000124 \times 10^{-1}$	$9,9995000124 \times 10^{-1}$	$9,9995000124 \times 10^{-1}$	$9,9995000124 \times 10^{-1}$
1	$6,0653065971 \times 10^{-1}$	$6,0653065971 \times 10^{-1}$	$6,0653065971 \times 10^{-1}$	$6,0653065971 \times 10^{-1}$	$6,0653065971 \times 10^{-1}$	$6,0653065971 \times 10^{-1}$
2	$3,6787944117 \times 10^{-1}$	$3,6787944117 \times 10^{-1}$	$3,6787944117 \times 10^{-1}$	$3,6787944117 \times 10^{-1}$	$3,6787944117 \times 10^{-1}$	$3,6787944117 \times 10^{-1}$
3	$2,2313016014 \times 10^{-1}$	$2,2313016014 \times 10^{-1}$	$2,2313016014 \times 10^{-1}$	$2,2313016014 \times 10^{-1}$	$2,2313016014 \times 10^{-1}$	$2,2313016014 \times 10^{-1}$
4	$1,3533528323 \times 10^{-1}$	$1,3533528323 \times 10^{-1}$	$1,3533528323 \times 10^{-1}$	$1,3533528323 \times 10^{-1}$	$1,3533528323 \times 10^{-1}$	$1,3533528323 \times 10^{-1}$
5	$8,2084998623 \times 10^{-2}$	$8,2084998623 \times 10^{-2}$	$8,2084998623 \times 10^{-2}$	$8,2084998623 \times 10^{-2}$	$8,2084998623 \times 10^{-2}$	$8,2084998623 \times 10^{-2}$
6	$4,9787068367 \times 10^{-2}$	$4,9787068367 \times 10^{-2}$	$4,9787068367 \times 10^{-2}$	$4,9787068367 \times 10^{-2}$	$4,9787068367 \times 10^{-2}$	$4,9787068367 \times 10^{-2}$
7	$3,0197383422 \times 10^{-2}$	$3,0197383422 \times 10^{-2}$	$3,0197383422 \times 10^{-2}$	$3,0197383422 \times 10^{-2}$	$3,0197383422 \times 10^{-2}$	$3,0197383422 \times 10^{-2}$
8	$1,8315638888 \times 10^{-2}$	$1,8315638888 \times 10^{-2}$	$1,8315638888 \times 10^{-2}$	$1,8315638888 \times 10^{-2}$	$1,8315638888 \times 10^{-2}$	$1,8315638888 \times 10^{-2}$
9	$1,1108996538 \times 10^{-2}$	$1,1108996538 \times 10^{-2}$	$1,1108996538 \times 10^{-2}$	$1,1108996538 \times 10^{-2}$	$1,1108996538 \times 10^{-2}$	$1,1108996538 \times 10^{-2}$
10	$6,7379469990 \times 10^{-3}$	$6,7379469991 \times 10^{-3}$	$6,7379469990 \times 10^{-3}$	$6,7379469990 \times 10^{-3}$	$6,7379469990 \times 10^{-3}$	$6,7379469990 \times 10^{-3}$

Tabela 4.6: Perfis de inversão para $F_1(s)$, para $b = 2$.

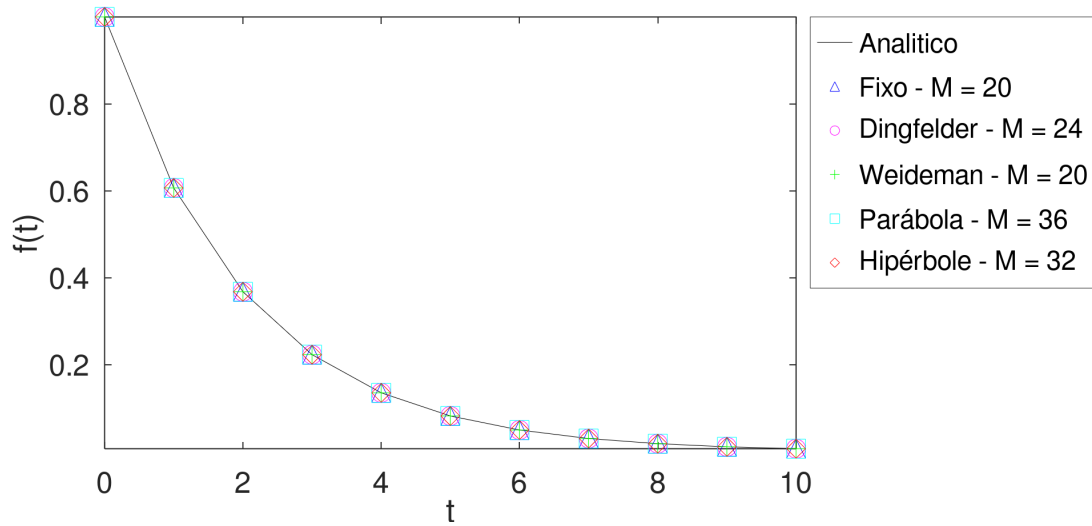
		TF - $M = 21$	TDW - $M = 24$	TW - $M = 22$	TP - $M = 36$	TH - $M = 32$
t	f_a	f_{TF}	f_{TDW}	f_{TW}	f_{TP}	f_{TH}
10^{-4}	$9,998000199986667 \times 10^{-1}$	$9,9980001999 \times 10^{-1}$	$9,9980001999 \times 10^{-1}$	$9,9980001999 \times 10^{-1}$	$9,9980001999 \times 10^{-1}$	$9,9980001999 \times 10^{-1}$
1	$1,353352832366127 \times 10^{-1}$	$1,3533528323 \times 10^{-1}$	$1,3533528323 \times 10^{-1}$	$1,3533528323 \times 10^{-1}$	$1,3533528323 \times 10^{-1}$	$1,3533528323 \times 10^{-1}$
2	$1,831563888873418 \times 10^{-2}$	$1,8315638888 \times 10^{-2}$	$1,8315638888 \times 10^{-2}$	$1,8315638888 \times 10^{-2}$	$1,8315638888 \times 10^{-2}$	$1,8315638888 \times 10^{-2}$
3	$2,478752176666358 \times 10^{-3}$	$2,4787521765 \times 10^{-3}$	$2,4787521766 \times 10^{-3}$	$2,4787521766 \times 10^{-3}$	$2,4787521766 \times 10^{-3}$	$2,4787521766 \times 10^{-3}$
4	$3,354626279025119 \times 10^{-4}$	$3,3546262783 \times 10^{-4}$	$3,3546262790 \times 10^{-4}$	$3,3546262790 \times 10^{-4}$	$3,3546262790 \times 10^{-4}$	$3,3546262790 \times 10^{-4}$
5	$4,539992976248485 \times 10^{-5}$	$4,5399929695 \times 10^{-5}$	$4,5399929761 \times 10^{-5}$	$4,5399929763 \times 10^{-5}$	$4,5399929761 \times 10^{-5}$	$4,5399929761 \times 10^{-5}$
6	$6,144212353328210 \times 10^{-6}$	$6,1442122387 \times 10^{-6}$	$6,1442123536 \times 10^{-6}$	$6,1442123537 \times 10^{-6}$	$6,1442123532 \times 10^{-6}$	$6,1442123513 \times 10^{-6}$
7	$8,315287191035679 \times 10^{-7}$	$8,3152861277 \times 10^{-7}$	$8,3152871914 \times 10^{-7}$	$8,3152871967 \times 10^{-7}$	$8,3152871840 \times 10^{-7}$	$8,3152871628 \times 10^{-7}$
8	$1,125351747192591 \times 10^{-7}$	$1,1253515026 \times 10^{-7}$	$1,1253517474 \times 10^{-7}$	$1,1253517500 \times 10^{-7}$	$1,1253517494 \times 10^{-7}$	$1,1253517454 \times 10^{-7}$
9	$1,522997974471263 \times 10^{-8}$	$1,5229943528 \times 10^{-8}$	$1,5229980217 \times 10^{-8}$	$1,5229980188 \times 10^{-8}$	$1,5229979635 \times 10^{-8}$	$1,5229978867 \times 10^{-8}$
10	$2,061153622438558 \times 10^{-9}$	$2,0611150830 \times 10^{-9}$	$2,0611536354 \times 10^{-9}$	$2,0611539893 \times 10^{-9}$	$2,0611533338 \times 10^{-9}$	$2,0611532509 \times 10^{-9}$

Tabela 4.7: Perfis de inversão para $F_1(s)$, para $b = 30$.

		TF - $M = 20$	TDW - $M = 24$	TW - $M = 20$	TP - $M = 36$	TH - $M = 32$
t	f_a	f_{TF}	f_{TDW}	f_{TW}	f_{TP}	f_{TH}
10^{-4}	$9,9700449550 \times 10^{-1}$	$9,9700449550 \times 10^{-1}$	$9,9700449550 \times 10^{-1}$	$9,9700449550 \times 10^{-1}$	$9,9700449550 \times 10^{-1}$	$9,9700449550 \times 10^{-1}$
0,1	$4,9787068367 \times 10^{-2}$	$4,9787068367 \times 10^{-2}$	$4,9787068367 \times 10^{-2}$	$4,9787068367 \times 10^{-2}$	$4,9787068367 \times 10^{-2}$	$4,9787068367 \times 10^{-2}$
0,2	$2,4787521766 \times 10^{-3}$	$2,4787521766 \times 10^{-3}$	$2,4787521766 \times 10^{-3}$	$2,4787521766 \times 10^{-3}$	$2,4787521766 \times 10^{-3}$	$2,4787521766 \times 10^{-3}$
0,3	$1,2340980408 \times 10^{-4}$	$1,2340980418 \times 10^{-4}$	$1,2340980408 \times 10^{-4}$	$1,2340980408 \times 10^{-4}$	$1,2340980408 \times 10^{-4}$	$1,2340980408 \times 10^{-4}$
0,4	$6,1442123533 \times 10^{-6}$	$6,1442124419 \times 10^{-6}$	$6,1442123531 \times 10^{-6}$	$6,1442123536 \times 10^{-6}$	$6,1442123527 \times 10^{-6}$	$6,1442123522 \times 10^{-6}$
0,5	$3,0590232050 \times 10^{-7}$	$3,0590242658 \times 10^{-7}$	$3,0590232087 \times 10^{-7}$	$3,0590232153 \times 10^{-7}$	$3,0590232010 \times 10^{-7}$	$3,0590231851 \times 10^{-7}$
0,6	$1,5229979744 \times 10^{-8}$	$1,5230066689 \times 10^{-8}$	$1,5229979473 \times 10^{-8}$	$1,5229980788 \times 10^{-8}$	$1,5229979161 \times 10^{-8}$	$1,5229979009 \times 10^{-8}$
0,7	$7,5825604279 \times 10^{-10}$	$7,5838053297 \times 10^{-10}$	$7,5825619475 \times 10^{-10}$	$7,5825675810 \times 10^{-10}$	$7,5825604169 \times 10^{-10}$	$7,5825513305 \times 10^{-10}$
0,8	$3,7751345442 \times 10^{-11}$	$3,7832847965 \times 10^{-11}$	$3,7750994456 \times 10^{-11}$	$3,7751933158 \times 10^{-11}$	$3,7751204132 \times 10^{-11}$	$3,7750155109 \times 10^{-11}$
0,9	$1,8795288165 \times 10^{-12}$	$1,9642559184 \times 10^{-12}$	$1,8797359738 \times 10^{-12}$	$1,8801759796 \times 10^{-12}$	$1,8791187088 \times 10^{-12}$	$1,8779852268 \times 10^{-12}$
1	$9,3576229688 \times 10^{-14}$	$1,8758328224 \times 10^{-13}$	$9,3535384113 \times 10^{-14}$	$9,4194048895 \times 10^{-14}$	$9,3454060450 \times 10^{-14}$	$9,2378988677 \times 10^{-14}$

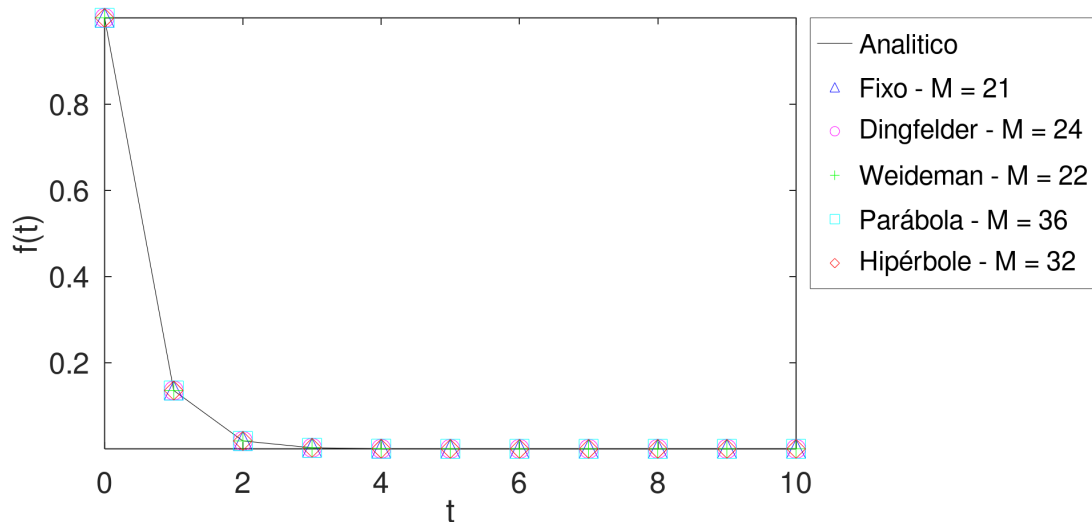
As Figuras 4.6 a 4.8 ilustram graficamente o comportamento dos perfis numéricos, conforme descritos na legenda, em relação aos perfis analíticos (representados por linhas sólidas), para cada cenário analisado da função $f_1(t)$.

Figura 4.6: Representação gráfica dos resultados tabelados para $F_1(s)$ com $b = 0,5$.



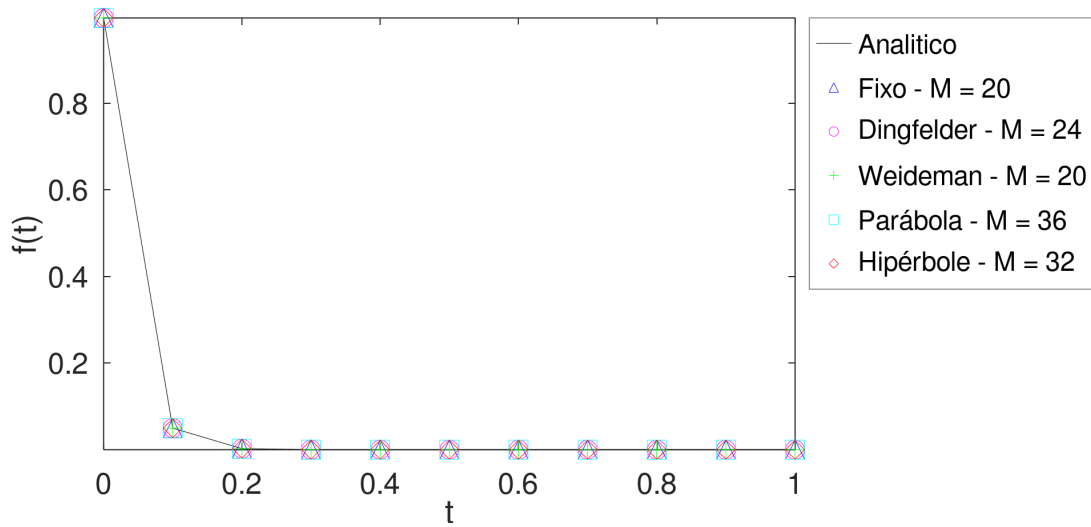
Fonte: Autor

Figura 4.7: Representação gráfica dos resultados tabelados para $F_1(s)$ com $b = 2$.



Fonte: Autor

Figura 4.8: Representação gráfica dos resultados tabelados para $F_1(s)$ com $b = 30$.



4.3 Inversão de $F_2(s)$

A função $F_2(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$, cuja transformada inversa é $\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} = f_2(t) = \text{sen}(at)$, é analisada utilizando três valores para o parâmetro a . Os valores dos erros absolutos médio e dos M ótimo encontrados para $a = 0,5$, $a = 2$ e $a = 30$ são apresentados nas Tabelas 4.8-4.10. Também, as soluções analíticas e numéricas para cada situação analisada estão registradas nas Tabelas 4.11-4.13. As Figuras 4.9-4.11 mostram os gráficos dos erros absolutos médios obtidos pelos métodos de inversão numérica estudados.

Tabela 4.8: M_o obtidos para função $F_2(s)$ com $a = 0,5$.

Métodos	M_o	Erro Absoluto Médio
Talbot-Fixo	21	$3,640023617317212 \times 10^{-14}$
Talbot-DW	50	$5,549144705324206 \times 10^{-14}$
Talbot-Weideman	49	$1,678711189252756 \times 10^{-14}$
Talbot-Parábola	72	$2,095300658238458 \times 10^{-14}$
Talbot-Hipérbole	54	$1,773688654815201 \times 10^{-13}$

Figura 4.9: $\overline{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica $F_2(s)$ com $a = 0,5$.

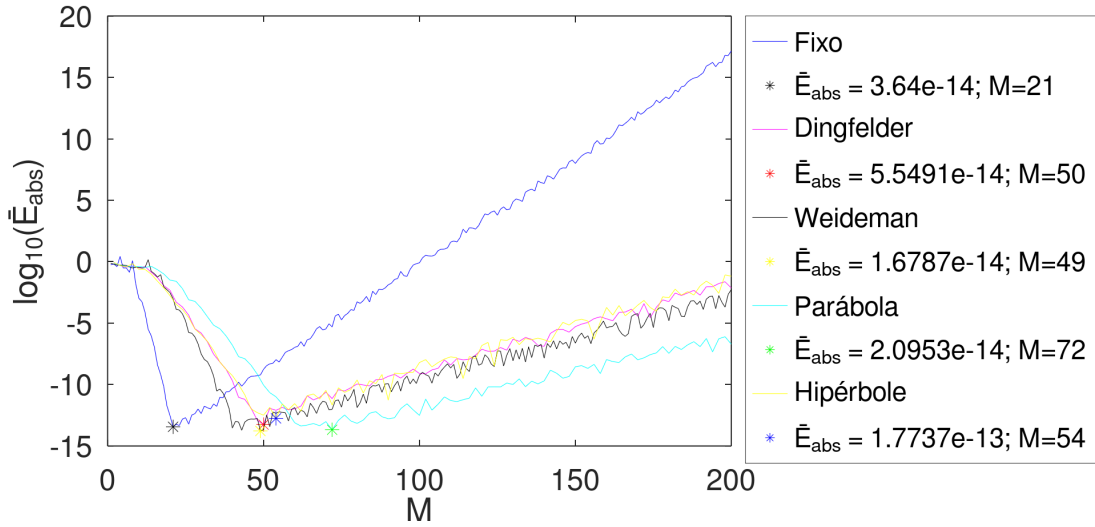


Tabela 4.9: M_o obtidos para função $F_2(s)$ com $a = 2$.

Métodos	M_o	Erro Absoluto Médio
Talbot-Fixo	43	$2,645618418744543 \times 10^{-10}$
Talbot-DW	94	$7,083728722160279 \times 10^{-10}$
Talbot-Weideman	94	$3,757496950796710 \times 10^{-11}$
Talbot-Parábola	116	$1,807773646490124 \times 10^{-11}$
Talbot-Hipérbole	90	$2,381935629836081 \times 10^{-11}$

Figura 4.10: $\overline{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica $F_2(s)$ com $a = 2$.

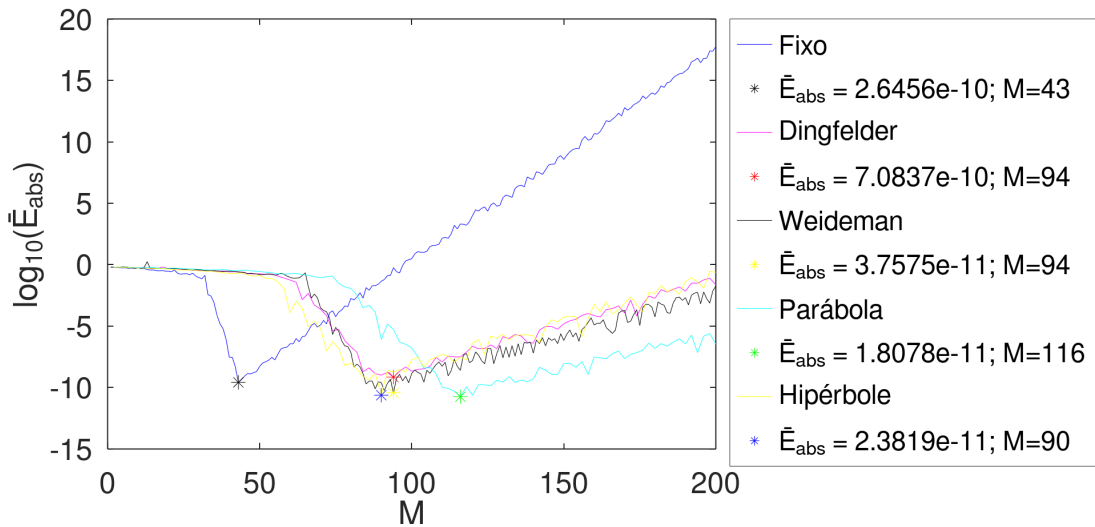


Tabela 4.10: M_o obtidos para função $F_2(s)$ com $a = 30$.

Métodos	M_o	Erro Absoluto Médio
Talbot-Fixo	57	$8,807565526579360 \times 10^{-8}$
Talbot-DW	116	$4,394343360511345 \times 10^{-8}$
Talbot-Weideman	115	$6,413636008095872 \times 10^{-9}$
Talbot-Parábola	148	$1,079502975764048 \times 10^{-9}$
Talbot-Hipérbole	114	$2,259217474395063 \times 10^{-8}$

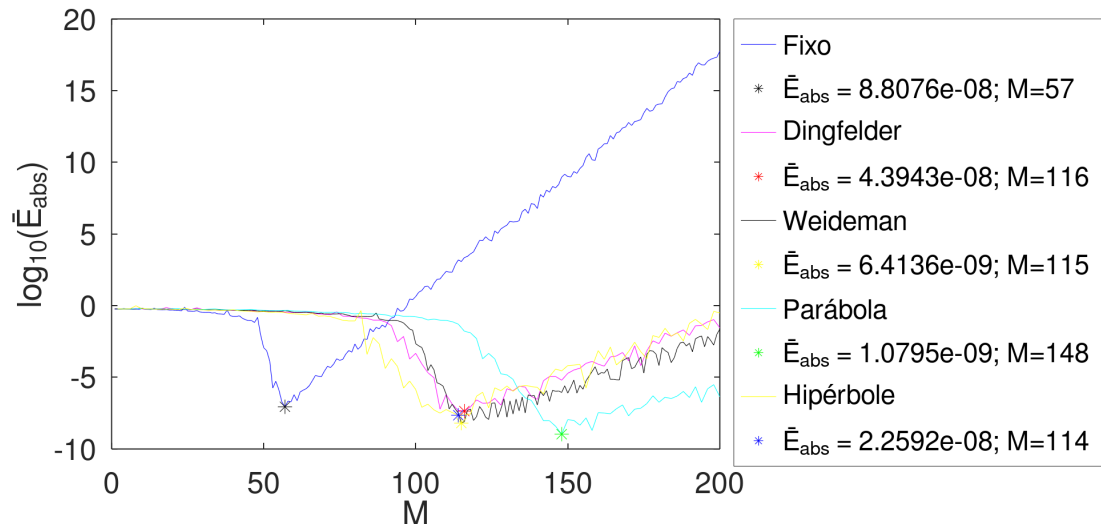
Figura 4.11: $\bar{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica $F_2(s)$ com $a = 30$.

Tabela 4.11: Perfis de inversão para $F_2(s)$, para $a = 0, 5$.

		TF - $M = 21$	TDW - $M = 50$	TW - $M = 49$	TP - $M = 72$	TH - $M = 54$
t	f_a	f_{TF}	f_{TDW}	f_{TW}	f_{TP}	f_{TH}
10^{-4}	$4,9999999979 \times 10^{-5}$	$4,9999999979 \times 10^{-5}$	$4,9999999979 \times 10^{-5}$	$4,9999999979 \times 10^{-5}$	$4,9999999979 \times 10^{-5}$	$4,9999999979 \times 10^{-5}$
1	$4,7942553860 \times 10^{-1}$	$4,7942553860 \times 10^{-1}$	$4,7942553860 \times 10^{-1}$	$4,7942553860 \times 10^{-1}$	$4,7942553860 \times 10^{-1}$	$4,7942553860 \times 10^{-1}$
2	$8,4147098480 \times 10^{-1}$	$8,4147098480 \times 10^{-1}$	$8,4147098480 \times 10^{-1}$	$8,4147098480 \times 10^{-1}$	$8,4147098480 \times 10^{-1}$	$8,4147098480 \times 10^{-1}$
3	$9,9749498660 \times 10^{-1}$	$9,9749498660 \times 10^{-1}$	$9,9749498660 \times 10^{-1}$	$9,9749498660 \times 10^{-1}$	$9,9749498660 \times 10^{-1}$	$9,9749498660 \times 10^{-1}$
4	$9,0929742682 \times 10^{-1}$	$9,0929742682 \times 10^{-1}$	$9,0929742682 \times 10^{-1}$	$9,0929742682 \times 10^{-1}$	$9,0929742682 \times 10^{-1}$	$9,0929742682 \times 10^{-1}$
5	$5,9847214410 \times 10^{-1}$	$5,9847214410 \times 10^{-1}$	$5,9847214410 \times 10^{-1}$	$5,9847214410 \times 10^{-1}$	$5,9847214410 \times 10^{-1}$	$5,9847214410 \times 10^{-1}$
6	$1,4112000805 \times 10^{-1}$	$1,4112000805 \times 10^{-1}$	$1,4112000805 \times 10^{-1}$	$1,4112000805 \times 10^{-1}$	$1,4112000805 \times 10^{-1}$	$1,4112000805 \times 10^{-1}$
7	$-3,5078322768 \times 10^{-1}$	$-3,5078322768 \times 10^{-1}$	$-3,5078322768 \times 10^{-1}$	$-3,5078322768 \times 10^{-1}$	$-3,5078322768 \times 10^{-1}$	$-3,5078322768 \times 10^{-1}$
8	$-7,5680249530 \times 10^{-1}$	$-7,5680249530 \times 10^{-1}$	$-7,5680249530 \times 10^{-1}$	$-7,5680249530 \times 10^{-1}$	$-7,5680249530 \times 10^{-1}$	$-7,5680249530 \times 10^{-1}$
9	$-9,7753011766 \times 10^{-1}$	$-9,7753011766 \times 10^{-1}$	$-9,7753011766 \times 10^{-1}$	$-9,7753011766 \times 10^{-1}$	$-9,7753011766 \times 10^{-1}$	$-9,7753011766 \times 10^{-1}$
10	$-9,5892427466 \times 10^{-1}$	$-9,5892427466 \times 10^{-1}$	$-9,5892427466 \times 10^{-1}$	$-9,5892427466 \times 10^{-1}$	$-9,5892427466 \times 10^{-1}$	$-9,5892427466 \times 10^{-1}$

Tabela 4.12: Perfil de inversão para $F_2(s)$ para $a = 2$.

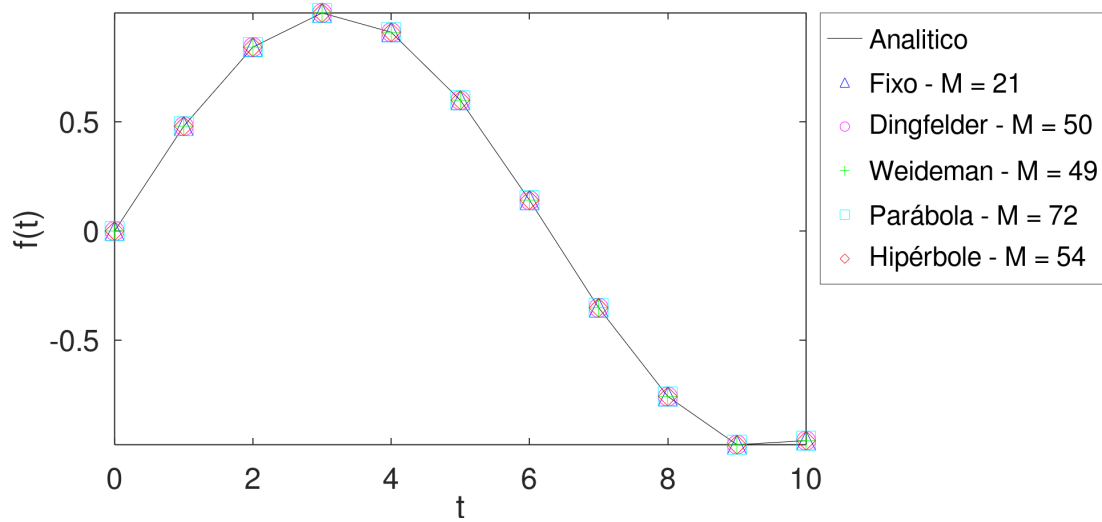
		TF - $M = 43$	TDW - $M = 94$	TW - $M = 94$	TP - $M = 116$	TH - $M = 90$
t	f_a	f_{TF}	f_{TDW}	f_{TW}	f_{TP}	f_{TH}
10^{-4}	$1,9999999866 \times 10^{-4}$	$1,9999999866 \times 10^{-4}$	$1,9999999869 \times 10^{-4}$	$1,9999999866 \times 10^{-4}$	$1,9999999866 \times 10^{-4}$	$1,9999999866 \times 10^{-4}$
1	$9,0929742682 \times 10^{-1}$	$9,0929742678 \times 10^{-1}$	$9,0929742704 \times 10^{-1}$	$9,0929742681 \times 10^{-1}$	$9,0929742681 \times 10^{-1}$	$9,0929742683 \times 10^{-1}$
2	$-7,5680249530 \times 10^{-1}$	$-7,5680249542 \times 10^{-1}$	$-7,5680249489 \times 10^{-1}$	$-7,5680249532 \times 10^{-1}$	$-7,5680249532 \times 10^{-1}$	$-7,5680249529 \times 10^{-1}$
3	$-2,7941549819 \times 10^{-1}$	$-2,7941549851 \times 10^{-1}$	$-2,7941549743 \times 10^{-1}$	$-2,7941549823 \times 10^{-1}$	$-2,7941549821 \times 10^{-1}$	$-2,7941549820 \times 10^{-1}$
4	$9,893582466 \times 10^{-1}$	$9,8935824646 \times 10^{-1}$	$9,8935824726 \times 10^{-1}$	$9,8935824660 \times 10^{-1}$	$9,8935824660 \times 10^{-1}$	$9,8935824658 \times 10^{-1}$
5	$-5,4402111088 \times 10^{-1}$	$-5,4402111096 \times 10^{-1}$	$-5,4402110982 \times 10^{-1}$	$-5,4402111099 \times 10^{-1}$	$-5,4402111089 \times 10^{-1}$	$-5,4402111089 \times 10^{-1}$
6	$-5,3657291800 \times 10^{-1}$	$-5,3657291842 \times 10^{-1}$	$-5,3657291695 \times 10^{-1}$	$-5,3657291801 \times 10^{-1}$	$-5,3657291802 \times 10^{-1}$	$-5,3657291803 \times 10^{-1}$
7	$9,9060735569 \times 10^{-1}$	$9,9060735625 \times 10^{-1}$	$9,9060735682 \times 10^{-1}$	$9,9060735557 \times 10^{-1}$	$9,9060735567 \times 10^{-1}$	$9,9060735568 \times 10^{-1}$
8	$-2,8790331666 \times 10^{-1}$	$-2,8790331673 \times 10^{-1}$	$-2,8790331596 \times 10^{-1}$	$-2,8790331662 \times 10^{-1}$	$-2,8790331667 \times 10^{-1}$	$-2,8790331668 \times 10^{-1}$
9	$-7,5098724677 \times 10^{-1}$	$-7,5098724673 \times 10^{-1}$	$-7,5098724602 \times 10^{-1}$	$-7,5098724674 \times 10^{-1}$	$-7,5098724679 \times 10^{-1}$	$-7,5098724679 \times 10^{-1}$
10	$9,1294525072 \times 10^{-1}$	$9,1294525183 \times 10^{-1}$	$9,1294525163 \times 10^{-1}$	$-7,5098724674 \times 10^{-1}$	$9,1294525079 \times 10^{-1}$	$9,1294525062 \times 10^{-1}$

Tabela 4.13: Perfil de inversão para $F_2(s)$, para $a = 30$.

		TF - $M = 57$	TDW - $M = 116$	TW - $M = 94$	TP - $M = 148$	TH - $M = 114$
t	f_a	f_{TF}	f_{TDW}	f_{TW}	f_{TP}	f_{TH}
10^{-4}	$2,9999955000 \times 10^{-3}$	$2,9999955142 \times 10^{-3}$	$2,9999954887 \times 10^{-3}$	$2,9999954976 \times 10^{-3}$	$2,9999954999 \times 10^{-3}$	$2,9999954991 \times 10^{-3}$
0,1	$1,4112000805 \times 10^{-1}$	$1,4112004078 \times 10^{-1}$	$1,4112000020 \times 10^{-1}$	$1,4112000830 \times 10^{-1}$	$1,4112000874 \times 10^{-1}$	$1,4112000815 \times 10^{-1}$
0,2	$-2,7941549819 \times 10^{-1}$	$-2,7941543608 \times 10^{-1}$	$-2,7941551229 \times 10^{-1}$	$-2,7941549734 \times 10^{-1}$	$-2,7941549646 \times 10^{-1}$	$-2,7941549744 \times 10^{-1}$
0,3	$4,1211848524 \times 10^{-1}$	$4,1211844980 \times 10^{-1}$	$4,1211845994 \times 10^{-1}$	$4,1211848182 \times 10^{-1}$	$4,1211848612 \times 10^{-1}$	$4,1211849064 \times 10^{-1}$
0,4	$5,3657291800 \times 10^{-1}$	$-5,3657280653 \times 10^{-1}$	$-5,3657293659 \times 10^{-1}$	$-5,3657291744 \times 10^{-1}$	$-5,3657291642 \times 10^{-1}$	$-5,3657290342 \times 10^{-1}$
0,5	$6,5028784015 \times 10^{-1}$	$6,5028812289 \times 10^{-1}$	$6,5028780867 \times 10^{-1}$	$6,5028783332 \times 10^{-1}$	$6,5028784152 \times 10^{-1}$	$6,5028786115 \times 10^{-1}$
0,6	$-7,5098724677 \times 10^{-1}$	$-7,5098729133 \times 10^{-1}$	$-7,5098728105 \times 10^{-1}$	$6,5028783332 \times 10^{-1}$	$-7,5098724592 \times 10^{-1}$	$-7,5098722059 \times 10^{-1}$
0,7	$8,3665563853 \times 10^{-1}$	$8,3665578280 \times 10^{-1}$	$8,3665560967 \times 10^{-1}$	$8,3665563300 \times 10^{-1}$	$8,3665563980 \times 10^{-1}$	$8,3665567524 \times 10^{-1}$
0,8	$-9,0557836200 \times 10^{-1}$	$-9,0557824820 \times 10^{-1}$	$-9,0557837771 \times 10^{-1}$	$-9,0557836213 \times 10^{-1}$	$-9,0557836029 \times 10^{-1}$	$-9,0557831924 \times 10^{-1}$
0,9	$9,5637592840 \times 10^{-1}$	$9,5637603600 \times 10^{-1}$	$9,5637589296 \times 10^{-1}$	$9,5637592716 \times 10^{-1}$	$9,5637592983 \times 10^{-1}$	$9,5637597594 \times 10^{-1}$
1	$-9,8803162409 \times 10^{-1}$	$-9,8803158998 \times 10^{-1}$	$-9,8803176103 \times 10^{-1}$	$-9,8803158189 \times 10^{-1}$	$-9,8803162371 \times 10^{-1}$	$-9,8803157058 \times 10^{-1}$

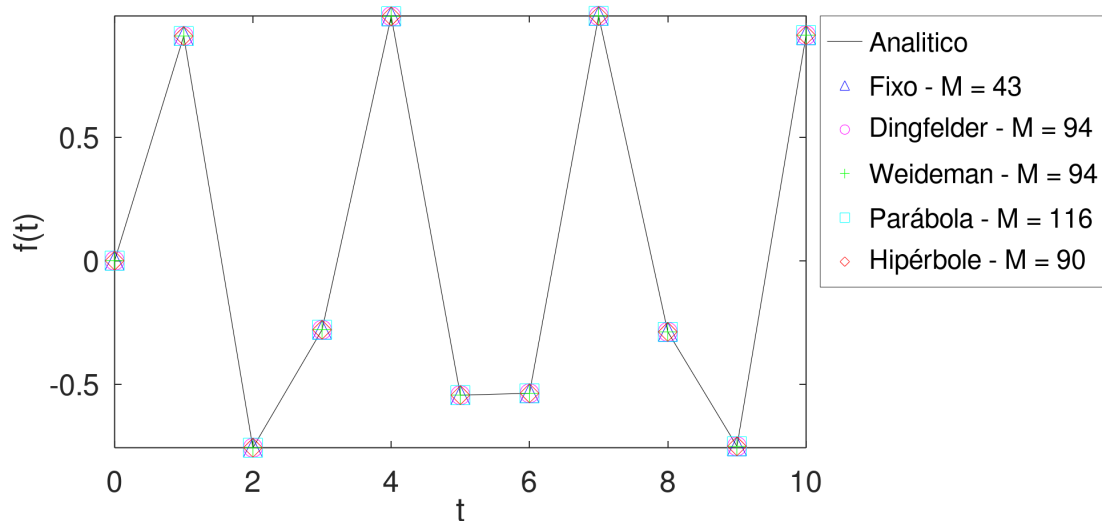
As Figuras 4.12-4.14 exibem graficamente o comportamento da função $F_2(s)$ para os três casos analisados e são construídas com base nas Tabelas 4.11-4.13.

Figura 4.12: Representação gráfica dos resultados tabelados para $F_2(s)$ com $a = 0,5$.



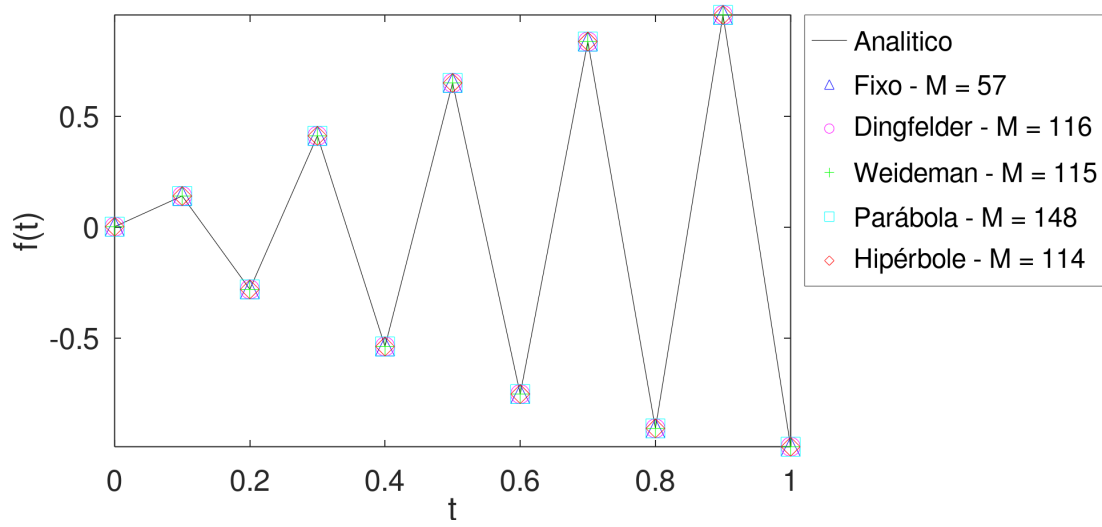
Fonte: Autor

Figura 4.13: Representação gráfica dos resultados tabelados para $F_2(s)$ com $a = 2$.



Fonte: Autor

Figura 4.14: Representação gráfica dos resultados tabelados para $F_2(s)$ com $a = 30$.



Fonte: Autor

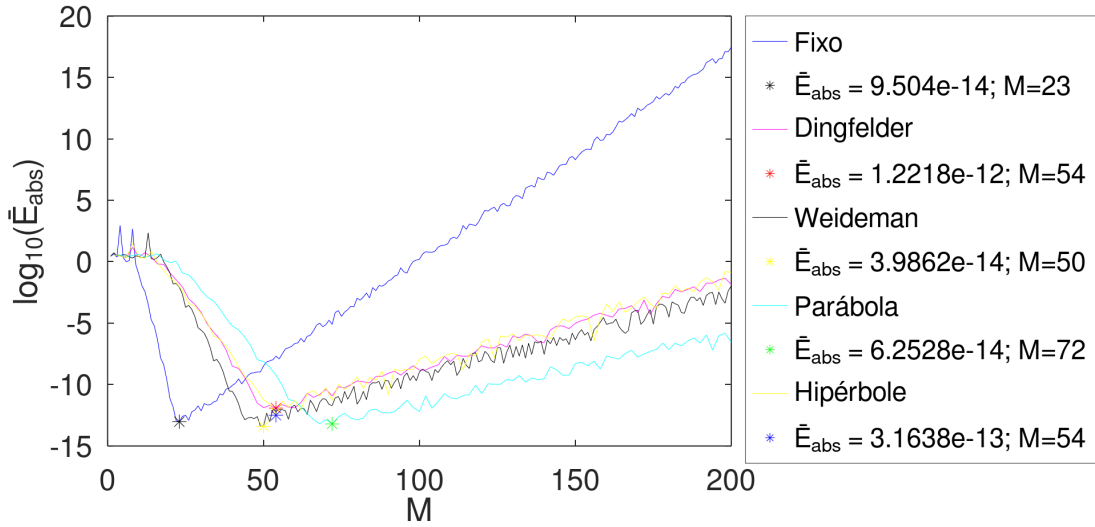
4.4 Inversão de $F_3(s)$

Nas Tabelas 4.14-4.16, são exibidos os valores de M_o e o erro absoluto médio obtido em cada análise realizada na inversão de $F_3(s) = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$ e sua transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}\{F_3(s)\} = f_3(t) = t \cos(at)$. Já as Figuras 4.15-4.17 ilustram a evolução do erro absoluto médio a medida que o valor aumenta, para cada valor do parâmetro a .

Tabela 4.14: M_o obtidos para função $F_3(s)$ com $a = 0, 5$.

Métodos	M_o	Erro Absoluto Médio
Talbot-Fixo	23	$9,504022854775347 \times 10^{-14}$
Talbot-DW	54	$1,221776174449351 \times 10^{-12}$
Talbot-Weideman	50	$3,986227358891514 \times 10^{-14}$
Talbot-Parábola	72	$6,252840831127729 \times 10^{-14}$
Talbot-Hipérbole	54	$3,163770662945862 \times 10^{-13}$

Figura 4.15: $\bar{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica $F_3(s)$ com $a = 0,5$.

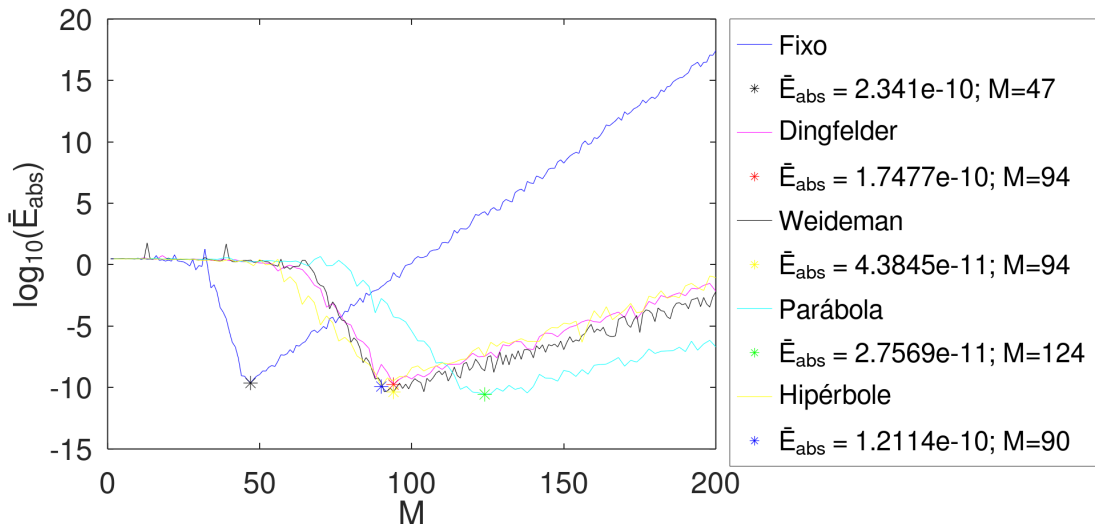


Fonte: Autor

Tabela 4.15: M_o obtidos para função $F_3(s)$ com $a = 2$.

Métodos	M_o	Erro Absoluto Médio
Talbot-Fixo	47	$2,340959539769965 \times 10^{-10}$
Talbot-DW	94	$1,747662529355388 \times 10^{-10}$
Talbot-Weideman	94	$4,384463995725673 \times 10^{-11}$
Talbot-Parábola	124	$2,756890696042712 \times 10^{-11}$
Talbot-Hipérbole	90	$1,211416885353254 \times 10^{-10}$

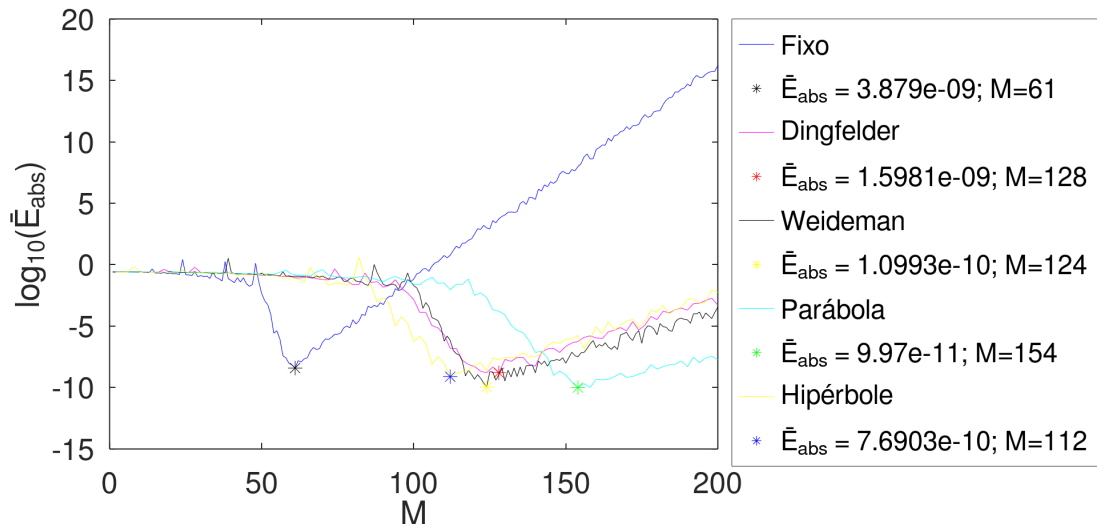
Figura 4.16: $\bar{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica $F_3(s)$ com $a = 2$.



Fonte: Autor

Tabela 4.16: M_o obtidos para função $F_3(s)$ com $a = 30$.

Métodos	M_o	Erro Absoluto Médio
Talbot-Fixo	61	$3,878989812694146 \times 10^{-9}$
Talbot-DW	128	$1,598073957649533 \times 10^{-9}$
Talbot-Weideman	124	$1,099259094444157 \times 10^{-10}$
Talbot-Parábola	154	$9,970033800181490 \times 10^{-11}$
Talbot-Hipérbole	112	$7,690292072680696 \times 10^{-10}$

Figura 4.17: $\bar{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica $F_3(s)$ com $a = 30$.

Os valores de M_o obtidos para a função $F_3(s)$ são empregados nos cinco algoritmos para calcular as soluções dos perfis numéricos de cada método, bem como os perfis analíticos para cada valor do parâmetro a . Esses resultados são detalhadamente apresentados nas Tabelas 4.17-4.19. As informações contidas nessas tabelas são representadas graficamente nas Figuras 4.18-4.20.

Tabela 4.17: Perfil de inversão para $F_3(s)$, para $a = 0, 5$.

		TF - $M = 23$	TDW - $M = 54$	TW - $M = 50$	TP - $M = 72$	TH - $M = 54$
t	f_a	f_{TF}	f_{TDW}	f_{TW}	f_{TP}	f_{TH}
10^{-4}	$9,9999999875 \times 10^{-5}$	$9,9999999874 \times 10^{-5}$	$9,9999999875 \times 10^{-5}$	$9,9999999874 \times 10^{-5}$	$9,9999999875 \times 10^{-5}$	$9,9999999874 \times 10^{-5}$
1	$8,7758256189 \times 10^{-1}$	$8,7758256189 \times 10^{-1}$	$8,7758256189 \times 10^{-1}$	$8,7758256189 \times 10^{-1}$	$8,7758256189 \times 10^{-1}$	$8,7758256189 \times 10^{-1}$
2	$1,0806046117 \times 10^0$	$1,0806046117 \times 10^0$	$1,0806046117 \times 10^0$	$1,0806046117 \times 10^0$	$1,0806046117 \times 10^0$	$1,0806046117 \times 10^0$
3	$2,1221160500 \times 10^{-1}$	$2,1221160500 \times 10^{-1}$	$2,1221160500 \times 10^{-1}$	$2,1221160500 \times 10^{-1}$	$2,1221160500 \times 10^{-1}$	$2,1221160500 \times 10^{-1}$
4	$-1,6645873461 \times 10^0$	$-1,6645873461 \times 10^0$	$-1,6645873461 \times 10^0$	$-1,6645873461 \times 10^0$	$-1,6645873461 \times 10^0$	$-1,6645873461 \times 10^0$
5	$-4,0057180777 \times 10^0$	$-4,0057180777 \times 10^0$	$-4,0057180777 \times 10^0$	$-4,0057180777 \times 10^0$	$-4,0057180777 \times 10^0$	$-4,0057180777 \times 10^0$
6	$-5,9399549796 \times 10^0$	$-5,9399549796 \times 10^0$	$-5,9399549796 \times 10^0$	$-5,9399549796 \times 10^0$	$-5,9399549796 \times 10^0$	$-5,9399549796 \times 10^0$
7	$-6,5551968110 \times 10^0$	$-6,5551968110 \times 10^0$	$-6,5551968110 \times 10^0$	$-6,5551968110 \times 10^0$	$-6,5551968110 \times 10^0$	$-6,5551968110 \times 10^0$
8	$-5,2291489669 \times 10^0$	$-5,2291489669 \times 10^0$	$-5,2291489669 \times 10^0$	$-5,2291489669 \times 10^0$	$-5,2291489669 \times 10^0$	$-5,2291489669 \times 10^0$
9	$-1,8971621948 \times 10^0$	$-1,8971621948 \times 10^0$	$-1,8971621948 \times 10^0$	$-1,8971621948 \times 10^0$	$-1,8971621948 \times 10^0$	$-1,8971621948 \times 10^0$
10	$2,8366218546 \times 10^0$	$2,8366218546 \times 10^0$	$2,8366218546 \times 10^0$	$2,8366218546 \times 10^0$	$2,8366218546 \times 10^0$	$2,8366218546 \times 10^0$

Tabela 4.18: Perfil de inversão para $F_3(s)$, para $a = 2$.

		TF - $M = 47$	TDW - $M = 94$	TW - $M = 50$	TP - $M = 124$	TH - $M = 90$
t	f_a	f_{TF}	f_{TDW}	f_{TW}	f_{TP}	f_{TH}
10^{-4}	$9,9999998003 \times 10^{-5}$	$9,9999998033 \times 10^{-5}$	$9,9999998012 \times 10^{-5}$	$9,9999997997 \times 10^{-5}$	$9,9999997997 \times 10^{-5}$	$9,9999998000 \times 10^{-5}$
1	$-4,1614683654 \times 10^{-1}$	$-4,1614683673 \times 10^{-1}$	$-4,1614683643 \times 10^{-1}$	$-4,1614683655 \times 10^{-1}$	$-4,1614683657 \times 10^{-1}$	$-4,1614683654 \times 10^{-1}$
2	$-1,3072872417 \times 10^0$	$-1,3072872420 \times 10^0$	$-1,3072872415 \times 10^0$	$-1,3072872417 \times 10^0$	$-1,3072872417 \times 10^0$	$-1,3072872417 \times 10^0$
3	$2,8805108599 \times 10^0$	$2,8805108606 \times 10^0$	$2,8805108602 \times 10^0$	$2,8805108599 \times 10^0$	$2,8805108599 \times 10^0$	$2,8805108599 \times 10^0$
4	$-5,8200013523 \times 10^{-1}$	$-5,8200013556 \times 10^{-1}$	$-5,8200013507 \times 10^{-1}$	$-5,8200013521 \times 10^{-1}$	$-5,8200013528 \times 10^{-1}$	$-5,8200013525 \times 10^{-1}$
5	$-4,1953576453 \times 10^0$	$-4,1953576451 \times 10^0$	$-4,1953576452 \times 10^0$	$-4,1953576453 \times 10^0$	$-4,1953576454 \times 10^0$	$-4,1953576454 \times 10^0$
6	$5,0631237523 \times 10^0$	$5,0631237526 \times 10^0$	$5,0631237524 \times 10^0$	$5,0631237524 \times 10^0$	$5,0631237523 \times 10^0$	$5,0631237523 \times 10^0$
7	$9,5716052745 \times 10^{-1}$	$9,5716052773 \times 10^{-1}$	$9,5716052743 \times 10^{-1}$	$9,5716052752 \times 10^{-1}$	$9,5716052742 \times 10^{-1}$	$9,5716052747 \times 10^{-1}$
8	$-7,6612758425 \times 10^0$	$-7,6612758425 \times 10^0$	$-7,6612758426 \times 10^0$	$-7,6612758425 \times 10^0$	$-7,6612758425 \times 10^0$	$-7,6612758425 \times 10^0$
9	$5,9428503741 \times 10^0$	$5,9428503741 \times 10^0$	$5,9428503740 \times 10^0$	$5,9428503742 \times 10^0$	$5,9428503741 \times 10^0$	$5,9428503742 \times 10^0$
10	$4,0808206181 \times 10^0$	$4,0808206179 \times 10^0$	$4,0808206188 \times 10^0$	$4,0808206182 \times 10^0$	$4,0808206181 \times 10^0$	$4,0808206192 \times 10^0$

Tabela 4.19: Perfil de inversão para $F_3(s)$, para $a = 30$.

		TF - $M = 61$	TDW - $M = 128$	TW - $M = 124$	TP - $M = 154$	TH - $M = 112$
t	f_a	f_{TF}	f_{TDW}	f_{TW}	f_{TP}	f_{TH}
10^{-4}	$9,9999550000 \times 10^{-5}$	$9,9999550196 \times 10^{-5}$	$9,9999553006 \times 10^{-5}$	$9,9999550144 \times 10^{-5}$	$9,9999549893 \times 10^{-5}$	$9,9999550637 \times 10^{-5}$
0,1	$-9,8999249660 \times 10^{-2}$	$-9,8999251378 \times 10^{-1}$	$-9,8999247489 \times 10^{-2}$	$-9,8999249558 \times 10^{-2}$	$-9,8999249755 \times 10^{-2}$	$-9,8999249061 \times 10^{-2}$
0,2	$1,9203405733 \times 10^{-1}$	$1,9203405454 \times 10^{-1}$	$1,9203406048 \times 10^{-1}$	$1,9203405748 \times 10^{-1}$	$1,9203405721 \times 10^{-1}$	$1,9203405818 \times 10^{-1}$
0,3	$-2,7333907856 \times 10^{-1}$	$-2,7333906727 \times 10^{-1}$	$-2,7333907647 \times 10^{-1}$	$-2,7333907854 \times 10^{-1}$	$-2,7333907865 \times 10^{-1}$	$-2,7333907783 \times 10^{-1}$
0,4	$3,3754158349 \times 10^{-1}$	$3,3754158345 \times 10^{-1}$	$3,3754158431 \times 10^{-1}$	$3,3754158356 \times 10^{-1}$	$3,3754158346 \times 10^{-1}$	$3,3754158373 \times 10^{-1}$
0,5	$-3,7984395642 \times 10^{-1}$	$-3,7984395511 \times 10^{-1}$	$-3,7984395680 \times 10^{-1}$	$-3,7984395619 \times 10^{-1}$	$-3,7984395640 \times 10^{-1}$	$-3,7984395674 \times 10^{-1}$
0,6	$3,9619002494 \times 10^{-1}$	$3,9619002770 \times 10^{-1}$	$3,9619002266 \times 10^{-1}$	$3,9619002519 \times 10^{-1}$	$3,9619002501 \times 10^{-1}$	$3,9619002410 \times 10^{-1}$
0,7	$-3,8341048215 \times 10^{-1}$	$-3,8341047601 \times 10^{-1}$	$-3,8341048385 \times 10^{-1}$	$-3,8341048210 \times 10^{-1}$	$-3,8341048207 \times 10^{-1}$	$-3,8341048332 \times 10^{-1}$
0,8	$3,3934320586 \times 10^{-1}$	$3,3934321036 \times 10^{-1}$	$3,3934320397 \times 10^{-1}$	$3,3934320570 \times 10^{-1}$	$3,3934320597 \times 10^{-1}$	$3,3934320453 \times 10^{-1}$
0,9	$-2,6292492786 \times 10^{-1}$	$-2,6292493463 \times 10^{-1}$	$-2,6292492940 \times 10^{-1}$	$-2,6292492790 \times 10^{-1}$	$-2,6292492770 \times 10^{-1}$	$-2,6292492920 \times 10^{-1}$
1	$1,5425144988 \times 10^{-1}$	$1,5425144452 \times 10^{-1}$	$1,5425144834 \times 10^{-1}$	$1,5425144977 \times 10^{-1}$	$1,5425144955 \times 10^{-1}$	$1,5425145091 \times 10^{-1}$

Figura 4.18: Representação gráfica dos resultados tabelados para $F_3(s)$ com $a = 0,5$.

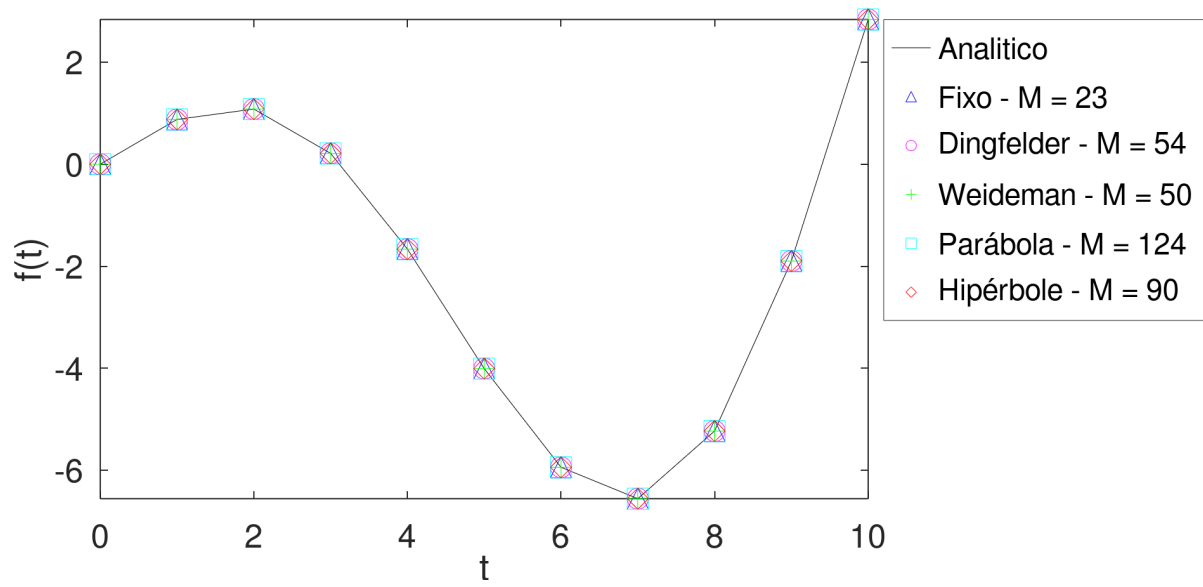


Figura 4.19: Representação gráfica dos resultados tabelados para $F_3(s)$ com $a = 2$.

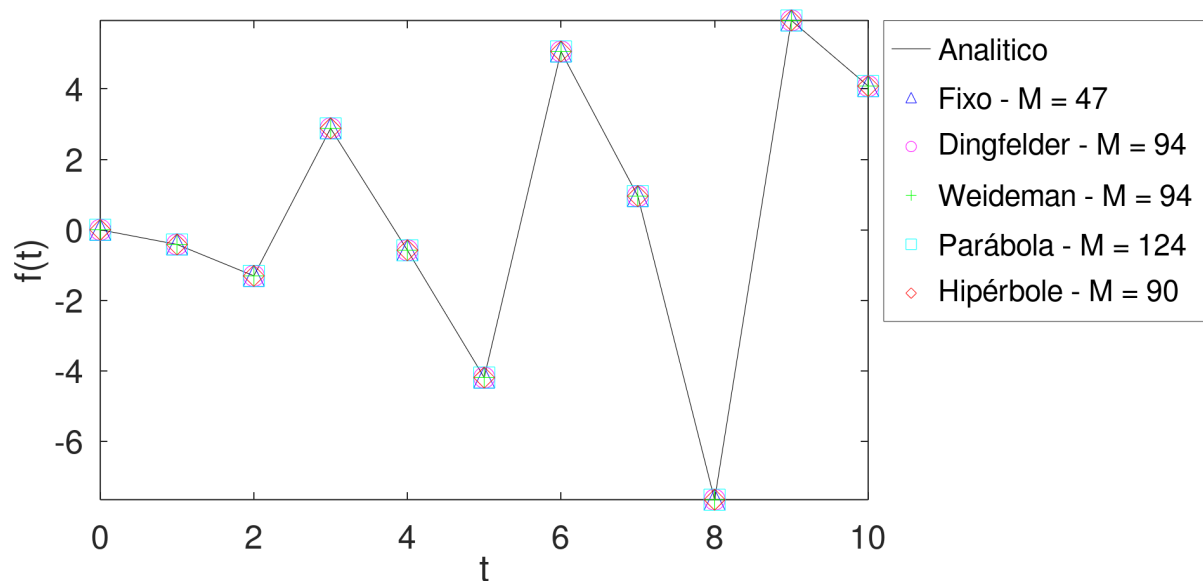
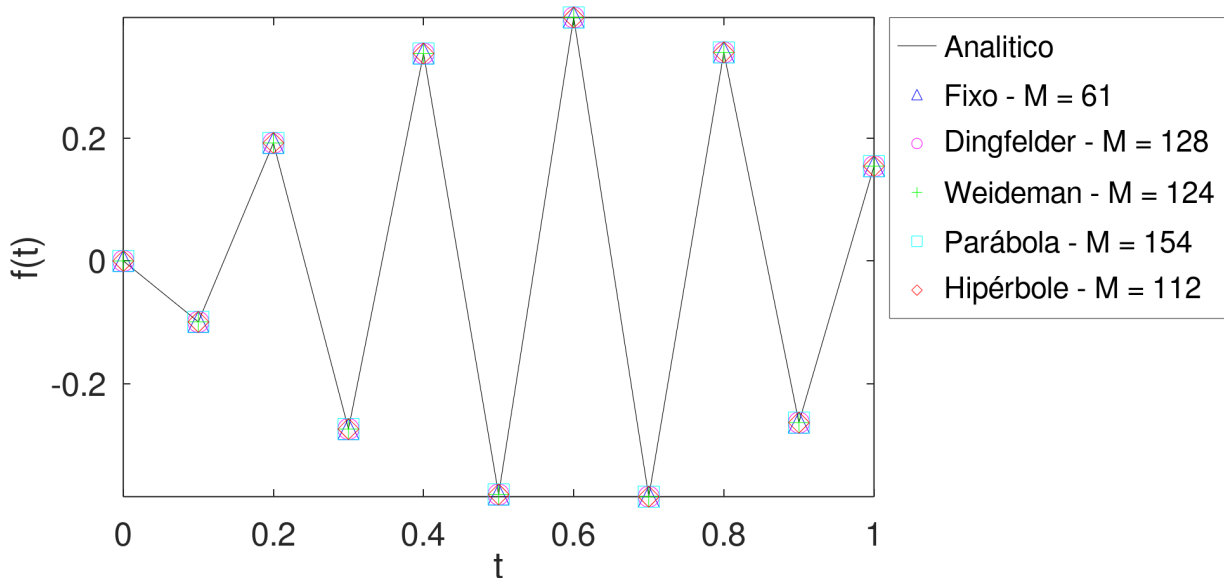


Figura 4.20: Representação gráfica dos resultados tabelados para $F_3(s)$ com $a = 30$.



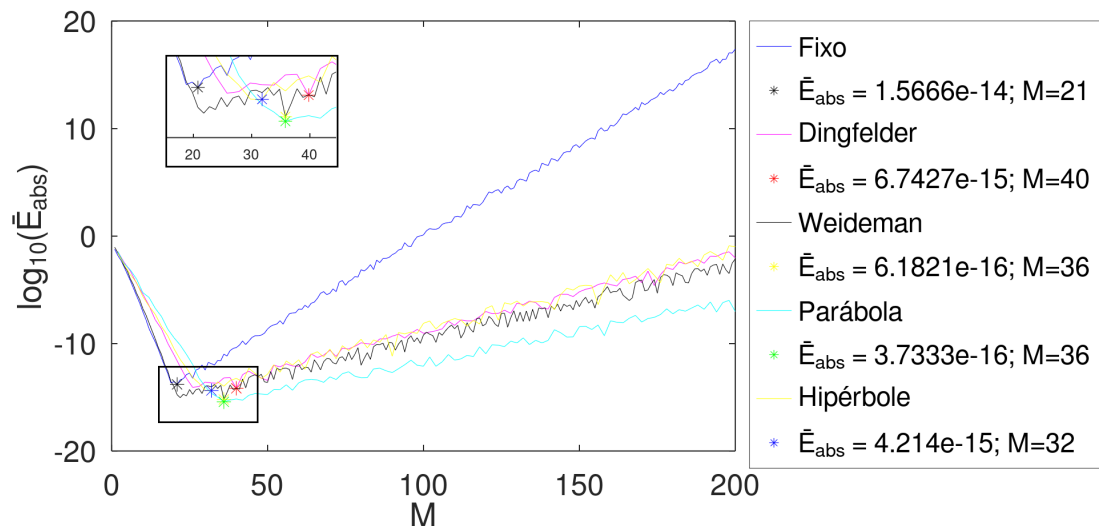
4.5 Inversão de $F_4(s)$

A Tabela 4.20 apresenta os valores de M_o que resultam no melhor ajuste entre o perfil numérico e analítico da função $F_4(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$ e sua transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}\{F_4(s)\} = f_4(t) = te^{-t}$. Ademais, ela exibe os erros absolutos médios obtidos para cada um dos algoritmos, os quais podem ser visualizados graficamente na Figura 4.21.

Tabela 4.20: M_o obtidos para função $F_4(s)$.

Métodos	M_o	Erro Absoluto Médio
Talbot-Fixo	21	$1,566579982056893 \times 10^{-14}$
Talbot-DW	40	$6,742732581500537 \times 10^{-15}$
Talbot-Weideman	36	$6,182071505595415 \times 10^{-16}$
Talbot-Parábola	36	$3,733339296640740 \times 10^{-16}$
Talbot-Hipérbole	32	$4,214028954147651 \times 10^{-15}$

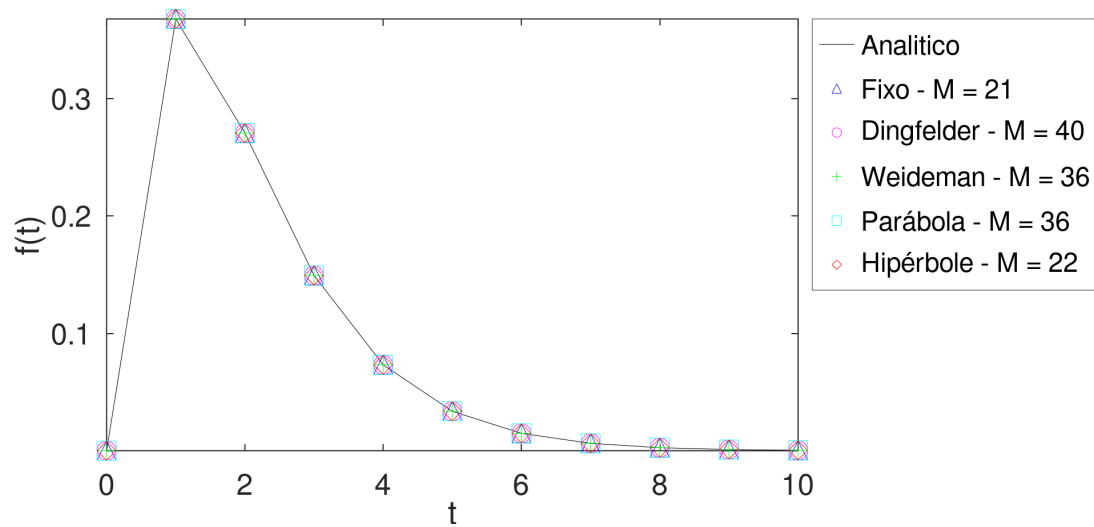
Figura 4.21: $\bar{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica para $F_4(s)$.



Fonte: Autor

Ressalta-se que a Figura 4.22 esboça graficamente as soluções apresentadas na Tabela 4.21.

Figura 4.22: Representação gráfica dos resultados tabelados para $F_4(s)$.



Fonte: Autor

Tabela 4.21: Perfil de inversão para $F_4(s)$.

		TF - $M = 21$	TDW - $M = 40$	TW - $M = 36$	TP - $M = 36$	TH - $M = 32$
t	f_a	f_{TF}	f_{TDW}	f_{TW}	f_{TP}	f_{TH}
10^{-4}	$9,9990000499 \times 10^{-5}$	$9,9990000499 \times 10^{-5}$	$9,9990000499 \times 10^{-5}$	$9,9990000499 \times 10^{-5}$	$9,9990000499 \times 10^{-5}$	$9,9990000499 \times 10^{-5}$
1	$3,6787944117 \times 10^{-1}$	$3,6787944117 \times 10^{-1}$	$3,6787944117 \times 10^{-1}$	$3,6787944117 \times 10^{-1}$	$3,6787944117 \times 10^{-1}$	$3,6787944117 \times 10^{-1}$
2	$2,7067056647 \times 10^{-1}$	$2,7067056647 \times 10^{-1}$	$2,7067056647 \times 10^{-1}$	$2,7067056647 \times 10^{-1}$	$2,7067056647 \times 10^{-1}$	$2,7067056647 \times 10^{-1}$
3	$1,4936120510 \times 10^{-1}$	$1,4936120510 \times 10^{-1}$	$1,4936120510 \times 10^{-1}$	$1,4936120510 \times 10^{-1}$	$1,4936120510 \times 10^{-1}$	$1,4936120510 \times 10^{-1}$
4	$7,3262555554 \times 10^{-2}$	$7,3262555554 \times 10^{-2}$	$7,3262555554 \times 10^{-2}$	$7,3262555554 \times 10^{-2}$	$7,3262555554 \times 10^{-2}$	$7,3262555554 \times 10^{-2}$
5	$3,3689734995 \times 10^{-2}$	$3,3689734995 \times 10^{-2}$	$3,3689734995 \times 10^{-2}$	$3,3689734995 \times 10^{-2}$	$3,3689734995 \times 10^{-2}$	$3,3689734995 \times 10^{-2}$
6	$1,4872513059 \times 10^{-2}$	$1,4872513059 \times 10^{-2}$	$1,4872513059 \times 10^{-2}$	$1,4872513059 \times 10^{-2}$	$1,4872513059 \times 10^{-2}$	$1,4872513060 \times 10^{-2}$
7	$6,3831737588 \times 10^{-3}$	$6,3831737588 \times 10^{-3}$	$6,3831737588 \times 10^{-3}$	$6,3831737588 \times 10^{-3}$	$6,3831737588 \times 10^{-3}$	$6,3831737588 \times 10^{-3}$
8	$2,6837010232 \times 10^{-3}$	$2,6837010231 \times 10^{-3}$	$2,6837010232 \times 10^{-3}$	$2,6837010232 \times 10^{-3}$	$2,6837010232 \times 10^{-3}$	$2,6837010232 \times 10^{-3}$
9	$1,1106882367 \times 10^{-3}$	$1,1106882367 \times 10^{-3}$	$1,1106882367 \times 10^{-3}$	$1,1106882367 \times 10^{-3}$	$1,1106882367 \times 10^{-3}$	$1,1106882367 \times 10^{-3}$
10	$4,5399929762 \times 10^{-4}$	$4,5399929761 \times 10^{-4}$	$4,5399929760 \times 10^{-4}$	$4,5399929762 \times 10^{-4}$	$4,5399929762 \times 10^{-4}$	$4,5399929762 \times 10^{-4}$

4.6 Inversão de $F_5(s)$

Os dados contidos nas Tabelas 4.22-4.24 apresentam o erro absoluto médio de acordo com o M_o encontrado para cada análise realizada na função $F_5(s) = e^{-b\sqrt{s}}$ e sua transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}\{F_5(s)\} = f_5(t) = \frac{b}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-b^2/4t}$. Já as Figuras 4.23-4.25 mostram a evolução do erro absoluto médio a medida que o valor M aumenta. Ainda as Tabelas 4.25-4.27 mostram as soluções para a Transformada Inversa Analítica e para as Transformadas Inversas Numéricas adquiridas em cada situação estudada a partir da implementação dos algoritmos estudados.

Tabela 4.22: M_o obtidos para função $F_5(s)$ com $b = 0, 5$.

Métodos	M_o	Erro Absoluto Médio
Talbot-Fixo	21	$1,655607469301530 \times 10^{-13}$
Talbot-DW	24	$2,135323391911273 \times 10^{-15}$
Talbot-Weideman	22	$1,084596427820954 \times 10^{-15}$
Talbot-Parábola	42	$1,024985021101023 \times 10^{-15}$
Talbot-Hipérbole	32	$4,776561091102138 \times 10^{-15}$

Figura 4.23: $\bar{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica $F_5(s)$ com $b = 0, 5$.

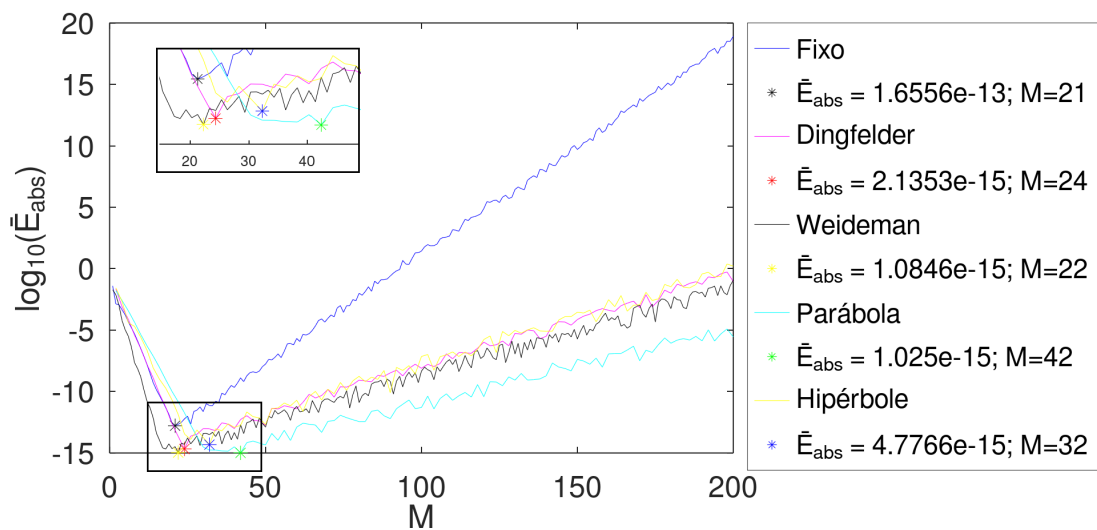


Tabela 4.23: M_o obtidos para função $F_5(s)$ com $b = 2$.

Métodos	M_o	Erro Absoluto Médio
Talbot-Fixo	21	$5,324970262712079 \times 10^{-15}$
Talbot-DW	24	$3,186761460701884 \times 10^{-16}$
Talbot-Weideman	17	$8,705157806719977 \times 10^{-17}$
Talbot-Parábola	30	$8,831319514063745 \times 10^{-17}$
Talbot-Hipérbole	24	$1,579229171675613 \times 10^{-15}$

Figura 4.24: $\bar{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica $F_5(s)$ com $b = 2$.

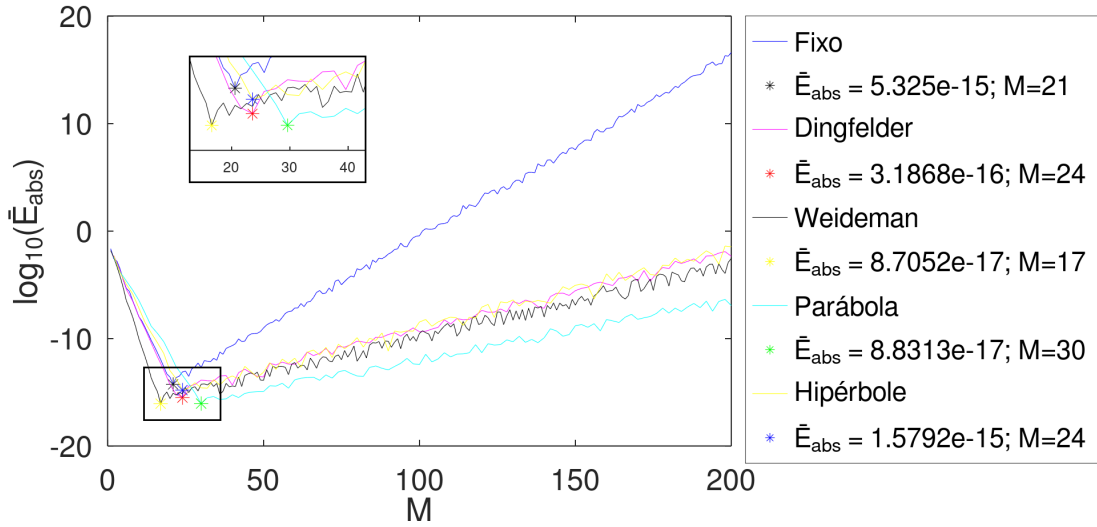


Tabela 4.24: M_o obtidos para função $F_5(s)$ com $b = 5$.

Métodos	M_o	Erro Absoluto Médio
Talbot-Fixo	21	$1,962997315201937 \times 10^{-16}$
Talbot-DW	24	$2,623431257778026 \times 10^{-17}$
Talbot-Weideman	20	$1,013236212104635 \times 10^{-17}$
Talbot-Parábola	30	$1,170938346284345 \times 10^{-17}$
Talbot-Hipérbole	30	$5,350044902046653 \times 10^{-17}$

Figura 4.25: $\bar{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica $F_5(s)$ com $b = 5$.

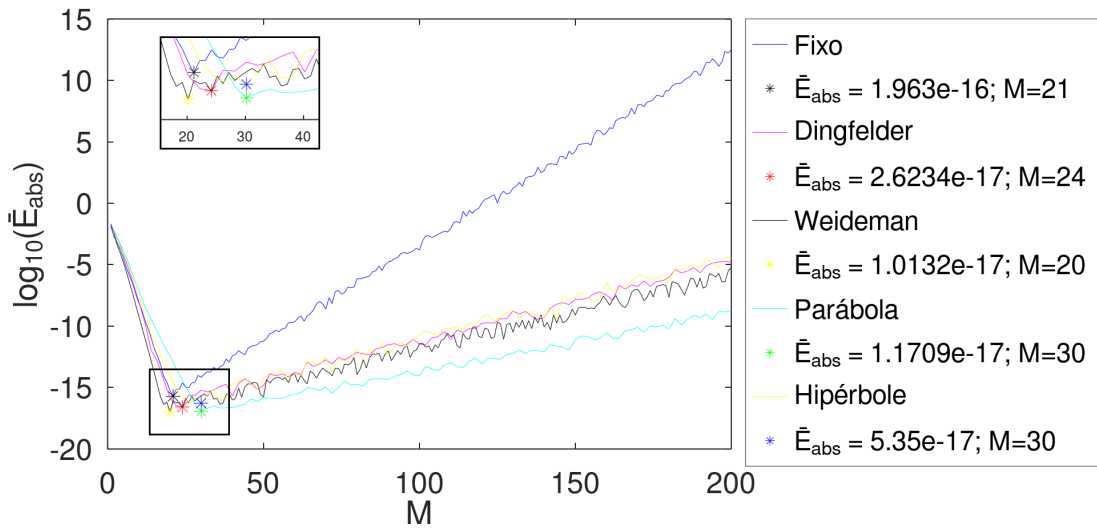


Tabela 4.25: Perfil de inversão para $F_5(s)$, para $b = 0,5$.

		TF - $M = 21$	TDW - $M = 24$	TW - $M = 22$	TP - $M = 42$	TH - $M = 32$
t	f_a	f_{TF}	f_{TDW}	f_{TW}	f_{TP}	f_{TH}
10^{-4}	0	0	0	0	0	0
1	$1,3250176617 \times 10^{-1}$	$1,3250176617 \times 10^{-1}$	$1,3250176617 \times 10^{-1}$	$1,3250176617 \times 10^{-1}$	$1,3250176617 \times 10^{-1}$	$1,3250176617 \times 10^{-1}$
2	$4,8333514600 \times 10^{-2}$	$4,8333514600 \times 10^{-2}$	$4,8333514600 \times 10^{-2}$	$4,8333514600 \times 10^{-2}$	$4,8333514600 \times 10^{-2}$	$4,8333514600 \times 10^{-2}$
3	$2,6584921883 \times 10^{-2}$	$2,6584921883 \times 10^{-2}$	$2,6584921883 \times 10^{-2}$	$2,6584921883 \times 10^{-2}$	$2,6584921883 \times 10^{-2}$	$2,6584921883 \times 10^{-2}$
4	$1,7357582337 \times 10^{-2}$	$1,7357582337 \times 10^{-2}$	$1,7357582337 \times 10^{-2}$	$1,7357582337 \times 10^{-2}$	$1,7357582337 \times 10^{-2}$	$1,7357582337 \times 10^{-2}$
5	$1,2458948332 \times 10^{-2}$	$1,2458948332 \times 10^{-2}$	$1,2458948332 \times 10^{-2}$	$1,2458948332 \times 10^{-2}$	$1,2458948332 \times 10^{-2}$	$1,2458948332 \times 10^{-2}$
6	$9,4976092061 \times 10^{-3}$	$9,4976092059 \times 10^{-3}$	$9,4976092061 \times 10^{-3}$	$9,4976092061 \times 10^{-3}$	$9,4976092061 \times 10^{-3}$	$9,4976092061 \times 10^{-3}$
7	$7,5481475831 \times 10^{-3}$	$7,5481475829 \times 10^{-3}$	$7,5481475831 \times 10^{-3}$	$7,5481475831 \times 10^{-3}$	$7,5481475831 \times 10^{-3}$	$7,5481475831 \times 10^{-3}$
8	$6,1849638585 \times 10^{-3}$	$6,1849638584 \times 10^{-3}$	$6,1849638585 \times 10^{-3}$	$6,1849638585 \times 10^{-3}$	$6,1849638585 \times 10^{-3}$	$6,1849638585 \times 10^{-3}$
9	$5,1878256759 \times 10^{-3}$	$5,1878256758 \times 10^{-3}$	$5,1878256759 \times 10^{-3}$	$5,1878256759 \times 10^{-3}$	$5,1878256759 \times 10^{-3}$	$5,1878256759 \times 10^{-3}$
10	$4,4325202852 \times 10^{-3}$	$4,4325202852 \times 10^{-3}$	$4,4325202852 \times 10^{-3}$	$4,4325202852 \times 10^{-3}$	$4,4325202852 \times 10^{-3}$	$4,4325202852 \times 10^{-3}$

Tabela 4.26: Perfil de inversão para $F_5(s)$ para $b = 2$.

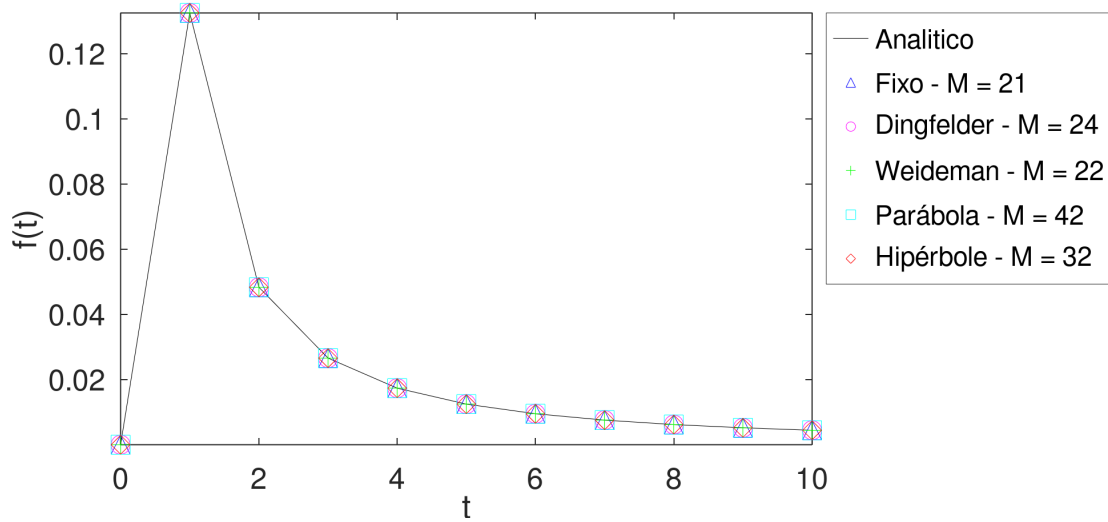
		TF - $M = 21$	TDW - $M = 24$	TW - $M = 17$	TP - $M = 30$	TH - $M = 24$
t	f_a	f_{TF}	f_{TDW}	f_{TW}	f_{TP}	f_{TH}
10^{-4}	0	0	0	0	0	0
1	$2,0755374871 \times 10^{-1}$	$2,0755374871 \times 10^{-1}$	$2,0755374871 \times 10^{-1}$	$2,0755374871 \times 10^{-1}$	$2,0755374871 \times 10^{-1}$	$2,0755374871 \times 10^{-1}$
2	$1,2098536225 \times 10^{-1}$	$1,2098536225 \times 10^{-1}$	$1,2098536225 \times 10^{-1}$	$1,2098536225 \times 10^{-1}$	$1,2098536225 \times 10^{-1}$	$1,2098536225 \times 10^{-1}$
3	$7,7799777378 \times 10^{-2}$	$7,7799777378 \times 10^{-2}$	$7,7799777378 \times 10^{-2}$	$7,7799777378 \times 10^{-2}$	$7,7799777378 \times 10^{-2}$	$7,7799777378 \times 10^{-2}$
4	$5,4923911183 \times 10^{-2}$	$5,4923911183 \times 10^{-2}$	$5,4923911183 \times 10^{-2}$	$5,4923911183 \times 10^{-2}$	$5,4923911183 \times 10^{-2}$	$5,4923911183 \times 10^{-2}$
5	$4,1315323797 \times 10^{-2}$	$4,1315323797 \times 10^{-2}$	$4,1315323797 \times 10^{-2}$	$4,1315323797 \times 10^{-2}$	$4,1315323797 \times 10^{-2}$	$4,1315323797 \times 10^{-2}$
6	$3,2494942620 \times 10^{-2}$	$3,2494942620 \times 10^{-2}$	$3,2494942620 \times 10^{-2}$	$3,2494942620 \times 10^{-2}$	$3,2494942620 \times 10^{-2}$	$3,2494942620 \times 10^{-2}$
7	$2,6408025749 \times 10^{-2}$	$2,6408025749 \times 10^{-2}$	$2,6408025749 \times 10^{-2}$	$2,6408025749 \times 10^{-2}$	$2,6408025749 \times 10^{-2}$	$2,6408025749 \times 10^{-2}$
8	$2,2004082922 \times 10^{-2}$	$2,2004082922 \times 10^{-2}$	$2,2004082922 \times 10^{-2}$	$2,2004082922 \times 10^{-2}$	$2,2004082922 \times 10^{-2}$	$2,2004082922 \times 10^{-2}$
9	$1,8698482277 \times 10^{-2}$	$1,8698482277 \times 10^{-2}$	$1,8698482277 \times 10^{-2}$	$1,8698482277 \times 10^{-2}$	$1,8698482277 \times 10^{-2}$	$1,8698482277 \times 10^{-2}$
10	$1,6143422587 \times 10^{-2}$	$1,6143422587 \times 10^{-2}$	$1,6143422587 \times 10^{-2}$	$1,6143422587 \times 10^{-2}$	$1,6143422587 \times 10^{-2}$	$1,6143422587 \times 10^{-2}$

Tabela 4.27: Perfil de inversão para $F_5(s)$, para $b = 5$.

		TF - $M = 21$	TDW - $M = 24$	TW - $M = 20$	TP - $M = 30$	TH - $M = 30$
t	f_a	f_{TF}	f_{TDW}	f_{TW}	f_{TP}	f_{TH}
10^{-4}	0	0	0	0	0	0
1	$2,7228552879 \times 10^{-3}$	$2,7228552879 \times 10^{-3}$	$2,7228552879 \times 10^{-3}$	$2,7228552879 \times 10^{-3}$	$2,7228552879 \times 10^{-3}$	$2,7228552879 \times 10^{-3}$
2	$2,1910375616 \times 10^{-2}$	$2,1910375616 \times 10^{-2}$	$2,1910375616 \times 10^{-2}$	$2,1910375616 \times 10^{-2}$	$2,1910375616 \times 10^{-2}$	$2,1910375616 \times 10^{-2}$
3	$3,3798935286 \times 10^{-2}$	$3,3798935286 \times 10^{-2}$	$3,3798935286 \times 10^{-2}$	$3,3798935286 \times 10^{-2}$	$3,3798935286 \times 10^{-2}$	$3,3798935286 \times 10^{-2}$
4	$3,6956425382 \times 10^{-2}$	$3,6956425382 \times 10^{-2}$	$3,6956425382 \times 10^{-2}$	$3,6956425382 \times 10^{-2}$	$3,6956425382 \times 10^{-2}$	$3,6956425382 \times 10^{-2}$
5	$3,6144478533 \times 10^{-2}$	$3,6144478533 \times 10^{-2}$	$3,6144478533 \times 10^{-2}$	$3,6144478533 \times 10^{-2}$	$3,6144478533 \times 10^{-2}$	$3,6144478533 \times 10^{-2}$
6	$3,3864768525 \times 10^{-2}$	$3,3864768525 \times 10^{-2}$	$3,3864768525 \times 10^{-2}$	$3,3864768525 \times 10^{-2}$	$3,3864768525 \times 10^{-2}$	$3,3864768525 \times 10^{-2}$
7	$3,1185670220 \times 10^{-2}$	$3,1185670220 \times 10^{-2}$	$3,1185670220 \times 10^{-2}$	$3,1185670220 \times 10^{-2}$	$3,1185670220 \times 10^{-2}$	$3,1185670220 \times 10^{-2}$
8	$2,8538919592 \times 10^{-2}$	$2,8538919592 \times 10^{-2}$	$2,8538919592 \times 10^{-2}$	$2,8538919592 \times 10^{-2}$	$2,8538919592 \times 10^{-2}$	$2,8538919592 \times 10^{-2}$
9	$2,6086025708 \times 10^{-2}$	$2,6086025708 \times 10^{-2}$	$2,6086025708 \times 10^{-2}$	$2,6086025708 \times 10^{-2}$	$2,6086025708 \times 10^{-2}$	$2,6086025708 \times 10^{-2}$
10	$2,3874320576 \times 10^{-2}$	$2,3874320576 \times 10^{-2}$	$2,3874320576 \times 10^{-2}$	$2,3874320576 \times 10^{-2}$	$2,3874320576 \times 10^{-2}$	$2,3874320576 \times 10^{-2}$

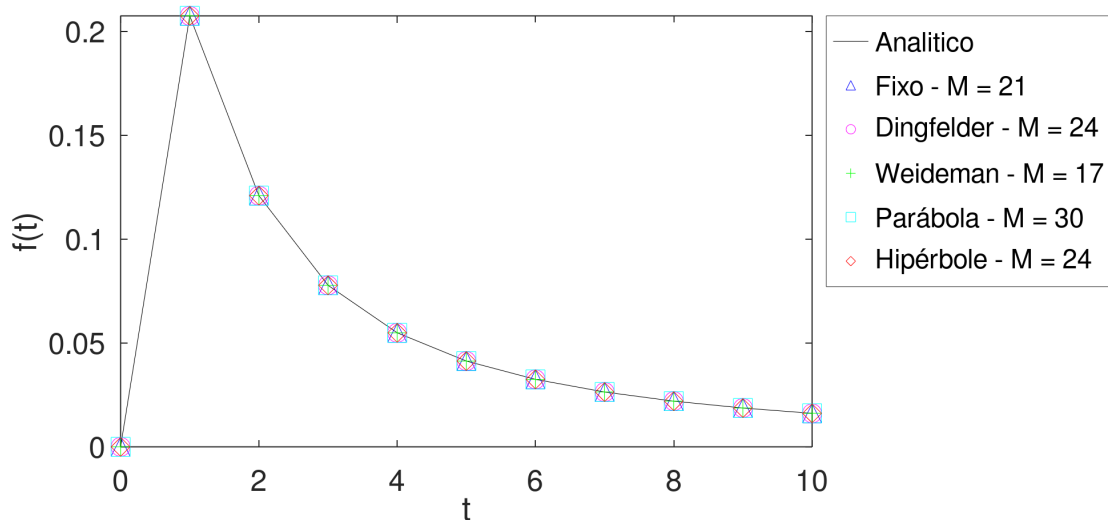
As Figuras 4.26-4.28 representam graficamente os resultados apresentados nas Tabelas 4.25-4.27. Além disso, observa-se que a inversão de $F_5(s)$ não necessitou de uma mudança de intervalo no vetor t , ao contrário do que ocorreu com as funções $F_1(s)$, $F_2(s)$ e $F_3(s)$.

Figura 4.26: Representação gráfica dos resultados tabelados para $F_5(s)$ com $b = 0, 5$.



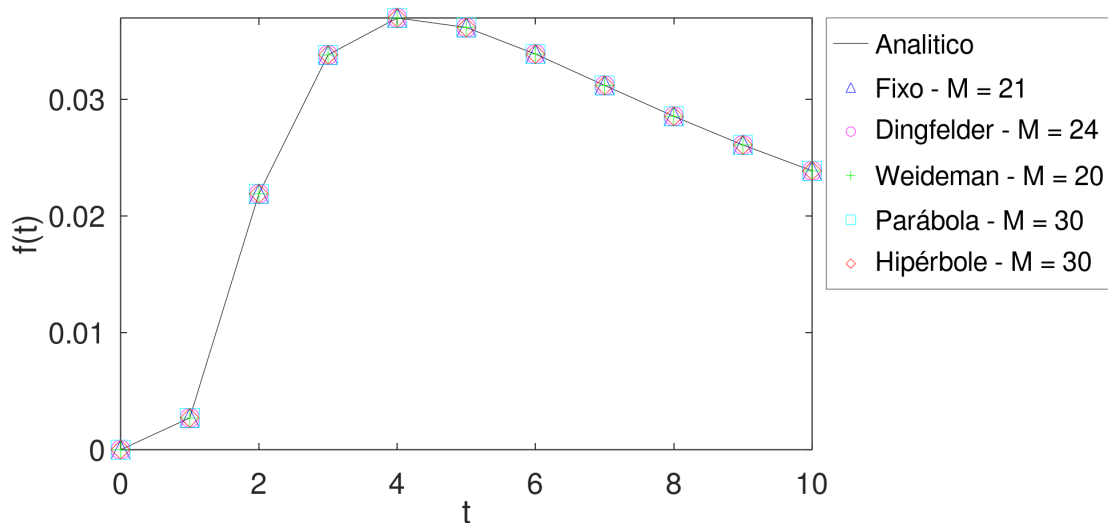
Fonte: Autor

Figura 4.27: Representação gráfica dos resultados tabelados para $F_5(s)$ com $b = 2$.



Fonte: Autor

Figura 4.28: Representação gráfica dos resultados tabelados para $F_5(s)$ com $b = 5$.



Fonte: Autor

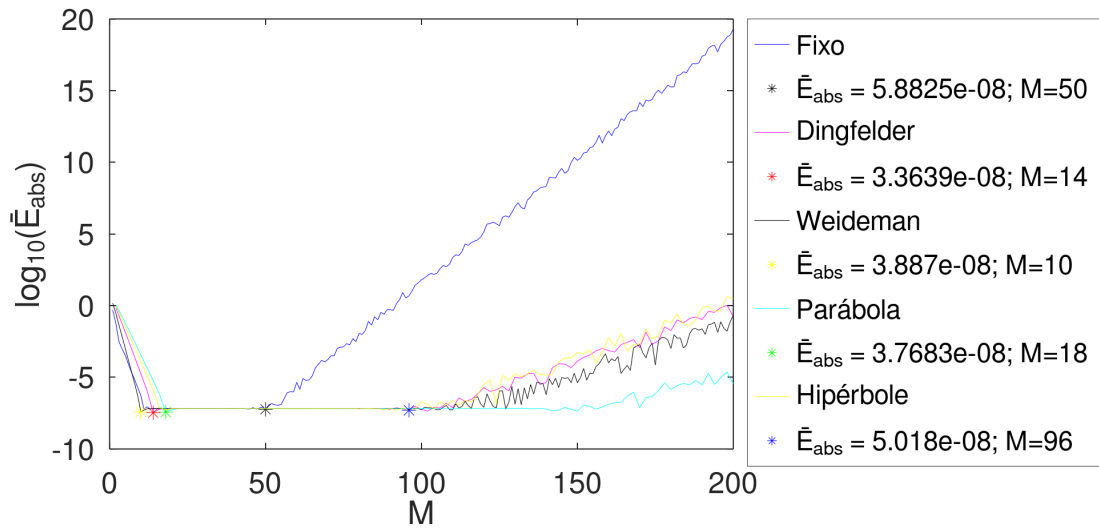
4.7 Inversão de $F_6(s)$

A Tabela 4.28 apresenta o M_o e o erro absoluto médio obtidos durante a análise da função $F_6(s) = -\frac{\ln(s)}{s}$ e sua inversa $\mathcal{L}^{-1}\{F_6(s)\} = f_6(t) = \ln(t) + \gamma$. As soluções do perfil analítico $f_a(t)$ e dos perfis numéricos $f_6(t)$ obtidas pelos cinco algoritmos estão apresentadas na Tabela 4.29. Estas soluções foram determinadas com base no valor de M_o calculado para cada método implementado. A Figura 4.30 apresenta uma comparação gráfica entre os perfis obtidos para cada algoritmo, enquanto a Figura 4.29 exibe os gráficos do erro absoluto médio para $F_6(s)$.

Tabela 4.28: M_o obtidos para função $F_6(s)$.

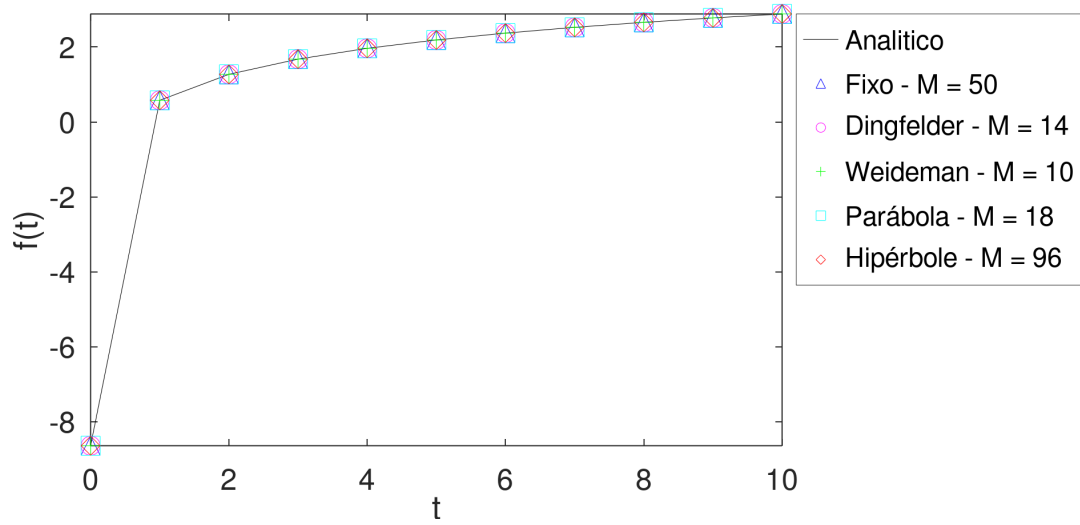
Métodos	M_o	Erro Absoluto Médio
Talbot-Fixo	50	$5,882535059065219 \times 10^{-8}$
Talbot-DW	14	$3,363852943668891 \times 10^{-8}$
Talbot-Weideman	10	$3,886964419017793 \times 10^{-8}$
Talbot-Parábola	18	$3,768269047304591 \times 10^{-8}$
Talbot-Hipérbole	96	$5,017972190294015 \times 10^{-8}$

Figura 4.29: $\overline{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica $F_6(s)$.



Fonte: Autor

Figura 4.30: Representação gráfica dos resultados tabelados para $F_6(s)$.



Fonte: Autor

Tabela 4.29: Perfil de inversão para $F_6(s)$.

TF - $M = 50$		TDW - $M = 14$	TW - $M = 10$	TP - $M = 18$	TH - $M = 96$	
t	f_a	f_{TF}	f_{TDW}	f_{TW}	f_{TP}	f_{TH}
10^{-4}	$-8,6331247719 \times 10^0$	$-8,6331245838 \times 10^0$	$-8,6331246784 \times 10^0$	$-8,633124685485841 \times 10^0$	$-8,6331246626 \times 10^0$	$-8,6331248217 \times 10^0$
1	$5,7721560000 \times 10^{-1}$	$5,7721563279 \times 10^{-1}$	$5,7721558941 \times 10^{-1}$	$5,772155828833573 \times 10^{-1}$	$5,7721558919 \times 10^{-1}$	$5,7721563625 \times 10^{-1}$
2	$1,2703627805 \times 10^0$	$1,2703628152 \times 10^0$	$1,2703627621 \times 10^0$	$1,270362755646100 \times 10^0$	$1,2703627607 \times 10^0$	$1,2703628234 \times 10^0$
3	$1,6758278886 \times 10^0$	$1,6758279601 \times 10^0$	$1,6758278656 \times 10^0$	$1,675827859193194 \times 10^0$	$1,6758278635 \times 10^0$	$1,6758279352 \times 10^0$
4	$1,9635099611 \times 10^0$	$1,9635100081 \times 10^0$	$1,9635099348 \times 10^0$	$1,963509928408843 \times 10^0$	$1,9635099322 \times 10^0$	$1,9635100101 \times 10^0$
5	$2,1866535124 \times 10^0$	$2,1866535234 \times 10^0$	$2,1866534836 \times 10^0$	$2,186653477212914 \times 10^0$	$2,1866534806 \times 10^0$	$2,1866535636 \times 10^0$
6	$2,3689750692 \times 10^0$	$2,3689751346 \times 10^0$	$2,3689750383 \times 10^0$	$2,368975031955936 \times 10^0$	$2,3689750350 \times 10^0$	$2,3689751221 \times 10^0$
7	$2,5231257490 \times 10^0$	$2,5231257941 \times 10^0$	$2,5231257164 \times 10^0$	$2,523125710049156 \times 10^0$	$2,5231257128 \times 10^0$	$2,5231258031 \times 10^0$
8	$2,6566571416 \times 10^0$	$2,6566571936 \times 10^0$	$2,6566571075 \times 10^0$	$2,656657101171586 \times 10^0$	$2,6566571037 \times 10^0$	$2,6566571969 \times 10^0$
9	$2,7744401773 \times 10^0$	$2,7744402388 \times 10^0$	$2,7744401419 \times 10^0$	$2,774440135503029 \times 10^0$	$2,7744401378 \times 10^0$	$2,7744402338 \times 10^0$
10	$2,8798006929 \times 10^0$	$2,8798007309 \times 10^0$	$2,8798006563 \times 10^0$	$2,879800649975656 \times 10^0$	$2,8798006521 \times 10^0$	$2,8798007504 \times 10^0$

4.8 Inversão de $F_7(s)$

A função $F_7(s) = \ln\left(1 + \frac{1}{s}\right)$ e sua transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}\{F_7(s)\} = f_7(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t}$ possuem características semelhantes às de $F_4(s)$ e $F_6(s)$. Na Tabela 4.30, são apresentados os erros absolutos médios e os valores de M_o e a Figura 4.31 exibe estes resultados graficamente. A Tabela 4.31 mostra os perfis numéricos de cada método e o perfil analítico de acordo com os valores de M_o encontrados.

Tabela 4.30: M_o obtidos para função $F_7(s)$.

Métodos	M_o	Erro Absoluto Médio
Talbot-Fixo	17	$1,343054834013202 \times 10^{-11}$
Talbot-DW	22	$7,373151453173728 \times 10^{-13}$
Talbot-Weideman	16	$3,945076588639618 \times 10^{-14}$
Talbot-Parábola	30	$3,479060474053209 \times 10^{-13}$
Talbot-Hipérbole	24	$2,995840949053404 \times 10^{-12}$

Figura 4.31: $\bar{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica $F_7(s)$.

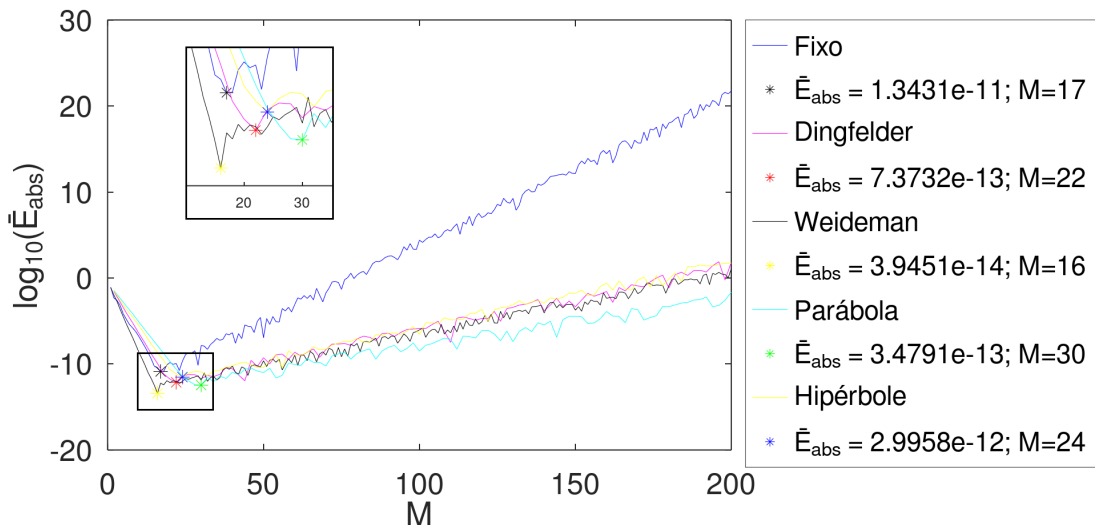
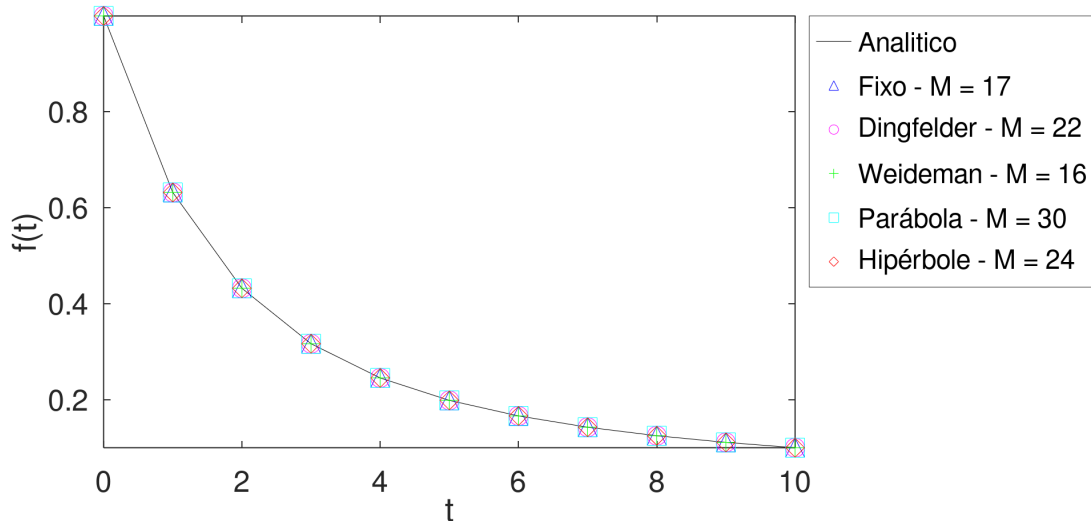


Tabela 4.31: Perfil de inversão para $F_7(s)$.

		TF - $M = 17$	TDW - $M = 22$	TW - $M = 16$	TP - $M = 30$	TH - $M = 24$
t	f_a	f_{TF}	f_{TDW}	f_{TW}	f_{TP}	f_{TH}
10^{-4}	$9,9995000166 \times 10^{-1}$	$9,9995000154 \times 10^{-1}$	$9,9995000165 \times 10^{-1}$	$9,9995000166 \times 10^{-1}$	$9,9995000167 \times 10^{-1}$	$9,9995000169 \times 10^{-1}$
1	$6,3212055882 \times 10^{-1}$	$6,3212055882 \times 10^{-1}$	$6,3212055882 \times 10^{-1}$	$6,3212055882 \times 10^{-1}$	$6,3212055882 \times 10^{-1}$	$6,3212055882 \times 10^{-1}$
2	$4,3233235838 \times 10^{-1}$	$4,3233235837 \times 10^{-1}$	$4,3233235838 \times 10^{-1}$	$4,3233235838 \times 10^{-1}$	$4,3233235838 \times 10^{-1}$	$4,3233235838 \times 10^{-1}$
3	$3,1673764387 \times 10^{-1}$	$3,1673764387 \times 10^{-1}$	$3,1673764387 \times 10^{-1}$	$3,1673764387 \times 10^{-1}$	$3,1673764387 \times 10^{-1}$	$3,1673764387 \times 10^{-1}$
4	$2,4542109027 \times 10^{-1}$	$2,4542109027 \times 10^{-1}$	$2,4542109027 \times 10^{-1}$	$2,4542109027 \times 10^{-1}$	$2,4542109027 \times 10^{-1}$	$2,4542109027 \times 10^{-1}$
5	$1,9865241060 \times 10^{-1}$	$1,9865241059 \times 10^{-1}$	$1,9865241060 \times 10^{-1}$	$1,9865241060 \times 10^{-1}$	$1,9865241060 \times 10^{-1}$	$1,9865241060 \times 10^{-1}$
6	$1,6625354130 \times 10^{-1}$	$1,6625354130 \times 10^{-1}$	$1,6625354130 \times 10^{-1}$	$1,6625354130 \times 10^{-1}$	$1,6625354130 \times 10^{-1}$	$1,6625354130 \times 10^{-1}$
7	$1,4272687400 \times 10^{-1}$	$1,4272687400 \times 10^{-1}$	$1,4272687400 \times 10^{-1}$	$1,4272687400 \times 10^{-1}$	$1,4272687400 \times 10^{-1}$	$1,4272687400 \times 10^{-1}$
8	$1,2495806717 \times 10^{-1}$	$1,2495806716 \times 10^{-1}$	$1,2495806717 \times 10^{-1}$	$1,2495806717 \times 10^{-1}$	$1,2495806717 \times 10^{-1}$	$1,2495806717 \times 10^{-1}$
9	$1,1109739891 \times 10^{-1}$	$1,1109739890 \times 10^{-1}$	$1,1109739891 \times 10^{-1}$	$1,1109739891 \times 10^{-1}$	$1,1109739891 \times 10^{-1}$	$1,1109739891 \times 10^{-1}$
10	$9,9995460007 \times 10^{-2}$	$9,9995460003 \times 10^{-2}$	$9,9995460007 \times 10^{-2}$	$9,9995460007 \times 10^{-2}$	$9,9995460007 \times 10^{-2}$	$9,9995460007 \times 10^{-2}$

A Figura 4.32 apresenta a comparação e o comportamento das Transformadas Inversas Numéricas em relação à Transformada Inversa Analítica para os métodos de inversão numérica analisados.

Figura 4.32: Representação gráfica dos resultados tabelados para $F_7(s)$.



Fonte: Autor

4.9 Análise Geral dos Resultados das Funções Testes

Nessa etapa, utilizou-se um conjunto de funções elementares (Tabela 4.1) para avaliar o desempenho dos métodos numéricos Talbot-Fixo, Talbot-DW, Talbot-Weideman, Talbot-Parábola e Talbot-Hipérbole. Durante o processo, o erro absoluto médio foi empregado para determinar o valor de M_o (ou M ótimo), conforme calculado pela Eq. (4.1). Essa métrica indica os perfis numéricos que melhor se ajustam aos analíticos, levando em consideração os diferentes valores dos parâmetros a e b testados nas funções. No método Talbot-DW, os valores de σ , μ , ν e α foram adotados com base nas referências bibliográficas de Weideman (2006) e Dingfelder e Weideman (2014). Todos esses dados estão apresentados nas Tabelas 4.2-4.31 e podem ser visualizados graficamente nas Figuras 4.3-4.32.

No decorrer da análise de desempenho dos métodos numéricos implementados para o cálculo da Transformada Inversa, as observações realizadas permitem fazer algumas recomendações:

i) o algoritmo Talbot-Fixo é de fácil implementação e rápida execução, especialmente por não depender de esquemas iterativos. Porém, o método Talbot-DW possui algumas restrições devido a presença das funções $\cot(\theta)$ e $\csc^2(\theta)$ na aproximação das Eq. (3.20) e (3.22), obrigando a utilização apenas de M pares;

ii) para determinar o M ótimo (M_o) em cada função analisada, realizou-se uma busca no intervalo de $1 \leq M \leq 200$ para todos métodos estudados. Para o método Talbot-DW, o intervalo foi de $2 \leq M \leq 200$, somente para valores pares, pelas restrições previamente mencionadas;

iii) os métodos de aproximação de Talbot apresentam diferentes faixas de valores ideais para seus parâmetros, influenciando diretamente na qualidade dos resultados obtidos. O método Talbot-Weideman demonstra melhor desempenho quando o parâmetro M está situado entre $20 \leq M \leq 49$. Por sua vez, o método Talbot-Parábola alcança melhores resultados quando pertence à faixa de $36 \leq M \leq 72$. Já o método Talbot-Hipérbole revela sua eficácia com valores dentro do intervalo $24 \leq M \leq 54$. Um destaque é para o método de Talbot-Fixo, cujos melhores resultados surgem quando o parâmetro livre M se mantém na faixa de $20 \leq M \leq 30$. Essa limitação indica que valores extremamente grandes ou pequenos de M não proporcionam uma boa aproximação de $f_n(t)$ em relação a $f_a(t)$.

iv) a função $F_1(s)$ demonstra uma estabilidade na ordem dos erros absolutos médio nos métodos numéricos Talbot-Fixo, Talbot-DW e Talbot-Hipérbole. Por outro lado, nos algoritmos de Talbot-Weideman e Talbot-Parábola, há uma variação na ordem dos erros. Durante os testes, constatou-se que Talbot-Fixo, Talbot-DW e Talbot-Hipérbole apresentaram uma ordem de precisão na faixa de 10^{-14} a 10^{-15} , enquanto que Talbot-Weideman e Talbot-Parábola exibiram uma variação na precisão à medida que o valor do parâmetro b aumenta. Além disso, nota-se que, os valores de M_o para TF, TDW e TW, permaneceram entre $20 \leq M_o \leq 24$, enquanto para TP e TH, os valores ultrapassaram esse intervalo, situando-se entre $32 \leq M_o \leq 36$. Ainda, observa-se que, para todos os valores atribuídos para b , o algoritmo Talbot-Parábola exigiu mais termos do somatório em comparação aos demais métodos numéricos;

v) no intuito de uma melhor observação gráfica das funções $F_1(s)$, $F_2(s)$ e $F_3(s)$ quando $a = 30$ e $b = 30$, foi necessário redefinir o intervalo de t para a faixa $10^{-4} \leq t \leq 1$;

vi) nota-se, em relação à função $F_2(s)$, que tanto os métodos Talbot-Fixo quanto Talbot-DW exibem erros absolutos médios de ordem semelhante. Independentemente do valor atribuído ao parâmetro a , os erros permaneceram na faixa de 10^{-14} a 10^{-8} . Esse padrão também se aplica aos algoritmos Talbot-Weideman e Talbot-Parábola, porém com os erros variando na faixa entre 10^{-14} e 10^{-9} . E para o método Talbot-Hipérbole os erros se mantiveram entre 10^{-13} e 10^{-8} . Além disso, em todos os algoritmos, tanto $\bar{E}_{abs}$ quanto os valores dos M ótimos aumentaram à medida que os valores de a cresceram. Vale ressaltar que os valores dos M_o para Talbot-DW, Talbot-Weideman, Talbot-Parábola e Talbot-Hipérbole foram maiores que os obtidos por Talbot-Fixo, muitas vezes mais que o dobro. Portanto, neste caso, o método TF surge como escolha preferível para a função $F_2(s)$. A função $F_3(s)$ também manifesta uma natureza oscilatória. Assim como observado em $F_2(s)$, $F_3(s)$ apresenta duas situações semelhantes. Nos cinco métodos numéricos testados, tanto o erro absoluto médio quanto os valores dos M ótimos cresceram à medida que o valor do parâmetro a aumenta. Por outro lado, nota-se que alguns métodos numéricos obtiveram a mesma ordem de erro quando analisados para o mesmo valor de a ;

vii) durante as análises conduzidas na função $F_5(s)$, foi observado que, independentemente do valor atribuído ao parâmetro b , os métodos Talbot-Fixo e Talbot-DW mantiveram os mesmos valores para os M ótimos. Ainda, os métodos Talbot-Weideman e Talbot-Parábola exibiram erros absolutos médios de mesma ordem. É importante ressaltar que todos os algoritmos

demonstraram uma diminuição progressiva na ordem dos ($\overline{E}_{abs}$) à medida que o valor de b aumentava e que os valores de M_o adquiridos em cada método não diferiram significativamente. Assim, para funções dessa natureza o método Talbot-Weideman parece o ser mais adequado;

viii) na função $F_5(s)$, não foi necessário fazer modificações no intervalo do vetor t . Isso se deve aos valores atribuídos ao parâmetro b , os quais não afetam a escala e o comportamento gráfico da função;

ix) as funções $F_4(s)$, $F_6(s)$ e $F_7(s)$ não possuem parâmetros de influência;

x) na função $F_4(s)$ o método numérico Talbot-Parábola apresentam o menor erro absoluto médio. No entanto, seu valor de M_o é um dos maiores entre os algoritmos. Em contrapartida, o método Talbot-Fixo demonstra um M ótimo igual a 21, acompanhado de um $\overline{E}_{abs}$ na ordem de 10^{-14} ;

xi) no caso da função $F_6(s)$, foi observado que todos os métodos alcançaram a mesma ordem de erro, ou seja, erros da ordem de 10^{-8} e que apenas os algoritmos Talbot-DW, Talbot-Weideman e Talbot-Parábola apresentaram um valor de M_o inferior a 20. No entanto, o Talbot-Weideman demonstrou ser mais eficiente, exigindo menos termos no somatório para alcançar o resultado desejado. Portanto, neste cenário, o método Talbot-Weideman é preferível em relação aos demais algoritmos;

xii) já na função $F_7(s)$, destaca-se que o Talbot-Fixo e o Talbot-Weideman foram os que alcançaram um valor de M ótimo abaixo de 20. Além disso, Talbot-DW e Talbot-Parábola atingiram a mesma ordem de erro absoluto médio, ou seja, 10^{-13} . Entre os métodos, o Talbot-Weideman foi o que mostrou melhor desempenho durante os testes realizados na função, apresentando o menor valor dos erros absolutos médio e dos M_o entre todos os métodos numéricos testados;

xiii) o Talbot-Weideman é o algoritmo preferível para funções da classe de $F_6(s)$ e $F_7(s)$;

xiv) entre todas as funções, $F_1(s)$, $F_4(s)$, $F_5(s)$ e $F_6(s)$ são as que convergem utilizando menores valores de M_o .

5 CIRCUITOS ELÉTRICOS

A energia elétrica está entre os maiores avanços tecnológicos, permitindo um progresso significativo em várias áreas. Diversos cientistas desempenharam contribuições fundamentais no desenvolvimento do conhecimento sobre eletricidade. Charles Augustin de Coulomb formulou a Lei de Coulomb, que descreve a força entre duas cargas elétricas (Coulomb, 1785). Benjamin Franklin demonstrou a natureza elétrica dos raios através de seu famoso experimento com a pipa (Franklin, 1752). Nikola Tesla contribuiu significativamente para o desenvolvimento da corrente alternada (CA), essencial para a transmissão eficiente de eletricidade (Tesla, 1887). Essas descobertas não apenas expandiram o entendimento sobre eletricidade, mas também possibilitaram o desenvolvimento e a implementação de circuitos elétricos, essenciais para a tecnologia atual. A Lei de Coulomb e os experimentos de Franklin ajudaram a estabelecer princípios fundamentais para a eletricidade (Jackson, 2021), enquanto que as contribuições de Tesla tornaram possível a criação de redes elétricas que alimentam a vasta gama de dispositivos e sistemas utilizados no cotidiano (O'Neill, 2007).

Os circuitos elétricos (CE) constituem a base fundamental de todos os sistemas eletrônicos e elétricos que permeiam o cotidiano, abrangendo desde dispositivos elementares, como lanternas, até computadores sofisticados. Conforme discutido por Alexander e Sadiku (2013), uma definição básica para circuitos elétricos é a interconexão de elementos elétricos, concebida para promover a transmissão de energia ou comunicação entre distintos pontos. Estes circuitos, por sua vez, podem variar de simples a complexos dependendo dos componentes utilizados. De acordo com Machado (2004) eles podem ser estudados por meio de equações diferenciais de primeira e segunda ordem, e são constituídos por resistores, capacitores, indutores, entre outros componentes. A análise de circuitos, segundo Hayt Jr et al. (2014), envolve a aplicação de técnicas matemáticas e princípios físicos para determinar características como corrente, tensão, potência e impedância em diferentes pontos do circuito. Alguns destes elementos serão apresentados nesta seção tendo como referência Alexander e Sadiku (2013).

A força eletromotriz (fem) é responsável por criar uma diferença de potencial ou tensão, que por sua vez impulsiona o fluxo de corrente elétrica, movendo cargas ao longo do circuito. Essa corrente pode ser de dois tipos: contínua ou alternada. A Corrente Contínua (CC) é produzida por uma fonte de energia que mantém uma tensão constante ao longo do tempo, como uma bateria. Por outro lado, a Corrente Alternada (CA) é gerada por uma fonte que varia periodicamente sua polaridade ao longo do tempo, seguindo uma forma de onda senoidal.

Contudo, há materiais que apresentam uma resistência ao fluxo de corrente elétrica, resultando na dissipação de energia na forma de calor, um fenômeno conhecido como efeito Joule. Essa capacidade de resistir à corrente elétrica é denominada resistência, e o componente elétrico que a exibe é chamado de resistor, o qual limita a quantidade de corrente no circuito. A Lei de Ohm estabelece que a tensão $v(t)$ aplicada a um resistor é diretamente proporcional à corrente $i(t)$ que flui através dele, sendo a constante de proporção conhecida por resistência R e

representa a capacidade de resistir ao fluxo de corrente elétrica. Ela é medida em ohms (Ω). Matematicamente

$$v(t) = Ri(t). \quad (5.1)$$

O capacitor possui a função de armazenar energia em seu campo elétrico, pois ele é formado por duas placas condutoras separadas por um isolante. Quando ligado a uma fonte de tensão, o capacitor inicia um processo de acumulação de cargas positivas em uma placa e cargas negativas na outra, gerando uma diferença de potencial entre elas. A quantidade de carga acumulada $q(t)$ é proporcional à tensão $v(t)$ de modo que

$$q(t) = Cv(t), \quad (5.2)$$

onde C , a constante de proporcionalidade, é conhecida como a capacitância do capacitor, e sua medida é o farads (F).

Tendo em vista que a corrente elétrica $i(t)$ é a taxa de variação da carga $q(t)$ em função do tempo t , é possível derivar a Eq. (5.2) para estabelecer a relação entre corrente e tensão para o capacitor

$$q'(t) = i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}. \quad (5.3)$$

Assim como o capacitor, o indutor armazena energia, mas na forma de campo magnético, e é composto por uma bobina de fio condutor. O fluxo magnético que atravessa a bobina gera uma corrente elétrica no fio e induz uma tensão nos terminais do indutor, devido ao fenômeno da indução eletromagnética. De acordo com a Lei de Lenz, a corrente induzida gera um fluxo oposto àquele que a originou, enquanto a Lei de Faraday estabelece que a tensão é proporcional à mudança no fluxo magnético. Dessa forma, a tensão induzida no indutor é diretamente proporcional à taxa de variação da corrente

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}, \quad (5.4)$$

onde L é a constante de proporcionalidade denominada indutância do indutor e a unidade de medida é o henry (H).

Para uma análise eficaz de circuitos elétricos, é fundamental utilizar ferramentas que permitam compreender a distribuição de correntes e tensões. Segundo Alexander e Sadiku (2013) as Leis de Kirchhoff, junto com a Lei de Ohm, formam um conjunto robusto de princípios para resolver circuitos elétricos complexos.

Ainda de acordo com Alexander e Sadiku (2013), as Leis de Kirchhoff são formuladas da seguinte maneira:

a) Lei de Kirchhoff para corrente (LKC): considere um nó N em um circuito elétrico, com n ramificações conectadas a esse nó, onde $I_1, I_2, \dots, I_n$ representam as correntes em cada uma dessas ramificações. Matematicamente,

$$\sum_{n=1}^n I_n = 0, \quad (5.5)$$

onde as correntes que entram em um nó poderiam ser consideradas positivas ($I_n > 0$), enquanto as correntes que saem do nó, negativas ($I_n < 0$).

b) Lei de Kirchhoff para tensão (LKT): a soma algébrica de todas as tensões em torno de um caminho fechado (ou laço) é zero. Expressando-a matematicamente, tem-se que

$$\sum_{m=1}^M v_m = 0, \quad (5.6)$$

onde M é o número de tensões no laço (ou o número de ramos no laço) e v_m é a m -ésima tensão.

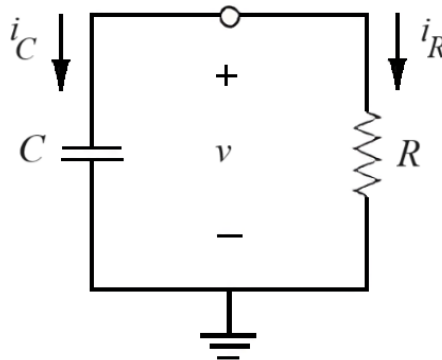
5.1 Tipos de Circuitos Elétricos

Nesta subseção, serão apresentados três tipos de circuitos elétricos, o quais são denominados RC, RL e RLC. É importante destacar que os dois primeiros circuitos são caracterizados por uma Equação Diferencial de primeira ordem, enquanto o circuito RLC é descrito por uma ED de segunda ordem (Alexander e Sadiku, 2013).

5.1.1 Circuito Elétrico RC

O circuito elétrico RC é uma associação em série de um resistor R e um capacitor C inicialmente carregado, como ilustrado na Figura 5.1.

Figura 5.1: Circuito Elétrico RC sem fonte



Fonte: (Alexander e Sadiku, 2013)

Aplicando a LKC ao nó superior da Figura 5.1, têm-se que

$$i_C + i_R = 0. \quad (5.7)$$

Por definição $i_C = C \frac{dv}{dt}$ e $i_R = \frac{v}{R}$. Portanto,

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

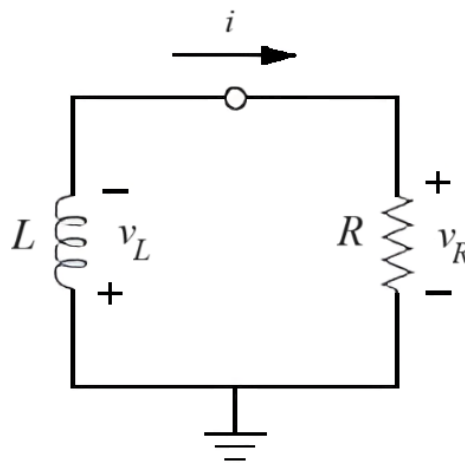
ou

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0. \quad (5.8)$$

5.1.2 Circuito Elétrico RL

Um exemplo de circuito elétrico RL seria a conexão em série de um indutor L e um resistor R , ilustrado na Figura 5.2.

Figura 5.2: Circuito Elétrico RL sem fonte



Fonte: (Alexander e Sadiku, 2013)

Aplicando a Lei LKT no laço da Figura 5.2, obtêm-se

$$v_L + v_R = 0. \quad (5.9)$$

No entanto, $v_L = L \frac{di}{dt}$ e $v_R = iR$. Portanto,

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

ou

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0. \quad (5.10)$$

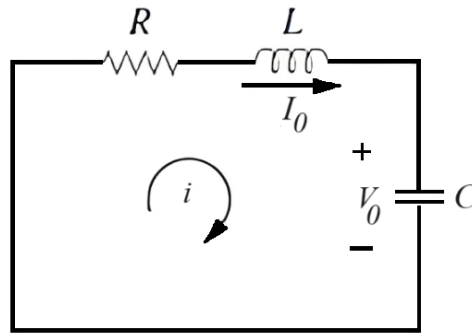
5.1.3 Circuito Elétrico RCL

No caso de um circuito elétrico RLC, a equação que o modela não se limita a envolver apenas a primeira derivada da função incógnita, pois este circuito é composto por um indutor, um resistor e um capacitor conectados em série a uma fonte de tensão. A análise do comportamento

desse circuito requer a consideração das equações diferenciais que incluem tanto a primeira quanto a segunda derivada da corrente ou da tensão.

A Figura 5.3 ilustra o circuito RLC em série, que é excitado pela energia inicialmente armazenada no capacitor e no indutor. A tensão inicial V_o no capacitor e pela corrente inicial I_o no indutor determinam o estado do circuito em $t = 0$.

Figura 5.3: Circuito Elétrico RLC em série sem fonte



Fonte: (Alexander e Sadiku, 2013)

Portanto,

$$v(0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i dt = V_o \quad (5.11)$$

e $i(0) = I_o$.

Aplicando a Lei LKT no circuito da Figura 5.3,

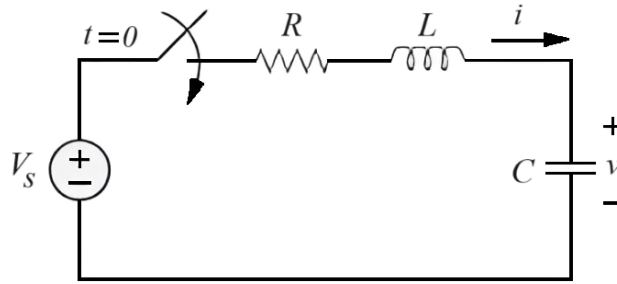
$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = 0. \quad (5.12)$$

Para eliminar a integral, a abordagem consiste em diferenciar em relação a t e reorganizar os termos, obtendo

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0. \quad (5.13)$$

Agora, considerando o circuito RLC como apresentado na Figura 5.4

Figura 5.4: Circuito Elétrico RLC em série



Fonte: (Alexander e Sadiku, 2013)

e aplicando a Lei LKT no circuito para $t > 0$, tem-se

$$RiL + \frac{di}{dt} + v = V_s. \quad (5.14)$$

Porém, se $i = C \frac{dv}{dt}$, ao substituir i na Eq. (5.14) e reorganizar os termos, têm-se

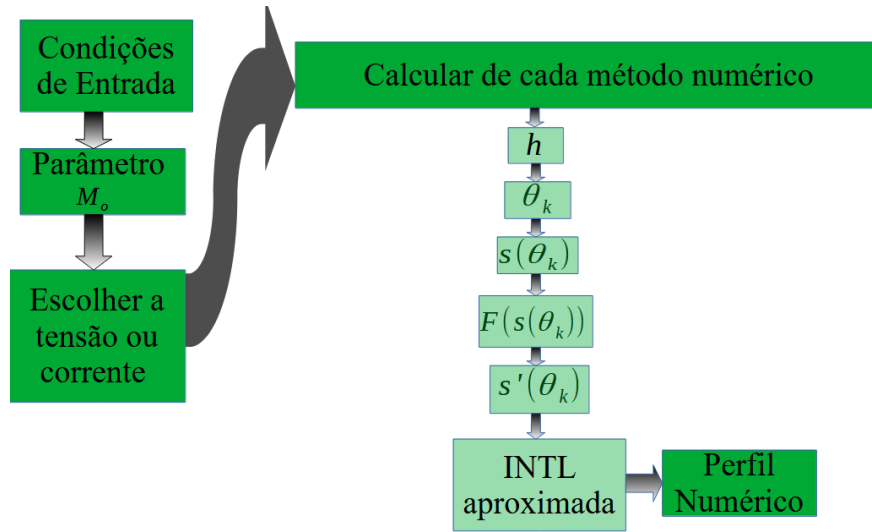
$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = \frac{V_s}{LC}, \quad (5.15)$$

cujos o formato é o mesmo da Eq. (5.13).

Estes são apenas alguns exemplos, mas servem para chamar a atenção do quão importante é a compreensão dos fenômenos envolvidos quando se projeta um circuito elétrico. E nesse sentido, a matemática desempenha um papel significativo, seja na modelagem matemática do problema, seja na interpretação dos resultados para fazer previsões ou proporcionar tomada de decisões mais assertivas.

Assim, nessa etapa do trabalho, são descritas as soluções de três circuitos elétricos: um proposto por Brančík (2011) e dois descritos por Alexander e Sadiku (2013). As respectivas soluções para as tensões e correntes são obtidas por meio da Transformada de Laplace, assim como os resultados da inversão numérica, gerados através dos cinco métodos numéricos para inversão da TL. A estrutura do algoritmo para a obtenção da solução para os circuitos elétricos está representada na Figura 5.5, onde a sigla INTL significa (Inversa Numérica da Transformada de Laplace).

Figura 5.5: Fluxograma do algoritmo dos circuitos elétricos.

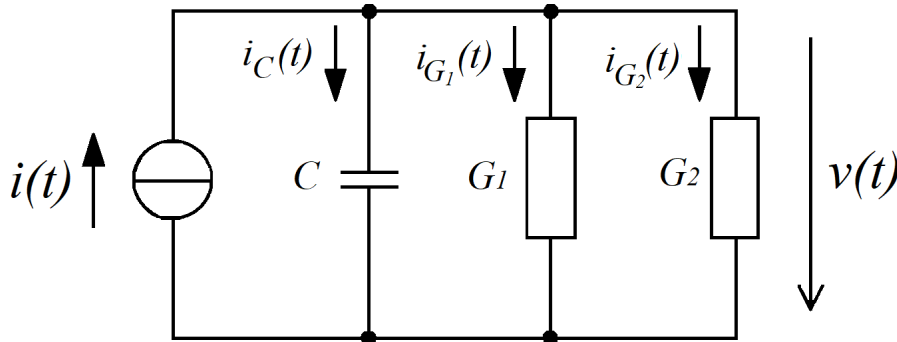


Fonte: (Brančík, 2011)

5.2 Circuito elétrico 1

O primeiro circuito a ser analisado, proposto por Brančík (2011) e ilustrado na Figura 5.6, é aquele cujos parâmetros são $C = 1\text{mF}$, $G_1 = G_2 = 10\text{mS}$, $I_0 = 1\text{mA}$ e $v(0) = 0\text{v}$.

Figura 5.6: Circuito Elétrico 1.



Fonte: (Brančík, 2011)

No diagrama da Figura 5.6, G_1 , G_2 representam a condutância (inverso da resistência) em cada uma das malhas do circuito, $G = G_1 + G_2$ indica a condutância equivalente, C é a capacitância.

Aplicando a Lei LKC no nó onde o capacitor e as resistências estão conectadas, obtêm-se

$$C \frac{dv(t)}{dt} + Gv(t) = i(t) \quad (5.16)$$

representando a relação entre a tensão $v(t)$ e a corrente $i(t)$ no circuito elétrico.

Utilizando a Transformada de Laplace na Eq. (5.16) chega-se a solução (Brančík, 2011) dada por

$$V(s) = \frac{I(s) + Gv(0)}{G + sC}, \quad (5.17)$$

onde $V(s)$ e $I(s)$ são as versões de $v(t)$ e $i(t)$ no espaço de Laplace, s é o parâmetro da transformada e $v(0)$ é condição inicial para a tensão.

Nas simulações, para a obtenção dos resultados numéricos, a literatura propõe o estudo de quatro casos:

Caso I:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= I_0 \quad I_1(s) = \frac{I_0}{s}; \\ v_1(t) &= \frac{1 - e^{-20t}}{20} ; V_1(s) = \frac{1}{s(s + 20)}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Caso II:

$$\begin{aligned} i_2(t) &= I_0 e^{-5t} ; I_2(s) = \frac{I_0}{s + 5}; \\ v_2(t) &= \frac{e^{-5t} - e^{-20t}}{15} ; V_2(s) = \frac{1}{(s + 5)(s + 20)}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Caso III:

$$\begin{aligned} i_3(t) &= I_0 \sin(2\pi t) ; I_3(s) = \frac{2\pi I_0}{s^2 + 4\pi^2}; \\ v_3(t) &= \frac{-\pi \cos(2\pi t) + 10 \sin(2\pi t) + \pi e^{-20t}}{2\pi^2 + 200} ; V_3(s) = \frac{2\pi}{(s^2 + 4\pi^2)(s + 20)}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Caso IV:

$$\begin{aligned} i_4(t) &= I_0 \cos(2\pi t) ; I_4(s) = \frac{s I_0}{s^2 + 4\pi^2}; \\ v_4(t) &= \frac{5(\cos(2\pi t) - e^{-20t})}{\pi^2 + 100} + \frac{\pi \sin(2\pi t)}{2(\pi^2 + 100)} ; V_4(s) = \frac{s}{(s^2 + 4\pi^2)(s + 20)}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

5.2.1 Tensão $V_1(s)$

A Tabela 5.1 mostra o erro absoluto médio de acordo com M_o obtido durante a simulação da tensão $V_1(s) = \frac{1}{s(s + 20)}$ e sua inversa $\mathcal{L}^{-1}\{V_1(s)\} = v_1(t) = \frac{1 - e^{-20t}}{20}$. E os resultados presentes na Tabela 5.2 apresentam o comportamento dos perfis numéricos de cada método estudado em comparação ao analítico. As Figuras 5.7 e 5.8 exibem graficamente as soluções das tabelas já mencionadas.

Tabela 5.1: M_o obtidos para a tensão $V_1(s)$.

Métodos	M_o	Erro Absoluto Médio
Talbot-Fixo	19	$1,647425488324952 \times 10^{-15}$
Talbot-DW	40	$4,591888399716069 \times 10^{-16}$
Talbot-Weideman	20	$5,616906482228881 \times 10^{-17}$
Talbot-Parábola	36	$3,729409063765480 \times 10^{-17}$
Talbot-Hipérbole	30	$4,776797644303408 \times 10^{-16}$

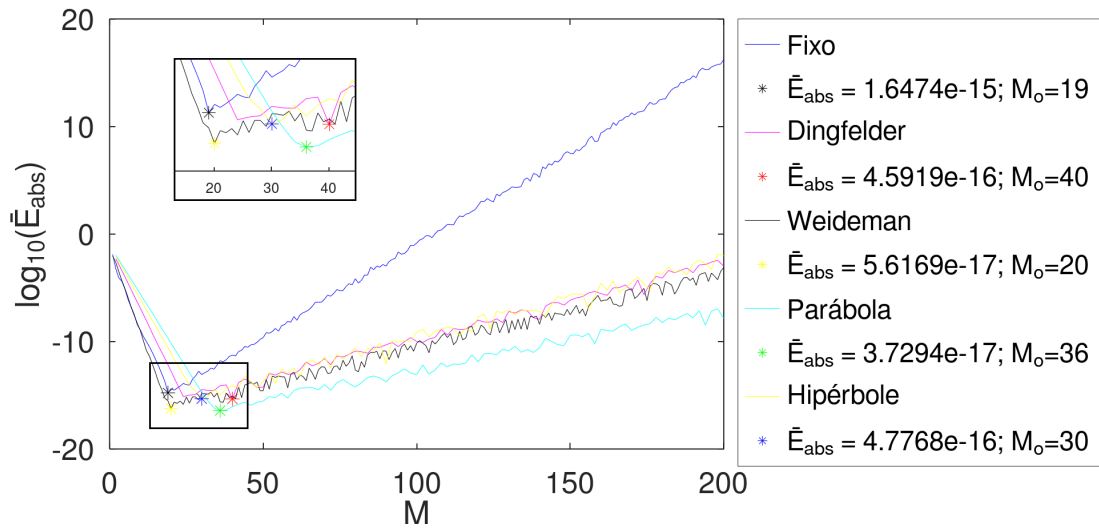
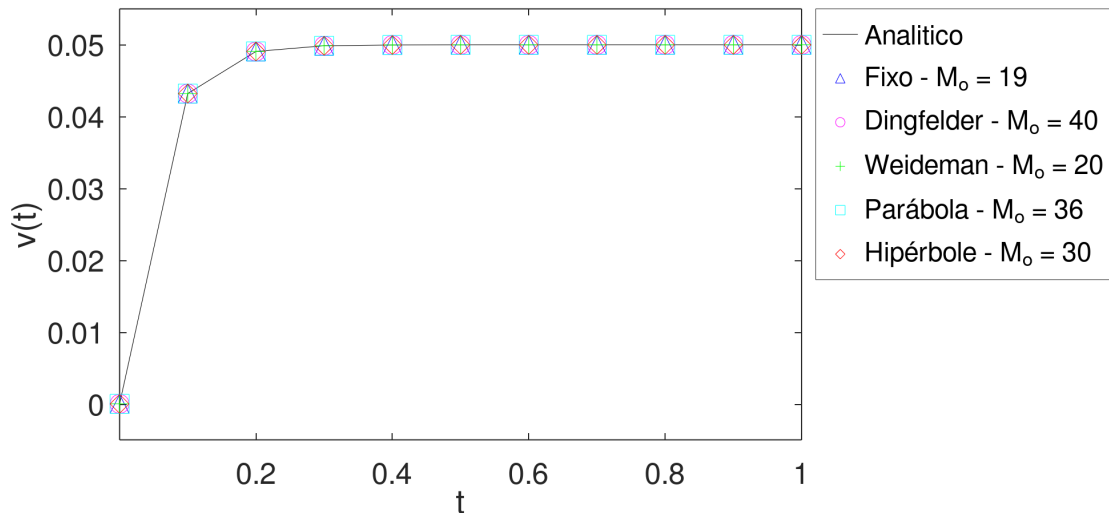
Figura 5.7: $\bar{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica para $V_1(s)$.Figura 5.8: Representação gráfica dos resultados tabelados para $V_1(s)$.

Tabela 5.2: Simulações para $V_1(s)$.

		TF - $M = 20$	TDW - $M = 40$	TW - $M = 20$	TP - $M = 36$	TH - $M = 30$
t	v_a	v_{TF}	v_{TDW}	v_{TW}	v_{TP}	v_{TH}
10^{-4}	$9,990006663334466 \times 10^{-5}$	$9,990006663334889 \times 10^{-5}$	$9,990006662866012 \times 10^{-5}$	$9,990006663334496 \times 10^{-5}$	$9,990006663334660 \times 10^{-5}$	$9,990006663346855 \times 10^{-5}$
0,1	$4,323323583816937 \times 10^{-2}$	$4,323323583816985 \times 10^{-2}$	$4,323323583385270 \times 10^{-2}$	$4,323323583816938 \times 10^{-2}$	$4,323323583816976 \times 10^{-2}$	$4,323323583827660 \times 10^{-2}$
0,2	$4,908421805556330 \times 10^{-2}$	$4,908421805556407 \times 10^{-2}$	$4,908421804799746 \times 10^{-2}$	$4,908421805556332 \times 10^{-2}$	$4,908421805556366 \times 10^{-2}$	$4,908421805575150 \times 10^{-2}$
0,3	$4,987606239116669 \times 10^{-2}$	$4,987606239116729 \times 10^{-2}$	$4,987606238055234 \times 10^{-2}$	$4,987606239116677 \times 10^{-2}$	$4,987606239116776 \times 10^{-2}$	$4,987606239142540 \times 10^{-2}$
0,4	$4,998322686860487 \times 10^{-2}$	$4,998322686860601 \times 10^{-2}$	$4,998322685605096 \times 10^{-2}$	$4,998322686860492 \times 10^{-2}$	$4,998322686860809 \times 10^{-2}$	$4,998322686890847 \times 10^{-2}$
0,5	$4,999773000351188 \times 10^{-2}$	$4,999773000351340 \times 10^{-2}$	$4,999772998925448 \times 10^{-2}$	$4,999773000351193 \times 10^{-2}$	$4,999773000351843 \times 10^{-2}$	$4,999773000388218 \times 10^{-2}$
0,6	$4,999969278938234 \times 10^{-2}$	$4,999969278938672 \times 10^{-2}$	$4,999969277467713 \times 10^{-2}$	$4,999969278938241 \times 10^{-2}$	$4,999969278938893 \times 10^{-2}$	$4,999969278979214 \times 10^{-2}$
0,7	$4,999995842356405 \times 10^{-2}$	$4,999995842356801 \times 10^{-2}$	$4,999995840555863 \times 10^{-2}$	$4,999995842356411 \times 10^{-2}$	$4,999995842356547 \times 10^{-2}$	$4,999995842399164 \times 10^{-2}$
0,8	$4,999999437324127 \times 10^{-2}$	$4,999999437324365 \times 10^{-2}$	$4,999999435475455 \times 10^{-2}$	$4,999999437324137 \times 10^{-2}$	$4,999999437324713 \times 10^{-2}$	$4,999999437371801 \times 10^{-2}$
0,9	$4,999999923850101 \times 10^{-2}$	$4,999999923850298 \times 10^{-2}$	$4,999999921765770 \times 10^{-2}$	$4,999999923850108 \times 10^{-2}$	$4,999999923850230 \times 10^{-2}$	$4,999999923901081 \times 10^{-2}$
1	$4,999999989694232 \times 10^{-2}$	$4,999999989694323 \times 10^{-2}$	$4,999999987629920 \times 10^{-2}$	$4,999999989694243 \times 10^{-2}$	$4,999999989694751 \times 10^{-2}$	$4,999999989747039 \times 10^{-2}$

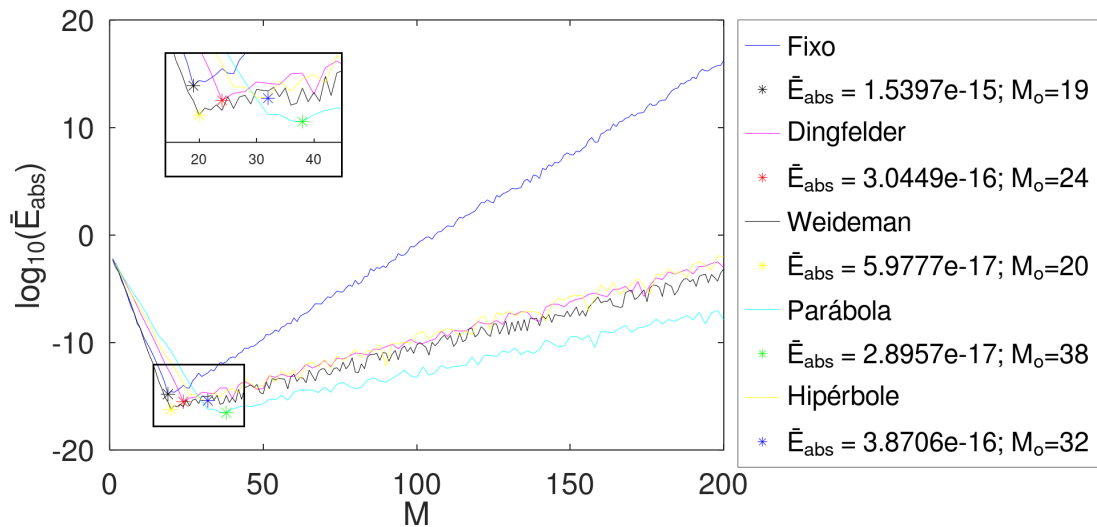
5.2.2 Tensão $V_2(s)$

Os valores de M ótimo e $\bar{E}_{abs}$ obtidos para cada método numérico aplicado à tensão $V_2(s) = \frac{1}{(s+5)(s+20)}$ e sua inversa transformada $\mathcal{L}^{-1}\{V_2(s)\} = v_2(t) = \frac{e^{-5t} - e^{-20t}}{15}$ estão registrados na Tabela 5.3 e podem ser visualizados por meio de uma representação gráfica na Figura 5.9.

Tabela 5.3: M_o obtidos para a tensão $V_2(s)$.

Métodos	M_o	Erro Absoluto Médio
Talbot-Fixo	19	$1,539717394776056 \times 10^{-15}$
Talbot-DW	24	$3,044940187636331 \times 10^{-16}$
Talbot-Weideman	20	$5,977650114164967 \times 10^{-17}$
Talbot-Parábola	38	$2,895682234082592 \times 10^{-17}$
Talbot-Hipérbole	32	$3,870638717210949 \times 10^{-16}$

Figura 5.9: $\bar{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica para $V_2(s)$.

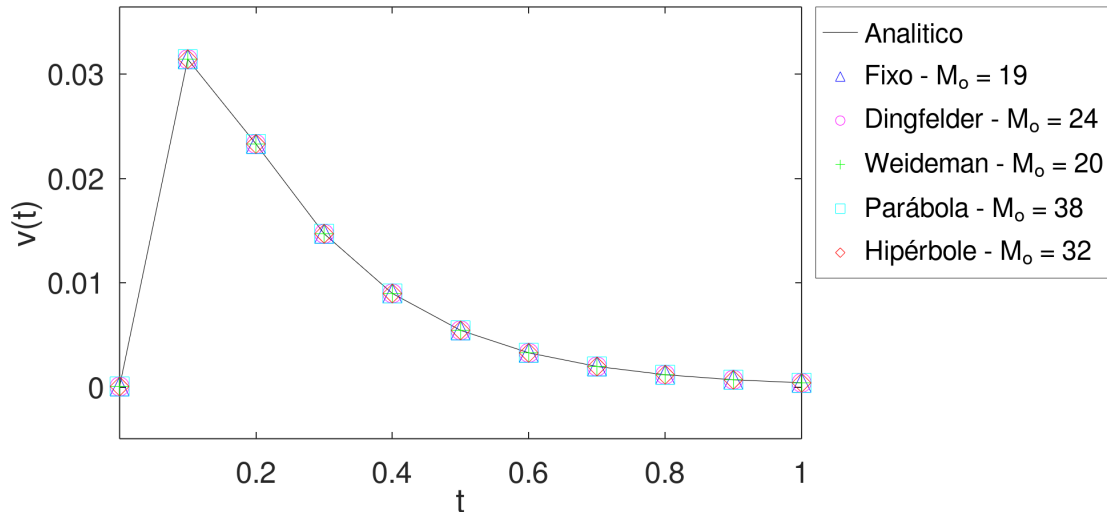


A Tabela 5.4 fornece os perfis numéricos e o perfil analítico, os quais são esboçados graficamente na Figura 5.10.

Tabela 5.4: Simulações para $V_2(s)$.

		TF - $M = 19$	TDW - $M = 24$	TW - $M = 20$	TP - $M = 38$	TH - $M = 32$
t	v_a	v_{TF}	v_{TDW}	v_{TW}	v_{TP}	v_{TH}
10^{-4}	$9,987508745575024 \times 10^{-5}$	$9,987508745574908 \times 10^{-5}$	$9,987508745574554 \times 10^{-5}$	$9,987508745574528 \times 10^{-5}$	$9,987508745575974 \times 10^{-5}$	$9,987508745519914 \times 10^{-5}$
0,1	$3,141302509840138 \times 10^{-2}$	$3,141302509840177 \times 10^{-2}$	$3,141302509840241 \times 10^{-2}$	$3,141302509840142 \times 10^{-2}$	$3,141302509841345 \times 10^{-2}$	$3,141302509796091 \times 10^{-2}$
0,2	$2,330425348551388 \times 10^{-2}$	$2,330425348551468 \times 10^{-2}$	$2,330425348551551 \times 10^{-2}$	$2,330425348551392 \times 10^{-2}$	$2,330425348552590 \times 10^{-2}$	$2,330425348478454 \times 10^{-2}$
0,3	$1,471009386478423 \times 10^{-2}$	$1,471009386478498 \times 10^{-2}$	$1,471009386478881 \times 10^{-2}$	$1,471009386478428 \times 10^{-2}$	$1,471009386480654 \times 10^{-2}$	$1,471009386388381 \times 10^{-2}$
0,4	$8,999988040580680 \times 10^{-3}$	$8,999988040582663 \times 10^{-3}$	$8,999988040583860 \times 10^{-3}$	$8,999988040580704 \times 10^{-3}$	$8,999988040609450 \times 10^{-3}$	$8,999988039567419 \times 10^{-3}$
0,5	$5,469306579609087 \times 10^{-3}$	$5,469306579610488 \times 10^{-3}$	$5,469306579614123 \times 10^{-3}$	$5,469306579609220 \times 10^{-3}$	$5,469306579632661 \times 10^{-3}$	$5,469306578518492 \times 10^{-3}$
0,6	$3,318728277034041 \times 10^{-3}$	$3,318728277037201 \times 10^{-3}$	$3,318728277039606 \times 10^{-3}$	$3,318728277034117 \times 10^{-3}$	$3,318728277056546 \times 10^{-3}$	$3,318728275939114 \times 10^{-3}$
0,7	$2,013103459573293 \times 10^{-3}$	$2,013103459576980 \times 10^{-3}$	$2,013103459578496 \times 10^{-3}$	$2,013103459573355 \times 10^{-3}$	$2,013103459598398 \times 10^{-3}$	$2,013103458453061 \times 10^{-3}$
0,8	$1,221035090237297 \times 10^{-3}$	$1,221035090238853 \times 10^{-3}$	$1,221035090241303 \times 10^{-3}$	$1,221035090237357 \times 10^{-3}$	$1,221035090256149 \times 10^{-3}$	$1,221035089077067 \times 10^{-3}$
0,9	$7,405987538841708 \times 10^{-4}$	$7,405987538857931 \times 10^{-4}$	$7,405987538916092 \times 10^{-4}$	$7,405987538842481 \times 10^{-4}$	$7,405987539145265 \times 10^{-4}$	$7,405987527350207 \times 10^{-4}$
1	$4,491963291954563 \times 10^{-4}$	$4,491963291970435 \times 10^{-4}$	$4,491963292007877 \times 10^{-4}$	$4,491963291955439 \times 10^{-4}$	$4,491963292194802 \times 10^{-4}$	$4,491963280604641 \times 10^{-4}$

Figura 5.10: Representação gráfica dos resultados tabelados para $V_2(s)$.



Fonte: Autor

5.2.3 Tensão $V_3(s)$

Na Tabela 5.5, apresenta-se o erro absoluto médio e o M_o obtidos para os algoritmos Talbot-Fixo, Talbot-DW, Talbot-Weideman, Talbot-Parábola e Talbot-Hipérbole aplicados na tensão

$$V_3(s) = \frac{2\pi}{(s^2 + 4\pi^2)(s + 20)}, \text{ cuja transformada inversa é } \mathcal{L}^{-1}\{V_3(s)\} = v_3(t) = \frac{-\pi \cos(2\pi t) + 10\sin(2\pi t) + 20\pi}{2\pi^2 + 200}$$

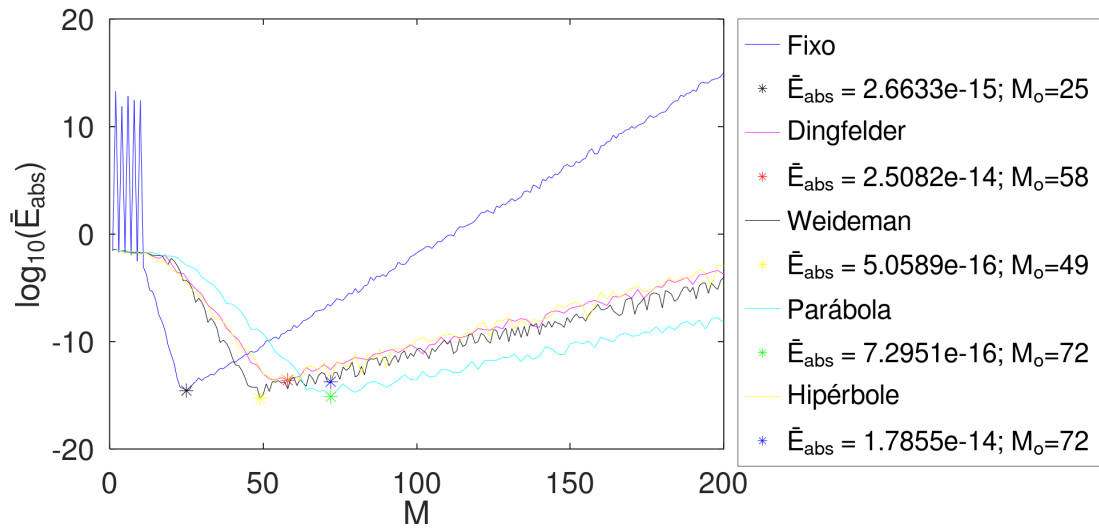
Já a Tabela 5.6 exibe os perfis analíticos e numéricos de acordo com os M ótimos obtidos na análise da $V_3(s)$.

Tabela 5.5: M_o obtidos para a tensão $V_3(s)$.

Métodos	M_o	Erro Absoluto Médio
Talbot-Fixo	25	$2,663251525322909 \times 10^{-15}$
Talbot-DW	58	$2,508162088543537 \times 10^{-14}$
Talbot-Weideman	49	$5,058863808792813 \times 10^{-16}$
Talbot-Parábola	72	$7,295080065445238 \times 10^{-16}$
Talbot-Hipérbole	72	$1,785501365529222 \times 10^{-14}$

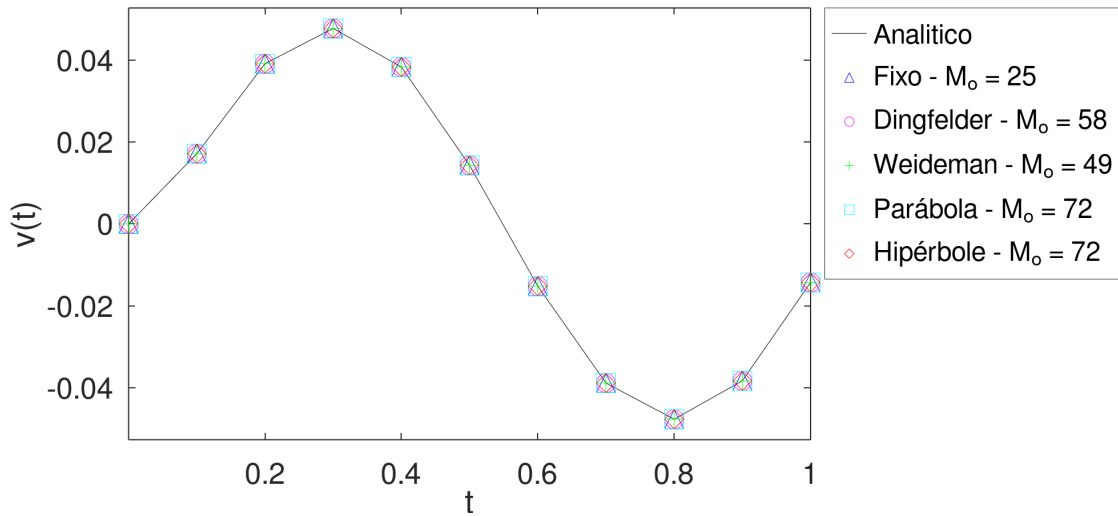
As Figuras 5.11 e 5.12 ilustram os resultados das Tabelas 5.5 e 5.6.

Figura 5.11: $\overline{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica para $V_3(s)$.



Fonte: Autor

Figura 5.12: Representação gráfica dos resultados tabelados para $V_3(s)$.



Fonte: Autor

Tabela 5.6: Simulações para $V_3(s)$

		TF - $M = 25$	TDW - $M = 58$	TW - $M = 49$	TP - $M = 72$	TH - $M = 72$
t	v_a	v_{TF}	v_{TDW}	v_{TW}	v_{TP}	v_{TH}
10^{-4}	$3,139499202102491 \times 10^{-8}$	$3,139499201953347 \times 10^{-8}$	$3,139499200332794 \times 10^{-8}$	$3,139499201953291 \times 10^{-8}$	$3,139499202052008 \times 10^{-8}$	$3,139499089883780 \times 10^{-8}$
0,1	$1,711765064076923 \times 10^{-2}$	$1,711765064076920 \times 10^{-2}$	$1,711765062970717 \times 10^{-2}$	$1,711765064076923 \times 10^{-2}$	$1,711765064161261 \times 10^{-2}$	$1,711764962150118 \times 10^{-2}$
0,2	$3,91250153626757 \times 10^{-2}$	$3,912501536267554 \times 10^{-2}$	$3,912501532129940 \times 10^{-2}$	$3,912501536267587 \times 10^{-2}$	$3,912501536569588 \times 10^{-2}$	$3,912501143149569 \times 10^{-2}$
0,3	$4,773457576879449 \times 10^{-2}$	$4,773457576879339 \times 10^{-2}$	$4,773457566788787 \times 10^{-2}$	$4,773457576879442 \times 10^{-2}$	$4,773457577269641 \times 10^{-2}$	$4,773456562951869 \times 10^{-2}$
0,4	$3,832046316135750 \times 10^{-2}$	$3,832046316135740 \times 10^{-2}$	$3,832046302622364 \times 10^{-2}$	$3,832046316135747 \times 10^{-2}$	$3,832046317584842 \times 10^{-2}$	$3,832044813949104 \times 10^{-2}$
0,5	$1,429756345625132 \times 10^{-2}$	$1,429756345625606 \times 10^{-2}$	$1,429756320745659 \times 10^{-2}$	$1,429756345625033 \times 10^{-2}$	$1,429756347630271 \times 10^{-2}$	$1,429754157430771 \times 10^{-2}$
0,6	$-1,518268584082401 \times 10^{-2}$	$-1,518268584082172 \times 10^{-2}$	$-1,518268622281059 \times 10^{-2}$	$-1,518268584082341 \times 10^{-2}$	$-1,518268581716576 \times 10^{-2}$	$-1,518271590271161 \times 10^{-2}$
0,7	$-3,886314635342227 \times 10^{-2}$	$-3,886314635341698 \times 10^{-2}$	$-3,886314678460429 \times 10^{-2}$	$-3,886314635342051 \times 10^{-2}$	$-3,886314632902420 \times 10^{-2}$	$-3,886319356598106 \times 10^{-2}$
0,8	$-4,769913565225628 \times 10^{-2}$	$-4,769913565225625 \times 10^{-2}$	$-4,769913600394139 \times 10^{-2}$	$-4,769913565225729 \times 10^{-2}$	$-4,769913561128500 \times 10^{-2}$	$-4,769918905125758 \times 10^{-2}$
0,9	$-3,831566686314788 \times 10^{-2}$	$-3,831566686314463 \times 10^{-2}$	$-3,831566755600918 \times 10^{-2}$	$-3,831566686314808 \times 10^{-2}$	$-3,831566682562983 \times 10^{-2}$	$-3,831573123445407 \times 10^{-2}$
1	$-1,429691434787464 \times 10^{-2}$	$-1,429691434786236 \times 10^{-2}$	$-1,429691500050461 \times 10^{-2}$	$-1,429691434787539 \times 10^{-2}$	$-1,429691429369255 \times 10^{-2}$	$-1,429699312363848 \times 10^{-2}$

5.2.4 Tensão $V_4(s)$

Para a tensão $V_4(s) = \frac{s}{(s^2 + 4\pi^2)(s + 20)}$ e sua transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}\{V_4(s)\} = v_4(t) = \frac{5(\cos(2\pi t) - e^{-20t})}{\pi^2 + 100} + \frac{\pi \sin(2\pi t)}{2(\pi^2 + 100)}$, a Tabela 5.7 apresenta o M_o e erro absoluto médio adquiridos para os métodos numéricos estudados. Além disso, a Tabela 5.8 exibe os perfis numéricos de acordo com os M ótimos obtidos na análise da $V_4(s)$. Essas soluções podem ser visualizadas graficamente nas Figuras 5.13 e 5.14.

Tabela 5.7: M_o obtidos para a tensão $V_4(s)$.

Métodos	M_o	Erro Absoluto Médio
Talbot-Fixo	26	$5,944739650038338 \times 10^{-15}$
Talbot-DW	50	$5,191055812003132 \times 10^{-14}$
Talbot-Weideman	50	$1,903161675759970 \times 10^{-15}$
Talbot-Parábola	68	$2,263419880814284 \times 10^{-15}$
Talbot-Hipérbole	54	$2,812127208021658 \times 10^{-14}$

Figura 5.13: $\bar{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica para $V_4(s)$.

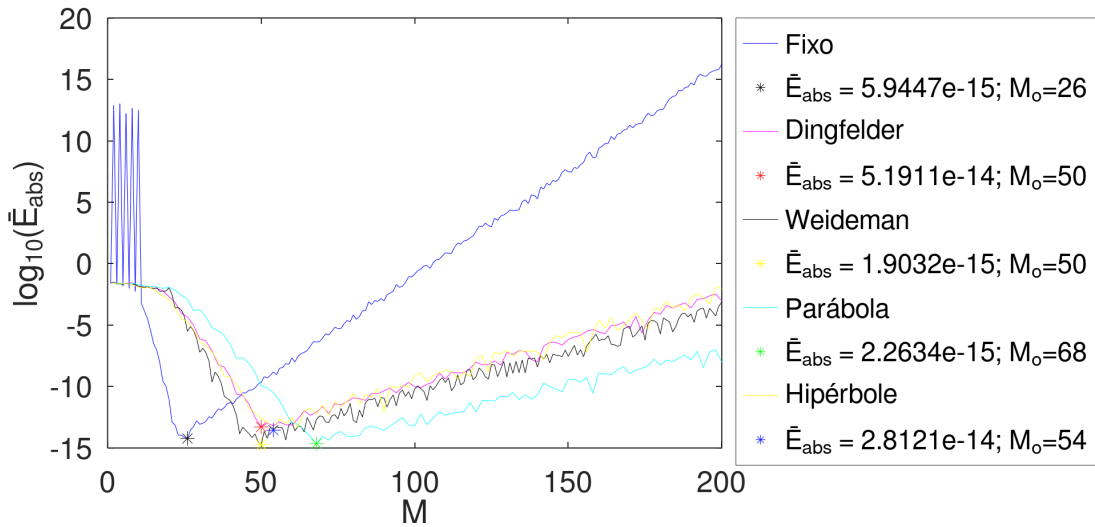
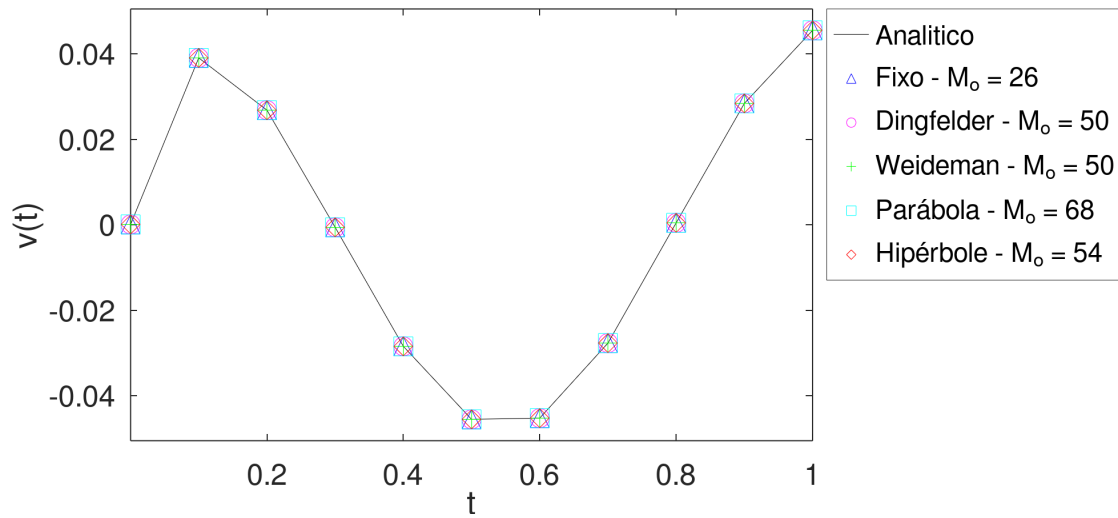


Tabela 5.8: Simulações para $V_4(s)$.

		TF - $M = 26$	TDW - $M = 50$	TW - $M = 50$	TP - $M = 68$	TH - $M = 54$
t	v_a	v_{TF}	v_{TDW}	v_{TW}	v_{TP}	v_{TH}
10^{-4}	$9,990006005690388 \times 10^{-5}$	$9,990006005690144 \times 10^{-5}$	$9,990006008616012 \times 10^{-5}$	$9,990006005689686 \times 10^{-5}$	$9,990006006677836 \times 10^{-5}$	$9,990006054626629 \times 10^{-5}$
0,1	$3,906175410689246 \times 10^{-2}$	$3,906175410688650 \times 10^{-2}$	$3,906175413243576 \times 10^{-2}$	$3,906175410689196 \times 10^{-2}$	$3,906175411709413 \times 10^{-2}$	$3,906175455538398 \times 10^{-2}$
0,2	$2,682655385780765 \times 10^{-2}$	$2,682655385780741 \times 10^{-2}$	$2,682655390367182 \times 10^{-2}$	$2,682655385780678 \times 10^{-2}$	$2,682655387672019 \times 10^{-2}$	$2,682655467795000 \times 10^{-2}$
0,3	$-5,785280718336824 \times 10^{-4}$	$-5,785280718223854 \times 10^{-4}$	$-5,785280550457731 \times 10^{-4}$	$-5,785280718334355 \times 10^{-4}$	$-5,785280600712943 \times 10^{-4}$	$-5,785269786940805 \times 10^{-4}$
0,4	$-2,842889429515458 \times 10^{-2}$	$-2,842889429515161 \times 10^{-2}$	$-2,842889421684398 \times 10^{-2}$	$-2,842889429515581 \times 10^{-2}$	$-2,842889427079528 \times 10^{-2}$	$-2,842889295268721 \times 10^{-2}$
0,5	$-4,551055796464882 \times 10^{-2}$	$-4,551055796464425 \times 10^{-2}$	$-4,551055788894390 \times 10^{-2}$	$-4,551055796464409 \times 10^{-2}$	$-4,551055793976475 \times 10^{-2}$	$-4,551055650022087 \times 10^{-2}$
0,6	$-4,522093835929450 \times 10^{-2}$	$-4,522093835928823 \times 10^{-2}$	$-4,522093826359756 \times 10^{-2}$	$-4,522093835929044 \times 10^{-2}$	$-4,522093833982483 \times 10^{-2}$	$-4,522093671128296 \times 10^{-2}$
0,7	$-2,766010880311297 \times 10^{-2}$	$-2,766010880309823 \times 10^{-2}$	$-2,766010874626429 \times 10^{-2}$	$-2,766010880310877 \times 10^{-2}$	$-2,766010877219229 \times 10^{-2}$	$-2,766010701310072 \times 10^{-2}$
0,8	$4,657186772174914 \times 10^{-4}$	$4,657186772156763 \times 10^{-4}$	$4,657187895921335 \times 10^{-4}$	$4,657186772160798 \times 10^{-4}$	$4,657187196786608 \times 10^{-4}$	$4,657205731104621 \times 10^{-4}$
0,9	$2,841362720378245 \times 10^{-2}$	$2,841362720377560 \times 10^{-2}$	$2,841362733268669 \times 10^{-2}$	$2,841362720378319 \times 10^{-2}$	$2,841362723661882 \times 10^{-2}$	$2,841362906793446 \times 10^{-2}$
1	$4,550849178851377 \times 10^{-2}$	$4,550849178852445 \times 10^{-2}$	$4,550849189422634 \times 10^{-2}$	$4,550849178851672 \times 10^{-2}$	$4,550849181041516 \times 10^{-2}$	$4,550849366651612 \times 10^{-2}$

Figura 5.14: Representação gráfica dos resultados tabelados para $V_4(s)$.



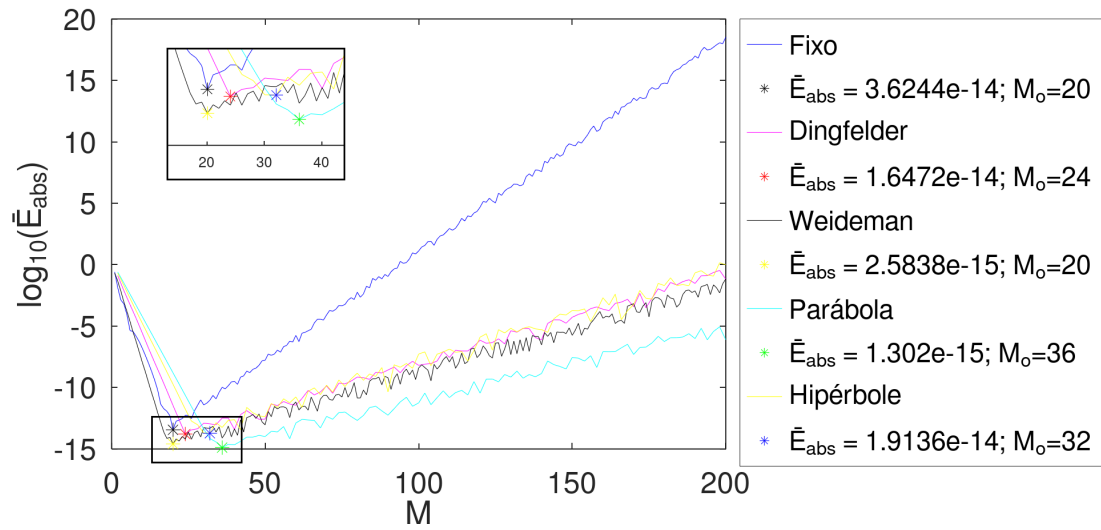
5.2.5 Corrente $I_1(s)$

A Tabela 5.9 exibe os valores de M_o e do erro absoluto médio obtidos para os métodos numéricos analisados na inversão da corrente $I_1(s) = \frac{I_0}{s}$, cuja transformada inversa é $\mathcal{L}^{-1}\{I_1(s)\} = i_1(t) = I_0$. Já a Tabela 5.10 apresenta os perfis numéricos de acordo com os M_o adquiridos para cada algoritmo na análise da $I_1(s)$. As Figuras 5.15 e 5.16 representam, graficamente, os resultados das Tabelas 5.9 e 5.10.

Tabela 5.9: M_o obtidos para a corrente $I_1(s)$.

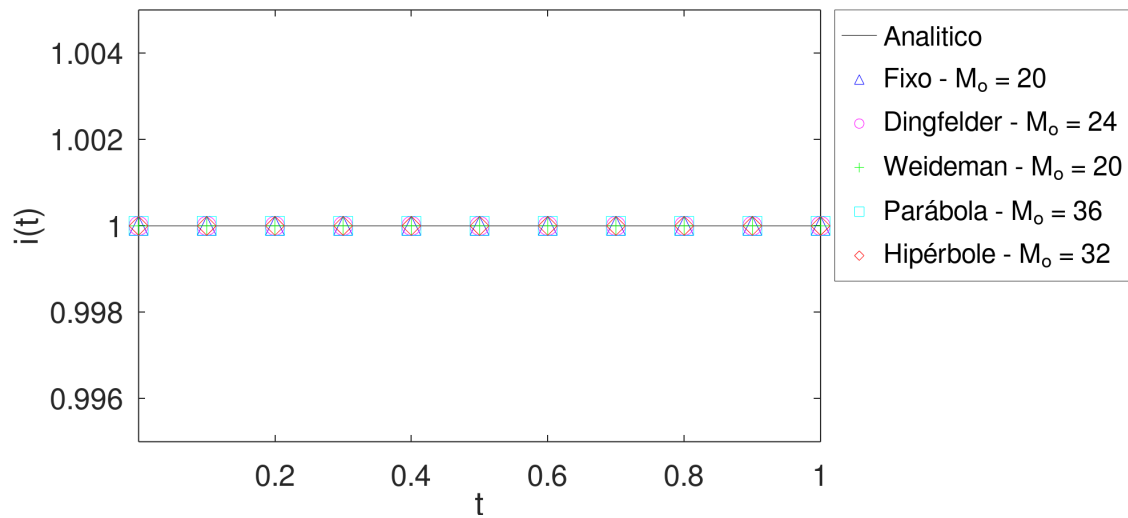
Métodos	M_o	Erro Absoluto Médio
Talbot-Fixo	20	$3.624373528571761 \times 10^{-14}$
Talbot-DW	24	$1.647208457900431 \times 10^{-14}$
Talbot-Weideman	20	$2.583791766400364 \times 10^{-15}$
Talbot-Parábola	36	$1.301988819787684 \times 10^{-15}$
Talbot-Hipérbole	32	$1.913620776990270 \times 10^{-14}$

Figura 5.15: $\bar{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica para $I_1(s)$.



Fonte: Autor

Figura 5.16: Representação gráfica dos resultados tabelados para $I_1(s)$.



Fonte: Autor

Tabela 5.10: Simulações para $I_1(s)$.

		TF - $M = 20$	TDW - $M = 24$	TW - $M = 20$	TP - $M = 36$	TH - $M = 32$
t	i_a	i_{TF}	i_{TDW}	i_{TW}	i_{TP}	i_{TH}
10^{-4}	$1,000000000000000 \times 10^0$	$9,99999999999454 \times 10^{-1}$	$1,000000000000149 \times 10^0$	$1,000000000000002 \times 10^0$	$1,0000000000000310 \times 10^0$	$9,99999999517678 \times 10^{-1}$
0,1	$1,000000000000000 \times 10^0$	$9,99999999999716 \times 10^{-1}$	$1,000000000000183 \times 10^0$	$1,000000000000002 \times 10^0$	$1,0000000000000311 \times 10^0$	$9,99999999514132 \times 10^{-1}$
0,2	$1,000000000000000 \times 10^0$	$9,99999999999716 \times 10^{-1}$	$1,000000000000183 \times 10^0$	$1,000000000000002 \times 10^0$	$1,0000000000000311 \times 10^0$	$9,99999999514132 \times 10^{-1}$
0,3	$1,000000000000000 \times 10^0$	$1,000000000000019 \times 10^0$	$1,000000000000314 \times 10^0$	$1,000000000000002 \times 10^0$	$1,0000000000000337 \times 10^0$	$9,99999999511252 \times 10^{-1}$
0,4	$1,000000000000000 \times 10^0$	$9,99999999999716 \times 10^{-1}$	$1,000000000000183 \times 10^0$	$1,000000000000002 \times 10^0$	$1,0000000000000311 \times 10^0$	$9,99999999514132 \times 10^{-1}$
0,5	$1,000000000000000 \times 10^0$	$1,000000000000011 \times 10^0$	$1,000000000000316 \times 10^0$	$1,000000000000002 \times 10^0$	$1,0000000000000175 \times 10^0$	$9,99999999517130 \times 10^{-1}$
0,6	$1,000000000000000 \times 10^0$	$9,99999999999717 \times 10^{-1}$	$1,000000000000239 \times 10^0$	$1,000000000000003 \times 10^0$	$1,0000000000000151 \times 10^0$	$9,99999999513415 \times 10^{-1}$
0,7	$1,000000000000000 \times 10^0$	$1,000000000000097 \times 10^0$	$1,000000000000175 \times 10^0$	$1,000000000000003 \times 10^0$	$1,0000000000000175 \times 10^0$	$9,99999999529513 \times 10^{-1}$
0,8	$1,000000000000000 \times 10^0$	$9,99999999999716 \times 10^{-1}$	$1,000000000000183 \times 10^0$	$1,000000000000002 \times 10^0$	$1,0000000000000311 \times 10^0$	$9,99999999514132 \times 10^{-1}$
0,9	$1,000000000000000 \times 10^0$	$9,99999999999369 \times 10^{-1}$	$1,000000000000250 \times 10^0$	$1,000000000000003 \times 10^0$	$1,0000000000000358 \times 10^0$	$9,99999999513937 \times 10^{-1}$
1	$1,000000000000000 \times 10^0$	$1,000000000000011 \times 10^0$	$1,000000000000316 \times 10^0$	$1,000000000000002 \times 10^0$	$1,0000000000000175 \times 10^0$	$9,99999999517130 \times 10^{-1}$

5.2.6 Corrente $I_2(s)$

Os valores de M_o , erro absoluto médio, perfil analítico e perfis numéricos para cada algoritmo aplicado à na inversão da corrente $I_2(s) = \frac{I_0}{s+5}$ e sua transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}\{I_2(s)\} = i_2(t) = I_0 e^{-5t}$ são apresentados nas Tabelas 5.11 e 5.12 e podem ser visualizados graficamente nas Figuras 5.17 e 5.18.

Tabela 5.11: M_o obtidos para a corrente $I_2(s)$.

Métodos	M_o	Erro Absoluto Médio
Talbot-Fixo	20	$4,830857935900212 \times 10^{-14}$
Talbot-DW	24	$6,546737206983031 \times 10^{-15}$
Talbot-Weideman	20	$2,335253202933142 \times 10^{-15}$
Talbot-Parábola	36	$1,074109235898003 \times 10^{-15}$
Talbot-Hipérbole	32	$9,564476735865216 \times 10^{-15}$

Figura 5.17: $\bar{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica para $I_2(s)$.

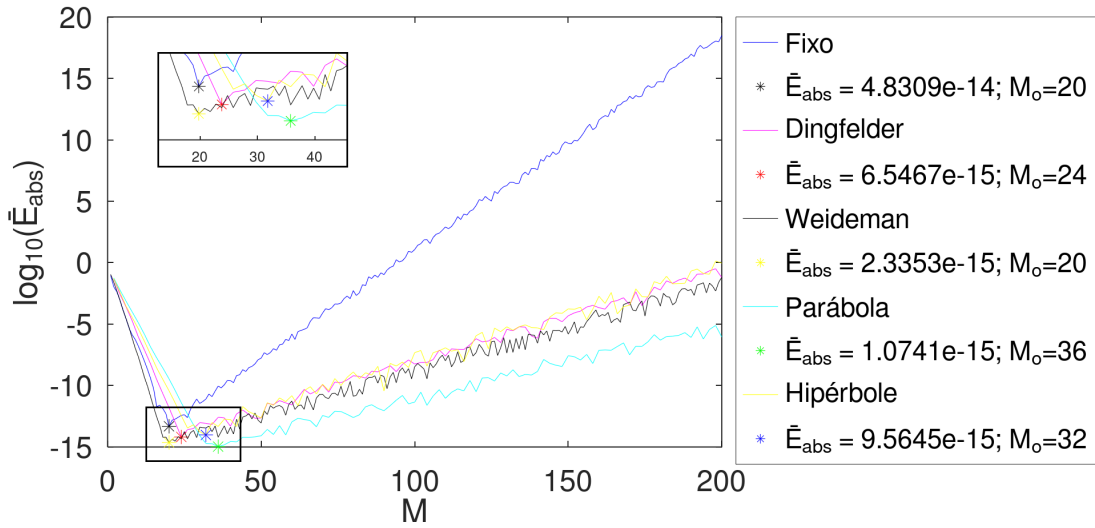
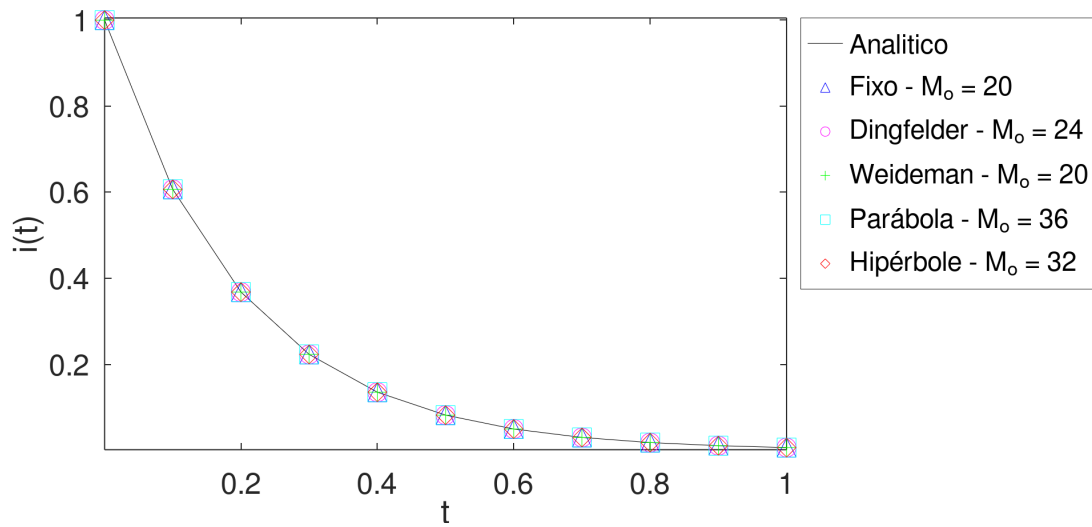


Tabela 5.12: Simulações para $I_2(s)$.

		TF - $M = 20$	TDW - $M = 24$	TW - $M = 20$	TP - $M = 36$	TH - $M = 32$
t	i_a	i_{TF}	i_{TDW}	i_{TW}	i_{TP}	i_{TH}
10^{-4}	$9,995001249791693 \times 10^{-1}$	$9,995001249791247 \times 10^{-1}$	$9,995001249793209 \times 10^{-1}$	$9,995001249791720 \times 10^{-1}$	$9,995001249794324 \times 10^{-1}$	$9,995001249305199 \times 10^{-1}$
0,1	$6,065306597126334 \times 10^{-1}$	$6,065306597125613 \times 10^{-1}$	$6,065306597127961 \times 10^{-1}$	$6,065306597126360 \times 10^{-1}$	$6,065306597128218 \times 10^{-1}$	$6,065306596675393 \times 10^{-1}$
0,2	$3,678794411714423 \times 10^{-1}$	$3,678794411714108 \times 10^{-1}$	$3,678794411716384 \times 10^{-1}$	$3,678794411714449 \times 10^{-1}$	$3,678794411717274 \times 10^{-1}$	$3,678794411282910 \times 10^{-1}$
0,3	$2,231301601484298 \times 10^{-1}$	$2,231301601484669 \times 10^{-1}$	$2,231301601487027 \times 10^{-1}$	$2,231301601484328 \times 10^{-1}$	$2,231301601487181 \times 10^{-1}$	$2,231301601078613 \times 10^{-1}$
0,4	$1,353352832366127 \times 10^{-1}$	$1,353352832365644 \times 10^{-1}$	$1,353352832367811 \times 10^{-1}$	$1,353352832366145 \times 10^{-1}$	$1,353352832368643 \times 10^{-1}$	$1,353352831968740 \times 10^{-1}$
0,5	$8,208499862389880 \times 10^{-2}$	$8,208499862392955 \times 10^{-2}$	$8,208499862415422 \times 10^{-2}$	$8,208499862390137 \times 10^{-2}$	$8,208499862414878 \times 10^{-2}$	$8,208499858703282 \times 10^{-2}$
0,6	$4,978706836786394 \times 10^{-2}$	$4,978706836788168 \times 10^{-2}$	$4,978706836807623 \times 10^{-2}$	$4,978706836786569 \times 10^{-2}$	$4,978706836810939 \times 10^{-2}$	$4,978706833183039 \times 10^{-2}$
0,7	$3,019738342231850 \times 10^{-2}$	$3,019738342244084 \times 10^{-2}$	$3,019738342248020 \times 10^{-2}$	$3,019738342232149 \times 10^{-2}$	$3,019738342272311 \times 10^{-2}$	$3,019738338873286 \times 10^{-2}$
0,8	$1,831563888873418 \times 10^{-2}$	$1,831563888875820 \times 10^{-2}$	$1,831563888889420 \times 10^{-2}$	$1,831563888873583 \times 10^{-2}$	$1,831563888896474 \times 10^{-2}$	$1,831563885616071 \times 10^{-2}$
0,9	$1,110899653824231 \times 10^{-2}$	$1,110899653824996 \times 10^{-2}$	$1,110899653846033 \times 10^{-2}$	$1,110899653824449 \times 10^{-2}$	$1,110899653850798 \times 10^{-2}$	$1,110899650727116 \times 10^{-2}$
1	$6,737946999085467 \times 10^{-3}$	$6,737946999180622 \times 10^{-3}$	$6,737946999303062 \times 10^{-3}$	$6,737946999087356 \times 10^{-3}$	$6,737946999271265 \times 10^{-3}$	$6,737946969016885 \times 10^{-3}$

Figura 5.18: Representação gráfica dos resultados tabelados para $I_2(s)$.



Fonte: Autor

5.2.7 Corrente $I_3(s)$

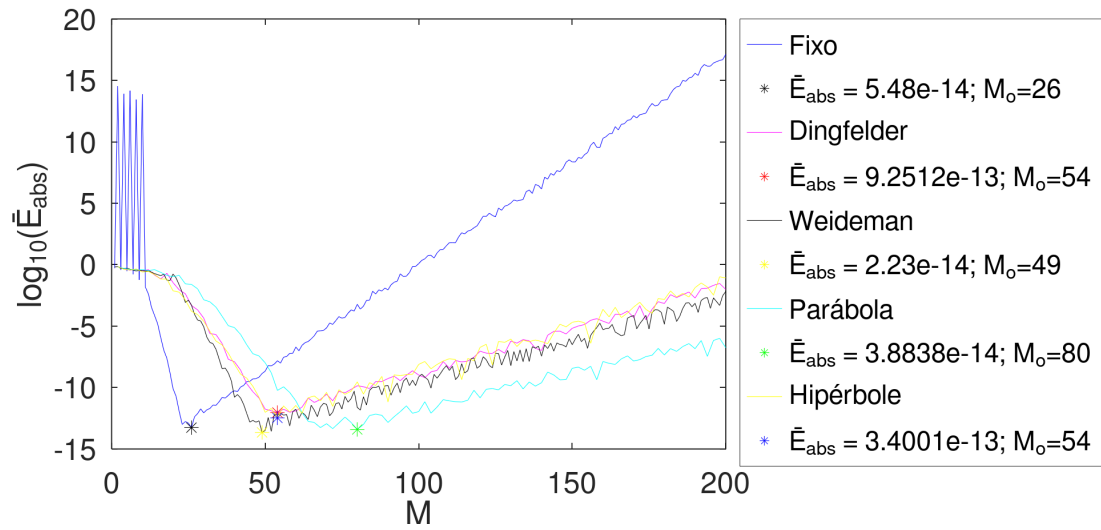
A Tabela 5.13 apresenta o M_o e o erro absoluto médio durante a análise da corrente $I_3(s) = \frac{2\pi I_0}{s^2 + 4\pi^2}$ e sua inversa $\mathcal{L}^{-1} = \{I_3(s)\} = i_3(t) = I_0 \text{sen}(2\pi t)$. Já a Tabela 5.14 exibe os resultados dos perfis analítico e dos perfis numéricos obtidos através dos M ótimos encontrados para cada método numérico implementado.

Tabela 5.13: M_o obtidos para a corrente $I_3(s)$.

Métodos	M_o	Erro Absoluto Médio
Talbot-Fixo	26	$5,480031970346451 \times 10^{-14}$
Talbot-DW	54	$9,251207584513225 \times 10^{-13}$
Talbot-Weideman	49	$2,230015931727949 \times 10^{-14}$
Talbot-Parábola	80	$3,883839812419043 \times 10^{-14}$
Talbot-Hipérbole	54	$3,400112616485751 \times 10^{-13}$

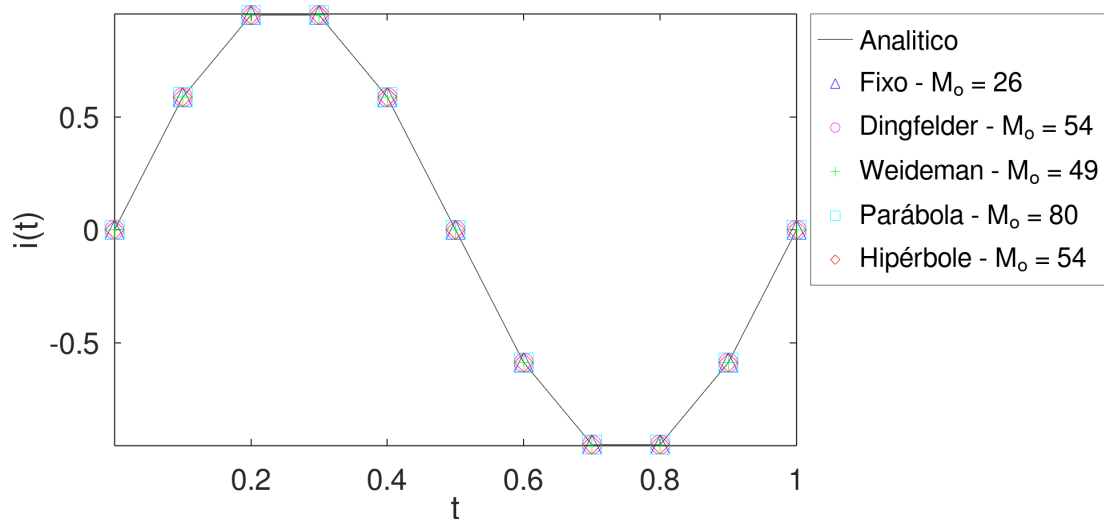
As Figuras 5.19 e 5.20 apresentam graficamente os resultados presentes nas Tabelas 5.13 e 5.14.

Figura 5.19: $\bar{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica para $I_3(s)$.



Fonte: Autor

Figura 5.20: Representação gráfica dos resultados tabelados para $I_3(s)$.



Fonte: Autor

Tabela 5.14: Simulações para $I_3(s)$.

		TF - $M = 26$	TDW - $M = 54$	TW - $M = 49$	TP - $M = 80$	TH - $M = 54$
t	i_a	i_{TF}	i_{TDW}	i_{TW}	i_{TP}	i_{TH}
10^{-4}	$6,283184893762572 \times 10^{-4}$	$6,283184893762648 \times 10^{-4}$	$6,283184922827715 \times 10^{-4}$	$6,283184893762532 \times 10^{-4}$	$6,283184920320397 \times 10^{-4}$	$6,283184924188386 \times 10^{-4}$
0,1	$5,877852522924731 \times 10^{-1}$	$5,877852522924698 \times 10^{-1}$	$5,877852549729379 \times 10^{-1}$	$5,877852522924704 \times 10^{-1}$	$5,877852551258705 \times 10^{-1}$	$5,877852554568164 \times 10^{-1}$
0,2	$9,510565162951535 \times 10^{-1}$	$9,510565162951679 \times 10^{-1}$	$9,510565216289416 \times 10^{-1}$	$9,510565162951469 \times 10^{-1}$	$9,510565216416303 \times 10^{-1}$	$9,510565225195070 \times 10^{-1}$
0,3	$9,510565162951535 \times 10^{-1}$	$9,510565162952009 \times 10^{-1}$	$9,510565247061947 \times 10^{-1}$	$9,510565162951361 \times 10^{-1}$	$9,510565250221914 \times 10^{-1}$	$9,510565253971958 \times 10^{-1}$
0,4	$5,877852522924732 \times 10^{-1}$	$5,877852522924343 \times 10^{-1}$	$5,877852628964397 \times 10^{-1}$	$5,877852522924620 \times 10^{-1}$	$5,877852640577128 \times 10^{-1}$	$5,877852647838629 \times 10^{-1}$
0,5	$1,224606353822377 \times 10^{-16}$	$6,821210263296963 \times 10^{-14}$	$1,390995556709911 \times 10^{-8}$	$-3,637841392070983 \times 10^{-14}$	$1,404848357322486 \times 10^{-8}$	$1,485497059478711 \times 10^{-8}$
0,6	$-5,877852522924730 \times 10^{-1}$	$-5,877852522923300 \times 10^{-1}$	$-5,877852376057872 \times 10^{-1}$	$-5,877852522924512 \times 10^{-1}$	$-5,877852366189172 \times 10^{-1}$	$-5,877852346871625 \times 10^{-1}$
0,7	$-9,510565162951535 \times 10^{-1}$	$-9,510565162950765 \times 10^{-1}$	$-9,510564984691918 \times 10^{-1}$	$-9,510565162951287 \times 10^{-1}$	$-9,510564963939633 \times 10^{-1}$	$-9,510564954803514 \times 10^{-1}$
0,8	$-9,510565162951536 \times 10^{-1}$	$-9,510565162951536 \times 10^{-1}$	$-9,510564963054379 \times 10^{-1}$	$-9,510565162951864 \times 10^{-1}$	$-9,510564962648622 \times 10^{-1}$	$-9,510564927952465 \times 10^{-1}$
0,9 c	$-5,877852522924734 \times 10^{-1}$	$-5,877852522926837 \times 10^{-1}$	$-5,877852281774344 \times 10^{-1}$	$-5,877852522925064 \times 10^{-1}$	$-5,877852304201213 \times 10^{-1}$	$-5,877852268627300 \times 10^{-1}$
1	$-2,449212707644755 \times 10^{-16}$	0	$2,591169218708483 \times 10^{-8}$	$-5,838452321507487 \times 10^{-14}$	$2,452892658394669 \times 10^{-8}$	$2,671025649346701 \times 10^{-8}$

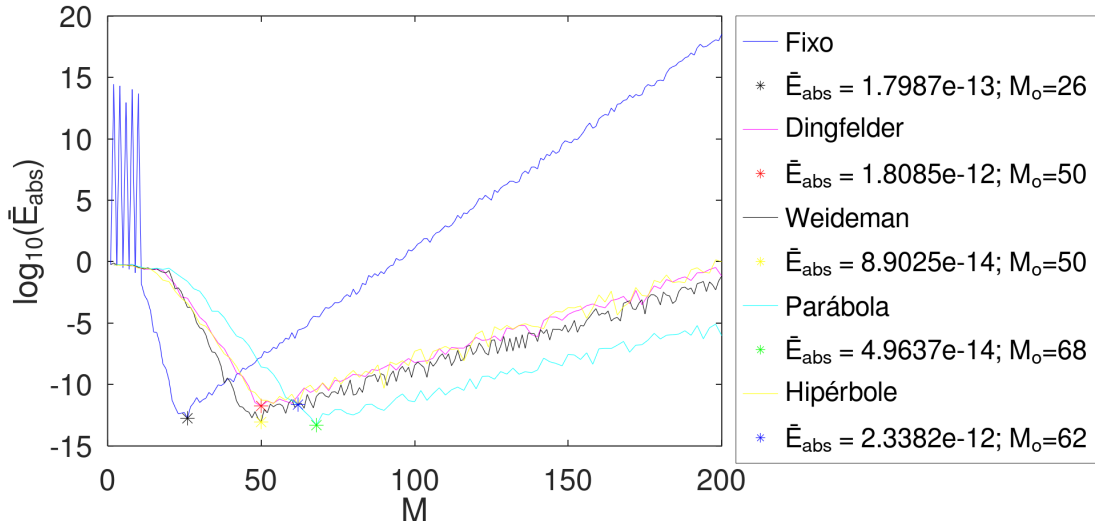
5.2.8 Corrente $I_4(s)$

A corrente $I_4(s) = \frac{sI_0}{s^2 + 4\pi^2}$, cuja transformada inversa é $\mathcal{L}^{-1}\{I_4(s)\} = i_4(t) = I_0 \cos(2\pi t)$, também foi calculada por cinco algoritmos, onde cada um obteve um valor de M_o , erro absoluto médio e perfil numérico, conforme apresentado nas Tabela 5.15 e 5.16. Além disso, esses resultados podem ser visualizados graficamente nas Figuras 5.21 e 5.22.

Tabela 5.15: M_o obtidos para a corrente $I_4(s)$.

Métodos	M_o	Erro Absoluto Médio
Talbot-Fixo	26	$1,798662229258629 \times 10^{-13}$
Talbot-DW	50	$1,808508424414002 \times 10^{-12}$
Talbot-Weideman	50	$8,902474717005630 \times 10^{-14}$
Talbot-Parábola	68	$4,963706213733200 \times 10^{-14}$
Talbot-Hipérbole	62	$2,338240712163042 \times 10^{-12}$

Figura 5.21: $\bar{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica para $I_4(s)$.

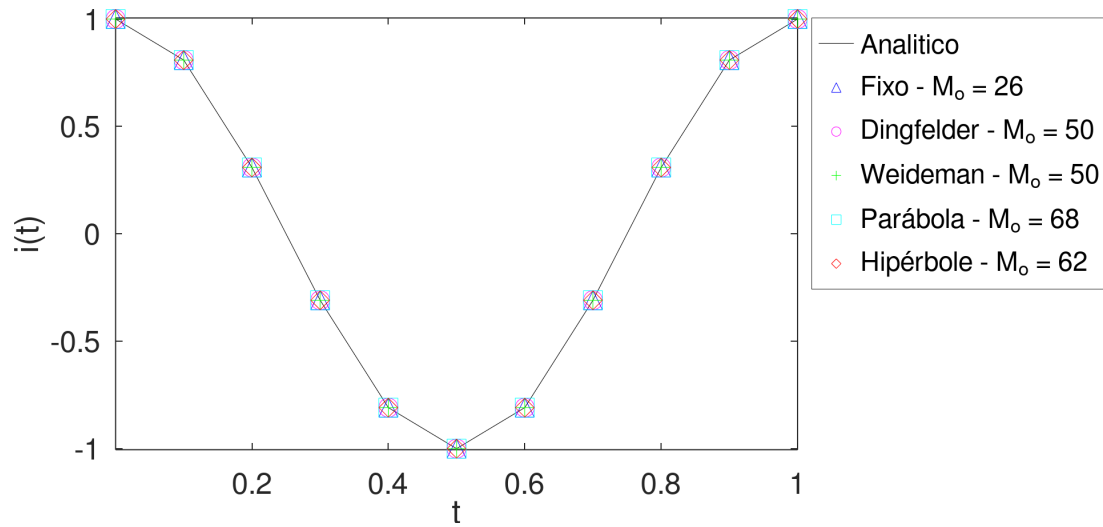


Fonte: Autor

Tabela 5.16: Simulações para $I_4(s)$.

		TF - $M = 26$	TDW - $M = 50$	TW - $M = 50$	TP - $M = 68$	TH - $M = 62$
t	i_a	i_{TF}	i_{TDW}	i_{TW}	i_{TP}	i_{TH}
10^{-4}	$9,999998026079184 \times 10^{-1}$	$9,999998026078982 \times 10^{-1}$	$9,999998082010813 \times 10^{-1}$	$9,999998026076411 \times 10^{-1}$	$9,999998035127963 \times 10^{-1}$	$9,999999065376940 \times 10^{-1}$
0,1	$8,090169943749475 \times 10^{-1}$	$8,090169943748151 \times 10^{-1}$	$8,090170002248567 \times 10^{-1}$	$8,090169943748496 \times 10^{-1}$	$8,090169957204427 \times 10^{-1}$	$8,090171032250344 \times 10^{-1}$
0,2	$3,090169943749475 \times 10^{-1}$	$3,090169943749288 \times 10^{-1}$	$3,090170001800988 \times 10^{-1}$	$3,090169943748373 \times 10^{-1}$	$3,090169959165176 \times 10^{-1}$	$3,090171363291351 \times 10^{-1}$
0,3	$-3,090169943749476 \times 10^{-1}$	$-3,090169943746635 \times 10^{-1}$	$-3,090169923807348 \times 10^{-1}$	$-3,090169943749108 \times 10^{-1}$	$-3,090169933992885 \times 10^{-1}$	$-3,090168956124209 \times 10^{-1}$
0,4	$-8,090169943749473 \times 10^{-1}$	$-8,090169943748151 \times 10^{-1}$	$-8,090169888412632 \times 10^{-1}$	$-8,090169943750325 \times 10^{-1}$	$-8,090169930587091 \times 10^{-1}$	$-8,090168984885985 \times 10^{-1}$
0,5	$-1,000000000000000 \times 10^0$	$-1,000000000000091 \times 10^0$	$-9,999999951807758 \times 10^{-1}$	$-9,99999999999118 \times 10^{-1}$	$-9,99999990076184 \times 10^{-1}$	$-9,999999112959083 \times 10^{-1}$
0,6	$-8,090169943749476 \times 10^{-1}$	$-8,090169943745119 \times 10^{-1}$	$-8,090169888019596 \times 10^{-1}$	$-8,090169943748953 \times 10^{-1}$	$-8,090169932114193 \times 10^{-1}$	$-8,090168895142020 \times 10^{-1}$
0,7	$-3,090169943749476 \times 10^{-1}$	$-3,090169943746202 \times 10^{-1}$	$-3,090169911448987 \times 10^{-1}$	$-3,090169943748733 \times 10^{-1}$	$-3,090169934326986 \times 10^{-1}$	$-3,090168910146810 \times 10^{-1}$
0,8	$3,090169943749472 \times 10^{-1}$	$3,090169943750993 \times 10^{-1}$	$3,090169996699933 \times 10^{-1}$	$3,090169943748606 \times 10^{-1}$	$3,090169957608966 \times 10^{-1}$	$3,090170966424891 \times 10^{-1}$
0,9	$8,090169943749473 \times 10^{-1}$	$8,090169943745624 \times 10^{-1}$	$8,090169997983833 \times 10^{-1}$	$8,090169943749314 \times 10^{-1}$	$8,090169952118641 \times 10^{-1}$	$8,090171222010503 \times 10^{-1}$
1	$1,000000000000000 \times 10^0$	$1,000000000000000 \times 10^0$	$1,000000004559481 \times 10^0$	$1,000000000000055 \times 10^0$	$1,000000000987523 \times 10^0$	$1,000000142658639 \times 10^0$

Figura 5.22: Representação gráfica dos resultados tabelados para $I_4(s)$.

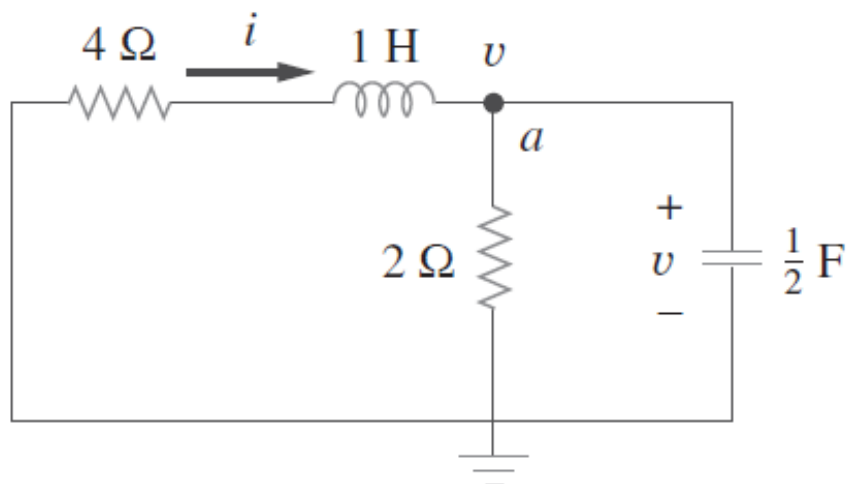


Fonte: Autor

5.3 Circuito Elétrico 2

Retirado de Alexander e Sadiku (2013), o circuito por analisar é o indicado pela Figura 5.23, no qual quer-se determinar a tensão v e a corrente i no nó a para $t > 0$, onde $v(\infty) = 4V$, $v(0) = 12V$ e $i(0) = 0$.

Figura 5.23: Circuito Elétrico 2.



Fonte: (Alexander e Sadiku, 2013)

Para determinar a tensão e a corrente de um circuito elétrico, é necessário aplicar as Leis de Kirchhoff, que incluem a Lei das Correntes de Kirchhoff (LKC) e a Lei das Tensões de Kirchhoff

(LKT) (Alexander e Sadiku, 2013). Essas leis permitem a análise precisa das distribuições de corrente e tensão em diferentes partes do circuito.

Utilizando a LKC ao nó a da Figura 5.23, chega-se a

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} + C \frac{dv(t)}{dt} = \frac{v(t)}{2} + \frac{dv(t)}{2dt}. \quad (5.22)$$

E empregando a LKT na malha da esquerda, tem-se

$$\begin{aligned} R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + v &= 0 \\ 4i(t) + \frac{di(t)}{dt} + v &= 0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Aplicando-se a TL nas Eqs. (5.22) e (5.23), chega-se a solução (Alexander e Sadiku, 2013):

$$V(s) = \frac{4}{s} + \frac{12}{s+2} - \frac{4}{s+3} \quad (5.24)$$

e

$$I(s) = \frac{2}{s} - \frac{6}{s+2} + \frac{4}{s+3}. \quad (5.25)$$

As Tabelas 5.17-5.20 e as Figuras 5.24-5.27 apresentam os resultados obtidos na análise do circuito elétrico 2 proposto por Alexander e Sadiku (2013).

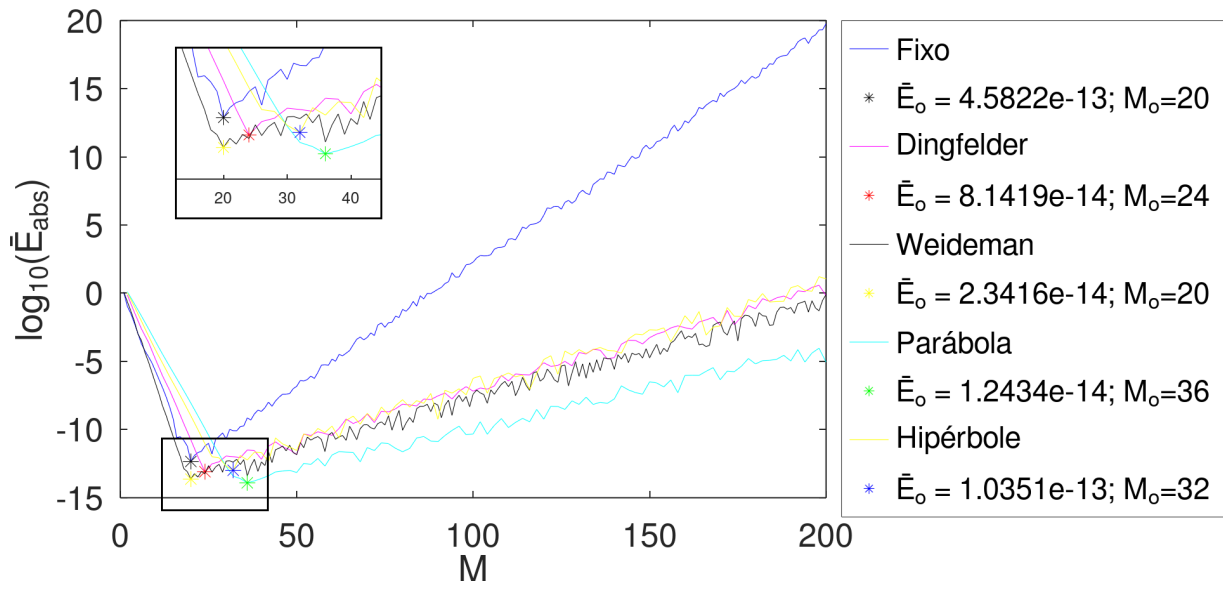
5.3.1 Tensão $V(s)$

Os valores de M_o e $\overline{E}_{abs}$ obtidos para cada método numérico aplicado à tensão $V(s) = \frac{4}{s} + \frac{12}{s+2} - \frac{4}{s+3}$ e sua inversa transformada $\mathcal{L}^{-1}\{V(s)\} = v(t) = 4 + 12e^{-2t} - 4e^{-3t}$ estão registrados na Tabela 5.17 e podem ser visualizados por meio de uma representação gráfica na Figura 5.24.

Tabela 5.17: M_o obtidos para a tensão $V(s)$.

Métodos	M_o	Erro Absoluto Médio
Talbot-Fixo	20	$4,582193210725646 \times 10^{-13}$
Talbot-DW	24	$8,141878079016048 \times 10^{-14}$
Talbot-Weideman	20	$2,341561288300330 \times 10^{-14}$
Talbot-Parábola	36	$1,243449787580175 \times 10^{-14}$
Talbot-Hipérbole	32	$1,035131576414146 \times 10^{-13}$

Figura 5.24: $\bar{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica para $V(s)$.



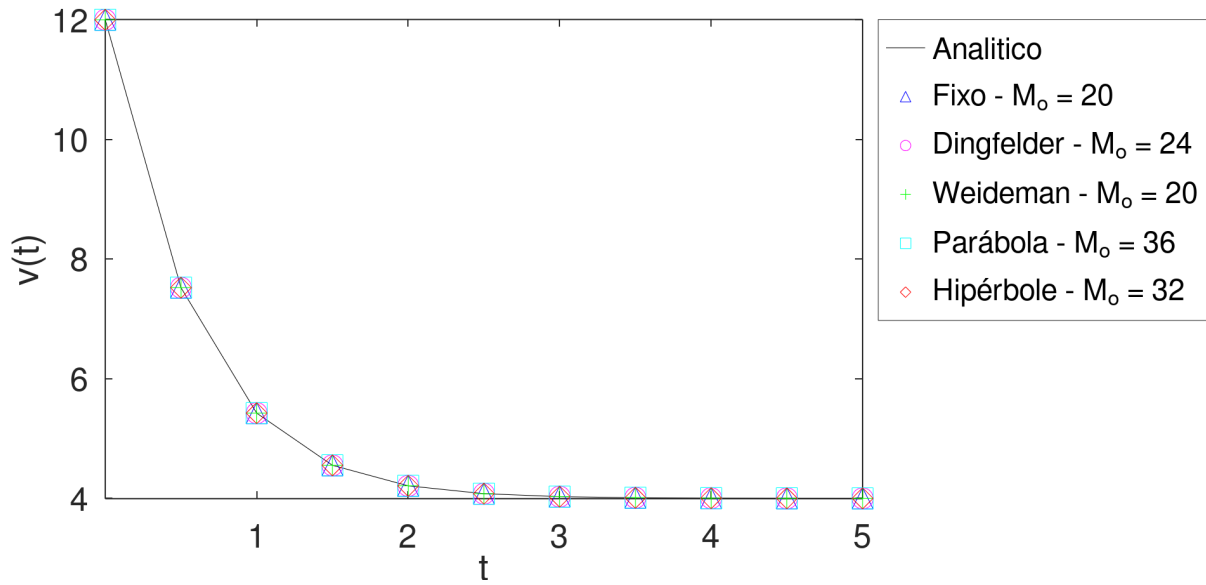
Fonte: Autor

A Figura 5.25 apresenta graficamente os perfis numéricos e analítico, que estão detalhados na Tabela 5.18.

Tabela 5.18: Simulações para $V(s)$.

		TF - $M = 20$	TDW - $M = 24$	TW - $M = 20$	TP - $M = 36$	TH - $M = 32$
t	v_a	v_{TF}	v_{TDW}	v_{TW}	v_{TP}	v_{TH}
10^{-4}	$1,199880006000200 \times 10^1$	$1,199880006000198 \times 10^1$	$1,199880006000347 \times 10^1$	$1,199880006000204 \times 10^1$	$1,199880006000564 \times 10^1$	$1,199880005942396 \times 10^1$
0,5	$7,522032653463588 \times 10^0$	$7,522032653463794 \times 10^0$	$7,522032653467345 \times 10^0$	$7,522032653463620 \times 10^0$	$7,522032653466622 \times 10^0$	$7,522032652912707 \times 10^0$
1	$5,424875125367897 \times 10^0$	$5,424875125368181 \times 10^0$	$5,424875125371076 \times 10^0$	$5,424875125367923 \times 10^0$	$5,424875125370587 \times 10^0$	$5,424875124857589 \times 10^0$
1,5	$4,553008834261398 \times 10^0$	$4,553008834262194 \times 10^0$	$4,553008834264579 \times 10^0$	$4,553008834261411 \times 10^0$	$4,553008834262910 \times 10^0$	$4,553008833765056 \times 10^0$
2	$4,209872657958145 \times 10^0$	$4,209872657958567 \times 10^0$	$4,209872657961032 \times 10^0$	$4,209872657958163 \times 10^0$	$4,209872657962755 \times 10^0$	$4,209872657486513 \times 10^0$
2,5	$4,078643026508434 \times 10^0$	$4,078643026508071 \times 10^0$	$4,078643026512100 \times 10^0$	$4,078643026508470 \times 10^0$	$4,078643026510699 \times 10^0$	$4,078643026061615 \times 10^0$
3	$4,029251386903649 \times 10^0$	$4,029251386904798 \times 10^0$	$4,029251386906474 \times 10^0$	$4,029251386903668 \times 10^0$	$4,029251386906727 \times 10^0$	$4,029251386476848 \times 10^0$
3,5	$4,010832437789255 \times 10^0$	$4,010832437789629 \times 10^0$	$4,010832437793088 \times 10^0$	$4,010832437789269 \times 10^0$	$4,010832437791701 \times 10^0$	$4,010832437372706 \times 10^0$
4	$4,004000974685416 \times 10^0$	$4,004000974686187 \times 10^0$	$4,004000974688205 \times 10^0$	$4,004000974685446 \times 10^0$	$4,004000974688183 \times 10^0$	$4,004000974274005 \times 10^0$
4,5	$4,001475433812694 \times 10^0$	$4,001475433813336 \times 10^0$	$4,001475433815247 \times 10^0$	$4,001475433812713 \times 10^0$	$4,001475433815234 \times 10^0$	$4,001475433416848 \times 10^0$
5	$4,000543575547868 \times 10^0$	$4,000543575547854 \times 10^0$	$4,000543575551291 \times 10^0$	$4,000543575547882 \times 10^0$	$4,000543575551036 \times 10^0$	$4,000543575169726 \times 10^0$

Figura 5.25: Representação gráfica dos resultados tabelados para $V(s)$.



Fonte: Autor

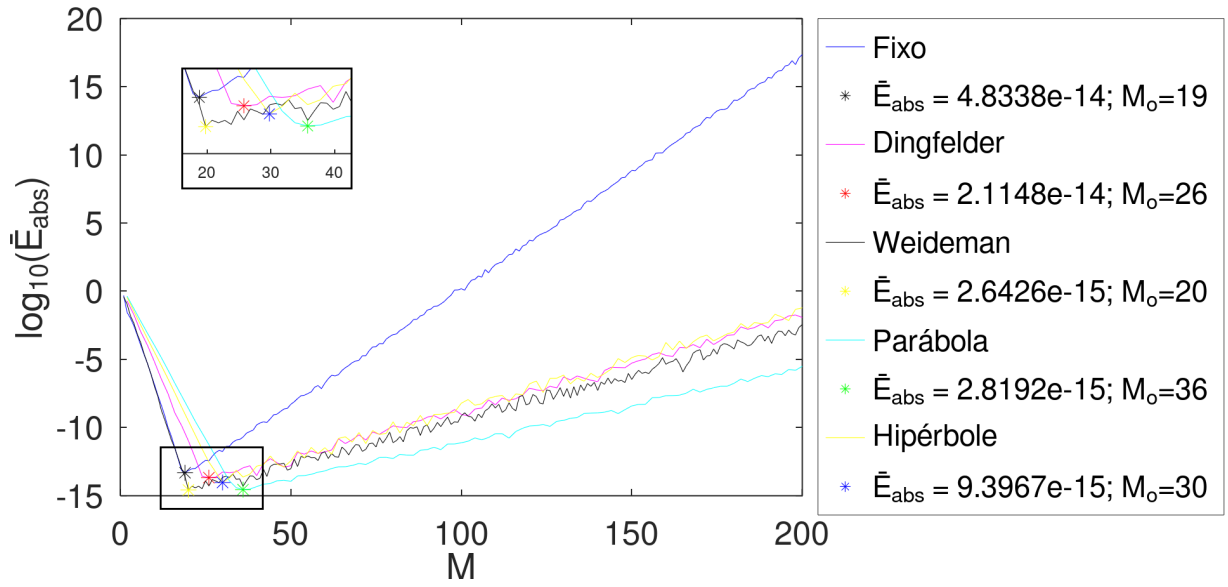
5.3.2 Corrente $I(s)$

A Tabela 5.19 exhibe o valor do M ótimo junto com o erro absoluto médio obtido para os métodos numéricos analisados na corrente $I(s) = \frac{2}{s} - \frac{6}{s+2} + \frac{4}{s+3}$, cuja transformada inversa é $\mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = i(t) = 2 - 6e^{-2t} + 4e^{-3t}$. Já a Tabela 5.20 apresenta os perfis numéricos de acordo com os M_o adquiridos para cada algoritmo na análise da $I(s)$. Além disso, as Figuras 5.26 e 5.27 representam, graficamente, os resultados das Tabelas 5.19 e 5.20.

Tabela 5.19: M_o obtidos para a corrente $I(s)$.

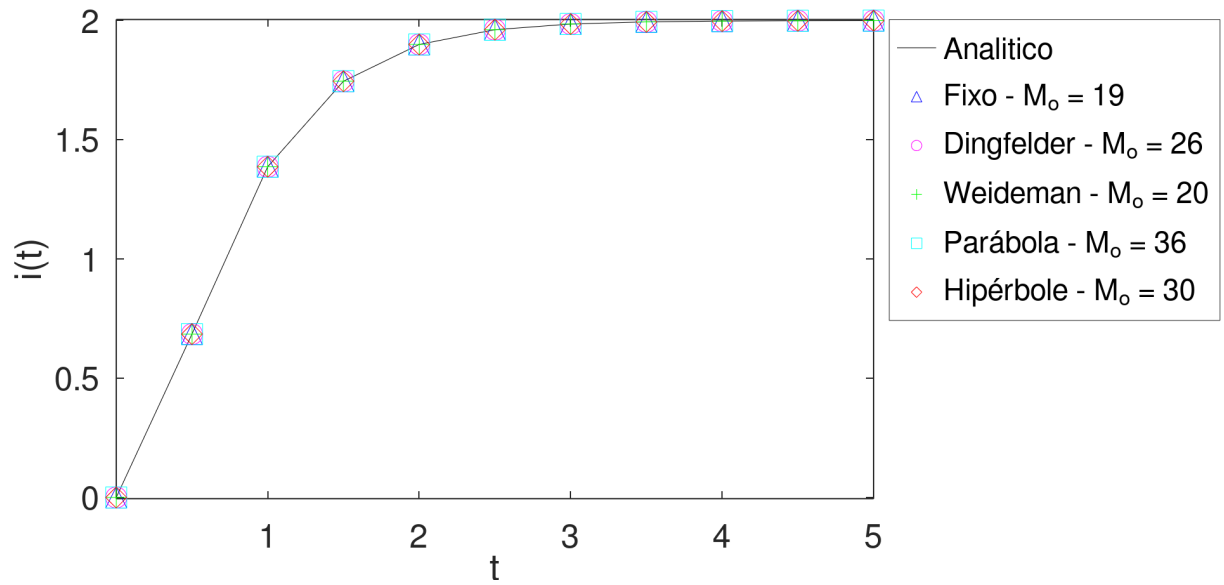
Métodos	M_o	Erro Absoluto Médio
Talbot-Fixo	19	$4,833789057679983 \times 10^{-14}$
Talbot-DW	26	$2,114801578554609 \times 10^{-14}$
Talbot-Weideman	20	$2,642593894500955 \times 10^{-15}$
Talbot-Parábola	36	$2,819161647001381 \times 10^{-15}$
Talbot-Hipérbole	32	$9,396701128808215 \times 10^{-15}$

Figura 5.26: $\bar{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica para $I(s)$.



Fonte: Autor

Figura 5.27: Representação gráfica dos resultados tabelados para $I(s)$.



Fonte: Autor

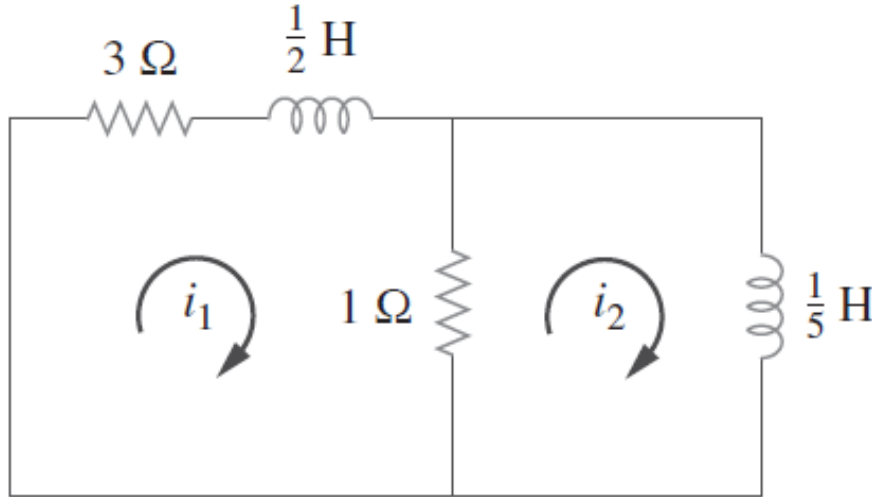
Tabela 5.20: Simulações para $I(s)$.

		TF - $M = 19$	TDW - $M = 26$	TW - $M = 20$	TP - $M = 36$	TH - $M = 30$
t	i_a	i_{TF}	i_{TDW}	i_{TW}	i_{TP}	i_{TH}
10^{-4}	$5,999000096679197 \times 10^{-8}$	$5,998999827126686 \times 10^{-8}$	$5,998974247535175 \times 10^{-8}$	$5,999000205770459 \times 10^{-8}$	$5,998970299616723 \times 10^{-8}$	$5,999141936702457 \times 10^{-8}$
0,5	$6,852439935650653 \times 10^{-1}$	$6,852439935650183 \times 10^{-1}$	$6,852439935653561 \times 10^{-1}$	$6,852439935650635 \times 10^{-1}$	$6,852439935649508 \times 10^{-1}$	$6,852439935659997 \times 10^{-1}$
1	$1,387136574051780 \times 10^0$	$1,387136574051737 \times 10^0$	$1,387136574052091 \times 10^0$	$1,387136574051780 \times 10^0$	$1,387136574051512 \times 10^0$	$1,387136574053189 \times 10^0$
1,5	$1,745713575945786 \times 10^0$	$1,745713575945797 \times 10^0$	$1,745713575946567 \times 10^0$	$1,745713575945787 \times 10^0$	$1,745713575945628 \times 10^0$	$1,745713575946805 \times 10^0$
2	$1,900021175374260 \times 10^0$	$1,900021175374155 \times 10^0$	$1,900021175375286 \times 10^0$	$1,900021175374263 \times 10^0$	$1,900021175373984 \times 10^0$	$1,900021175377235 \times 10^0$
2,5	$1,961784655486078 \times 10^0$	$1,961784655486126 \times 10^0$	$1,961784655487391 \times 10^0$	$1,961784655486075 \times 10^0$	$1,961784655486050 \times 10^0$	$1,961784655488377 \times 10^0$
3	$1,985621126156349 \times 10^0$	$1,985621126156389 \times 10^0$	$1,985621126158195 \times 10^0$	$1,985621126156348 \times 10^0$	$1,985621126156092 \times 10^0$	$1,985621126160339 \times 10^0$
3,5	$1,994638854004072 \times 10^0$	$1,994638854004142 \times 10^0$	$1,994638854005925 \times 10^0$	$1,994638854004077 \times 10^0$	$1,994638854004011 \times 10^0$	$1,994638854008880 \times 10^0$
4	$1,998011801081998 \times 10^0$	$1,998011801081907 \times 10^0$	$1,998011801084545 \times 10^0$	$1,998011801081994 \times 10^0$	$1,998011801082368 \times 10^0$	$1,998011801086641 \times 10^0$
4,5	$1,999265025011825 \times 10^0$	$1,999265025011866 \times 10^0$	$1,999265025014455 \times 10^0$	$1,999265025011824 \times 10^0$	$1,999265025011594 \times 10^0$	$1,999265025019148 \times 10^0$
5	$1,999728824030707 \times 10^0$	$1,999728824030740 \times 10^0$	$1,999728824033674 \times 10^0$	$1,999728824030713 \times 10^0$	$1,999728824030801 \times 10^0$	$1,999728824036743 \times 10^0$

5.4 Circuito Elétrico 3

Também extraído de Alexander e Sadiku (2013), este circuito elétrico é representado na Figura 5.28 e o objetivo do problema é determinar $i_1(t)$ e $i_2(t)$ para $t > 0$.

Figura 5.28: Circuito Elétrico



Fonte: Alexander e Sadiku (2013)

Primeiramente, determinou-se as correntes de malha i_1 e i_2 , que correspondem às correntes através dos indutores.

Empregando a LKT nas malhas $i_1(t)$ e $i_2(t)$ da Figura 5.28, têm-se

$$4i_1(t) - i_2(t) + \frac{di_1(t)}{2dt} = 0 \quad (5.26)$$

e

$$i_2(t) + \frac{di_2(t)}{5dt} - i_1(t) = 0. \quad (5.27)$$

Aplicando-se a TL nas Eqs. (5.26) e (5.27), obtêm-se a solução (Alexander e Sadiku, 2013):

$$I_1(s) = \frac{7}{3s} - \frac{4}{3(s+3)} - \frac{1}{3(s+10)} \quad (5.28)$$

e

$$I_2(s) = \frac{7}{3s} - \frac{10}{3(s+3)} + \frac{1}{3(s+10)}. \quad (5.29)$$

A partir da Tabela 5.21, são apresentados os resultados numéricos obtidos para as correntes $I_1(s)$ e $I_2(s)$ através dos cinco algoritmos estudados neste trabalho.

5.4.1 Malha $I_1(s)$

Na Tabela 5.21, são apresentados o erro absoluto médio e o M_o obtidos para os algoritmos Talbot-Fixo, Talbot-DW, Talbot-Weideman, Talbot-Parábola e Talbot-Hipérbole aplica-

dos na inversão da corrente $I_1(s) = \frac{7}{3s} - \frac{4}{3(s+3)} - \frac{1}{3(s+10)}$, cuja transformada inversa é $\mathcal{L}^{-1}\{I_1(s)\} = i_1(t) = \frac{7}{3} - \frac{4e^{-3t}}{3} - e^{-10t}$. Já a Tabela 5.22 exibe os perfis numéricos de acordo com os M ótimos obtidos na análise da $I_1(s)$.

Tabela 5.21: M_o obtidos para a corrente $I_1(s)$.

Métodos	M_o	Erro Absoluto Médio
Talbot-Fixo	19	$4,919212527851072 \times 10^{-14}$
Talbot-DW	40	$2,914194830953169 \times 10^{-14}$
Talbot-Weideman	20	$2,195115143947697 \times 10^{-15}$
Talbot-Parábola	36	$1,692853559352094 \times 10^{-15}$
Talbot-Hipérbole	30	$1,525068344968269 \times 10^{-14}$

As Figuras 5.29 e 5.30 ilustram os resultados das Tabelas 5.21 e 5.22.

Figura 5.29: $\bar{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica para $I_1(s)$.

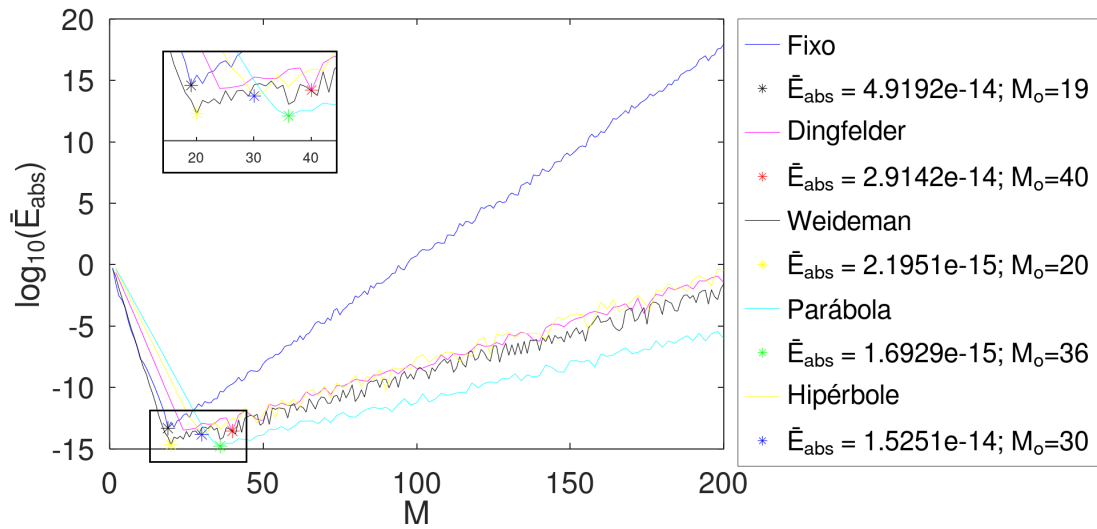
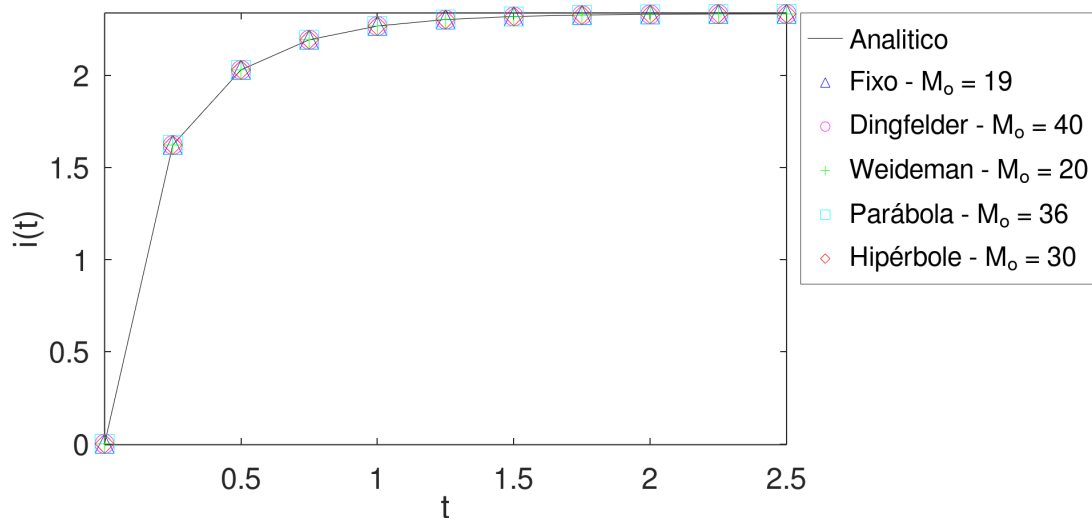


Tabela 5.22: Simulações para $I_1(s)$.

		TF - $M = 19$	TDW - $M = 40$	TW - $M = 20$	TP - $M = 36$	TH - $M = 30$
t	i_a	i_{TF}	i_{TDW}	i_{TW}	i_{TP}	i_{TH}
10^{-4}	$1,399440172624722 \times 10^{-3}$	$1,399440172607412 \times 10^{-3}$	$1,399440189004258 \times 10^{-3}$	$1,399440172623446 \times 10^{-3}$	$1,399440172421481 \times 10^{-3}$	$1,399440172476927 \times 10^{-3}$
0, 25	$1,621426264388082 \times 10^0$	$1,621426264388080 \times 10^0$	$1,621426264241085 \times 10^0$	$1,621426264388083 \times 10^0$	$1,621426264388119 \times 10^0$	$1,621426264392196 \times 10^0$
0, 50	$2,029088506136342 \times 10^0$	$2,029088506136344 \times 10^0$	$2,029088505866790 \times 10^0$	$2,029088506136341 \times 10^0$	$2,029088506136355 \times 10^0$	$2,029088506143141 \times 10^0$
0, 75	$2,192247949547367 \times 10^0$	$2,192247949547466 \times 10^0$	$2,192247949197543 \times 10^0$	$2,192247949547368 \times 10^0$	$2,192247949547466 \times 10^0$	$2,192247949556950 \times 10^0$
1	$2,266905175579752 \times 10^0$	$2,266905175579762 \times 10^0$	$2,266905175140834 \times 10^0$	$2,266905175579756 \times 10^0$	$2,266905175579855 \times 10^0$	$2,266905175591475 \times 10^0$
1, 25	$2,301972612205482 \times 10^0$	$2,301972612205509 \times 10^0$	$2,301972611676028 \times 10^0$	$2,301972612205486 \times 10^0$	$2,301972612205597 \times 10^0$	$2,301972612219033 \times 10^0$
1, 50	$2,318521032046690 \times 10^0$	$2,318521032046821 \times 10^0$	$2,318521031501180 \times 10^0$	$2,318521032046692 \times 10^0$	$2,318521032046808 \times 10^0$	$2,318521032061509 \times 10^0$
1, 75	$2,326336617024434 \times 10^0$	$2,326336617024494 \times 10^0$	$2,326336616412073 \times 10^0$	$2,326336617024436 \times 10^0$	$2,326336617024324 \times 10^0$	$2,326336617039456 \times 10^0$
2	$2,330028328369958 \times 10^0$	$2,330028328369985 \times 10^0$	$2,330028327685280 \times 10^0$	$2,330028328369961 \times 10^0$	$2,330028328370274 \times 10^0$	$2,330028328387721 \times 10^0$
2, 25	$2,331772160336422 \times 10^0$	$2,331772160336550 \times 10^0$	$2,331772159574746 \times 10^0$	$2,331772160336423 \times 10^0$	$2,331772160336544 \times 10^0$	$2,331772160355130 \times 10^0$
2, 50	$2,332595887492582 \times 10^0$	$2,332595887492544 \times 10^0$	$2,332595886720087 \times 10^0$	$2,332595887492586 \times 10^0$	$2,332595887492881 \times 10^0$	$2,332595887512698 \times 10^0$

Figura 5.30: Representação gráfica dos resultados tabelados para $I_1(s)$.



Fonte: Autor

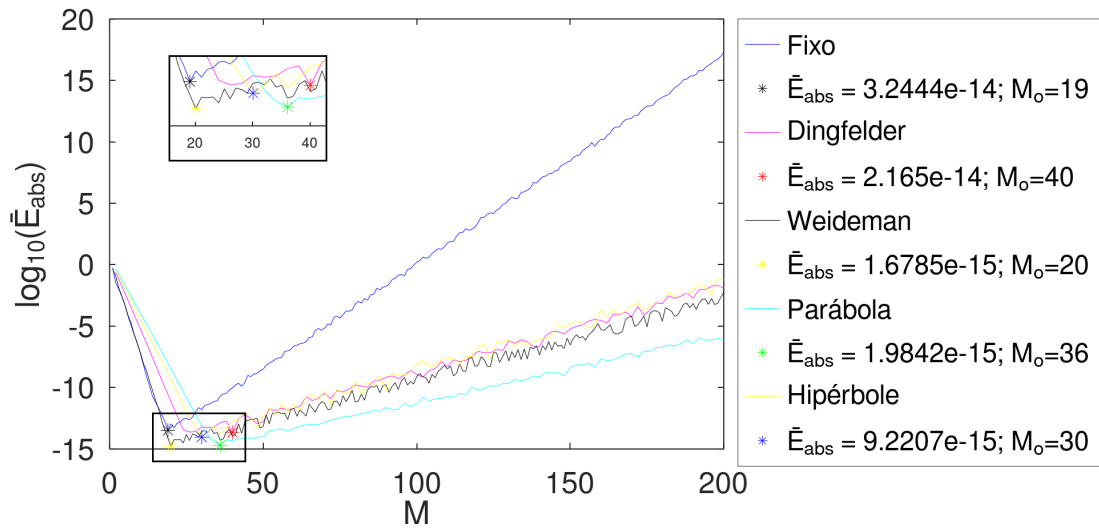
5.4.2 Malha $I_2(s)$

A corrente $I_2(s) = \frac{28}{3s} - \frac{10}{3(s+3)} + \frac{1}{3(s+10)}$, cuja transformada inversa é $\mathcal{L}^{-1}\{I_2(s)\} = i_2(t) = \frac{28}{3} - \frac{10e^{-3t}}{3} + e^{-10t}$, também foi calculada pelos cinco algoritmos, onde cada um obteve um valor de M_o , erro absoluto médio e perfil numérico, conforme apresentado nas Tabelas 5.23 e 5.24. Além disso, esses resultados podem ser visualizados graficamente nas Figuras 5.31 e 5.32.

Tabela 5.23: M_o obtidos para a corrente $I_2(s)$.

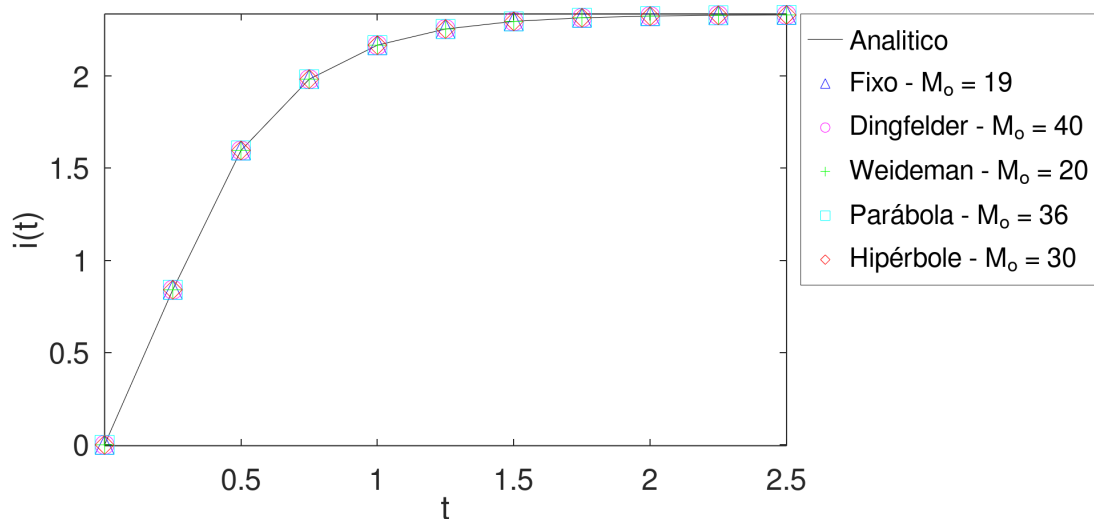
Métodos	M_o	Erro Absoluto Médio
Talbot-Fixo	19	$3,244397745982858 \times 10^{-14}$
Talbot-DW	40	$2,165047085384790 \times 10^{-14}$
Talbot-Weideman	20	$1,678496264267764 \times 10^{-15}$
Talbot-Parábola	36	$1,984249607670220 \times 10^{-15}$
Talbot-Hipérbole	30	$9,220652177972123 \times 10^{-15}$

Figura 5.31: $\bar{E}_{abs}$ através dos Métodos de Inversão Numérica para $I_2(s)$.



Fonte: Autor

Figura 5.32: Representação gráfica dos resultados tabelados para $I_2(s)$.



Fonte: Autor

Tabela 5.24: Simulações para $I_2(s)$.

		TF - $M = 19$	TDW - $M = 40$	TW - $M = 20$	TP - $M = 36$	TH - $M = 30$
t	i_a	i_{TF}	i_{TDW}	i_{TW}	i_{TP}	i_{TH}
10^{-4}	$3,498483740482783 \times 10^{-7}$	$3,498483457905415 \times 10^{-7}$	$3,498741639430936 \times 10^{-7}$	$3,498483730153209 \times 10^{-7}$	$3,498478056195548 \times 10^{-7}$	$3,498474601393718 \times 10^{-7}$
0,25	$8,408631561538499 \times 10^{-1}$	$8,408631561538126 \times 10^{-1}$	$8,408631561282339 \times 10^{-1}$	$8,408631561538515 \times 10^{-1}$	$8,408631561539961 \times 10^{-1}$	$8,408631561541815 \times 10^{-1}$
0,50	$1,596304079837653 \times 10^0$	$1,596304079837631 \times 10^0$	$1,596304079782136 \times 10^0$	$1,596304079837652 \times 10^0$	$1,596304079837294 \times 10^0$	$1,596304079838996 \times 10^0$
0,75	$1,982555669163933 \times 10^0$	$1,982555669163959 \times 10^0$	$1,982555669092740 \times 10^0$	$1,982555669163932 \times 10^0$	$1,982555669164125 \times 10^0$	$1,982555669165700 \times 10^0$
1	$2,167421838703549 \times 10^0$	$2,167421838703498 \times 10^0$	$2,167421838598885 \times 10^0$	$2,167421838703551 \times 10^0$	$2,167421838703637 \times 10^0$	$2,167421838706730 \times 10^0$
1,25	$2,254944573799809 \times 10^0$	$2,254944573799771 \times 10^0$	$2,254944573639843 \times 10^0$	$2,254944573799808 \times 10^0$	$2,254944573799852 \times 10^0$	$2,254944573804166 \times 10^0$
1,50	$2,296303650774846 \times 10^0$	$2,296303650774894 \times 10^0$	$2,296303650597003 \times 10^0$	$2,296303650774848 \times 10^0$	$2,296303650774701 \times 10^0$	$2,296303650779859 \times 10^0$
1,75	$2,315841630446053 \times 10^0$	$2,315841630446084 \times 10^0$	$2,315841630231080 \times 10^0$	$2,315841630446056 \times 10^0$	$2,315841630445779 \times 10^0$	$2,315841630451026 \times 10^0$
2	$2,325070828138932 \times 10^0$	$2,325070828138934 \times 10^0$	$2,325070827867917 \times 10^0$	$2,325070828138935 \times 10^0$	$2,325070828139149 \times 10^0$	$2,325070828145877 \times 10^0$
2,25	$2,329430401433219 \times 10^0$	$2,329430401433254 \times 10^0$	$2,329430401105415 \times 10^0$	$2,329430401433219 \times 10^0$	$2,329430401433119 \times 10^0$	$2,329430401442079 \times 10^0$
2,50	$2,331489718780062 \times 10^0$	$2,331489718780103 \times 10^0$	$2,331489718427350 \times 10^0$	$2,331489718780066 \times 10^0$	$2,331489718780412 \times 10^0$	$2,331489718789594 \times 10^0$

5.5 Análise Geral dos Circuitos Elétricos

Para determinar qual algoritmo de inversão numérica foi o mais adequado em cada circuito elétrico, adotaram-se dois critérios: primeiramente, considerou-se o método que exigiu menores valores de M_o , e posteriormente, o que obteve o menor erro absoluto médio. Desse modo, as Tabelas 5.25-5.27 apresentam um resumo dos M_o e dos erros absolutos médios obtido para cada método aplicado nos circuitos elétricos analisados.

Tabela 5.25: M_o e $\bar{E}_{abs}$ obtidos no circuito elétrico 1 proposto por Brančík (2011).

Métodos	TF		TDW		TW		TP		TH	
Parâmetro	M_o	$\bar{E}_{abs}$	M_o	$\bar{E}_{abs}$	M_o	$\bar{E}_{abs}$	M_o	$\bar{E}_{abs}$	M_o	$\bar{E}_{abs}$
$V_1(s)$	19	10^{-15}	40	10^{-16}	20	10^{-17}	36	10^{-17}	30	10^{-16}
$V_2(s)$	19	10^{-15}	24	10^{-16}	20	10^{-17}	38	10^{-17}	32	10^{-16}
$V_3(s)$	25	10^{-15}	58	10^{-14}	49	10^{-16}	72	10^{-16}	72	10^{-14}
$V_4(s)$	26	10^{-15}	50	10^{-14}	50	10^{-15}	68	10^{-15}	54	10^{-14}
$I_1(s)$	20	10^{-14}	24	10^{-14}	20	10^{-15}	36	10^{-15}	32	10^{-14}
$I_2(s)$	20	10^{-14}	24	10^{-15}	20	10^{-15}	36	10^{-15}	32	10^{-15}
$I_3(s)$	26	10^{-14}	54	10^{-13}	49	10^{-14}	80	10^{-14}	54	10^{-13}
$I_4(s)$	26	10^{-13}	50	10^{-12}	50	10^{-14}	68	10^{-14}	62	10^{-12}

Tabela 5.26: M_o e $\bar{E}_{abs}$ obtidos no circuito elétrico 2 proposto por Alexander e Sadiku (2013).

Métodos	TF		TDW		TW		TP		TH	
Parâmetro	M_o	$\bar{E}_{abs}$	M_o	$\bar{E}_{abs}$	M_o	$\bar{E}_{abs}$	M_o	$\bar{E}_{abs}$	M_o	$\bar{E}_{abs}$
$V(s)$	20	10^{-13}	24	10^{-14}	20	10^{-14}	36	10^{-14}	32	10^{-13}
$I(s)$	19	10^{-14}	26	10^{-14}	20	10^{-15}	36	10^{-15}	32	10^{-15}

Tabela 5.27: M_o e $\bar{E}_{abs}$ obtidos no circuito elétrico 3 proposto por Alexander e Sadiku (2013).

Métodos	TF		TDW		TW		TP		TH	
Parâmetro	M_o	$\bar{E}_{abs}$	M_o	$\bar{E}_{abs}$	M_o	$\bar{E}_{abs}$	M_o	$\bar{E}_{abs}$	M_o	$\bar{E}_{abs}$
$I_1(s)$	19	10^{-14}	40	10^{-14}	20	10^{-15}	36	10^{-15}	30	10^{-14}
$I_2(s)$	19	10^{-14}	40	10^{-14}	20	10^{-15}	36	10^{-15}	30	10^{-15}

Dessa forma, após as análises de desempenho dos métodos numéricos aplicados às tensões $V(s)$ e correntes $I(s)$ presentes nos circuitos elétricos propostos neste trabalho, foram feitas algumas observações importantes:

i) os resultados obtidos através dos algoritmos, apresentam uma conformidade com os calculados analiticamente $v_a(t)$ e $i_a(t)$ para a maioria dos valores t em todos os casos examinados, mantendo a precisão em praticamente todos os dígitos;

ii) no circuito proposto por Brančík (2011), observou-se que o método numérico Talbot-Fixo apresentou o melhor valor de M_o para as quatro tensões $V(s)$ e duas correntes $I(s)$, como mostra a Tabela 5.25. Já nos circuitos descritos por Alexander e Sadiku (2013), o Talbot-Fixo

apresentou melhor desempenho apenas na corrente $I(s)$ e nas malhas $I_1(s)$ e $I_2(s)$, enquanto que o Talbot-Weideman demonstrou maior eficiência na tensão $V(s)$, como indica a Tabela 5.26;

iii) em situações onde houve igualdade nos valores de M_o , a escolha do método ideal baseou-se no segundo critério mencionado. Por outro lado, quando as ordens dos erros absolutos médios eram equivalentes, utilizou-se o primeiro critério. Desse modo, de acordo com a Tabela 5.25, os métodos Talbo-Fixo e Talbot-Weideman atingiram o mesmo valor de M ótimo nas correntes $I_1(s)$ e $I_2(s)$. Contudo, o algoritmo Talbot-Weideman apresentou o menor erro absoluto médio, tornando-o, portanto, a escolha mais apropriada;

iv) no circuito proposto por Brančík (2011), o Talbot-Parábola registrou o menor erro absoluto médio com uma ordem de 10^{-17} nas tensões $V_1(s)$ e $V_2(s)$. No entanto, os valores de M_o obtidos para o Talbot-Parábola foram superiores à maioria dos métodos, incluindo o Talbot-Fixo, que se mostrou mais eficiente para essas tensões;

v) o algoritmo Talbot-Fixo atingiu o mesmo valor de M ótimo para diferentes tensões e correntes, como apresenta a Tabela 5.25;

vi) de acordo com a Tabela 5.26, o método Talbot-Weideman apresentou o melhor desempenho na tensão $V(s)$, com $M_o = 20$ e uma ordem erro de 10^{-14} . Por outro lado, para a corrente $I(s)$, o método Talbot-Fixo destacou-se como o mais eficiente entre os métodos, pois obteve o menor valor de M_o . Essa mesma situação se repete na Tabela 5.27;

vii) os resultados apresentados são os melhores obtidos pelos métodos dentro dos critérios de seleção adotados. Isto significa que, na necessidade de resultados mais precisos, o método precisaria ser trocado.

6 CONCLUSÕES

A Transformada de Laplace, é uma técnica matemática bastante versátil e amplamente utilizada em diversas áreas da ciência e engenharia. Essa ferramenta desempenha um papel importante na resolução de equações diferenciais, simplificando a equação a ser solucionada. No entanto, é importante destacar que, apesar das vantagens oferecidas pela TL, a principal dificuldade encontrada ao aplicá-la é a necessidade de inverter a solução obtida para o domínio original. Quando a inversão analítica não é possível, recorre-se a métodos de inversão numérica. Assim, torna-se relevante o estudo de técnicas que permitam o cálculo da transformada inversa fazendo uso de recursos computacionais.

Neste contexto, o presente trabalho apresentou cinco métodos de inversão numérica da Transformada de Laplace: Talbot-Fixo, Talbot-DW, Talbot-Weideman, Talbot-Parábola e Talbot-Hipérbole. A eficiência, validação e recomendação desses algoritmos foram, inicialmente, feitas utilizando um conjunto de funções elementares com características exponenciais, logarítmicas ou oscilatórias. Durante o processo, realizou-se um teste em cada valor definido para os parâmetros a e b , e verificou-se que os valores de M_o e dos erros absolutos médios calculados são diretamente influenciados por a e b , conforme resultados apresentados. Com isso, observou-se que o método Talbot-Weideman proporcionou melhores soluções para as funções de caráter exponencial e logarítmico, enquanto que Talbot-Fixo obteve melhor desempenho com funções trigonométricas. Destaca-se que a escolha do melhor algoritmo foi baseada em dois requisitos: i) valor de M_o , que proporciona a melhor aproximação dos perfis numéricos em relação ao analítico dentro do intervalo de t ; ii) erro absoluto médio $\bar{E}_{abs}$.

Foram também analisados três circuitos elétricos. O primeiro circuito foi proposto por Brančík (2011), enquanto que os outros dois foram sugeridos por Alexander e Sadiku (2013). Em todos os circuitos, obtiveram-se, as soluções no domínio de Laplace para as tensões e correntes e malhas, onde os cinco métodos foram aplicados para avaliar o desempenho da inversão numérica da Transformada de Laplace. No processo, para determinar o algoritmo ideal para cada CE, foram adotados os mesmos requisitos utilizados nas inversões das funções elementares. Após as análises de desempenho dos algoritmos de aproximação aplicados nos Circuitos Elétricos, obteve-se algumas observações importantes:

- i) os requisitos adotados foram assertivos na determinação melhor método numérico;
- ii) o critério mais utilizado para escolha do método ideal na maioria das situações foi o valor obtido de M ótimo;
- iii) o algoritmo Talbot-Fixo apresentou valores de M_o menores ou iguais ao dos demais métodos;
- iv) pelo menos dois algoritmos de aproximação alcançavam a mesma ordem de erro absoluto médio;
- v) em alguns casos, verificou-se a existência de valores iguais para M_o . Nessa circunstância, o requisito do erro absoluto médio tornou-se fundamental na escolha do algoritmo ideal;

vi) a ordem dos erros absolutos médios para as tensões no problema proposto por Brancík (2011) variou de 10^{-16} a 10^{-14} , enquanto que as correntes ficaram na faixa de 10^{-15} a 10^{-12} ;

vii) o primeiro CE analisado sugerido por Alexander e Sadiku (2013), apresentou $\overline{E}_{abs}$ na faixa de 10^{-14} e 10^{-13} para a tensão e de 10^{-15} e 10^{-14} para a corrente;

viii) o segundo Circuito Elétrico, proposto por Alexander e Sadiku (2013), apresenta duas malhas. Nele constatou-se que a ordem de erro absoluto médio estão entre 10^{-15} e 10^{-14} ;

ix) o método Talbot-Fixo obteve melhor desempenho entre os circuitos elétricos estudados.

Como contribuição desta dissertação destaca-se a aplicação dos métodos Talbot-Fixo, Talbot-DW, Talbot-Weideman, Talbot-Parábola e Talbot-Hipérbole para a inversão da Transformada de Laplace, considerando variações nos parâmetros a e b em funções teste e em três distintos problemas de análise de circuitos elétricos.

Mesmo que a eficiência do método Talbot-Fixo já tenha sido bastante explorada na literatura, este trabalho traz novidades no sentido das funções testes e circuitos trabalhados, da influência dos parâmetros de amplitude e frequência, bem como uso da métrica do erro absoluto médio para a avaliação da qualidade dos resultados. Quanto aos demais algoritmos, pouco material foi encontrado na literatura, especialmente em português. Estes passaram pela mesma análise de desempenho do Talbot-Fixo e, apesar de gerarem resultados com erro absoluto médio considerado pequeno (o que não invalida a utilização de qualquer um deles), foi possível observar o quão relevante é a influência do contorno de integração. Como exemplo disso, destaca-se a diferença de desempenho entre os métodos Talbot-DW e Talbot-Weideman apesar da ligeira diferença entre as expressões $s(\theta)$. Os métodos Talbot-Parábola e Talbot-Hipérbole apesar das expressões $s(\theta)$ evitarem os problemas relativos ao uso de $\cot(\theta)$ e $\csc(\theta)$, precisaram de mais termos na série numérica para chegar nos melhores resultados possíveis. Em especial, Talbot-Parábola e Talbot-Weideman forneceram resultados com erro absoluto médio parecido quando usados nos problemas de circuitos elétricos, assim como Talbot-DW em relação a Talbot-Hipérbole.

Com base nos resultados obtidos, conclui-se que os objetivos deste trabalho foram alcançados. Além de identificar os métodos que demonstraram melhor desempenho na inversão da Transformada de Laplace, recomendações foram apresentadas para a aplicação dos algoritmos estudados, fundamentadas pelas análises realizadas. Como proposta de continuidade, busca-se implementar os métodos numéricos em circuitos elétricos mais complexos e em outros problemas existentes nas engenharias, como a difusão de calor e a modelagem de processos de transporte em fluidos.

7 REFERÊNCIAS

- Abate, J. and Valkó, P. P. (2004). Multi-precision Laplace Transform inversion. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60(2):R979–R993.
- Abate, J. and Whitt, W. (1992). The Fourier-series method for inverting transforms of probability distributions. *Queueing systems*, 10:5–87.
- Abate, J. and Whitt, W. (1995). Numerical inversion of Laplace Transforms of probability distributions. *ORSA Journal on computing*, 7(1):36–43.
- Alexander, C. K. and Sadiku, M. N. (2013). *Fundamentos de Circuitos Eelétricos*. AMGH Editora. 5. ed.
- Amaral, G. C. M. d. (2016). Análise comparativa do desempenho a numérico de técnicas de inversão da Transformada de Laplace. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande. Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional.
- Anton, H., Bivens, I., and Davis, S. (2014). *Cálculo-Volume I-10*. Bookman Editora.
- Arenales, S. M. G. and Darezzo, A. N. (2008). *Cálculo Numérico: Aprendizagem com o Apoio de Software*. Thomson Learning, 1 edition.
- Boyce, W. E. and DiPrima, R. C. (2001). *Elementary Differential equations and boundary value problems*. John Wiley & Sons, New York. 7. ed.
- Brančík, L. (2011). Numerical Inverse Laplace Transforms for Electrical Engineering Simulation, Matlab for Engineers-Applications in Control. *Electrical Engineering, IT and Robotics. InTech*.
- Bronson, R. and Costa, G. B. (2006). *Schaum's Outline of Differential Equations*. McGraw-Hill Companies, New York. 3. ed.
- Brown, J. W. and Churchill, R. V. (1960). *Complex Variables and Applications*. McGraw-Hill.
- Brzeziński, D. W. (2018). Review of numerical methods for numilpt with computational accuracy assessment for fractional calculus. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, 3(2):487–502.
- Burden, R. L. and Faires, J. D. (2011). Taylor series approach to functional approximation for inversion of Laplace Transforms. *Numerical Analysis*, 22:1219–1221.
- Calixto, G. R. L., Freitas, E. K., Ferreira, J. A., do Amaral Rodriguez, B. D., and Prolo Filho, J. F. (2022). Parameter N influence on the fixed-Talbot algorithm for the Laplace transform numerical inversion. *VETOR-Revista de Ciências Exatas e Engenharias*, 32(1):42–51.

- Chung, H.-Y. and Sun, Y.-Y. (1986). Taylor series approach to functional approximation for inversion of Laplace Transforms. *Electronics Letters*, 22:1219–1221.
- Cohen, A. M. (2007). *Numerical methods for Laplace Transform inversion*, volume 5. Springer Science New York.
- Coulomb, C. A. d. (1785). Sur une application des règles des maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'équilibre des corps élastiques. *Mémoires de l'Académie des Sciences*.
- Crump, K. S. (1976). Numerical inversion of Laplace Transforms using a Fourier Series approximation. *Journal of the ACM (JACM)*, 23(1):89–96.
- Davies, B. and Martin, B. (1979). Numerical inversion of the Laplace Transform: a survey and comparison of methods. *Journal of computational physics*, 33(1):1–32.
- De Hoog, F. R., Knight, J., and Stokes, A. (1982). An improved method for numerical inversion of Laplace Transforms. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 3(3):357–366.
- Defreitas, C. L. and Kane, S. J. (2017). The noise handling properties of the Talbot algorithm for numerically inverting the Laplace Transform. *Journal of Algorithms and Computational Technology*, 13.
- Dingfelder, B. and Weideman, J. A. C. (2014). An improved Talbot method for numerical Laplace Transform inversion. *Numerical Algorithms*, 68(1):167–183.
- Dubner, H. and Abate, J. (1968). Numerical inversion of Laplace Transforms by relating them to the finite fourier cosine Transform. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 15:115–123.
- Duffy, D. G. (1993). On the numerical inversion of Laplace Transforms: comparison of three new methods on characteristic problems from applications. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 19(3):333–359.
- Durbin, F. (1974). Numerical inversion of Laplace Transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method. *The Computer Journal*, pages 371–376.
- Epperson, J. F. (2013). *An introduction to numerical methods and analysis*. Wiley, 2 edition.
- Ferreira, J. A., Calixto, J., Rodriguez, B., et al. (2021). Aspectos computacionais da inversão numérica da Transformada de Laplace aplicada a um problema de transporte. *Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia*, 6(2):139–152.
- Franklin, B. (1752). *Experiments and Observations on Electricity*. Printed by B. Franklin.

- Freitas, E. K. (2022). Algoritmos de inversão numérica da Transformada de Laplace aplicados à solução de um problema de difusão de mercúrio na Água. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande. Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional.
- Galdino, K. E. (1995). Transformada inversa de Laplace: Inversão algébrica via tabela e inversão numérica. Dissertação de mestrado, Universidade Federal da Paraíba. Pós-Graduação em Informática.
- Gaver, D. P. J. (1966). Observing stochastic processes, and approximate Transform inversion. *Operations Research*, 14(3):444–459.
- Hayt Jr, W. H., Kemmerly, J. E., and Durbin, S. M. (2014). *Análises de Circuitos em Engenharia*. AMGH Editora. 8. ed.
- Jackson, J. D. (2021). *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons.
- Kuhlman, K. L. (2012). Review of inverse Laplace Transform algorithms for Laplace-space numerical approaches. *Numerical Algorithms*, 63:339–355.
- Kulish, V. V. and Lage, J. L. (2002). Application of fractional calculus to fluid mechanics. *J. Fluids Eng.*, 124(3):803–806.
- Kuznetsov, A. (2013). On the convergence of the Gaver–Stehfest algorithm. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 51(6):2984–2998.
- Lavery, R. R. and Gazonas, G. A. (2006). An improvement to the Fourier Series method for inversion of Laplace Transforms applied to elastic and viscoelastic waves. *International Journal of Computational Methods*, 3(01):57–69.
- Lemos, C. F., da Costa, C. P., Pérez-Fernández, L. D., Ferreira, A. M., and da Silva, E. C. (2021). Análise de desempenho de métodos numéricos de inversão da Transformada de Laplace. *INTERMATHS*, 2(2):75–90.
- Li, L., Yao, L., Jin, H., and Zhou, J. (2019). Fault diagnosis and fault-tolerant control based on Laplace Transform for nonlinear networked control systems with random delay. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 30(3):1223–1239.
- Luther, K. H. (2022). *Casual Calculus: A Friendly Student Companion*, volume 1. World Scientific Publishing Company.
- Machado, K. D. (2004). *Equações Diferenciais Aplicadas à Física*. Editora UEPG.
- Murli, A. and Rizzardi, M. (1990). Algorithm 682: Talbot’s method of the laplace inversion problems. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 16(2):158–168.
- O’Neill, J. (2007). *Prodigal genius: the life of Nikola Tesla*. Book Tree.

- Piessens, R. (1971). Gaussian quadrature formulas for the numerical integration of Bromwich's integral and the inversion of the Laplace Transform. *Journal of Engineering Mathematics*, 5(1):1–9.
- Pilatti, C. (2019). Análise comparativa do desempenho numérico de técnicas de inversão da Transformada de Laplace aplicados a um problema de transporte de soluto em meio poroso. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande. Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional.
- Reyaz, R., Lim, Y. J., Mohamad, A. Q., Saqib, M., and Shafie, S. (2021). Caputo fractional mhd casson fluid flow over an oscillating plate with thermal radiation. *Journal of Advanced Research in Fluid Mechanics and Thermal Sciences*, 85(2):145–158.
- Ruggiero, M. A. G. and da Rocha Lopes, V. L. (2000). *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*. Pearson, São Paulo, 2 edition.
- Scharpery, R. A. (1962). Approximate methods of Transform inversion for viscoelastic stress analysis. *Proceedings of the Fourth US National Congress on Applied Mechanics*, 2:1075–1085.
- Schiff, J. L. (1999). *The Laplace Transform: theory and applications*. Springer Science & Business Media.
- Smith, N. and Brancik, L. (2016). Comparative study on one-dimensional numerical inverse laplace transform methods for electrical engineering. *Elektrorevue*, 18(1):1–6.
- Spiegel, M. R. (1965). *Schaum's Outline of Laplace Transforms*. McGraw-Hill New York.
- Stehfest, H. (1970). Remark on algorithm 368: Numerical inversion of Laplace Transforms. *Communications of the ACM*, 13(10):624.
- Talbot, A. (1979). The accurate numerical inversion of Laplace Transforms. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 23(1):97–120.
- Tesla, N. (1887). A new system of alternate current motors and transformers. *AIEE*, 5:308.
- Trefethen, L. N., Weideman, J. A. C., and Schmelzer, T. (2006). Talbot quadratures and rational approximations. *BIT Numerical Mathematics*, 46:653–670.
- Vlach, J. and Singhal, K. (1983). *Computer methods for circuit analysis and design*. Springer Science & Business Media.
- Weeks, W. T. (1966). Numerical inversion of Laplace Transforms using Laguerre functions. *Journal of the ACM*, 13(3):419–429.
- Weideman, J. A. C. (2006). Optimizing Talbot's contours for the inversion of the Laplace Transform. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 44(6):2342–2362.

- Zahra, W., Hikal, M., and Bahnasy, T. A. (2017). Solutions of fractional order electrical circuits via Laplace Transform and nonstandard finite difference method. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 25(2):252–261.
- Zakian, V. (1969). Numerical inversion of Laplace Transform. *Electronics Letters of Engineering and Technology*, 5:120–121.
- Zill, D. G. (2011). *Equações Diferências com aplicações em modelagem*. CENGAGE Learning, São Paulo. 9. ed.
- Zill, D. G. and Cullen, M. R. (2001). *Schaum's Outline of Differential Equations*, volume 1. Pearson Markron Books, São Paulo. 3. ed.

APÊNDICE I

7.1 Fundamentação Matemática

As Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) modelam diversos problemas envolvendo processos químicos, sistemas mecânicos, físicos, elétricos, entre outros. Uma das ferramentas matemáticas amplamente utilizadas para sua resolução das (EDO) é a Transformada de Laplace.

Nesse capítulo, são apresentados conceitos, definições e propriedades da Transformada de Laplace, segundo Boyce e DiPrima (2001); Zill e Cullen (2001); Bronson e Costa (2006); Zill (2011).

7.2 Transformada de Laplace

A Transformada de Laplace é um tipo especial de transformação integral definida como:

Definição 7.1. Seja f uma função definida para $t \geq 0$. A integral

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (7.1)$$

é chamada de Transformada de Laplace de f , desde que a integral convirja.

Caso a integral (7.1) convergir, o resultado da Transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}$ de uma função $f(t)$ é uma função $F(s)$. As letras minúsculas denotam a função que está sendo transformada e as letras maiúsculas representam sua Transformada de Laplace, logo, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$.

7.3 Conceitos Básicos e Condição de Existência

Definição 7.2. Ordem Exponencial. Uma função f é de ordem exponencial c se existem constantes c , $M > 0$ e $T > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq Me^{ct}, \forall t > T. \quad (7.2)$$

Caso f seja uma função crescente, a condição $|f(t)| \leq Me^{ct}, t > T$, diz que, o gráfico da f em um intervalo (T, ∞) não cresce mais rápido que o gráfico da função exponencial Me^{ct} , onde c é uma constante positiva.

Definição 7.3. Contínua por partes. Uma função f é dita contínua por partes em $[0, \infty)$ se em qualquer intervalo $0 \leq a \leq t \leq b$ existe um número finito de pontos $t_k, k = 1, 2, \dots, n (t_{k-1} < t_k)$ onde f é contínua e descontínua em cada intervalo aberto $t_{k-1} < t < t_k$.

Teorema 7.1. Condições Suficientes de Existência. Se $f(t)$ é contínua por partes no intervalo $[0, \infty)$ e de ordem exponencial c , então $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > c$.

7.4 Propriedades Operacionais da Transformada de Laplace

Nessa seção, serão exibidas algumas propriedades operacionais importantes que auxiliam nos cálculos da Transformada de Laplace.

Observação: Para que todas $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existam, considera-se que todas as funções satisfaçam os requisitos do Teorema 5.1.

Teorema 7.2. Translação sobre o eixo s . Se p é uma constante e $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, onde $s > k$ para algum k , então

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - p). \quad (7.3)$$

Definição 7.4. Função Degrau Unitário ou Função de Heaviside. Essa função, tem como principal aplicação a resolução de Equações Diferenciais que envolvem funções descontínuas, as quais aparecem constantemente em problemas na área de Engenharia.

A função $\mathcal{U}(t - p)$ é definida por

$$\mathcal{U}(t - p) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < p \\ 1, & t \geq p \end{cases}. \quad (7.4)$$

Note que $\mathcal{U}(t - p)$ está definido somente para $t \geq 0$, o que é suficiente para estudo da Transformada de Laplace. Porém, em um estudo mais amplo, tem-se $\mathcal{U}(t - p) = 0$ para $t < p$.

Teorema 7.3. Translação sobre o eixo t . Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e $p > 0$, então

$$\mathcal{L}\{f(t - p) \mathcal{U}(t - p)\} = e^{-ps}F(s). \quad (7.5)$$

Teorema 7.4. Linearidade. Sejam α e β constantes quaisquer, $f(t)$ e $g(t)$ funções com Transformada de Laplace, então

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s). \quad (7.6)$$

$\mathcal{L}$ é uma transformada linear, ou operador linear.

Teorema 7.5. Mudança de Escala. Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{p}F\left(\frac{s}{p}\right), \text{ para } p \neq 0. \quad (7.7)$$

Teorema 7.6. Transformada de uma Derivadas. Se $f, f', \dots, f^{n-1}$ forem contínuas no intervalo $[0, \infty)$, de ordem exponencial, e se $f^{(n)}$ é contínua por partes em $[0, \infty)$, então

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0),$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^{(n)}F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{n-2}(0)f^{n-1}(0). \quad (7.8)$$

Teorema 7.7. Multiplicação por t^n . Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s). \quad (7.9)$$

Teorema 7.8. Transformadas de Integrais. Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s}F(s). \quad (7.10)$$

Teorema 7.9. Divisão por t . Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)du, \quad (7.11)$$

desde que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} \text{ exista.}$$

7.5 Convolução de Funções

Se f e g forem contínuas por partes em $[0, \infty)$, então a convolução é denotada por $f * g$, é dada pela integral

$$f * g = \int_0^t f(u)g(t-u)du. \quad (7.12)$$

A integral (7.12) é chamada de Convolução de f e g .

Teorema 7.10. Teorema da Convolução. Sejam $f(t)$ e $g(t)$ funções contínuas por partes em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial, então

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s). \quad (7.13)$$

7.6 Propriedades da Convolução:

- (i) Lei Comutativa: $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$;
- (ii) Lei Distributiva: $f(t) * (g(t) + h(t)) = f(t) * g(t) + f(t) * h(t)$;
- (iii) Lei Associativa: $f(t) * (g(t) * h(t)) = (f(t) * g(t)) * h(t)$;
- (iv) $\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s)$;
- (v) $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t)$.

Teorema 7.11. Teorema do Valor Inicial. Se os limites indicados existem, então

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} F(s). \quad (7.14)$$

Teorema 7.12. Teorema do Valor Final. Se os limites indicados existem, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} F(s). \quad (7.15)$$

7.7 Transformada Inversa de Laplace

Se $f(t)$ é chamada de Transformada Inversa de Laplace, então $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, onde $\mathcal{L}^{-1}$ é denominado operador da Transformada Inversa de Laplace.

A Transformada Inversa de Laplace pode ser definida pela integral de Bromwich,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} F(s) ds, \quad (7.16)$$

onde $\sigma > 0$ é uma constante real, maior que as partes reais de todas as singularidades de $F(s)$.

7.8 Propriedades Operacionais

As propriedades operacionais auxiliam na solução de cálculos, quando uma função s não satisfaz totalmente a forma tabelada.

Teorema 7.13. Translação sobre o eixo s . Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, para qualquer a , então

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t). \quad (7.17)$$

Teorema 7.14. Translação sobre o eixo t . Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{pt} F(s)\} = \mathcal{U}(t-p) f(t-p). \quad (7.18)$$

Teorema 7.15. Linearidade. Seja α e β constantes quaisquer, enquanto $F(s)$ e $G(s)$ são funções com Transformadas Inversas de Laplace $f(t)$ e $g(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \alpha f(t) + \beta g(t), \quad (7.19)$$

onde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$.

Teorema 7.16. Mudança de Escala. Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(ps)\} = \frac{1}{p} f\left(\frac{t}{p}\right), \text{ para } p \neq 0. \quad (7.20)$$

Teorema 7.17. Transformadas Inversa de uma Derivada. Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{F^n(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d^n}{ds^n} F(s)\right\} = (-1)^n t^n f(t). \quad (7.21)$$

Teorema 7.18. Transformada Inversa de Integrais. Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty F(u)du\right\} = \frac{f(t)}{t}. \quad (7.22)$$

Teorema 7.19. Multiplicação por s^n . Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ e $f(0) = 0$, então

$$\mathcal{L}\{sF(s)\} = f'(t). \quad (7.23)$$

O efeito de multiplicação por s é derivar $f(t)$. Se $f(0) \neq 0$, então $\mathcal{L}^{-1}\{F(s) - f(0)\} = f'(t)$.

Teorema 7.20. Divisão por s . Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)du. \quad (7.24)$$

Teorema 7.21. Teorema da Convolução. Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ e $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(u)g(t-u)du = f * g. \quad (7.25)$$

7.9 Métodos Analíticos para determinar a Transformada Inversa de Laplace

Na matemática, existem diversos métodos para inversão analítica da Transformada de Laplace, entre eles: o método de frações parciais, a fórmula complexa de inversão apresentada na Eq.(3.25) e a fórmula de desenvolvimento de Heaviside.

Em seguida, apresentam-se os métodos de frações parciais e a fórmula de desenvolvimento de Heaviside, segundo Spiegel (1965); Schiff (1999).

7.10 Método de Frações Parciais

Qualquer função racional do tipo $F(s) = \frac{G(s)}{H(s)}$ onde $G(s)$ e $H(s) \neq 0$ são polinômios, com o grau de $G(s)$ menor do que o de $H(s)$ pode ser decomposta em soma de funções racionais, também conhecidas como frações parciais.

Na sequência, apresentam-se algumas formas de decompor frações parciais:

(i) Para cada fator linear da forma $H(s) = (ps + t)$ corresponde a uma fração parcial da forma $\frac{A}{(ps + t)}$, A constante.

(ii) Para cada fator linear repetido da forma $H(s) = (ps + t)^n$ corresponde a uma fração parcial da forma $\frac{A_1}{(ps + t)} + \frac{A_2}{(ps + t)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ps + t)^n}$, onde $A_1, A_2, \dots, A_n$ são constantes.

(iii) Para cada fator quadrático da forma $H(s) = (ps^2 + ts + c)$, corresponde a uma fração parcial da forma $\frac{As + B}{(ps^2 + ts + c)}$, onde A e B são constantes.

(iv) Para cada fator quadrático repetido da forma $H(s) = (ps^2 + ts + c)^n$, corresponde a uma fração parcial da forma $\frac{A_1s + B_1}{ps^2 + ts + c} + \frac{A_2s + B_2}{(as^2 + bs + c)^2} + \dots + \frac{A_ns + B_n}{(ps^2 + ts + c)^n}$, onde $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ são constantes.

A Transformada Inversa de Laplace de cada uma das frações parciais $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ é obtida da seguinte maneira: iguala-se a fração $F(s) = \frac{G(s)}{H(s)}$ à soma de frações encontradas, eliminando os denominadores e identificando os coeficientes de potências iguais de s , com isso, chega-se a um conjunto de equações lineares e através dele obtêm-se os valores para constantes A, B , etc.

7.11 Fórmula de Desenvolvimento de Heaviside

Seja $F(s) = \frac{G(s)}{H(s)}$ uma função racional que satisfaz às condições:

(i) $G(s)$ e $H(s)$ são polinômios, e $H(s) \neq 0$;

(ii) grau (G) < grau(H),

suponha que $H(s)$ possua n zeros distintos $\alpha_k = 1, 2, 3, \dots, n$. Então

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{H(s)} \right\} = \sum_{k=1}^n \frac{G(\alpha_k)}{H'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t} \quad (7.26)$$

onde $H'(\alpha_k)$ é a derivada de $H(\alpha_k)$ avaliada na sua k -ésima raiz.

8 APÊNDICE II

A integração numérica é um método matemático empregado para estimar numericamente o valor de uma integral definida de uma função. Essa abordagem é aplicada quando a integral não pode ser calculada de maneira analítica devido à complexidade da função. Com isso, a técnica envolve a discretização do intervalo de integração por meio da subdivisão deste em subintervalos menores.

Nesse capítulo, são apresentados alguns conceitos e definições das técnicas de integração numérica, segundo Ruggiero e Lopes (2000); Arenales e Darezzo (2008); Epperson (2013); Luther (2022).

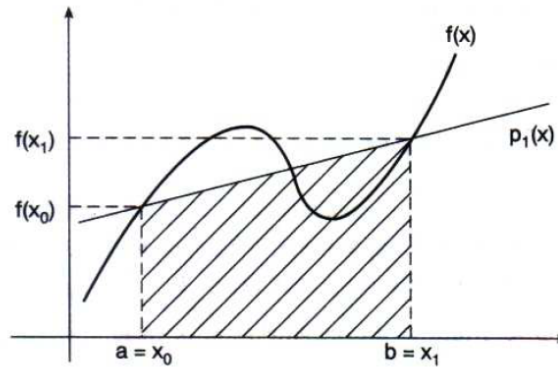
8.1 Regra do Trapézio (Simples)

Suponha o intervalo $[a, b]$, com h sendo o tamanho do segmento, $h = b - a$. A fórmula para a Regra dos Trapézios Simples é definida como

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} \right], \quad (8.1)$$

cuja interpretação geométrica pode ser vista na Figura 8.1, onde f é contínua.

Figura 8.1: Representação gráfica

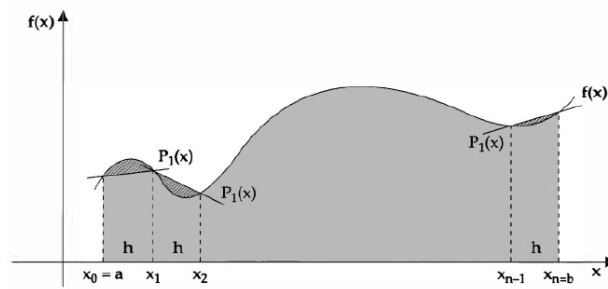


Fonte: Ruggiero e Lopes (2000)

8.2 Regra dos Trapézios (Composta)

A Regra dos Trapézios Composta consiste na subdivisão do intervalo de integração $[a, b]$ em n subintervalos iguais, cada qual de comprimento $h = \frac{b-a}{n}$, e na aplicação da Regra dos Trapézios Simples em cada subintervalo compreendido entre dois pontos consecutivos, como mostra a Figura 8.2.

Figura 8.2: Representação gráfica da Regra dos Trapézios Composta



Fonte: Arenales e Darrezzo (2008)

Note que $P_1(x)$ são polinômios lineares que interpolam por partes a função f , e que

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \cdots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)] =$$

$$\frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]. \quad (8.2)$$

Ao observar a repetição de termos na soma, percebe-se a possibilidade de simplificar a Eq. (8.2), resultando na obtenção da Regra dos Trapézios Composta,

$$\frac{h}{2} \left[f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right] = h \left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right], \quad (8.3)$$

onde x_i são os pontos de subdivisão de $[a, b]$ e $i = 1, 2, \dots, n-1$.

8.3 Regra do Ponto Médio

A Regra do Ponto Médio é um método de integração numérica baseada na soma de Riemann, em que o intervalo de integração $[a, b]$ é subdividido em n subintervalos igualmente espaçados e a função é avaliada no ponto médio de cada subintervalo.

Assim, para realizar a soma de Riemann de uma função $f(x)$ ao longo do intervalo $[a, b]$, seleciona-se uma partição $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, onde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, e um conjunto $S = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$, onde $x_{i-1} \leq x_i^* \leq x_i$ para todo i .

Desse modo, a soma de Riemann é dada por

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i,$$

onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ é o comprimento do i -ésimo subintervalo.

Considere que $f(x)$ é contínua em $[a, b]$. Seja n número inteiro positivo e $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Se $[a, b]$ é dividido em n subintervalos, cada um de comprimento Δx , e m_i é o ponto médio do

i -ésimo subintervalo, a Regra do Ponto Médio é dada por

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(m_i)\Delta x. \quad (8.4)$$

9 APÊNDICE III

Neste apêndice, apresenta-se o cálculo para reescrever a integral complexa de inversão da Eq. (3.1) em termos de θ , utilizando o contorno $s(\theta) = r\theta(\cot(\theta) + i)$, $-\pi < \theta < \pi$.

Seja $F(s) = F(s(\theta))$ e $e^{ts} = e^{ts(\theta)}$, então escreve-se

$$F(s(\theta)) = F(r\theta(\cot(\theta) + i))$$

e

$$e^{s(\theta)t} = e^{t(r\theta(\cot(\theta)+i))} = e^{tr\theta \cot(\theta)} \cdot e^{tr\theta i}.$$

Derivando s em relação a θ obtêm-se

$$\frac{ds}{d\theta} = ri + r\{\theta(-\csc^2(\theta)) + \cot(\theta) \cdot 1\} = ri - r\theta \csc^2(\theta) + r \cot(\theta),$$

ou ainda,

$$ds = [ri + r \cot(\theta) - r\theta \csc^2(\theta)]d\theta.$$

Reescrevendo-se $f(t)$, tem-se

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} F(r\theta(\cot(\theta) + i)) e^{tr\theta \cot(\theta)} \cdot e^{tr\theta i} \underbrace{(ri + r \cot(\theta) - r\theta \csc^2(\theta))}_p d\theta.$$

Seja

$$p = (ri + r \cot(\theta) - r\theta \underbrace{(\csc^2(\theta) + 1 - 1)}_{\cot^2(\theta)}) = ri + r \cot(\theta) - r\theta \cot^2(\theta) - r\theta = ri(1 - i \cot(\theta) + i\theta \cot^2(\theta) + i\theta)$$

$$p = ri[1 + i(-\cot(\theta) + \theta \cot^2(\theta) + \theta)] = ri\{1 + i \underbrace{[\theta + \cot(\theta)(-1 + \theta \cot(\theta))]}_{\sigma(\theta)}\} = \underbrace{ri\{1 + i\sigma(\theta)\}}_{s'(\theta)}.$$

Logo, obtêm-se a Eq. (3.8)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ts(\theta)} F(s(\theta)) s'(\theta) d\theta.$$

10 APÊNDICE IV

Neste apêndice demonstra-se a propriedade da simetria do conjugado da Transformada de Laplace, ou seja, $F(s) = \overline{F(\bar{s})}$. Além disso, detalha-se a transição entre a Eq. (3.8) e a Eq. (3.9).

Demonstração. A definição da Transformada de Laplace é dada por

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (10.1)$$

Seja a variável complexa $s = a + bi$, então o conjugado de s é dado por $\bar{s} = a - bi$. Substituindo s e $\bar{s}$ na Eq. (10.1), tem-se que

$$F(s) = F(a + bi) = \int_0^{+\infty} e^{-(a+bi)t} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-bit} f(t) dt \quad (10.2)$$

e

$$F(\bar{s}) = F(a - bi) = \int_0^{+\infty} e^{-(a-bi)t} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{bit} f(t) dt. \quad (10.3)$$

Tomando o conjugado de $F(s)$ na Eq. (10.2), têm-se que

$$\overline{F(s)} = \overline{\int_0^{+\infty} e^{-(a+bi)t} f(t) dt} = \int_0^{+\infty} \overline{e^{-at} e^{-bit} f(t)} dt = \int_0^{+\infty} \overline{f(t)} e^{-at} e^{bit} dt. \quad (10.4)$$

Dessa forma, observa-se que $\overline{F(s)} = F(\bar{s})$. Então tomando o conjugado da Eq. (10.3), obtêm-se que

$$\begin{aligned} \overline{F(\bar{s})} &= \overline{F(a - bi)} = \int_0^{+\infty} \overline{e^{-(a-bi)t} f(t)} dt = \int_0^{+\infty} \overline{e^{(-a+bi)t} f(t)} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-bit} \overline{f(t)} dt. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Portanto, $F(s) = \overline{F(\bar{s})}$. □

A Eq. (3.8) é dada por

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ts(\theta)} F(s(\theta)) s'(\theta) d\theta,$$

onde $s(\theta) = r\theta(\cot(\theta) + i)$ e $s'(\theta) = ir(1 + i\sigma(\theta))$.

Substituindo $s'(\theta)$ e multiplicando ambos os lados por $2\pi i$ na Eq. (3.8), obtêm-se

$$2\pi i f(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ts(\theta)} F(s(\theta)) ir(1 + i\sigma(\theta)) d\theta. \quad (10.6)$$

Aplicando a propriedade da multiplicação por uma constante das integrais definidas (Anton et al., 2014) na Eq. (10.6) tem-se

$$2\pi i f(t) = ir \int_{-\pi}^{\pi} e^{ts(\theta)} F(s(\theta))(1 + i\sigma(\theta)) d\theta.$$

Empregando a propriedade de aditividade das integrais definidas (Anton et al., 2014), chega-se a

$$2\pi i f(t) = ir \left[\int_{-\pi}^0 e^{ts(\theta)} F(s(\theta))(1 + i\sigma(\theta)) d\theta + \int_0^{\pi} e^{ts(\theta)} F(s(\theta))(1 + i\sigma(\theta)) d\theta \right]. \quad (10.7)$$

Embora os limites de integração da Eq. (10.7) sejam diferentes, o integrando de ambas as integrais é igual. No entanto, ao tomar o conjugado de um dos integrandos, é possível tornar os limites de integração equivalentes, como mostra a Eq. (10.8):

$$2\pi i f(t) = ir \left[\int_0^{\pi} e^{t\overline{s}(\theta)} F(\overline{s(\theta)})(1 - i\sigma(\theta)) d\theta + \int_0^{\pi} e^{ts(\theta)} F(s(\theta))(1 + i\sigma(\theta)) d\theta \right]. \quad (10.8)$$

Sabendo que f é real e aplicando a propriedade $F(s) = \overline{F(\overline{s})}$, obtêm-se

$$\begin{aligned} 2\pi i f(t) &= 2ir \Re \left[\int_0^{\pi} e^{ts(\theta)} F(s(\theta))(1 + i\sigma(\theta)) d\theta \right] \\ f(t) &= \frac{2ir \Re}{2\pi i} \left[\int_0^{\pi} e^{ts(\theta)} F(s(\theta))(1 + i\sigma(\theta)) d\theta \right] \\ f(t) &= \frac{r}{\pi} \int_0^{\pi} \Re[e^{ts(\theta)} F(s(\theta))(1 + i\sigma(\theta))] d\theta. \end{aligned} \quad (10.9)$$

11 APÊNDICE V

Neste apêndice, apresenta-se a aplicação da Regra dos Trapézios Composta (Eq. (8.3)) na Eq. (3.9), que é dada por

$$f(t) = \frac{r}{\pi} \int_0^\pi \Re[e^{ts(\theta)} F(s(\theta))(1 + i\sigma(\theta))] d\theta.$$

Aplicando a Regra dos Trapézios Composta na Eq. (3.9), têm-se:

$$\begin{aligned} & \frac{r}{\pi} \int_0^\pi \Re[e^{ts(\theta)} F(s(\theta))(1 + i\sigma(\theta))] d\theta \approx \\ & \frac{r}{\pi} \cdot \frac{\pi}{M} \left[\frac{\Re[e^{ts(0)} F(s(0))(1 + i\sigma(0))] + \Re[e^{ts(\pi)} F(s(\pi))(1 + i\sigma(\pi))]}{2} \right] + \\ & \sum_{k=1}^{M-1} \Re[e^{ts(\theta_k)} F(s(\theta_k))(1 + i\sigma(\theta_k))], \end{aligned} \quad (11.1)$$

onde $\theta_k = k\pi/M$.

Calculando os limites de $s(\theta)$ e $\sigma(\theta)$ quando θ se aproxima de zero, têm-se:

$$s(0) = \lim_{\theta \rightarrow 0} s(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0} [r\theta(\cot(\theta) + i)] = r \lim_{\theta \rightarrow 0} \left[\theta \cot(\theta) + \overbrace{\theta i}^0 \right] = r \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = r \lim_{\theta \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\cos(\theta)}{\frac{\theta}{1}}}_{1} = r.$$

$$\sigma(0) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \sigma(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \{ \theta + [(\theta \cot(\theta) - 1) \cot(\theta)] \} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left[\overbrace{\theta}^0 + \theta \cot^2(\theta) - \cot(\theta) \right]$$

$$\sigma(0) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left[\theta \frac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} - \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right] = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left[\theta \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \cdot \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} - \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right]$$

$$\sigma(0) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left[\frac{\cos(\theta)}{\frac{\theta}{1}} \cdot \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} - \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right] = \lim_{\theta \rightarrow 0} (\theta \cot^2(\theta) - \cot(\theta)) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta \cos^2(\theta) - \cos(\theta) \sin(\theta)}{\sin^2(\theta)}.$$

Usando a identidade trigonométrica $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta) \cos(\theta)$, têm-se:

$$\sigma(0) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta \cos^2(\theta) - \frac{\sin(2\theta)}{2}}{\sin^2(\theta)}.$$

Aplicando L'Hospital, obtêm-se

$$\sigma(0) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos^2(\theta) - \theta \sin(2\theta) - \cos(2\theta)}{\sin(2\theta)},$$

e aplicando L'Hospital novamente:

$$\sigma(0) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{-2 \cos(\theta) \sin(\theta) - \sin(2\theta) - 2\theta \cos(2\theta) + 2 \sin(2\theta)}{2 \cos(2\theta)} = 0.$$

Assim,

$$\Re[e^{\overbrace{t}^r \overbrace{s(0)}^r} F(\overbrace{s(0)}^r) (1 + i \underbrace{\sigma(0)}_0)] = \Re[e^{tr} F(r)] \quad (11.2)$$

e

$$\Re[e^{ts(\pi)} F(s(\pi)) (1 + i\sigma(\pi))]. \quad (11.3)$$

não está definida em $\theta = \pi$, pois o intervalo é aberto em π .

Desse modo, a Eq. (3.9) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \frac{r}{\pi} \cdot \frac{\pi}{M} \int_0^\pi \Re[e^{ts(\theta)} F(s(\theta)) (1 + i\sigma(\theta))] d\theta \approx \\ & \frac{r}{\pi} \cdot \frac{\pi}{M} \left\{ \Re\left(\frac{e^{tr} F(r)}{2}\right) + \sum_{k=1}^{M-1} \Re[e^{ts(\theta_k)} F(s(\theta_k)) (1 + i\sigma(\theta_k))] \right\}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Reorganizando os termos, obtém-se

$$f_{TF}(t, M) \approx \frac{r}{M} \left(\frac{1}{2} F(r) e^{rt} + \sum_{k=1}^{M-1} \Re[e^{ts(\theta_k)} F(s(\theta_k)) (1 + i\sigma(\theta_k))] \right). \quad (11.5)$$