

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

**IDENTIFICAÇÃO DO COEFICIENTE DE RIGIDEZ NO  
MODELO DE EULER-BERNOULLI PARA VIGAS**

por

Elisa Ferreira Medeiros

Dissertação para obtenção do Título de  
Mestre em Modelagem Computacional

Rio Grande, Maio, 2019

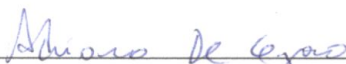
Elisa Ferreira Medeiros

“ Identificação do coeficiente de rigidez no modelo de Euler-Bernoulli para vigas. ”

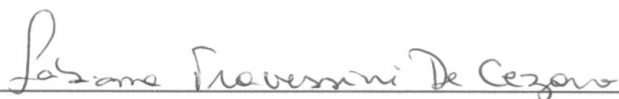
Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande - FURG, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área concentração: Modelagem Computacional.

Aprovado em

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Adriano De Cezaro  
Orientador – FURG



Profª. Drª. Fabiana Travassini De Cezaro  
Coorientadora - FURG



Profª. Drª. Bárbara D. Rodrigues  
FURG



Prof. Dr. Antonio C. G. Leitão  
UFSC

Rio Grande - RS  
2019

### Ficha catalográfica

M488i Medeiros, Elisa Ferreira.

Identificação do coeficiente de rigidez no modelo de Euler-Bernoulli para vigas / Elisa Ferreira Medeiros. – 2019.  
89 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Rio Grande/RS, 2019.

Orientador: Dr. Adriano de Cezaro.

Coorientadora: Dra. Fabiana Travessini de Cezaro.

1. Modelo de Euler-Bernoulli 2. Problema Inverso  
3. Regularização I. Cezaro, Adriano de II. Cezaro, Fabiana Travessini de III. Título.

CDU 004

# AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus e Nossa Senhora de Fátima pelo amor infinito e por nunca esquecerem de mim.

Agradeço ao meu orientador professor Adriano por todos os ensinamentos, pela sua paciência e confiança, pelo exemplo de professor, dedicado e comprometido me inspirando cada dia mais.

À minha coorientadora, professora Fabiana, pelas contribuições no desenvolvimento deste trabalho, pelo incentivo e por toda acolhida.

Agradeço à minha mãe, Maria Helena, por acreditar nos meus sonhos e nunca me deixar desistir. Por seu amor incondicional e por ser minha inspiração, sempre!

À minha avó, Vilma, por seu amor e constante fé em mim.

Agradeço a minha família e amigos por entenderem minhas angústias e por todo apoio incansável. Ao meu namorado, Rafael, por todo incentivo, por compreender minhas ausências e ainda assim, acreditar nesse sonho junto comigo. Obrigada meu amor!

Aos membros da banca professores Bárbara e Antonio, pelas contribuições e sugestões feitas para a melhoria deste trabalho.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional e à Universidade Federal do Rio Grande pela oportunidade e a todos os professores que contribuíram para a minha formação ao longo desses anos.

# RESUMO

Neste trabalho analisamos o problema de identificação do coeficiente de rigidez, em vigas modeladas pela equação de Euler-Bernoulli estática, a partir de medidas indiretas da deflexão da viga. Apresentamos o problema na forma de uma equação de operadores (parâmetros para solução) provando, em topologias apropriadas, propriedades importantes como continuidade e compacidade. A compacidade do operador implica, em particular, que o problema inverso é mal-posto no sentido de Hadamard, ou seja, o problema de identificação do coeficiente é instável com relação aos erros nas medidas. Provamos a unicidade para o coeficiente de rigidez utilizando hipóteses mínimas com relação a sua suavidade. Ainda, apresentamos o método de molificação e o método iterativo de Landweber para obtermos soluções aproximadas estáveis. Como o operador parâmetro para solução é não linear, provamos que este operador é Fréchet diferenciável e que satisfaz a condição de cone tangente. Estes resultados e uma estratégia de parada dada pelo princípio de discrepância são o suficiente para garantir que a iteração de Landweber é estável e convergente (com relação aos ruídos nas medidas). Por fim, apresentamos alguns exemplos numéricos mostrando os efeitos de estabilidade e convergência das soluções aproximadas.

**Palavras-chave:** Modelo de Euler-Bernoulli. Problema inverso. Regularização.

# ABSTRACT

In this work, we analyze the nonlinear inverse problem of flexural rigidity coefficient identification in the static Euler-Bernoulli equation, from indirect beam deflection measurements. We introduce the problem in the form of an operator equation (parameters-to-solution map) that we call the forward operator. We prove, in an appropriate topology, continuity and compactness for the forward operator. In particular, operator's compactness implies that the coefficient identification inverse problem is ill-posed in the sense of Hadamard. In other words, the rigidity coefficient identification problem is unstable with respect to errors in measurements. Furthermore, we prove the uniqueness for the flexural rigidity coefficient identification using least smoothness assumptions. We also propose the use of the mollification technique and the Landweber iterative method to obtain a stable approximate solutions. In order to prove convergence and stability (with respect to the errors in the measurements) for the Landweber iteration, we use a stopping rule given by discrepancy principle and prove Frechet differentiability and the tangential cone condition for the forward operator. Finally, we illustrate the theoretical achievements with some numerical examples.

**Palavras-chaves:** Euler-Bernoulli model. Inverse Problem. Regularization.

# ÍNDICE

|          |                                                                                     |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Modelo Matemático: Equação de Euler-Bernoulli</b>                                | <b>16</b> |
| 1.1      | Um breve percurso pela resistência dos materiais . . . . .                          | 16        |
| 1.2      | Equação Diferencial Ordinária de Euler-Bernoulli . . . . .                          | 18        |
| <b>2</b> | <b>Resultados Preliminares</b>                                                      | <b>22</b> |
| 2.1      | Resultados preliminares de Análise Funcional . . . . .                              | 22        |
| 2.2      | Existência e Unicidade para problemas de valor de contorno . . . . .                | 26        |
| 2.3      | Método de <i>Shooting</i> . . . . .                                                 | 28        |
| 2.3.1    | Método de <i>Shooting</i> Linear . . . . .                                          | 28        |
| 2.3.2    | Método de <i>Shooting</i> Não Linear . . . . .                                      | 30        |
| 2.3.3    | Existência: Resultado Baxley . . . . .                                              | 30        |
| <b>3</b> | <b>Problemas Direto e Inverso</b>                                                   | <b>36</b> |
| 3.1      | Problema Direto e Problema Inverso . . . . .                                        | 36        |
| 3.2      | Métodos de Regularização . . . . .                                                  | 38        |
| 3.2.1    | Métodos de Molificação . . . . .                                                    | 39        |
| 3.2.2    | Método de Landweber . . . . .                                                       | 40        |
| <b>4</b> | <b>Problema Direto na equação de Euler-Bernoulli</b>                                | <b>44</b> |
| 4.1      | Problema Direto: existência e unicidade . . . . .                                   | 44        |
| 4.2      | Problema Direto como uma equação de operadores . . . . .                            | 51        |
| 4.2.1    | Propriedades do operador parâmetros para solução . . . . .                          | 51        |
| <b>5</b> | <b>Problema inverso na equação de Euler-Bernoulli</b>                               | <b>54</b> |
| 5.1      | O problema de identificação do coeficiente de rigidez da viga é mal-posto . . . . . | 54        |
| 5.2      | Unicidade para o Problema Inverso . . . . .                                         | 57        |
| 5.2.1    | Unicidade para problema inverso: Resultado devido a D. Lesnic . . . . .             | 57        |
| 5.2.2    | Unicidade para problema inverso: Coeficientes em $L^\infty[0, L]$ . . . . .         | 64        |
| <b>6</b> | <b>Métodos de Regularização para a identificação do coeficiente de rigidez</b>      | <b>67</b> |
| 6.1      | Método de Molificação para segunda derivada na Equação de Euler-Bernoulli . . . . . | 67        |
| 6.2      | Método de Landweber não linear para identificação do coeficiente . . . . .          | 69        |
| <b>7</b> | <b>Resultados Numéricos e Discussões</b>                                            | <b>77</b> |
| 7.1      | Exemplos Numéricos usando o Método de Molificação . . . . .                         | 78        |
| 7.2      | Exemplos Numéricos usando o Método de Landweber . . . . .                           | 82        |

|          |                                       |           |
|----------|---------------------------------------|-----------|
| <b>8</b> | <b>Conclusões e Trabalhos Futuros</b> | <b>87</b> |
| 8.0.1    | Trabalhos futuros . . . . .           | 87        |

# LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                                                                              |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1.1: Viga antes da deformação. . . . .                                                                                                                | 16 |
| Figura 1.2: Viga depois da deformação. . . . .                                                                                                               | 17 |
| Figura 1.3: Viga e seu eixo de simetria e superfície neutra. . . . .                                                                                         | 17 |
| Figura 1.4: Viga sujeita a pequenas deformações. . . . .                                                                                                     | 17 |
| Figura 1.5: Equilíbrio para um elemento infinitesimal da viga. . . . .                                                                                       | 18 |
| Figura 1.6: Rotação da seção transversal de um elemento da viga. . . . .                                                                                     | 19 |
| Figura 1.7: Engastada em uma extremidade e livre na outra - Viga em balanço. . . .                                                                           | 20 |
| Figura 1.8: Simplesmente apoiada. . . . .                                                                                                                    | 20 |
| Figura 1.9: Extremidade engastada e outra apoiada. . . . .                                                                                                   | 21 |
| Figura 3.1: Representação do modelo direto e inverso . . . . .                                                                                               | 36 |
| Figura 7.1: Solução $u(x)$ com e sem ruídos do Exemplo 7.0.1. . . . .                                                                                        | 77 |
| Figura 7.2: Coeficiente sem ruídos e com nível de ruídos $\delta = 0.001$ . . . . .                                                                          | 78 |
| Figura 7.3: Coeficiente reconstruído para $\alpha = 0.057$ e nível de ruído $\delta = 0.00001$ . . . .                                                       | 79 |
| Figura 7.4: Coeficiente reconstruído para $\alpha = 0.09$ e nível de ruído $\delta = 0.0001$ . . . .                                                         | 79 |
| Figura 7.5: Coeficiente reconstruído para $\alpha = 0.12$ e nível de ruído $\delta = 0.001$ . . . . .                                                        | 80 |
| Figura 7.6: Coeficiente reconstruído para $\alpha = 0.05$ e nível de ruído $\delta = 0.0001$ . . . .                                                         | 81 |
| Figura 7.7: Coeficiente reconstruído para $\alpha = 0.079$ e nível de ruído $\delta = 0.001$ . . . .                                                         | 81 |
| Figura 7.8: Coeficiente reconstruído para $\alpha = 0.09$ e nível de ruído $\delta = 0.01$ . . . . .                                                         | 81 |
| Figura 7.9: Coeficiente reconstruído para $k = 2$ e nível de ruído $\delta = 0.01$ . . . . .                                                                 | 83 |
| Figura 7.10: Coeficiente reconstruído para $k = 50$ e nível de ruído $\delta = 0.01$ . . . . .                                                               | 83 |
| Figura 7.11: Coeficiente reconstruído para $k^* = 150$ , com $k^*$ satisfazendo o princípio<br>da discrepância, e nível de ruído $\delta = 0.01$ . . . . .   | 84 |
| Figura 7.12: Curva do erro do Exemplo 7.2.1. . . . .                                                                                                         | 84 |
| Figura 7.13: Coeficiente reconstruído para $k = 50$ e nível de ruído $\delta = 0.001$ . . . . .                                                              | 85 |
| Figura 7.14: Coeficiente reconstruído para $k = 2000$ e nível de ruído $\delta = 0.001$ . . . . .                                                            | 85 |
| Figura 7.15: Coeficiente reconstruído para $k^* = 6500$ , com $k^*$ satisfazendo o princípio<br>da discrepância, e nível de ruído $\delta = 0.001$ . . . . . | 85 |
| Figura 7.16: Curva do erro do Exemplo 7.2.2. . . . .                                                                                                         | 86 |

## LISTA DE TABELAS

|                                                                    |    |
|--------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 7.1: Parâmetro $\alpha$ e nível de ruído $\delta$ . . . . . | 79 |
| Tabela 7.2: Parâmetro $\alpha$ e nível de ruído $\delta$ . . . . . | 80 |
| Tabela 7.3: Parâmetros utilizados no Exemplo 7.2.1. . . . .        | 83 |
| Tabela 7.4: Parâmetros utilizados no Exemplo 7.2.2. . . . .        | 84 |

## LISTA DE SÍMBOLOS

|               |                                                  |
|---------------|--------------------------------------------------|
| $M(x)$        | Momento fletor.                                  |
| $V(x)$        | Força de cisalhamento.                           |
| $E$           | Módulo de elasticidade.                          |
| $I$           | Momento de área.                                 |
| $L$           | Comprimento da viga.                             |
| $u(x)$        | Deflexão.                                        |
| $a(x)$        | Coefficiente de rigidez.                         |
| $A^*$         | Operador adjunto de $A$ .                        |
| $A^{-1}$      | Operador inverso de $A$ .                        |
| $F'$          | Operador derivada de Fréchet do operador $F$ .   |
| $\theta$      | Ângulo de rotação.                               |
| $\kappa$      | Curvatura                                        |
| $\rho$        | Raio de curvatura.                               |
| $\rho_\alpha$ | Núcleo gaussiano de raio $\alpha$ .              |
| $\delta$      | Nível de ruídos.                                 |
| $\alpha$      | Parâmetro de regularização.                      |
| $\tau$        | Parâmetro de relaxamento do método de Landweber. |
| $J_\alpha$    | Operador de molificação.                         |

# INTRODUÇÃO

As vigas são um dos elementos mais importantes em quase todos os projetos de engenharia, pois suportam diversos tipos de carregamentos. Por exemplo, elas são utilizadas como elementos de suporte em edifícios, plataformas de pontes, asas de aviões e, até mesmo, muitos dos ossos do corpo humano agem como vigas (HIBBELER, 2006; GERE, 2009). Devido a sua função de suporte, inúmeros estudos a respeito das propriedades estruturais das vigas e de sua capacidade de carga têm sido conduzidos, principalmente, quando envolvem análises de segurança e confiabilidade dessas estruturas.

Um tipo de problema bastante tradicional na mecânica consiste em avaliar a resposta de uma viga, quando conhecemos a força aplicada e os parâmetros da estrutura, como por exemplo, sua geometria ou propriedades dos materiais utilizados na sua composição. A este problema denominamos problema direto (CADDEMI; MORASSI, 2013; LUCCHINETTI; STÜSSI, 2002; MARINOV; MARINOVA; VATSALA, 2015). Do ponto de vista matemático, resolver o problema direto consiste em obter uma solução para a equação diferencial que modela o problema da deflexão da viga, conhecidas as forças atuantes, os parâmetros do modelo que determinam as propriedades mecânicas e geométricas da viga e as condições iniciais e de contorno que determinam o tipo de viga (HIBBELER, 2006).

Uma outra abordagem com relação ao estudo das vigas envolve o desenvolvimento de técnicas para diagnosticar possíveis danos ou desgastes internos nas estruturas (vigas) a partir de medidas indiretas, por exemplo, medidas de sua deformação. Os danos estão relacionados às alterações dos materiais internos da estrutura. O que ocorre, de fato, é que as propriedades dessas estruturas se modificam ou se desgastam seja por corrosão, fadiga ou mesmo danos acidentais. Logo, se torna de extrema importância detectar essas imperfeições utilizando de métodos não destrutivos, (GHRIB; LI; WILBUR, 2011; KAWANO, 2017; LIU; CHEN, 2002; MARINOV; VATSALA, 2008; MARINOV; MARINOVA; VATSALA, 2015). Assim, a avaliação de confiabilidade e integridade das estruturas está intimamente ligada ao conhecimento dos parâmetros que descrevem as propriedades da viga, a partir de medidas indiretas da resposta da estrutura quando uma força conhecida é aplicada (GHRIB; LI; WILBUR, 2011; KAWANO, 2017; LIU; CHEN, 2002; MARINOV; VATSALA, 2008; MARINOV; MARINOVA; VATSALA, 2015). A este problema denominamos problema inverso.

Estas técnicas que permitem avaliar a condição de risco dessas estruturas sem a necessidade de testes destrutivos podem ser tanto de natureza estática quanto dinâmica. Isso dependerá dos tipos de dados que serão medidos. Neste trabalho iremos analisar o comportamento estático das vigas modelado pela teoria clássica das vigas, a teoria de Euler-Bernoulli (GERE, 2009; HIBBELER, 2006) segundo a equação

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( a(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right) = f(x), \quad 0 < x < L,$$

onde  $a(x)$  é o produto do módulo de elasticidade  $E$  pelo momento de área  $I$ , denominada *rigidez* a *flexão*,  $f(x)$  são as forças distribuídas perpendicularmente ao longo da viga e  $u(x)$  a deflexão.

Nosso interesse está na identificação do parâmetro de rigidez  $a(x)$  da viga a partir de dados da deflexão  $u$  medidos quando uma força conhecida  $f(x)$  age sobre ela. Ou seja, vamos analisar o problema inverso associado a equação de Euler-Bernoulli. Como na prática as medidas estão sujeitas a erros e os problemas inversos são, em geral, instáveis em relação a tais erros nas medidas, será necessário adotarmos uma estratégia que compense a precisão na obtenção da solução com relação aos erros nas medidas. Tais estratégias são conhecidas como métodos de regularização para problemas inversos.

De acordo com nossa pesquisa na literatura, MARINOV; VATSALA (2008) apresenta uma fórmula explícita para obter um coeficiente de rigidez constante por partes, mas a técnica utilizada exige a hipótese de que se conheça os pontos da viga onde os coeficientes mudam de valor. Tal hipótese não tem aplicações práticas, pois tal conhecimento implica em saber de antemão onde a viga sofreu rupturas. Além disso, a fórmula obtida depende de um quociente que envolve a segunda derivada dos dados (da deformação da viga). O problema de derivação nos dados é bem conhecido por ser um problema instável (DE CEZARO; LEITÃO, 2008).

Em LERMA; HINESTROZA (2017), uma equação explícita também é proposta para obter o coeficiente de rigidez, mas agora utilizando as funções de Green. No entanto, da mesma forma a fórmula obtida depende da derivada dos dados. Assim, LERMA; HINESTROZA (2017) propõe métodos de regularização como Molificação e Landweber para estabilizar o problema de diferenciação. Já LESNIC; ELLIOTT; INGHAM (1999) propõe o método de regularização de Tikhonov de primeira ordem para determinar uma aproximação estável com relação às medidas. Além disso, diferente dos trabalhos que observamos na literatura, um resultado de unicidade para o problema de identificação de  $a(x)$  a partir do conhecimento de  $u$  foi apresentado. No entanto, tal resultado é válido para coeficientes que sejam pelo menos continuamente diferenciáveis em todos os pontos da viga. Desta forma, não pode ser aplicado para o caso em que a viga tenha falhas, pois neste caso o coeficiente de rigidez deve ter algum tipo de descontinuidade, resultado para o qual o interesse prático é maior.

As novidades desta dissertação são:

1. Provamos um resultado de unicidade para o coeficiente de rigidez da viga utilizando hipóteses mínimas com relação a suavidade a partir do conhecimento da medida da deflexão da mesma devido a uma fonte conhecida. Este resultado garante, em particular, unicidade para coeficientes constantes por partes.
2. Formulamos o problema como uma equação de operadores - operador parâmetro para medidas. Provamos que este operador é compacto em topologias apropriadas. Isso implica que o problema inverso é mal-posto no sentido de Hadamard, mesmo sendo conhecido o resultado de unicidade.
3. Provamos que o operador parâmetro para medidas é Fréchet diferenciável e que satisfaz a condição do cone tangente (KALTENBACHER; NEUBAUER; SCHERZER, 2008).

Estes resultados garantem a possibilidade de aplicarmos métodos iterativos de regularização para o problema de identificação do coeficiente de rigidez da viga. As ideias da demonstração seguem dos resultados encontrados em KALTENBACHER; NEUBAUER; SCHERZER (2008).

4. Apresentamos resultados numéricos baseados na estratégia de molificação e no método iterativo de Landweber para coeficientes que representam características distintas da viga. Em particular, os algoritmos para o método de Landweber foram implementados pela autora desta dissertação. Estes resultados comprovam a eficácia dos métodos de regularização aplicados para níveis distintos de ruídos nos dados.

**Divisão do trabalho:** Para estabelecer uma teoria matemática e numérica consistente para a solução do problema inverso de identificação do parâmetro de rigidez da viga, dividimos o trabalho em duas partes, Parte I e Parte II.

A Parte I apresenta uma revisão da teoria geral de vigas, de análise funcional e de problemas inversos de modo a tornar esta dissertação auto-contida. Assim, para um leitor já familiarizado com estes assuntos sugerimos que comece a leitura a partir da Parte II. A Parte I está dividida da seguinte forma:

No Capítulo 1, apresentamos o modelo matemático da equação de Euler-Bernoulli juntamente com alguns conceitos físicos necessários para o entendimento do problema. Deduzimos a equação de Euler-Bernoulli que modela o problema que estudaremos.

No Capítulo 2, apontamos alguns dos principais resultados de Análise Funcional a fim de embasar a teoria matemática necessária para a obtenção da solução do problema inverso de identificação do parâmetro de interesse analisado nessa dissertação. Além de apresentarmos a teoria geral de existência e unicidade para problemas de valor de contorno juntamente com o método de *shooting*, ferramenta que será utilizada na prova de existência para o problema direto envolvendo a equação de Euler-Bernoulli.

No Capítulo 3, introduzimos algumas noções básicas da teoria geral de problemas diretos e inversos e apresentamos a principal característica que diferencia os dois, a saber, a definição de problema bem posto segundo Hadamard. Também apresentamos a teoria geral dos métodos de regularização que serão analisados nesta dissertação.

Na Parte II, discutimos o assunto central desta dissertação que envolve a análise da equação de Euler-Bernoulli na qual queremos identificar o coeficiente de rigidez em vigas. Para isso, a Parte II está dividida de forma que:

No Capítulo 4, analisamos o problema direto na equação de Euler-Bernoulli provando sua boa colocação. Além disso, apresentamos o problema como uma equação de operadores demonstrando algumas propriedades importantes do operador. Dentre elas, provamos que o operador é compacto em topologias apropriadas.

No Capítulo 5, destacamos o problema inverso de identificação do coeficiente de rigidez que é o principal problema de nosso interesse. Apresentamos a prova de que o problema é mal-posto

no sentido de Hadamard e a comprovamos com um exemplo extraído de MARCELLINI (1982). Além disso, apresentamos a unicidade da solução do problema inverso usando hipóteses menos restritivas para o coeficiente em relação às que conhecemos na literatura.

No Capítulo 6, apresentamos o método de molificação e o método iterativo de Landweber aplicados ao problema de identificação do coeficiente de rigidez da viga provando resultados de convergência e estabilidade.

No Capítulo 7, apresentamos alguns exemplos numéricos utilizando os métodos abordados no Capítulo 6, através de medidas sintéticas da deformação da viga com diferentes níveis de ruídos.

Finalizamos esta dissertação com o Capítulo 8, no qual apresentamos algumas conclusões e possíveis extensões do problema proposto nessa dissertação.

# 1 MODELO MATEMÁTICO: EQUAÇÃO DE EULER-BERNOULLI

Neste capítulo vamos apresentar o modelo de Euler-Bernoulli que descreve a deflexão em vigas quando estas suportam carregamentos perpendiculares ao seu eixo longitudinal. Para tal, apresentaremos alguns conceitos físicos necessários para o entendimento da dedução da equação.

## 1.1 Um breve percurso pela resistência dos materiais

Já vimos que as vigas são elementos estruturais submetidos a carregamentos que atuam perpendicularmente ao seu eixo longitudinal, sejam eles, forças ou momentos. Esses carregamentos podem agir sobre uma área muito pequena podendo ser simplificada a uma carga concentrada. Quando um carregamento está distribuído ao longo do eixo da viga, denominamos de carregamento distribuído. Essas cargas são forças atuantes na viga que podem ser, por exemplo, o peso de uma estrutura sobreposta a ela, o seu próprio peso ou até mesmo forças da natureza agindo nela (vento, ondas, marés, etc) (GERE, 2009; HIBBELER, 2006).

Quando algumas forças atuam sobre a viga são criadas ações internas chamadas de forças de cisalhamento e de momentos fletores. O momento fletor ( $M$ ) é responsável pela flexão da viga, ou seja, quando ele é aplicado ocorre o alongamento e compressão de fibras nas seções transversais. Dessa forma, entre elas deve existir uma superfície em que não ocorra mudança nos comprimentos das fibras longitudinais como mostram as Figuras 1.1, 1.2. Essa superfície é chamada de superfície neutra.

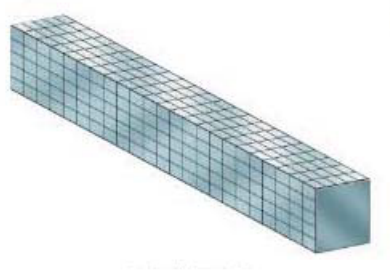


Figura 1.1: Viga antes da deformação.  
Retirada de (HIBBELER, 2006)

Assim, segundo HIBBELER (2006); GERE (2009) abordaremos as seguintes hipóteses, nas quais o modelo de Euler-Bernoulli é baseado:

- O material é linearmente elástico e satisfaz a Lei de Hooke;
- As cargas que atuam na viga são paralelas as seções transversais;

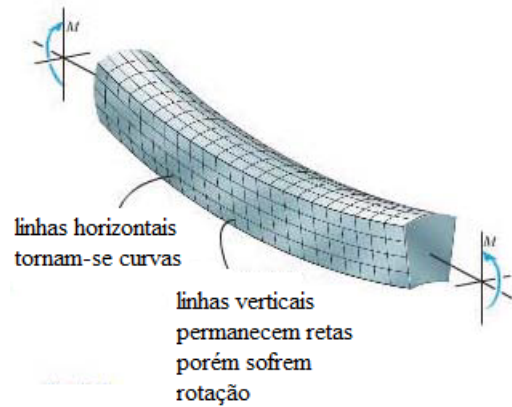


Figura 1.2: Viga depois da deformação.  
Retirada de (HIBBELER, 2006)

- A deflexão  $u$  ocorre no mesmo plano em que as cargas atuam (plano de flexão);
- A seção transversal da barra possui pelo menos um eixo de simetria, coincidente com o eixo vertical;
- O eixo longitudinal que se encontra no interior da superfície neutra não sofre alteração no comprimento conforme pode ser visto na Figura 1.3;

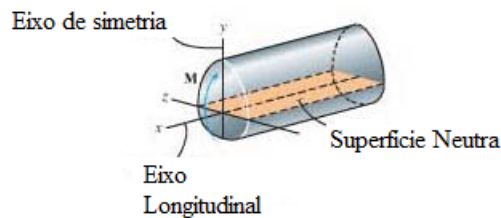


Figura 1.3: Viga e seu eixo de simetria e superfície neutra.  
Retirada de (HIBBELER, 2006).

- Quaisquer deformações cortantes foram desprezadas;
- Durante a deformação, as seções transversais permanecem planas e perpendiculares ao eixo longitudinal, ver Figura 1.4.

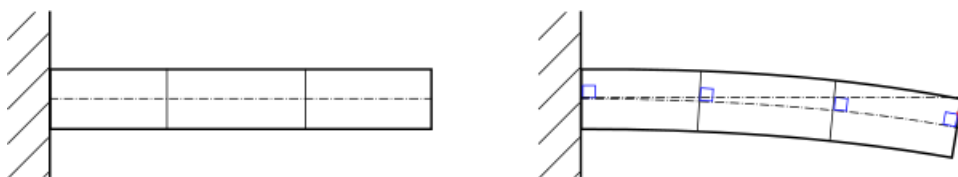


Figura 1.4: Viga sujeita a pequenas deformações.

Quando uma viga com alinhamento reto é carregada por forças atuando para cima ou para baixo, a tal estrutura sofre um deslocamento desenhando uma curva em relação a sua posição de equilíbrio, denominada curva de deflexão conforme Figura 1.4. A deflexão  $u$  da viga em qualquer ponto ao longo do seu eixo será dada pelo deslocamento desse ponto na direção vertical com relação à sua posição de equilíbrio.

## 1.2 Equação Diferencial Ordinária de Euler-Bernoulli

A partir desse momento vamos deduzir a equação de Euler-Bernoulli. As Figuras apresentadas foram adaptadas de (HAUKAAS, 2012) e a teoria foi baseada em (GERE, 2009; HAUKAAS, 2012; HIBBELER, 2006).

Quando uma força é aplicada, a viga desenvolve uma força de cisalhamento ( $V$ ) e um momento fletor ( $M$ ). O momento fletor é um esforço que tende a curvar a viga e a força de cisalhamento tende a fazer um corte no objeto. Assim, são criadas tensões e deformações em seu interior. Para deduzir a equação será necessário analisar o equilíbrio das forças e dos momentos conforme a Figura 1.5.

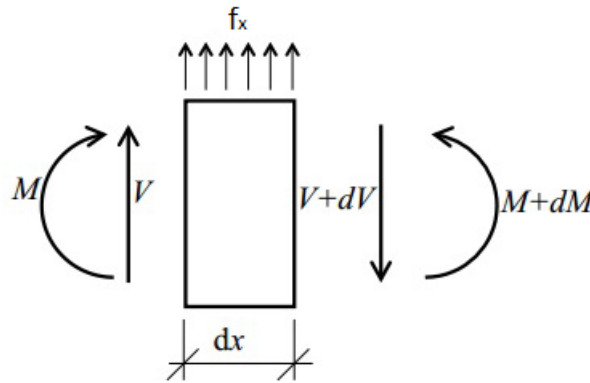


Figura 1.5: Equilíbrio para um elemento infinitesimal da viga.

A partir das leis da estática obtemos as seguintes relações

$$\frac{dM}{dx} = V, \quad (1.2.1)$$

$$\frac{dV}{dx} = f, \quad (1.2.2)$$

onde  $V$  está no plano de flexão e  $M$  é perpendicular ao plano. E de acordo com (GERE, 2009; HAUKAAS, 2012; HIBBELER, 2006)  $M$  é dado por

$$M = EI \frac{d^2u}{dx^2}, \quad (1.2.3)$$

onde  $EI$  representam o produto do módulo de elasticidade  $E$  pelo momento de área  $I$ , deno-

minada *rigidez a flexão*.

Além disso, quando a viga é flexionada, linhas longitudinais se tornam curvas e linhas transversais sofrem rotação apesar de continuarem retas. Assim, não há somente deflexão ao longo do eixo mas também uma rotação. De acordo com a Figura 1.6 o deslocamento  $u$  está relacionado à rotação  $\theta$  da seção transversal. Podemos observar também que, considerando dois pontos sob a curva, a distância entre eles é dada por  $dx$  e

$$\text{tg}(\theta) = \frac{du}{dx} \approx (\theta), \quad (1.2.4)$$

onde assumimos que as deformações são consideravelmente pequenas, a equação é simplificada de modo que  $\text{tg}(\theta) \approx (\theta)$ .

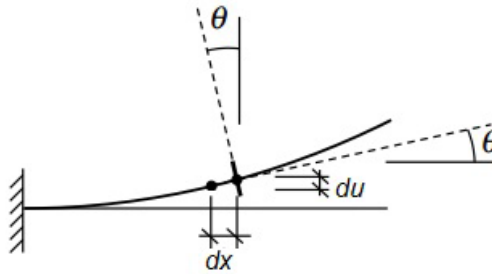


Figura 1.6: Rotação da seção transversal de um elemento da viga.

Outro ponto a ser analisado na viga é a sua curvatura  $\kappa$ . Se a força aplicada a viga for muito pequena, a viga sofrerá uma deformação mínima e assim ficará praticamente reta. Seu raio de curvatura  $\rho$  será muito grande e a curvatura será muito pequena. Caso contrário, a flexão será maior por conta de uma força maior e então teremos um raio de curvatura menor e a curvatura maior. Assim, a curvatura é definida como

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}, \quad (1.2.5)$$

onde  $ds$  é o comprimento do arco entre os pontos considerados,  $\rho$  é o raio de curvatura.

Como estamos considerando deflexões geralmente muito pequenas quando comparadas ao comprimento da viga, a curva de deflexão será quase horizontal e a distância  $ds$  ao longo da curva pode ser considerada aproximadamente igual à  $dx$ . Dessa forma podemos reescrever (1.2.5) como

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} \approx \frac{d\theta}{dx} \quad (1.2.6)$$

e ainda mais

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} \approx \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2}. \quad (1.2.7)$$

Notemos que a combinação de (1.2.1), (1.2.2), (1.2.3) e (1.2.7) produzem a seguinte quan-

tidade:

$$f = \frac{dV}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2u}{dx^2} \right) = \frac{d^2}{dx^2} \left( a(x) \frac{d^2u}{dx^2} \right) \quad (1.2.8)$$

que é conhecida como equação de Euler-Bernoulli, com  $EI = a(x)$ .

Associados a esta equação existem condições iniciais e de contorno que representam fisicamente o tipo de viga que está sob análise. Ou seja, as condições de contorno estão relacionadas às deflexões, inclinações, momento fletor e força de cisalhamento em pontos na viga onde essas funções são conhecidas. Geralmente esses pontos são os de suporte na viga. Considerando o comprimento da viga  $L$ , apresentamos logo a seguir alguns tipos de vigas, podendo ser consultadas em (HIBBELER, 2006).

Para uma viga engastada em uma extremidade e livre na outra as condições de contorno são

$$u(0) = u'(0) = M(L) = M'(L) = 0, \quad (1.2.9)$$

onde  $u$  e  $u'$  representam a deflexão e a inclinação nulas no ponto  $x = 0$ , respectivamente. Na extremidade  $x = L$ , o momento fletor  $M$  e a força de cisalhamento  $M'$  também são nulas. Esse tipo de viga também recebe o nome de viga em balanço e é apresentada na Figura 1.7.



Figura 1.7: Engastada em uma extremidade e livre na outra - Viga em balanço.

Apresentamos na Figura 1.8 a viga simplesmente apoiada e neste caso as condições de contorno são dadas por

$$u(0) = u(L) = M(0) = M(L) = 0, \quad (1.2.10)$$



Figura 1.8: Simplesmente apoiada.

Na Figura 1.9 temos uma viga com uma extremidade engastada e outra apoiada. Assim, como condições de contorno teremos

$$u(0) = u'(0) = u(L) = M(L) = 0. \quad (1.2.11)$$

Em (LESNIC; ELLIOTT; INGHAM, 1999), além da condição (1.2.10) outras condições de contorno são estudadas, no entanto, não sabemos se possuem interpretação física ou apenas



Figura 1.9: Extremidade engastada e outra apoiada.

interesse matemático. São essas:

$$u(0) = u'(L) = M(0) = M'(L) = 0, \quad (1.2.12)$$

$$u(0) = u'(L) = M(0) = M'(0) = 0, \quad (1.2.13)$$

$$u(0) = u'(L) = M(0) = M(L) = 0 \quad \text{ou} \quad u(0) = u(L) = M(0) = M(L), \quad (1.2.14)$$

$$u(L) = u'(0) = u'(L) = M'(0) = 0 \quad \text{ou} \quad u(0) = u'(0) = u'(L) = M'(0) = 0, \quad (1.2.15)$$

$$u(L) = u'(0) = u'(L) = M(0) = 0 \quad \text{ou} \quad u(0) = u'(0) = u'(L) = M(0) = 0. \quad (1.2.16)$$

Possivelmente outras condições de contorno possam ser analisadas no entanto nos detemos em apresentar algumas que são mais comuns na literatura.

Diante disso, neste trabalho estamos interessados em identificar o coeficiente de rigidez a flexão  $a(x)$  de (1.2.8) a partir de medidas indiretas da deflexão  $u$  com condições de contorno dadas por (1.2.9)-(1.2.16). Com o intuito de embasar toda a teoria que será desenvolvida, será necessário relembrarmos alguns conceitos importantes da Análise Funcional, o que será feito no próximo capítulo.

## 2 RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo introduziremos alguns conceitos necessários de Análise Funcional e teoria clássica de equações diferenciais ordinárias para o entendimento deste trabalho.

### 2.1 Resultados preliminares de Análise Funcional

Nesta seção apresentaremos alguns resultados de Análise Funcional que serão utilizados ao longo deste trabalho. Por serem resultados conhecidos de análise funcional, não apresentaremos as demonstrações, mas indicamos as referências onde as mesmas podem ser encontradas.

Denotemos por  $\mathbb{K}$  o corpo dos números reais  $\mathbb{R}$  ou dos números complexos  $\mathbb{C}$  e seja  $X$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ .

**Definição 2.1.1.** *Uma norma em  $X$  é uma função  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz as seguintes propriedades  $\forall u, v \in X$  e  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ :*

$$i) \quad \|u\| = 0 \iff u = 0.$$

$$ii) \quad \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|.$$

$$iii) \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

**Definição 2.1.2.** *Um espaço vetorial munido de uma norma será chamado de espaço vetorial normado. Neste caso, a norma define uma métrica natural dada por*

$$d(u, v) := \|u - v\|. \quad (2.1.1)$$

**Definição 2.1.3.** *Dizemos que o espaço vetorial  $X$  munido da norma  $\|\cdot\|$  é completo se toda sequência de Cauchy em  $X$  é convergente.*

**Definição 2.1.4.** *Um espaço normado  $X$  é chamado de Espaço de Banach quando for um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma.*

O conjunto  $C[a, b]$  de todas as funções contínuas é um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\} = \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$$

.

**Definição 2.1.5.** *Um espaço normado  $X$  que contém um subconjunto enumerável e denso em  $X$  é dito separável. Mais geralmente, um espaço métrico  $M$  é separável quando contém um subconjunto denso e enumerável.*

**Definição 2.1.6.** *Seja  $p \in \mathbb{R}$  com  $1 \leq p < \infty$ , definimos o conjunto  $L^p(\Omega)$  como sendo*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}; f \text{ é mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

com

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left[ \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}}.$$

**Definição 2.1.7.** *Definimos o conjunto  $L^\infty(\Omega)$  como sendo*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}; f \text{ é mensurável}\}$$

*que são essencialmente limitadas em  $\Omega$ , isto é, que são limitadas a menos de um conjunto de medida nula, equipado com a norma do supremo essencial, dada por*

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \text{ess sup}\{|f(x)|; x \in \Omega\}.$$

**Proposição 2.1.1** (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *(BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2012, Proposição 5.1.2) Seja  $X$  um espaço vetorial com produto interno. Então*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

*para quaisquer  $x, y \in X$ . Além disso, a igualdade ocorre se, e somente, se os vetores  $x$  e  $y$  são linearmente dependentes.*

**Teorema 2.1.2** (Desigualdade de Hölder). *(BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2012, Teorema 1.2.1) Dados  $p, q \in [1, \infty]$  tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  então*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q. \quad (2.1.2)$$

**Teorema 2.1.3** (Fischer - Riesz). *(BREZIS, 2010, Teorema 4.8)  $L^p$  é um espaço de Banach para qualquer  $p$  em que  $1 \leq p \leq \infty$ .*

**Proposição 2.1.4.** *(BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2012, Proposição 1.5.1) Se  $X$  é um espaço vetorial normado de dimensão finita, então os compactos em  $X$  são precisamente os conjuntos limitados e fechados.*

**Corolário 2.1.5.** *(BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2012, Corolário 1.5.2) A bola unitária fechada em um espaço normado de dimensão finita é compacta.*

**Lema 2.1.6** (Lema de Riesz). *(BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2012, Lema 1.5.3) Seja  $S$  um subespaço fechado próprio de um espaço normado  $X$  de dimensão infinita e seja  $\theta$  um número real tal que  $0 < \theta < 1$ . Então existe  $y \in X - S$  tal que  $\|y\| = 1$  e  $\|y - x\| \geq \theta$  para todo  $x$  em  $S$ .*

**Definição 2.1.8** (Operador Linear). *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços normados, ambos sobre o mesmo corpo  $\mathbb{K}$  e  $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$  um operador linear então*

$$(a) \quad T(x + y) = Tx + Ty, \text{ para quaisquer } x, y \in X \text{ e}$$

$$(b) \quad T(ax) = aTx, \text{ para todo } a \in \mathbb{K} \text{ e qualquer } x \in X.$$

**Observação 2.1.1.** *Vale observar que  $D(T)$  é o domínio de  $T$  em que  $x \in X : T(x) \in Y$ .*

**Definição 2.1.9** (Operador Linear Limitado). *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços normados e  $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$  um operador linear. O operador  $T$  é dito limitado se existe um número real  $C$  para todo  $x \in D(T)$  tal que*

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X. \quad (2.1.3)$$

**Teorema 2.1.7** (Operador Linear Contínuo). *(KREYSZIG, 1978, Teorema 2.7-9) Seja  $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$ ,  $X$  e  $Y$  espaços normados. Então:*

$$(a) \quad T \text{ é contínuo se e somente se } T \text{ é limitado.}$$

$$(b) \quad \text{Se } T \text{ é contínuo em algum ponto } x \in D(T) \text{ então } T \text{ é contínuo.}$$

**Definição 2.1.10.** *Importante salientar que para um operador linear, o conceito de operador contínuo e operador limitado são conceitos equivalentes. Assim, para um operador qualquer segue a definição.*

**Observação 2.1.2.** *Seja  $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$  um operador qualquer, não necessariamente linear, com  $X$  e  $Y$  espaços normados. O operador  $T$  é contínuo em um ponto  $x_0 \in D(T)$  se para qualquer  $\epsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  onde*

$$\|Tx - Tx_0\| < \epsilon \text{ para todo } x \in D(T) \text{ satisfazendo } \|x - x_0\| < \delta.$$

$$T \text{ é contínuo se } T \text{ é contínuo para todo } x \in D(T).$$

**Definição 2.1.11** (Operador Linear Compacto). *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços normados. Um operador  $T : X \rightarrow Y$  é dito operador linear compacto se  $T$  é linear e se para todo subconjunto limitado  $S$  de  $X$ , a imagem  $T(S)$  é relativamente compacta, ou seja, o fecho  $\overline{T(S)}$  é compacto.*

**Lema 2.1.8.** *(KREYSZIG, 1978, Lema 8.1-2) Sejam  $X$  e  $Y$  espaços normados. Então:*

$$(a) \quad \text{Todo operador linear compacto } T : X \rightarrow Y \text{ é limitado e, portanto, contínuo.}$$

$$(b) \quad \text{Se } \dim X = \infty, \text{ o operador identidade } I : X \rightarrow X \text{ (que é contínuo) não é compacto.}$$

**Teorema 2.1.9.** *(KREYSZIG, 1978, Teorema 8.1-7) Sejam  $X$  e  $Y$  espaços normados e  $T : X \rightarrow Y$  um operador linear compacto. Então vale a seguinte implicação*

$$x_n \xrightarrow{w} x \text{ em } X \implies T(x_n) \longrightarrow T(x) \text{ em } Y. \quad (2.1.4)$$

**Definição 2.1.12.** Um espaço com produto interno que é completo na norma induzida pelo produto interno é chamado de espaço de Hilbert.

**Definição 2.1.13.** Sejam  $X, Y$  espaços de Banach sobre  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Uma forma bilinear  $T : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$  é

(a) coerciva se  $X = Y, \mathbb{K} = \mathbb{R}$  e existe uma constante  $\beta > 0$  tal que

$$T(x, x) \geq \beta \|x\|^2$$

para todo  $x \in X$ .

(b) simétrica se  $X = Y$  e  $T(x, y) = T(y, x)$  para quaisquer  $x, y \in X$ .

(c) não-degenerada se o único vetor  $x \in X$  tal que  $T(x, y) = 0$  para todo  $y \in Y$  for o vetor  $x = 0$ ; e, analogamente, o único vetor  $y \in Y$  tal que  $T(x, y) = 0$  para todo  $x \in X$  for o vetor  $y = 0$ .

**Teorema 2.1.10.** (BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2012, Teorema 5.6.4) Sejam  $H$  um espaço de Hilbert sobre o corpo dos números reais e  $T : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma bilinear contínua e coerciva. Para todo funcional linear contínuo  $\varpi \in H'$ , em que  $H'$  é o dual de  $H$ , existe um único vetor  $x_0 \in H$  tal que  $\varpi(x) = T(x, x_0)$  para todo  $x \in H$ .

**Definição 2.1.14.** Uma sequência  $(x_n)$  em um espaço normado  $X$  é dita fracamente convergente se houver um  $x \in X$  tal que para cada  $f \in X'$ , em que  $X'$  é o dual de  $X$  tivermos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x).$$

Ou seja,

$$x_n \xrightarrow{w} x.$$

$x_n$  converge fraco para  $x$ .

**Definição 2.1.15.** Uma sequência  $(x_n)$  em um espaço normado  $X$  é dita fortemente convergente se houver um  $x \in X$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Ou seja,

$$x_n \longrightarrow x.$$

$x_n$  converge forte para  $x$ .

**Teorema 2.1.11** (Teorema de Mazur). (BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2012, Teorema 6.2.11) Sejam  $X$  um espaço normado e  $K$  um subconjunto convexo de  $X$ . Então o fecho de  $K$  na topologia da norma coincide com o fecho de  $K$  na topologia fraca. Especialmente,

um conjunto convexo é fechado na topologia fraca se, e somente se, é fechado na topologia da norma.

**Proposição 2.1.12.** (BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2012, Proposição 7.2.6) Sejam  $X_0, X, Y, Y_0$  espaços normados e  $F : X_0 \rightarrow X$ ,  $T : X \rightarrow Y$  e  $U : Y \rightarrow Y_0$  operadores lineares com  $F$  e  $U$  contínuos e  $T$  compacto. Então,  $G = U \circ T \circ F : X_0 \rightarrow Y_0$  é compacto.

**Definição 2.1.16.** Seja  $I = (a, b)$ , possivelmente ilimitado, e  $p \in \mathbb{R}$  com  $1 \leq p < \infty$ . Definimos o espaço de Sobolev  $W^{1,p}(I)$  como

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I); \exists g \in L^p(I) \text{ de modo que } \int_I u \varphi' = - \int_I g \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\},$$

em que  $\varphi$  é uma função teste e  $C_c^1(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f \text{ e } f' \text{ são contínuas}\}$ .

Para  $u \in W^{1,p}(I)$  denotamos  $u' = g$  e  $H^1(I) = W^{1,2}(I)$ .

Para o caso de  $p = \infty$ , o espaço  $W^{1,\infty} = \{u, u' \in L^\infty\}$ .

**Proposição 2.1.13** (Desigualdade de Poincaré). (BREZIS, 2010, Proposição 8.13) Suponha que  $I$  seja um intervalo limitado. Então existe uma constante  $C$  (dependendo de  $|I| < \infty$ ) tal que

$$\|u'\|_{L^p} \leq \|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq C \|u'\|_{L^p(I)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I) \quad (2.1.5)$$

Ou seja, em  $W_0^{1,p}$ , a quantidade  $\|u\|_{L^p}$  é uma norma equivalente a norma em  $W^{1,p}$ .

**Teorema 2.1.14** (Convergência Dominada). (BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2012, Teorema C.22) Seja  $f_n$  uma sequência de funções em  $L^p$  que converge quase sempre para uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Se existe  $g \in L^p$  tal que  $|f_n| \leq |g|$  para todo  $n$ , então  $f \in L^p$  e

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

## 2.2 Existência e Unicidade para problemas de valor de contorno

Nesta seção apresentaremos alguns resultados clássicos da teoria de boa colocação de problemas de valor de contorno, os quais serão utilizados durante esta dissertação.

**Teorema 2.2.1.** (KELLER, 1966) Suponhamos que a função  $f$  no problema de valor de contorno

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases} \quad (2.2.1)$$

para  $a \leq x \leq b$ , é contínua no conjunto

$$D = \{(x, y, y') \mid \text{para } a \leq x \leq b, \text{ com } -\infty < y < \infty \text{ e } -\infty < y' < \infty\},$$

e as derivadas parciais  $f_y$  e  $f_{y'}$  também são contínuas em  $D$ . Se

$$(i) \quad f_y(x, y, y') > 0, \forall (x, y, y') \in D, \text{ e}$$

$$(ii) \quad \text{existir uma constante } K \text{ com } |f_{y'}(x, y, y')| \leq K, \forall (x, y, y') \in D,$$

então o problema de valor de contorno possui uma única solução.

O problema que estamos analisando nesta dissertação não satisfaz a hipótese (i) do Teorema 2.2.1 pois a derivada com relação a segunda variável é nula. Assim, não conseguimos garantir a existência de solução através da teoria de KELLER (1966). No entanto, como alternativa utilizamos a teoria de BAXLEY (1977) em que é utilizado o método de *shooting*, juntamente com o princípio do máximo, para provar existência de solução para a equação de Euler-Bernoulli. Este método será apresentado no Capítulo 4. A seguir apresentamos a teoria geral do princípio do máximo e do método de *shooting*.

**Teorema 2.2.2.** (PROTTER; WEINBERGER, 2012, Teorema 23) Suponha que  $w(x)$  satisfaz

$$w'' + H(x, w, w') = 0 \quad (2.2.2)$$

e as condições iniciais

$$w(a) = \gamma_1, \quad w'(a) = \gamma_2, \quad (2.2.3)$$

para  $H(x, w, w') = g(x)w' + h(x)w - f(x)$ , em que  $H, \frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial z}$  são contínuas e  $\frac{\partial H}{\partial y} \leq 0$ . Se  $z_1(x)$  satisfaz

$$\begin{cases} z_1'' + H(x, z_1, z_1') \geq 0, \\ z_1(a) \geq \gamma_1, \quad z_1'(a) \geq \gamma_2, \end{cases} \quad (2.2.4)$$

e se  $z_2(x)$  satisfaz

$$\begin{cases} z_2'' + H(x, z_2, z_2') \leq 0, \\ z_2(a) \leq \gamma_1, \quad z_2'(a) \leq \gamma_2, \end{cases} \quad (2.2.5)$$

então obtemos seu limite superior e inferior (upper e lower bounds)

$$\begin{aligned} z_2(x) + \gamma_2 - z_2(a) &\leq w(x) \leq z_1(x) + \gamma_1 - z_1(a), \\ z_2'(x) &\leq w'(x) \leq z_1'(x). \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

**Teorema 2.2.3.** (PROTTER; WEINBERGER, 2012, Teorema 3) Seja o seguinte problema

$$w'' + g(x)w' + h(x)w = f(x) \quad (2.2.7)$$

em um intervalo  $(a, b)$  sujeita as condições de contorno

$$w(a) = \gamma_1, \quad w(b) = \gamma_2. \quad (2.2.8)$$

Se  $w(x)$  satisfaz a desigualdade diferencial

$$(L + h)[w] \equiv w'' + g(x)w' + h(x)w \geq 0$$

em  $(a, b)$  com  $h(x) \leq 0$ , e se  $g$  e  $h$  são limitadas em todo subintervalo fechado e se  $w$  assume valor máximo  $K$  não negativo em um ponto interior  $c$ , então  $w \equiv K$ .

**Teorema 2.2.4.** (PROTTER; WEINBERGER, 2012, Teorema 7) Supondo  $w_1(x)$  e  $w_2(x)$  soluções de (2.2.7) que satisfazem (2.2.8). Se  $h(x) \leq 0$  em  $(a, b)$  então  $w_1 = w_2$ .

## 2.3 Método de *Shooting*

Nesta seção iremos apresentar o método do *shooting* na qual será usado como ferramenta para provar a existência do problema direto envolvendo a equação de Euler-Bernoulli. Em linhas gerais, é um método que substitui o problema de valor de contorno por problemas de valor inicial e que através de sequências dessas soluções encontramos a solução do problema de valor de contorno. Deste modo, é um método da análise numérica utilizado na resolução de problema de valor de contorno através da solução de um problema de valor inicial associado a ele, em que uma das condições iniciais é um parâmetro que será atribuído um valor qualquer (chute inicial) e ajustado posteriormente.

### 2.3.1 Método de *Shooting* Linear

Consideramos o seguinte problema de valor de contorno de segunda ordem dado por

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), & a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta. \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Quando  $f(x, y, y')$  é linear em  $y$  e  $y'$ , o método do shooting soluciona um sistema com dois problemas de valor inicial e a solução  $y(x)$  de (2.3.1) é escrita como uma combinação dessas soluções. De fato, quando a equação diferencial  $y'' = f(x, y, y')$  é linear existem funções  $z(x)$ ,  $v(x)$  e  $w(x)$  em que

$$f(x, y, y') = z(x) + v(x)y + w(x)y'. \quad (2.3.2)$$

Assim, o Teorema 2.2.1 pode ser simplificado para o caso linear da seguinte forma,

**Corolário 2.3.1.** Suponha o problema de valor de contorno linear

$$\begin{cases} y'' = z(x) + v(x)y + w(x)y', & a \leq x \leq b, \\ y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta, \end{cases} \quad (2.3.3)$$

satisfazendo

(i)  $z(x), v(x), w(x)$  são contínuas em  $[a, b]$ ,

(ii)  $v(x) > 0$  em  $[a, b]$ .

Então o problema de valor de contorno tem uma única solução.

Vamos considerar os seguintes problemas de valor inicial dadas por, para  $a \leq x \leq b$ ,

$$\begin{cases} y_1'' = z(x) + v(x)y_1 + w(x)y_1', \\ y_1(a) = \alpha \\ y_1'(a) = 0, \end{cases} \quad (2.3.4)$$

e

$$\begin{cases} y_2'' = z(x) + v(x)y_2 + w(x)y_2', \\ y_2(a) = \alpha \\ y_2'(a) = 1. \end{cases} \quad (2.3.5)$$

**Observação 2.3.1.** Os valores atribuídos para  $y_1'(a) = 0$  e  $y_2'(a) = 1$  foram escolhidos convenientemente conforme (BURDEN; FAIRES, 1997), no entanto, poderia ser qualquer número (chute inicial).

**Observação 2.3.2.** Sabemos que os problemas de valor inicial (2.3.4) e (2.3.5) possuem uma única solução pela teoria clássica de equações diferenciais, ver (BURDEN; FAIRES, 1997).

Agora, vamos escrever  $y(x)$  como combinação convexa de  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  da forma

$$y(x) = \phi y_1(x) + (1 - \phi)y_2(x), \quad (2.3.6)$$

onde  $\phi$  será determinada de forma que  $y(x)$  seja solução de (2.3.3). Para isso,  $y(x)$  da maneira como foi construída em (2.3.6) deve satisfazer a equação diferencial em (2.3.3) com as condições de contorno. De fato, de (2.3.4) e (2.3.5)

$$\begin{aligned} y'' = (\phi y_1 + (1 - \phi)y_2)'' &= [\phi z + (1 - \phi)z] + [\phi v y_1 + (1 - \phi)v y_2] + [\phi w y_1' + (1 - \phi)w y_2'] \\ &= z + v[\phi y_1 + (1 - \phi)y_2] + w[\phi y_1' + (1 - \phi)y_2'] \\ &= z + v[\phi y_1 + (1 - \phi)y_2] + w[\phi y_1 + (1 - \phi)y_2]' \\ &= z + v y + w y', \end{aligned}$$

ou seja,  $y(x)$  em (2.3.6) é solução para qualquer valor de  $\phi$ .

Agora, basta verificarmos as condições de contorno. Para  $y(a)$  temos que

$$y(a) = \phi y_1(a) + (1 - \phi)y_2(a). \quad (2.3.7)$$

De (2.3.4) e (2.3.5) segue que

$$y(a) = \phi \alpha + (1 - \phi)\alpha = \alpha \quad (2.3.8)$$

e a equação (2.3.8) é satisfeita para qualquer valor de  $\phi$ . Para a condição de contorno

$$y(b) = \phi y_1(b) + (1 - \phi)y_2(b) = \beta. \quad (2.3.9)$$

Como  $\beta$  é dado e  $y_1(b)$  e  $y_2(b)$  são conhecidos, pois as equações (2.3.4) e (2.3.5) possuem solução, o que resta a saber é  $\phi$ . Resolvemos (2.3.9) em termos de  $\phi$

$$\begin{aligned} \phi y_1(b) + (1 - \phi)y_2(b) &= \beta \\ \phi(y_1(b) - y_2(b)) &= \beta - y_2(b) \\ \phi &= \frac{\beta - y_2(b)}{y_1(b) - y_2(b)}. \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Assim,  $y(x)$  dado em (2.3.6), com  $\phi$  escrito da forma (2.3.10), é solução para o problema de valor de contorno (2.3.3).

### 2.3.2 Método de *Shooting* Não Linear

A técnica para resolver o problema de valor de contorno (2.3.1) através do *shooting* não linear se assemelha ao método anterior, com exceção de que não podemos expressar a solução como uma combinação das soluções dos problemas de valor inicial. Neste caso, a solução de (2.3.1) é aproximada usando as soluções de uma sequência de problemas de valor inicial envolvendo um parâmetro  $t$ . Ou seja,

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y(a) = \alpha \\ y'(a) = t. \end{cases} \quad (2.3.11)$$

Resolvemos o problema escolhendo o parâmetro  $t = t_k$  de modo a garantir que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(b, t_k) = y(b) = \beta, \quad (2.3.12)$$

onde  $y(x, t_k)$  é a solução do problema de valor inicial (2.3.11) com  $t = t_k$  e  $y(x)$  é solução do problema de valor de contorno (2.3.1).

**Observação 2.3.3.** *De acordo com BURDEN; FAIRES (1997), se o problema satisfaz o Teorema 2.2.1, qualquer escolha para  $t_0$  garantirá a convergência. No entanto, uma boa escolha para  $t_0$  irá melhorar a convergência neste caso e ainda assim funcionará para alguns problemas mesmo que não satisfaçam as hipóteses do teorema.*

### 2.3.3 Existência: Resultado Baxley

Nesta seção vamos apresentar alguns resultados de BAXLEY (1977) necessários para a prova de existência do problema direto na equação de Euler-Bernoulli no Capítulo 4. Em

linhas gerais, a teoria de BAXLEY (1977) relaxa a hipótese (i) do teorema de (KELLER, 1966) onde a derivada com relação a segunda variável deve ser positiva.

Neste caso, o autor utiliza do método de shooting para através da solução de um problema de valor inicial estimar a solução do problema de valor de contorno. Isso é feito através da escolha de um certo parâmetro (parâmetro do método de shooting) o qual é ajustado de forma a garantir uma cota superior e inferior para a solução do problema mostrando a existência da solução dentro deste intervalo.

Para isso vamos apresentar suas hipóteses gerais considerando nosso interesse em soluções para a seguinte equação diferencial ordinária

$$y'' = f(x, y, y') \quad (2.3.13)$$

no intervalo  $[0, 1]$ .

**Hipóteses Gerais:** (B1) As condições de contorno que serão investigadas podem ser escritas da seguinte forma

$$m_0 y(0) - m_1 y'(0) = \alpha, \quad |m_0| + |m_1| \neq 0, \quad (2.3.14)$$

$$n_0 y(1) + n_1 y'(1) = \beta, \quad |n_0| + |n_1| \neq 0, \quad (2.3.15)$$

onde  $m_i, n_i$  são constantes que devem satisfazer

(B2)

$$m_i \geq 0, \quad n_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \quad m_0 + n_0 > 0. \quad (2.3.16)$$

Além disso,

(B3)  $f(x, y, z), f_2(x, y, z) \equiv (\partial f / \partial y)(x, y, z), f_3(x, y, z) \equiv (\partial f / \partial z)(x, y, z)$  são todas contínuas em  $[0, 1] \times \mathbb{R}^2$  e

(B4)  $f_2(x, y, z) \geq 0$  em  $[0, 1] \times \mathbb{R}^2$ .

**Lema 2.3.2.** *Seja o seguinte problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y(0) = m_1 s - \alpha c_1 \\ y'(0) = m_0 s - \alpha c_0, \end{cases} \quad (2.3.17)$$

com  $c_0$  e  $c_1$  constantes quaisquer. Suponhamos que  $y(x; s)$  em  $[0, 1]$  é a única solução global de (2.3.17) então  $y(x; s)$  satisfaz a condição de contorno (2.3.14), independente do valor de  $s$ .

*Demonstração.* Basta escolhermos  $c_0$  e  $c_1$  satisfazendo a seguinte equação

$$m_1 c_0 - m_0 c_1 = 1 \quad (2.3.18)$$

e verificarmos que de (2.3.17) e (2.3.18),

$$\begin{aligned} y(0) &= m_1 s - \alpha \left( \frac{m_1 c_0 - 1}{m_0} \right) \\ m_0 y(0) &= m_0 m_1 s - \alpha m_1 c_0 + \alpha. \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

Ainda,

$$\begin{aligned} y'(0) &= m_0 s - \alpha \left( \frac{1 + m_0 c_1}{m_1} \right) \\ m_1 y'(0) &= m_1 m_0 s - \alpha - \alpha m_0 c_1. \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

Subtraímos (2.3.20) de (2.3.19), segue que

$$\begin{aligned} m_0 y(0) - m_1 y'(0) &= \alpha(m_0 c_1 - m_1 c_0) + 2\alpha \\ &= -\alpha + 2\alpha = \alpha \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

satisfazendo (2.3.14) independente do valor de  $s$ .  $\square$

Notemos que escolhendo  $c_0$  e  $c_1$  de acordo com (2.3.18) a solução  $y(x; s)$  satisfaz

$$\begin{cases} m_0 y(0) - m_1 y'(0) = \alpha \\ c_0 y(0) - c_1 y'(0) = s, \end{cases} \quad (2.3.22)$$

conforme o método de shooting visto anteriormente.

**Lema 2.3.3.** *Seja  $v = v(x; t)$  definida da seguinte maneira*

$$v(x; t) = \cosh(t) - \cosh(t(x - 1)) + kx \quad (2.3.23)$$

*uma função de comparação onde*

(i)  $k = 0$  se  $n_0$  em (2.3.15) é positivo e

(ii)  $k = |\beta| n_1^{-1}$  se  $n_0$  é zero em (2.3.15).

*E ainda,*

$$r(x; t) = \inf_{-1 \leq \mu \leq 1} f_3(x, \mu v, \mu v') \quad (2.3.24)$$

e

$$r_-(x; t) = \min\{r(x; t), 0\}. \quad (2.3.25)$$

Então, se  $r_-(x; t) = o(t)$  deve existir  $T$  tal que  $t \geq T$  de modo que  $v'' - f(x, v, v') \leq 0$ .

*Demonstração.* Primeiramente vale observarmos que para  $0 \leq x \leq 1$ ,  $v \geq 0$  e

$$\begin{aligned} v' = \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 - t \sinh(t(x - 1)) + k \\ &= -t \sinh(t(x - 1)) + k \geq k \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

desde que  $t > 0$ . Das hipóteses (i) e (ii) sabemos que  $v' \geq 0$  para  $t > 0$ . Do teorema do valor médio e de (B2) temos

$$\begin{aligned} v'' - f(x, v, v') &\leq v'' - f_3(x, \lambda v, \lambda v')v' - f(x, 0, 0) \\ &\leq v'' - r_-(x; t)v' - f(x, 0, 0), \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

onde  $\lambda = \lambda(x)$  satisfazendo  $0 < \lambda < 1$ . Assim,

$$\begin{aligned} v'' - f(x, v, v') &\leq -t^2 \cosh(t(x-1)) \left[ 1 + \frac{r_-(x; t)}{t} \left[ \frac{k}{t \cosh(t(x-1))} - \tanh(t(x-1)) \right] \right] \\ &\quad - f(x, 0, 0). \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

Como  $r_-(x; t) = o(t)$  então

$$v'' - f(x, v, v') \leq 0,$$

para um  $T$  tal que  $t \geq T$ . □

**Corolário 2.3.4.** *Suponhamos as hipóteses do Lema 2.3.3 satisfeitas, então vale*

$$n_0 v(1; t) + n_1 v'(1; t) \geq \beta.$$

*Demonstração.* Como

$$\begin{aligned} n_0 v_1(1; t) + n_1 v'(1; t) &= n_0 [\cosh(t) - \cosh(t(1-1)) + k] + n_1 [-t \sinh(t(1-1)) + k] \\ &= n_0 (\cosh(t) - 1 + k) + n_1 k. \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

Então, para o item (i) do Lema 2.3.3 quando  $k = 0$  se  $n_0 > 0$  temos

$$\begin{aligned} n_0 v(1; t) + n_1 v'(1; t) &= n_0 (\cosh(t) - 1 + k) + n_1 k \\ &= n_0 (\cosh(t) - 1) \end{aligned} \quad (2.3.30)$$

e aumentando  $T$  conforme necessário temos para  $t \geq T$

$$n_0 v(1; t) + n_1 v'(1; t) \geq \beta. \quad (2.3.31)$$

Para o item (ii) quando  $k = |\beta|n_1^{-1}$  se  $n_0 = 0$  então

$$\begin{aligned} n_0 v(1; t) + n_1 v'(1; t) &= n_0 (\cosh(t) - 1 + k) + n_1 k \\ &= n_1 \frac{|\beta|}{n_1} = |\beta|. \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

□

**Lema 2.3.5.** *Suponhamos que para a função  $y = y(x)$  definida em (2.3.17) temos  $m_0 m_1 > 0$ . Seja  $v$  uma função de comparação dada no Lema 2.3.2, então  $y(0; s) \geq v(0; T)$  e  $y'(0; s) \geq v'(0; T)$ .*

*Demonstração.* Pela hipótese  $m_0 m_1 > 0$  temos que  $y(0)$  em (2.3.17) é positivo para  $s$  suficientemente grande e negativo para um  $s$  pequeno. Assim, escolhemos  $s$  de modo que

$$\begin{aligned} y(0; s) &= m_1 s - \alpha c_1 \geq 0 \\ y'(0; s) &= m_0 s - \alpha c_0 \geq T \sinh(T) + k \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

obtemos que

$$\begin{aligned} y(0; s) &\geq v(0; T) = \cosh(T) - \cosh(T(0 - 1)) = 0 \\ y'(0; s) &\geq v'(0; T) = -T \sinh(T(0 - 1)) + k = T \sinh(T) + k. \end{aligned} \quad (2.3.34)$$

□

Para estimarmos a cota inferior basta considerar  $-v$  e a demonstração segue análoga.

**Teorema 2.3.6.** *Suponhamos que o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(0) = \gamma_1, \\ y'(0) = \gamma_2 \end{cases} \quad (2.3.35)$$

*possui uma solução global em  $[0, 1]$ . Nas hipóteses do Lema 2.3.3, então o problema de valor de contorno (2.3.1), (2.3.14) - (2.3.15) possui uma única solução para cada par  $(\alpha, \beta)$ .*

*Demonstração.* Queremos mostrar que o problema (2.3.1), (2.3.14) - (2.3.15) possui uma única solução para  $(\alpha, \beta)$ . Para isso utilizamos o método do shooting substituindo o problema de valor de contorno pelo problema de valor inicial do Lema 2.3.2.

De acordo com Lema 2.3.2 temos que controlar o valor do parâmetro  $s$  para que a solução de (2.3.17) satisfaça a condição de contorno (2.3.15) e assim estimarmos

$$n_0 y(1; s) + n_1 y'(1; s) \geq \beta \quad (2.3.36)$$

e

$$n_0 y(1; s) + n_1 y'(1; s) \leq \beta. \quad (2.3.37)$$

Para determinarmos uma cota superior e inferior de modo a garantir (2.3.36) e (2.3.37) precisamos utilizar uma função auxiliar que garanta as hipóteses do Teorema 2.2.2. De fato, basta definirmos uma função como aquela definida no Lema 2.3.3 e com isso obtermos  $-v'' - f(x, y, y') \leq 0$  se estivermos interessados em estimar a cota inferior.

Sabemos que  $v$  definida anteriormente é contínua, assim, o que resta assegurar é que  $s$  seja suficientemente grande de modo que  $y(0)$  em (2.3.17) seja positivo. Como  $m_0 m_1 > 0$  podemos utilizar o Lema 2.3.5 garantindo que (2.3.34) ocorra.

Assim, aplicando o Teorema 2.2.2 obtemos que

$$v(1; T) \leq y(1; T), \quad v'(1; T) \leq y'(1; T)$$

e pelo Corolário 2.3.4

$$n_0 y(1; s) + n_1 y'(1; s) \geq n_0 v(1; T) + n_1 v'(1; T) \geq \beta.$$

O mesmo pode ser feito para encontrarmos a cota superior, basta considerarmos  $-v$ . Segue então, segundo BAXLEY (1977) que  $y(1; s)$  e  $y'(1; s)$  são funções contínuas com relação ao parâmetro  $s$  e neste caso deve existir um  $s$  satisfazendo (2.3.15).  $\square$

### 3 PROBLEMAS DIRETO E INVERSO

Neste Capítulo, apresentaremos um pouco da teoria de problemas inversos e métodos de regularização para obtenção de soluções aproximadas estáveis.

#### 3.1 Problema Direto e Problema Inverso

Segundo KELLER (1976), dois problemas são o inverso um do outro se a solução de um depende da solução (mesmo que parcialmente) do outro. Assim, comumente designamos como sendo o *problema direto* ao que já foi estudado por muito tempo e para o qual são conhecidos resultados e propriedades da solução, ao outro chamaremos de *problemas inversos*.

De uma forma mais explícita, um problema é dito direto quando dada uma causa determinamos o efeito. Já o problema inverso, a partir da observação de um efeito tentamos determinar a sua causa (DE CEZARO; LEITÃO, 2008; KELLER, 1976). A cada problema direto temos um problema inverso associado a ele. Uma maneira simples que traduz a relação existente entre problema direto e inverso pode ser vista na Figura 3.1, onde  $M$  representa o espaço de parâmetros ou modelos e  $D$  o espaço das observações ou dados.

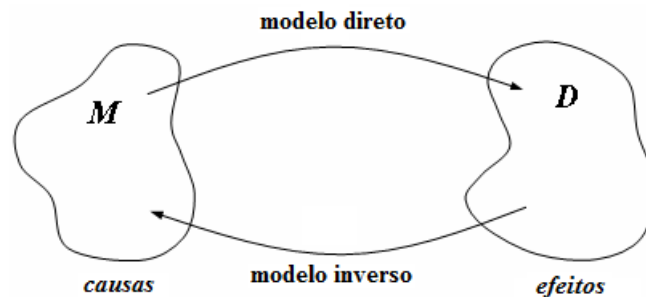


Figura 3.1: Representação do modelo direto e inverso

De acordo com DE CEZARO; LEITÃO (2008), muitos fenômenos físicos, biológicos, químicos, entre outros, podem ser modelados a partir de três quantidades principais:

**input  $f$ , sistema de parâmetros  $F(a)$ , output  $u$ ,**

onde o operador  $F(\cdot)$  representa um conjunto de equações (equações diferenciais ordinárias ou parciais, equações integrais, por exemplo) que modelam o problema em questão, contendo certos parâmetros, aqui representados por  $a$ . O input  $f$  pode ser considerado como as condições iniciais ou de fonte na equação diferencial e  $u$  representa a solução de tal equação.

Com a notação acima, um dos possíveis problemas inversos descrito como *problema de identificação de parâmetros* pode ser caracterizado por: conhecidos os efeito  $u$  e o input  $f$ , determinar o coeficiente  $a$  no sistema de parâmetros representado por  $F(\cdot)$  que modela o fenômeno físico, e.g., DE CEZARO; LEITÃO (2008); GROETSCH (1993); KIRSCH (2011).

Partindo para uma análise matemática, em termos de uma equação de operadores, podemos escrever o sistema acima por

$$F(a) = u \quad (3.1.1)$$

em que  $F$  é um operador definido entre espaços vetoriais apropriados.

Com a notação da equação de operadores (3.1.1) podemos dizer que:

- **Problema Direto:** Conhecidos  $f$ , os possíveis parâmetros  $a$ , bem como o operador  $F(\cdot)$ , determinar o efeito  $u$  do modelo.
- **Problema Inverso:** pode ser de dois tipos:
  - **Problema Inverso de Reconstrução:** Encontrar a causa  $f$  correspondente ao efeito  $u$ , a partir de conhecidos o sistema de parâmetros  $F(a)$  e o efeito  $u$ .
  - **Problema Inverso de Identificação:** Determinar (parcialmente) os parâmetros do sistema  $F(\cdot)$ , a partir de informações do efeito  $u$ , para um input  $f$  conhecido.

Um problema matemático é bem posto segundo Hadamard quando satisfaz a seguinte definição:

**Definição 3.1.1.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços normados,  $F : X \rightarrow Y$  um operador (linear ou não linear). A equação  $F(a) = u$  é dita bem posta se cumpre as seguintes condições:*

1. *Existência:* para cada  $u \in Y$  existe (pelo menos um)  $a \in X$  tal que  $F(a) = u$ .
2. *Unicidade:* para cada  $u \in Y$  há no máximo um  $a \in X$  tal que  $F(a) = u$ .
3. *Estabilidade:* a solução  $a$  depende continuamente de  $u$ , isto é, para cada sequência  $(a_n) \in X$  com  $F(a_n) = u(a_n) \rightarrow F(a) = u(a) (n \rightarrow \infty)$ , segue que existe pelo menos uma subsequência  $(a_{n_k})$  (em topologias apropriadas) tal que  $a_{n_k} \rightarrow a (n_k \rightarrow \infty)$ .

Como, em geral, na prática, os dados não são conhecidos exatamente, somente são conhecidas observações de forma imprecisas e/ou incompletas, seja por falta de rigor na modelagem do problema ou por imprecisão dos aparelhos usados na obtenção dessas medidas (DE CEZARO; LEITÃO, 2008). Dessa forma, o que conhecemos na verdade são dados ruidosos ( $u^\delta$ ) que satisfazem

$$\|u - u^\delta\| \leq \delta. \quad (3.1.2)$$

Assim, o que temos que resolver então, de maneira estável, é uma equação de operadores

$$F(a) = u^\delta \quad (3.1.3)$$

e não somente (3.1.1).

Como veremos no Capítulo 5, esta dissertação trata do **problema inverso de identificação** do coeficiente de rigidez  $a(x)$  para  $x \in [0, L]$ , onde o operador  $F(a)$  (e, assim, o sistema

de parâmetros) representa o modelo de Euler-Bernoulli dado por (1.2.8) para a deformação de uma viga unidimensional, a partir de medidas de deflexão  $u = u(a)$  em pontos finitos da viga e a força atuante  $f(x)$ .

## 3.2 Métodos de Regularização

Nesta Seção, trataremos da teoria geral de dois métodos de regularização, os quais serão posteriormente usados para obter soluções estáveis e convergentes, com relação ao ruído nas medidas, para o problema inverso de recuperação do parâmetro  $a$  na equação de Euler-Bernoulli.

Como já mencionamos, os problemas inversos são mal-postos no sentido de Hadamard, porque não satisfazem pelo menos uma das três condições de Hadamard: i) existência, ii) unicidade, iii) dependência contínua das medições disponíveis. De um modo geral, a questão de existência de uma solução para o problema inverso pode ser superada admitindo-se soluções generalizadas para o problema. Muitas vezes, a unicidade (ao menos para alguns casos especiais - veja a Subseções 5.2 e 5.2.1) pode ser provada. No entanto, se um problema não depende continuamente das medidas (dados), ou seja, se pequenas variações nas medições acarretam em variações na solução do problema inverso, então teremos sérias dificuldades para encontrar uma solução aproximada e estável para o problema.

Sabemos que a forma natural para se resolver um problema do tipo (3.1.1) (seja para dados exatos ou dados com ruídos) é aplicando o operador inverso  $F^{-1}$  (se este existir). Acontece que, em muitas aplicações práticas, o operador  $F$  em (3.1.1) não possuem inversa ou, se possuem esta, é ilimitada (veja Teorema 5.1.1 e o exemplo que segue a demonstração do referido teorema).

Sempre que um problema inverso não possua a propriedade de dependência contínua das medidas, faz-se necessário a utilização dos chamados *Métodos de Regularização*, e.g., BAUMEISTER (1987); KIRSCH (2011); GROETSCH (1993); DE CEZARO; LEITÃO (2008). Um método de regularização consiste em uma estratégia matemática para obtermos uma solução aproximada (por exemplo  $a_\alpha^\delta$ ), de maneira estável e que convirja para a solução  $a^\dagger$  (mesmo que generalizada) do problema inverso, quando o nível de ruídos  $\delta$  converge para zero, e.g., BAUMEISTER (1987); KIRSCH (2011); GROETSCH (1993); DE CEZARO; LEITÃO (2008). A dependência da solução aproximada do parâmetros  $\alpha = \alpha(\delta)$  (conhecido como parâmetros de regularização) ficará mais clara com a seguinte definição:

**Definição 3.2.1.** *Sejam  $F : H_1 \rightarrow H_2$  um operador linear e limitado e  $\alpha_0 \in (0, +\infty)$ . Para todo  $\alpha \in (0, \alpha_0)$ , seja*

$$R_\alpha : H_2 \rightarrow H_1$$

*um operador contínuo (linear ou não linear). A família  $\{R_\alpha\}$  é chamada de uma **estratégia ou método de regularização** para a inversa generalizada de  $F$ , denotada por  $F^\dagger$ , se, para todo  $u \in D(F^\dagger)$ , existir uma regra para escolher o parâmetro  $\alpha := \alpha(\delta, u^\delta)$  tal que*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup = \{ \|R_{\alpha(\delta)} u^\delta - F^\dagger u\| : u^\delta \in H_2, \|u^\delta - u\| \leq \delta \} = 0. \quad (3.2.1)$$

De acordo com a Definição 3.2.1, um método de regularização depende da escolha do parâmetro  $\alpha$  que poderá ser feita *a priori* ou *a posteriori*. Dessa forma, quando  $\alpha$  for escolhido de maneira apropriada, então a solução regularizada  $a_\alpha^\delta$  deve convergir para a solução de (3.1.1) quando  $\delta \rightarrow 0$ .

A seguir apresentaremos dois métodos de regularização, o primeiro denominado **Método de Molificação**, cuja escolha do  $\alpha$  é feita *a priori* e o segundo **Método Iterativo de Landweber** com escolha *a posteriori*. Gostaríamos de deixar claro ao leitor não familiarizado com a teoria de regularização para problemas inversos que existem uma gama variada de tais métodos na literatura, por exemplo, BAUMEISTER (1987); KIRSCH (2011); GROETSCH (1993); DE CEZARO; LEITÃO (2008) e referência. No entanto, optamos por apresentar os dois métodos supra citados, haja visto que os resultados numéricos utilizados para a identificação do coeficiente de rigidez na equação de Euler-Bernoulli será implementado com base nestes métodos apresentados.

### 3.2.1 Métodos de Molificação

Sabemos que a diferenciação de dados é um problema mal-posto no sentido de Hadamard, pois pequenos erros na função de dados podem produzir grandes erros na função derivada, independentemente da suavidade da função de erro, e.g. MURIO (2011); DE CEZARO; LEITÃO (2008).

Como o problema de identificação do coeficiente de rigidez da viga em (1.2.8) envolve a derivada dos dados  $u$ , o método de molificação age como uma estratégia de regularização para a diferenciação nos dados. Assim, vamos considerar o problema de estimar a derivada  $g'$  da função  $g \in C^2[0, 1]$ , utilizando a topologia da convergência uniforme BREZIS (2010), isto é, com a norma dada por  $\|g\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |g(x)| < \infty$ .

Além disso, considerando que conhecemos uma versão de  $g$  dotada de ruídos  $g^\delta \in C^2[0, 1]$  com nível  $\delta > 0$ , satisfazendo  $\|g^\delta - g\|_{\infty, [0, 1]} \leq \epsilon$ .

Para estabilizar o processo de diferenciação, vamos apresentar a seguinte função denominada de “núcleo gaussiano de raio  $\alpha$ ”, definida por

$$\rho_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{\alpha^2}\right). \quad (3.2.2)$$

Podemos perceber que a função  $\rho_\alpha$  possui algumas características interessantes como seguem

- (i)  $\rho_\alpha$  é  $C^\infty$  que tende para perto de zero fora de alguns raios do seu centro ( $\approx 3\alpha$ );
- (ii)  $\rho_\alpha$  é positiva;
- (iii)  $\rho_\alpha$  possui integral igual a 1.

Agora o que resta é definirmos uma função  $C^\infty$  na reta toda. Para tal precisamos estender a função  $g$  e a função dos dados medidos  $g^\delta(x)$  para o intervalo  $I_\alpha = [-3\alpha, 1 + 3\alpha]$  de modo que

decaia suavemente para o zero em  $[-3\alpha, 0] \cup [1, 1 + 3\alpha]$  e seja zero em  $\mathbb{R} - I_\alpha$  [veja em MURIO (2011) um exemplo de como a função pode ser estendida].

Temos agora como definir a função

$$\begin{aligned} J_\alpha g(x) &= (\rho_\alpha * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\alpha(x-s)g(s)ds \\ &\equiv \int_{x-3\alpha}^{x+3\alpha} \rho_\alpha(x-s)g(s)ds \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

infinitamente diferenciável em toda a reta. A essa função  $J_\alpha g$  denominamos de “mollifier” de  $g$  com  $\alpha$  o raio da molificação. Podemos perceber que funções deste tipo são suaves com propriedades especiais usadas para aproximar funções irregulares suavizando-as através da convolução.

Segue da definição de  $J_\alpha$  que

$$\frac{d}{dx} J_\alpha g(x) = (\rho_\alpha * g)'(x) = (\rho_\alpha * g')(x) = (\rho'_\alpha * g)(x). \quad (3.2.4)$$

A forma como se dá a reconstrução da derivada dos dados através de  $J_\alpha g'$  garante a consistência e a estabilidade (ver (MURIO, 2011, Lema 1.1 e 1.2)) permitindo substituir o problema mal-posto (encontrar  $g'$ ) por um problema estável com relação às medidas (encontrar  $J_\alpha g'$ ). Este novo problema depende do parâmetro  $\alpha > 0$  e na ausência de ruídos converge para a solução do problema exato.

Portanto, dizemos que  $J_\alpha g'$  com  $\alpha > 0$ , representam um método de regularização para o problema de diferenciação denominado Molificação.

### 3.2.2 Método de Landweber

Existem alguns métodos iterativos bastante conhecidos e desenvolvidos que são utilizados para resolver equações de operadores bem-postas. Dentre eles, podemos citar os métodos de descida máxima, método de Cauchy, o método de Newton e o método do gradiente conjugado BAUMEISTER (1987); KALTENBACHER; NEUBAUER; SCHERZER (2008) e referências.

Como nosso interesse está em resolver um problema inverso, existem questões de convergência e estabilidade com relação ao ruído nos dados, que são sensivelmente diferentes que as questões que devem ser abordadas na solução de problemas bem-postos. Desta forma, vamos abordar brevemente nesta seção o método iterativo de Landweber para problemas mal-postos. Para mais detalhes de outros possíveis métodos iterativos de regularização, consulte KALTENBACHER; NEUBAUER; SCHERZER (2008) e referências.

Uma forma simples de entender o propósito da iteração de Landweber que será apresentada abaixo consiste em considerar a equação de operadores (3.1.1) com a hipótese de que o operador  $F$  seja linear. Assim, é fácil perceber que a qualquer solução de (3.1.1) também é solução da chamada equação normal

$$F^*(Fa - u) = 0 \quad (3.2.5)$$

A ideia agora é olhar para a equação (3.2.5) como uma iteração de ponto fixo, ou seja, dado um ponto de partida  $a_0$ , calcular

$$a_k = a_{k-1} + \gamma F^*(u - Fa_{k-1}), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.2.6)$$

de forma recursiva, onde  $\gamma$  é um parâmetro de relaxamento, imposto de modo que as iterações converjam para uma solução (mesmo que generalizada)  $a^\dagger$  de (3.1.1). Nesta seção adotaremos  $a^\dagger$  como uma solução de norma mínima.

Para dados com ruídos de nível  $\delta$ , a iteração (3.2.6) pode ser reescrita de forma

$$a_k^\delta = a_{k-1}^\delta + \gamma F^*(u^\delta - Fa_{k-1}^\delta), \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.2.7)$$

No caso de dados com ruídos, o método iterativo de Landweber deve ser combinado a uma regra de parada a qual é dada pelo princípio da discrepância

$$\|u^\delta - F(a_{k^*}^\delta)\| \leq \tau\delta < \|u^\delta - F(a_k^\delta)\| \quad (3.2.8)$$

para algum  $\tau > 1$ . Dessa forma, o número de iterações  $k^*$  determina a regra de parada do método.

A iteração 3.2.6 (respectivamente (3.2.7)) é conhecida na literatura de problemas inversos como iteração de Landweber BAUMEISTER (1987); DE CEZARO; LEITÃO (2008); KALTENBACHER; NEUBAUER; SCHERZER (2008).

Resultados de estabilidade e convergência da iteração 3.2.6 (respectivamente (3.2.7)) podem ser consultados em BAUMEISTER (1987); DE CEZARO; LEITÃO (2008) e referências.

**Caso de  $F$  ser não linear:** Vamos considerar o caso em que a equação de operadores (3.1.1) seja não-linear. Como no caso de problemas bem postos KALTENBACHER; NEUBAUER; SCHERZER (2008), não é possível esperar que uma iteração para resolver um problema da forma (3.1.1) convirja, para qualquer chute inicial  $a_0$ . Ou seja, neste caso temos que assumir algumas informações *a priori* sobre o chute inicial  $a_0$ .

Para a análise de convergência e estabilidade da iteração de Landweber, precisamos de algumas hipóteses:

**LH1)** Assumiremos que  $a_0 = a_0^\delta \in B_\rho(a^*)$ , onde  $a^*$  corresponde a uma solução "exata" do problema (3.1.1).

**LH2)** O operador  $F$  está definido entre espaços de Hilbert e possui uma derivada de Fréchet  $F'(\cdot)$  contínua.

De forma natural, a generalização da iteração de Landweber para o caso de um operador não linear é dada por

$$a_k^\delta = a_{k-1}^\delta + \gamma F'(a_{k-1}^\delta)^*(u^\delta - F(a_{k-1}^\delta)), \quad 1 \leq k < \mathbb{N}. \quad (3.2.9)$$

com  $u^\delta$  representando dados com ruídos e satisfazendo  $\|u - u^\delta\| \leq \delta$ . Ainda, em (3.2.9),  $F'(\cdot)^*$  representa o adjunto da derivada de Fréchet de  $F$ .

Assim como no caso linear, para dados com ruídos, o método iterativo de Landweber deve ser combinado a uma regra de parada. Isto é:

**LH3)** Para dados com ruídos  $u^\delta$  com  $\|u - u^\delta\| \leq \delta$ , a iteração de Landweber não linear é parada de acordo com princípio da discrepância, isto é, no primeiro  $k_*^\delta$  tal que (3.2.8) seja satisfeito.

Dessa forma, o número de iterações  $k_*^\delta$  determina a regra de parada do método.

Sabemos que métodos iterativos para problemas não lineares geralmente não convergem globalmente, e.g. KALTENBACHER; NEUBAUER; SCHERZER (2008). Assim, temos que dar condições mais restritivas para o operador  $F(\cdot)$  de forma a garantir que a iteração de Landweber (3.2.9) esteja bem definida e que convirja para uma solução de (4.2.1).

**LH4)** Assumiremos que a derivada de Fréchet de  $F(\cdot)$  satisfaz

$$\|F'(\cdot)\| \leq 1/\gamma, \quad a \in B_{2\rho}(a_0) \subset D(F), \quad (3.2.10)$$

onde  $B_{2\rho}(a_0)$  denota a bola fechada de raio  $2\rho$  de centro  $a_0$  e  $\gamma$  é a constante que aparece em (3.2.9).

**LH5)** Por fim, faz-se necessário assumir uma condição local, conhecida como condição do cone tangente, dada por

$$\|F(a) - F(\tilde{a}) - F'(a)(a - \tilde{a})\| \leq \eta \|F(a) - F(\tilde{a})\|, \quad \eta < \frac{1}{2}, \quad a, \tilde{a} \in B_{2\rho}(a_0) \subset D(F) \quad (3.2.11)$$

Note que se o operador  $F$  em (3.1.1) for linear as hipóteses **LH4)** e **LH5)** são automaticamente satisfeitas.

Com as hipóteses **LH1)**-**LH5)** satisfeitas podemos enunciar as seguintes propriedades de convergência e estabilidade da iteração de Landweber. Tais resultados podem ser encontrados em KALTENBACHER; NEUBAUER; SCHERZER (2008); DE CEZARO (2010) e, portanto, não apresentaremos a demonstração.

**Proposição 3.2.1.** (KALTENBACHER; NEUBAUER; SCHERZER, 2008, Proposition 2.2) *Assuma as hipóteses **LH1)** - **LH5)** satisfeitas. Assuma ainda que exista uma solução  $a_* \in B_\rho(a_0)$  da equação  $F(a) = u$ . Se  $a_k^\delta \in B_\rho(a_*)$ , então enquanto*

$$\|u^\delta - F(a_k^\delta)\| > 2 \frac{1 + \eta}{1 - 2\eta} \delta, \quad (3.2.12)$$

*temos que  $a_{k+1}^\delta$  é uma aproximação melhor para  $a_*$  que  $a_k^\delta$ . Em particular,  $a_{k+1}^\delta \in B_\rho(a_*)$  e a iteração está bem definida.*

De acordo com a Proposição 3.2.1, o parâmetro  $\tau$  do princípio da discrepância (3.2.8) deve

ser escolhido em função de  $\eta$  segundo a restrição a seguir

$$\tau > 2 \frac{1 + \eta}{1 - 2\eta} \delta > 2. \quad (3.2.13)$$

O próximo corolário garante que o índice de parada dado pelo princípio da discrepância (3.2.8) com  $\tau$  dado por (3.2.13) é finito.

**Corolário 3.2.2.** (KALTENBACHER; NEUBAUER; SCHERZER, 2008, Corollary 2.3) *Assumindo que as hipóteses da Proposição 3.2.1 são satisfeitas e que  $k_*$  é escolhido de acordo com o princípio da discrepância (3.2.8) com  $\tau$  satisfazendo (3.2.13). Então*

$$k_*(\tau\delta)^2 < \sum_{k=0}^{k_*-1} \|u^\delta - F(a_k^\delta)\|^2 \leq \frac{\tau}{(1 - 2\eta)\tau - 2(1 + \eta)} \|a_0 - a_*\|^2. \quad (3.2.14)$$

No caso em que  $\delta = 0$ , então

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|u - F(a_k)\|^2 < \infty. \quad (3.2.15)$$

Note que, quando os dados não têm ruídos ( $\delta = 0$ ), (3.2.15) implica que se a iteração de Landweber (3.2.9) converge a norma do resíduo da iteração tende para zero quando  $k \rightarrow \infty$ . Ainda, o limite da iteração de Landweber é uma solução de (4.2.1), o que é assegurado no próximo teorema.

**Teorema 3.2.3.** (KALTENBACHER; NEUBAUER; SCHERZER, 2008, Theorem 2.4) *Assuma as Hipóteses da Proposição (3.2.1) satisfeitas e que  $F(a) = u$  tem solução em  $B_\rho(a_0)$ . Então a iteração de Landweber não-linear aplicada a dados exatos ( $\delta = 0$ ) converge para a solução de  $F(a) = u$ . Se  $N(F'(a^\dagger)) \subset N(F'(a))$  para todo  $a \in B_\rho(a^\dagger)$ , então  $a_k$  converge para  $a^\dagger$  quando  $k \rightarrow \infty$ .*

Sabemos de (DE CEZARO, 2010) que se  $u^\delta$  não pertence a imagem de  $F(\cdot)$ , então  $a_k^\delta$  em (3.2.9) diverge, quando  $k \rightarrow \infty$ . No entanto, se a iteração é terminada segundo o princípio da discrepância (3.2.8) então temos uma maneira estável para obter uma aproximação para a solução de  $F(a) = u$ . O próximo teorema mostra que a iteração de Landweber é um método de regularização se o critério de parada estiver de acordo com o princípio da discrepância (3.2.8).

**Teorema 3.2.4.** (KALTENBACHER; NEUBAUER; SCHERZER, 2008, Theorem 2.6) *Assumindo que as hipóteses **LH1** - **LH5** são satisfeitas e que  $k_* = k_*(\delta, u^\delta)$  seja escolhido pelo critério de parada (3.2.8) com  $\tau$  satisfazendo (3.2.13). Então a iteração de Landweber  $a_{k_*}^\delta$  converge a uma solução  $F(a) = u$  quando  $\delta \rightarrow 0$ . Se  $N(F'(a^\dagger)) \subset N(F'(a))$  para todo  $a \in B_\rho(a^\dagger)$ , então  $a_{k_*}^\delta$  converge para  $a^\dagger$  quando  $\delta \rightarrow 0$ .*

## 4 PROBLEMA DIRETO NA EQUAÇÃO DE EULER-BERNOULLI

Neste Capítulo, vamos analisar o problema direto na equação de Euler-Bernoulli provando a sua boa colocação e escreveremos o problema direto como uma equação de operadores definidos em espaços adequados.

### 4.1 Problema Direto: existência e unicidade

Para melhor analisarmos a equação de Euler-Bernoulli dada por (1.2.8) seguiremos a estratégia apresentada por LESNIC; ELLIOTT; INGHAM (1999) reescrevendo-a como o sistema de EDO (4.1.1)

$$\begin{cases} \frac{d^2 M(x)}{dx^2} = f(x) \\ a(x) \frac{d^2 u}{dx^2}(x) = M(x) \end{cases} \quad (4.1.1)$$

para  $0 < x < L$ , onde  $L$  representa o comprimento da viga e com condições de contorno como em (1.2.9) - (1.2.16).

Nesta seção provaremos boa-colocação no sentido de Hadamard para o problema direto com relação a equação de Euler-Bernoulli. Para tal, utilizaremos duas técnicas distintas: para a primeira equação do sistema (4.1.1), utilizaremos o método conhecido como '*shooting*' em conjunto com o princípio do máximo para obter uma solução clássica. Em seguida, apresentaremos uma formulação variacional para provar existência e unicidade de uma "solução fraca" para a segunda equação do sistema (4.1.1). Estes resultados nos permitirão introduzir o problema direto como uma equação de operadores em espaços de funções adequados. Feito isso, provaremos algumas propriedades importantes do operador como, por exemplo, continuidade, compacidade e Fréchet diferenciabilidade.

Resolver o problema direto em (1.2.8) significa resolver o sistema de equações (4.1.1) com condições de contorno (1.2.9) - (1.2.16), determinando a deflexão  $u(x)$ ,  $0 < x < L$ , para a viga.

#### Hipóteses Gerais:

**A1)** O coeficiente de rigidez  $a = a(x)$  é uma função mensurável em  $[0, L]$  e que satisfaz a condição  $\bar{a} \geq a(x) \geq \underline{a} > 0$ , para constantes  $\bar{a}, \underline{a}$  conhecidas. Nesta dissertação, o conjunto de coeficientes que satisfazendo a hipótese **A1)** será denotado por  $Ad$  e chamado de conjunto admissível.

**A1')** O coeficiente de rigidez além de satisfazer **A1)** possui  $\|a'\|$  uniformemente limitada, ou seja, o coeficiente pertence ao conjunto  $A = \{a \in L^\infty \mid \lambda_1 \leq a \leq \lambda_2, \|a'\| \leq Q\}$ , onde  $\|\cdot\|$  denota a norma  $L^2(0, L)$  com  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \infty$  e  $Q > 0$ .

**A2)** A distribuição de forças  $f \in C[0, L]$  satisfaz  $f(x) > 0$  ao longo da viga.

**Observação 4.1.1.** *i) O conjunto  $Ad$  dos coeficientes admissíveis é convexo e fechado na topologia de  $L^p[0, L]$  para qualquer  $1 \leq p \leq 2$ . Assim, pelo Teorema 2.1.11 é fracamente fechado.*

*ii) Segue da hipótese **A2)** que existe uma constante  $K > 0$  tal que  $f(x) \in [0, K]$  para todo  $x \in [0, L]$ .*

Conforme vimos no Capítulo 1 o que temos é um problema de valor de contorno dadas por (1.2.8) e condições do tipo (1.2.9) - (1.2.16). Para mostrar a existência e unicidade do problema direto na equação de Euler-Bernoulli, seguiremos a estratégia apresentada em LES-NIC; ELLIOTT; INGHAM (1999), isto é, analisaremos o sistema (4.1.1) para cada equação separadamente.

Assim, a partir do sistema (4.1.1) iremos analisar primeiramente a EDO

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = f(x) \quad (4.1.2)$$

com condições de contorno para a variável  $M$  oriundas das condições (1.2.9) - (1.2.16).

Conforme abordado no Capítulo 2, basta que um problema de valor de contorno satisfaça as condições do Teorema (2.2.1) para garantir que este possua uma única solução. No entanto, em (4.1.2) a  $f_M(x, M, M') = 0$  e a hipótese (i) do Teorema 2.2.1 se descumpre e este não pode ser aplicado neste caso.

Diante disso, vamos então utilizar os resultados obtidos por BAXLEY (1977) no qual a hipótese  $f_M(x, M, M') > 0$  é relaxada, podendo ser substituída por  $f_M(x, M, M') \geq 0$ , o que é bem oportuno para (4.1.2).

A ideia apresentada por BAXLEY (1977) utiliza como ferramentas principais o Princípio do Máximo e o Método do *Shooting*, ambos apresentados no Capítulo 2. O que vamos fazer a seguir é mostrar que nosso problema satisfaz as hipóteses necessárias para a utilização desta teoria.

**Lema 4.1.1.** *Seja o problema de valor de contorno (4.1.2) com condições de contorno (1.2.10), (1.2.12) e (1.2.14) com relação a  $M$ , então ele satisfaz as hipóteses **(B1)**, **(B2)**, **(B3)** e **(B4)** seguindo a teoria abordada em BAXLEY (1977) da Seção 2.3.3.*

*Demonstração.* Vamos considerar o intervalo  $[0, 1]$ , ou seja uma viga de comprimento  $L = 1$ . Segue então que de fato as condições de contorno (1.2.10) e (1.2.14) com relação a  $M$  são as mesmas e (1.2.12) dadas por respectivamente

$$M(0) = M(1) = 0,$$

$$M(0) = M'(1) = 0$$

podem ser reescritas conforme a hipótese **(B1)**. De acordo com cada condição as constantes  $m_i, n_i$  com  $i = 0, 1$  ainda satisfazem **(B2)**.

Além disso, a EDO (4.1.2) satisfaz as hipóteses **(B3)** e **(B4)** de BAXLEY (1977), pois o lado direito da equação diferencial é uma função que só depende da variável  $x$ , satisfazendo todas as hipóteses exigidas para a aplicação da teoria de BAXLEY (1977).  $\square$

Vamos considerar o seguinte problema

$$\begin{cases} M''(x) = f(x, 0, 0) \\ M(0) = \alpha = 0, \\ M(1) = \beta = 0 \end{cases} \quad (4.1.3)$$

em que a condição de contorno é oriunda tanto de (1.2.10) ou de (1.2.14). Podemos então enunciar o equivalente ao Teorema 2.3.6 para o problema de valor de contorno (4.1.3).

**Observação 4.1.2.** *Colocamos o problema de valor de contorno (4.1.3) desta forma para seguir a notação apresentada por BAXLEY (1977).*

**Teorema 4.1.2.** *Suponhamos que o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} M''(x) = f(x, 0, 0) \\ M(0) = \gamma_1, \\ M'(0) = \gamma_2 \end{cases} \quad (4.1.4)$$

*possui uma solução global em  $[0, 1]$ . Se o Lema 2.3.3 é válido então o problema (4.1.3) possui uma única solução para o par  $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ .*

*Demonstração.* Sabemos da teoria de EDO clássica que (4.1.4) possui uma única solução global se  $f(x)$  é lipschitz e limitada. Assim, o que temos que verificar é se o Lema 2.3.3 é válido para nosso problema. Como temos  $f(x, 0, 0)$ , a função definida em (2.3.25)  $r_-(x; t) = o(t)$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Além disso, como  $n_0 = 0$  em (ii) do Lema 2.3.3 temos que  $k = |\beta|n_1^{-1}$  e, assim, para  $v$  função de comparação (2.3.23) teremos que

$$v = v(x; t) = \cosh(t) - \cosh(t(x - 1)) + |\beta|n_1^{-1} \quad (4.1.5)$$

obtendo  $v'' - f(x, v, v') \leq 0$ .

Como as hipóteses são satisfeitas podemos através do método do *shooting* substituir o problema (4.1.3) pelo problema (4.1.4) e estimar um parâmetro  $s$  de modo a nos aproximar da solução de (4.1.3) a partir da solução de (4.1.4).

Pelo Lema 2.3.2, como temos  $m_0 = 1, m_1 = 0$  e  $n_0 = 1, n_1 = 0$ , vemos que não importa o valor de  $s$ , a solução de (4.1.4) satisfaz a corresponde condição (2.3.14) mas com relação ao problema (4.1.3), restando-nos controlar o parâmetro  $s$  de modo que ele também satisfaça (2.3.15).

De acordo com o método do *shooting*, precisamos obter as seguintes estimativas para um  $s_1$  suficientemente grande

$$n_0 M(1; s_1) \geq \beta = 0 \quad (4.1.6)$$

e para um  $s_2$  suficientemente pequeno

$$n_0 M(1; s_2) \leq \beta = 0. \quad (4.1.7)$$

Para determinarmos uma cota superior e inferior de modo a garantir (4.1.6) e (4.1.7) precisamos utilizar uma função auxiliar que garanta as hipóteses do Teorema 2.2.2. De fato, vamos utilizar a função  $v$  definida em (4.1.5).

Notemos ainda que precisamos garantir que ao escolhermos um  $s$  suficientemente grande a solução  $M(0)$  em (4.1.4) seja positiva e para  $s$  pequeno seja negativa. Para tal basta aplicarmos o Lema 2.3.5. Com isso, através do Teorema 2.2.2 e do Corolário 2.3.4 obtemos uma estimativa para  $s$  de modo que

$$n_0 M(1; s) \geq n_0 v(1; T) \geq 0$$

quando considerada cota inferior.

Similarmente podemos encontrar a cota superior, basta considerarmos  $-v$ .

Ocorre que nossa prova falha na hipótese do Lema 2.3.5. De fato,  $m_1 = 0$  e com isso  $M(0)$  em (4.1.4) pode não ser positiva para um  $s$  suficientemente grande quando considerada cota inferior. Assim, (2.3.34) pode não ser atingida. No entanto, segundo BAXLEY (1977), a prova segue valendo para o caso muito especial em que  $m_1 = 0$  e  $\alpha = 0$ , o que é exatamente proposto neste trabalho visto que todas condições de contorno em (1.2.10), (1.2.12) e (1.2.14) são homogêneas.  $\square$

**Observação 4.1.3.** *Para as condições (1.2.9) e (1.2.13) o que temos de fato é um clássico problema de valor inicial que já sabemos possuir existência e unicidade da solução. Assim, sua demonstração não será apresentada por não ser interesse neste trabalho.*

**Observação 4.1.4.** *Para as condições (1.2.11), (1.2.15) e (1.2.16) devemos incluir uma condição para  $M$  que dependendo poderá produzir um problema de valor inicial ou de contorno. Contudo, em ambos os casos teremos existência de solução como já provado.*

Provado a existência de solução para o problema direto (4.1.3) segue o seguinte teorema mostrando que a solução é única.

**Teorema 4.1.3** (Unicidade). *Seja  $M$  uma solução (que existe pelo Teorema 4.1.2) do problema de valor de contorno (4.1.3). Então,  $M$  é única.*

*Demonstração.* Supondo que  $M_1(x)$  e  $M_2(x)$  são soluções de (4.1.3). Seja  $M(x) = M_1(x) - M_2(x)$  que satisfaz a equação diferencial

$$M''(x) = 0 \quad (4.1.8)$$

e as condições de contorno

$$M(0) = M(1) = 0. \quad (4.1.9)$$

De acordo com o Teorema 2.2.3, sabemos que  $M(x) \leq 0$  em  $(0, 1)$ . Como a função  $-M(x)$  satisfaz a mesma equação e as mesmas condições de contorno, podemos aplicar o Teorema 2.2.3 para  $-M(x)$  garantindo que  $-M(x) \leq 0$  em  $(0, 1)$ . Portanto  $M \equiv 0$  em  $(0, 1)$ .  $\square$

Provados a existência e unicidade para (4.1.3), vamos agora analisar o outro problema de valor de contorno no sistema (4.1.1), em que temos

$$-a(x)u''(x) = M(x), \quad (4.1.10)$$

onde  $M(x)$  é a única solução de (4.1.3) e condições de contorno (1.2.9)-(1.2.16). Escrevemos o problema dessa forma pois se temos  $u$  solução de (4.1.10) então, por linearidade,  $-u$  é solução de (4.1.1).

Como nosso interesse neste trabalho está em analisar o parâmetro  $a(x)$  de modo que possa ser incluído um coeficiente contínuo por partes, não podemos afirmar que o quociente  $\frac{M(x)}{a(x)}$  também seja contínuo. Por esse motivo, não podemos utilizar a teoria de EDO para soluções clássicas afim de resolver tal problema. Para tanto, será necessário utilizarmos da teoria de soluções fracas com o propósito de provarmos existência e unicidade para (4.1.10).

Neste trabalho, consideraremos como uma solução fraca para o problema (4.1.10) qualquer função  $u \in H_0^1[0, L]$  tal que

$$\int_0^L u' \phi' dx = \int_0^L \frac{M}{a} \phi dx \quad (4.1.11)$$

qualquer que seja a função teste  $\phi \in H_0^1[0, L]$ .

**Observação 4.1.5.** Para a condição de contorno (1.2.10), definimos  $H_*^1[0, L]$  de modo que  $H_*^1 = \{\phi \in H_0^1 \text{ e } \phi'(0) = \phi'(L) = 0\}$ . Sabemos que  $C_0^\infty \hookrightarrow H_*^1 \subset H_0^1$ , assim (4.1.11) está bem definido para a condição de contorno (1.2.10).

**Lema 4.1.4.** Considere as hipóteses **A1**) e **A2**) satisfeitas. Se existe  $u$  satisfazendo o problema de valor de contorno (4.1.10), então  $u$  é uma solução fraca para o problema (4.1.10). Reciprocamente, se  $u$  é uma solução fraca para o problema (4.1.10), então  $u$  satisfaz o problema de valor de contorno (4.1.10) quase sempre.

*Demonstração.* Segue do Teorema 4.1.2 que  $M \in C[0, L]$ . Assim, pela hipótese **A1**) temos que  $M/a \in L^2[0, L]$ . Portanto, de (4.1.10),  $u'' \in L^2[0, L]$  e, assim,  $u \in H^2[0, L]$ . Pelas condições de contorno temos que  $u \in H_0^2[0, L]$ . Finalmente, segue diretamente da identidade de Green (veja (BREZIS, 2010)) que  $u$  satisfaz (4.1.11).

Reciprocamente, se  $u \in H_0^1[0, L]$  é uma solução fraca para o problema (4.1.10), então as condições de contorno para a equação (4.1.10) são satisfeitas. Além disso, como por hipótese  $u$  satisfaz (4.1.11), temos, depois de uma integração por partes (identidade de Green BREZIS (2010)) que

$$\langle -au'' - M, \phi \rangle = \langle 0, \phi \rangle \quad \forall \phi \in C_0^\infty[0, L].$$

Da densidade de  $C_0^\infty[0, L]$  em  $H_0^1[0, L]$ , segue que  $-au'' = M$  quase sempre.  $\square$

Dado o Lema 4.1.4, queremos mostrar a existência de uma única solução  $u \in H_0^1[0, L]$  satisfazendo (4.1.11). Para tal, utilizaremos o lema de Lax-Milgram 4.1.7. Com esse objetivo definimos a forma bilinear  $A : H_0^1[0, L] \times H_0^1[0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$A(u, \phi) := \int_0^L u' \phi' dx \quad (4.1.12)$$

e o seguinte funcional linear  $l : H_0^1[0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$l(\phi) := \int_0^L \frac{M}{a} \phi dx. \quad (4.1.13)$$

Notemos que  $u$  é solução fraca de (4.1.10) se e somente se  $u$  satisfaz

$$A(u, \phi) = l(\phi) \quad \forall \phi \in H_0^1[0, L]. \quad (4.1.14)$$

Com a notação acima podemos estabelecer o equivalente ao lema de Lax-Milgram (veja BREZIS (2010)) para o problema (4.1.11). Para tal, provaremos os seguintes resultados auxiliares:

**Lema 4.1.5.** *Sob as hipóteses **A1**) e **A2**), o funcional linear  $l$  definido em (4.1.13) é contínuo em  $H^1[0, L]$ , ou seja, existe uma constante  $C > 0$ , independente de  $\phi \in H^1[0, L]$ , tal que  $|l(\phi)| \leq C \|\phi\|_{H^1[0, L]}$ .*

*Demonstração.* De fato, segue da definição do funcional  $l$  em (4.1.13) e da desigualdade de Cauchy-Schwarz (Capítulo 2, 2.1.1) que

$$|l(\phi)| = \left| \int_\Omega \frac{M}{a} \phi dx \right| \leq \int_\Omega \left| \frac{M}{a} \right| |\phi| dx \leq \|\underline{a}^{-1}\|_{L^\infty} \|M\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2} \leq C \|\phi\|_{L^2}.$$

A imersão contínua de  $H^1[0, L]$  em  $L^2[0, L]$  (veja BREZIS (2010)) completa a demonstração.  $\square$

O próximo resultado diz respeito as propriedades da forma bilinear  $A$ .

**Lema 4.1.6.** *Sob as hipóteses **A1**) e **A2**), a forma bilinear  $A$  definida em (4.1.12) é contínua e coerciva em  $H^1[0, L] \times H^1[0, L]$ , isto é, existem constantes  $\overline{C}, \underline{C}$ , independentes de  $\phi \in H^1[0, L]$ , tais que*

$$\|A(u, \phi)\| \leq \overline{C} \|u\|_{H^1} \|\phi\|_{H^1}$$

e

$$A(u, u) \geq \underline{C} \|u\|_{H^1}^2,$$

respectivamente.

*Demonstração.* Primeiramente provaremos a continuidade. Segue da definição da forma bilinear, da desigualdade de Cauchy-Schwarz e da hipótese **A1**) que

$$\begin{aligned} |A(u, \phi)| &= \left| \int_0^L u' \phi' dx \right| \leq \int_0^L |u'| |\phi'| dx \leq \int_0^L |u'| |\phi'| dx \leq \|u'\|_{L^2} \|\phi'\|_{L^2} \\ &\leq (\|u\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2})(\|\phi'\|_{L^2} + \|\phi\|_{L^2}) = \|u\|_{H^1[0,L]} \|\phi\|_{H^1[0,L]}, \end{aligned}$$

o que prova a continuidade da forma bilinear.

Para provar a coercividade, notemos que

$$\begin{aligned} A(u, u) &= \int_0^L u' u' dx \\ &\geq \int_0^L |u'|^2 dx \\ &\geq \underline{C} \|u\|_{H_0^1[0,L]}^2 \end{aligned}$$

pela desigualdade de Poincaré enunciada no Teorema (2.1.13). O que mostra a coercividade.  $\square$

Agora, podemos enunciar o equivalente ao Teorema de Lax-Milgram 2.1.10 para o problema (4.1.11).

**Teorema 4.1.7** (Existência e Unicidade). *Sob as hipóteses **A1**) e **A2**), existe uma única solução do problema (4.1.11). Como consequência do Lema 4.1.4, existe uma única solução fraca para o problema (4.1.10).*

*Demonstração.* Segue dos Lemas 4.1.5 e 4.1.6 que o funcional linear  $l(\cdot)$  é contínuo e que a forma bilinear  $A(\cdot, \cdot)$  é contínua e coerciva em  $H_0^1[0, L]$ . Portanto, segue do Teorema de Lax-Milgram 2.1.10 a existência de uma única função  $u \in H_0^1[0, L]$  satisfazendo (4.1.11).  $\square$

O teorema a seguir vai mostrar a regularidade da solução fraca  $u \in H_0^1[0, L]$  obtida acima utilizando regularidade elíptica, mostrando que  $u$  pode ser  $C^2$ . A demonstração pode ser consultada em BREZIS (2010).

**Teorema 4.1.8.** *Seja o intervalo aberto  $I = (0, L)$ ,  $M \in L^2[0, L]$  e  $u \in H_0^1(0, L)$  satisfazendo (4.1.11). Então  $u \in H^2[0, L]$  e  $\|u\|_{H^2} \leq C \|M\|_{L^2}$ , onde  $C$  é uma constante que só depende de  $[0, L]$ . Além disso, se  $[0, L]$  é da classe  $C^{m+2}$  e  $M \in H^m[0, L]$ , então*

$$u \in H^{m+2}[0, L] \quad e \quad \|u\|_{H^{m+2}} \leq C \|M\|_{H^m}.$$

*Em particular, se  $M \in H^m[0, L]$  com  $m > 1/2$ , então  $u \in C^2[0, L]$ .*

Além disso, as mesmas conclusões acima podem ser formuladas para um problema com condições do tipo Neumann (ver (BREZIS, 2010, Theorem 9.26)).

## 4.2 Problema Direto como uma equação de operadores

Nesta seção escreveremos o problema direto dado por (4.1.1) como uma equação de operadores em espaços de funções adequados. Para tal operador, provaremos algumas propriedades que serão muito úteis para o que segue no Capítulo 5.

Definimos o operador não linear

$$\begin{aligned} F : Ad \subset L^2[0, L] &\longrightarrow L^2[0, L] \\ a &\longmapsto u(a) \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

onde  $u(a) \in H_0^1[0, L]$  é a única solução fraca do problema (4.1.11).

O primeiro lema garante que o operador  $F$  está bem definido.

**Lema 4.2.1.** *Considere as hipóteses **A1)** e **A2)**. Então o operador  $F$  definido em (4.2.1) está bem definido.*

*Demonstração.* Segue do Teorema 4.1.7, que para cada  $a \in Ad$ , existe uma única solução  $u = u(a) \in H_0^1[0, L]$  para o problema (4.1.11). Assim,  $F$  está bem definido.  $\square$

### 4.2.1 Propriedades do operador parâmetros para solução

O primeiro resultado desta subseção, com respeito ao operador  $F$ , é que este é contínuo na topologia de  $L^2[0, L]$ .

**Teorema 4.2.2.** *Assumimos que as hipóteses **A1)** e **A2)** são satisfeitas. Então, o operador  $F$  definido em (4.2.1) é contínuo de  $Ad \subset L^2[0, L]$  em  $L^2[0, L]$ .*

*Demonstração.* Notemos primeiramente que, o operador  $F$  está bem definido pelo Lema 4.2.1. Em seguida, observemos que, como  $L^2[0, L]$  é um espaço separável 2.1.5, basta mostrarmos que  $F$  é sequencialmente contínuo, isto é, que para qualquer que seja a sequência  $(a_n) \in Ad$  com  $a_n \rightarrow a$  quando  $n \rightarrow \infty$  na topologia de  $L^2[0, L]$ , tenhamos  $F(a_n) = u(a_n) := u_n$  converge (em  $L^2[0, L]$ ) para  $F(a) = u(a) := u$  com  $0 < \underline{a} \leq a_n \leq \bar{a} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Do Lema 4.1.4,  $u_n \in H_0^1[0, L]$  e  $u \in H_0^1[0, L]$  satisfazem,

$$a_n u_n'' = M \quad (4.2.2)$$

e

$$a u'' = M, \quad (4.2.3)$$

com as mesmas condições de contorno, dadas por (1.2.9) - (1.2.16), respectivamente.

Pela linearidade das equações, segue que, subtraindo (4.2.2) de (4.2.3) obtemos

$$(u_n'' - u'') = -\frac{(a_n - a)}{a} u_n'', \quad (4.2.4)$$

com condições de contorno homogêneas.

Agora, definimos  $v_n = u_n - u$ . Como  $u_n, u \in H_0^1[0, L]$ , segue que  $v_n \in H_0^1[0, L]$ . Para concluirmos o teorema, basta mostrar que  $v_n \xrightarrow{L^2} 0$  quando  $a_n \xrightarrow{L^2} a$ . Para demonstrar este fato, utilizaremos a forma variacional (4.1.11) para o problema (4.2.4), com  $v_n \in H_0^1[0, L]$  como função teste. Isso resulta em

$$\int_0^L v_n'' v_n dx = \int_0^L -\frac{(a_n - a)}{a} u_n'' v_n dx. \quad (4.2.5)$$

Integrando por partes o lado direito de (4.2.5) obtemos

$$v_n v_n' \Big|_0^L - \int_0^L v_n' v_n' dx = - \int_0^L \frac{(a_n - a)}{a} u_n'' v_n dx.$$

Como  $v_n \in H_0^1[0, L]$ , segue que o termo de fronteira se anula. Assim, por (4.2.2) e Holder

$$\begin{aligned} \|v_n'\|_{L^2[0, L]}^2 &= \int_0^L \frac{(a_n - a)}{a \cdot a_n} a_n u_n'' v_n dx \\ &= \int_0^L \frac{(a_n - a)}{a \cdot a_n} M v_n \leq \frac{1}{\underline{a}^2} \int_0^L |a_n - a| |M| |v_n| dx \\ &\leq \frac{K}{\underline{a}^2} \int_0^L |a_n - a| |v_n| dx \leq \tilde{C} \|a_n - a\|_{L^2[0, L]} \|v_n\|_{L^2[0, L]}, \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

onde  $\tilde{C} = \frac{K}{\underline{a}^2}$ , pois  $M$  é função contínua em  $[0, L]$ .

Pela desigualdade de Poincaré (2.1.13) aplicado a  $v_n \in H_0^1[0, L]$  obtemos

$$\|v_n\|_{L^2} \leq C \|a_n - a\|_{L^2}, \quad (4.2.7)$$

onde  $C$  é uma constante que depende somente de  $\tilde{C}$  e da constante de Poincaré.

Assim, obtemos de (4.2.7) que se  $a_n \xrightarrow{L^2} a$  então  $v_n \xrightarrow{L^2} 0$ . Provando assim que o operador  $F$  é contínuo de  $L^2[0, L]$  para  $L^2[0, L]$ .  $\square$

Na sequência, provaremos que o operador  $F$  é, de fato, compacto com relação a topologia de  $L^2[0, L]$ . A consequência de tal resultado será melhor entendida no Capítulo 5.

**Teorema 4.2.3.** *Assumimos que as hipóteses **A1)** e **A2)** sejam satisfeitas. Então, o operador  $F$  definido em (4.2.1) é compacto de  $Ad \subset L^2[0, L]$  em  $L^2[0, L]$ .*

*Demonstração.* Seja  $(a_k) \in Ad$  uma sequência admissível convergindo fraco para  $a$  com relação a topologia de  $L^2[0, L]$ . Segue da Observação 4.1.1 que  $a \in Ad$ . Denotemos ainda por  $F(a_k) = u(a_k) := u_k$  e  $F(a) = u(a) = u$ , respectivamente. De acordo com o Teorema (2.1.9), basta mostrar que  $u_k \rightarrow u$  em  $L^2[0, L]$ .

Por definição,  $u_k$  e  $u$  satisfazem

$$a_k u_k'' = M \quad (4.2.8)$$

$$au'' = M \quad (4.2.9)$$

com as mesmas condições de contorno dadas por (1.2.9) - (1.2.16), respectivamente. Argumentando como no Teorema 4.2.2, subtraindo (4.2.8) de (4.2.9), obtemos

$$a_k(u_k'' - u'') = -(a_k - a)u'' \quad (4.2.10)$$

Integrando ambos os lados de (4.2.10) e multiplicando pela função  $\varphi \in C_0^\infty[0, L]$ , obtemos

$$\int_0^L a_k(u_k'' - u'')\varphi dx = - \int_0^L (a_k - a)u''\varphi dx = - \int_0^L (a_k - a)a\frac{u''}{a}\varphi dx = - \int_0^L (a_k - a)aM\varphi dx \quad (4.2.11)$$

Como  $a \in Ad$ , segue de (4.2.9) e da regularidade de  $M$  dada pelo Teorema 4.1.8 que  $aM \in L^\infty[0, L] \subset L^2[0, L]$ , pois  $[0, L]$  é um subconjunto limitado da reta real. Como  $\varphi \in C_0^\infty$  então  $aM\varphi \in L^2[0, L]$ .

Portanto, da hipótese de  $a_k$  convergir fraco para  $a$  em  $L^2[0, L]$ , segue que o lado direito de (4.2.11) converge para zero, isto é,

$$\langle a_k - a, aM\varphi \rangle = \int_0^L (a_k - a)aM\varphi dx \rightarrow 0 \quad k \rightarrow \infty. \quad (4.2.12)$$

Como consequência, o lado esquerdo de (4.2.11) converge para zero no sentido das distribuições, isto é,  $a_k(u_k'' - u'') \rightarrow 0$   $k \rightarrow \infty$  no sentido das distribuições. Além disso, pelo Teorema da convergência dominada BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA (2012), segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^L a_k(u_k'' - u'')\varphi dx = \int_0^L a \lim_{k \rightarrow \infty} (u_k'' - u'')\varphi dx = 0. \quad (4.2.13)$$

Pelo fato de  $a \in Ad$ , e da densidade de  $C_0^\infty[0, L]$  em  $L^2[0, L]$ , segue que  $u_k \rightharpoonup u$  em  $L^2[0, L]$ .

Seja  $z \in L^2[0, L]$  o limite fraco da diferença  $u_k - u$ . Portanto, juntando (4.2.11) e (4.2.13) obtemos, (após tomar o limite em (4.2.10) que  $z$  satisfaz

$$az'' = 0 \quad (4.2.14)$$

com condições de contorno homogêneas. Como  $a \in Ad$ , segue do Princípio do Máximo 2.2.3 que

$$z \equiv 0 \quad \rightarrow \quad u_k - u \xrightarrow{L^2} 0 \quad (4.2.15)$$

Por outro lado, tomando  $\varphi = u_k - u$ , segue que  $\|u_k - u\|_{L^2[0, L]} \rightarrow 0$ .

Da convergência fraca e da convergência em norma, segue que  $u_k \rightarrow u$  em  $L^2[0, L]$  (veja BREZIS (2010)). Provando assim, a compacidade do operador  $F$ .  $\square$

## 5 PROBLEMA INVERSO NA EQUAÇÃO DE EULER-BERNOULLI

Conforme abordado no Capítulo 3, resolver o problema inverso de identificação na equação de Euler-Bernoulli (1.2.8) significa determinar o coeficiente de rigidez à flexão  $a(x) \in Ad$  a partir de medidas indiretas da deflexão  $u(x)$ , uma vez aplicada a força  $f(x)$ . Vimos também que problemas inversos são mal-postos no sentido de Hadamard. Vamos mostrar que o problema inverso de identificação do coeficiente é mal posto, pois falha o resultado de dependência contínua das medidas. Tal resultado é baseado nas propriedades do operador  $F$  provadas na Seção (4.2). Para exemplificar essa característica, apresentamos um exemplo, devido a (MARCELLINI, 1982), na Seção 5.1.

Além disso, na Seção 5.2.2 está o resultado mais importante dessa dissertação, a saber, a prova de unicidade de identificação para o coeficiente de rigidez  $a(x) \in Ad$ . Nossa técnica de prova generaliza o resultado obtido em (LESNIC; ELLIOTT; INGHAM, 1999) para coeficientes  $C^1(0, L)$ .

### 5.1 O problema de identificação do coeficiente de rigidez da viga é mal-posto

De acordo com o que abordamos no Capítulo 3, para um problema ser bem posto segundo Hadamard a solução de um problema deve satisfazer condições de existência, unicidade e dependência contínua dos dados (medidas). Segundo (DE CEZARO; LEITÃO, 2008; KIRSCH, 2011), as questões que envolvem existência e unicidade podem ser tratadas já que dependem unicamente da natureza algébrica dos espaços onde o problema está formulado e do operador considerado (DE CEZARO; LEITÃO, 2008). Assim, podemos contornar a questão da existência aumentando o espaço solução. Para provar a unicidade, uma das possibilidades é adicionar informações extras ao problema.

No entanto, se um problema não satisfaz a propriedade de dependência contínua dos dados, teremos grandes complicações para obter uma solução aproximada estável, visto que qualquer medição ou cálculo numérico possui erros. Assim, o descumprimento da estabilidade é o mais agravante. Dessa forma, para garantirmos a condição de dependência contínua dos dados temos que verificar a continuidade do operador  $F^{-1}$ , se este existe.

Vamos mostrar que o problema de identificação do coeficiente de rigidez da viga não depende continuamente dos dados, ou seja, o operador  $F^{-1}$  não é contínuo.

**Teorema 5.1.1.** *Assumamos que as hipóteses **H1)** e **H2)** sejam satisfeitas. Se existir uma inversa  $F^{-1}$  para o operador  $F$  definido em (4.2.1), então  $F^{-1}$  não é contínua. Como consequência direta, o problema inverso de identificação do coeficiente de rigidez  $a(x) \in Ad$  não depende continuamente das medidas da deflexão  $u$ .*

*Demonstração.* Suponhamos por contradição que  $F^{-1}$  é contínua. Na prova do Teorema 4.2.3, temos que o operador  $F$  é compacto. Assim, pelo Teorema 2.1.12, temos que  $F^{-1} \circ F = I$ , onde  $I$  representa o operador identidade deve ser compacto. Isso contradiz o Teorema 2.1.8. Logo,  $F^{-1}$  não é contínuo.  $\square$

A seguir apresentamos um exemplo apontado por MARCELLINI (1982), ilustrando a falta de dependência contínua dos dados iniciais para um problema de identificação de parâmetros semelhante ao problema abordado nessa dissertação.

**Exemplo 5.1.2.** *Consideremos a seguinte equação diferencial ordinária*

$$(au')' = 1 \quad (5.1.1)$$

*no intervalo  $[-2\pi, 2\pi]$  com condições de contorno de Dirichlet homogêneas*

$$u(-2\pi) = u(2\pi) = 0. \quad (5.1.2)$$

*Consideremos agora a sequência de parâmetros  $a_k$  dada por*

$$|a_k(x)| = \frac{1}{|2 + \cos(kx)|}. \quad (5.1.3)$$

*Note que, em particular  $a_k \in Ad$  para uma escolha apropriada das constantes  $\underline{a}, \bar{a}$ .*

*Substituindo  $a_k$  dado por (5.1.3) na equação diferencial (5.1.1) e integrando, obtemos que a solução correspondente  $u_k = u(a_k)$  satisfaz*

$$\frac{u(x)'}{2 + \cos(kx)} = x,$$

*ou ainda*

$$u'(x) = 2x + x \cos(kx) + C_1. \quad (5.1.4)$$

*Integrando por partes em (5.1.4) e usando as condições de contorno (5.1.2), obtemos que a solução  $u_k = u(a_k)$  de (5.1.1) é dada por*

$$u_k(x) = x^2 + \frac{x}{k} \sin(kx) + \frac{1}{k^2} \cos(kx) - (2\pi)^2 - \frac{1}{k^2}. \quad (5.1.5)$$

*Observemos que  $u_k(x)$  tende a  $u(x) = x^2 - (2\pi)^2$ , uniformemente em  $[-2\pi, 2\pi]$  quando  $k \rightarrow +\infty$  (uma vez que o intervalo é compacto).*

*Afirmção: A função  $u(x) = x^2 - (2\pi)^2$  satisfaz o problema de valor de contorno (5.1.1)-(5.1.2) para um coeficiente  $a = \frac{1}{2}$ .*

*De fato, é fácil verificarmos que  $u(x) = x^2 - (2\pi)^2$  satisfaz as condições de contorno (5.1.2).*

Além disso, notemos que

$$(1/2(x^2 - (2\pi)^2)')' = 1.$$

No entanto, vamos mostrar (seguindo os passos apresentados em MARCELLINI (1982)) que  $a_k$  converge, no sentido de  $L^2$ , para  $\tilde{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Em outras palavras, vamos mostrar que para qualquer função teste  $\varphi$  suficientemente suave, obtemos  $\langle a_k - \tilde{a}, \varphi \rangle_{L^2} \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow +\infty$ . A bem da verdade, verificaremos isso para os elementos  $\varphi$  da seguinte base de funções trigonométricas de  $L^2$ ,  $\{1, \sin(kx), \cos(kx)\}_{k \in \mathbb{N}}$ .

Em suma, temos que analisar a convergência da seguinte integral

$$\langle a_k - \tilde{a}, \varphi \rangle_{L^2[-2\pi, 2\pi]} = \int_{-2\pi}^{2\pi} \left( \frac{1}{2 + \cos(kx)} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \varphi(x) dx, \quad (5.1.6)$$

$\varphi \in \{1, \sin(kx), \cos(kx)\}$ , quando  $k \rightarrow +\infty$ .

Quando  $\varphi(x) = \sin(kx)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-2\pi}^{2\pi} \left( \frac{1}{2 + \cos(kx)} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \sin(kx) dx &= \int_{-2\pi}^{2\pi} \left( \frac{\sin(kx)}{2 + \cos(kx)} \right) dx - \int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{\sin(kx)}{\sqrt{3}} dx \\ &= \left[ -\frac{\ln(2 + \cos(kx))}{k} + \frac{\cos(kx)}{k\sqrt{3}} \right] \Big|_{-2\pi}^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

independente do valor de  $k$

Quando  $\varphi(x) = 1$ , primeiramente vamos analisar a integral indefinida,

$$\int \frac{1}{2 + \cos(kx)} dx - \int \frac{1}{\sqrt{3}} dx,$$

pois necessitaremos fazer algumas substituições trigonométricas.

Consideramos a seguinte mudança de variáveis:  $\operatorname{tg}\left(\frac{kx}{2}\right) = t$  então  $x = \frac{2}{k} \arctan(t)$  e  $dx = \frac{2}{k(1+t^2)} dt$ . Com isso a integral indefinida sob investigação resultará em

$$\frac{2}{k} \left( \int \frac{1}{t^2 + 3} dt - \int \frac{1}{\sqrt{3}(1+t^2)} dt \right).$$

Como os integrandos acima são contínuos e não possuem nenhuma singularidade e as mudanças de variáveis são funções contínuas no intervalo compacto  $[-2\pi, 2\pi]$ , obtemos que ambas as integrais a serem avaliadas são limitadas e, portanto, a integral sob questão converge para zero quando  $k \rightarrow +\infty$ .

Por último, vamos mostrar de forma análoga a convergência da integral quando  $\varphi(x) = \cos(kx)$ . Para tal, faremos a mesma mudança de variáveis feita anteriormente para o caso em

que  $\varphi(x) = 1$  de forma a obtermos

$$\frac{2}{k} \left( \int \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)(3+t^2)} dt - \int \frac{(1-t^2)}{\sqrt{3}(1+t^2)^2} dt \right).$$

Com os mesmos argumentos usados anteriormente, podemos concluir que as integrais acima são limitadas, por se tratar de integrais contendo funções contínuas em um intervalo limitado. Portanto, segue que a integral em questão converge para zero quando  $k \rightarrow +\infty$ .

Portanto, como falha a condição de estabilidade, podemos concluir que pequenas perturbações nas medidas podem levar a grandes perturbações no parâmetro. Como na prática as medidas estão sujeitas a erros, pois não existe aparelho perfeito, nem mesmo o modelo representa com total fidelidade a realidade. O que temos são dados com ruídos (que denotaremos por  $u^\delta$ ) agravando ainda mais a má-colocação do problema de nosso interesse. Isso motiva a utilização de métodos apropriados para obter uma solução aproximada e estável para o problema, que são chamados de métodos de regularização. Faremos isso no Capítulo (6) para o problema de identificação do coeficiente.

## 5.2 Unicidade para o Problema Inverso

Nesta seção, apresentaremos um resultado de unicidade de identificação para o coeficiente de rigidez  $a \in Ad$ . Antes, porém, vamos apresentar o resultado de unicidade obtido em LESNIC; ELLIOTT; INGHAM (1999), o que é baseado na análise feita em MARCELLINI (1982).

### 5.2.1 Unicidade para problema inverso: Resultado devido a D. Lesnic

Nesta subseção apresentaremos os resultados devidos a D. Lesnic em LESNIC; ELLIOTT; INGHAM (1999), a fim de expressar as diferenças entre esses e o resultado de unicidade de identificação do coeficiente de rigidez da viga obtido em LESNIC; ELLIOTT; INGHAM (1999) e o que apresentaremos na subseção 5.2. Por isso, os resultados apresentados aqui também aparecem em LESNIC; ELLIOTT; INGHAM (1999).

De acordo com as propriedades físicas da viga, passaremos a considerar nessa subseção que  $E$  e  $I$  sejam positivas, de modo que  $EI = a(x)$  dê origem a um coeficiente de rigidez limitado e positivo satisfazendo **A1'**), ou seja, o coeficiente de rigidez  $a \in A$ . Além disso, assumiremos que as forças atuantes sejam positivas e finitas, isto é, de forma que existam constantes  $0 < f_1 < f_2 < \infty$  de modo que  $f_1 < f(x) < f_2$ .

Para provar o resultado de unicidade do coeficiente de rigidez da viga, definiremos o operador  $U : A \rightarrow L^2(0, L)$  dado por

$$U(a) := u_a = \int \int \frac{M}{a}, \quad M = \int \int f, \quad \forall a \in A \quad (5.2.1)$$

cuja notação acima significa a segunda primitiva de  $M/a$  e de  $f$  respectivamente.

Notemos que, (5.2.1) pode ser considerado como uma forma geral da solução de (1.2.8) e (4.1.1), em que as constantes de integração serão determinadas a partir das quatro condições de contorno reformuladas de acordo com o operador definido.

Agora, provaremos o seguinte resultado auxiliar.

**Lema 5.2.1.** *Para as condições de contorno  $u(0) = u'(L) = M(0) = M'(L) = 0$  dadas por (1.2.12) e  $u(0) = u'(L) = M(0) = M'(0) = 0$  dadas por (1.2.13) temos, respectivamente,*

$$u_a(x) = \int_0^x \int_L^t \frac{M(\tau)}{a(\tau)} d\tau dt, \quad M(x) = \int_0^x \int_L^t f(\tau) d\tau dt, \quad (5.2.2)$$

$$u_a(x) = \int_0^x \int_L^t \frac{M(\tau)}{a(\tau)} d\tau dt, \quad M(x) = \int_0^x \int_0^t f(\tau) d\tau dt. \quad (5.2.3)$$

Suponhamos ainda que a viga está sujeita a uma força uniformemente distribuída  $f \equiv 1$ , então as soluções são

$$u_a(x) = \int_0^x \int_L^t \frac{\tau(\tau - L)}{2a(\tau)} d\tau dt, \quad M(x) = \frac{x(x - L)}{2}, \quad (5.2.4)$$

para as condições de contorno  $u(0) = u'(L) = M(0) = M(L) = 0$  ou  $u(0) = u(L) = M(0) = M(L) = 0$  dadas por (1.2.14) e

$$u_a(x) = \int_L^x \int_0^t \frac{\tau^2 - x_a^2}{2a(\tau)} d\tau dt, \quad M(x) = \frac{x^2 - x_a^2}{2}, \quad (5.2.5)$$

para as condições de contorno  $u(L) = u'(0) = u'(L) = M'(0) = 0$  ou  $u(0) = u'(0) = u'(L) = M'(0) = 0$  de (1.2.15) onde  $x_a \in (0, L)$  é o ponto do teorema de Rolle para o qual  $M(x_a) = 0$ , ou seja,

$$x_a = \left( \int_0^L \frac{x^2}{a(x)} dx \right)^{1/2} \left( \int_0^L \frac{1}{a(x)} dx \right)^{-1/2}. \quad (5.2.6)$$

Para as condições de contorno (1.2.16) onde  $u(L) = u'(0) = u'(L) = M(0) = 0$  ou  $u(0) = u'(0) = u'(L) = M(0) = 0$  temos

$$u_a(x) = \int_L^x \int_0^t \frac{\tau(\tau - x_a)}{2a(\tau)} d\tau dt, \quad M(x) = \frac{x(x - x_a)}{2}, \quad (5.2.7)$$

onde

$$x_a = \left( \int_0^L \frac{x^2}{a(x)} dx \right) \left( \int_0^L \frac{x}{a(x)} dx \right)^{-1}. \quad (5.2.8)$$

*Demonstração.* A prova vem da integração de (1.2.8) ou (4.1.1) impondo as condições de contorno de (1.2.12) a (1.2.16).  $\square$

Observamos que, enquanto  $0 < f_1 \leq f(x) \leq f_2 < \infty$ , das equações (5.2.2) e (5.2.3) obtemos

as seguintes estimativas

$$f_2(x-L) \leq M'(x) \leq f_1(x-L), \quad f_2 \frac{x(x-2L)}{2} \leq M(x) \leq f_1 \frac{x(x-2L)}{2} \quad (5.2.9)$$

e

$$f_1 x \leq M'(x) \leq f_2 x, \quad \frac{1}{2} f_1 x^2 \leq M(x) \leq \frac{1}{2} f_2 x^2. \quad (5.2.10)$$

Com isso podemos obter o seguinte lema que descreve a estimativa fundamental para a obtenção do resultado de unicidade.

**Lema 5.2.2.** *Sejam as condições de contorno em (1.2.12) - (1.2.16) conforme Lema 5.2.1, então*

$$\|u_a'' - u_b''\|_{L^2}^{3/2} \leq \|u_a - u_b\|_{L^2}^{1/2} \|u_a''' - u_b'''\|_{L^2}. \quad (5.2.11)$$

*Demonstração.* Para avaliarmos  $\|u_a'' - u_b''\|_{L^2}$  utilizemos integração por partes conjuntamente com as condições de contorno (1.2.12)-(1.2.16). De fato,

$$\|u_a'' - u_b''\|_{L^2}^2 = \int_0^L (u_a' - u_b')'(u_a'' - u_b'')dx = - \int_0^L (u_a' - u_b')(u_a''' - u_b''')dx. \quad (5.2.12)$$

De (5.2.12) e da desigualdade de Holder, obtemos

$$\|u_a'' - u_b''\|_{L^2}^2 \leq \|u_a' - u_b'\|_{L^2} \cdot \|u_a''' - u_b'''\|_{L^2}. \quad (5.2.13)$$

Para alcançarmos nosso objetivo, utilizaremos os mesmos artifícios usados em (5.2.12) e (5.2.13) para a quantidade  $\|u_a' - u_b'\|_{L^2}$ , obtendo

$$\|u_a' - u_b'\|_{L^2}^2 = - \int_0^L (u_a - u_b)(u_a'' - u_b'')dx \leq \|u_a - u_b\|_{L^2} \cdot \|u_a'' - u_b''\|_{L^2}. \quad (5.2.14)$$

Assim, combinando (5.2.13) e (5.2.14) obtemos (5.2.11).  $\square$

O próximo Lema também colabora para a prova de unicidade, no entanto, a demonstração do resultado exige a limitação da derivada do coeficiente de rigidez  $a$ .

**Lema 5.2.3.** *Seja  $a \in A$ . Então existe uma constante positiva  $C$  (independente de  $a$  e  $u(a)$ ) tal que  $\|u_a'''\|_{L^2} \leq C$ .*

*Demonstração.* Se escrevermos  $\alpha = a^{-1}$ ,  $\alpha_2 = \lambda_1^{-1}$ , então teremos de  $a \in A$  que  $0 < \alpha \leq \alpha_2 < \infty$  e (1.2.8) pode ser escrita como  $u_a'' = \alpha M$ . Diferenciando a equação anterior (com relação a  $t$ , obtemos  $u_a''' = \alpha' M + \alpha M'$ . Agora, segue de uma estimativa simples com a desigualdade triangular e a hipótese de  $a \in A$ , juntamente com as equações (5.2.2) a

(5.2.10), as seguintes estimativas para  $\|u_a'''\|_{L^2}$ :

$$\|u_a'''\| \leq \begin{cases} \frac{1}{2}f_2L^2\|\alpha'\|_{L^2} + \alpha_2f_2\left(\frac{1}{3}L^3\right)^{1/2} & \text{para as condições (1.2.12) e (1.2.13),} \\ \frac{1}{8}L^2\|\alpha'\|_{L^2} + \alpha_2\left(\frac{1}{12}L^3\right)^{1/2} & \text{para (1.2.14),} \\ \frac{1}{2}L^2\|\alpha'\|_{L^2} + \alpha_2\left(\frac{1}{3}L^3\right)^{1/2} & \text{para (1.2.15),} \\ \frac{1}{2}L^2\|\alpha'\|_{L^2} + \alpha_2\left(\frac{7}{12}L^3\right)^{1/2} & \text{para (1.2.16).} \end{cases} \quad (5.2.15)$$

Finalmente, como  $|\alpha'| = |a'|/a^2 \leq \alpha_2^2|a'|$ , podemos garantir que  $\|\alpha'\|_{L^2} \leq \alpha_2^2\|a'\|_{L^2} \leq \alpha_2^2Q$ . Desta desigualdade e de (5.2.15) segue que existe uma constante positiva  $C > 0$  tal que  $\|u_a'''\|_{L^2} \leq C$ .  $\square$

A última estimativa necessária para a prova de unicidade apresentada nessa seção será dada pelo seguinte lema.

**Lema 5.2.4.** *Sejam  $a, b \in A$ . Então, existe duas constantes positivas  $C$  e  $p$  de tal modo que*

$$\|a - b\|_{L^2} \leq C\|u_a'' - u_b''\|_{L^2}^p. \quad (5.2.16)$$

*Demonstração.* Vamos escrever  $\alpha = a^{-1}, \beta = b^{-1}, \alpha_1 = \lambda_2^{-1}, \alpha_2 = \lambda_1^{-1}$ . Então, temos  $0 < \alpha_1 \leq \alpha, \beta \leq \alpha_2 < \infty$  e  $u_a'' = \alpha M, u_b'' = \beta M$ .

A ideia para provar este lema está em remover as singularidades da função  $\alpha = u_a''/M$  (e da mesma forma  $\beta = u_b''/M$ ), que são do tipo  $x^{-1}, x^{-2}, x^{-1}(L-x)^{-1}, (x-x_a)^{-1}$  e  $x^{-1}(x-x_a)^{-1}$  referente as formulações (5.2.2)-(5.2.5) e (5.2.7) respectivamente. Para isso vamos estender as funções  $u_a, u_b, \alpha, \beta$  para todo o eixo real, definindo-as como identicamente nulas fora do intervalo  $[0, L]$ .

Vamos considerar primeiro os casos de (5.2.2) a (5.2.4).

Usando a extensão referida acima por zero fora do intervalo  $[0, L]$  e a desigualdade de Holder, obtemos que para qualquer  $\epsilon > 0$  vale, respectivamente:

(i)

$$\begin{aligned} \|\alpha - \beta\|_{L^2}^2 &= \int_0^\epsilon |\alpha - \beta|^2 dx + \int_\epsilon^L |\alpha - \beta| \frac{|u_a'' - u_b''|}{|M|} dx \\ &\leq \epsilon \alpha_2^2 + \frac{2}{Lf_1} \int_\epsilon^L \frac{|\alpha - \beta| |u_a'' - u_b''|}{x} dx \\ &= \epsilon \alpha_2^2 + \frac{2}{Lf_1} \int_\epsilon^\infty \frac{|\alpha - \beta| |u_a'' - u_b''|}{x} dx \\ &\leq \epsilon \alpha_2^2 + \frac{2}{Lf_1} \|u_a'' - u_b''\|_{L^2} \left( \int_\epsilon^\infty x^{-2} dx \right)^{1/2} \\ &= \alpha_2^2 \epsilon + \frac{2\alpha_2}{Lf_1} \|u_a'' - u_b''\|_{L^2} \epsilon^{-1/2}, \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\|\alpha - \beta\|^2 &= \int_0^\epsilon |\alpha - \beta|^2 dx + \int_\epsilon^\infty |\alpha - \beta| \frac{|u_a'' - u_b''|}{|M|} dx \\
&\leq \epsilon \alpha_2^2 + \frac{2\alpha_2}{f_1} \|u_a'' - u_b''\| \left( \int_\epsilon^\infty x^{-4} dx \right)^{1/2} \\
&= \alpha_2^2 \epsilon + \frac{2\alpha_2}{f_1} \|u_a'' - u_b''\| \epsilon^{-3/2} 3^{-1/2}
\end{aligned} \tag{5.2.18}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\|\alpha - \beta\|_{L^2}^2 &= \int_{(-\epsilon, \epsilon) \cup (L-\epsilon, L+\epsilon)} |\alpha - \beta|^2 dx + \int_{(-\infty, -\epsilon) \cup (\epsilon, L-\epsilon) \cup (L+\epsilon, \infty)} |\alpha - \beta| \frac{|u_a'' - u_b''|}{|M|} dx \\
&\leq 4\alpha_2(\alpha_2 \epsilon + \|u_a'' - u_b''\|_{L^2} \epsilon^{-1/2} / L).
\end{aligned} \tag{5.2.19}$$

Conforme podemos observar, o lado direito das expressões (5.2.17) a (5.2.19) são funções de  $\epsilon$ , atingindo os seus mínimos, respectivamente, em

$$\epsilon_{min} = \begin{cases} \left( \frac{\|u_a'' - u_b''\|_{L^2}}{\alpha_2 f_1 L} \right)^{2/3} & \text{no caso (i),} \\ \left( \frac{3^{1/2} \|u_a'' - u_b''\|_{L^2}}{\alpha_2 f_1} \right)^{2/5} & \text{no caso (ii),} \\ \left( \frac{\|u_a'' - u_b''\|_{L^2}}{2\alpha_2 L} \right)^{2/3} & \text{no caso (iii).} \end{cases} \tag{5.2.20}$$

Substituindo esses valores em (5.2.17) a (5.2.19) obtemos

$$\|\alpha - \beta\|_{L^2}^2 \leq \begin{cases} 3L^{-2/3} \alpha_2^{4/3} f_1^{-2/3} \|u_a'' - u_b''\|_{L^2}^{2/3} & \text{no caso (i),} \\ (3^{1/5} + 2 \times 3^{-4/5}) \alpha_2^{8/5} f_1^{-2/5} \|u_a'' - u_b''\|_{L^2}^{2/5} & \text{no caso (ii),} \\ (2^{4/3} + 2^{1/3}) L^{-2/3} \alpha_2^{4/3} \|u_a'' - u_b''\|_{L^2}^{2/3} & \text{no caso (iii).} \end{cases} \tag{5.2.21}$$

Consideraremos agora os casos (iv) e (v).

Das equações (5.2.6) e (5.2.8), obtemos que, para  $0 < x_a \leq x_b < L$ , valem as seguintes expressões:

$$C_2 = \frac{\alpha_2 L^2}{3\alpha_1} \geq x_b \geq x_a = \frac{\int_0^L x^2 \alpha(x) dx}{\int_0^L \alpha(x) dx} \geq \frac{\alpha_1 L^2}{3\alpha_2} = C_1 \tag{5.2.22}$$

e

$$\frac{2\alpha_2 L}{3\alpha_1} \geq x_b \geq x_a = \frac{\int_0^L x^2 \alpha(x) dx}{\int_0^L x \alpha(x) dx} \geq \frac{2\alpha_1 L}{3\alpha_2}. \tag{5.2.23}$$

Agora, usando (5.2.5) e (5.2.7) para qualquer  $x \in [x_a, x_b]$  teremos respectivamente

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \alpha_1 (x^2 - x_a^2) &\leq u_a'' = \alpha M_a \leq \frac{1}{2} \alpha_2 (x^2 - x_a^2), \\
\frac{1}{2} \alpha_2 (x^2 - x_b^2) &\leq u_b'' = \beta M_b \leq \frac{1}{2} \alpha_1 (x^2 - x_b^2),
\end{aligned} \tag{5.2.24}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\alpha_1 x(x - x_a) &\leq u_a'' \leq \frac{1}{2}\alpha_2 x(x - x_a), \\ \frac{1}{2}\alpha_2 x(x - x_b) &\leq u_b'' \leq \frac{1}{2}\alpha_1 x(x - x_b) \end{aligned} \quad (5.2.25)$$

do qual

$$\|u_b''\|_{L^2}^2 \leq \begin{cases} \alpha_2 \left(\frac{2}{15}\right)^{1/2} L^{5/2} & \text{no caso de (5.2.5),} \\ \alpha_2 \left(\frac{1}{20}\right)^{1/2} L^{5/2} & \text{no caso de (5.2.7),} \end{cases} \quad (5.2.26)$$

$$0 \leq \frac{1}{2}\alpha_1(x_b^2 - x_a^2) \leq u_a''(x) - u_b''(x), \quad \forall x \in [x_a, x_b] \quad \text{no caso de (5.2.5),} \quad (5.2.27)$$

$$0 \leq \frac{1}{2}\alpha_1 x(x_b - x_a) \leq u_a''(x) - u_b''(x), \quad \forall x \in [x_a, x_b] \quad \text{no caso de (5.2.7).} \quad (5.2.28)$$

Integrando de  $x_a$  a  $x_b$  (5.2.27) e (5.2.28) e aplicando Hölder novamente, teremos que

$$|x_b - x_a| \leq \begin{cases} \left(\frac{1}{C_1\alpha_1}\|u_a'' - u_b''\|_{L^2}\right)^{2/3} & \text{no caso de (5.2.5),} \\ \left(\frac{2}{C_1\alpha_1}\|u_a'' - u_b''\|_{L^2}\right)^{2/3} & \text{no caso de (5.2.7)} \end{cases} \quad (5.2.29)$$

Vamos agora denotar  $v_a = u_a''/x_a$  e  $v_b = u_b''/x_b$ . Então segue que

$$\|v_a - v_b\|_{L^2} \leq \frac{1}{x_a}\|u_a'' - u_b''\|_{L^2} + \frac{1}{x_a x_b}\|u_b''\|_{L^2}|x_b - x_a| \quad (5.2.30)$$

e utilizando (5.2.22), (5.2.23), (5.2.26) e (5.2.29) obtemos duas constantes positivas  $C_3$  e  $C_4$  de forma que

$$\|v_a - v_b\|_{L^2} \leq C_3\|u_a'' - u_b''\|_{L^2} + C_4\|u_a'' - u_b''\|_{L^2}^{2/3} \quad (5.2.31)$$

A fim de estimarmos  $\|\alpha - \beta\|_{L^2}$  observamos de (5.2.5) e (5.2.7) que

$$\alpha - \beta = \begin{cases} \frac{v_a}{x-x_a} - \frac{v_b}{x-x_b} - \frac{v_a}{x+x_a} + \frac{v_b}{x+x_b} & \text{no caso de (5.2.5),} \\ \frac{v_a}{x-x_a} - \frac{v_b}{x-x_b} - \frac{v_a-v_b}{x} & \text{no caso de (5.2.7).} \end{cases} \quad (5.2.32)$$

Denotando  $w_a^\pm(x) = v_a(x)/(x \pm x_a)$  e  $w_b^\pm(x) = v_b(x)/(x \pm x_b)$  teremos

$$\|w_a^\pm(x) - w_b^\pm(x)\|_{L^2} \leq \|w_a^\pm(x) - w_b^\pm(x \pm x_a \mp x_b)\|_{L^2} + \|w_b^\pm(x \pm x_a \mp x_b) - w_b^\pm(x)\|_{L^2}. \quad (5.2.33)$$

Utilizando uma técnica similar a que foi usada para derivar as desigualdades (5.2.17) a (5.2.19), obtemos uma nova constante positiva  $C_5$  de modo que

$$\begin{aligned} \|w_a^\pm(x) - w_b^\pm(x \pm x_a \mp x_b)\|_{L^2} &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{v_a(x \mp x_a) - v_b(x \mp x_b)}{x} \right]^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq C_5 \|v_a(\cdot \mp x_a) - v_b(\cdot \mp x_b)\|_{L^2}^{1/3}. \end{aligned} \quad (5.2.34)$$

Também usando  $v'_b = u'''_b/x_b$ , Lema 5.2.3, (5.2.29) e (5.2.31) obtemos  $C_6$  de forma que

$$\begin{aligned} \|v_a(\cdot \mp x_a) - v_b(\cdot \mp x_b)\|_{L^2} &\leq \|v_a(\cdot \mp x_a) - v_b(\cdot \mp x_a)\|_{L^2} + \|v_b(\cdot \mp x_a) - v_b(\cdot \mp x_b)\|_{L^2} \\ &\leq \|v_a - v_b\|_{L^2} + \|v'_b\|_{L^1} |x_a - x_b|^{1/2} \leq C_3 \|u''_a - u''_b\|_{L^2} \\ &\quad + C_4 \|u''_a - u''_b\|_{L^2}^{2/3} + C_6 \|u''_a - u''_b\|_{L^2}^{1/3} \end{aligned} \quad (5.2.35)$$

Para estimar o termo final em (5.2.33) usamos

$$\|w_b^+(x + x_a - x_b) - w_b^+(x)\|_{L^2} \leq \|(w_b^+)' \|_{L^1} |x_a - x_b|^{1/2}. \quad (5.2.36)$$

Usando Lema 5.2.3 e (5.2.22), (5.2.23) e (5.2.26), teremos  $C_7$  de modo que

$$\|(w_b^+)' \| \leq \left\| \frac{u'''_b}{x_b(x + x_b)} \right\| + \left\| \frac{u''_b}{x_b(x + x_b)^2} \right\| \leq C_7 \quad (5.2.37)$$

e ainda de (5.2.29), (5.2.36) e (5.2.37)

$$\|w_b^+(x + x_a - x_b) - w_b^+(x)\|_{L^2} \leq C_8 \|u''_a - u''_b\|_{L^2}^{1/3}. \quad (5.2.38)$$

Usando (5.2.22), (5.2.23) e (5.2.29) temos uma constante positiva  $C_9$  tal que

$$\|w_b^-(x - x_a + x_b) - w_b^-(x)\|_{L^2} = \frac{\beta |x_b - x_a|}{2x_b} \leq \frac{\alpha_2}{2C_1} |x_a - x_b| \leq C_9 \|u''_a - u''_b\|_{L^2}^{2/3}. \quad (5.2.39)$$

Para o caso de (5.2.7) ainda precisamos considerar  $\frac{(v_a - v_b)}{x}$  em (5.2.32), que de forma semelhante a (5.2.34) podemos estimar como

$$\left\| \frac{v_a - v_b}{x} \right\|_{L^2} \leq C_{10} \|v_a - v_b\|_{L^2}^{1/3}, \quad (5.2.40)$$

onde  $C_{10}$  é uma constante positiva. Para os casos de (5.2.5) e (5.2.7), de (5.2.32) a (5.2.40) obtemos que existem cinco constantes positivas  $D_i$  onde  $i = 1, 2, \dots, 5$  de tal modo que

$$\begin{aligned} \|\alpha - \beta\| &\leq D_1 \|u''_a - u''_b\|^{1/3} + D_2 \|u''_a - u''_b\|^{2/3} + D_3 \|u''_a - u''_b\|^{1/9} + D_4 \|u''_a - u''_b\|^{2/9} \\ &\leq D_5 \|u''_a - u''_b\|^{1/9}. \end{aligned} \quad (5.2.41)$$

Por fim, a estimativa (5.2.16) é obtida para todos os casos de (5.2.2)-(5.2.5) e (5.2.7) utilizando a desigualdade  $|a - b| \leq \alpha_1^{-2} |\alpha - \beta|$  e as equações (5.2.21) e (5.2.41).  $\square$

Finalmente, podemos provar o resultado de unicidade devido a D. Lesnic em LESNIC; ELLIOTT; INGHAM (1999).

**Teorema 5.2.5.** *Sejam  $a, b \in A$ . Então, para os casos de (5.2.2)-(5.2.5) e (5.2.7) existem duas*

constantes positivas  $C$  e  $p$  de modo que

$$\|a - b\| \leq C \|u_a - u_b\|^p. \quad (5.2.42)$$

Além disso, de (5.2.21) e (5.2.41) teremos

$$p = \begin{cases} 1/9 & (\text{nos casos (i) e (iii)}), \\ 1/15 & (\text{no caso (ii)}), \\ 1/27 & (\text{nos casos (iv) e (v)}). \end{cases} \quad (5.2.43)$$

Podemos notar que (5.2.42) garante a unicidade do problema inverso.

Para vigas em balanço, ou seja, vigas livre em uma extremidade  $M(0) = M'(0) = 0$  e fixa em outra  $u(L) = u'(L) = 0$ , os resultados são mais fracos, necessitando do teorema a seguir

**Teorema 5.2.6.** *Sejam  $a, b \in A$ . Então, para vigas em balanço, existe uma constante positiva  $C$  de modo que*

$$\|a - b\| \leq C \|u'_a - u'_b\|^{1/10}. \quad (5.2.44)$$

*Demonstração.* Para vigas em balanço, Lema 5.2.3 e 5.2.4 são válidos, mas somente (5.2.12) pode ser formulada. Então (5.2.44) pode ser obtida de maneira semelhante à aquela utilizada para estabelecer (5.2.21) no caso (ii).  $\square$

## 5.2.2 Unicidade para problema inverso: Coeficientes em $L^\infty[0, L]$

Nesta seção apresentaremos o resultado de unicidade para coeficientes que são mais gerais que os considerados por LESNIC; ELLIOTT; INGHAM (1999) (veja Subseção 5.2.1). Em particular, garantiremos unicidade para coeficientes que sejam constantes por partes.

Para isso vamos incluir a seguinte hipótese

**Hipótese A3):** O coeficiente de rigidez  $a$  é conhecido nos extremos do intervalo  $[0, L]$ , isto é,  $a(0)$  e  $a(L)$  são conhecidos.

Note que a Hipótese A3) não é restritiva do ponto de vista prático.

**Lema 5.2.7.** *Suponha as hipóteses A1), A2) e A3) satisfeitas. Sejam  $u_a := u(a)$  e  $u_b := u(b)$  as (únicas) soluções fracas de (4.1.10), com condições de contorno dadas por (1.2.9)-(1.2.11), para os coeficientes  $a \in Ad$  e  $b \in Ad$ , respectivamente. Seja  $\psi \in L^2[0, L]$ . Então*

$$\begin{aligned} \int_0^L (a\psi)''(u_a - u_b) dx + (a(x)\psi(x))'[u_a(x) - u_b(x)]|_0^L + a(x)\psi(x)[u_a(x) - u_b(x)]'|_0^L \\ = \int_0^L \frac{(b-a)}{b} M\psi dx. \end{aligned} \quad (5.2.45)$$

*Demonstração.* Como mostrado anteriormente, a diferença  $u_a - u_b$  satisfaz

$$a(u_a - u_b)'' = (b - a)u_b''.$$

Multiplicando por  $\psi$  e integrando duas vezes por partes, temos o resultado enunciado.  $\square$

A seguir, vamos estabelecer um segundo resultado auxiliar para demonstrar unicidade.

**Lema 5.2.8.** *Consideremos as mesmas hipóteses do Lema 5.2.7. Seja  $\psi \in L^2[0, L]$  solução de*

$$(a\psi)'' = u_a - u_b \quad (5.2.46)$$

$$\psi(0) = \beta$$

$$\psi'(L) = \alpha,$$

com  $\alpha, \beta$  números reais (a serem escolhidos de maneira apropriada) Então, a equação (5.2.45) se reescreve

$$\|u_a - u_b\|_{L^2}^2 + (a(x)\psi(x))'[u_a(x) - u_b(x)]|_0^L + a(x)\psi(x)[u_a(x) - u_b(x)]'|_0^L = \int_0^L \frac{(b-a)}{b} M\psi dx. \quad (5.2.47)$$

*Demonstração.* Segue direto da substituição de (5.2.46) em (5.2.45).  $\square$

O próximo lema, contribuirá de forma significativa para a prova do resultado desejado.

**Lema 5.2.9.** *Consideremos as mesmas hipóteses do Lema 5.2.7. Seja  $\psi(x) = \frac{\alpha x + \beta}{a}$ . Então,  $\psi \in L^2[0, L]$  é uma solução de (5.2.46) com  $u_a - u_b = 0$ , onde  $\alpha, \beta$  são constantes que podem ser escolhidas.*

*Ainda, existem constantes  $\alpha, \beta$  tais que*

$$\frac{(b-a)}{ba} M(\alpha x + \beta) \geq 0, \quad x \in [0, L]. \quad (5.2.48)$$

*Demonstração.* Como  $a \in Ad$  e o intervalo  $[0, L]$  é compacto, segue, por um cálculo direto, que  $\psi(x) = \frac{\alpha x + \beta}{a} \in L^2[0, L]$ . Também, segue trivialmente que  $\psi$  como acima satisfaz (5.2.46) com  $u_a - u_b = 0$ , para quaisquer valores de  $\alpha, \beta$ .

Por fim, como  $M$  solução de (1.2.8) é pelo menos contínua e  $[0, L]$  é compacto, existe uma constante  $c > 0$ , tal que  $-c \geq M(x), x \in [0, L]$ . Ainda, de  $a, b \in Ad$ , temos que  $\frac{b-a}{ba} \geq -2\bar{a}^{-1}$ .

Portanto, para acabarmos a demonstração do lema, basta garantirmos a existência de  $\alpha, \beta$  tais que

$$\frac{2c}{a}(\alpha x + \beta) \geq 0.$$

Ou seja, basta tomar

$$\alpha = \beta = \frac{a}{2c}. \quad (5.2.49)$$

$\square$

No próximo teorema, estabeleceremos o resultado de unicidade enunciado anteriormente.

**Teorema 5.2.10.** *Considere as mesmas hipóteses do Lema 5.2.7. Assuma ainda que  $f$  é tal que  $M(x)$  solução de (1.2.8) seja tal que  $M(x) \neq 0$  quase sempre  $x \in [0, L]$ .*

*Suponha que as medidas  $u_a = u(a) = F(a)$  e  $u_b = u(b) = F(b)$  soluções de (4.2.1) sejam iguais. Então os respectivos coeficientes  $a$  e  $b$  são iguais em quase todo o ponto.*

*Demonstração.* Da hipótese deste lema, temos que  $u_a - u_b = 0$ . Portanto, segue dos Lemas 5.2.7-5.2.9 que

$$\int_0^L \frac{b-a}{b} M \psi dx = 0, \quad (5.2.50)$$

onde  $\psi(x) = \frac{\alpha x + \beta}{a} \in L^2[0, L]$  solução de (5.2.46) (com  $u_a - u_b = 0$ ), com valores de  $\alpha, \beta$  a serem escolhidos. Tome  $\alpha, \beta$  como em (5.2.49).

Da hipótese sobre  $M$ , da escolha de  $\alpha, \beta$  e do Lema (5.2.9), temos que o integrando em (5.2.50) não muda de sinal. Portanto, para que (5.2.50) seja satisfeita temos que ter  $b(x) = a(x)$  quase sempre em  $[0, L]$ .  $\square$

## 6 MÉTODOS DE REGULARIZAÇÃO PARA A IDENTIFICAÇÃO DO COEFICIENTE DE RIGIDEZ

Neste capítulo analisaremos os métodos de regularização descritos no Capítulo 3 aplicados a identificação do coeficiente de rigidez da viga.

### 6.1 Método de Molificação para segunda derivada na Equação de Euler-Bernoulli

Como neste trabalho queremos identificar o coeficiente de rigidez da viga  $a(x) \in Ad$  através do conhecimento da deflexão  $u$ , solução de (1.2.8), vamos reescrever a equação de Euler-Bernoulli (1.2.8) de acordo com LERMA; HINESTROZA (2017); MARINOV; VATSALA (2008) da seguinte forma

$$a(x) = \frac{\int_0^x (\int_0^w f(s)ds + c_1)dw + c_2}{\frac{d^2u}{dx^2}} \quad (6.1.1)$$

onde assumiremos de ante-mão que  $\frac{d^2u}{dx^2} \neq 0$ . Os valores  $c_1$  e  $c_2$  são constantes de integração da forma  $c_1 = a(0)u''(0)$  e  $c_2 = (au'')'(0)$ .

Como já mencionamos, na prática, o que de fato conhecemos são medidas  $u^\delta$  da deflexão  $u$ , com  $\|u - u^\delta\| \leq \delta$ .

Se assumirmos que  $\frac{d^2u^\delta}{dx^2} \neq 0$ , podemos considerar a possibilidade de determinar uma aproximação

$$a^\delta(x) = \frac{\int_0^x (\int_0^w f(s)ds + c_1)dw + c_2}{\frac{d^2u^\delta}{dx^2}} \quad (6.1.2)$$

para o coeficiente  $a$ . Em (6.1.2), os valores de  $c_1$  e  $c_2$  são os mesmos que em (6.1.1).

Note que, embora (6.1.2) seja uma equação explícita para determinar uma aproximação para o coeficiente de rigidez  $a(x)$ , esta depende da diferenciação dos dados  $u^\delta$ . O qual, por sua vez, é um problema mal-posto no sentido de Hadamard DE CEZARO; LEITÃO (2008); MURIO (2011). Assim, obter uma aproximação  $a^\delta$  utilizando (6.1.2) para  $a$  é uma estratégia instável.

Uma maneira de obter uma aproximação para  $a$  (que provaremos ser estável e convergente com relação aos ruídos nos dados) é usar a seguinte estratégia, denominada de método de molificação para segunda derivada:

**Definição 6.1.1.** *Seja  $\alpha = \alpha(\delta) > 0$ , escolhido a priori, satisfazendo  $\alpha(\delta) \rightarrow 0$  e  $\delta^2/\alpha(\delta) \rightarrow 0$  quando  $\delta \rightarrow 0$ . Assuma ainda que  $\frac{d^2}{dx^2} J_\alpha u^\delta \neq 0$ .*

*Defina*

$$a_\alpha^\delta(x) = \frac{\int_0^x (\int_0^w f(s)ds + c_1)dw + c_2}{\frac{d^2}{dx^2} J_\alpha u^\delta(x)}, \quad (6.1.3)$$

*como uma aproximação para o coeficiente  $a$ .*

Nossos próximos passos aqui são provar que (sob certas hipóteses) a estratégia apresentada na Definição 6.1.1 é uma estratégia de regularização para recuperar o coeficiente  $a$  em (1.2.8) a partir de medidas de deflexão  $u^\delta$ . Antes de prosseguirmos, gostaríamos de notar o seguinte: como a função  $\rho_\alpha \in C^\infty$  temos que  $J_\alpha u^\delta \in C^\infty$  e assim, a quantidade  $(J_\alpha u^\delta)''$  está bem definida.

Primeiramente, apresentaremos alguns resultados preliminares, os quais nos ajudarão a provar a estabilidade do método proposto. Além disso, como provamos anteriormente  $u \in H_0^1$  mas de acordo com a regularidade elíptica provamos que  $u$  é no mínimo  $C^2[0, 1]$  o que possibilita usarmos o método de molificação para a segunda derivada de  $u$  e ainda garantir consistência e estabilidade para o coeficiente  $a$  e  $a_\alpha$ . Tais resultados podem ser encontrados em LERMA; HINESTROZA (2017).

**Lema 6.1.1.** (LERMA; HINESTROZA, 2017, Lema 5.1.1) *Assuma que  $u'' \in C(\mathbb{R})$  é uma função Lipschitz com constante de Lipschitz  $K > 0$ . Então existe uma constante  $K_1^* := K_1^*(K) > 0$ , independente do valor de  $\alpha$ , tal que*

$$\|(J_\alpha u)'' - u''\|_\infty \leq K_1^* \alpha. \quad (6.1.4)$$

O próximo lema é um resultado fundamental para a estabilidade do método de molificação proposto aqui.

**Lema 6.1.2.** (LERMA; HINESTROZA, 2017, Lema 5.1.2) *Sejam  $u, u^\delta \in C(\mathbb{R})$  satisfazendo  $\|u - u^\delta\|_\infty \leq \delta$ . Então existe uma constante  $K_2^* \leq 0$  (independente de  $\alpha$  e  $\delta$ ), tal que*

$$\|(J_\alpha u)'' - (J_\alpha u^\delta)''\|_\infty \leq K_2^* \frac{\delta}{\alpha^2}. \quad (6.1.5)$$

Para mostrar que temos um método de regularização para a segunda derivada, enunciaremos o seguinte teorema.

**Teorema 6.1.3.** *Assuma que  $u, u^\delta \in C^0$  satisfaçam as mesmas hipóteses dos Lemas 6.1.1 e 6.1.2. Então existe uma constante  $K_3^* > 0$  (independente de  $\alpha$  e  $\delta$ ) tal que*

$$\|(J_\alpha u^\delta)'' - u''\|_\infty \leq K_3^* \left( \alpha + \frac{\delta}{\alpha^2} \right). \quad (6.1.6)$$

*Demonstração.* A demonstração segue diretamente da desigualdade triangular e das estimativas nos Lemas 6.1.1 e 6.1.2, respectivamente.  $\square$

A demonstração de que a estratégia estabelecida na Definição 6.1.1 é uma estratégia estável e convergente com relação ao nível de ruídos  $\delta$  exige algumas outras hipóteses sobre os dados, as quais aparecem explícitas no próximo resultado.

**Teorema 6.1.4** (Convergência e estabilidade). *Assuma que as hipóteses dos Lemas 6.1.1 e 6.1.2 sejam satisfeitas. Além disso, assuma que exista uma constante  $\lambda > 0$  tal que  $|u''(x)| \geq$*

$\lambda > 0$  e  $|(J_\alpha u^\delta)''(x)| \geq \lambda - \frac{c\delta}{\alpha^2} > 0$ , no intervalo  $[3\alpha, 1 - 3\alpha]$ . Então:

$$\|a - a_\alpha^\delta\|_{C[3\alpha, 1-3\alpha]} \leq K_4^* \frac{(\alpha + \frac{\delta}{\alpha^2})}{\lambda(\lambda - \frac{c\delta}{\alpha^2})}, \quad (6.1.7)$$

onde  $K_4^* = K_4^*(\lambda)$ , mas independe de  $\alpha$  e  $\delta$ .

Em particular, se a escolha do parâmetros de regularização  $\alpha$  for feito de acordo com a Definição 6.1.1, obtemos que  $a_\alpha^\delta$  obtido a partir da equação (6.1.3) é estável e convergente para  $a$ , com relação aos ruídos nos dados  $\delta$ .

*Demonstração.* De (6.1.1) e (6.1.3) temos que

$$\begin{aligned} |a(x) - a_\alpha^\delta(x)| &= \left| \frac{\int_0^x (\int_0^w f(s)ds + c_1)dw + c_2}{u''} - \frac{\int_0^x (\int_0^w f(s)ds + c_1)dw + c_2}{(J_\alpha u^\delta)''} \right| \\ &\leq \left| \int_0^x (\int_0^w f(s)ds + c_1)dw + c_2 \right| \left| \frac{(J_\alpha u^\delta)'' - u''}{u''(J_\alpha u^\delta)''} \right| \\ &\leq (|c_1| + |c_2| + \|f\|_\infty) \left\| \frac{(J_\alpha u^\delta)'' - u''}{u''(J_\alpha u^\delta)''} \right\| \\ &\leq K_4^* \frac{(\alpha + \frac{\delta}{\alpha^2})}{\lambda(\lambda - \frac{c\delta}{\alpha^2})} \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

em que  $K_4^* = (|c_1| + |c_2| + \|f\|_\infty)$ . □

## 6.2 Método de Landweber não linear para identificação do coeficiente

Já sabemos que para obtermos uma solução aproximada para o problema de identificação do coeficiente de rigidez da viga pela equação (4.2.1), de maneira estável e convergente com relação ao nível de ruídos nas medidas, é necessário utilizarmos de uma estratégia de regularização. Como o operador (4.2.1) é não-linear, nesta seção estabeleceremos propriedades para o operador parâmetro para solução (4.2.1) de forma que possamos aplicar o método de Landweber não linear apresentado na Seção 3.2.2 para o problema de identificação do coeficiente de rigidez.

Reescrevendo a iteração de Landweber (3.2.9) com relação ao problema inverso do coeficiente  $a(x)$ , obtemos

$$a_{k+1}^\delta = a_k^\delta + \gamma F'(a_k^\delta)^*(u^\delta - F(a_k^\delta)), \quad (6.2.1)$$

onde  $\gamma$  é um parâmetro de relaxamento. Já  $F'(a_k^\delta)^*$  denota a adjunta da derivada de Fréchet do operador  $F(a)$ .

Para mostrar que a iteração (6.2.1) está bem definida e que gera uma sequência de aproximações estáveis e convergentes, com relação ao nível de ruídos  $\delta$ , para uma solução do problema (4.2.1), vamos introduzir alguma notação e resultados preliminares.

**Definição 6.2.1.** *Seja  $a \in Ad$ . Definimos o operador  $A(a)$ , da seguinte forma*

$$A(a) : H^2[0, L] \cap H_0^1[0, L] \longrightarrow L^2[0, L] \quad (6.2.2)$$

$$u \longmapsto A(a)u := -au''. \quad (6.2.3)$$

Para o operador  $A(a)$  definido em (6.2.2) podemos enunciar o seguinte resultado.

**Lema 6.2.1.** *Assuma que as hipóteses **A1**) e **A2**) são satisfeitas. Então  $A(a)$  é um operador linear, limitado e bijetivo. Portanto,  $A^{-1}(a)$  (o operador inverso de  $A(a)$ ) está bem definido e também é um operador linear e limitado.*

*Demonstração.* Para provar que  $A(a)$  é uma bijeção, considere  $w \in L^2[0, L]$ . Como  $a \in Ad$ , segue do Teorema 4.1.7 que existe uma única solução  $u \in H_0^1[0, L]$  de  $-au'' = w$  com condições de contorno (1.2.9)-(1.2.16). Além disso, da regularidade elíptica (veja Teorema 4.1.8) segue que  $u \in H^2[0, L]$ , o que conclui a afirmativa. Portanto, existe  $A^{-1}(a)$ .

Assim, o que nos resta é provar que  $A(a)$  é linear e limitado.

Para provar a linearidade, considere  $u$  e  $v \in H^2[0, L] \cap H_0^1[0, L]$  e  $k \in \mathbb{R}$ . Então temos

$$\begin{aligned} A(a)(u + kv) &= -a(u + kv)'' \\ &= -au'' - k(av)'' \\ &= A(a)u + kA(a)v, \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

o que prova a linearidade do operador.

Agora falta provar que  $A(a)$  é limitado. Para isso, note que, como  $a \in Ad$  e usando que  $\|u\|_{H^2} = \{\|u''\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\}$ , obtemos

$$\|A(a)u\|_{L^2[0, L]} = \|-au''\|_{L^2[0, L]} \leq \bar{a}\|u''\|_{L^2[0, L]} \leq \bar{a}\|u\|_{H^2[0, L]} \quad (6.2.5)$$

provando que  $A(a)$  é limitada.

Por fim, o Teorema da Aplicação Aberta (ver (KREYSZIG, 1978, 4.12-2)) garante que  $A^{-1}(a)$  é linear e limitado.  $\square$

O próximo lema é um passo preliminar importante para o que segue.

**Lema 6.2.2.** *Assuma que as hipóteses **A1**) e **A2**) sejam satisfeitas. Sejam  $F(a) = u(a) := u$  e  $F(\tilde{a}) = \tilde{u}(\tilde{a}) := \tilde{u}$  e  $A(a)$  o operador definido em (6.2.2) então*

$$A(a)(u - \tilde{u}) = (\tilde{a} - a)\tilde{u}''. \quad (6.2.6)$$

*Demonstração.* Por definição,  $u$  e  $\tilde{u}$  satisfazem

$$-au'' = M, \quad -\tilde{a}\tilde{u}'' = M \quad (6.2.7)$$

com as mesmas condições de contorno dadas por (4.1.10), respectivamente. Subtraindo as equação para  $u$  e  $\tilde{u}$  e usando a linearidade das equações, obtemos

$$A(a)(u - \tilde{u}) = a(u - \tilde{u})'' = (\tilde{a} - a)\tilde{u}''.$$

□

Antes de seguirmos vamos avaliar o operador adjunto do operador  $A(a)$  definido acima. Ainda vamos determinar  $(A^{-1}(a))^*$  o qual que aparece nas estimativas importantes que serão estabelecidas abaixo.

**Lema 6.2.3.** *Assuma as hipóteses **A1)** e **A2)** satisfeitas. O operador adjunto de  $A(a)$  é tal que  $A^*(a)v = -(av)''$ . Este é linear, limitado e possui inversa  $(A^*(a))^{-1}$  linear e limitado, com  $(A^*(a))^{-1} = (A^{-1}(a))^*$ . Ainda,  $(A^*(a))^{-1}w = v$ , onde  $v$  é a única solução de  $-(av)'' = w$ , com condições de contorno homogêneas.*

*Demonstração.* A existência de um operador adjunto  $A^*(a)$ , sua limitação, bem como a sua inversa ser linear e limitada e satisfazer  $(A^*(a))^{-1} = (A^{-1}(a))^*$ , seguem diretamente da teoria de operadores lineares limitados KREYSZIG (1978) e do Lema 6.2.1. O que falta verificar é como o operador adjunto atua. Por definição de adjunto, basta verificar que

$$\langle A^*(a)v, \varphi \rangle_{L^2} = \langle v, A(a)\varphi \rangle_{L^2} = \langle v, -a\varphi'' \rangle_{L^2} = \langle -(av)'', \varphi \rangle_{L^2}$$

para qualquer  $\varphi \in C_0^\infty[0, L]$ . Por densidade de  $C_0^\infty[0, L] \subset L^2[0, L]$ , segue que  $A^*(a)v = -(av)''$ . □

**Observação 6.2.1.** *Segue diretamente do Lema 6.2.3 que  $\|A^*(a)\| = \|A(a)\|$ . Ainda,  $\|(A^{-1}(a))^*w\| = \|v\|$ , onde  $v$  é solução de  $-(av)'' = w$ . Assim, por regularidade elíptica (ver Teorema 4.1.8)  $\|(A^{-1}(a))^*w\| = \|v\| \leq C\|w\|$ .*

Na proposição abaixo apresentamos propriedades de existência e limitação para a derivada de Fréchet  $F'(a)$  do operador  $F(a)$  definido em (4.2.1).

**Proposição 6.2.4.** *Assuma as hipóteses **A1)** e **A2)** satisfeitas. Seja  $a \in Ad$ . Então, o operador  $F(a)$  definido em (4.2.1) é Fréchet diferenciável. O operador derivada de Fréchet  $F'(a)$  é linear e limitado e é dado por*

$$F'(a)h = A^{-1}(a)[hu'']. \quad (6.2.8)$$

Ainda, defina  $\gamma^{-1} := \underline{a}^{-1}\|M\|_{L^2[0, L]}$ , então

$$\|F'(a)\| \leq \gamma^{-1}. \quad (6.2.9)$$

*Demonstração.* Seja  $h \in L^2[0, L]$  tal que  $a + h \in Ad$ . Denote por,  $F(a + h) = \tilde{u}$ ,  $F(a) = u$  (os quais sabemos que estão bem definidos, pelo Lema 4.2.1).

Como os mesmos argumentos do Lema 6.2.2, temos que a diferença  $F(a+h) - F(a)$  satisfaz

$$-a(\tilde{u}'' - u'') = h\tilde{u}'', \quad (6.2.10)$$

com condições do contorno homogêneas. Como  $\tilde{a} \in Ad$ , temos que  $\tilde{u}'' = \tilde{a}^{-1}M \in L^2[0, L]$ . Assim, segue do Lema 4.2.1 que existe uma única solução  $z = z(h) \in H^2[0, L] \subset L^2[0, L]$  de (6.2.10).

Além disso segue que (6.2.10) é linear em  $h$ . Defina  $F'(a)h = z$  única solução de (6.2.10). Portanto  $F'(a)$  está bem definido como um operador linear em  $h$  tal que  $a+h \in Ad$ .

Por outro lado, segue da regularidade elíptica (Teorema 4.1.8) que  $\|z\|_{L^2[0,L]} \leq \underline{a}^{-1}\|M\|_{L^2[0,L]}\|h\|_{L^2[0,L]}$ .

Portanto,  $F'(a)$  pode ser estendido como um operador linear e limitado para  $h \in L^2[0, L]$ . Ainda, segue que  $\|F'(a)\| \leq \underline{a}^{-1}\|M\|_{L^2[0,L]} := \gamma^{-1}$ .

Em particular, segue do Lema 6.2.1 que  $F'(a)h = z = z(h) = A(a)^{-1}(hu'')$ .

O que nos resta mostrar é que o operador linear e limitado  $F'(a)$  definido acima é de fato a derivada de Fréchet do operador  $F$ , definido em (4.2.1). Defina  $w = F(a+h) - F(a) - F'(a)h$ , para qualquer  $h \in L^2[0, L]$  com  $a+h \in Ad$ . Pela linearidade da equação de que cada parcela satisfaz, temos que  $w$  satisfaz

$$-aw'' = 0,$$

com condições de contorno homogêneas. Disto segue que  $w(x) = 0$ ,  $\forall x \in [0, L]$  é a única solução. Logo, o operador linear e limitado  $F'(a)$  definido acima satisfaz

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|F(a+h) - F(a) - F'(a)h\|}{\|h\|} = 0,$$

e assim  $F'(a)$  é a derivada de Fréchet de  $F$ . □

No próximo lema determinamos a adjunta  $F'(\cdot)^*$  aplicado a uma função, a qual deve ser calculada na iteração de Landweber (3.2.9) para o problema do coeficiente.

**Lema 6.2.5.** *Assumindo que as hipóteses **A1**, **A2** e a condição (3.2.10) são satisfeitas. Sejam  $r = u^\delta - F(a)$  e  $A(a)$  o operador definido em (6.2.2). Então*

$$F'(a)^*r = u''(a)(A^{-1}(a))^*r \quad (6.2.11)$$

onde  $(A^{-1}(a))^*$  é o operador adjunto de  $A^{-1}(a)$ , como estabelecido no Lema 4.1.6.

*Demonstração.* Seja  $F'(a)$  o operador que representa a derivada de Fréchet do operador  $F$ , como mostrado na Proposição (6.2.4). Como  $F'(a)$  é linear e limitado, segue que existe um operador adjunto, o qual denotaremos por  $F'(a)^*$ , e.g. KREYSZIG (1978).

Ainda,  $F'(a)^*$  deve satisfazer, para qualquer  $h \in C_0^\infty$ ,

$$\langle F'(a)^*r, h \rangle_{L^2} = \langle r, F'(a)h \rangle_{L^2} \quad (6.2.12)$$

De (6.2.8), segue que

$$\langle r, F'(a)h \rangle_{L^2} = \langle r, A^{-1}(a)[hu''] \rangle_{L^2} = \langle u''(a)(A^{-1}(a))^*r, h \rangle_{L^2}. \quad (6.2.13)$$

Como as identidades (6.2.12)-(6.2.13) é satisfeita para qualquer  $h \in C_0^\infty$ , o qual é denso em  $L^2$ , o resultado enunciado está provado.  $\square$

Os próximos resultados vão na direção de garantir que o operador  $F$  definido em (4.2.1) satisfaz a condição do cone tangente, isto é, satisfaz

$$\|F(a) - F(\tilde{a}) - F'(a)(a - \tilde{a})\| \leq \eta \|F(a) - F(\tilde{a})\|, \quad \eta < \frac{1}{2}, \quad a, \tilde{a} \in B_{2\rho}(a_0) \subset Ad. \quad (6.2.14)$$

**Lema 6.2.6.** *Assuma as hipóteses **A1'** e **A2** satisfeitas. Sejam  $a, \tilde{a} \in A$ . Defina  $F(a) = u(a) := u$ ,  $F(\tilde{a}) = \tilde{u}(\tilde{a}) := \tilde{u}$  e seja  $F'(a)$  a derivada de Fréchet do operador  $F$  (o qual existe pela Proposição 6.2.4). Então*

$$\langle F(\tilde{a}) - F(a) - F'(a)(\tilde{a} - a), w \rangle_{L^2} = \langle (\tilde{u} - u)'', (\tilde{a} - a)(A^{-1}(a))^*w \rangle_{L^2} \quad (6.2.15)$$

para qualquer  $w \in C_0^\infty$ , onde  $(A^{-1}(a))^*$  representa o operador adjunto do operador  $A^{-1}(a)$  (o qual existe pelo Lema 6.2.1).

*Demonstração.* Partindo das hipóteses temos que

$$\langle F(\tilde{a}) - F(a) - F'(a)(\tilde{a} - a), w \rangle_{L^2} = \langle (\tilde{u} - u) - A^{-1}(a)(\tilde{a} - a)u'', w \rangle_{L^2} \quad (6.2.16)$$

$$\begin{aligned} &= \langle A^{-1}(a)A(a)(\tilde{u} - u) - A^{-1}(a)((\tilde{a} - a)u''), w \rangle_{L^2} \\ &= \langle A^{-1}(a)(A(a)(\tilde{u} - u) - (\tilde{a} - a)u''), w \rangle_{L^2} \\ &= \langle A(a)(\tilde{u} - u) - (\tilde{a} - a)u'', (A^{-1}(a))^*w \rangle_{L^2}. \end{aligned} \quad (6.2.17)$$

Em (6.2.16), primeiramente multiplicando o termo  $(\tilde{u} - u)$  pelo operador identidade  $I = A^{-1}(a)A(a)$ , a linearidade e continuidade de  $A^{-1}(a)$  (obtidos no Lema 6.2.1). Finalmente, como  $A^{-1}(a)$  é linear e limitado, definido entre espaços de Hilbert, sabemos que existe um operador adjunto, o qual foi denotado por  $(A^{-1}(a))^*$ .

Utilizando as mesmas ideias do Lema 6.2.2 e colocando em evidência  $(\tilde{a} - a)$  obtemos de (6.2.16) que

$$\begin{aligned} \langle F(\tilde{a}) - F(a) - F'(a)(\tilde{a} - a), w \rangle_{L^2} &= \langle (\tilde{a} - a)(\tilde{u}'' - u''), (A^{-1}(a))^*w \rangle_{L^2} \\ &= \langle (\tilde{u} - u)'', (\tilde{a} - a)(A^{-1}(a))^*w \rangle_{L^2}, \end{aligned}$$

concluindo a demonstração.  $\square$

Neste momento, seguiremos os passos apresentados em (KALTENBACHER; NEUBAUER; SCHERZER, 2008, Section 2.4), aplicados ao operador (4.2.1). Para tal, precisamos fazer algumas estimativas que serão apresentadas nos Lemas 6.2.7-6.2.9.

**Lema 6.2.7.** *Assumindo as hipóteses do Lema 6.2.6 satisfeitas. Então existe uma constante  $C_1 > 0$  tal que*

$$\|(\tilde{a} - a)a^{-1}(a(A^{-1}(a))^*w)''\|_{L^2} \leq C_1\|\tilde{a} - a\|_{L^\infty}\|w\|_{L^2}. \quad (6.2.18)$$

*Demonstração.* Segue do Lema 6.2.3 que  $\|(a(A^{-1}(a))^*w)''\|_{L^2} = \|(av)''\|_{L^2} = \|w\|_{L^2}$ .

Agora a estimativa segue do fato de  $a \in A \subset Ad$ , com  $C_1 = \underline{a}^{-1}L^2/2$ .  $\square$

**Lema 6.2.8.** *Assumindo as hipóteses do Lema 6.2.6 satisfeitas. Suponha ainda que  $a, \tilde{a} \in A$ . Então existe uma constante  $C_2 > 0$  tal que*

$$\|2((\tilde{a} - a)a^{-1})'(a(A^{-1}(a))^*w)'\|_{L^2} \leq C_2\|\tilde{a} - a\|_{H^1}\|w\|_{L^2}. \quad (6.2.19)$$

*Demonstração.* Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\|2((\tilde{a} - a)a^{-1})'(a(A^{-1}(a))^*w)'\|_{L^2} \leq 2\|((\tilde{a} - a)a^{-1})'\|_{L^2}\|(aA^{-1}(a)w)'\|_{L^2}.$$

Como  $w \in C_0^\infty$ , segue da desigualdade de Poincaré (veja Teorema 2.1.13) que

$$\|(aA^{-1}(a)w)'\|_{L^2} \leq C\|(aA^{-1}(a)w)''\|_{L^2} \leq C\|w\|_{L^2},$$

onde utilizamos os mesmos argumentos que no Lema (6.2.7).

Por outro lado, como  $((\tilde{a} - a)a^{-1})' = \frac{a'(\tilde{a}-a)+a(\tilde{a}-a)'}{a^2}$ , temos da desigualdade triangular e do fato de  $a \in A$ , que

$$2\|((\tilde{a} - a)a^{-1})'\|_{L^2} \leq \underline{a}^{-2}(\|a'\|_{L^\infty}\|\tilde{a} - a\|_{L^2} + \|a\|_{L^\infty}\|(\tilde{a} - a)'\|_{L^2}) \leq C\|\tilde{a} - a\|_{H^1},$$

de onde o resultado enunciado segue.  $\square$

Por fim, teremos a seguinte estimativa.

**Lema 6.2.9.** *Assumindo as hipóteses do Lema 6.2.6, de **A3**) e do Lema 6.2.8 satisfeitas. Suponha ainda para  $\zeta = 0$  ou  $\zeta = L$  tenhamos  $a(\zeta) = \tilde{a}(\zeta)$  e  $a'(\zeta) = \tilde{a}'(\zeta)$ . Então existe uma constante  $C_3 > 0$  tal que*

$$\|((\tilde{a} - a)a^{-1})''(aA^{-1}(a)w)\|_{L^2} \leq C_3\|\tilde{a} - a\|_{H^1}^{1/2}\|w\|_{L^2}^{1/2}. \quad (6.2.20)$$

*Demonstração.* Com as hipóteses do Lema e da integração por partes, segue que

$$\|((\tilde{a} - a)a^{-1})''(aA^{-1}(a)) * w\|_{L^2}^2 \leq \|((\tilde{a} - a)a^{-1})'(aA^{-1}(a)) * w\|_{L^2}^2.$$

Agora a estimativa segue com os argumentos do Lema 6.2.8.  $\square$

Agora estamos prontos para provar o último resultado antes de verificar que a condição de cone tangente para o problema de identificar o coeficiente é válida.

**Proposição 6.2.10.** *Assumindo as hipóteses dos Lemas 6.2.6 - 6.2.9 sejam satisfeitas. Então, existe uma constante  $K$  (que depende somente de  $L, \bar{a}, \underline{a}$ ), tal que*

$$\langle (\tilde{u} - u)'' , (\tilde{a} - a)(A^{-1}(a))^* w \rangle_{L^2} \leq K \|F(\tilde{a}) - F(a)\|_{L^2} \|\tilde{a} - a\|_{H^1} \|w\|_{L^2} . \quad (6.2.21)$$

*Demonstração.* Primeiramente, da hipótese de  $a \in A$  e da integração por partes duas vezes, obtemos

$$\begin{aligned} \langle (\tilde{u} - u)'' , (\tilde{a} - a)(A^{-1}(a))^* w \rangle_{L^2} &= \langle (\tilde{u} - u)'' , [(\tilde{a} - a)a^{-1}]a(A^{-1}(a))^* w \rangle_{L^2} \\ &= \langle (\tilde{u} - u) , ([(\tilde{a} - a)a^{-1}]a(A^{-1}(a))^* w)'' \rangle_{L^2} \\ &\leq \|\tilde{u} - u\|_{L^2} \|[ (\tilde{a} - a)a^{-1}]a(A^{-1}(a))^* w\|''_{L^2} \\ &= \|F(\tilde{a}) - F(a)\|_{L^2} \|[ (\tilde{a} - a)a^{-1}]a(A^{-1}(a))^* w\|''_{L^2} , \end{aligned} \quad (6.2.22)$$

onde usamos novamente a notação de que  $F(\tilde{a}) = \tilde{u}$  e  $F(a) = u$ .

Derivando  $[(\tilde{a} - a)a^{-1}]a(A^{-1}(a))^* w$  e usando a desigualdade triangular, obtemos que

$$\begin{aligned} \|[ (\tilde{a} - a)a^{-1}]a(A^{-1}(a))^* w\|''_{L^2} &\leq \|[ (\tilde{a} - a)a^{-1}]''a(A^{-1}(a))^* w\|_{L^2} \\ &\quad + \|2[(\tilde{a} - a)a^{-1}]'(a(A^{-1}(a))^* w)'\|_{L^2} + \\ &\quad \|[ (\tilde{a} - a)a^{-1}](a(A^{-1}(a))^* w)''\|_{L^2} . \end{aligned}$$

Agora, o resultado segue diretamente das estimativas acima e dos Lemas 6.2.7, 6.2.8 e 6.2.9.  $\square$

Finalmente,

**Teorema 6.2.11.** *Assuma as hipóteses da Proposição 6.2.10 satisfeitas. Então, a condição do cone tangente (3.2.11) é satisfeita.*

*Demonstração.* Segue do Lema 6.2.6 e da Proposição 6.2.10 que existe uma constante  $K > 0$  (independente de  $a, \tilde{a}$ ) tal que

$$\langle F(\tilde{a}) - F(a) - F'(a)(\tilde{a} - a) , w \rangle_{L^2} \leq K \|\tilde{a} - a\|_{H^1} \|F(\tilde{a}) - F(a)\|_{L^2} \|w\|_{L^2} . \quad (6.2.23)$$

Tomando o supremo  $\|w\|_{C_0^\infty} \leq 1$  em ambos os lados da equação acima, juntamente com a densidade de  $C_0^\infty$  em  $L^2$ , obtemos

$$\|F(\tilde{a}) - F(a) - F'(a)(\tilde{a} - a)\|_{L^2} \leq K \|\tilde{a} - a\|_{H^1} \|F(\tilde{a}) - F(a)\|_{L^2} . \quad (6.2.24)$$

Defina  $\eta : K \|\tilde{a} - a\|_{H^1}$ . Assim, se  $\rho$  é tal que para  $\tilde{a}, a \in B_{2\rho}$ ,  $K \|a - \tilde{a}\|_{H^1} < 1/2$ , obtemos

$$\|F(\tilde{a}) - F(a) - F'(a)(\tilde{a} - a)\|_{L^2} \leq \eta \|F(\tilde{a}) - F(a)\|_{L^2} \quad (6.2.25)$$

concluindo a prova.  $\square$

Agora estamos prontos para mostrar que o método de Landweber não-linear para o problema de identificação do coeficiente está bem definido e que converge para uma solução de (4.2.1).

**Teorema 6.2.12.** *Assumindo que **LH1)** e **LH3)** sejam satisfeitas, ou seja,  $a_0 \in B_\rho(a^*)$  e  $k_*^\delta$  é escolhido pelo princípio da discrepância então:*

- (a) *a iteração de Landweber (6.2.1) para o problema de identificação do coeficiente está bem definida;*
- (b) *enquanto (3.2.12) ocorra, teremos que  $a_{k+1}^\delta$  é uma aproximação melhor para  $a_*$ ;*
- (c) *o índice de parada dado pelo princípio da discrepância (3.2.8) com  $\tau$  dado por (3.2.13) é finito;*
- (d) *quando  $\delta = 0$  a iteração de Landweber (6.2.1) converge para a solução de  $F(a) = u$ ;*
- (e) *se  $k_* = k_*(\delta, u^\delta)$  é escolhido pelo critério de parada (3.2.8) com  $\tau$  satisfazendo (3.2.13) então a iteração de Landweber (6.2.1) é convergente e estável.*

*Demonstração.* As hipóteses **LH2)**, **LH4)** e **LH5)** são provados pela Proposição 6.2.4 e Teorema 6.2.11. Portanto as hipóteses da Proposição 3.2.1, Corolário 3.2.2 e dos Teoremas 3.2.3 e 3.2.4 são satisfeitas concluindo a demonstração.  $\square$

## 7 RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo vamos apresentar alguns exemplos numéricos para recuperar o coeficiente de rigidez da viga  $a(x)$  em (1.2.8), utilizando os métodos da Seção 3.2

Em todos os problemas apresentados utilizamos  $x \in [0, 1]$ . A solução numérica  $u$  para (1.2.8) é obtida pelo método de diferenças finitas, nos pontos  $x_i = i/N$  onde  $i = 0, 1, 2, \dots, N$  para  $N = 100$  pontos. Os cálculos numéricos e os gráficos apresentados foram realizados com o programa *Wolfram Mathematica 9*.

Para mostrar que o problema inverso de identificação do coeficiente  $a(x)$  é mal-posto, apresentamos o Exemplo 7.0.1 onde o parâmetro é recuperado sem a utilização de nenhum método de regularização.

**Exemplo 7.0.1.** *Em uma viga é aplicada uma força  $f(x) \equiv 1$  com coeficiente  $a(x) = 3/4$  com condições iniciais  $u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0$ . A solução para o problema direto é  $u(x) = \frac{x^4}{18} - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{18}$ .*

Para resolver o problema direto em (1.2.8) é necessário, essencialmente, integrarmos quatro vezes de ambos os lados e utilizarmos as condições de contorno para obtermos a solução  $u(x)$  do problema. Como a operação de integração é um problema bem posto, as soluções  $u$  e  $u^\delta$  sem e com ruídos dependem continuamente do nível de ruídos  $\delta$ , como mostra a Figura 7.1.

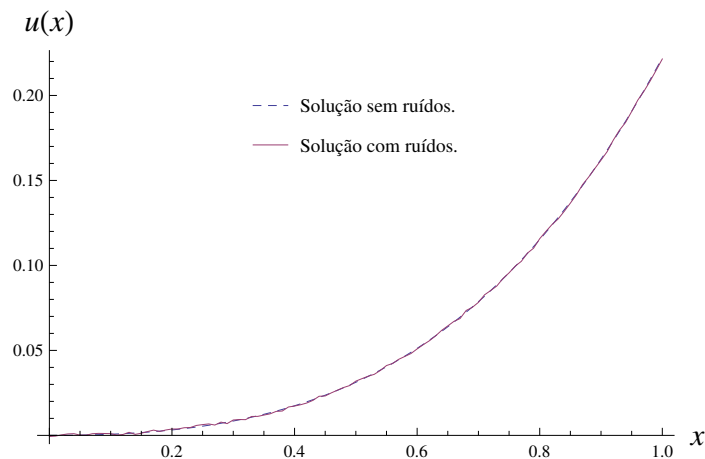


Figura 7.1: Solução  $u(x)$  com e sem ruídos do Exemplo 7.0.1.

Na Figura 7.2, comparamos a solução exata do problema inverso com a solução dada por (6.1.2) sem nenhuma regularização. Podemos observar através deste exemplo que quando não aplicamos nenhum método de regularização não conseguimos recuperar o coeficiente  $a(x)$  de forma estável. Isto devido ao mal-condicionamento do problema o que é agravado ainda mais quando temos dados com ruídos  $u^\delta$ .

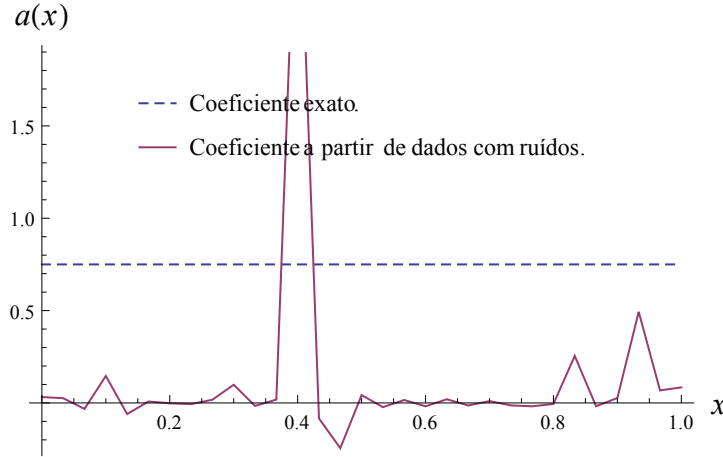


Figura 7.2: Coeficiente sem ruídos e com nível de ruídos  $\delta = 0.001$ .

## 7.1 Exemplos Numéricos usando o Método de Molificação

No método de molificação, os dados  $u^\delta$  são simulados, obtidos a partir da solução  $u$  (1.2.8), a partir da aplicação de uma variável aleatória de valores em  $[-1, 1]$ , produzindo um nível de ruídos  $\delta > 0$  satisfazendo

$$\|u - u^\delta\| \leq \delta. \quad (7.1.1)$$

Além disso, como estamos utilizando funções com  $x \in [0, 1]$ , o método de molificação recupera o coeficiente para o intervalo  $K_\alpha = [3\alpha, 1 - 3\alpha]$  (LERMA; HINESTROZA (2017)). Dessa forma, em todas as análises feitas o coeficiente recuperado é apresentado somente para uma parte do intervalo.

Os parâmetros de regularização  $\alpha$  dependem dos níveis de ruídos, ou seja,  $\alpha = \alpha(\delta)$ . Como em cada problema queremos encontrar o coeficiente numérico quando aplicado o método de molificação em diferentes níveis de ruídos, para cada caso teremos uma escolha de  $\alpha$  diferente. Sendo assim, a escolha do parâmetro foi feita a priori.

**Exemplo 7.1.1.** *Em uma viga do tipo em balanço é aplicada uma força  $f(x) \equiv 1$  com coeficiente  $a(x) = 1$ . A solução para o problema direto de acordo com as condições de contorno  $u(0) = u'(0) = M(1) = M'(1) = 0$  é  $u(x) = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4}$ .*

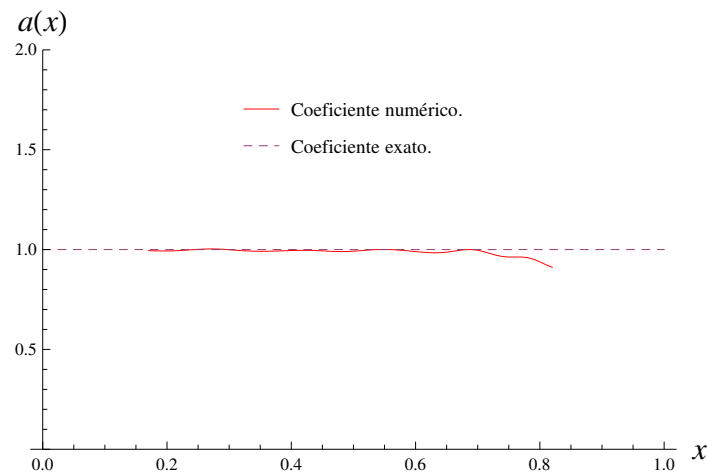
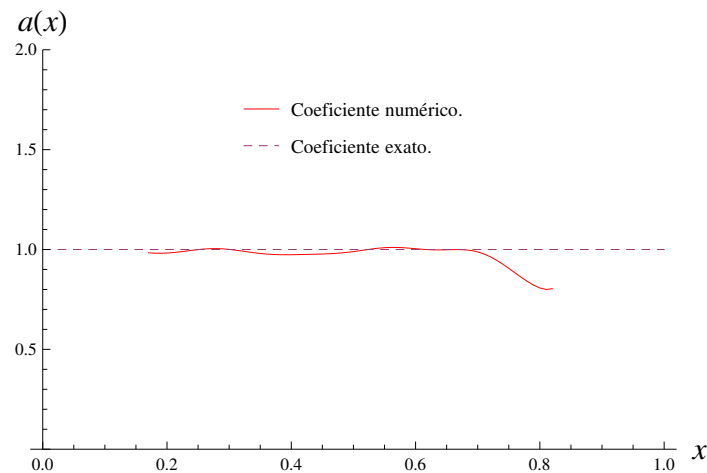
Apresentaremos os testes numéricos para os seguintes níveis de ruídos e parâmetros de regularização conforme Tabela 7.1.

Tabela 7.1: Parâmetro  $\alpha$  e nível de ruído  $\delta$ .

| $\delta$ | $\alpha(\delta)$ |
|----------|------------------|
| 0.00001  | 0.057            |
| 0.0001   | 0.09             |
| 0.001    | 0.12             |

As soluções aproximadas  $a_{\alpha_j}^{\delta_j}$  para  $j = 1, 2, 3$  podem ser vistas, respectivamente, nas Figuras 7.3 - 7.5.

Com base nas recuperações obtidas de  $a(x)$  neste exemplo podemos observar que o método de molificação funciona bem para níveis de ruídos pequenos (em particular, a Figura 7.5 mostra que o método não funciona bem para ruídos da ordem de 0,1%). À medida que aumentamos o  $\delta$ , ou seja, os níveis de ruídos crescem, o coeficiente recuperado não se aproxima tão bem do coeficiente exato.

Figura 7.3: Coeficiente reconstruído para  $\alpha = 0.057$  e nível de ruído  $\delta = 0.00001$ .Figura 7.4: Coeficiente reconstruído para  $\alpha = 0.09$  e nível de ruído  $\delta = 0.0001$ .

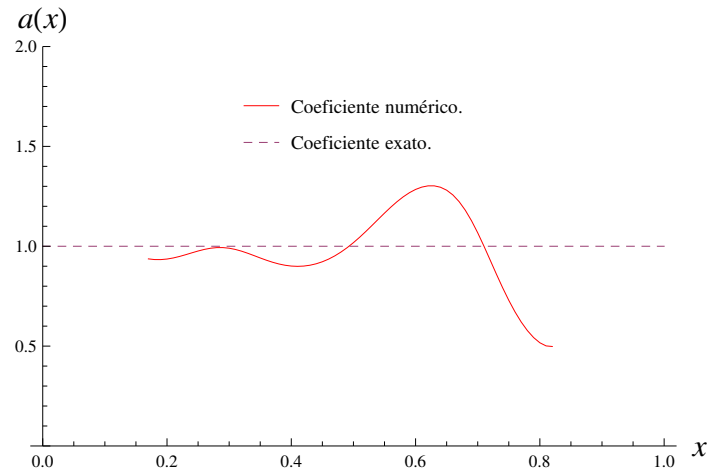


Figura 7.5: Coeficiente reconstruído para  $\alpha = 0.12$  e nível de ruído  $\delta = 0.001$ .

Podemos perceber que conforme aumentamos o nível de ruídos em cada um dos testes do Exemplo 7.1.1 o método de molificação diminui sua estabilidade ao recuperar o coeficiente. Isso de fato é esperado também por estarmos aplicando o operador de molificação no denominador da equação (6.1.2).

O próximo exemplo foi apresentado por MARINOV; VATSALA (2008) em seu artigo. No entanto, apresentaremos o mesmo exemplo mas quando aplicado o método de molificação embora não tenhamos feito nenhuma comparação explícita entre os métodos utilizados visto que são estratégias diferentes.

**Exemplo 7.1.2.** *Em uma viga é aplicada uma força  $f(x) = e^x(x^2 + 4x + 3)$  com coeficiente  $a(x) = x^2 + 1$ . A solução para o problema direto de acordo com condições de contorno adequadas é  $u(x) = e^x$ .*

Para os testes numéricos foram utilizados os seguintes níveis de ruídos e parâmetros de molificação conforme Tabela 7.2. As soluções aproximadas  $a_{\alpha_j}^{\delta_j}$  para  $j = 1, 2, 3$  podem ser vistas, respectivamente, nas Figuras 7.6 - 7.8.

Tabela 7.2: Parâmetro  $\alpha$  e nível de ruído  $\delta$ .

| $\delta$ | $\alpha(\delta)$ |
|----------|------------------|
| 0.0001   | 0.05             |
| 0.001    | 0.079            |
| 0.01     | 0.09             |

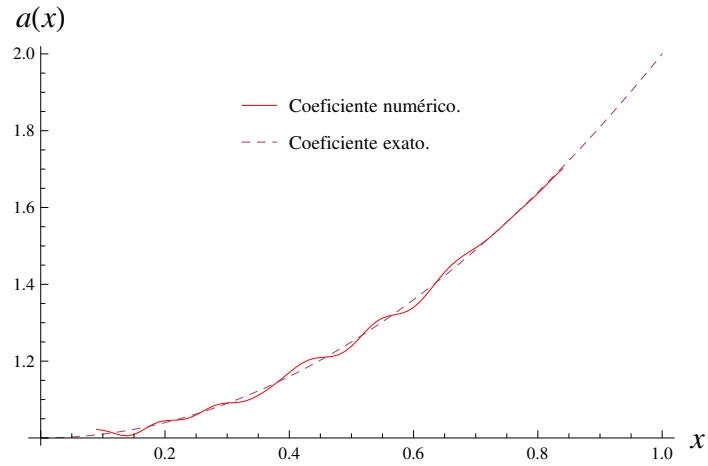


Figura 7.6: Coeficiente reconstruído para  $\alpha = 0.05$  e nível de ruído  $\delta = 0.0001$ .

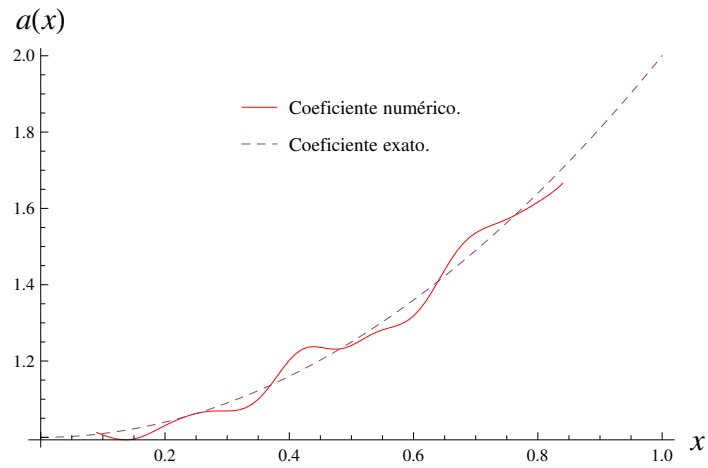


Figura 7.7: Coeficiente reconstruído para  $\alpha = 0.079$  e nível de ruído  $\delta = 0.001$ .

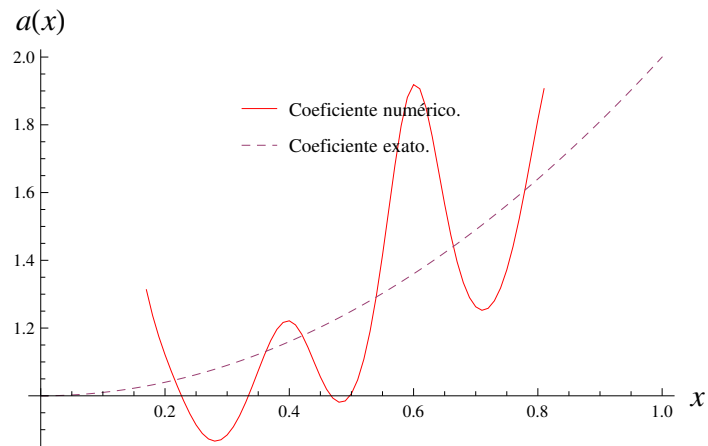


Figura 7.8: Coeficiente reconstruído para  $\alpha = 0.09$  e nível de ruído  $\delta = 0.01$ .

Podemos perceber que o método de molificação também funcionou bem para níveis pequenos de ruídos. No entanto, à medida que esse valor aumenta, o método não consegue recuperar o

coeficiente  $a(x)$  da forma esperada. Para atacar o problema com níveis de ruídos maiores, na próxima seção apresentamos alguns exemplos utilizando o método iterativo de Landweber.

## 7.2 Exemplos Numéricos usando o Método de Landweber

Para o método iterativo de Landweber, os dados  $u^\delta$  são simulados, obtidos da solução  $u$  em (1.2.8), a partir da aplicação de uma variável aleatória de valores em  $[-1, 1]$ , produzindo um nível de ruídos  $\delta > 0$  satisfazendo

$$\|u - u^\delta\| \leq \delta, \quad (7.2.1)$$

como no método de molificação.

A implementação numérica para obter o coeficiente de forma iterada conforme (6.2.1) é dada pelo algoritmo:

- (1) Escolha um valor inicial para  $a_0 \in L^\infty$  e para os parâmetros  $\delta$ ,  $\tau$  e  $\gamma$ .
- (2) Aplique a variável aleatória para gerar os dados com ruídos  $u^\delta$ .
- (3) Enquanto  $k \leq k^*$ , onde  $k^*$  satisfaz o princípio da discrepância, faça os passos a seguir.
- (4) Resolva o problema  $a_k^\delta u''(a_k^\delta) = M$  com as condições de contorno.
- (5) Avalie o resíduo  $r_k = u_k^\delta - F(a_k^\delta)$  em que  $F(a_k^\delta)$  é solução da EDO calculada no passo (4).
- (6) Para calcular  $F'(a_k^\delta)^* r_k$  resolva:
  - (6.1) a EDO  $-(a_k^\delta v_k)'' = r_k$  com condições de contorno  $v'(0) = v'(1) = 0$ .
  - (6.2) Encontre  $ADJ_k$  resolvendo  $\frac{M}{a_k^\delta} v_k$  em que  $v_k$  é solução da EDO obtida no passo (6.1).
- (7) Atualize  $a_{k+1}^\delta$  em que  $a_{k+1}^\delta = a_k^\delta - \gamma ADJ_k$ .
- (8) Volte para o passo (3), enquanto o princípio da discrepância não for atingido.
- (9) Caso contrário,  $a_{k+1}^\delta$  é a solução regularizada.

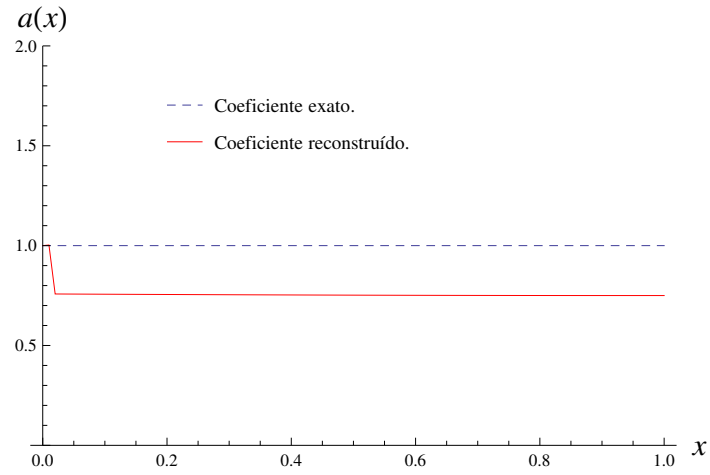
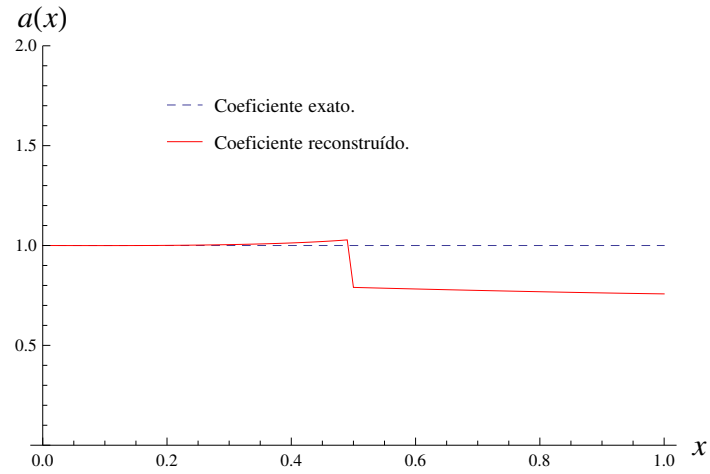
**Exemplo 7.2.1.** *Em uma viga é aplicado uma força  $f(x) \equiv 1$  com coeficiente  $a(x) = 1$ . A solução para o problema direto de acordo com as condições  $u(0) = u'(0) = M(1) = M'(1) = 0$  é  $u(x) = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4}$ .*

Apresentaremos os testes numéricos de acordo com os parâmetros da Tabela 7.3.

As soluções aproximadas  $a_k^\delta$  para  $k = 2, 50, 150$  podem ser vistas, respectivamente, nas Figuras 7.9 - 7.11. Na Figura 7.12 podemos ver a curva do erro para  $\delta = 0.01$  e  $k^* = 150$ .

Tabela 7.3: Parâmetros utilizados no Exemplo 7.2.1.

| Parâmetro   | Valor |
|-------------|-------|
| $\delta$    | 0.01  |
| $a_{exato}$ | 1     |
| $a_0$       | 0.75  |
| $\gamma$    | 1     |

Figura 7.9: Coeficiente reconstruído para  $k = 2$  e nível de ruído  $\delta = 0.01$ .Figura 7.10: Coeficiente reconstruído para  $k = 50$  e nível de ruído  $\delta = 0.01$ .

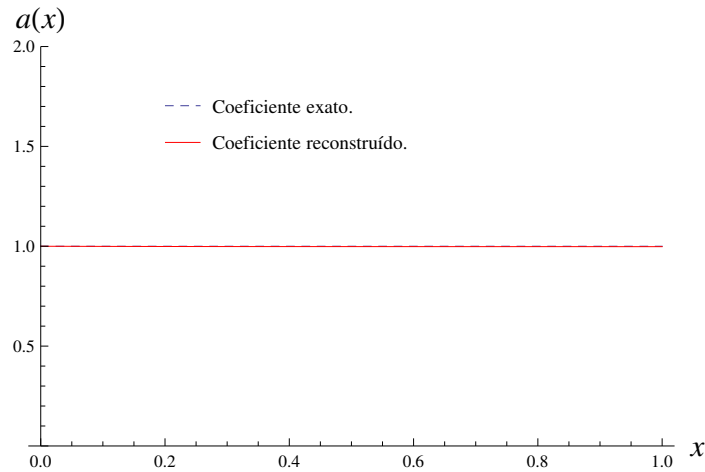


Figura 7.11: Coeficiente reconstruído para  $k^* = 150$ , com  $k^*$  satisfazendo o princípio da discrepância, e nível de ruído  $\delta = 0.01$ .

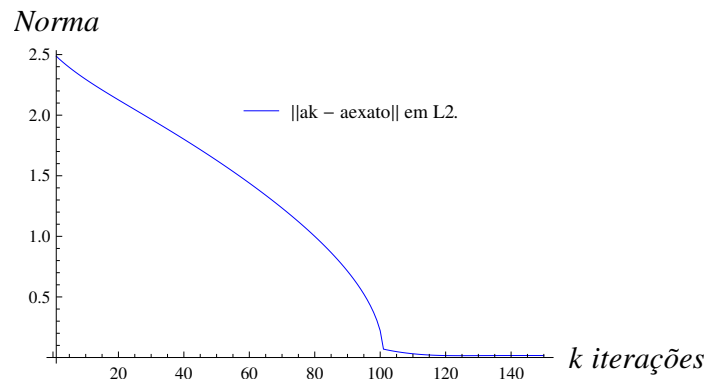


Figura 7.12: Curva do erro do Exemplo 7.2.1.

**Exemplo 7.2.2.** Em uma viga é aplicado uma força  $f(x) \equiv 1$  com coeficiente  $a(x) = \frac{1}{2-x^5}$ . A solução para o problema direto de acordo com as condições  $u(0) = u'(0) = M(1) = M'(1) = 0$  é  $u(x) = -\frac{x^9}{144} + \frac{x^8}{56} - \frac{x^7}{84} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ .

Apresentaremos os testes numéricos de acordo com os parâmetros da Tabela 7.4.

Tabela 7.4: Parâmetros utilizados no Exemplo 7.2.2.

| Parâmetro   | Valor             |
|-------------|-------------------|
| $\delta$    | 0.001             |
| $a_{exato}$ | $\frac{1}{2-x^5}$ |
| $a_0$       | 0.75              |
| $\gamma$    | 1                 |

A soluções aproximadas  $a_k^\delta$  para  $k = 50$ , 2000 e 6500 podem ser vistas, respectivamente, nas Figuras 7.13 - 7.15. Na Figura 7.16 podemos ver a curva do erro para os dados quando  $\delta = 0.001$ .

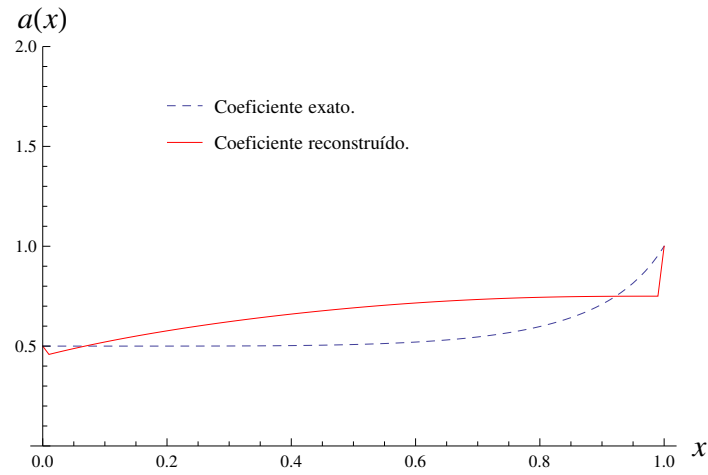


Figura 7.13: Coeficiente reconstruído para  $k = 50$  e nível de ruído  $\delta = 0.001$ .

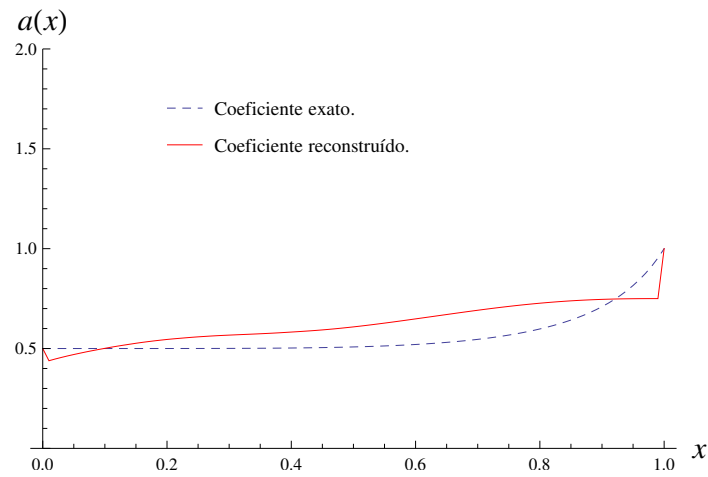


Figura 7.14: Coeficiente reconstruído para  $k = 2000$  e nível de ruído  $\delta = 0.001$ .

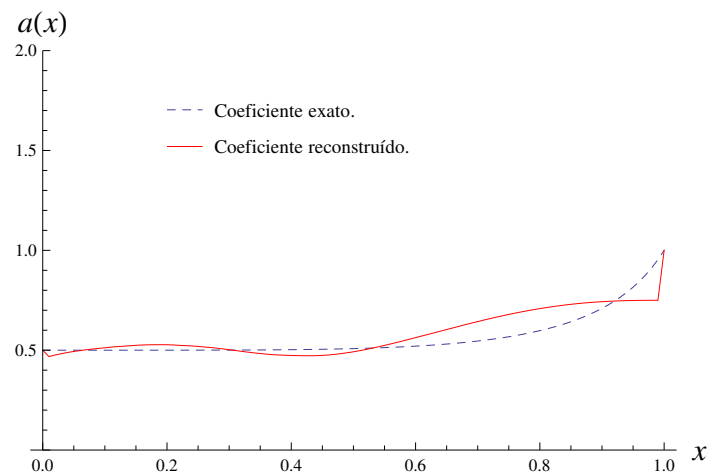


Figura 7.15: Coeficiente reconstruído para  $k^* = 6500$ , com  $k^*$  satisfazendo o princípio da discrepância, e nível de ruído  $\delta = 0.001$ .

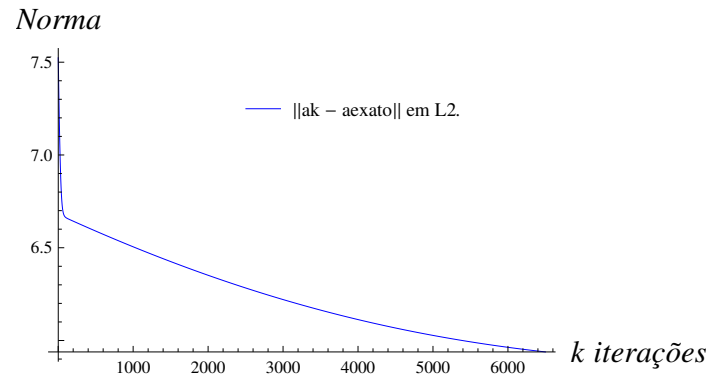


Figura 7.16: Curva do erro do Exemplo 7.2.2.

Podemos perceber que o método iterativo de Landweber, diferentemente do método de molificação, conseguiu recuperar de forma mais estável o coeficiente de rigidez para níveis de ruídos maiores. Além do que o número de iterações necessárias para tal não foi um número consideravelmente grande.

## 8 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho analisamos o problema inverso de identificação do coeficiente de rigidez na equação de Euler-Bernoulli.

Apresentamos o problema como uma equação de operadores possibilitando assim provarmos propriedades importantes como continuidade e compacidade. Mostramos que a propriedade de compacidade do operador implica que o problema de identificação do coeficiente é mal-posto segundo Hadamard, ou seja, instável com relação aos erros nas medidas.

Apresentamos uma estratégia para provar a unicidade do problema inverso sem a necessidade de termos um coeficiente suave como o exigido na prova apresentada em LESNIC; ELLIOTT; INGHAM (1999). Acreditamos que tal resultado possui um maior interesse prático visto que pode ser aplicado para uma viga que contenha falhas, pois neste caso o coeficiente de rigidez deve ter algum tipo de descontinuidade.

Haja visto que a solução do problema inverso investigado não depende continuamente das medida, propomos, neste trabalho, dois métodos de regularização, a fim de obter uma solução aproximada estável para o problema de identificação do coeficiente de rigidez da viga.

Um dos métodos propostos nesta dissertação foi o método de molificação. Aplicamos esta estratégia para regularizar a segunda derivada dos dados que aparece no denominador de uma equação explícita para o coeficiente. Provamos a convergência e estabilidade do método para o problema e apresentamos alguns exemplos numéricos que comprovaram tais resultados. Contudo, percebemos que, quando os ruídos nos dados são relativamente grandes, o método de regularização por molificação utilizado não recupera o coeficiente de forma desejada.

Em vista disso, utilizamos uma outra estratégia de regularização denominada método iterativo de Landweber. Haja visto que o operador parâmetro para solução é não linear, provamos que tal operador é Fréchet diferenciável e que satisfaz a condição do cone tangente. Com tais propriedades e escolhendo o critério de parada pelo princípio da discrepância, provamos que a iteração de Landweber para o problema de identificação coeficiente de rigidez da viga gera uma estratégia estável e convergente com relação aos ruídos nas medidas. Apresentamos exemplos numéricos para o método de Landweber, mostrando os efeitos da estabilidade e convergência das soluções aproximadas. O método de Landweber foi implantado pela autora sem a utilização de nenhuma rotina pronta.

### 8.0.1 Trabalhos futuros

Observamos que temos resultados suficientes para aplicarmos o método de regularização de Tikhonov para obter uma estratégia estável para a identificação do coeficiente de rigidez da viga. No entanto, decidimos não incluí-lo neste trabalho para não tornar esta dissertação muito longa. A descrição dos resultados de regularização do método de regularização de Tikhonov, bem como exemplos numéricos associados a esta estratégia será deixada para trabalhos futuros.

Como trabalho futuro pretendemos desenvolver toda a teoria apresentada nesta dissertação

para a Equação de Euler-Bernoulli com tempo dependente, analisando novamente o parâmetro de rigidez. Acreditamos que tal modelo descreve de maneira mais realista o comportamento dessas estruturas.

Gostaríamos também de aperfeiçoar nosso algoritmo de regularização de forma a minimizar os erros e implementar um exemplo para um coeficiente constante por partes, o que deverá ser feito também para o método de Tikhonov, em uma rotina já existente.

## Referências Bibliográficas

- BAUMEISTER, J. **Stable Solution of Inverse Problems**. 1.ed. Vieweg, 1987.
- BAXLEY, J. Global existence and uniqueness for second-order ordinary differential equations. **Journal of Differential Equations**, v.23, n.3, p.315 – 334, 1977.
- BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. **Fundamentos de análise funcional**. SBM, 2012.
- BREZIS, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. Springer Science & Business Media, 2010.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Numerical Analysis**, Brooks. 1997.
- CADDEMI, S.; MORASSI, A. Multi-cracked Euler–Bernoulli beams: Mathematical modeling and exact solutions. **International Journal of Solids and Structures**, v.50, n.6, p.944–956, 2013.
- DE CEZARO, A. **Problemas inversos: uma introdução**. 2010.
- DE CEZARO, A.; LEITÃO, A. **Introdução aos Problemas Inversos Lineares**. 1.ed. IV Bienal da SBM, 2008.
- GERE, J. **Mecânica dos Materiais**. Editora Cengage, 2009.
- GHRIB, F.; LI, L.; WILBUR, P. Damage identification of euler–bernoulli beams using static responses. **Journal of engineering mechanics**, v.138, n.5, p.405–415, 2011.
- GROETSCH, C. **Inverse problems in the mathematical sciences**. Springer, 1993. v.52.
- HAUKAAS, T. **Euler Bernoulli Beams**. Consultado em Junho de 2017 na página da internet, <http://inrisk.sites.olt.ubc.ca/files/2012/11/Euler-Bernoulli-Beams.pdf>.
- HIBBELER, R. **Resistência dos Materiais**. 7.ed. Pearson Prentice Hall, 2006.
- KALTENBACHER, B.; NEUBAUER, A.; SCHERZER, O. **Iterative regularization methods for nonlinear ill-posed problems**. Walter de Gruyter, 2008. v.6.
- KAWANO, A. Uniqueness in the determination of unknown coefficients of an Euler–Bernoulli beam equation with observation in an arbitrary small interval of time. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v.452, n.1, p.351–360, 2017.
- KELLER, H. B. Existence theory for two point boundary value problems. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v.72, n.4, p.728–731, 1966.
- KELLER, J. Inverse problems. **The American Mathematical Monthly**, v.83, p.107–118, 2 1976.

- KIRSCH, A. **An introduction to the mathematical theory of inverse problems**. Springer Science & Business Media, 2011. v.120.
- KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. 1.ed. Canadá, 1978.
- LERMA, A.; HINESTROZA, D. Coefficient identification in the Euler–Bernoulli equation using regularization methods. **Applied Mathematical Modelling**, v.41, p.223–235, 2017.
- LESNIC, D.; ELLIOTT, L.; INGHAM, D. Analysis of coefficient identification problems associated to the inverse Euler-Bernoulli beam theory. **IMA journal of applied mathematics**, v.62, n.2, p.101–116, 1999.
- LIU, G.; CHEN, S. A novel technique for inverse identification of distributed stiffness factor in structures. **Journal of Sound and Vibration**, v.254, n.5, p.823–835, 2002.
- LUCCHINETTI, E.; STÜSSI, E. Measuring the flexural rigidity in non-uniform beams using an inverse problem approach. **Inverse problems**, v.18, n.3, p.837, 2002.
- MARCELLINI, P. Identificazione di un coefficiente in una equazione differenziale ordinaria del secondo ordine. **Ricerche Mat**, v.31, n.2, p.223–243, 1982.
- MARINOV, T.; MARINOVA, R.; VATSALA, A. Coefficient Identification in Euler-Bernoulli Equation from Over-posed Data. **Neural, Parallel, and Scientific Computations**, v.23, p.193–218, 2015.
- MARINOV, T.; VATSALA, A. Inverse problem for coefficient identification in the Euler–Bernoulli equation. **Computers & Mathematics with Applications**, v.56, n.2, p.400–410, 2008.
- MURIO, D. A. **The mollification method and the numerical solution of ill-posed problems**. John Wiley & Sons, 2011.
- PROTTER, M.; WEINBERGER, H. **Maximum principles in differential equations**. Springer Science & Business Media, 2012.