

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO COMPUTACIONAL DE PLACA ENRIJECIDA
EMPREGANDO A CONDIÇÃO DE CONTORNO DE SIMETRIA

por

Rodrigo Reis Amaral

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Modelagem Computacional

Rio Grande, Abril, 2019

DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO COMPUTACIONAL DE PLACA ENRIJECIDA
EMPREGANDO A CONDIÇÃO DE CONTORNO DE SIMETRIA

por

Rodrigo Reis Amaral
Engenheiro Civil

Dissertação submetida ao programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional (PPGMC) da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande (FURG), como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Modelagem Computacional.

Área de Concentração: Engenharia Marítima

Linha de Pesquisa: Estruturas e Equipamentos Oceânicos

Orientador: Prof. Dr. Liércio André Isoldi

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Eduardo Costa Couto

UFPEL

Prof. Dr. Mauro de Vasconcellos Real

FURG

Prof. Dr. Paulo Roberto de Freitas Teixeira

FURG

Prof. Dr. Wiliam Correa Marques

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional

Rio Grande, 26 de Abril de 2019

Rodrigo Reis Amaral

“ Desenvolvimento de um modelo computacional de placa enrijecida empregando a condição de contorno de simetria ”

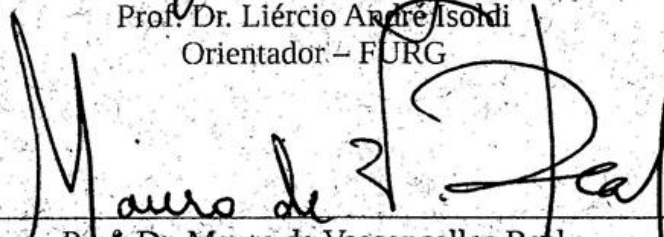
Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande - FURG, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área concentração: Modelagem Computacional.

Aprovado em

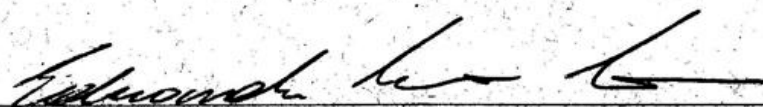
BANCA EXAMINADORA



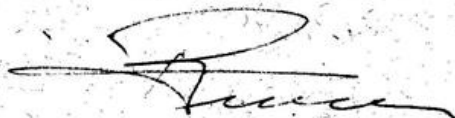
Prof. Dr. Liércio André Isoldi
Orientador - FURG



Prof. Dr. Mauro de Vasconcellos Real
FURG



Prof. Dr. Eduardo Costa Couto
UFPEL



Prof. Dr. Paulo Roberto de Freitas Teixeira
FURG

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Liércio André Isoldi pela orientação e incentivo ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

À Banca examinadora pela disposição e contribuição para o desenvolvimento do trabalho.

À CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – pelo suporte financeiro.

À FURG por ofertar o curso de Mestrado em Modelagem Computacional.

Aos professores do PPGMC pela dedicação e competência.

Aos meus pais, Raul Vieira Amaral e Loreci Reis, pelo apoio, incentivo e suporte durante esta etapa de minha vida.

RESUMO

A solução numérica de sistemas estruturais com emprego de recursos computacionais permite o acesso à previsão do comportamento estrutural de estruturas de aço, destacando a capacidade de prever, conceber e aperfeiçoar sua geometria. Com uma forma muito próxima da realidade, com auxílio da discretização espacial, esta combinação permite constituir um modelo de sólido quase contínuo. Tornando-se, assim, um instrumento valioso e indispensável na pesquisa sobre o comportamento das estruturas por permitir compatibilizar de forma realista os resultados da análise numérica. Nesse contexto, o desenvolvimento de um modelo computacional de placa enrijecida utilizando a condição de contorno de simetria será apresentado. O modelo computacional foi desenvolvido no software ANSYS, baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF), e utiliza o elemento finito SHELL281. As simulações que empregam a condição de contorno de simetria demonstram uma diminuição de tempo no processamento computacional sem perda de precisão devida a uma quantidade menor de elementos finitos serem utilizados na obtenção dos valores independentes de malha dos resultados numéricos do deslocamento transversal (deflexão) e tensão de von Mises. Para isso, o modelo computacional com simetria será utilizado em uma avaliação geométrica de placas enrijecidas (estudo de caso). Nesta avaliação, utilizou-se o Método Design Construtal e, em conjunto com a técnica da Busca Exaustiva, determinou-se o melhor comportamento mecânico das placas enrijecidas através da alteração de alguns parâmetros geométricos, de modo que o volume do material não sofresse nenhuma alteração. Para este propósito, foi utilizada uma placa de referência sem enrijecedores em que parte do seu volume de material foi transformada em enrijecedores, através da diminuição da espessura da mesma, mantendo, assim, o valor do comprimento e o da largura como constantes. O objetivo aqui consiste em determinar as configurações geométricas que minimizam a deflexão máxima e a tensão máxima de von Mises das placas enrijecidas através da alteração de parâmetros geométricos característicos. Desse modo, foi possível avaliar a influência dos seguintes graus de liberdade: número de enrijecedores longitudinais, número de enrijecedores transversais e a relação altura de enrijecedor por espessura de enrijecedor. Portanto, foi possível desenvolver e verificar um modelo computacional que utiliza a condição de contorno de simetria para a análise de deflexão e tensão das placas enrijecidas. E, os resultados obtidos demonstraram que ao transformar parte do volume da placa de referência em enrijecedores, ganhos no comportamento mecânico podem ocorrer.

Palavras-chaves: Minimização da deflexão, Minimização da tensão, Avaliação geométrica, Placas com enrijecedores, Enrijecedores.

ABSTRACT

The numerical solution of structural systems using computational resources allows access to the prediction of the structural behavior of steel structures, highlighting the ability to predict, design and improve their geometry. With a form very close to reality, with the aid of spatial discretization, this combination allows to constitute a model of almost continuous solid. Thus, it is a valuable and indispensable instrument in the research on the behavior of the structures, in order to allow realistic matching of the results of the numerical analysis. In this context, the development of a computer model of stiffened plate using the symmetry boundary condition will be presented. The computational model was developed in the ANSYS software, based on the Finite Element Method (FEM), and uses the finite element SHELL281. Simulations employing the symmetry boundary condition demonstrate a decrease in computational processing time without loss of precision due to a smaller amount of finite elements being used to obtain the independent mesh values of the numerical results of the transverse displacement (deflection) and stress of von Mises. For this, the computational model with symmetry will be used in a geometric evaluation of stiffened plates (case study). In this evaluation, the Construal Design Method was used and, together with the Exhaustive Search Technique, the best mechanical behavior of the stiffened plates was determined by altering some geometric parameters, so that the volume of the material did not change. For this purpose, a reference plate without stiffeners was used in which part of its volume of material was transformed into stiffeners by reducing the thickness thereof, thereby maintaining the length value and the width value as constants. The purpose here is to determine the geometric configurations that minimize the maximum deflection and the maximum von Mises stress of the stiffened plates by changing characteristic geometric parameters. In this way, it was possible to evaluate the influence of the following degrees of freedom: number of longitudinal stiffeners, number of transversal stiffeners and the ratio of stiffener height to stiffener thickness. Thus, it was possible to develop and verify a computational model that uses the boundary condition of symmetry for the analysis of deflection and stress of the stiffened plates. And, the results obtained demonstrated that by transforming part of the volume of the reference plate into stiffeners, gains in mechanical behavior can occur.

Keywords: Minimization of deflection, Minimization of stress, Geometric evaluation, Plates with stiffeners, Stiffeners.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	16
1.1. Estado da arte	18
1.2. Objetivos	22
1.3. Metodologia	23
1.4. Organização da dissertação	25
2. TEORIA DE PLACAS	27
2.1. Teoria das placas finas e suas equações governantes	28
2.1.1. Teoria clássica para placas finas com pequenas deflexões	28
2.1.2. Equações Cinéticas	30
2.1.3. Equações Cinemáticas, Equações Constitutivas e Equação governante	31
2.1.4. Condição de contorno	34
2.2. Soluções para equações diferenciais governantes	37
2.2.1. Solução de Navier para placas sem enrijecedores com apoio simples	37
2.2.2. Placas sem enrijecedores com engaste nas quatro bordas	39
2.3. Placas com enrijecedores	41
3. MODELAGEM COMPUTACIONAL	44
3.1. Método dos elementos finitos	45
3.1.1. Introdução	45
3.1.2. Elemento SHELL281 e Software ANSYS 18.2 Versão Acadêmica	49
4. TEORIA CONSTRUTAL E A TÉCNICA DA BUSCA EXAUSTIVA	51
4.1. Aplicação do Método Design Construtal no estudo de caso	53
5. RESULTADOS E DISCUSSÕES	57
5.1. Verificação do modelo computacional	57
5.1.1. Placa retangular com enrijecedores em cruz	57
5.1.2. Placa quadrada com dois enrijecedores ortogonais	59
5.1.3. Placa com três enrijecedores longitudinais e quatro transversais	64
5.1.4. Placa com quatro enrijecedores longitudinais e cinco transversais	66
5.2. Teste de convergência de malha	68
5.3. Aplicação do modelo computacional com simetria no estudo de caso	70
6. CONCLUSÃO	88
6.1. Proposta de continuidade	90
7. REFERÊNCIAS	91

APÊNDICE A – Teste de convergência de malha das placas enrijecidas $P(Nls, Nts)$	94
APÊNDICE B – Resultados numéricos obtidos para cada configuração geométrica	103

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1. – Utilização de placas enrijecidas na construção civil (a) e em estruturas marítimas (b); (Fonte: adaptado de Szilard, 2004)	16
Figura 1.2. – Processo de análise pelo MEF (Fonte: adaptado de Bathe, 2014).....	17
Figura 1.3. – Representação das excentricidades entre as placas e os enrijecedores (Fonte: Silva, 2010)	21
Figura 2.1. – (a) Placa retangular submetida a um carregamento transversal e (b) Tensões internas de um elemento infinitesimal de placa (Fonte: adaptado de Szilard, 2004)	29
Figura 2.2. – Esforços externos e internos na superfície média do elemento de placa (Fonte: adaptado de Szilard, 2004).....	30
Figura 2.3. – Condições de contorno utilizadas nas placas (Fonte: adaptado de Szilard, 2004)	35
Figura 2.4. – Placa sem ancoramento nos cantos (Fonte: adaptado de Szilard, 2004)	37
Figura 2.5. – Placa retangular com apoios simples (Fonte: retirado de Bhaskar e Varadan, 2013)....	37
Figura 2.6. – Placa retangular com engaste e sujeita a um carregamento transversal uniforme (Fonte: retirado de Timoshenko e Woinowsky-Krieger, 1959)	40
Figura 2.7. – (a) Placa enrijecida; e, (b) sistema laje-viga (Fonte: adaptado de Szilard, 2004)	41
Figura 3.1. – Etapas de uma análise por um sistema numérico (Fonte: Maria, 1997).....	45
Figura 3.2. – Processo evolutivo do MEF (Fonte: adaptado de Zienkiewicz e Taylor, 2000).....	47
Figura 3.3. – Elemento finito SHELL281 (Fonte: ANSYS, 2017).....	50
Figura 4.1. – Placa de referência.....	53
Figura 4.2. – Placa enrijecida com suas variáveis.....	54
Figura 4.3. – Configurações geométricas geradas pelo Design Construtal (Fonte: Troina, 2017)	56
Figura 5.1. – Placa com enrijecedores em cruz (Fonte: adaptado de Silva, 2010)	58
Figura 5.2. – Convergência de malha e verificação para a placa com enrijecedores em cruz.....	59
Figura 5.3. – Placa quadrada com enrijecedores ortogonais em relação aos eixos x e y (Fonte: adaptado de Salomon, 2001).....	60
Figura 5.4. – Teste de convergência de malha para o deslocamento máximo para $h = 100$ mm.....	61
Figura 5.5. – Teste de convergência de malha para a tensão de flexão dos enrijecedores para $h = 100$ mm	61
Figura 5.6. – Comparativo dos resultados numéricos de deflexão máxima	63
Figura 5.7. – Comparativo dos resultados numéricos da tensão de flexão dos enrijecedores	63
Figura 5.8. – Teste de convergência de malha para a placa com três enrijecedores longitudinais e quatro transversais com $h_s/t_s = 53,4905$	65

Figura 5.9. – Comparativo dos resultados numéricos da deflexão central da placa com três enrijecedores longitudinais e quatro transversais em relação à variação do grau de liberdade hs/ts	65
Figura 5.10. – Teste de convergência de malha para a placa com quatro enrijecedores longitudinais e cinco transversais com $hs/ts = 91,7305$	67
Figura 5.11. – Comparativo dos resultados numéricos da deflexão central da placa com quatro enrijecedores longitudinais e cinco transversais em relação à variação hs/ts	67
Figura 5.12. – Placa com enrijecedores P(6,6) com $hs/ts = 66,3476$: (a) domínio computacional da placa completa, e (b) domínio considerando 1/4 da placa	68
Figura 5.13. – Teste de convergência de malha para: (a) deflexão máxima e (b) tensão de von Mises da placa P(6,6) com hs/ts igual a 66,3476 com simetria	69
Figura 5.14. – Variações da deflexão máxima em função de hs/ts para $Nls = 2$	70
Figura 5.15. – Variações da deflexão máxima em função de hs/ts para $Nls = 3$	71
Figura 5.16. – Variações da deflexão máxima em função de hs/ts para $Nls = 4$	71
Figura 5.17. – Variações da deflexão máxima em função de hs/ts para $Nls = 5$	72
Figura 5.18. – Variações da deflexão máxima em função de hs/ts para $Nls = 6$	72
Figura 5.19. – Variações da tensão máxima de von Mises em função de hs/ts para $Nls = 2$	73
Figura 5.20. – Variações da tensão máxima de von Mises em função de hs/ts para $Nls = 3$	73
Figura 5.21. – Variações da tensão máxima de von Mises em função de hs/ts para $Nls = 4$	74
Figura 5.22. – Variações da tensão máxima de von Mises em função de hs/ts para $Nls = 5$	74
Figura 5.23. – Variações da tensão máxima de von Mises em função de hs/ts para $Nls = 6$	75
Figura 5.24. – Variações da deflexão máxima em função de Nts	80
Figura 5.25. – Variações da tensão máxima de von Mises em função de Nts	80
Figura 5.26. – Forma defletida da placa de referência sem enrijecedor a) inteira e b) considerando a condição de contorno de simetria	82
Figura 5.27. – Forma defletida da placa P(6,2) com $hs/ts = 1,3581$ a) inteira e b) considerando a condição de contorno de simetria	83
Figura 5.28. – Forma defletida da placa P(2,6) com $hs/ts = 53,4905$ a) inteira e b) considerando a condição de contorno de simetria	84
Figura 5.29. – Distribuição de tensões da placa de referência sem enrijecedor a) inteira e b) considerando a condição de contorno de simetria	85
Figura 5.30. – Distribuição de tensões da placa P(6,3) com $hs/ts = 1,2790$ a) inteira e b) considerando a condição de contorno de simetria	86
Figura 5.31. – Distribuição de tensões da placa P(2,5) com $hs/ts = 59,4087$ a) inteira e b) considerando a condição de contorno de simetria	87

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1. Deflexão central e momentos de flexão de uma placa engastada nas quatro bordas (Fonte: retirado de Timoshenko e Woinowsky-Krieger, 1959).....	40
Tabela 3.1. Aplicações do MEF nas áreas de pesquisa das engenharias envolvendo problemas de equilíbrio (adaptado de RAO, 2011).	46
Tabela 5.1. Tamanho do elemento simulado para a placa completa e a placa com simetria	62
Tabela 5.3. Tamanho do elemento finito SHELL281 utilizado em cada $P(Nls, Nts)$	76
Tabela 5.4. Melhores configurações geométricas que minimizaram as deflexões e as tensões.....	78
Tabela A.1. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica $P(2,2)$	94
Tabela A.2. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica $P(2,3)$	94
Tabela A.3. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica $P(2,4)$	94
Tabela A.4. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica $P(2,5)$	95
Tabela A.5. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica $P(2,6)$	95
Tabela A.6. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica $P(3,2)$	95
Tabela A.7. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica $P(3,3)$	96
Tabela A.8. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica $P(3,4)$	96
Tabela A.9. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica $P(3,5)$	96
Tabela A.10. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica $P(3,6)$	97
Tabela A.11. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica $P(4,2)$	97
Tabela A.12. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica $P(4,3)$	97
Tabela A.13. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica $P(4,4)$	98
Tabela A.14. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica $P(4,5)$	98
Tabela A.15. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica $P(4,6)$	98
Tabela A.16. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica $P(5,2)$	99
Tabela A.17. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica $P(5,3)$	99
Tabela A.18. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica $P(5,4)$	99
Tabela A.19. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica $P(5,5)$	100
Tabela A.20. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica $P(5,6)$	100
Tabela A.21. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica $P(6,2)$	100
Tabela A.22. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica $P(6,3)$	101
Tabela A.23. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica $P(6,4)$	101
Tabela A.24. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica $P(6,5)$	101
Tabela A.25. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica $P(6,6)$	102

Tabela B.1. Resultados numéricos para a placa P(2,2) com simetria.	103
Tabela B.2. Resultados numéricos para a placa P(2,3) com simetria.	103
Tabela B.3. Resultados numéricos para a placa P(2,4) com simetria.	104
Tabela B.4. Resultados numéricos para a placa P(2,5) com simetria.	104
Tabela B.5. Resultados numéricos para a placa P(2,6) com simetria.	105
Tabela B.6. Resultados numéricos para a placa P(3,2) com simetria.	105
Tabela B.7. Resultados numéricos para a placa P(3,3) com simetria.	106
Tabela B.8. Resultados numéricos para a placa P(3,4) com simetria.	106
Tabela B.9. Resultados numéricos para a placa P(3,5) com simetria.	107
Tabela B.10. Resultados numéricos para a placa P(3,6) com simetria.	107
Tabela B.11. Resultados numéricos para a placa P(4,2) com simetria.	108
Tabela B.12. Resultados numéricos para a placa P(4,3) com simetria.	108
Tabela B.13. Resultados numéricos para a placa P(4,4) com simetria.	109
Tabela B.14. Resultados numéricos para a placa P(4,5) com simetria.	109
Tabela B.15. Resultados numéricos para a placa P(4,6) com simetria.	110
Tabela B.16. Resultados numéricos para a placa P(5,2) com simetria.	110
Tabela B.17. Resultados numéricos para a placa P(5,3) com simetria.	111
Tabela B.18. Resultados numéricos para a placa P(5,4) com simetria.	111
Tabela B.19. Resultados numéricos para a placa P(5,5) com simetria.	112
Tabela B.20. Resultados numéricos para a placa P(5,6) com simetria.	112
Tabela B.21. Resultados numéricos para a placa P(6,2) com simetria.	113
Tabela B.22. Resultados numéricos para a placa P(6,3) com simetria.	113
Tabela B.23. Resultados numéricos para a placa P(6,4) com simetria.	114
Tabela B.24. Resultados numéricos para a placa P(6,5) com simetria.	114
Tabela B.25. Resultados numéricos para a placa P(6,6) com simetria.	115

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Comprimento da placa [m]
b	Largura [m]
B	Rigidez à torção efetiva da placa [N.m]
D	Rigidez à flexão da placa [N.m]
D_x	Rigidez à flexão da placa na direção x [N.m]
D_y	Rigidez à flexão da placa na direção y [N.m]
D_t	Rigidez a torção da placa [N.m]
E	Módulo de elasticidade longitudinal (módulo de Young) [Pa]
E_x	Módulo de elasticidade longitudinal na direção x [Pa]
E_y	Módulo de elasticidade longitudinal na direção y [Pa]
G	Módulo de elasticidade transversal [Pa]
G_{xy}	Módulo de cisalhamento [Pa]
h_s	Altura do enrijecedor [m]
M_x	Momento fletor em x [N.m]
m_x	Momento fletor por unidade de comprimento em x [N.m/m]
M_y	Momento fletor em y [N.m]
m_y	Momento fletor por unidade de comprimento em y [N.m/m]
M_{xy}	Momento de torção que atua no plano ortogonal ao eixo x [N.m]
m_{xy}	Momento de torção distribuído que atua no plano ortogonal ao eixo x [N.m/m]
M_{yx}	Momento de torção que atua no plano ortogonal ao eixo y [N.m]
m_{xy}	Momento de torção distribuído que atua no plano ortogonal ao eixo y [N.m/m]
N_{ls}	Número de enrijecedores longitudinais [un.]
N_{ts}	Número de enrijecedores transversais [un.]
p_x	Carga distribuída aplicada à placa na direção x [N/m ²]

p_y	Carga distribuída aplicada à placa na direção y [N/m ²]
p_z	Carga distribuída aplicada à placa na direção z [N/m ²]
Q_x	Força de cisalhamento transversal em x [N]
q_x	Força de cisalhamento transversal por unidade de comprimento em x [N/m]
Q_y	Força de cisalhamento transversal em y [N]
q_y	Força de cisalhamento transversal por unidade de comprimento em y [N/m]
S_{ls}	Espaçamento entre os enrijecedores longitudinais [m]
S_{ts}	Espaçamento entre os enrijecedores transversais [m]
t	Espessura da placa sem enrijecedores [m]
t_p	Espessura da placa com enrijecedores [m]
t_s	Espessura dos enrijecedores [m]
u	Componente de deslocamento na direção x [m]
v	Componente de deslocamento na direção y [m]
V	Volume genérico de um corpo sólido [m ³]
V_s	Volume de material dos enrijecedores [m ³]
V_r	Volume total da placa de referência [m ³]
w	Componente de deslocamento na direção z [m]
x	Coordenada em x do sistema cartesiano
y	Coordenada em y do sistema cartesiano
z	Coordenada em z do sistema cartesiano

Símbolos gregos

ϕ	Fração volumétrica
γ_{xy}	Deformação por cisalhamento
ε_x	Deformação normal na direção do eixo x
ε_y	Deformação normal na direção do eixo y

σ_x	Tensão normal na direção do eixo x [Pa]
σ_y	Tensão normal na direção do eixo y [Pa]
σ_z	Tensão normal na direção do eixo z [Pa]
τ	Tensão de cisalhamento [Pa]
τ_{xy}	Tensão de cisalhamento no plano ortogonal ao eixo x na direção y [Pa]
τ_{yx}	Tensão de cisalhamento no plano ortogonal ao eixo y na direção x [Pa]
τ_{xz}	Tensão de cisalhamento no plano ortogonal ao eixo x na direção z [Pa]
τ_{zx}	Tensão de cisalhamento no plano ortogonal ao eixo z na direção x [Pa]
τ_{yz}	Tensão de cisalhamento no plano ortogonal ao eixo y na direção z [Pa]
τ_{zy}	Tensão de cisalhamento no plano ortogonal ao eixo z na direção y [Pa]
ν	Coefficiente de Poisson
ν_x	Coefficiente de Poisson na direção x
ν_y	Coefficiente de Poisson na direção y

1. INTRODUÇÃO

As placas ou painéis são componentes estruturais que utilizam, principalmente, o aço como material para fabricação destas estruturas em razão de sua alta resistência nos diversos estados de tensão (tração, compressão e flexão). O emprego desta estrutura pode ocorrer na construção civil (Fig. 1.1 – a), no reparo ou na elaboração de estruturas navais (Fig. 1.1 – b), estruturas aeroespaciais e estruturas automobilísticas. Com relação à rigidez, ela pode ser aumentada através da soldagem de enrijecedores transversal e/ou longitudinalmente em uma de suas faces (Bellei, 1998; Bhaskar e Varadan, 2013).

A sua análise pode ser feita através de uma aproximação distribuída ou discreta, conforme aponta Kolli e Chandrashekhara (1996). Entende-se que a aproximação distribuída representa as propriedades do enrijecedor sobre a área da placa e sua utilização só ocorre em situações que não há grandes espaçamentos entre os enrijecedores; enquanto que a aproximação discreta trata o sistema como proposto, tornando a análise mais precisa.

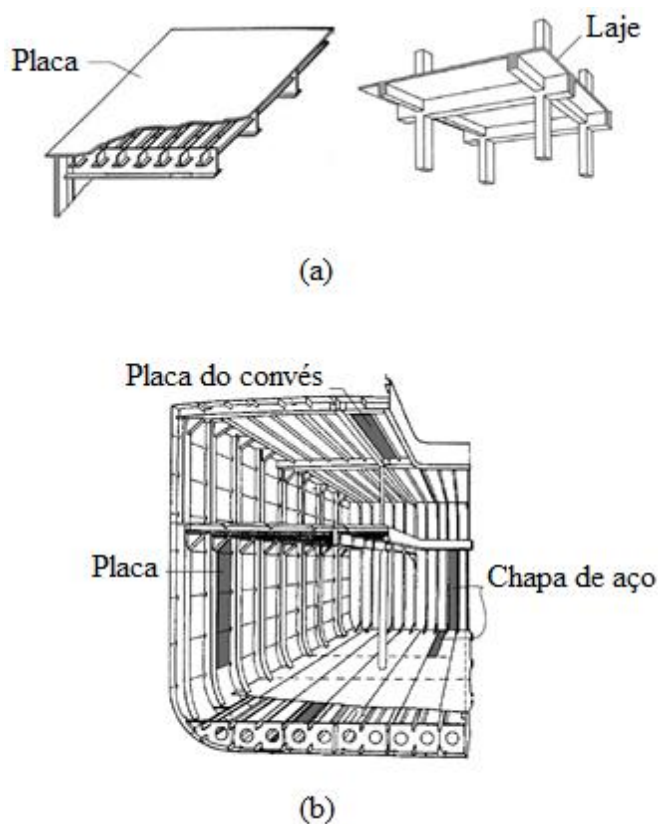


Figura 1.1. – Utilização de placas enrijecidas na construção civil (a) e em estruturas marítimas (b);
(Fonte: adaptado de Szilard, 2004)

Previamente à análise, deve-se escolher um modelo matemático de um problema físico em que é determinada a geometria que irá ser modelada, o tipo de força aplicada, as propriedades do material, as condições de vinculação, as equações que irão discretizar o sistema e os parâmetros de solução. Para isto, a Fig. 1.2 expõe o processo de análise pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) e Liu e Quek (2003) distinguem algumas características que podem ser abordadas quando se estiver trabalhando com placas, tais como:

- i. Força: estática, em que as estruturas estão sujeitas a um carregamento em repouso; e dinâmica, no qual a tensão, a deformação e o deslocamento variam ao longo do tempo.
- ii. Material: elástico, devido à capacidade da deformação desaparecer quando a estrutura for descarregada, ou seja, voltando à sua forma inicial; plástico sendo mantido seu estado deformado após o seu descarregamento; anisotrópico, o que significa que as propriedades do material variam quando há mudança de direção; e, isotrópico, em que não há uma dependência das propriedades do material com a direção.

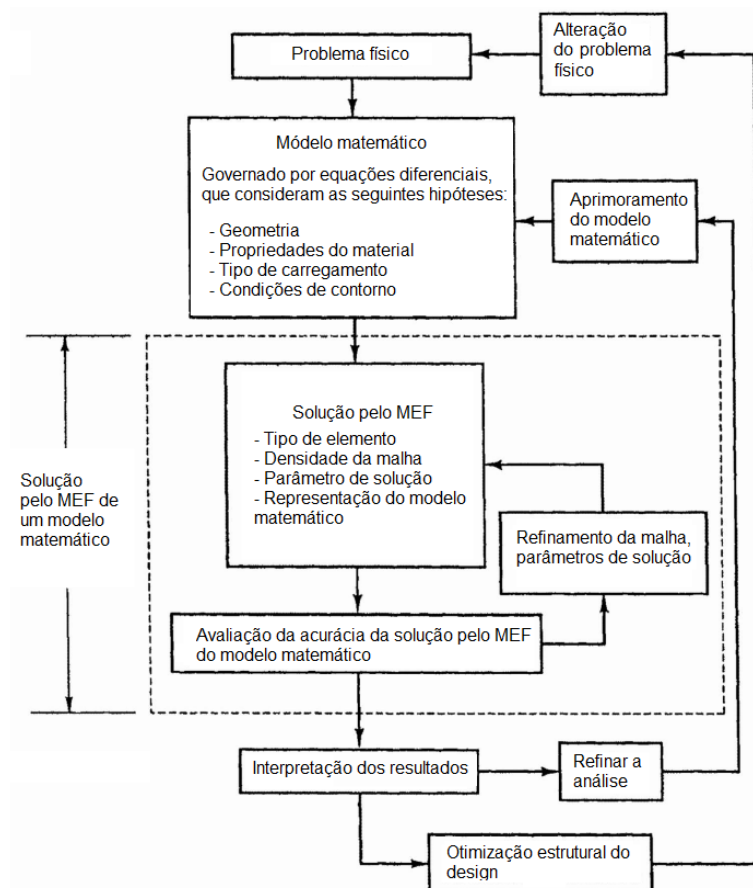


Figura 1.2. – Processo de análise pelo MEF (Fonte: adaptado de Bathe, 2014)

Portanto, um dos principais objetivos de uma modelagem numérica baseado no MEF de estruturas de aço consiste em, depois de devidamente verificadas e/ou validadas, expandir o banco de dados referente a um determinado comportamento estrutural. A expansão é feita por meio de uma análise paramétrica, que possibilita a redução do tempo e custo da solução quando comparados com ensaios de laboratório convencionais (experimentos). Apesar disso, alguns cuidados devem ser tomados na especificação do escopo dessas análises, pois se elas foram calibradas para uma dada faixa de variação de suas principais variáveis controladoras, análises paramétricas fora destes limites serão sempre questionadas e muitas vezes invalidadas (Vellasco et al., 2014).

1.1. Estado da arte

Os engenheiros estruturais vem há muito tempo buscando a concepção de estruturas mais esbeltas que resistam a elevados carregamentos. De modo que, com o desenvolvimento de novos materiais e processos computacionais mais rápidos, uma nova fronteira foi aberta para a concepção e o desenvolvimento de ferramentas, técnicas, métodos e sistemas numéricos que atendessem essa necessidade (Vellasco et al., 2014).

Dentre as pesquisas que envolvam o comportamento mecânico das placas enrijecidas, pode-se citar Rossow e Ibrahimkhail (1978) por desenvolver uma análise de placas enrijecidas concêntricas e excêntricas através da utilização do Método da Restrição em conjunto com o MEF. O Método da Restrição é baseado no teorema da mínima energia potencial e pode ser compreendido matematicamente como a minimização da energia potencial das estruturas elásticas sujeitas a uma variedade de restrições. Os problemas abordados foram solucionados numericamente pelos programas NASTRAN (para os casos das placas excêntricas) e STRUDL (para os casos das placas concêntricas). Os resultados numéricos, obtidos pelos modelos computacionais baseados em elementos triangulares, demonstraram que a discretização de um domínio computacional em elementos com alta ordem polinomial apresentam um número menor de elementos e uma boa acurácia quando comparados a elementos com ordem polinomial menor.

O'Leary e Harari (1985) desenvolveram um procedimento baseado no MEF para a modelagem de placas finas reforçadas com enrijecedores mais espessos e amplamente espaçados. O estudo considerou o acoplamento entre a placa e o enrijecedor (restrição) através da utilização dos multiplicadores Lagrangeanos. Em geral, este método converte problemas com uma ou mais restrições em problemas sem nenhuma restrição através da inserção de um novo parâmetro (λ). Os resultados foram gerados no programa SAPIV e obtidos pela utilização de elementos de viga bidimensionais.

Bedair (1997) apresentou uma nova metodologia para análise de placas enrijecidas sujeitas a um carregamento transversal. O estudo tratou o sistema placa-enrijecedor conectados de forma rígida em suas junções e a energia de deformação desta estrutura foi obtida a partir de termos de funções generalizadas de deslocamentos dentro e fora do plano. Os resultados numéricos da deflexão sofrida pelas placas utilizadas pelo autor foram obtidos a partir de uma combinação do método de energia e o método da Programação Sequencial Quadrática (SQP).

Sapountzakis e Katsikadelis (2000) apresentaram uma análise de placas enrijecidas que considera as forças e as deformações no plano da placa assim como os esforços e deformações axiais presentes nos enrijecedores. Também, o estudo possibilitou avaliar os esforços existentes na interface localizada entre a placa e os enrijecedores. A solução desta pesquisa foi obtida através da aplicação do Método da Equação Análoga e os resultados gerados, em relação aos demais trabalhos utilizados como referência, demonstraram certa discrepância em virtude dos esforços que foram considerados em sua análise.

Salomon (2001) analisou e propôs diversas formas de como modelar placas enrijecidas através de modelos computacionais baseados no MEF. Os modelos, elaborados e solucionados no software ADINA, foram baseados em elementos de viga Hermitiano, elementos de viga isoparamétrico e elementos de casca. Dentre estes modelos, duas modificações foram propostas. A primeira alterou a excentricidade dos enrijecedores do elemento Hermitiano devido à deflexão ocorrer em torno da superfície média da placa, e não sobre o eixo neutro da seção transversal. Já, a segunda modificação, tratou a placa e o enrijecedor como uma única estrutura por causa da sobreposição de superfícies que ocorria entre a placa e o enrijecedor quando utilizando apenas elementos de casca. Além disso, duas abordagens foram apresentadas envolvendo os elementos de casca: a primeira considera o acréscimo de meia espessura de placa na altura dos enrijecedores (elemento de casca rígido); e, a segunda, faz com que o enrijecedor chegue até a metade da placa, causando sobreposição de estrutura e perda de resistência (elemento de casca flexível). O estudo comprovou que todas as modificações dos modelos computacionais propostas apresentam boa concordância de resultados com o modelo computacional 3D utilizado como referência.

Banai e Pedatzur (2006) desenvolveram um algoritmo de um modelo ortotrópico de placa enrijecida para estimar a deflexão máxima ocasionada por uma carga transversal uniformemente distribuída. O modelo computacional foi baseado numa série de artigos publicado por Schade (1940, 1941, e 1951). Estes artigos geraram um novo método composto por gráficos e equações que, quando seguido um determinado número de etapas, possibilita determinar a deflexão gerada no centro da placa. Ainda, a linguagem de programação utilizada foi a *Visual Basic.NET* e o software

utilizado para obter os resultados foi o ADINA.

Sapountzakis e Mokos (2008) apresentaram uma solução geral para placas enrijecidas em sua configuração deformada. A análise deste modelo considerou a distribuição não linear da força de cisalhamento transversal da interface entre a placa e o enrijecedor; tal como a torção não uniforme dos enrijecedores. Os resultados de deflexão presentes neste trabalho foram gerados a partir do emprego do Método da Equação Análoga e por métodos numéricos iterativos.

Orozco (2009) realizou uma comparação entre duas metodologias, Método da Chapa Ortotrópica e MEF, de placas enrijecidas submetidas a uma carga transversal. As placas utilizadas apresentaram diferentes espaçamentos e uma variação da inércia dos enrijecedores quando utilizando engaste ou apoio simples em suas bordas. As análises obtidas possibilitaram determinar o comportamento das curvas do parâmetro adimensional das tensões e das deflexões. Os resultados demonstraram que as curvas derivadas da metodologia analítica fornecem bons resultados para as deflexões e para as tensões transversais dos enrijecedores quando analisado o centro da placa. Em relação às tensões longitudinais e transversais, os valores obtidos pela metodologia analítica demonstraram uma piora em relação aos resultados numéricos obtidos pelo MEF.

Silva (2010) determinou a influência da excentricidade no comportamento estrutural em placas com enrijecedores através da utilização de modelos computacionais desenvolvidos no software ANSYS, conforme pode ser observado na Fig. 1.3. As simulações utilizaram os elementos BEAM4 e BEAM44 na modelagem dos enrijecedores; e o elemento SHELL63 para a modelagem das placas. O estudo demonstrou que os modelos excêntricos apresentam esforços axiais maiores do que os concêntricos, e, desconsiderar a excentricidade, na ligação placa-enrijecedor pode causar a superestimação dos resultados dos deslocamentos e das tensões.

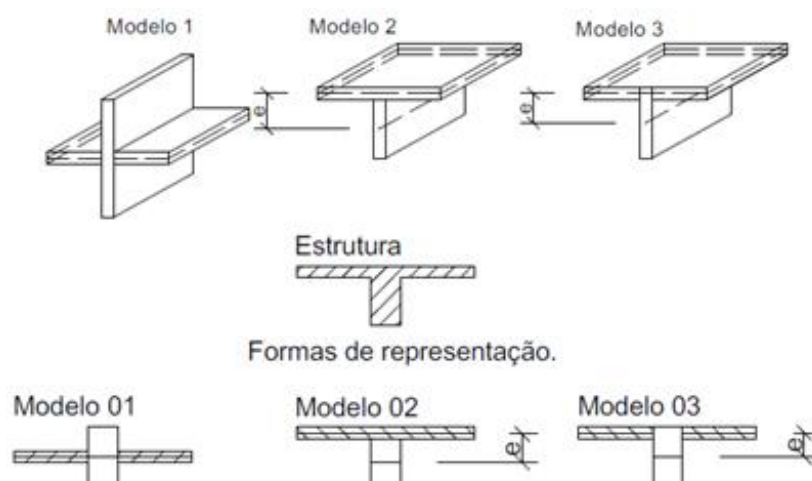


Figura 1.3. – Representação das excentricidades entre as placas e os enrijecedores (Fonte: Silva, 2010)

Sapountzakis e Dikaros (2012) apresentam uma solução geral para a análise não linear de placas enrijecidas com seção transversal duplamente simétrica. O modelo proposto, baseado no Método da Equação Análoga, trata os enrijecedores de forma isolada da placa através de seções fictícias que se encontram nesta interface. O objetivo destas seções consiste em captar os esforços cisalhantes longitudinais e transversais presentes entre a placa e os enrijecedores. Além disso, os resultados numéricos de deflexão demonstrado neste trabalho utilizam a linguagem FORTRAN.

Bhaskar e Pydah (2014) apresentam uma solução elástica analítica para placas enrijecidas. A placa é modelada como um sólido 3D e os enrijecedores são tratados como um problema de tensão plana. O motivo disto é para considerar a deformação causada pela força cisalhante e a inércia rotacional. Os resultados apresentados quantificaram a contribuição individual da placa e dos enrijecedores na deformação total da estrutura, por meio da variação geométrica e das propriedades do material.

Pydah e Bhaskar (2015) apresentam uma nova abordagem analítica e um estudo paramétrico para problemas estáticos e dinâmicos de placas com um enrijecedor descentralizado. Esta abordagem considera a flexão lateral e a torção dos enrijecedores através da Teoria Clássica de Euler-Bernoulli e pela Teoria de torção de Saint Venant, respectivamente. Os resultados obtidos demonstraram que as cinemáticas do enrijecedor não necessitam da utilização de modelos tridimensionais para a obtenção de resultados com boa precisão.

Troina (2017) apresentou uma otimização geométrica pelo Método do Design Construtal, via Busca Exaustiva, de modelos computacionais de placas enrijecidas submetidas a carregamentos

transversais desenvolvidas no software ANSYS. Os modelos computacionais foram baseados nos elementos finitos bidimensionais SHELL93 e tridimensionais SOLID95. O estudo avaliou a influência da altura de enrijecedor por espessura de enrijecedor h_s/t_s e do parâmetro da fração de volume de material transformada em enrijecedor ϕ . A pesquisa determinou que a redistribuição do material empregado na construção de placas enrijecidas possibilita uma melhora significativa na rigidez estrutural.

1.2. Objetivos

O objetivo geral desta dissertação será realizar uma análise numérica pelo software ANSYS 18.2 (versão acadêmica), que é baseado no MEF, de um modelo computacional para placas finas isotrópicas com enrijecedores submetidas a um carregamento transversal uniformemente distribuído, de modo que seja considerada a condição de contorno de simetria.

Os objetivos específicos, no desígnio da realização do objetivo geral, serão:

- a) Determinar o número de elementos finitos necessários para a estabilização de um teste de convergência de malha que atenda a acurácia necessária para a análise de deflexão e análise da tensão de von Mises do modelo computacional que utiliza a condição de contorno de simetria.
- b) Desenvolver modelos de placas enrijecidas baseadas no elemento finito de casca SHELL281. Nestes modelos, na etapa da verificação, haverá um comparativo da placa completa com o seu equivalente de 1/4 de placa com condição de contorno de simetria.
- c) Realizar alterações nos parâmetros geométricos da placa enrijecida, através da aplicação do Método Design Construtal, no intuito de minimizar a deflexão máxima e a tensão máxima de von Mises dos modelos computacionais de placas que utilizam a condição de contorno de simetria.
- d) Avaliar a influência do número de enrijecedores longitudinais e transversais na minimização das deflexões máximas e das tensões máximas de von Mises sofridas pela placa com a condição de contorno de simetria.
- e) Avaliar a influência da relação entre altura e a espessura dos enrijecedores quanto à minimização das deflexões e das tensões sofridas pela placa enrijecida com a condição de contorno de simetria.
- f) Analisar a influência estrutural da transformação de 30% do volume da placa em enrijecedores quanto à minimização da deflexão e da tensão de von Mises.

1.3. Metodologia

O presente trabalho apresenta o desenvolvimento de um modelo computacional de placas enrijecidas empregando a condição de contorno de simetria. O modelo computacional foi desenvolvido no software ANSYS, baseado no MEF, empregando o elemento finito de casca SHELL281. Além disso, empregando o Método Design Construtal, este modelo com simetria foi aplicado em uma avaliação geométrica de placas enrijecidas submetidas a um carregamento transversal uniformemente distribuído (estudo de caso).

Inicialmente, foi desenvolvido um teste de convergência de malha no intuito de determinar a partir de que ponto o número de elementos finitos deixa de influenciar nos resultados numéricos obtidos para a análise de deflexão e tensão de von Mises. Para isto, foi desenvolvido um teste com a placa enrijecida com maior complexidade geométrica considerada nesta dissertação, ou seja, a placa com 6 enrijecedores longitudinais e 6 transversais P(6,6) e com $h_s/t_s = 66,3476$. Além disso, foi considerada a condição de vinculação de engaste nas quatro bordas da placa e aplicada à condição de contorno de simetria, possibilitando que as simulações utilizassem apenas 1/4 de placa no domínio computacional. Neste teste foi constatada uma independência de malha para a análise da deflexão; mas, para a análise da tensão de von Mises os resultados obtidos indicaram a necessidade da utilização de malhas mais refinadas devido a não ocorrência de sua estabilização. No entanto, a versão acadêmica do ANSYS limita as simulações a um uso máximo de 32.000 nós por simulação, impossibilitando que fosse atingida essa independência. Consequentemente, outros testes de convergência de malha foram realizados para as demais geometrias P(N_{ls} , N_{ts}), onde são variados os seguintes graus de liberdade: número de enrijecedores longitudinais $N_{ls} = 2, 3, 4, 5, 6$ e número de enrijecedores transversais $N_{ts} = 2, 3, 4, 5, 6$. O motivo é devido à incerteza da discrepância dos resultados numéricos obtidos na análise da tensão de von Mises. Nestes testes, optou-se em escolher sempre o menor tamanho de elemento possível.

Após, quatro casos de placas enrijecidas foram utilizados para compor o processo de verificação. Para isto, foram simuladas as seguintes placas: i) placa retangular com enrijecedores em cruz (baseada nos dados geométricos de Rossowt e Ibrahimkhail (1978) e utilizada por Silva (2010) e Troina (2017) nos seus respectivos processos de verificação dos seus modelos computacionais); ii) placa quadrada com 2 enrijecedores ortogonais (foi comparado o modelo computacional baseado no elemento finito SHELL281 com os modelos numéricos utilizados por Salomon (2001)); iii) placa com 3 enrijecedores longitudinais e 4 enrijecedores transversais (foi feito um comparativo entre os modelos numéricos baseado nos elementos finitos SHELL281 em relação ao modelo SOLID95 utilizado por Troina (2017)); e iv) placa com 4 enrijecedores

longitudinais e 5 enrijecedores transversais (foi feito um comparativo entre o modelo numérico SHELL281 em relação ao modelo SOLID95 utilizado por Troina (2017)).

Para os casos em que há a utilização da condição de contorno de apoio simples, nestes a verificação foi dividida em dois momentos. No primeiro, onde é apenas verificada a deflexão da placa, o problema foi tratado conforme os outros autores dispuseram, ou seja, sem alteração na geometria, nas propriedades dos materiais, nas condições de vinculação e na carga aplicada. Em seguida, ocorre à substituição da condição de contorno de apoio simples para engaste nas quatro bordas. Nesta etapa, será feito uma comparação dos resultados numéricos de deflexão e tensão de von Mises entre a placa completa com seu equivalente de $1/4$ de placa com simetria. Ainda, foi averiguado se o local por onde passa a simetria pode ou não influenciar no resultado (cortando nenhum enrijecedor, apenas um enrijecedor no sentido longitudinal, apenas um enrijecedor no sentido transversal, cortando um enrijecedor no sentido longitudinal e outro no sentido transversal).

Por fim, há a utilização do Método Design Construtal em conjunto com a técnica da Busca Exaustiva com o propósito definir o espaço de busca através da alteração dos parâmetros geométricos, de modo que o volume do material não sofra nenhuma alteração. Para isto, adotou-se uma placa não enrijecida como referência, de comprimento a , largura b e espessura t onde uma fração de seu volume de material ϕ é transformada em enrijecedor a partir da diminuição de sua espessura, mantendo o comprimento e a largura com valores constantes. Consequentemente, todas as geometrias analisadas possuem a mesma quantidade de material, possibilitando uma avaliação comparativa do desempenho estrutural dessas placas.

A análise envolveu placas formadas por 25 combinações de enrijecedores longitudinais e transversais, obedecendo ao formato $P(N_{ls}, N_{ts})$, variando os seguintes graus de liberdade: $N_{ls} = 2, 3, 4, 5, 6$ e $N_{ts} = 2, 3, 4, 5, 6$. Em vista disto, foram analisadas as seguintes placas: $P(2,2)$, $P(2,3)$, $P(2,4)$, $P(2,5)$, $P(2,6)$, $P(3,2)$, $P(3,3)$, $P(3,4)$, $P(3,5)$, $P(3,6)$, $P(4,2)$, $P(4,3)$, $P(4,4)$, $P(4,5)$, $P(4,6)$, $P(5,2)$, $P(5,3)$, $P(5,4)$, $P(5,5)$, $P(5,6)$, $P(6,2)$, $P(6,3)$, $P(6,4)$, $P(6,5)$ e $P(6,6)$. Sobre os enrijecedores, eles apresentam uma seção transversal retangular, espaçamentos longitudinais S_{ls} e espaçamentos transversais S_{ts} equidistantes; e, foram adotados valores comerciais de espessuras de placas de aço. Além disso, são impostas duas restrições geométricas: a altura dos enrijecedores não pode ser maior do que 0,3 m, no intuito de evitar desproporções geométricas entre a altura do enrijecedor e as dimensões laterais da placa; e a relação h_s/t_s deve ser maior do que 1 para evitar que a espessura do enrijecedor seja maior que sua altura, motivo este que descaracterizaria o enrijecedor que deve possuir altura maior do que sua espessura.

Então, o estudo de caso foi simulado numericamente de modo que foi empregado o modelo

computacional utilizando a condição de contorno de simetria. Após a simulação das 25 configurações geométricas de placas com enrijecedores, houve a elaboração de gráficos de dispersão de pontos com valores das deflexões máximas e tensões máximas de von Mises para cada combinação gerada $P(N_{ls}, N_{ts})$ em função do grau de liberdade h_s/t_s . Também, foi simulada numericamente a placa de referência sem enrijecedor, considerando a condição de contorno de simetria, e com engaste nas quatro bordas no intuito de compará-la com as demais placas enrijecidas. Ainda, uma avaliação qualitativa da forma defletida e da distribuição das tensões foi realizada dos resultados obtidos com o modelo computacional que emprega a condição de contorno de simetria em relação ao modelo que considera a placa inteira. Para isso, foi comparada a placa enrijecida P(2,6) com $h_s/t_s = 53,4905$ (melhor configuração geométrica defletida) em relação à placa P(6,2) com $h_s/t_s = 1,3581$ (pior configuração geométrica defletida), a placa P(2,5) com $h_s/t_s = 59,4087$ (melhor minimização da tensão de von Mises) em relação à placa P(6,3) com $h_s/t_s = 1,2790$ (pior minimização da tensão de von Mises) e foi considerada a placa de referência para ambas as avaliações.

1.4. Organização da dissertação

No Capítulo 1, uma introdução abrangendo todo o conteúdo abordado na realização da dissertação foi apresentada, bem como um levantamento da literatura científica existente (estado da arte) sobre o conteúdo em estudo, os objetivos referentes à pesquisa e a metodologia empregada são também apresentados.

No Capítulo 2 são apresentadas soluções analíticas empregadas para os problemas de placas (Teoria das Placas Finas de Kirchhoff), mostrando em alguns casos as possíveis soluções analíticas propostas na literatura obtidas através de simplificações e aproximações.

No Capítulo 3 é feita uma descrição do processo de Modelagem Computacional, bem como a aplicação do Método dos Elementos Finitos no software ANSYS 18.2 versão acadêmica e do modelo computacional baseado no elemento finito SHELL281.

No Capítulo 4, é apresentada a Teoria Construtal, método que foi aplicado para definir as diferentes configurações geométricas de placas com enrijecedores que foram simuladas numericamente para obtenção dos resultados de deflexão e tensão desta pesquisa.

No Capítulo 5, são apresentados as verificações, os testes de convergência de malha e os resultados numéricos obtidos pelas simulações realizadas no software ANSYS. Neste capítulo, é avaliado o efeito da variação dos graus de liberdade N_{ls} , N_{ts} e h_s/t_s e da transformação da fração de seu volume de material $\phi = 0,30$ na magnitude das deflexões e tensões que surgem nas placas

enrijecidas quando sujeitas a carregamentos transversais uniformemente distribuídos.

No Capítulo 6, são apresentadas as conclusões do estudo e sugestões para futuros trabalhos.

Também, constam a lista de referências bibliográficas (Capítulo 7) e os Apêndices (A – Teste de convergência de malha das placas enrijecidas $P(N_{ls}, N_{ts})$ e B – Resultados numéricos obtidos para cada configuração geométrica) referentes à dissertação.

2. TEORIA DE PLACAS

As placas são elementos estruturais planos, tridimensionais e, geralmente, finas, que podem estar sujeitas a carregamentos que lhe provoquem deflexão. A maioria dos casos apresenta a dimensão da espessura tão pequena, a ponto de que a análise dos deslocamentos, deformações e das tensões possa ser reduzida a um problema bidimensional. Logo, a melhor forma para realizar esta análise, por meios analíticos, será através da Teoria das Placas Finas de Kirchhoff (Bhaskar e Varadan, 2013).

Segundo Ventsel e Krauthammer (2001), o estudo por esta teoria é uma importante aplicação da teoria da elasticidade por tratar das relações de forças, deslocamentos, tensões e deformações em um corpo elástico. A deformação depende da configuração geométrica do corpo, da carga aplicada e das propriedades mecânicas de seu material. A teoria da elasticidade assume que o material é homogêneo e isotrópico, ou seja, suas propriedades mecânicas são as mesmas em todas as direções e em todos os pontos.

As propriedades de flexão da placa dependem mais de sua espessura do que das demais dimensões. De acordo com Ventsel e Krauthammer (2001), estes elementos estruturais podem ser classificados em três grupos de acordo com a relação criada entre a/t , onde a é o comprimento ou a largura da placa, enquanto que t representa a espessura da placa. Então, têm-se os seguintes intervalos:

- a) $a/t \leq 10$: são classificadas como placa espessa e a análise inclui todas as componentes de tensão, deformação e deslocamento.
- b) $a/t \geq 80$: são classificadas como membranas e são desprovidos da rigidez de flexão. As membranas transportam as cargas laterais por forças de tração axiais (e forças cisalhantes) agindo na superfície média da placa.
- c) $10 < a/t < 80$: são classificadas como placas finas e, dependendo da relação da deflexão máxima pela espessura w/t , a parte da flexão e das forças da membrana pode ser diferente. Deste modo, esse grupo subdivide-se em dois grupos, sendo eles:
 - i. Placas rígidas: apresentam uma relação de $w/t \leq 0,2$ e são consideradas placas finas flexuralmente rígidas. O carregamento transportado é bidimensional, composto pelos momentos interno de flexão, torção e pelas forças cisalhantes. Ainda, as deformações do plano médio e as forças de membrana podem ter seus valores desconsiderados.
 - ii. Placas flexíveis: apresentam uma relação de $w/t \geq 0,3$ e as deflexões laterais

são acompanhadas com o alongamento da superfície média da placa. As características desta placa são semelhantes a uma combinação das membranas com as placas enrijecidas por causa do transporte das cargas externas ocorrerem pela ação combinada dos momentos internos, forças cisalhantes e as forças de membrana. Um ponto a ser ressaltado deste tipo de classificação, é que em situações que a magnitude da deflexão máxima é maior que a espessura ($w/t > 5$), a placa apresentará as características de membrana como predominante, ou seja, a tensão de flexão poderá ser desconsiderada quando comparada com a tensão da membrana.

2.1. Teoria das placas finas e suas equações governantes

2.1.1. Teoria clássica para placas finas com pequenas deflexões

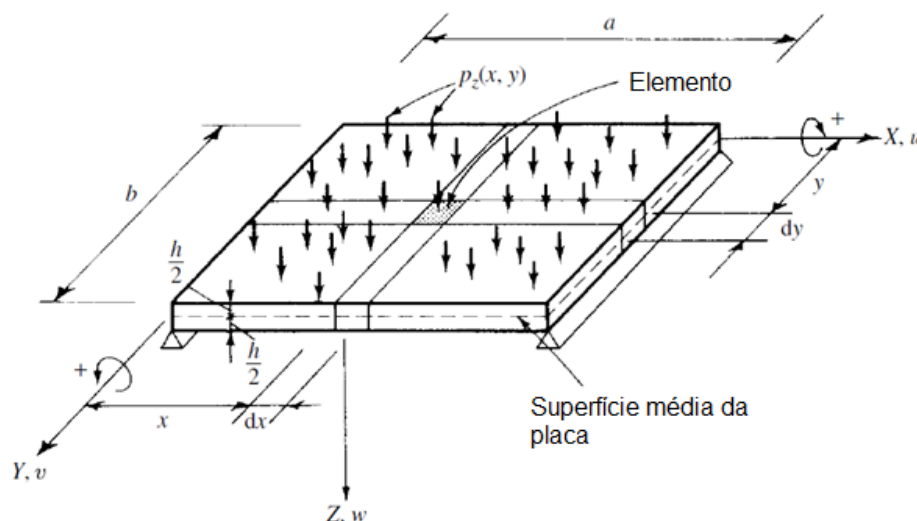
A Teoria das Placas Finas de Kirchhoff foi desenvolvida usando o método semi-inverso, em que uma estimativa é feita sobre o campo dos deslocamentos ou o campo das tensões de um sólido, permitindo bastante liberdade no campo assumido para satisfazer as equações de elasticidade. No caso das placas, o campo de deslocamento é em termos de funções desconhecidas das coordenadas de superfície (x, y) (Reddy, 2007).

Segundo Szilard (2004), algumas hipóteses devem ser respeitadas para a utilização desta teoria, tais como:

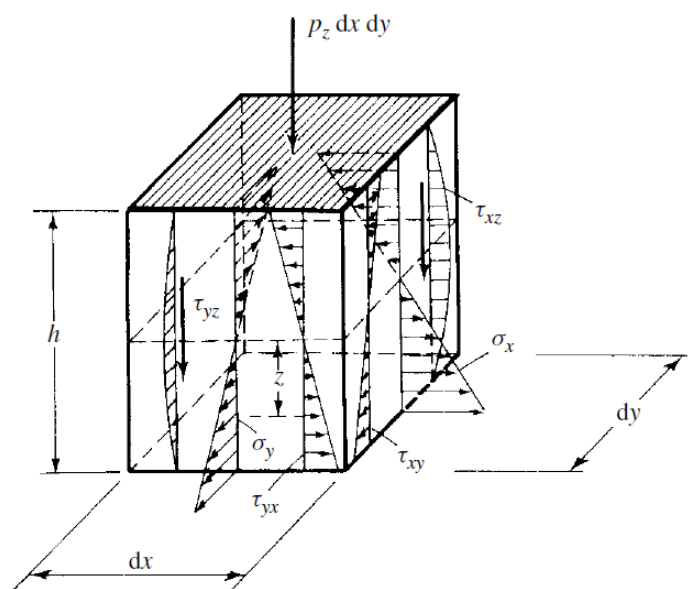
- a) O material deverá ser homogêneo, isotrópico e elástico linear.
- b) A placa, em seu estado inicial, deverá ser plana.
- c) A superfície média da placa permanece sem restrições durante a flexão.
- d) A espessura t será pequena em relação às dimensões do comprimento e da largura, de modo que seja dez vezes menor que uma destas dimensões.
- e) As deflexões transversais $w(x, y)$ não devem se equivaler a um décimo da espessura da placa.
- f) As seções planas e normais ao plano médio da placa antes de sua deformação permanecem planas e normais ao plano médio da placa defletida.
- g) A tensão normal σ_z na direção transversal à placa pode ser desconsiderada.
- h) As deformações cisalhantes γ_{yz} e γ_{xz} devem ser nulas.

Respeitando as hipóteses apresentadas, é possível reduzir um problema de placa tridimensional para bidimensional, permitindo que a equação governante da placa possa ser derivada de uma forma concisa e direta (Ventsel e Krauthammer, 2001). A utilização de um sistema

de coordenadas cartesianas é o mais conveniente para resolver problemas que envolvem placas retangulares (Fig. 2.1), pois os carregamentos externos e internos, as tensões e as componentes da deflexão u , v e w são considerados nas direções dos eixos x , y e z (Szilard, 2004).



(a)



(b)

Figura 2.1. – (a) Placa retangular submetida a um carregamento transversal e (b) Tensões internas de um elemento infinitesimal de placa (Fonte: adaptado de Szilard, 2004)

De acordo com Reddy (2007), as equações governantes de um corpo elástico podem ser classificadas nas seguintes categorias: Cinemáticas, Cinéticas, Termodinâmicas e Constitutivas. As equações Cinemáticas abordam as mudanças geométricas ou deformações em um corpo sem a consideração das forças agindo sobre ele. A Cinética trata do equilíbrio estático ou dinâmico das forças atuando sobre uma estrutura.

Os princípios termodinâmicos dizem respeito à conservação de energia e às relações entre calor, trabalho mecânico e propriedades termodinâmicas de uma estrutura. As equações Constitutivas descrevem o comportamento constitutivo do corpo através de variáveis que relacionam a descrição cinética com as das descrições cinemáticas e termodinâmicas. Além disso, essas equações são complementadas por condições de contorno e condições iniciais impostas as estruturas.

Portanto, na sequência serão demonstradas as equações fundamentais para placas com pequenas deflexões.

2.1.2. Equações Cinéticas

Segundo Szilard (2004), para a obtenção da equação de equilíbrio de um elemento de placa (Fig. 2.1 – b), será adotada uma placa sujeita a carregamentos transversais. Os esforços internos e externos, presentes na superfície média da placa podem ser observados na Fig. 2.2.

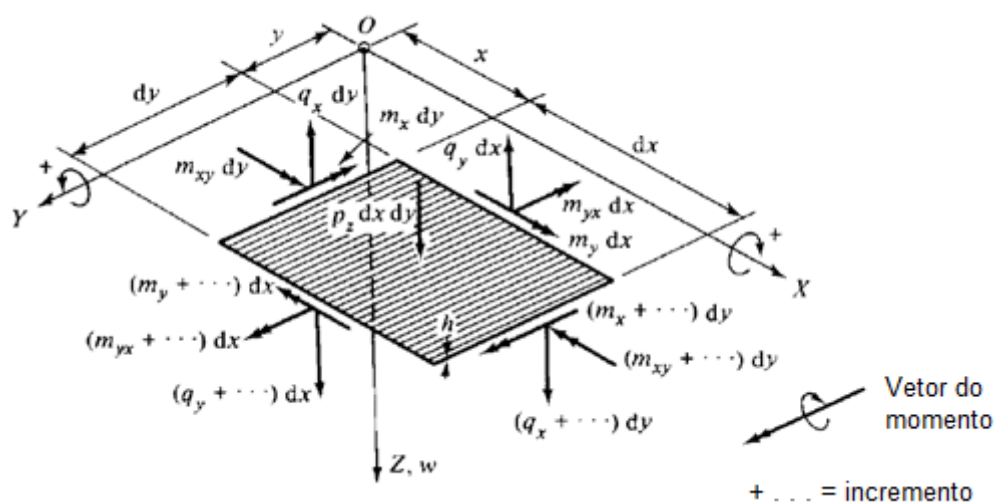


Figura 2.2. – Esforços externos e internos na superfície média do elemento de placa (Fonte: adaptado de Szilard, 2004)

Inicialmente, será expresso o somatório de todos os momentos em torno do eixo y :

$$\left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx\right) dy - m_x dy + \left(m_{yx} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy\right) dx - m_{yx} dx - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx\right) dy \frac{dx}{2} - q_x dy \frac{dx}{2} = 0 \quad (2.1)$$

Após, o termo $1/2(\partial q_x/\partial x)(dx)^2 dy$ é desconsiderado da Eq. (2.1). Então, obtém-se:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy dx - q_x dx dy = 0 \quad (2.2)$$

E, simplificando os termos $dx dy$:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = q_x \quad (2.3)$$

De uma forma similar, é obtida a equação do somatório dos momentos em torno do eixo x :

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = q_y \quad (2.4)$$

Em relação ao somatório das forças na direção z , tem-se:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial q_y}{\partial y} dx dy + p_z dx dy = 0 \quad (2.5)$$

E, simplificando os termos $dx dy$:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = -p_z \quad (2.6)$$

Por fim, há a substituição dos termos das Eqs. (2.3) e (2.4) na Eq. (2.6), salientando que os momentos de torção são iguais, ou seja, $m_{yx} = m_{xy}$:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p_z(x, y) \quad (2.7)$$

De acordo com Szilard (2004), os momentos fletores m_x e m_y e de torção m_{xy} presentes na Eq. (2.7) dependem das equações da deformação.

2.1.3. Equações Cinemáticas, Equações Constitutivas e Equação governante

Com base na hipótese cinemática ‘f’ da Teoria das Placas Finas de Kirchhoff é possível

descrever os campos de deslocamento das placas à flexão, como (Vaz, 2011):

$$\begin{cases} u(x, y, z) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y, z) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \end{cases} \quad (2.8)$$

onde $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ e $w(x, y)$ são as componentes do vetor de deslocamento de pontos localizados na superfície média da placa, ocorrendo nas direções x , y e z , respectivamente.

Na sequência, são demonstradas as equações de deformação de um elemento infinitesimal de um plano de cota z paralelo ao plano médio da placa, que pode ser obtidos a partir da Eq. (2.8). Logo, tem-se:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} = -z w_{xx} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y} = -z w_{yy} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x} = -2z w_{xy} \end{cases} \quad (2.9)$$

onde ε_x corresponde à deformação normal na direção do eixo x , ε_y corresponde à deformação normal na direção do eixo y e w_{xx} , w_{yy} e w_{xy} são componentes do vetor que contém as curvaturas da Teoria das Placas Finas de Kirchhoff relativas a um ponto do plano médio da placa que está na mesma reta vertical que o ponto onde foi calculado o vetor das deformações.

Ainda, para placas submetidas à flexão, assim como ocorre nas vigas, os momentos fletores e esforços cortantes também atuam na deflexão das placas finas. De modo que este último contribui com a produção de tensões cisalhantes verticais e distorções que podem ser expressas na seguinte forma:

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} = w_y - w_y = 0 \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z} = w_x - w_x = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Em relação às equações constitutivas, que relacionam as componentes de tensão com as componentes de deformação, a sua aplicação considera a lei de Hooke, o efeito de Poisson e que estas estruturas se encontram sob o estado plano de tensão por causa da tensão normal σ_z ser nula. Consequentemente, as componentes de tensão que caracterizam este estado são σ_x , σ_y e τ_{xy} , que representam, respectivamente, a tensão normal na direção x , a tensão normal na direção y e a tensão

cisalhante no plano xy . Além disso, dois parâmetros são suficientes para descrever o comportamento mecânico de estruturas com material isotrópico e linear-elástico: o módulo de elasticidade E e o coeficiente de Poisson ν (Ventsel e Krauthammer, 2001; Vaz, 2011).

Então, as equações constitutivas podem ser expressas na seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

ou, na sua forma sucinta:

$$\sigma = C_k \varepsilon_x = -z C_k k_x \quad (2.12)$$

onde k_x é o vetor que contém as curvaturas da Teoria das Placas Finas de Kirchhoff relativas a um ponto do plano médio da placa que está na mesma reta vertical que o ponto onde foi calculado o vetor das deformações ε e C_k é a matriz constitutiva para o estado plano de tensão, definida por:

$$C_k = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Após, há a representação dos esforços internos por unidade de comprimento num sistema de coordenadas cartesianas:

$$\begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-(\frac{t}{2})}^{+(\frac{t}{2})} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z \, dz \quad (2.14)$$

E, substituindo a Eq. (2.11) na Eq. (2.14):

$$\begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = -\frac{t^3}{12} \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

ou, na sua forma sucinta:

$$m_k = \frac{t^3}{12} C_k k_x = -D_k k_x \quad (2.16)$$

onde m_k é um vetor do momento num ponto da superfície média da placa e D_k é a matriz constitutiva ou de rigidez à flexão de placas pela Teoria das Placas Finas de Kirchhoff, expressa por:

$$D_k = \frac{t^3}{12} C_k \quad (2.17)$$

E, de acordo com as hipóteses da Teoria das Placas Finas de Kirchhoff, as tensões cisalhantes também devem ser nulas devido às deformações cisalhantes equivalerem à zero. Logo:

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} = 0 \\ \tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz} = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

Assim como os esforços cortantes q_x e q_y , visto que eles são obtidos a partir da integração das tensões cisalhantes e pelas equações de equilíbrios estáticas (Vaz, 2011).

$$\begin{cases} q_x = \int_{-\left(\frac{t}{2}\right)}^{+\left(\frac{t}{2}\right)} \tau_{xz} dz = 0 \\ q_y = \int_{-\left(\frac{t}{2}\right)}^{+\left(\frac{t}{2}\right)} \tau_{yz} dz = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

De acordo com Szilard (2004), a Equação governante da placa pode ser obtida a partir da substituição das Eq. (2.15) na Eq. (2.7):

$$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} = \frac{p_z(x, y)}{D_k} \quad (2.20)$$

ou na forma em que é considerado o operador diferencial Laplaciano:

$$\nabla^2(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2} \quad (2.21)$$

2.1.4. Condição de contorno

As condições de contorno são as condições conhecidas da superfície da placa que devem ser prescritas a fim de obter a solução da equação governante correspondente a um problema específico. A Eq. (2.20), por ser de quarta ordem, necessita de duas condições de contorno a serem satisfeitas para cada borda. As condições de contorno podem ser classificadas em condição de contorno geométrica, quando seu emprego estiver relacionado aos deslocamentos (deflexão transversal ou rotação do plano médio da placa); ou como condição de contorno estática, por estar relacionada às componentes dos esforços internos (flexão, torção e forças de cisalhamento

transversal); ou condição de contorno mista, por apresentar considerações tanto em relação aos deslocamentos quanto aos esforços internos (Ventsel e Krauthammer, 2001; Szilard, 2004). A Figura 2.3 ilustra as principais condições de contorno utilizadas nos problemas de placas finas.

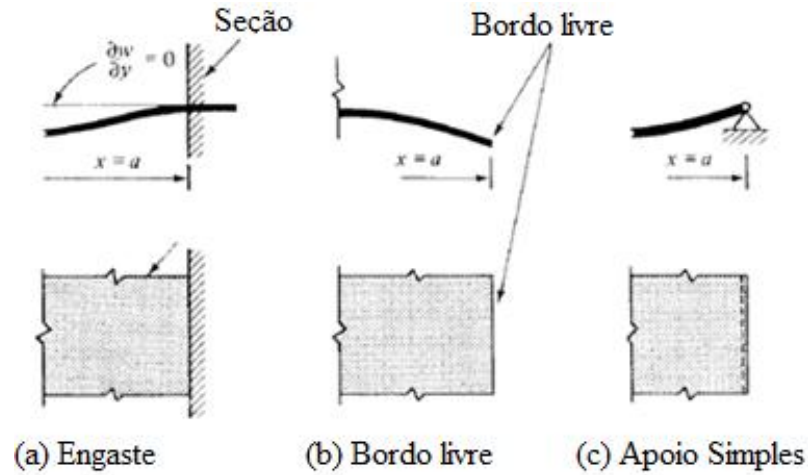


Figura 2.3. – Condições de contorno utilizadas nas placas (Fonte: adaptado de Szilard, 2004)

Segundo Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), a aplicação da condição de contorno de engaste anula os valores de deslocamento e de inclinação nas bordas de uma placa retangular de comprimento a e largura b . Assim, é possível representar matematicamente essa condição de contorno na seguinte forma:

$$\begin{aligned} (w)_x = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_x = 0 \quad \text{em} \quad x = 0 \text{ e } x = a \\ (w)_y = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y = 0 \quad \text{em} \quad y = 0 \text{ e } y = b \end{aligned} \quad (2.22)$$

Segundo Szilard (2004), para os casos em que a condição de contorno utilizada é a de bordo livre, os momentos de flexão assim como os esforços cortantes devem equivaler à zero. Logo, tem-se:

$$\begin{aligned} (m_x)_x = (v_x)_x = 0 \quad \text{em} \quad x = 0 \text{ e } x = a \\ (m_y)_y = (v_y)_y = 0 \quad \text{em} \quad y = 0 \text{ e } y = b \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde v_x e v_y são os esforços cortantes por unidade de comprimento que atuam nos planos normais aos eixos cartesianos expressos na Eq. (2.24).

$$\begin{aligned}
v_x = q_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} &= -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] & \text{em} & \quad x = 0 \text{ e } x = a \\
v_y = q_y + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x} &= -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] & \text{em} & \quad y = 0 \text{ e } y = b
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Um ponto a se salientar da Eq. (2.24), é da possibilidade de transformar os termos $\partial m_{xy}/\partial y$ e $\partial m_{yx}/\partial x$ (referentes aos momentos de torção) nas forças suplementares de Kirchhoff q_x^* e q_y^* , respectivamente. A transformação faz com que estes termos passem a contribuir ao esforço cortante total do bordo da placa ao invés de contribuir ao esforço do momento torsor. Portanto, a equação referente à condição de contorno de bordo livre pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_x &= 0, & \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_x &= 0 & \text{em} & \quad x = 0 \text{ e } x = a \\
\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_y &= 0, & \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_y &= 0 & \text{em} & \quad y = 0 \text{ e } y = b
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Sobre a condição de contorno de apoio simples, definida na Eq. (2.26), esta apresenta o deslocamento transversal e o momento fletor nulos nas suas bordas.

$$\begin{aligned}
(w)_x &= 0, & (m_x)_x &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_x = 0 & \text{em} & \quad x = 0 \text{ e } x = a \\
(w)_y &= 0, & (m_y)_y &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_y = 0 & \text{em} & \quad y = 0 \text{ e } y = b
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Com relação aos efeitos das forças suplementares de Kirchhoff, para os casos de placas retangulares ou quadradas que utilizam a condição de contorno de apoio simples, a utilização de reforços nos cantos da placa se fazem necessários devido ao surgimento de uma força resultante, apresentada na Eq. (2.27), que contribui ao seu levantamento e aos esforços cortantes. A Figura 2.4 ilustra este efeito ocasionado pela força resultante.

$$R_0 = 2m_{xy} = -2D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{2.27}$$

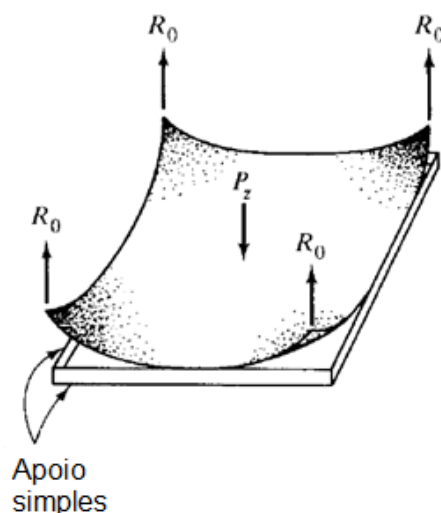


Figura 2.4. – Placa sem ancoramento nos cantos (Fonte: adaptado de Szilard, 2004)

2.2. Soluções para equações diferenciais governantes

2.2.1. Solução de Navier para placas sem enrijecedores com apoio simples

A ideia básica deste método é a procura da solução da deflexão $w(x,y)$ na forma de uma série trigonométrica dupla para placas com apoio simples (Fig. 2.5), de modo que as condições de contorno sejam satisfeitas *a priori* e a equação diferencial governante seja reduzida em simples equações algébricas (Bhaskar e Varadan, 2013).

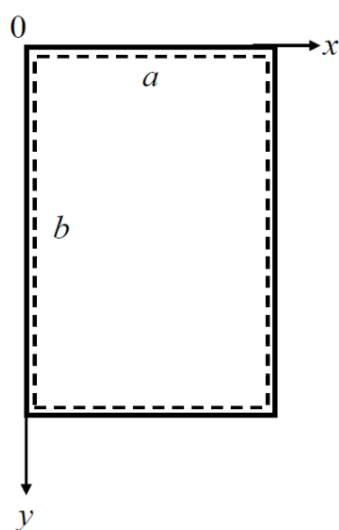


Figura 2.5. – Placa retangular com apoios simples (Fonte: retirado de Bhaskar e Varadan, 2013)

De acordo com Szilard (2004), as condições de contorno utilizadas para a solução da placa com apoio simples são:

$$\begin{aligned} (w)_{x=0, x=a} &= 0 \\ (w)_{y=0, y=b} &= 0 \\ (m_x)_{x=0, x=a} &= 0 \\ (m_y)_{y=0, y=b} &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Na sequência, é apresentada a equação da deflexão para qualquer tipo de carregamento na forma de uma série trigonométrica dupla:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.29)$$

Segundo Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), o cálculo para a obtenção do coeficiente a_{mn} , desta série, é necessário multiplicar ambos os lados da equação por $\sin(n'\pi y/b) dy$ e desenvolver uma integral de 0 até b, expressa por:

$$\begin{cases} \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n'\pi y}{b} dy = 0 & \text{quando } n \neq n' \\ \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n'\pi y}{b} dy = \frac{b}{2} & \text{quando } n = n' \end{cases} \quad (2.30)$$

Portanto, foi obtida a seguinte equação:

$$\int_0^b w(x, y) \sin \frac{n'\pi y}{b} dy = \frac{b}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn'} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.31)$$

E, multiplicando ambos os lados da Eq. (2.31) por $\sin(m'\pi x/a) dx$ e integrando de 0 até a:

$$\int_0^a \int_0^b w(x, y) \sin \frac{m'\pi x}{a} \sin \frac{n'\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{4} a_{m'n'} \quad (2.32)$$

onde

$$a_{m'n'} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m'\pi x}{a} \sin \frac{n'\pi y}{b} dx dy \quad (2.33)$$

Realizando a integração na Eq. (2.33) para uma carga distribuída, é possível determinar o coeficiente de série trigonométrica e representar o carregamento dado, como:

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.34)$$

onde a_{mn} corresponde ao coeficiente para cargas transversais uniformemente distribuída, que é definido como:

$$a_{mn} = \frac{4q_o}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{16q_o}{\pi^2 mn} \quad (2.35)$$

De acordo com Szilard (2004), ainda é possível obter as equações referentes aos momentos fletores m_x e m_y e ao momento de torção m_{xy} :

$$\begin{aligned} m_x &= \pi^2 D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + v \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right] a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ m_y &= \pi^2 D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n}{b}\right)^2 + v \left(\frac{m}{a}\right)^2 \right] a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ m_{xy} &= -\pi^2 D (1 - v) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{mn}{ab} a_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Assim como as forças cisalhantes q_x e q_y :

$$\begin{aligned} q_x &= \frac{\pi^3 D}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ m \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + v \left(\frac{n}{b}\right)^2 + (1 - v) \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right] \right\} \times a_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ q_y &= \frac{\pi^3 D}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n \left[\left(\frac{n}{b}\right)^2 + v \left(\frac{m}{a}\right)^2 + (1 - v) \left(\frac{m}{a}\right)^2 \right] \right\} \times a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \quad (2.37)$$

2.2.2. Placas sem enrijecedores com engaste nas quatro bordas

De acordo com Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), a deflexão central e os momentos fletores de uma placa sem enrijecedor e engastada nas quatro bordas sujeita a um carregamento transversal uniforme serão simétricos em relação aos eixos de coordenadas expostos na Fig. 2.6, isto é, $(M_y)_{y=b/2} = (M_y)_{y=-b/2}$ e $(M_x)_{x=a/2} = (M_x)_{x=-a/2}$. Quanto às equações da deflexão central $(w)_{x=0, y=0}$ da placa, do momento fletor no centro $(M_y)_{x=0, y=0}$ e $(M_x)_{x=0, y=0}$ e nas bordas $(M_y)_{x=0, y=b/2}$ e $(M_x)_{x=a/2, y=0}$ da placa, a obtenção de suas equações, expostos na Tab. 2.1, ocorreu de forma análoga à Solução de Navier.

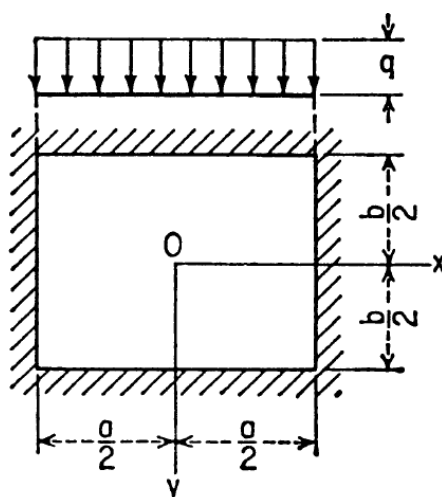


Figura 2.6. – Placa retangular com engaste e sujeita a um carregamento transversal uniforme
(Fonte: retirado de Timoshenko e Woinowsky-Krieger, 1959)

Tabela 2.1. Deflexão central e momentos de flexão de uma placa engastada nas quatro bordas
(Fonte: retirado de Timoshenko e Woinowsky-Krieger, 1959).

b/a	$(w)_{x=0, y=0}$	$(M_y)_{x=0, y=0}$	$(M_x)_{x=0, y=0}$	$(M_y)_{x=0, y=b/2}$	$(M_x)_{x=a/2, y=0}$
1,0	$0,00126qa^4/D$	$0,0231qa^2$	$0,0231qa^2$	$-0,0513qa^2$	$-0,0513qa^2$
1,1	$0,00150qa^4/D$	$0,0231qa^2$	$0,0264qa^2$	$-0,0538qa^2$	$-0,0581qa^2$
1,2	$0,00172qa^4/D$	$0,0228qa^2$	$0,0299qa^2$	$-0,0554qa^2$	$-0,0639qa^2$
1,3	$0,00191qa^4/D$	$0,0222qa^2$	$0,0327qa^2$	$-0,0563qa^2$	$-0,0687qa^2$
1,4	$0,00207qa^4/D$	$0,0212qa^2$	$0,0349qa^2$	$-0,0568qa^2$	$-0,0726qa^2$
1,5	$0,00220qa^4/D$	$0,0203qa^2$	$0,0368qa^2$	$-0,0570qa^2$	$-0,0757qa^2$
1,6	$0,00230qa^4/D$	$0,0193qa^2$	$0,0381qa^2$	$-0,0571qa^2$	$-0,0780qa^2$
1,7	$0,00238qa^4/D$	$0,0182qa^2$	$0,0392qa^2$	$-0,0571qa^2$	$-0,0799qa^2$
1,8	$0,00245qa^4/D$	$0,0174qa^2$	$0,0401qa^2$	$-0,0571qa^2$	$-0,0812qa^2$
1,9	$0,00249qa^4/D$	$0,0165qa^2$	$0,0407qa^2$	$-0,0571qa^2$	$-0,0822qa^2$
2,0	$0,00254qa^4/D$	$0,0158qa^2$	$0,0412qa^2$	$-0,0571qa^2$	$-0,0829qa^2$
∞	$0,00260qa^4/D$	$0,0125qa^2$	$0,0417qa^2$	$-0,0571qa^2$	$-0,0833qa^2$

Na Tab. 2.1 q é o valor da carga transversal uniformemente distribuída, a é o comprimento da placa e D é a matriz constitutiva ou de rigidez (Eq. (2.38)) à flexão das placas.

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2.38)$$

2.3. Placas com enrijecedores

As placas com enrijecedores (Fig. 2.7 (a)) podem apresentar uma maior resistência com uma quantidade relativamente menor de material do que as placas que não contem nenhum tipo de reforço, tornando-as uma estrutura econômica por apresentar uma melhora na resistência em relação ao seu peso. A utilização dessa estrutura pode ocorrer na engenharia de construção, por exemplo, nas lajes de concreto armado com vigas unidirecionais ou bidirecionais (Fig. 2.7 (b)) frequentemente usadas nos piso dos edifícios. Na engenharia civil, os conveses das pontes rodoviárias geralmente consistem de placas enrijecidas com nervuras retangulares, triangulares ou trapezoidais. Também, o uso das placas enrijecidas é indispensável em estruturas navais e aeroespaciais. Isto é, esta estrutura pode ser encontrada no casco, no convés e na parte inferior dos navios; e, inclusive, nas superestruturas navais. Da mesma forma nas estruturas das aeronaves, pois as asas e a fuselagem são compostas principalmente por placas enrijecidas (Szilard, 2004; Shanmugam e Wang, 2006).

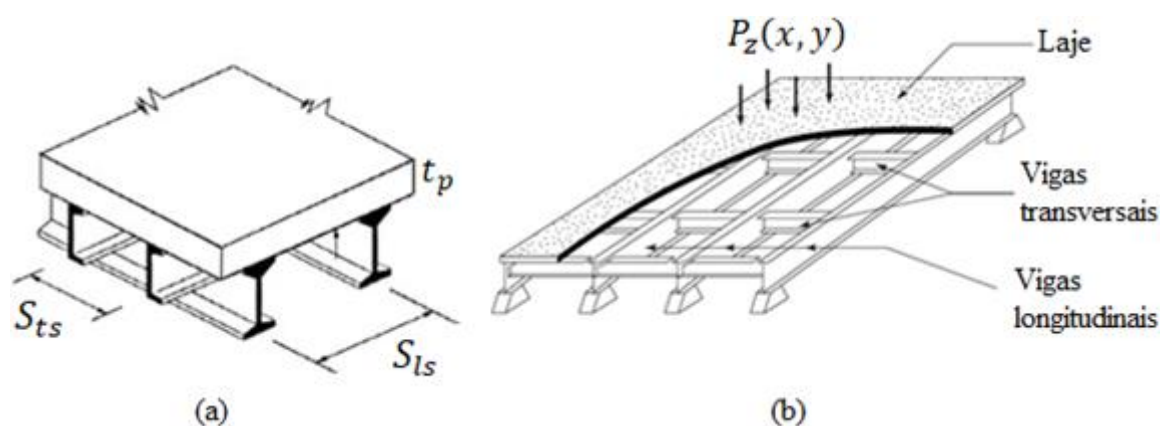


Figura 2.7. – (a) Placa enrijecida; e, (b) sistema laje-viga (Fonte: adaptado de Szilard, 2004)

De acordo com Salomon (2001), diferentes abordagens para a análise de placas com enrijecedores podem ser utilizadas, destacando o modelo de placa ortotrópica, utilizado principalmente na obtenção de soluções por meios analíticos; e o modelo de sistema placa-enrijecedor, bastante utilizado nos métodos numéricos.

Com relação ao modelo ortotrópico, a placa e os enrijecedores são tratados como materiais

anisotrópicos que apresentam três planos mutualmente perpendiculares em relação às suas propriedades elásticas, ou seja, são ortogonalmente anisotrópicos (as propriedades do material variam quando medidas por diferentes direções). Além disso, as placas enrijecidas fabricadas com materiais isotrópicos também podem ser analisadas como um modelo ortotrópico. Para isso, os enrijecedores devem ser dispostos próximos entre si e a estrutura ser tratada como um modelo homogêneo ortotrópico de modo que a placa apresente uma espessura constante e os enrijecedores sejam uma camada adicional que foi anexada à placa original (Ventsel e Krauthammer, 2001; Shanmugam e Wang, 2006).

Para considerar a flexão deste modelo, de acordo com Szilard (2004), deve-se assumir que o número de constantes elásticas independentes coincida com os eixos de coordenadas x e y e que se situem no plano médio da placa. Desse modo, têm-se as seguintes constantes elásticas: Módulo de elasticidade longitudinal E_x (na direção x) e E_y (na direção y) e o Coeficiente de Poisson ν_x (na direção x) e ν_y (na direção y). Assim, é obtido um novo conjunto de equações constitutivas (relações tensão-deformação) que reflitam as propriedades ortotrópica desse modelo, expostos na Eq. (2.39).

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E_x}{1 - \nu_x \nu_y} (\varepsilon_x + \nu_y \varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E_y}{1 - \nu_x \nu_y} (\varepsilon_y + \nu_x \varepsilon_x) \\ \tau = G_{xy} \gamma \end{cases} \quad (2.39)$$

onde G_{xy} é o módulo de cisalhamento dos materiais ortotrópico que pode ser expresso em termos de E_x e E_y , conforme pode ser visto na Eq. (2.40).

$$G_{xy} \approx \frac{\sqrt{E_x E_y}}{2(1 + \sqrt{\nu_x \nu_y})} \approx \frac{E}{2(1 + \sqrt{\nu_x \nu_y})} \quad (2.40)$$

Após, para obter os momentos fletores m_x e m_y e o momento de torção m_{xy} para o modelo ortotrópico deve ser substituído e integrado a Eq. (2.39) na Eq. (2.14). Consequentemente, são obtidas as seguintes equações:

$$m_x = D_x \left(\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \nu_y \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} \right) \quad (2.41)$$

$$m_y = D_y \left(\frac{\delta^2 w}{\delta y^2} + \nu_x \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} \right) \quad (2.42)$$

$$m_{xy} = -2D_t \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} \quad (2.43)$$

onde D_x e D_y são a rigidez a flexão da placa ortotrópica nas direções x e y , respectivamente expostas na Eqs (2.44) e (2.45); e D_t é a rigidez a torção da placa ortotrópica exposta na Eq. (2.46).

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)} \quad (2.44)$$

$$D_y = \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)} \quad (2.45)$$

$$D_t = G_{xy} \frac{h^3}{12} \quad (2.46)$$

Portanto, para a obtenção da equação governante do modelo ortotrópico das placas a flexão, deve-se substituir as Eqs. (2.41), (2.42) e (2.43) na Eq. (2.7). Desse modo, é obtida a seguinte equação:

$$D_x \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2B \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} = p_z(x, y) \quad (2.47)$$

onde B é a rigidez à torção efetiva do modelo ortotrópico das placas expresso na Eq. (2.48).

$$B = \frac{1}{2} (\nu_y D_x + \nu_x D_y + 4D_t) \quad (2.48)$$

Um exemplo de aplicação pode ser encontrado em de Melo (2016), Kurrer (2018) e em Donin e Machado (2018).

3. MODELAGEM COMPUTACIONAL

A modelagem é a representação de uma construção e funcionamento de um sistema que deve permitir ao analista prever os efeitos de mudança, de forma que esse modelo apresente uma aproximação com a realidade e incorpore a maioria das complexidades encontradas no problema proposto. A obtenção de um bom modelo ocorre quando há um balanço entre realidade e simplicidade, em que é importante realizar uma verificação ou validação através de técnicas que simulem as condições conhecidas de entrada com as de saída do sistema (Maria, 1997).

A simulação numérica, por sua vez, pode ser definida como uma técnica para conduzir experimentos envolvendo certos tipos de modelos matemáticos e lógicos num certo período. É a partir dela que ocorre a coleta de informações que possibilita: compreender melhor o sistema analisado e aprimora-lo; entender a interação entre suas variáveis e perceber qual delas alcança o efeito desejado; e, de expor o sistema a novos ambientes e observar seu comportamento (Singh, 2009).

De acordo com Maria (1997), algumas etapas devem ser seguidas para desenvolver uma análise por um sistema numérico (Fig. 3.1), tais como:

- a) Identificação do problema físico e a definição do objetivo da análise;
- b) Formulação matemática, que tende a envolver as condições de contorno e o problema como um todo (ou parcial quando se estiver considerando a condição de contorno de simetria);
- c) Coleta e processamento das informações obtidas pelo sistema real, tais como as variáveis de entrada (por exemplo, coeficiente de Poisson ou módulo de elasticidade);
- d) Implementação da formulação e desenvolvimento do modelo, através da aplicação das informações obtidas previamente por métodos analíticos ou numéricos;
- e) Verificação e/ou validação do modelo, no intuito de avaliar a confiabilidade quanto aos resultados gerados. A avaliação pode ocorrer através da comparação dos resultados do modelo numérico com resultados obtidos por meios analíticos ou de outros modelos que já tenham sido verificados ou validados.
- f) Estabelecer condições experimentais para cada simulação, isto é, alterar as características do problema, pois será possível obter uma gama de resultados e ver qual deles aperfeiçoa a característica procurada.

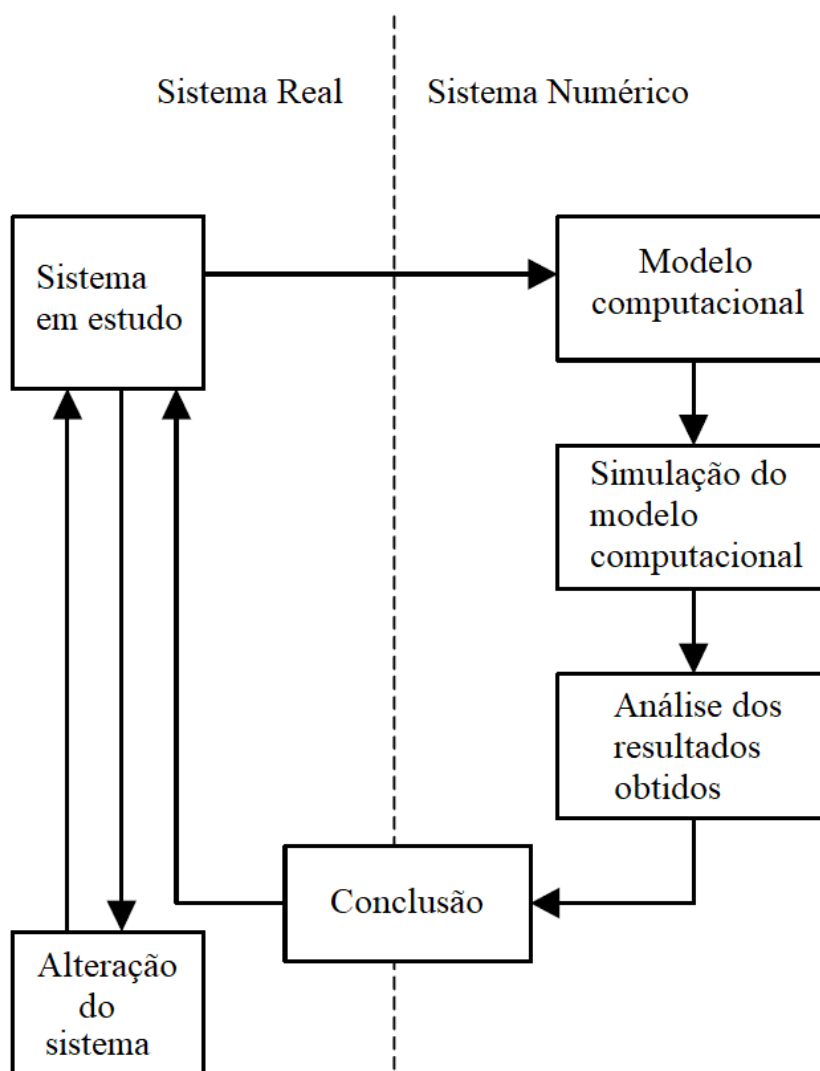


Figura 3.1. – Etapas de uma análise por um sistema numérico (Fonte: Maria, 1997)

3.1. Método dos elementos finitos

3.1.1. Introdução

A análise pelo método dos elementos finitos (MEF) é uma técnica numérica em que todas as complexidades do problema são mantidas de acordo com o problema proposto, obtendo, no final, um valor aproximado. O método, por apresentar uma grande flexibilidade e diversidade na sua aplicação, tem sido amplamente utilizado por diversos campos de pesquisa nas engenharias (Tab. 3.1). De forma que, pelo avanço tecnológico dos hardwares, a queda do valor dos computadores e o surgimento de softwares comerciais (STAAD-PRO, GT-STRUDEL, NASTRAN, NISA e ANSYS); estes tiveram uma grande contribuição na disseminação de sua utilização (Bhavikatti, 2005).

Tabela 3.1. Aplicações do MEF nas áreas de pesquisa das engenharias envolvendo problemas de equilíbrio (adaptado de RAO, 2011).

Área de estudo	Problemas de equilíbrio
Estruturas na engenharia civil	Análise estática de treliças, placas, cascas, shear wall, pontes e estruturas de concreto.
Estruturas de aeronave	Análise estática de asas de aeronaves, fuselagens, barbatanas, foguetes, espaçonaves.
Condução de calor	Distribuição de temperatura em sólidos e fluidos.
Geomecânica	Análise de escavações, paredes de retenção, aberturas subterrâneas, juntas de rocha e problemas de interação solo-estrutura; Análise de tensão nos solos, barragens e fundações de máquinas.
Hidráulica e engenharia de recursos hídricos	Análise de fluxos potenciais, fluxos de superfície livres, fluxos de camada limite, fluxos viscosos, problemas aerodinâmicos transônicos; Análise de estruturas hidráulicas e barragens.
Engenharia nuclear	Análise de vasos de pressão nuclear e estruturas de contenção; distribuição de temperatura no estado estacionário nos componentes do reator.
Engenharia biomédica	Análise de estresse de globos oculares, ossos e dentes; capacidade de suporte de carga dos sistemas de implante e prótese; Mecânica das válvulas cardíacas.
Design mecânico	Problemas de concentração de tensão; Análise de tensões de vasos de pressão, pistões, materiais compósitos, conexões e engrenagens.
Maquinário elétrico e eletromagnético	Análise no estado estacionário de máquinas síncronas e de indução, corrente de Foucault e perdas de núcleo em máquinas elétricas, magnetostática.

De acordo com Zienkiewicz e Taylor (2000) e Rao (2011), o MEF pode ser definido como um método numérico de aproximação para problemas contínuos, no qual este seja dividido em um número finito de partes (elementos), cujo comportamento é especificado por uma série de parâmetros e que a solução do sistema, com a montagem dos elementos, segue precisamente as mesmas regras aplicadas num sistema discreto padrão. Em outras palavras, a sua solução só ocorrerá a partir da montagem da matriz global dos elementos que permitirá a solução nodal e, por consequência, a obtenção dos valores de deslocamento e tensão sofridos por cada elemento. Para casos que envolvam problemas de comportamento linear elástico, a matriz global é representada

pela Eq. (3.1):

$$[K] \cdot \{u\} = \{F\} \quad (3.1)$$

onde $[K]$ é a matriz de rigidez global da estrutura, $\{u\}$ é o vetor dos deslocamentos nodais e $\{F\}$ representa o vetor das forças nodais requeridas para equilibrar qualquer carga concentrada ou distribuída atuando sobre o domínio computacional discretizado.

Ainda, a Fig. 3.2 demonstra diversos métodos que contribuíram ao surgimento do MEF.

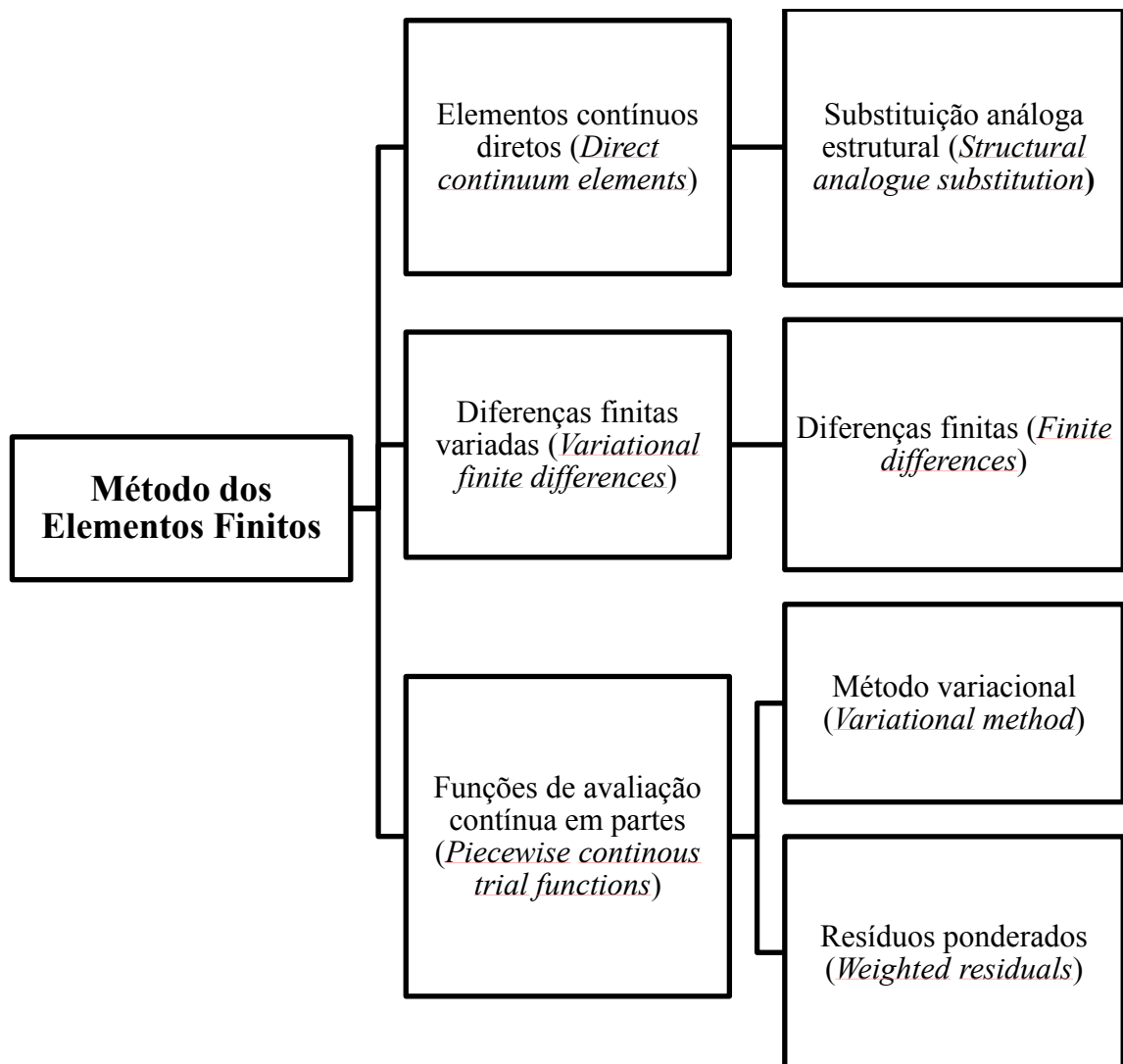


Figura 3.2. – Processo evolutivo do MEF (Fonte: adaptado de Zienkiewicz e Taylor, 2000)

Segundo Moaveni (1999), algumas etapas devem ser seguidas para que ocorra a análise pelo MEF, tais como:

- a) Criação e discretização da solução do domínio em elementos finitos, onde ocorre a

divisão do problema em nós e elementos;

- b) Admite-se que a função de interpolação ou de forma reflita o comportamento físico do elemento e que a função aproximada contínua represente a solução do elemento;
- c) Desenvolvimento das equações para um elemento;
- d) Montagem dos elementos, para representar o problema como um todo, ou seja, construção da matriz global.
- e) Aplicação das condições de contorno, das condições iniciais e do carregamento.
- f) Solução simultânea de um conjunto linear ou não linear de equações algébricas, no intuito de obter os resultados nodais (como deslocamento em diferentes nós ou valores de temperatura em casos de transferência de calor);
- g) Obtenção de outras informações, tais como tensão ou fluxo de calor.

As etapas de ‘a’ até ‘e’ representam a etapa de pré-processamento; enquanto que a etapa ‘f’ é a etapa da solução (processamento); e, ‘g’ a etapa de pós-processamento.

Segundo Rao (2011), há alguns pontos que podem afetar o resultado ou o tempo de processamento computacional do problema, sendo eles:

- a) O tipo de elemento adotado, dependendo da geometria do domínio em estudo, poderá afetar a acurácia, fazendo com que a utilização de dois ou mais tipos de elementos seja necessária.
- b) O tamanho do elemento também afetará na acurácia, de modo que quanto menor for seu tamanho, maior será o número de elementos finitos utilizados na discretização do domínio computacional e, conseqüentemente, maior será a precisão dos resultados; mas maior será o tempo de processamento computacional necessário para desenvolver as simulações. Também, testes que avaliem o número mínimo de elementos que se fazem necessário devido à baixa variação de resultado que os modelos computacionais apresentam a partir de um determinado ponto, caracterizando, assim, a estabilização de um teste de convergência de malha.
- c) Se a configuração do corpo e as condições externas forem simétricas, pode-se considerar apenas metade ou 1/4 do problema em estudo através da utilização da condição de contorno de simetria. A simetria deve ser aplicada sobre a geometria e o carregamento na análise; e sua aplicação faz com que os deslocamentos fora do plano e as rotações no plano sejam definidos como zero, isto é, quando esta condição de contorno se encontra paralela ao eixo y , os deslocamentos e rotações sofridas em x devem ser nulas no local de sua aplicação, e quando ela se encontra paralela ao

eixo x , os deslocamentos e rotações em y que são nulos.

De acordo com Bhavikatti (2005), o MEF, quando comparado com outros métodos clássicos, apresenta as seguintes vantagens:

- a) Em situações que o problema não é isotrópico, soluções obtidas por metodologias clássicas se tornam de difícil solução, a ponto que poucos pesquisadores tiveram sucesso no problema que tratavam.
- b) Estruturas compostas de dois ou mais materiais podem ser facilmente resolvidas pelo MEF.
- c) Problemas de não linearidade geométrica e de material não podem ser resolvidas por métodos clássicos, em contra partida, no método dos elementos finitos não há dificuldade.
- d) Métodos clássicos trabalham com hipóteses quando deparados com a solução das seguintes complexidades: geometria, condições de contorno e carregamento; enquanto que a utilização do MEF trata o problema conforme é proposto.

Portanto, percebe-se que MEF é vantajoso em relação às metodologias clássicas apenas em situações que o problema proposto apresenta uma variedade de complexidades que não possam ser resolvido pelas metodologias clássicas sem realizar suposições que alterem suas características. Além disso, os métodos clássicos são muitas vezes utilizados para realizar a verificação ou validação dos programas que utilizam o MEF.

3.1.2. Elemento SHELL281 e Software ANSYS 18.2 Versão Acadêmica

O elemento de casca SHELL281 (Fig 3.3), encontrado no software ANSYS, foi adotado para o desenvolvimento dos modelos computacionais apresentados nesta dissertação. Segundo ANSYS (2017), o elemento é adequado para análise de estruturas do tipo cascas e placas que apresentem uma espessura fina. Ele é composto por oito nós, onde em cada nó há seis graus de liberdade (três de translação, nas direções x , y , z ; e três de rotação, em torno dos eixos de x , y , z).

Com relação a sua utilização, o SHELL281 pode ser aplicado a problemas lineares que envolvam grandes rotações e/ou que estejam sujeitos a esforços não lineares. Também, há a percepção da alteração da espessura nas análises não lineares; tanto quanto os efeitos gerados por pressões distribuídas num determinado tempo. Outra aplicação de uso deste elemento está na modelagem das camadas dos compósitos ou na construção de estruturas sanduíche, em que a precisão ocorrerá pela Teoria de Mindlin-Reissner.

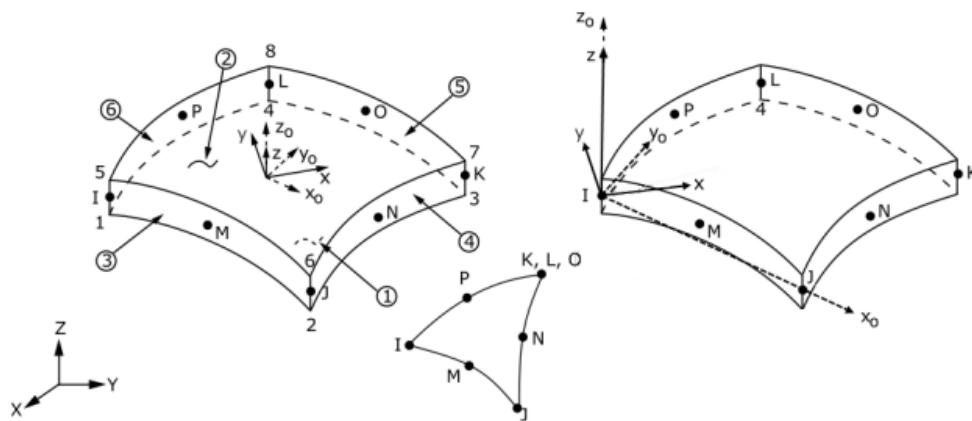


Figura 3.3. – Elemento finito SHELL281 (Fonte: ANSYS, 2017)

De acordo com Stolarski, Nakasone & Yoshimoto (2018), o software ANSYS, baseado no MEF e utilizado para gerar os diversos modelos numéricos aqui apresentados, é um programa que pode ser utilizado para resolver numericamente uma ampla variedade de problemas mecânicos que envolvam análises estruturais estáticas ou dinâmicas, ambas podendo ser lineares ou não lineares; problemas de transferências de calor ou de escoamento de fluido; problemas de acústica; problemas eletromagnéticos; entre outros.

4. TEORIA CONSTRUTAL E A TÉCNICA DA BUSCA EXAUSTIVA

Na natureza, nada se move a menos que seja forçado, empurrado ou puxado. O poder por trás desse movimento é gerado por bilhões de “motores” naturais que consomem “combustíveis” em muitas formas, como os alimentos para os animais, a gasolina para os veículos, o aquecimento solar para a circulação atmosférica e o fluxo de água ao redor do globo. Este movimento gerado reduz instantaneamente sua magnitude – dissipando-a em “freios” – enquanto penetra e se desloca em seu ambiente que resiste durante todo o processo de seu movimento. Os motores e os freios são dois fenômenos naturais tão antigos quanto à própria Terra. Este é um fenômeno distinto e um princípio da física chamado de Teoria Construtal (Bejan, 2016).

De acordo com Reis (2006), a Teoria Construtal demonstra que todos os sistemas de fluxo existem com um propósito (ou objetivo, ou uma função). Na natureza, os fluxos ocorrem em uma ampla gama de escalas com o objetivo de reduzir os gradientes existentes (temperatura, pressão). Em estruturas projetadas e vivas, os fluxos de calor e massa ocorrem pela mesma razão, e, ao dissipar a energia mínima, reduzem a necessidade de alimento ou combustível e fazem com que todos esses sistemas sejam mais adequados. O objetivo do sistema está presente juntamente com as restrições globais fixas, que podem incluir o espaço alocado ao sistema, ao material, às componentes disponíveis e às faixas de temperatura, pressão ou tensão permitidas. Cabe ao projetista do sistema reunir todos estas componentes (graus de liberdade e restrições) e aperfeiçoar o arranjo para alcançar a performance máxima. Desta forma, ele "constrói" a arquitetura (design ou geometria) de fluxo ideal.

Segundo Bejan e Lorente (2008), uma característica do método é que a arquitetura do fluxo é deduzida, não assumida antecipadamente conforme ocorre com outros procedimentos de otimização que se baseiam em variáveis operacionais. Diferentemente destes outros métodos, a otimização pela Teoria Construtal foca na construção da arquitetura de fluxo interna e externa. Isso significa que um sistema de fluxo tem esbeltez S_v (*sveltiness*), que é a propriedade geométrica global definida como:

$$S_v = \frac{\text{Escala de comprimento de fluxo externo}}{\text{Escala de comprimento de fluxo interno}} \quad (4.1)$$

A Lei Construtal, lei base da Teoria Construtal, trata da previsão do design (a configuração do fluxo) e sua evolução no tempo. Também, é uma forma de ver, pois ela ensina que a evolução do

sistema de fluxo pode ser observada em todas as escalas de tempo através da seguinte afirmação: *“Para que um sistema de fluxo de tamanho finito persista no tempo (para viver), sua configuração deve mudar com o tempo, de modo que facilite o acesso às suas correntes (fluido, energia, espécie, etc.)”*. Isto é, ela não é apenas um princípio do qual a forma geométrica e a estrutura são deduzidas na natureza, também um método de engenharia (Design Construtal) utilizado para otimizar os caminhos dos fluxos através de sistemas abertos de tamanho finito. A Lei Construtal indica que, se um sistema está livre para se transformar em restrições globais, a melhor arquitetura de fluxo é aquela que minimiza as resistências de fluxo global ou maximiza o acesso ao fluxo global. Um resultado básico da Teoria Construtal é que a arquitetura do fluxo interno e o formato do sistema não se desenvolvem por acaso, mas resultam da luta permanente por um melhor desempenho e, portanto, devem evoluir no tempo (Rocha, Lorente e Bejan, 2013).

A Teoria Construtal e a Lei Construtal são termos que cada vez mais são vistos na literatura científica. A razão é que um número crescente de pesquisadores utiliza o método para avaliar a influência da configuração geométrica no desempenho dos sistemas de fluxo na mecânica dos fluidos: em determinar qual a seção transversal que melhor minimiza a queda de pressão dos fluxos nos dutos, a melhor configuração dos canais vasculares quando tratando de fluxos turbulentos, entre outros; e, problemas de transferência de calor: na determinação da otimização de cavidades de resfriamento em sólidos condutores com geração uniforme de calor e a análise de diversas formas de cavidades (em forma C – elípticas, triangulares – em forma T e inclusive àquelas com maior nível de complexidade: cavidades em forma de H e T – Y). Entretanto, poucos estudos no campo da engenharia estrutural utilizando o método foram desenvolvidos até o presente momento. Uma forma de desenvolver uma análise nas estruturas mecânicas pela aplicação da Teoria Construtal é através da “Analogia de fluxo” devido a uma semelhança constatada nas configurações de fluxo ou escoamento com a distribuição das tensões nos componentes sólidos. Esta analogia, por permitir a redução das concentrações de tensões nos projetos estruturais, permite desenvolver estudos na área da mecânica de materiais com foco na avaliação geométrica estrutural por meio da Teoria Construtal (Reis, 2006; Rocha, Lorente e Bejan, 2013).

Com relação à técnica da Busca Exaustiva (ou Busca por Força Bruta), é o método de pesquisa estocástica mais simples disponível. O método refere-se a qualquer algoritmo de busca que sistematicamente tenta soluções possíveis, uma após a outra, até encontrar uma que seja aceitável ou até que atinja um número máximo de tentativas pré-definidas. Embora o método pareça pouco sofisticado, ele tem a vantagem de poder pesquisar qualquer função, mesmo uma que tenha um comportamento complexo e irregular. No entanto, quando este método obtém um ponto próximo ao

ótimo global, ele não melhora, pois, acaba gerando outros pontos ainda mais próximos. Em outras palavras, embora a técnica da Busca Exaustiva possa encontrar um ponto próximo do ótimo, é muito improvável que ele realmente encontre o ótimo global em si (Khoury e Harder, 2016).

No presente trabalho o método Constructal Design foi usado para definir o espaço de busca, ou seja, as diferentes configurações geométricas a serem analisadas. Já a técnica de Busca Exaustiva foi adotada para identificar entre as geometrias analisadas qual conduz a melhor performance.

4.1. Aplicação do Método Design Construtal no estudo de caso

A utilização do Método Design Construtal em conjunto com a técnica da Busca Exaustiva tem como propósito definir o espaço de busca através da alteração dos parâmetros geométricos, de modo que o volume do material não sofra nenhuma alteração. Para tanto, adotou-se uma placa não enrijecida como referência (Fig. 4.1), de comprimento a , largura b e espessura t onde uma fração de seu volume de material ϕ é transformada em enrijecedor a partir da diminuição de sua espessura, mantendo o comprimento e a largura com valores constantes (Fig. 4.2).

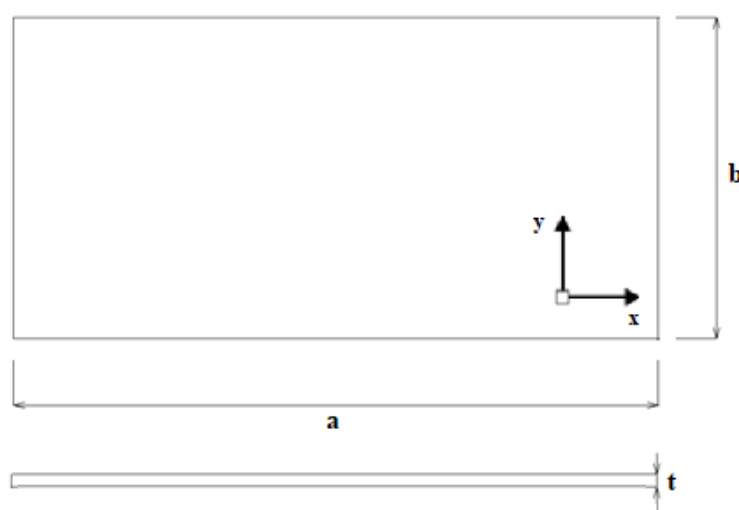


Figura 4.1. – Placa de referência

Consequentemente, todas as geometrias analisadas possuem a mesma quantidade de material, possibilitando uma avaliação comparativa do desempenho estrutural dessas placas. A melhoria do comportamento mecânico será considerada na definição da configuração geométrica que melhor minimiza a deflexão máxima e tensão máxima da placa enrijecida. Além disso, a fração de volume do material é um parâmetro de restrição do método Design Construtal e foi definida como:

$$\phi = \frac{V_s}{V_r} = \frac{N_{ls} (a h_s t_s) + N_{ts} \cdot [(b - N_{ts} t_s) h_s t_s]}{abt} \quad (4.2)$$

onde: V_s é o volume da placa transformado em enrijecedor, V_r é o volume total da placa de referência, N_{ls} é o número de enrijecedores longitudinais, N_{ts} é o número de enrijecedores transversais, h_s é a altura dos enrijecedores e t_s é a espessura dos enrijecedores. Quanto aos graus de liberdade, segundo Troina (2017), para os problemas que envolvem placas enrijecidas, é possível considerar: a relação de altura de enrijecedor por espessura de enrijecedor h_s/t_s , a quantidade de enrijecedores longitudinais N_{ls} e a quantidade de enrijecedores transversais N_{ts} .

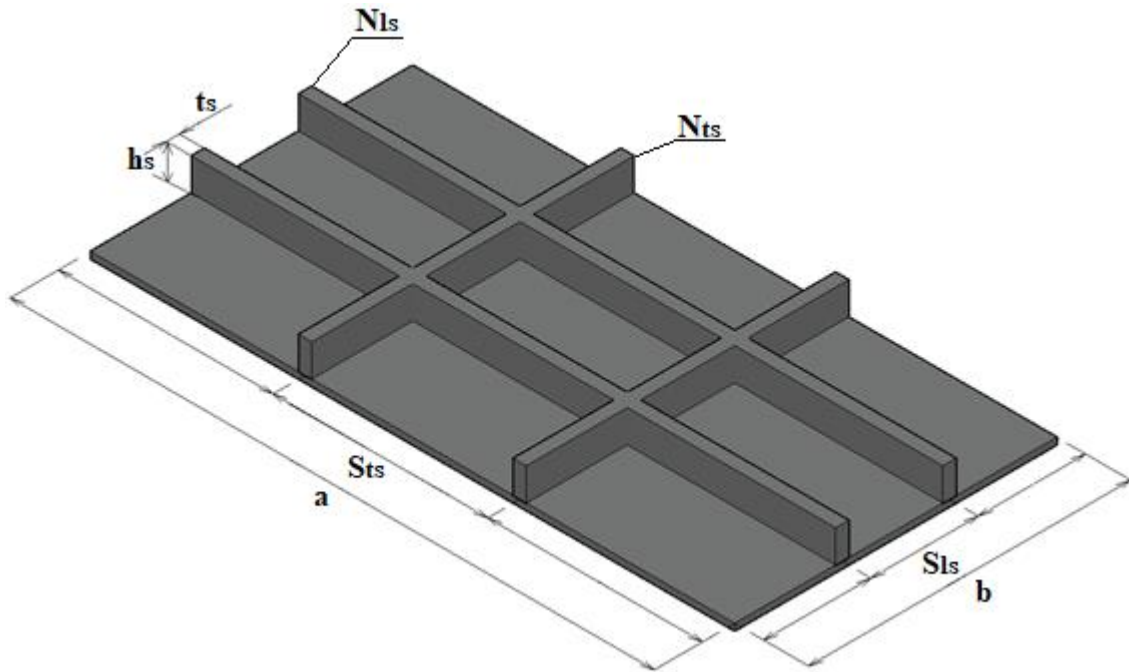


Figura 4.2. – Placa enrijecida com suas variáveis

Portanto, a análise envolveu placas formadas por 25 combinações de enrijecedores longitudinais e transversais (Fig. 4.3), obedecendo ao formato $P(N_{ls}, N_{ts})$, variando os seguintes graus de liberdade: $N_{ls} = 2, 3, 4, 5, 6$ e $N_{ts} = 2, 3, 4, 5, 6$. Em vista disto, foram analisadas as seguintes placas: $P(2,2)$, $P(2,3)$, $P(2,4)$, $P(2,5)$, $P(2,6)$, $P(3,2)$, $P(3,3)$, $P(3,4)$, $P(3,5)$, $P(3,6)$, $P(4,2)$, $P(4,3)$, $P(4,4)$, $P(4,5)$, $P(4,6)$, $P(5,2)$, $P(5,3)$, $P(5,4)$, $P(5,5)$, $P(5,6)$, $P(6,2)$, $P(6,3)$, $P(6,4)$, $P(6,5)$ e $P(6,6)$. Sobre os enrijecedores, eles apresentam uma seção transversal retangular, espaçamentos longitudinais S_{ls} e espaçamentos transversais S_{ts} equidistantes representados nas Eqs. (4.3) e (4.4), respectivamente; e, foram adotados valores comerciais de espessuras de placas de aço. Ademais, são impostas duas restrições geométricas: a altura dos enrijecedores não pode ser maior do que 0,3 m,

no intuito de evitar desproporções geométricas entre a altura do enrijecedor e as dimensões laterais da placa; e a relação h_s/t_s deve ser maior do que 1 para evitar que a espessura do enrijecedor seja maior que sua altura, motivo este que descaracterizaria o enrijecedor que deve possuir altura maior do que sua espessura.

$$S_{ls} = \frac{b}{(N_{ls} + 1)} \quad (4.3)$$

$$S_{ts} = \frac{a}{(N_{ts} + 1)} \quad (4.4)$$

A respeito dos dados da placa de referência, foi adotado um comprimento de 2,00 m, largura de 1,00 m, espessura de 0,02 m, e é de aço estrutural A-36 com módulo de elasticidade de 200 GPa e coeficiente de Poisson de 0,3. A relação entre o volume de material transformado em enrijecedores e o volume da placa de referência é $\phi = 0,3$, ou seja, 30% do volume foram usados nos enrijecedores. A placa enrijecida foi considerada engastada nas quatro bordas, inclusive as bordas dos enrijecedores, e foi submetida a um carregamento transversal uniformemente distribuído de 10 kPa.

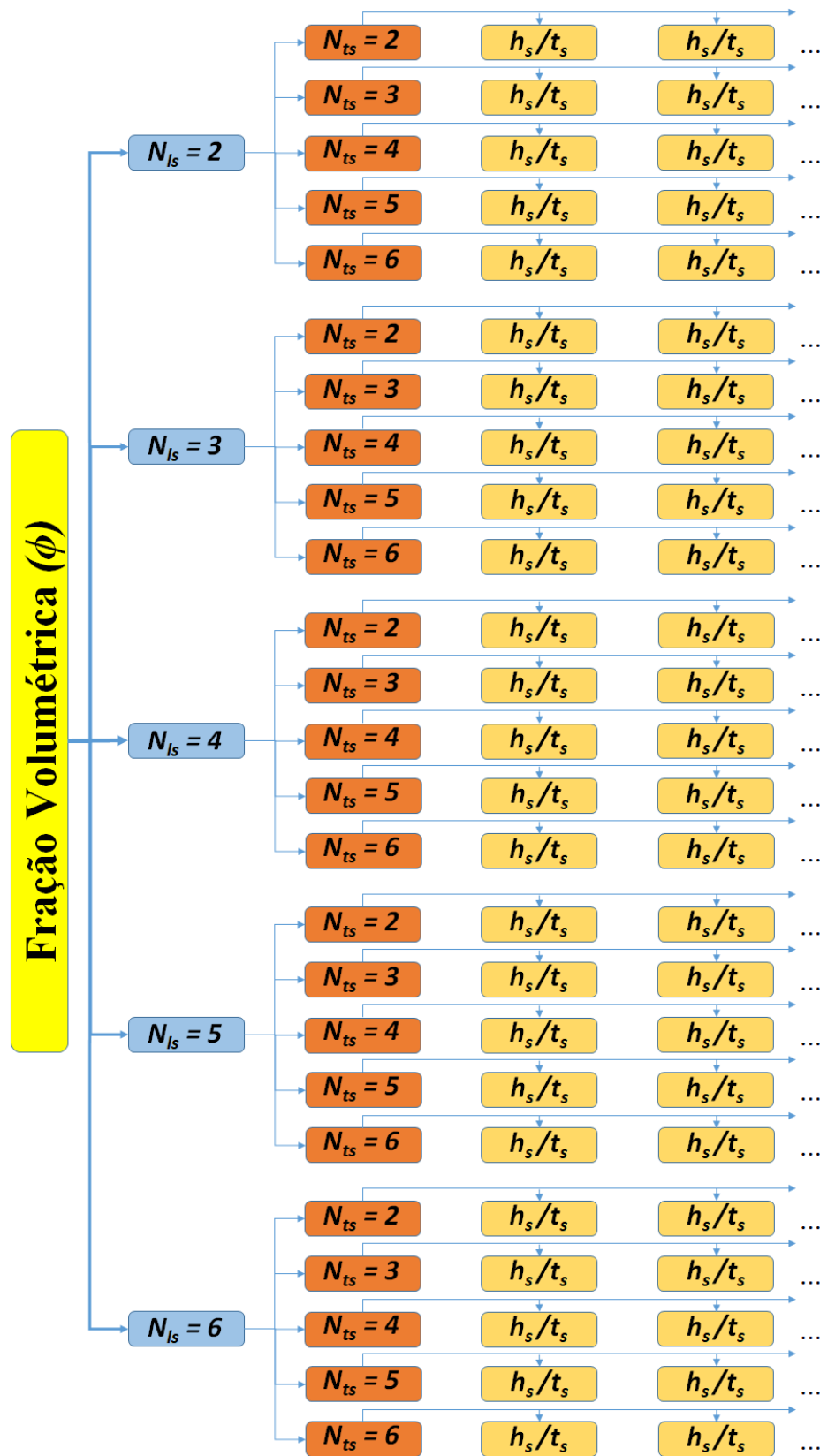


Figura 4.3. – Configurações geométricas geradas pelo Design Construtal (Fonte: Troina, 2017)

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

5.1. Verificação do modelo computacional

Para este propósito, quatro casos de placas enrijecidas elaboradas no software ANSYS 18.2 versão acadêmica serão utilizadas para compor o processo de verificação. Para os casos em que há a utilização da condição de contorno de apoio simples, nestes a verificação será dividida em dois momentos. No primeiro, onde é apenas verificada a deflexão da placa, o problema será tratado conforme os outros autores na literatura dispuseram, ou seja, sem alteração na geometria, nas propriedades dos materiais, nas condições de vinculação e na carga aplicada. Após, será considerada a condição de contorno de engaste nas quatro bordas e utilizado a condição de contorno de simetria nas simulações. Nesta etapa, será feito uma comparação dos resultados numéricos de deflexão e tensão de von Mises entre a placa completa em relação ao seu equivalente de 1/4 de placa com simetria. Ainda, será averiguado se o local por onde passa a simetria pode ou não influenciar no resultado: cortando nenhum enrijecedor, apenas um enrijecedor no sentido longitudinal, apenas um enrijecedor no sentido transversal, cortando um enrijecedor no sentido longitudinal e outro no sentido transversal.

Cabe destacar que o uso da condição de contorno de simetria permite reduzir o tempo de processamento e a utilização de uma malha mais refinada, uma vez que é possível considerar um domínio computacional com metade ou um quarto do problema quando este apresentar características simétricas em relação à geometria, ao carregamento, às condições de vinculação e às propriedades do material.

5.1.1. Placa retangular com enrijecedores em cruz

Os dados geométricos desta placa, expostos na Fig. 5.1, foram baseados em Rossowt e Ibrahimkhail (1978) e utilizados por Silva (2010) e Troina (2017) na verificação dos seus modelos computacionais. A placa foi submetida a um carregamento transversal uniforme de 0,006895 kN/cm²; como propriedades de material: apresenta um módulo de elasticidade de 20.268,27 kN/cm² e um coeficiente de Poisson de 0,3; e, a condição de vinculação de apoio simples é aplicada sobre toda a borda da placa e a borda dos enrijecedores.

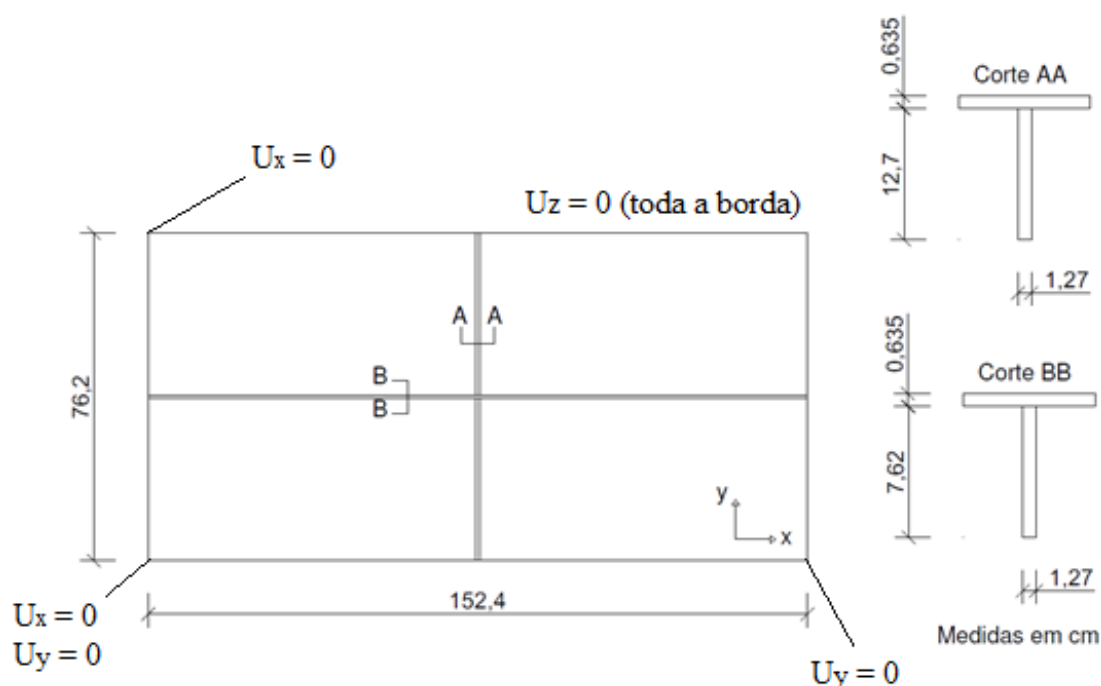


Figura 5.1. – Placa com enrijecedores em cruz (Fonte: adaptado de Silva, 2010)

Observando a Fig. 5.2, a verificação do modelo computacional baseado no elemento finito SHELL281 apresentou uma discrepância de 1,04% na análise de deflexão central da placa em relação ao modelo computacional apresentado por Troina (2017). Este modelo utilizou o elemento finito SOLID95 que pode tolerar formas irregulares sem perda significativa em sua precisão devido à presença de 20 nós com 3 graus de liberdade cada (translações nas direções x , y e z). Um motivo de ter ocorrido essa variação de resultados pode ser devido ao SOLID95 ser um elemento que considera todas as componentes do estado de tensão e deformação como um sistema tridimensional de um corpo sólido, enquanto que o elemento de casca SHELL281 possui algumas simplificações nas componentes do estado plano de tensão e deformação.

Com relação a maior diferença constatada, esta ocorreu em relação ao modelo computacional apresentado por Silva (2010) com uma discrepância de 28,77% na análise da deflexão central da placa apoiada. O modelo computacional utilizou o elemento finito SHELL63 para a modelagem da placa e o elemento BEAM44 para os enrijecedores. De acordo com Troina (2017), uma explicação dessa variação de resultados é devido a uma malha pouco refinada (860 elementos) ter sido utilizada por Silva (2010) em sua verificação. Além disso, uma mesma simulação realizada por Troina (2017) utilizando os mesmos elementos finitos que Silva (2010), mas com uma malha mais refinada (13.040 elementos finitos), constatou uma deflexão central de

0,267 mm; demonstrando uma diminuição significativa na diferença de resultado de 5,24% em relação ao elemento finito SHELL281 (Presente estudo).

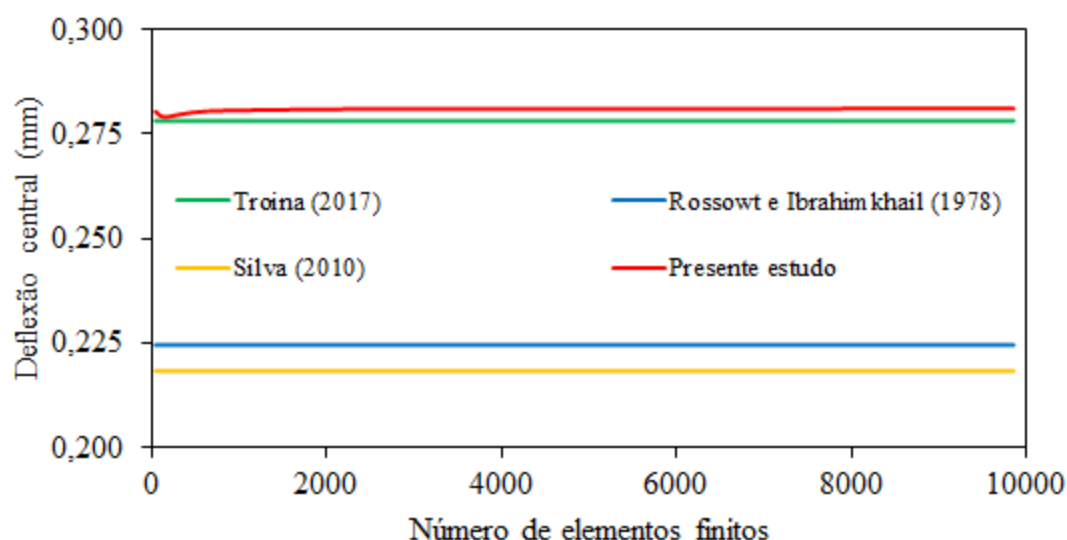


Figura 5.2. – Convergência de malha e verificação para a placa com enrijecedores em cruz

Após a verificação do modelo computacional em relação aos outros modelos encontrados na literatura, há a troca da condição de contorno de apoio simples para engaste aplicado em todas as bordas da placa e as bordas dos enrijecedores. Nesta etapa da verificação foi analisada a situação em que a condição de contorno de simetria passa no centro dos enrijecedores no sentido longitudinal e transversal da placa. O tamanho de elemento finito utilizado na comparação de resultados de deflexão e tensão de von Mises da placa inteira em relação a placa com simetria foi de 12 mm para ambos os domínios computacionais. Então, para a placa inteira, obteve-se um resultado de deflexão máxima de 0,835 mm e uma tensão máxima de von Mises equivalente a 114,355 MPa. Já, para a placa com simetria, a deflexão máxima equivale 0,841 mm e a tensão máxima de von Mises a 114,633 MPa. A diferença dos resultados, em ambas as análises, não foram maior do que 1%, comprovando que é possível considerar verificado o modelo computacional que emprega a condição de contorno de simetria.

5.1.2. Placa quadrada com dois enrijecedores ortogonais

As dimensões geométricas da placa quadrada com dois enrijecedores ortogonais foram expostas na Fig. 5.3. A placa foi submetida a um carregamento transversal uniforme de 0,0098 N/mm² e são consideradas as seguintes propriedades de material: um coeficiente de Poisson de 0,30

e um módulo de elasticidade de 210 GPa. Nesta verificação será comparado o modelo computacional baseado no elemento finito SHELL281 (Presente estudo) com os modelos numéricos utilizados por Salomon (2001).

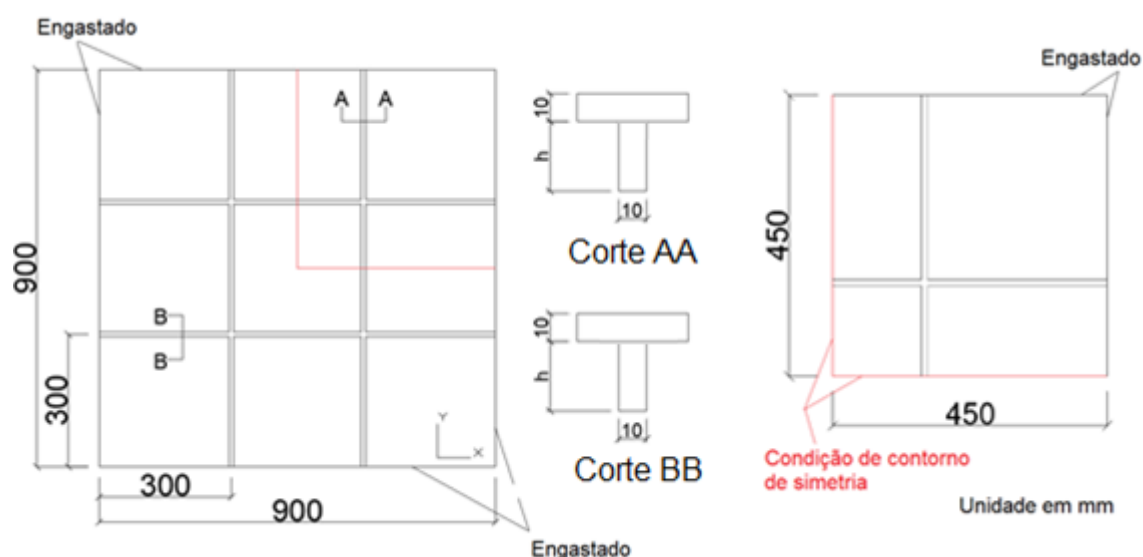


Figura 5.3. – Placa quadrada com enrijecedores ortogonais em relação aos eixos x e y (Fonte: adaptado de Salomon, 2001)

Conforme Salomon (2001) foi utilizado uma variação na altura dos enrijecedores h de 10 a 100 mm, com incremento de 10 mm, e a análise foi baseada nos resultados de deslocamento máximo e tensão de flexão dos enrijecedores (ou tensão na direção x atuando nos enrijecedores). Para isto, inicialmente, foi desenvolvido um teste de convergência de malha para uma placa completa e para 1/4 de placa com simetria, ambas utilizando o elemento finito SHELL281. O teste, como exemplo, é demonstrado nas Fig. 5.4 e Fig. 5.5 para o caso em que é usada uma altura de 100 mm.

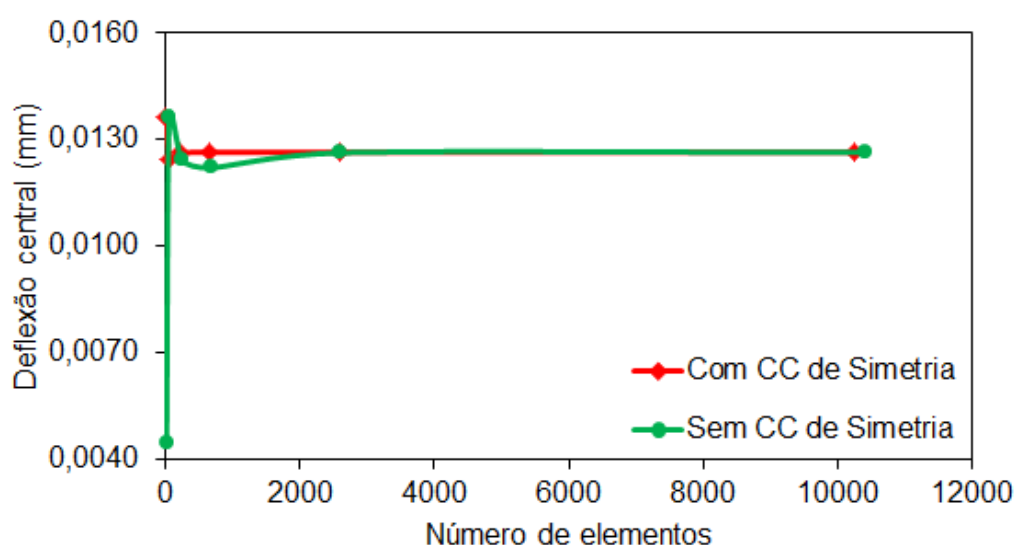


Figura 5.4. – Teste de convergência de malha para o deslocamento máximo para $h = 100$ mm

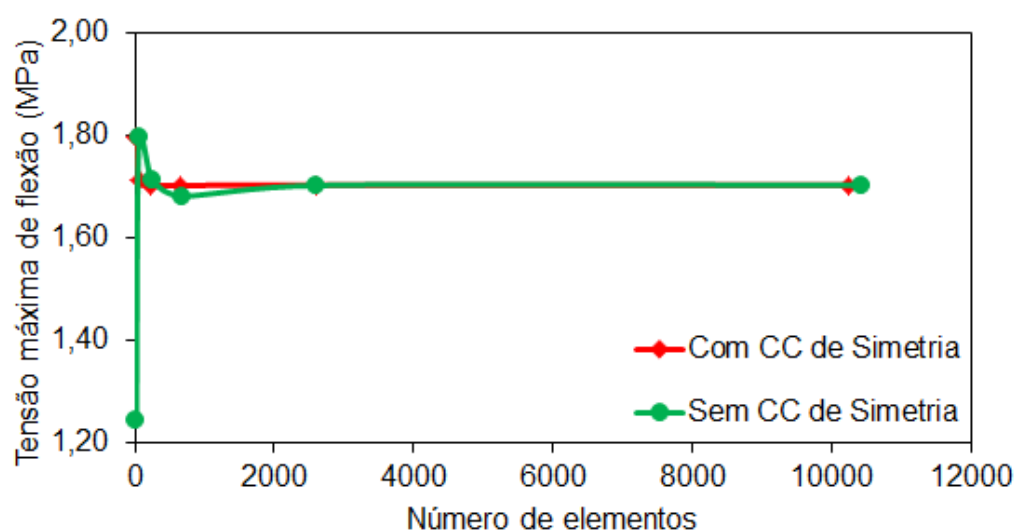


Figura 5.5. – Teste de convergência de malha para a tensão de flexão dos enrijecedores para $h = 100$ mm

Observando a Fig. 5.4 a estabilização da análise da deflexão central ocorreu para a malha com 2604 elementos (tamanho de elemento de 22 mm) na placa inteira e para a malha com 216 elementos (tamanho de elemento de 44 mm) para a placa que emprega a condição de simetria. Com relação à análise da tensão de flexão, a Fig. 5.5 indica que a estabilização ocorreu para uma malha com 10416 elementos para a placa inteira e com 2604 elementos para a placa com simetria. Em

ambos os casos, para a análise de tensão, o tamanho do elemento foi de 11 mm.

Testes de convergência de malha para os demais casos ($h = 10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80$; e 90 mm) foram realizados de maneira análoga ao apresentado para o caso com $h = 100$ mm (ver Figs. 5.4 e 5.5). Os resultados obtidos nos testes de convergência de malha para todos os casos considerados são então apresentados nas Tab. 5.1, envolvendo a variação da altura do enrijecedor, tem seu tamanho de elemento para a placa completa e o seu equivalente com simetria na Tab. 5.1.

Tabela 5.1. Tamanho do elemento simulado para a placa completa e a placa com simetria

h (mm)	Tamanho do elemento (mm)	Número de elementos		w (mm)		σ_{xx} dos enrijecedores (MPa)	
		Sem simetria	Com Simetria	Sem simetria	Com Simetria	Sem simetria	Com Simetria
10	9,50	9984	2496	0,3287	0,3287	14,7522	14,7522
20	9,50	10368	2592	0,1860	0,1860	14,1192	14,1192
30	9,75	10137	2688	0,1004	0,1005	10,2734	10,2786
40	9,80	10509	2784	0,0592	0,0592	7,2464	7,2502
50	10,00	9900	2475	0,0387	0,0387	5,2686	5,2686
60	10,25	10260	2565	0,0276	0,0276	3,9757	3,9757
70	10,50	10005	2655	0,0211	0,0212	3,0996	3,1018
80	10,50	10353	2745	0,0171	0,0171	2,4856	2,4874
90	11,00	10080	2520	0,0145	0,0145	2,0399	2,0399
100	11,00	10416	2604	0,0126	0,0126	1,7038	1,7038

Após a realização dos testes de convergência de malha, os resultados numéricos independentes de malha obtidos foram comparados aos apresentados por Salomon (2001), visando realizar a verificação do modelo computacional proposto. Portanto, na Fig. 5.6 são comparados os resultados para a deflexão central obtido no presente estudo utilizando condição de contorno de simetria (1/4 de placa) com os de Salomon (2001). Da mesma maneira, na Fig. 5.7 os resultados de tensão máxima são mostrados.

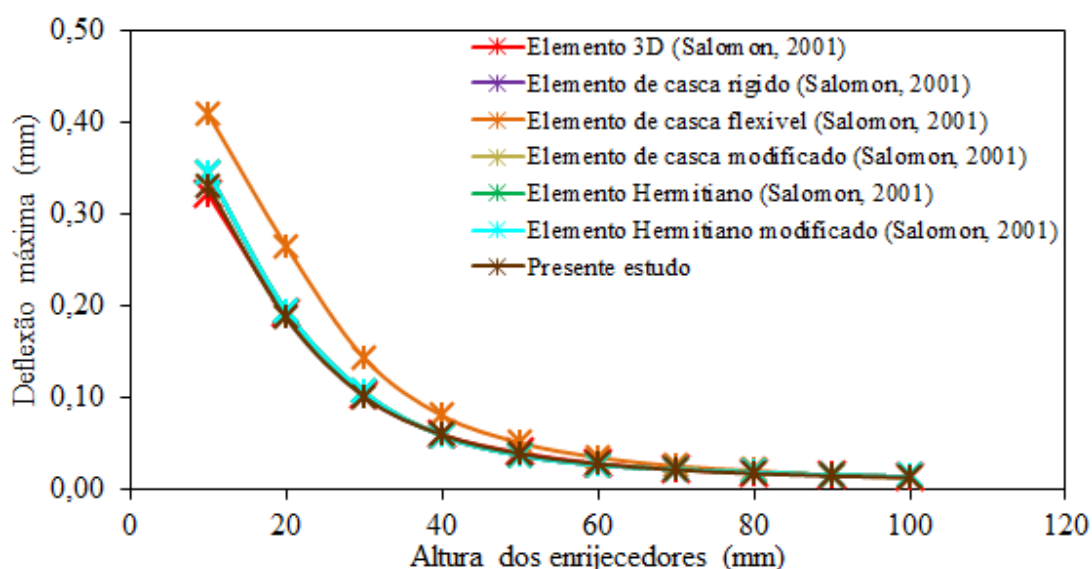


Figura 5.6. – Comparativo dos resultados numéricos de deflexão máxima

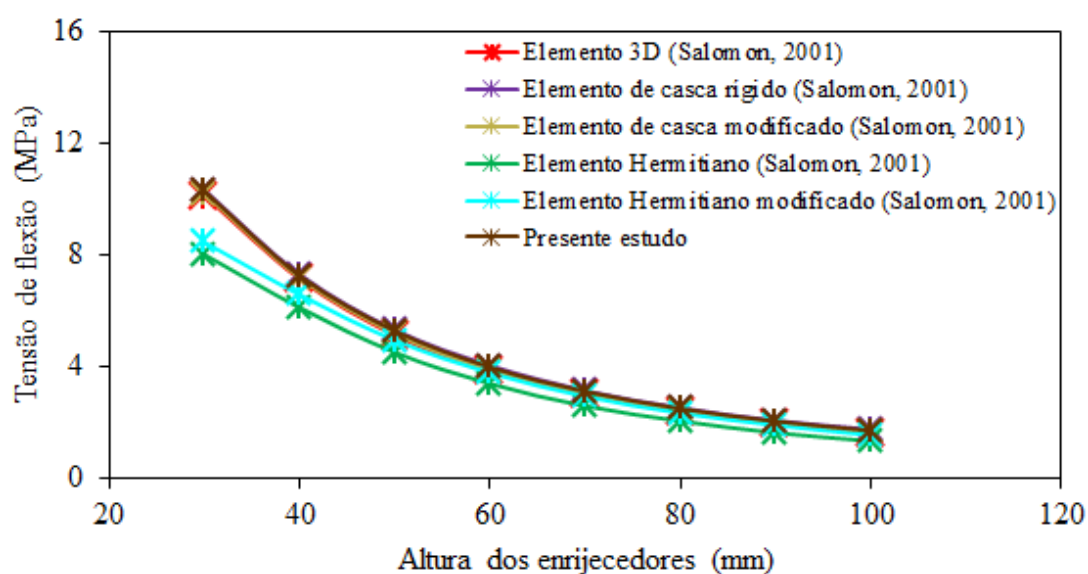


Figura 5.7. – Comparativo dos resultados numéricos da tensão de flexão dos enrijecedores

As Figs. 5.6 e 5.7 indicam que os resultados de deflexão e tensão, respectivamente, obtidos no presente estudo possuem boa concordância com os resultados apresentados por Salomon (2001). Dentre os modelos computacionais adotados em seu estudo o mais preciso é o com elemento 3D. Então, usando o modelo 3D como referência, pode-se constatar uma precisão de 99,41% para a altura de 40 mm, e 93,22% para a altura de 90 mm. Já, para a análise da tensão de flexão, o modelo de casca flexível não foi utilizado pelo autor. Logo, a comparação entre o modelo SHELL281

(Presente estudo) e o modelo 3D, constatou-se uma variação de tensão de 5,35% para a altura de 100 mm.

Após a verificação do modelo computacional baseado no elemento SHELL281 em relação aos modelos abordados por Salomon (2001), há a verificação da influência do local onde é aplicado condição de contorno de simetria. Nesta verificação a simetria passa por nenhum enrijecedor e, conforme pode ser observado nas Tab. 5.1, para a análise de deflexão não ocorreu nenhuma variação de resultado entre a placa inteira e a placa que considera a condição de contorno de simetria. Com relação à análise da tensão de von Mises, os resultados obtidos quando comparados tamanhos de elementos semelhantes (11 mm) também não ocorre nenhuma variação de resultado (5,5890 MPa para $h = 100$ mm) entre o modelo computacional que considera a placa inteira e o modelo que utiliza simetria. Assim, também é possível considerar verificado o modelo computacional que emprega a condição de contorno de simetria.

5.1.3. Placa com três enrijecedores longitudinais e quatro transversais

Os dados geométricos desta placa foram baseados na placa de referência de Troina (2017). Isto é, a placa apresenta um comprimento de 2,00 m, largura de 1,00 m, espessura de 0,02 m, e é de aço estrutural A-36 com módulo de elasticidade de 200 GPa e coeficiente de Poisson de 0,3. Foi submetida a um carregamento transversal uniformemente distribuído de 10 kPa e a aplicação da condição de vinculação de apoio simples é aplicada sobre toda a borda da placa e nas extremidades dos enrijecedores. A relação entre o volume de material transformado em enrijecedores e o volume da placa de referência é $\phi=0,3$, ou seja, 30% do volume foram usados nos enrijecedores.

Inicialmente, um teste de convergência de malha para a placa com $h_s/t_s = 53,4905$ será apresentado para a placa completa na intenção de determinar qual o tamanho mínimo de elemento finito que atenda a estabilização dos resultados das análises da deflexão e tensão de von Mises. Conforme pode ser observado na Fig. 5.8, o teste atingiu estabilização para a análise de deflexão com uma malha de 2466 elementos (tamanho de 46 mm) e necessita de um maior refinamento em sua malha (tamanho de elementos menores que 23 mm) para a análise da tensão de von Mises. Contudo, pela utilização de uma versão acadêmica do software ANSYS 18.2 há um limitante de 32.000 nós por simulação. Logo, pela incerteza da discrepância dos resultados da tensão de von Mises, o tamanho de elemento finito de 23 mm será adotado para esta verificação por ser o menor tamanho possível de ser simulado.

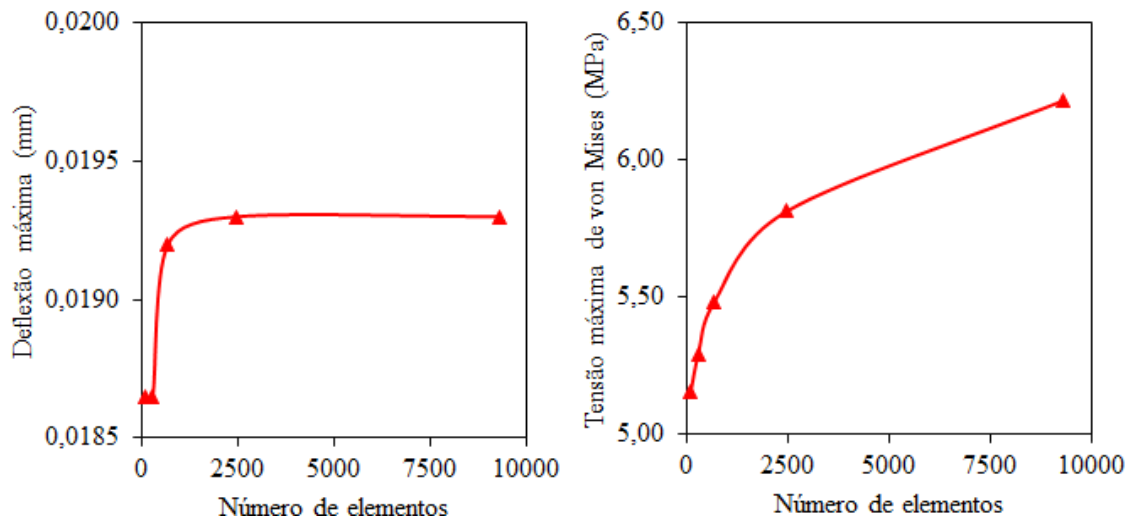


Figura 5.8. – Teste de convergência de malha para a placa com três enrijecedores longitudinais e quatro transversais com $h_s/t_s = 53,4905$

Na sequência, a Fig. 5.9 faz um comparativo entre os modelos numéricos baseado nos elementos finitos SHELL281 (Presente estudo) em relação ao modelo SOLID95 utilizado por Troina (2017). Nesta etapa da verificação, conforme pode ser percebido, demonstrou resultados bastante coerentes com o modelo computacional encontrado na literatura, pois a menor diferença entre os deslocamentos foi de 1,05% encontrado no h_s/t_s igual a 53,4905. Já, a maior diferença foi de 6,46% para o h_s/t_s igual a 1,2337.

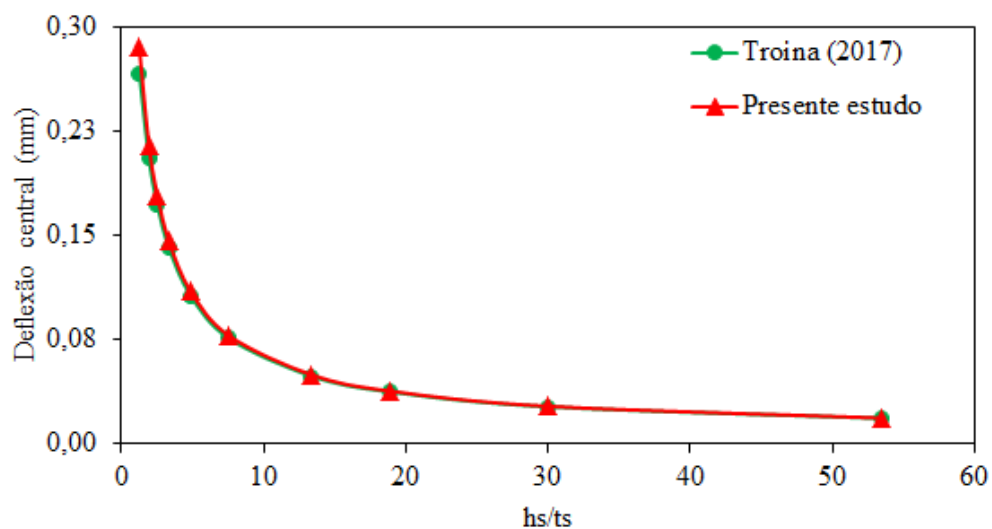


Figura 5.9. – Comparativo dos resultados numéricos da deflexão central da placa com três enrijecedores longitudinais e quatro transversais em relação à variação do grau de liberdade h_s/t_s

Com relação à influência do local onde é aplicada a condição de contorno de simetria, nesta etapa é averiguado se o local em que a simetria passa, cortando apenas um enrijecedor no sentido longitudinal, tem influência sobre os resultados. Para a geração dos resultados de deflexão e tensão, ocorreu a mudança da condição de vinculação de apoio simples para engaste em toda a borda da placa e dos enrijecedores. Os resultados numéricos obtidos para a placa inteira e 1/4 de placa com simetria e $h_s/t_s = 53,4905$ foram idênticos, ou seja, ambas as simulações demonstraram uma deflexão máxima de 0,0096 mm e uma tensão de von Mises de 6,6266 MPa. Assim, conforme ocorreu nas outras verificações, os modelos computacionais que empregam a condição de contorno de simetria apenas no sentido longitudinal também podem ser considerado como verificado.

5.1.4. Placa com quatro enrijecedores longitudinais e cinco transversais

Os dados geométricos desta placa também foram baseados na placa de referência utilizada por Troina (2017). De forma análoga a placa com três enrijecedores longitudinais e quatro transversais, um teste de convergência de malha para a placa com $h_s/t_s = 91,7305$ será apresentado para a placa completa na intenção de determinar qual o tamanho mínimo de elemento finito que atenda a estabilização dos resultados das análises da deflexão e tensão de von Mises.

Observado na Fig. 5.10, o teste atingiu estabilização para a análise de deflexão com uma malha de 678 elementos (tamanho de 100 mm) e necessita de um maior refinamento em sua malha (tamanho de elementos menores que 25 mm) para a análise da tensão de von Mises. No entanto, pela utilização de uma versão acadêmica do software ANSYS 18.2 e pela incerteza da discrepância dos resultados da tensão de von Mises, o tamanho de elemento finito de 25 mm será adotado para esta verificação por ser o menor tamanho possível de ser simulado.

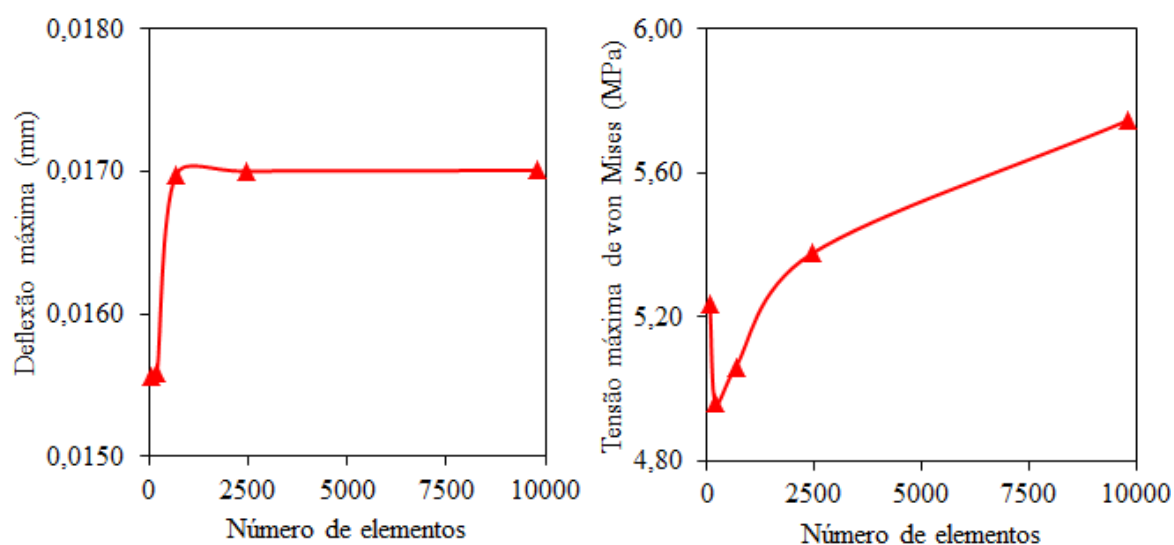


Figura 5.10. – Teste de convergência de malha para a placa com quatro enrijecedores longitudinais e cinco transversais com $h_s/t_s = 91,7305$

Após, a Fig. 5.11 faz um comparativo entre os modelos numéricos baseados nos elementos finitos SHELL281 (Presente estudo) em relação ao modelo com elemento finito SOLID95 utilizado por Troina (2017). A verificação demonstrou resultados bastante próximos com o modelo computacional encontrado na literatura, pois a menor diferença entre os deslocamentos foi de 1,14% encontrado no $h_s/t_s = 91,7305$ e a maior diferença foi de 6,04% para o $h_s/t_s = 1,4890$.

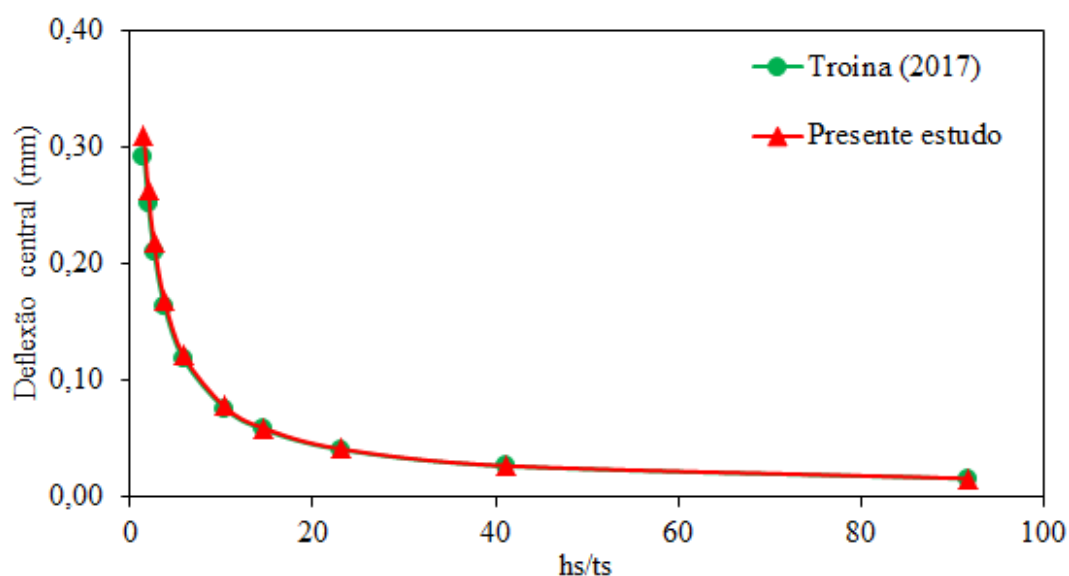


Figura 5.11. – Comparativo dos resultados numéricos da deflexão central da placa com quatro enrijecedores longitudinais e cinco transversais em relação à variação h_s/t_s

Na sequência, é averiguado se o local em que a condição de contorno de simetria é aplicada (cortando apenas um enrijecedor no sentido transversal) apresenta influência sobre os resultados de deflexão e tensão da placa com quatro enrijecedores longitudinais e cinco transversais com $h_s/t_s = 91,7305$. Para isto, conforme ocorreu na placa com três enrijecedores longitudinais e quatro transversais, uma mudança da condição de vinculação de apoio simples para engaste foi realizada. Então, ambas as simulações da placa inteira e 1/4 de placa com simetria demonstraram um resultado de deflexão máxima equivalendo a 0,0085 mm e uma diferença entre os resultados da tensão de von Mises menor que 0,1% (6,8190 MPa para a placa completa e 6,8191 MPa para a placa com simetria). Deste modo, conforme ocorreu nas outras verificações, o modelo computacional que emprega a condição de contorno de simetria apenas no sentido transversal também pode ser considerado verificado.

5.2. Teste de convergência de malha

O teste de convergência de malha foi desenvolvido na geometria da placa enrijecida com maior complexidade geométrica analisada nesta dissertação, ou seja, à placa com seis enrijecedores longitudinais e seis transversais P(6,6) com h_s/t_s igual a 66,3476. Na Fig. 5.12 é apresentado o domínio computacional desta placa, de modo que a Fig. 5.12 (a) representa o domínio discretizado da placa completa e a Fig. 5.12 (b) o domínio considerando a condição de contorno de simetria, isto é, somente 1/4 da placa da Fig. 5.12 (a).

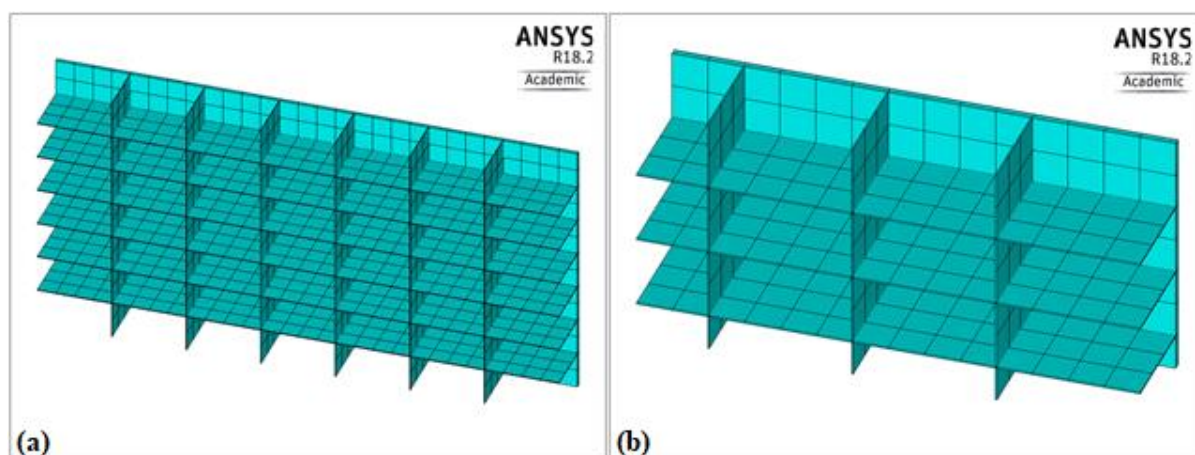


Figura 5.12. – Placa com enrijecedores P(6,6) com $h_s/t_s = 66,3476$: (a) domínio computacional da placa completa, e (b) domínio considerando 1/4 da placa

Na sequência, a Fig. 5.13 apresenta o teste de convergência de malha dos resultados

5.3. Aplicação do modelo computacional com simetria no estudo de caso

Após a verificação do modelo computacional SHELL281 empregando a condição de contorno de simetria e da realização do teste de convergência de malha, o estudo de caso foi simulado numericamente de modo que foi empregado o modelo computacional utilizando a condição de contorno de simetria. Após a simulação das 25 configurações geométricas de placas com enrijecedores, houve a elaboração de gráficos de dispersão de pontos com valores das deflexões máximas e tensões máximas de von Mises para cada combinação gerada $P(N_{ls}, N_{ts})$ em função do grau de liberdade h_s/t_s . Os resultados foram expostos nas Figs. 5.14, 5.15, 5.16, 5.17, 5.18. (para análise de deflexão máxima w das placas enrijecidas), 5.19, 5.20, 5.21, 5.22 e 5.23 (para análise da tensão máxima de von Mises σ_{vM} das placas enrijecidas); e, a Tab. 5.2 expõe cada configuração geométrica com seu respectivo tamanho de elemento simulado.

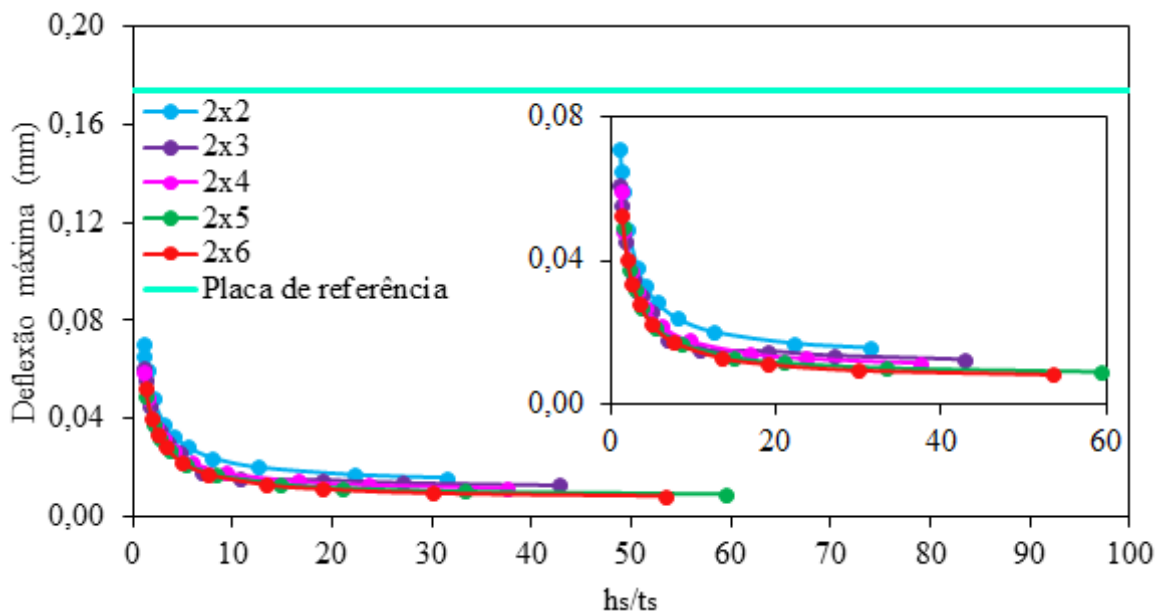


Figura 5.14. – Variações da deflexão máxima em função de h_s/t_s para $N_{ls} = 2$

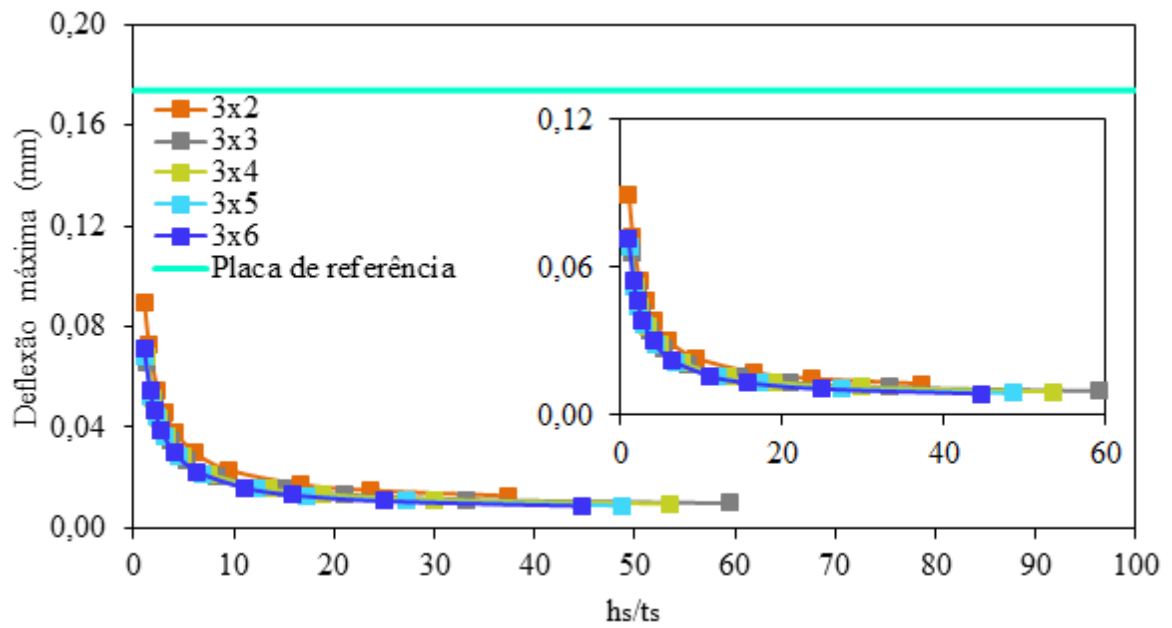


Figura 5.15. – Variações da deflexão máxima em função de h_s/t_s para $N_{ls} = 3$

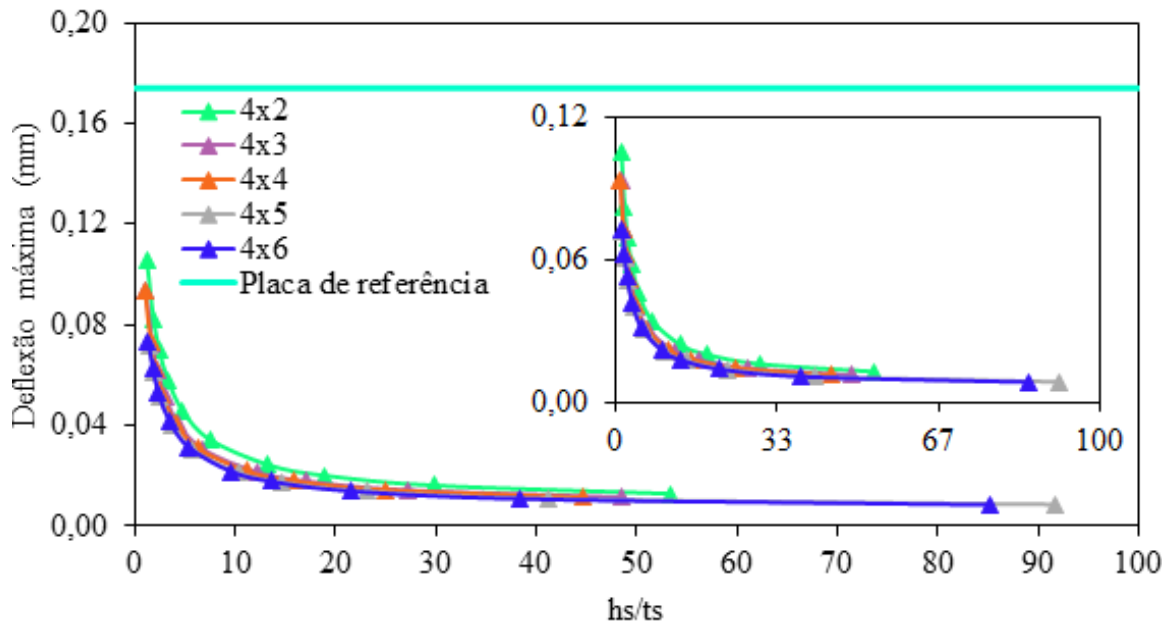


Figura 5.16. – Variações da deflexão máxima em função de h_s/t_s para $N_{ls} = 4$

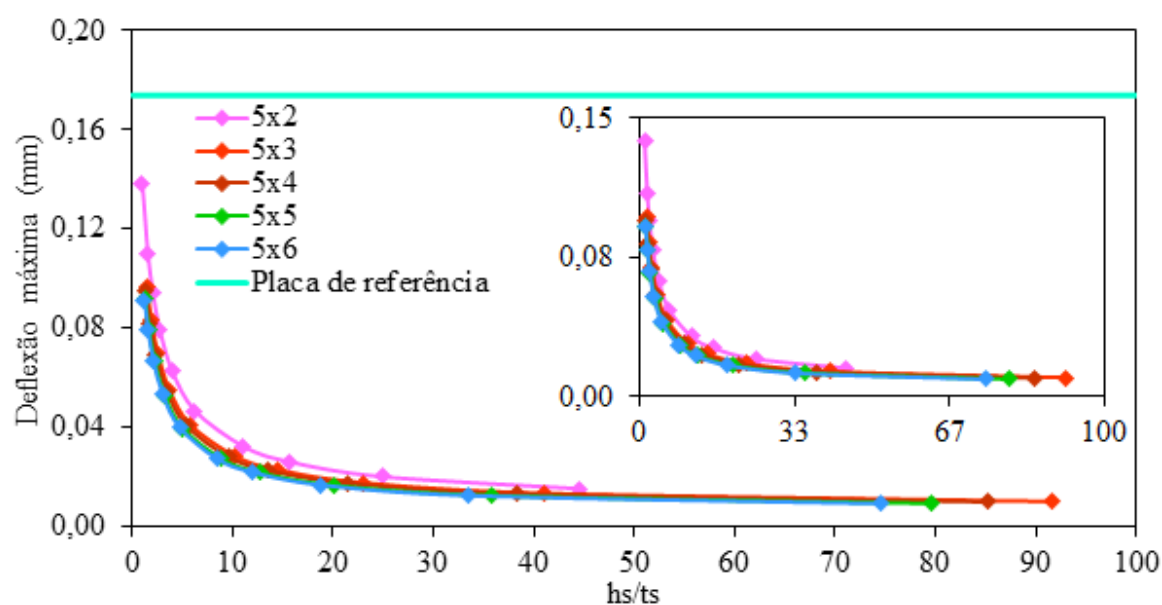


Figura 5.17. – Variações da deflexão máxima em função de h_s/t_s para $N_{ts} = 5$

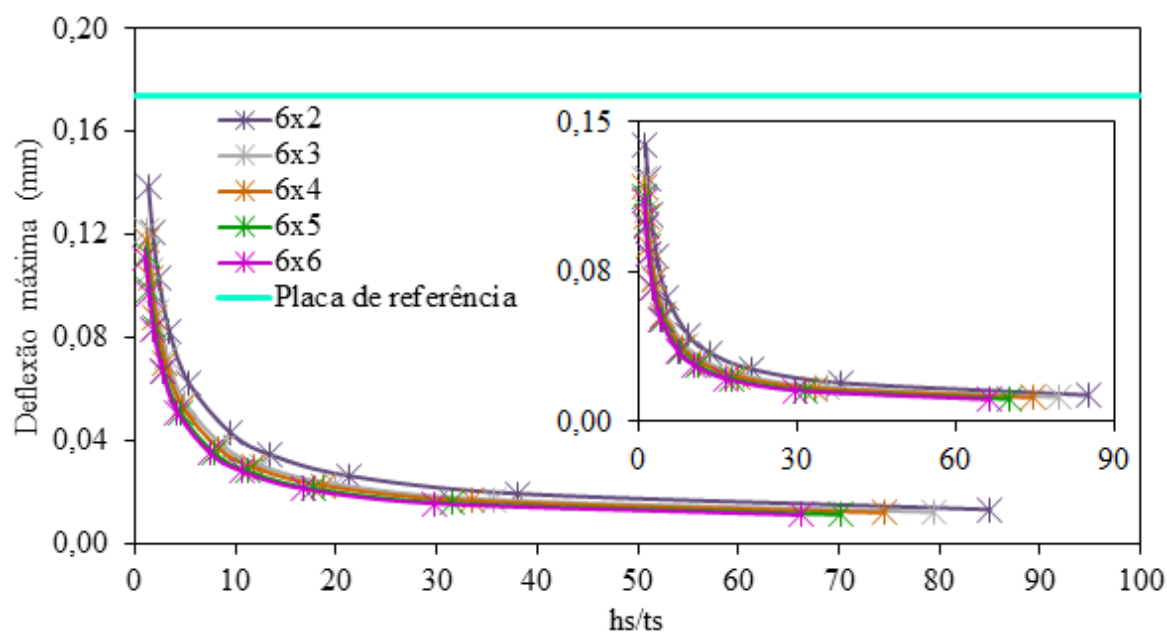


Figura 5.18. – Variações da deflexão máxima em função de h_s/t_s para $N_{ts} = 6$

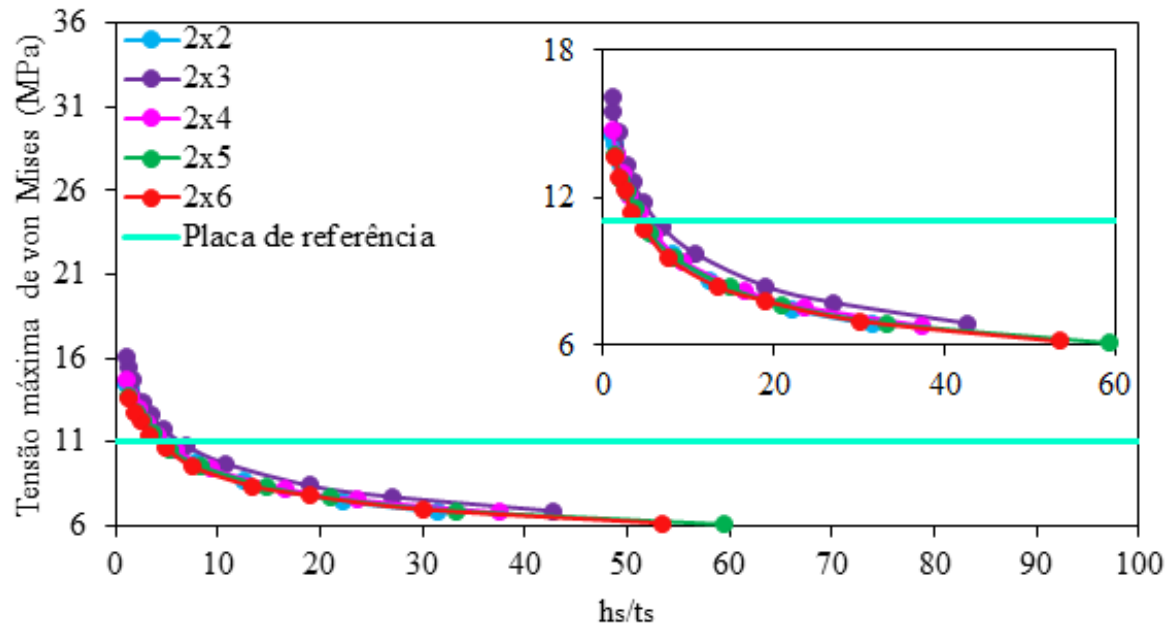


Figura 5.19. – Variações da tensão máxima de von Mises em função de h_s/t_s para $N_{ls} = 2$

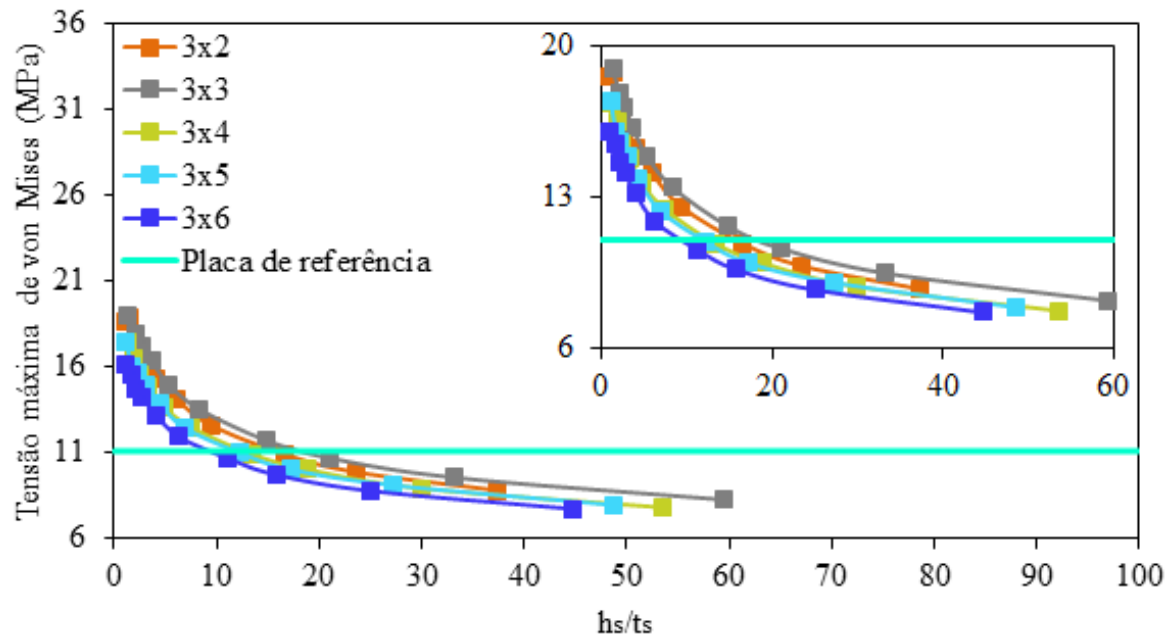


Figura 5.20. – Variações da tensão máxima de von Mises em função de h_s/t_s para $N_{ls} = 3$

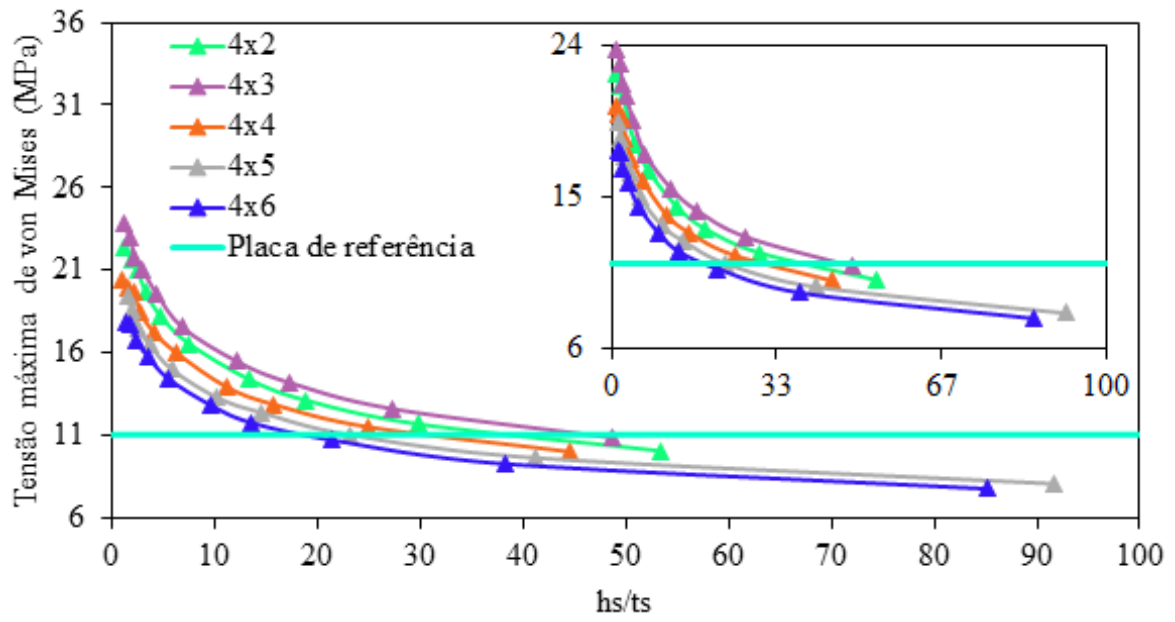


Figura 5.21. – Variações da tensão máxima de von Mises em função de h_s/t_s para $N_{ls} = 4$

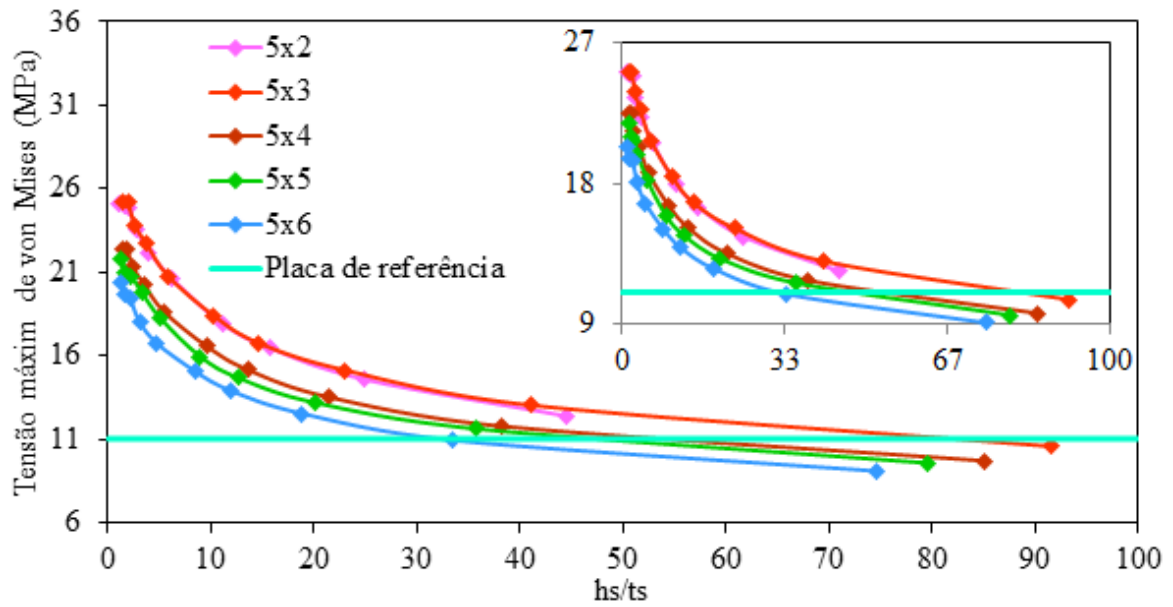


Figura 5.22. – Variações da tensão máxima de von Mises em função de h_s/t_s para $N_{ls} = 5$

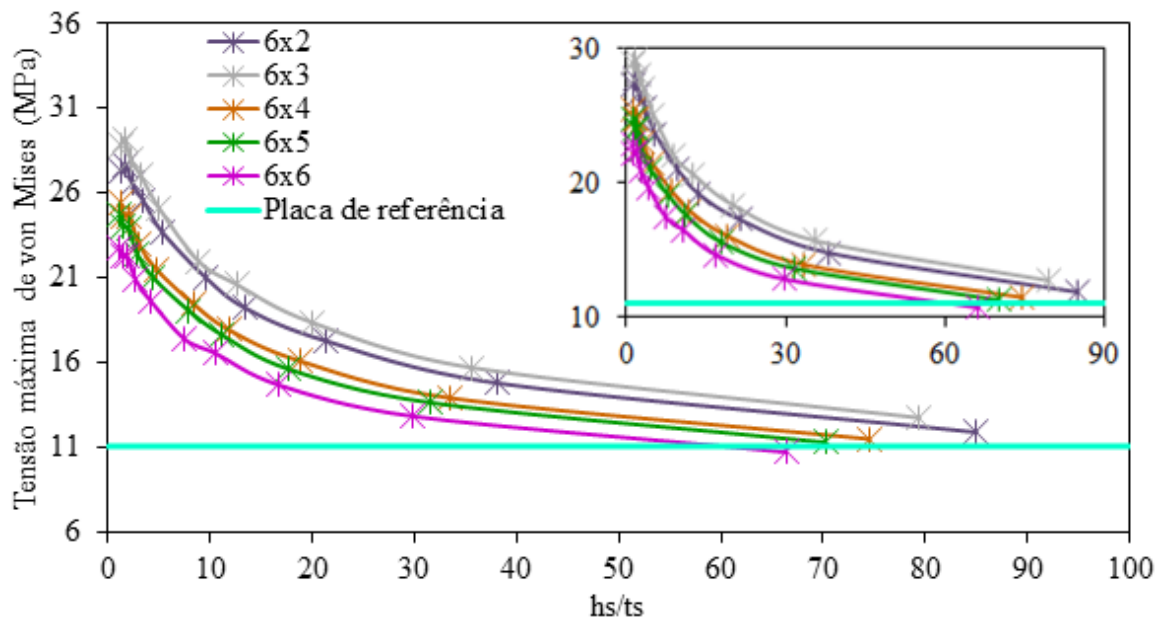


Figura 5.23. – Variações da tensão máxima de von Mises em função de h_s/t_s para $N_{ls} = 6$

Tabela 5.2. Tamanho do elemento finito SHELL281 utilizado em cada $P(N_{ls}, N_{ts})$.

$P(N_{ls}, N_{ts})$	Tamanho de elemento (mm)
P(2,2)	9,50
P(2,3)	10,25
P(2,4)	10,00
P(2,5)	11,25
P(2,6)	10,75
P(3,2)	10,50
P(3,3)	11,50
P(3,4)	11,50
P(3,5)	11,50
P(3,6)	11,75
P(4,2)	11,00
P(4,3)	11,00
P(4,4)	11,00
P(4,5)	12,50
P(4,6)	12,35
P(5,2)	11,25
P(5,3)	13,00
P(5,4)	12,75
P(5,5)	12,85
P(5,6)	12,85
P(6,2)	12,00
P(6,3)	12,25
P(6,4)	12,25
P(6,5)	12,50
P(6,6)	12,00

Além disso, foi simulada numericamente e verificada por meios analíticos a deflexão central da placa de referência sem enrijecedor. Para a verificação foi utilizada a equação da deflexão central para placas engastadas, exposta na Tab. 2.1, e obtido um resultado de 0,1734 mm. Para a simulação no software ANSYS 18.2 versão acadêmica foi utilizado uma malha de 10296 elementos com tamanho de 7 mm e foi obtido um deslocamento central e máximo de 0,1739 mm e uma tensão máxima de von Mises igual a 11,0468 MPa. Conforme pode ser observado, o resultado analítico de Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) foi 0,29% menor do que o valor numérico, demonstrando uma boa concordância entre os dois resultados.

Com relação aos resultados expostos nas Figs. 5.14 a 5.18 percebeu-se que a transformação de 30% de material da placa de referência em enrijecedores sempre conduz a uma melhoria em relação à deflexão, ou seja, todas as placas enrijecidas e engastadas nas suas bordas possuem deflexão máxima menor do que a placa de referência. Já para a tensão máxima de von Mises (Figs. 5.19 a 5.23), pode-se notar que configurações geométricas com valores de h_s/t_s maiores que aproximadamente 5 (Fig. 5.19), 10 (Fig. 5.20), 30 (Fig. 5.21), 45 (Fig. 5.22) e 65 (Fig. 5.23) apresentam comportamento mecânico superior à placa de referência e atingem tensões com magnitudes inferiores. Porém, para valores de h_s/t_s menores que estes valores, ocorreram um aumento na tensão máxima e, conseqüentemente, uma piora no comportamento mecânico. Outro aspecto constatado é que à medida que o valor de h_s/t_s aumenta, a deflexão (Figs. 5.14 a 5.18) e a tensão de von Mises (Fig. 5.19 a 5.23) das placas enrijecidas diminuem. Uma explicação para isto, de acordo com o que foi observado por Troina (2017), pode ser devido a um aumento do momento de inércia da seção transversal das novas estruturas formadas.

Na sequência a Tab. 5.3 mostra as melhores configurações geométrica para cada $P(N_{ls}, N_{ts})$, ou seja, as placas enrijecidas que melhor minimizaram a deflexão e a tensão de von Mises de cada combinação de enrijecedores longitudinais e transversais abordadas neste estudo.

Tabela 5.3. Melhores configurações geométricas que minimizaram as deflexões e as tensões.

Placa	Número de elementos	h_s/t_s	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
P(2,2)	10206	31,4176	0,0158	6,8348
P(2,3)	10398	42,7470	0,0126	6,8799
P(2,4)	9948	37,4378	0,0115	6,7789
P(2,5)	9900	59,4087	0,0091	6,0782
P(2,6)	10512	53,4905	0,0083	6,1451
P(3,2)	10128	37,3781	0,0128	8,7677
P(3,3)	10472	59,3771	0,0098	8,2325
P(3,4)	10124	53,4905	0,0096	7,7748
P(3,5)	10254	48,6658	0,0089	7,9187
P(3,6)	9970	44,6394	0,0087	7,6923
P(4,2)	10314	53,3885	0,0128	10,0742
P(4,3)	10564	48,6024	0,0114	10,8693
P(4,4)	10550	44,6038	0,0114	10,0198
P(4,5)	10080	91,7305	0,0085	8,0793
P(4,6)	10446	85,2262	0,0084	7,7685
P(5,2)	10035	44,4975	0,0154	12,3992
P(5,3)	10218	91,6179	0,0103	10,5903
P(5,4)	10488	85,1484	0,0101	9,7187
P(5,5)	10062	79,5323	0,0095	9,5940
P(5,6)	10287	74,6112	0,0093	9,1071
P(6,2)	10290	84,9932	0,0132	11,8790
P(6,3)	10374	79,4138	0,0122	12,7369
P(6,4)	10350	74,5218	0,0120	11,4844
P(6,5)	10044	70,1976	0,0112	11,2828
P(6,6)	10332	66,3476	0,0110	10,7066

Observando a Tab. 5.3, constatou-se que a placa enrijecida P(2,6) com h_s/t_s igual a 53,4905 apresentou a melhor minimização do resultado numérico da deflexão máxima obtida pelo modelo computacional desenvolvido no software ANSYS 18.2 versão acadêmica. O valor da deflexão foi 95,23% menor do que a deflexão máxima obtida pela placa de referência sem enrijecedor e em relação aos melhores resultados do grau de liberdade $N_{ls} = 3, 4, 5, 6$, obteve-se as seguintes variações:

- P(2,6) com $h_s/t_s = 53,4905$ foi 4,60% menor do que a placa P(3,6) com $h_s/t_s = 44,6394$ (menor deflexão alcançada pelo grau de liberdade $N_{ls} = 3$).
- P(2,6) com $h_s/t_s = 53,4905$ foi 1,19% menor do que a placa P(4,6) com $h_s/t_s = 85,2262$ (menor deflexão alcançada pelo grau de liberdade $N_{ls} = 4$).
- P(2,6) com $h_s/t_s = 53,4905$ foi 10,75% menor do que a placa P(5,6) com $h_s/t_s = 74,6112$ (menor deflexão alcançada pelo grau de liberdade $N_{ls} = 5$).
- P(2,6) com $h_s/t_s = 53,4905$ foi 24,55% menor do que a placa P(6,6) com $h_s/t_s = 66,3476$ (menor deflexão alcançada pelo grau de liberdade $N_{ls} = 6$).

A respeito da análise da tensão, a placa enrijecida P(2,5) com $h_s/t_s = 59,4087$ foi a melhor combinação geométrica que minimizou a tensão de von Mises. O seu resultado numérico foi 44,98% inferior em relação à tensão sofrida pela placa sem enrijecedor e em relação aos melhores resultados do grau de liberdade $N_{ls} = 3, 4, 5, 6$ para esta análise, obteve-se as seguintes variações:

- P(2,5) com $h_s/t_s = 59,4087$ foi 20,98% menor do que a placa P(3,6) com $h_s/t_s = 44,6394$ (menor tensão alcançada pelo grau de liberdade $N_{ls} = 3$).
- P(2,5) com $h_s/t_s = 59,4087$ foi 21,76% menor do que a placa P(4,6) com $h_s/t_s = 85,2262$ (menor tensão alcançada pelo grau de liberdade $N_{ls} = 4$).
- P(2,5) com $h_s/t_s = 59,4087$ foi 33,26% menor do que a placa P(5,6) com $h_s/t_s = 74,6112$ (menor tensão alcançada pelo grau de liberdade $N_{ls} = 5$).
- P(2,5) com $h_s/t_s = 59,4087$ foi 43,23% menor do que a placa P(6,6) com $h_s/t_s = 66,3476$ (menor tensão alcançada pelo grau de liberdade $N_{ls} = 6$).

Logo, ao analisar a influência do grau de liberdade N_{ts} (número de enrijecedores transversais), para os casos estudados, se notou que quando há seu aumento, de uma forma em geral, ocorre a diminuição da deflexão máxima e a diminuição da tensão máxima de von Mises das placas enrijecidas, conforme pode ser constatado na Fig. 5.24 e 5.25, respectivamente.

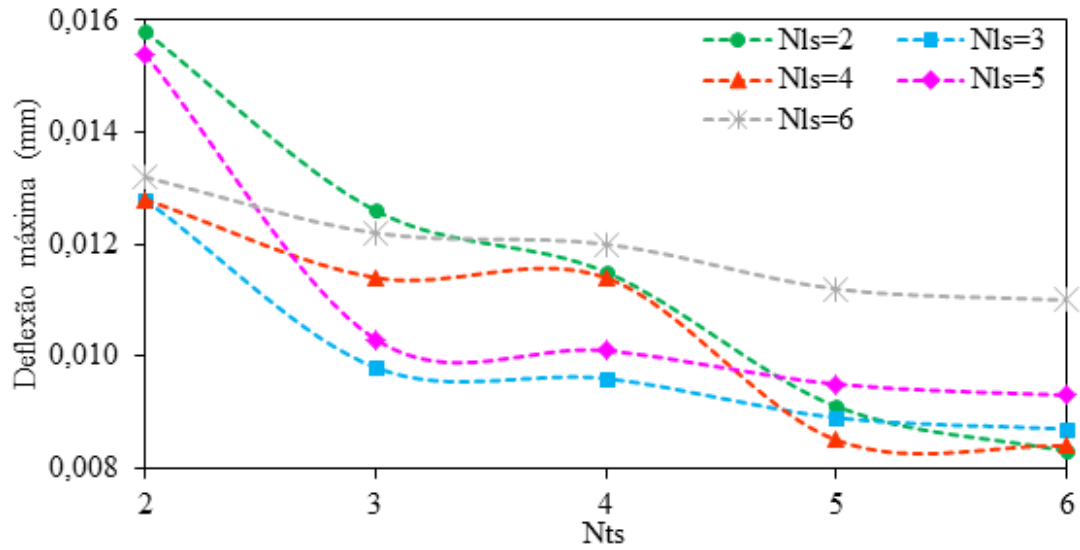


Figura 5.24. – Variações da deflexão máxima em função de N_{ts}

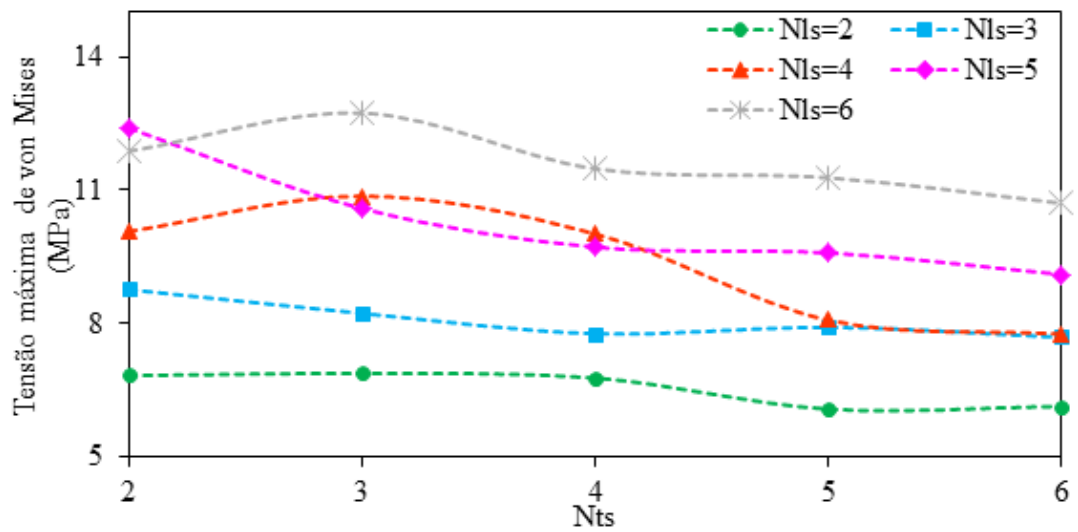


Figura 5.25. – Variações da tensão máxima de von Mises em função de N_{ts}

Por fim, uma avaliação qualitativa da forma defletida (Figs. 5.26, 5.27 e 5.28) e da distribuição de tensão (Figs. 5.29, 5.30 e 5.31) foram realizadas a partir dos resultados obtidos com o modelo computacional que emprega a condição de contorno de simetria em relação ao modelo que considera a placa inteira. Para isso, foi comparada a placa enrijecida P(2,6) com $h_s/t_s = 53,4905$ (melhor configuração geométrica defletida) em relação à placa P(6,2) com $h_s/t_s = 1,3581$ (pior configuração geométrica defletida), a placa P(2,5) com $h_s/t_s = 59,4087$ (melhor configuração geométrica para a tensão de von Mises) em relação a placa P(6,3) com $h_s/t_s = 1,2790$ (pior

configuração geométrica para a para a tensão de von Mises) e foi considerado a placa de referência para ambas as avaliações. Ainda, com relação às Figs. 5.26 a 5.31 se encontram acima os modelos computacionais que consideraram as placas completa e abaixo os modelos que empregaram a condição de contorno de simetria.

Observando as Figs. 5.26 a 5.31, é notada que as placas que utilizam a simetria demonstram uma boa semelhança na sua forma defletida. Já, para a distribuição de tensão, embora ainda seja bastante semelhante à placa com simetria em relação à placa inteira, esta característica não se manteve em virtude da placa que considera a condição de contorno de simetria utilizar uma malha bem mais refinada que a usada na placa inteira, ou seja, teoricamente o resultado mais acurado seria o modelo computacional que emprega a condição de simetria por apresentar uma malha com um maior número de elementos finitos.

Também, é notado que a variação da altura dos enrijecedores nas placas apresenta certo padrão na distribuição dos deslocamentos e das tensões. Por exemplo, a placa P(6,2) com $h_s/t_s = 1,3581$ (Fig. 5.27) tem o comportamento de deflexão mais global no centro da placa. De modo que a sua forma defletida é bastante semelhante à de uma placa que não contém nenhum enrijecedor em sua estrutura, conforme pode ser comparado a Fig. 5.26; e, a placa P(6,3) com h_s/t_s igual a 1,2790 (Fig. 5.30) demonstrou uma melhor distribuição das tensões ao longo de sua estrutura do que a placa de referência (Fig. 5.29). Entretanto, ocorreu uma maior concentração de tensão nos enrijecedores, de modo que sua magnitude máxima foi superior à placa não enrijecida, demonstrando uma piora em seu comportamento estrutural.

Enquanto que as placas P(2,6) com $h_s/t_s = 53,4905$ (Fig. 5.28) e P(2,5) com h_s/t_s igual a 59,4087 (Fig. 5.31) tem regiões confinadas entre os enrijecedores que se comportam como pequenas placas totalmente engastadas nas quatro bordas. Assim, demonstram uma melhora na rigidez e resistência estrutural pela maior influência dos enrijecedores e uma melhor distribuição dos deslocamentos e das tensões ao longo de sua estrutura do que as demais placas utilizadas nesta avaliação.

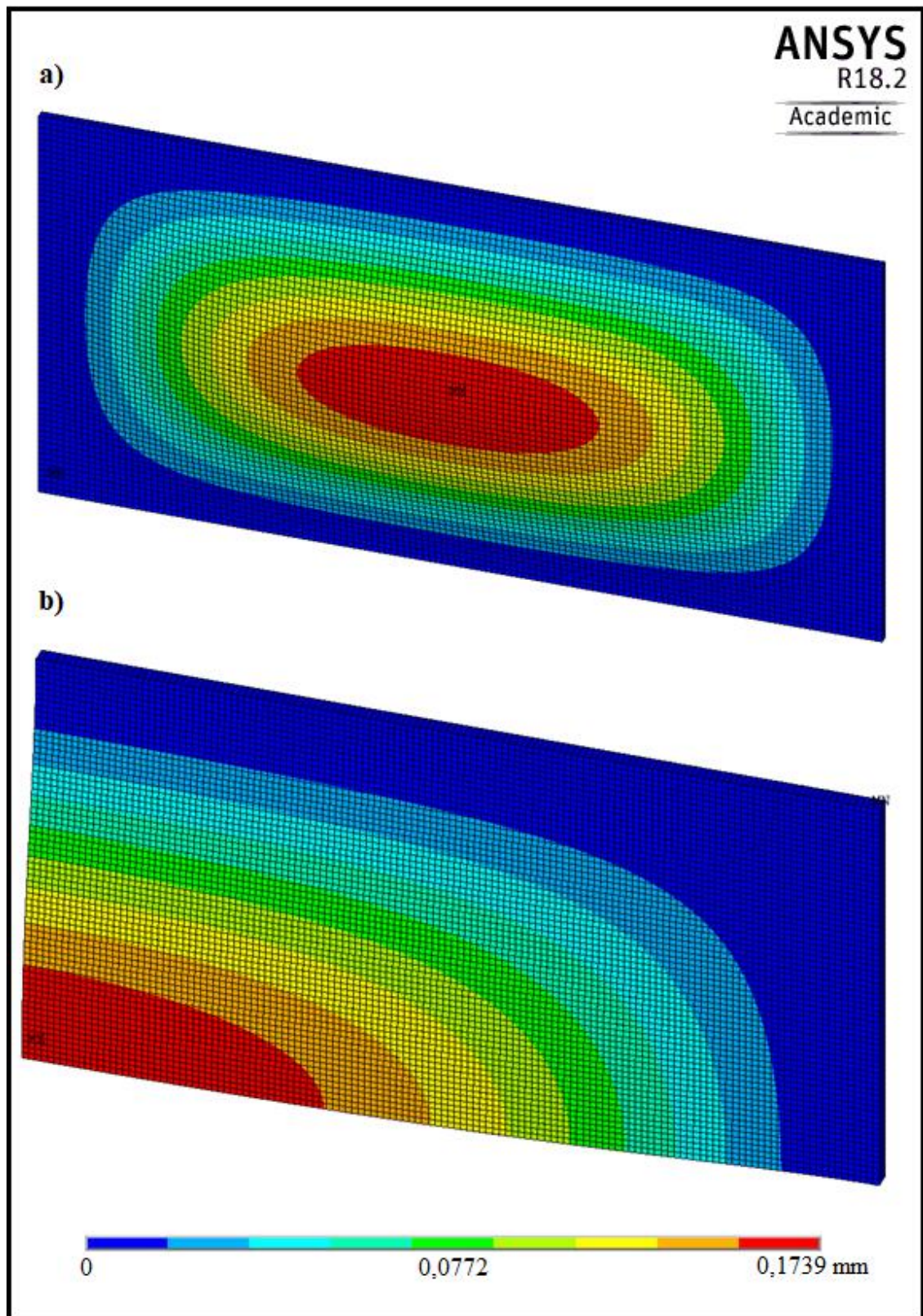


Figura 5.26. – Forma defletida da placa de referência sem enrijecedor a) inteira e b) considerando a condição de contorno de simetria

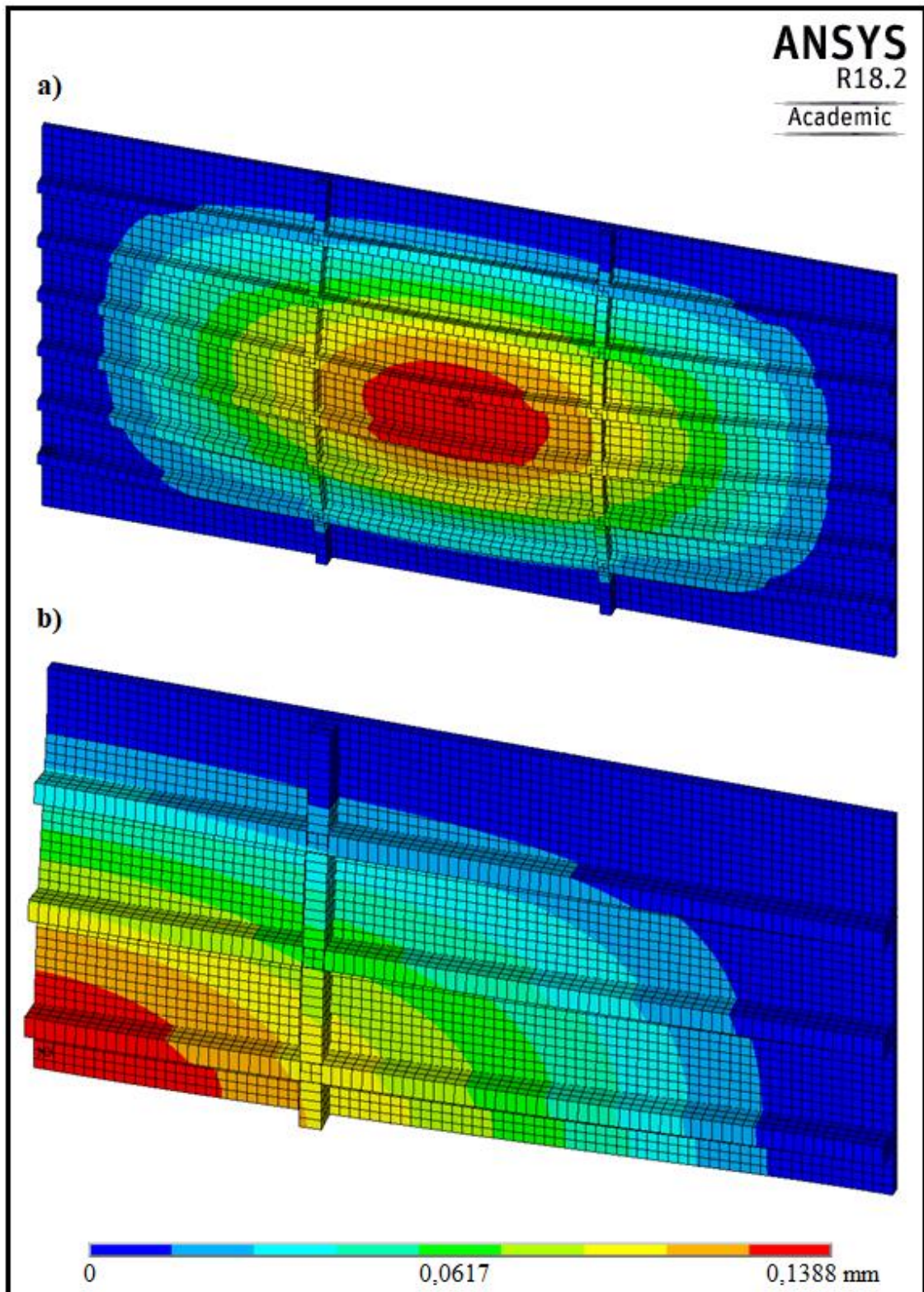


Figura 5.27. – Forma defletida da placa P(6,2) com $h_s/t_s = 1,3581$ a) inteira e b) considerando a condição de contorno de simetria

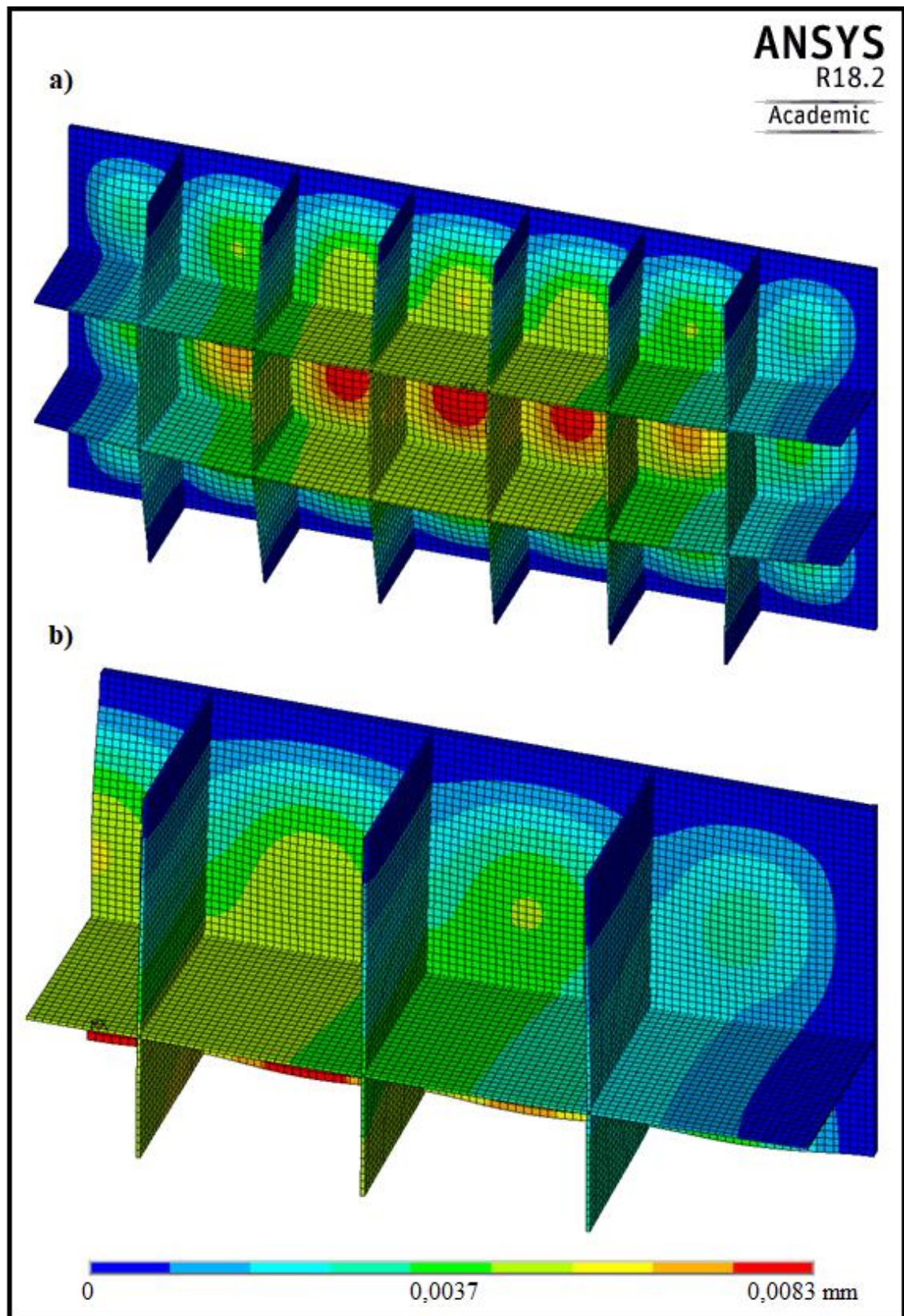


Figura 5.28. – Forma defletida da placa P(2,6) com $h_s/t_s = 53,4905$ a) inteira e b) considerando a condição de contorno de simetria

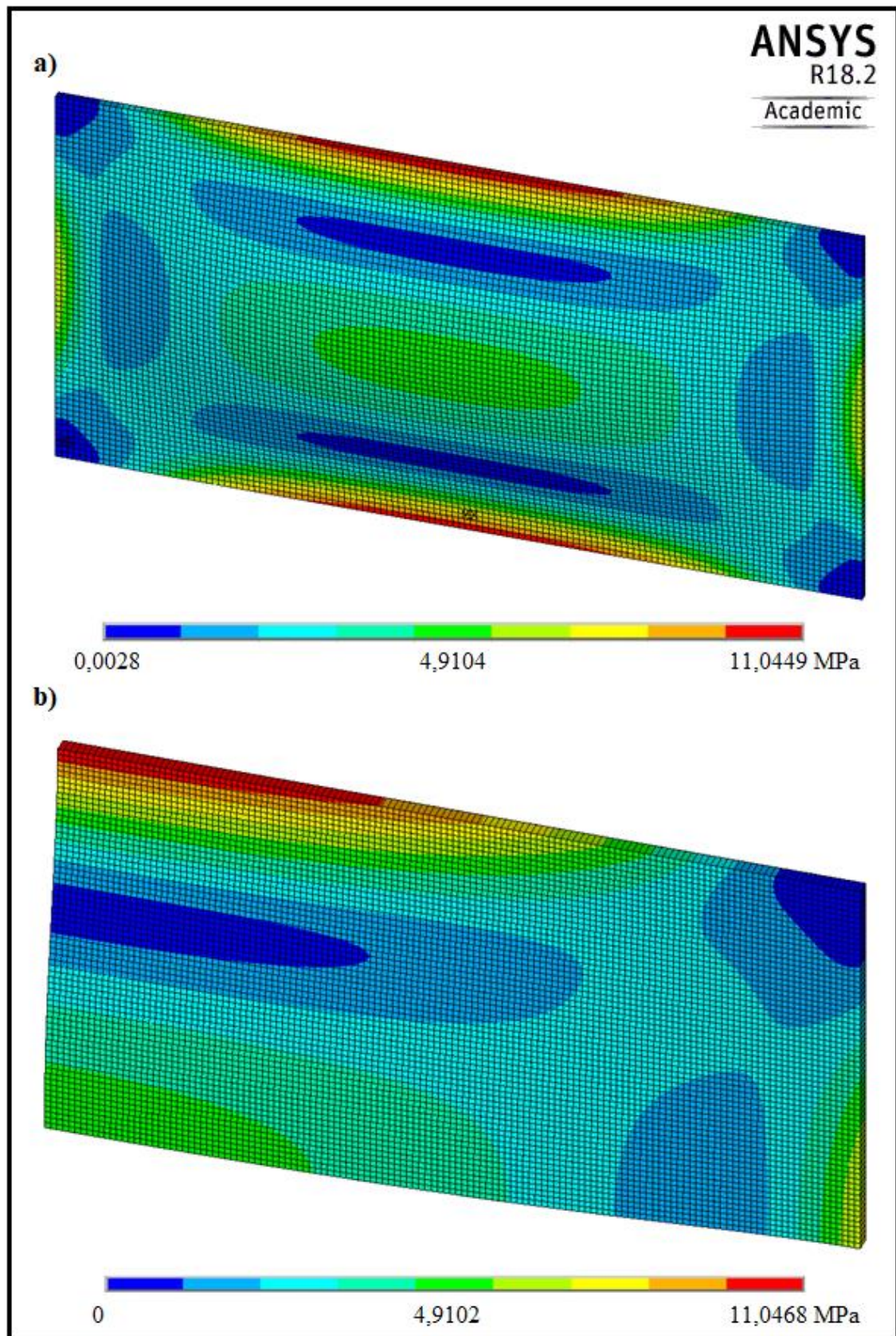


Figura 5.29. – Distribuição de tensões da placa de referência sem enrijecedor a) inteira e b) considerando a condição de contorno de simetria

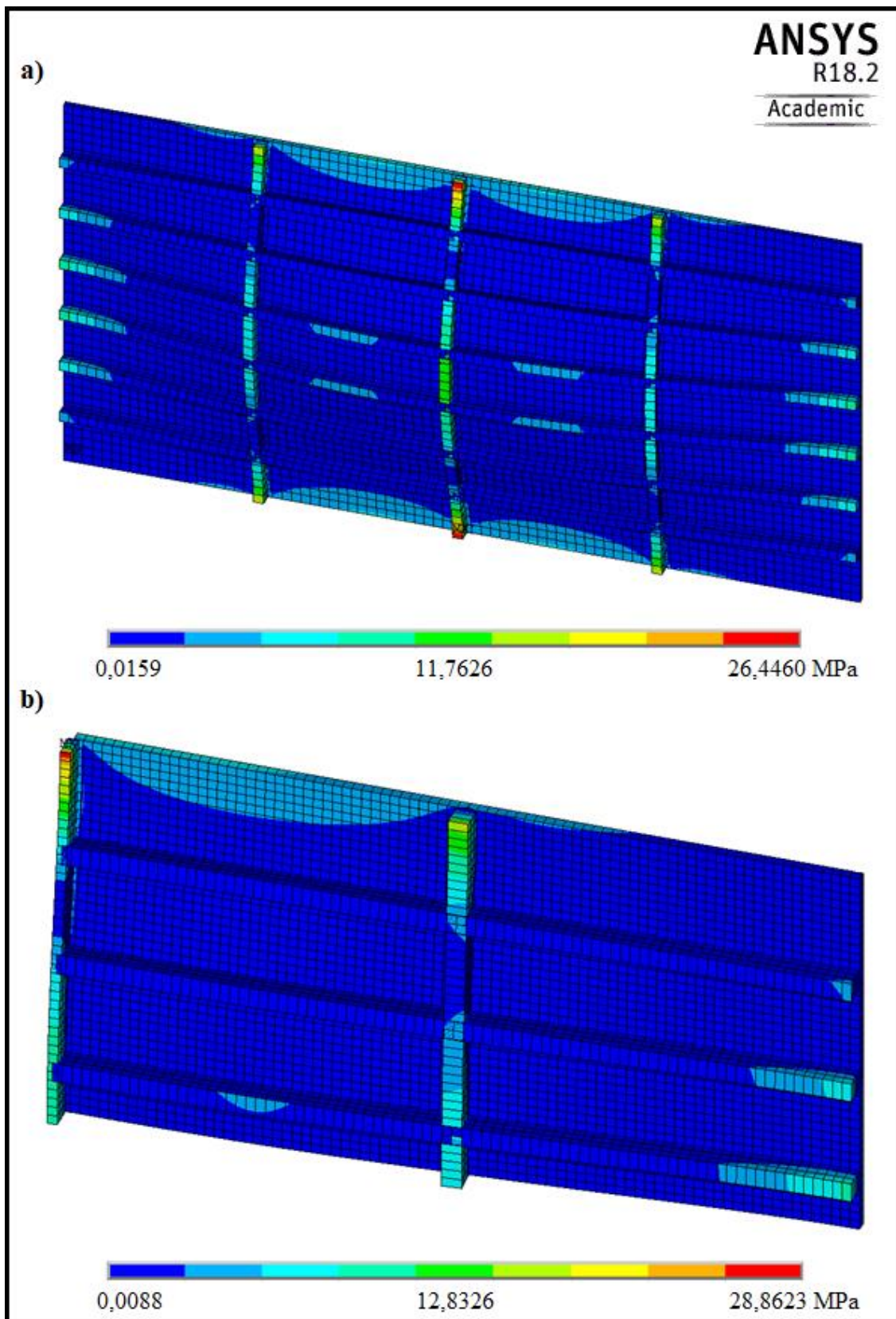


Figura 5.30. – Distribuição de tensões da placa P(6,3) com $h_s/t_s = 1,2790$ a) inteira e b) considerando a condição de contorno de simetria

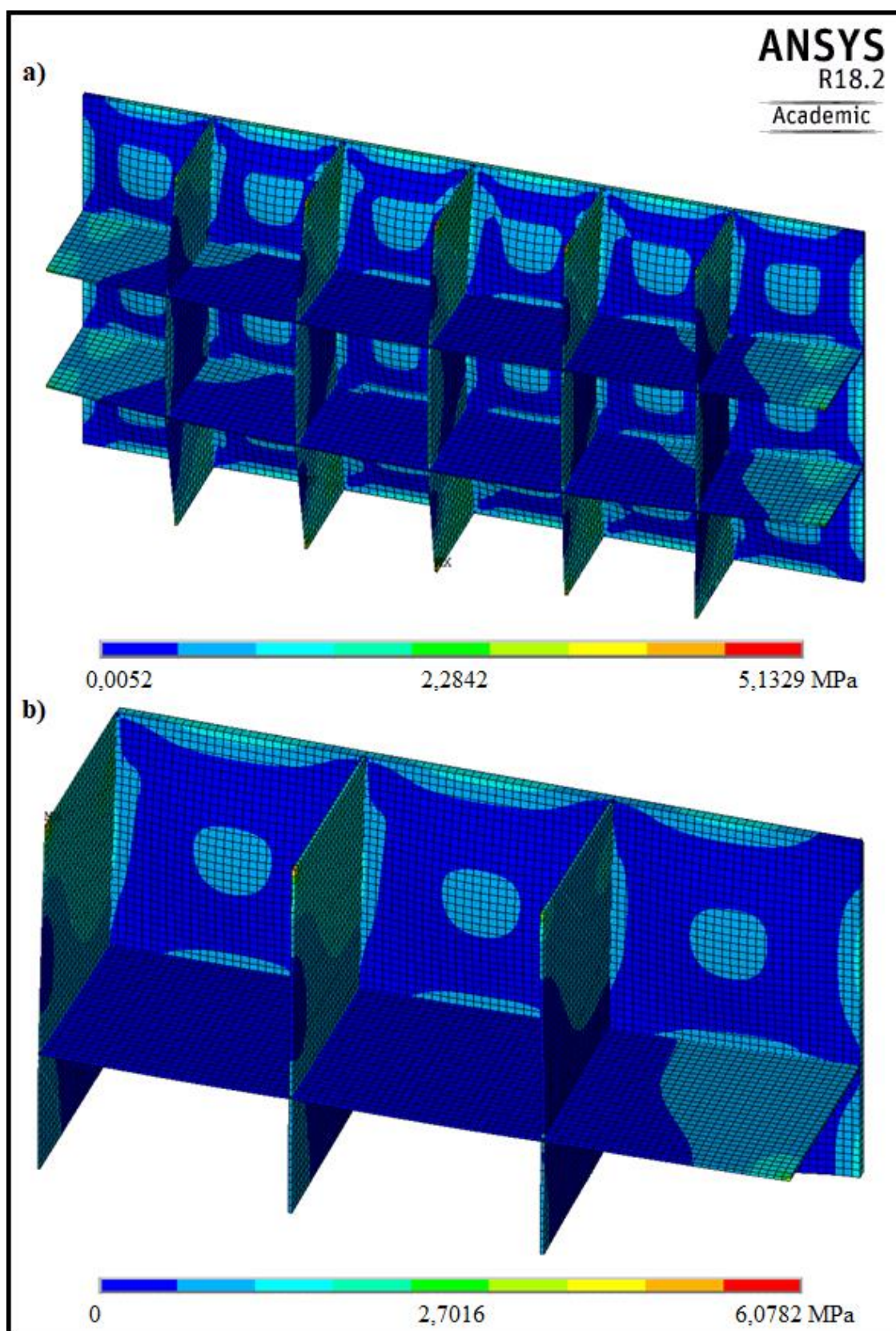


Figura 5.31. – Distribuição de tensões da placa P(2,5) com $h_s/t_s = 59,4087$ a) inteira e b) considerando a condição de contorno de simetria

6. CONCLUSÃO

A utilização do software ANSYS 18.2 versão acadêmica e o emprego do modelo computacional desenvolvido baseado no elemento finito SHELL281 com a condição de contorno de simetria possibilitaram a realização do estudo proposto. Para isso, diferentes configurações geométricas de placas com enrijecedores foram geradas a partir da aplicação do método Design Construtal em conjunto com a técnica da Busca Exaustiva. A aplicação deste método possibilitou determinar a melhor configuração geométrica de placa enrijecida que minimizasse a deflexão máxima e tensão máxima de von Mises. Para este propósito, parâmetros geométricos característicos de placas enrijecidas foram estudados.

O estudo possibilitou determinar um ganho de tempo no processamento computacional das simulações que utilizam a condição de contorno de simetria em 1/4 de placa na análise da deflexão, porque elas reduzem o domínio computacional do problema e, como consequência, necessitam de menos elementos finitos para sua discretização espacial. Por exemplo, a placa P(6,6) com $h_s/t_s = 66,3476$, apresentou uma redução de tempo no processamento computacional de 75,38% devido à placa com simetria necessitar de apenas 1 s para solucionar as equações de 2583 elementos; enquanto que a placa que considera o domínio computacional como inteiro necessitou de 4,06 s para solucionar as equações de 10.332 elementos finitos, isto para um mesmo tamanho de elemento finito. A respeito da memória RAM, alocada para solucionar estas equações, a placa sem simetria utilizou 747,25 MB; e, o domínio computacional que considera 1/4 de placa com simetria, necessitou de apenas 162,30 MB, demonstrando, assim, uma redução de 78,28%. Estas informações são válidas para um computador que apresenta um processador Intel ® Core™ i7-3770 CPU com uma frequência de 3,40 GHz e duas memórias RAM de 8GB, uma com uma frequência de 1333 MHz e outra com 1600 MHz.

A respeito da análise das tensões, considerando a análise linear-elástica realizada, os resultados obtidos indicaram a necessidade de continuidade do teste de convergência de malha, ou seja, a utilização de malhas mais refinadas. Porém, a versão acadêmica do software ANSYS 18.2 limita as simulações a um uso máximo de 32.000 nós. Malhas com tamanhos de elementos finitos menores do que os adotados no modelo com simetria ultrapassam esse limite de nós. Também, notou-se que a condição de contorno de simetria possibilita a utilização de malhas mais refinadas com relação às simulações que consideram a placa inteira no software ANSYS versão acadêmica. Esse é um aspecto importante, uma vez que a versão acadêmica do ANSYS possui uma limitação em relação ao refinamento de malha.

Com relação ao estudo de caso, demonstrou-se que a transformação de 30% do volume de uma placa sem enrijecedor em enrijecedores longitudinais e transversais acarreta, de uma maneira geral, numa melhoria do desempenho mecânico estrutural. Além disso, foi demonstrado que, além do número de enrijecedores longitudinais N_{ls} e enrijecedores transversais N_{ts} , a relação altura de enrijecedor por espessura de enrijecedor h_s/t_s teve uma forte influência na rigidez e na resistência das placas. O motivo é que foi constatado na análise da tensão que não foram todos os casos abordados que apresentaram uma resistência mecânica superior à placa de referência. Por exemplo, h_s/t_s menores que aproximadamente 5 (placas com $N_{ls} = 2$), 10 (placas com $N_{ls} = 3$), 30 (placas com $N_{ls} = 4$), 45 (placas com $N_{ls} = 5$) e 65 (placas com $N_{ls} = 6$) apresentam uma piora na sua resistência mecânica. O pior caso desta análise foi à placa P(6,3) com $h_s/t_s = 1,2790$, pois foi detectada uma tensão 161,27% acima do valor da tensão máxima obtida pela placa de referência. Assim, a análise das diferentes configurações geométricas com mesmo volume de material provou que o aumento do número de enrijecedores nem sempre implica em redução da tensão das placas, evidenciando a importância da avaliação geométrica nesse tipo de componente estrutural.

Ao analisar a influência do grau de liberdade N_{ts} , para os casos estudados, se notou que quando há seu aumento, de uma forma em geral, ocorre à diminuição da deflexão máxima e a diminuição da tensão máxima de von Mises das placas enrijecidas. Característica esta que não se repete ao grau de liberdade N_{ls} na análise da tensão de von Mises, pois foi observado que o seu aumento provoca uma piora no comportamento mecânico das placas enrijecidas.

A respeito das melhores configurações geométricas, a placa enrijecida que melhor minimizou a deflexão máxima foi à placa P(2,6) com $h_s/t_s = 53,4905$ devido a uma redução de 95,23% em relação ao valor obtido pela placa de referência sem enrijecedores e uma redução de 94,02% em relação à placa P(6,2) com $h_s/t_s = 1,3581$ (pior configuração geométrica defletida). Para a análise da tensão, a placa P(2,5) com $h_s/t_s = 59,4087$ apresentou a melhor minimização do resultado numérico obtido da tensão máxima de von Mises, pois foi alcançado um valor de tensão 44,98% menor do que o atingido pela placa de referência sem enrijecedor e 78,94% menor do que a tensão da placa P(6,3) com $h_s/t_s = 1,2790$ (pior configuração geométrica da tensão de von Mises).

Portanto, foi possível desenvolver e verificar um modelo computacional que utiliza a condição de contorno de simetria para a análise de deflexão e análise de tensão das placas enrijecidas. Ademais, foi utilizado o Método Design Construtal, em conjunto com a modelagem computacional, na área da mecânica dos sólidos devido à possibilidade de determinar quais os parâmetros geométricos que melhor minimizam as deflexões e tensões geradas por um carregamento transversal.

6.1. Proposta de continuidade

Como proposta de continuidade desse trabalho para realização de pesquisas futuras, são feitas as seguintes sugestões:

1. Considerar diferentes frações de volumétricas $\phi > 0,30$ para avaliar a influência da fração volumétrica a ser transformada em enrijecedores transversais e longitudinais na análise de deflexão e de tensão.
2. Considerar diferentes combinações de placas $P(N_{ls}, N_{ts})$.
3. Considerar a utilização de um modelo computacional elasto-plástico para o comportamento do material, permitindo a determinação da tensão última nas placas enrijecidas.
4. Realizar um estudo considerando diferentes seções transversais para os enrijecedores no objetivo de investigar mais graus de liberdade no comportamento estrutural das placas.
5. Considerar diferentes espaçamentos entre os enrijecedores.
6. Utilizar diferentes condições de vinculação nas placas com enrijecedores ao considerar a condição de contorno de simetria.
7. Aplicar o Método Design Construtal com outros métodos computacionais, como por exemplo, com o Algoritmo Genético, Redes Neurais e Redes neuronebulosas; no objetivo de fazer novos dimensionamentos e otimizações do comportamento estrutural das placas enrijecidas.

7. REFERÊNCIAS

- ANSYS, Inc. **ANSYS® Academic Research Mechanical, Release 18.2, Help System, Coupled Field Analysis Guide.**
- BANAI, L.; PEDATZUR, O.; Computer implementation of an orthotropic plate model for quick estimation of the maximum deflection of stiffened plates. **Ships and offshores structures**, **1:4**, pp 323-333, 2010.
- BATHE, K. J.; **Finite Element Procedures.** Watertown, MA, 2014.
- BEDAIR, O. K.; Analysis of stiffened plates under lateral loading using sequential quadratic programming (SQP). **Computers & Structures**, **Vol. 62**, No. 1, pp 63-80, 1997.
- BEJAN, A.; LORENTE, S.; **Design with Constructal Theory.** Wiley, Hoboken, 2008.
- BEJAN, A.; **The Physics of Life: the evolution of everything.** St. Martin Press, New York, 2016.
- BELLEI, I. H.; **Edifícios Industriais em aço (2ª ed.).** São Paulo, 1998.
- BHASKAR, K.; PYDAH, A.; An elasticity approach for simply-supported isotropic and orthotropic stiffened plates. **International Journal of Mechanical Sciences**, **89**, pp 21-30, 2014.
- BHASKAR, K.; VARADAN, T. K.; **Plates Theories and Applications.** Ane Books Pvt. Ltd., New Delhi, India, 2013.
- BHAVIKATTI, S. S.; **Finite Element Analysis.** New Age International (P) Ltd, New Delhi, India, 2005.
- DE MELO, H. S., 2016. **Um estudo comparativo entre métodos analíticos clássicos e numérico (MEF) para o cálculo de tabuleiro de pontes em grelhas.** Dissertação de mestrado em Estruturas e Construção Civil, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília.
- DONIN, C.; MACHADO, G. G.; Análise de modelos para a distribuição de ações em pontes rodoviárias dotada de múltiplas vigas utilizando o método dos elementos finitos. **Revista Engenharia Estudo e Pesquisa – Associação Brasileira de Pontes e Estruturas (ABPE)**, **48**, pp 34-41, 2018.
- KHOURY, R.; HARDER, D.W. **Numerical Methods and Modelling for Engineering.** Springer International Publishing, 2016.
- KOLLI, M.; CHANDRASHEKHARA, K.; Finite element analysis of stiffened laminated plates under transverse loading. **Composites Science and Technology**, **56**, pp 1355-1361, 1996.
- KURRER, K.; **The History of the Theory of Structures: Searching for Equilibrium.** Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, Germany.

- LAW, A.M; KELTON, W.D.; **Simulation Modeling and Analysis**. McGraw-Hill, Singapore, 1991.
- LIU, G. R.; QUEK, S. S.; **The finite Method: A Practical Course**. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2003.
- MARIA, A.; Introduction to modeling and simulation. **Winter Simulation Conference Proceedings**, pp 7-13, 1997.
- MOAVENI, S. **Finite Element Analysis – Theory and Application with ANSYS**, Prentice-Hall inc., New Jersey, 1999.
- O’LEARY, J. R.; HARARI, I.; Finite Element Analysis of Stiffened Plates. **Computers & Structures**, Vol. 21, No. 5, pp 973-985, 1985.
- OROZCO, J. C. G., 2009. **Contribuição ao estudo de painéis reforçados: comparação entre o método da chapa ortotrópica e o método dos elementos finitos**. Dissertação de mestrado em Engenharia, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- PYDAH, A.; BHASKAR, K.; Accurate discrete modelling of stiffened isotropic and orthotropic rectangular plates. **Thin-Walled Structures**, 97, pp 266-278, 2015.
- RAO, S. S.; **The Finite Element Method in Engineering**. Elsevier Inc., Burlington, 2011.
- REDDY, J. N.; **Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells**. Taylor and Francis Group, 2007.
- REIS, A. H. Constructal theory: from engineering to physics, and how systems flow develop shape and structure. **Applied Mechanics Reviews**, v. 59, p. 269-281, 2006.
- ROCHA, L. A. O.; LORENTE, S.; BEJAN, A.; **Constructal Law and the Unifying Principle of Design**. Springer Science+Business Media, New York, 2013.
- ROSSOWT, M. P.; IBRAHIMKHAIL, A. K.; Constraint Method Analysis of Stiffened Plates. **Computers & Structures**, Vol. 8, pp 51-60, 1978.
- SALOMON, A.; **An evaluation of finite element models of stiffened plates**, 2001. Dissertação de mestrado em Engenharia Oceânica, de Massachusetts Institute of Technology.
- SAPOUNTZAKIS, E. J.; DIKAROS, I. C.; Large deflection analysis of plates stiffened by parallel beams. **Engineering Structures**, 35, pp 254-271, 2012.
- SAPOUNTZAKIS, E. J.; KATSIKADELIS, J. T.; Analysis of plates reinforced with beams. **Computational Mechanics**, 26, pp 66-74, 2000.
- SAPOUNTZAKIS, E. J.; MOKOS, V. G.; An improvement model for the analysis of plates stiffened by parallel beams with deformable connection. **Computers and Structures**, 86, pp 2166-2181, 2008.

- SCHADE, H. A.; Design curves for cross-stiffened plating. **Transactions of SNAME**, v. 49, p. 154–182, 1941.
- SCHADE, H. A.; The effective breadth of stiffened plating under bending loads. **Transactions of SNAME**, v. 59, p. 127–141, 1951.
- SCHADE, H. A.; The orthogonally stiffened plate under uniform lateral load. **Journal of Applied Mechanics**, v. 7(4), p. 139–158, 1940
- SHANMUGAM, N. E.; WANG, C.M.; **Analysis and design of plated structures**. Woodhead Publishing Limited, Abington Hall, Cambridge, England, 2006.
- SILVA, H. B. S., 2010. **Análise numérica da influência da excentricidade na ligação placa-viga em pavimentos usuais de edifícios**. Dissertação de mestrado em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia, Universidade Federal de São Carlos.
- SINGH, V. P.; **System Modeling and Simulation**. New Age International (P) Ltd., Publishers, New Delhi, 2009.
- STOLARSKI, T.; NAKASONE, Y.; YOSHIMOTO, S.; **Engineering Analysis with ANSYS Software (2nd ed.)**. The Boulevard, Langford Lane, Kidlington, Oxford OX5 1GB, United Kingdom, 2018.
- SZILARD, R.; **Theories and Applications of Plate Analysis: Classical Numerical and Engineering Methods**. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2004.
- TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of plates and shells**. McGraw Hill, 1959.
- TROINA, G. da S.; **Modelagem computacional e Método Design Construtal aplicados à otimização geométrica de placas finas de aço com enrijecedores submetidas a carregamento transversal uniforme**, 2017. Dissertação de mestrado em engenharia Oceânica, Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande.
- VAZ, L. E.; **Método dos elementos finitos em análise de estruturas (1ª ed.)**. Rio de Janeiro, 2011.
- VELLASCO, P. C. G.; DE LIMA, L. R. O.; DE ANDRADES, S. A. L.; VELLASCO, M. M. B. R.; DA SILVA, A. P. S.; **Modelagem de estruturas de aço e mistas (1ª ed.)**. Rio de Janeiro, 2014.
- VENTSEL, E.; KRAUTHAMMER, T.; **Thin Plates and Shells – Theory, Analysis and Applications**. Marcel Dekker, Inc., 2001.
- ZIENKIEWWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; **The Finite Element Method – Volume 1: The basis**. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.

APÊNDICE A – Teste de convergência de malha das placas enrijecidas $P(N_{ls}, N_{ts})$

Tabela A.1. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica P(2,2).

Tamanho do elemento (mm)	Número de elementos	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
304	27	0,015	2,942
152	84	0,016	3,570
76	231	0,016	4,294
38	699	0,016	4,947
19	2592	0,016	5,830
9,50	10206	0,016	6,8348

Tabela A.2. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica P(2,3).

Tamanho do elemento (mm)	Número de elementos	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
328	22	0,014	2,873
164	88	0,012	3,547
82	254	0,013	4,292
41	782	0,013	4,964
20,50	2806	0,013	5,873
10,25	10398	0,013	6,8799

Tabela A.3. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica P(2,4).

Tamanho do elemento (mm)	Número de elementos	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
320	26	0,012	2,953
160	104	0,011	3,627
80	234	0,012	4,066
40	705	0,012	4,862
20	2598	0,012	5,750
10	9948	0,012	6,7789

Tabela A.4. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica P(2,5).

Tamanho do elemento (mm)	Número de elementos	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
360	21	0,006	2,646
180	48	0,010	3,073
90	192	0,009	3,763
45	708	0,009	4,392
22,50	2601	0,009	5,150
11,25	9900	0,009	6,0782

Tabela A.5. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica P(2,6).

Tamanho do elemento (mm)	Número de elementos	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
344	37	0,009	2,675
172	53	0,009	3,172
86	180	0,008	3,623
43	720	0,008	4,363
21,50	2628	0,008	5,192
10,75	10512	0,008	6,1451

Tabela A.6. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica P(3,2).

Tamanho do elemento (mm)	Número de elementos	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
336	14	0,011	3,694
168	56	0,013	4,707
84	162	0,013	5,269
42	648	0,013	6,315
21	2592	0,013	7,485
10,50	10128	0,013	8,7677

Tabela A.7. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica P(3,3).

Tamanho do elemento (mm)	Número de elementos	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
368	20	0,008	3,371
184	64	0,010	4,272
92	213	0,010	5,148
46	740	0,010	6,005
23	2684	0,010	7,006
11,50	10472	0,010	8,2325

Tabela A.8. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica P(3,4).

Tamanho do elemento (mm)	Número de elementos	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
368	24	0,008	3,270
184	96	0,010	4,146
92	216	0,009	4,653
46	744	0,010	5,600
23	2598	0,010	6,627
11,50	10124	0,010	7,7748

Tabela A.9. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica P(3,5).

Tamanho do elemento (mm)	Número de elementos	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
368	18	0,007	3,368
184	72	0,009	4,325
92	198	0,009	4,840
46	792	0,009	5,807
23	2706	0,009	6,751
11,50	10254	0,009	7,9187

Tabela A.10. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica P(3,6).

Tamanho do elemento (mm)	Número de elementos	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
376	34	0,008	3,416
188	80	0,009	4,317
94	222	0,009	4,813
47	796	0,009	5,553
23,50	2718	0,009	6,568
11,75	9970	0,009	7,6923

Tabela A.11. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica P(4,2).

Tamanho do elemento (mm)	Número de elementos	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
352	26	0,013	4,634
176	64	0,013	5,348
88	222	0,013	6,038
44	738	0,013	7,226
22	2652	0,013	8,524
11	10314	0,013	10,0742

Tabela A.12. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica P(4,3).

Tamanho do elemento (mm)	Número de elementos	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
352	38	0,011	4,943
176	74	0,011	5,955
88	252	0,011	6,709
44	828	0,011	8,002
22	2712	0,011	9,269
11	10564	0,011	10,8693

Tabela A.13. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica P(4,4).

Tamanho do elemento (mm)	Número de elementos	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
352	45	0,012	4,655
176	110	0,011	5,593
88	300	0,011	6,294
44	775	0,011	7,186
22	2750	0,011	8,476
11	10550	0,011	10,0198

Tabela A.14. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica P(4,5).

Tamanho do elemento (mm)	Número de elementos	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
400	36	0,008	4,122
200	84	0,009	4,245
100	177	0,009	4,729
50	642	0,009	5,718
25	2568	0,009	6,819
12,50	10088	0,009	8,0793

Tabela A.15. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica P(4,6).

Tamanho do elemento (mm)	Número de elementos	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
395,20	64	0,008	3,740
197,60	93	0,009	4,166
98,80	314	0,008	4,712
49,40	837	0,008	5,662
24,70	2799	0,008	6,584
12,35	10046	0,008	7,7685

Tabela A.16. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica P(5,2).

Tamanho do elemento (mm)	Número de elementos	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
360	21	0,015	5,665
180	60	0,015	6,886
90	198	0,015	7,780
45	708	0,015	8,963
22,50	2670	0,015	10,635
11,25	10035	0,015	12,3992

Tabela A.17. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica P(5,3).

Tamanho do elemento (mm)	Número de elementos	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
416	30	0,010	4,665
208	66	0,010	5,596
104	186	0,010	6,294
52	744	0,010	7,623
26	2784	0,010	9,045
13,00	10218	0,010	10,5903

Tabela A.18. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica P(5,4).

Tamanho do elemento (mm)	Número de elementos	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
408	36	0,010	4,239
204	57	0,010	5,177
102	186	0,010	5,842
51	744	0,010	7,054
25,50	2622	0,010	8,206
12,75	10488	0,010	9,7187

Tabela A.19. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica P(5,5).

Tamanho do elemento (mm)	Número de elementos	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
411,20	27	0,009	4,263
205,60	72	0,009	5,243
102,80	234	0,009	5,916
51,40	747	0,009	6,845
25,70	2619	0,009	8,126
12,85	10062	0,009	9,5940

Tabela A.20. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica P(5,6).

Tamanho do elemento (mm)	Número de elementos	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
411,20	51	0,009	4,517
205,60	81	0,009	5,048
102,80	264	0,009	5,697
51,40	747	0,009	6,583
25,70	2772	0,009	7,798
12,85	10287	0,009	9,1071

Tabela A.21. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica P(6,2).

Tamanho do elemento (mm)	Número de elementos	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
384	37	0,014	5,839
192	92	0,014	6,387
96	213	0,014	7,123
48	756	0,014	8,607
24	2646	0,014	10,123
12	10290	0,014	11,8790

Tabela A.22. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica P(6,3).

Tamanho do elemento (mm)	Número de elementos	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
392	54	0,012	6,103
196	106	0,012	7,007
98	234	0,012	7,791
49	872	0,012	9,396
24,50	2730	0,012	10,850
12,25	10374	0,012	12,7369

Tabela A.23. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica P(6,4).

Tamanho do elemento (mm)	Número de elementos	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
392	64	0,012	5,421
196	158	0,012	6,437
98	282	0,012	7,133
49	865	0,012	8,237
24,50	2715	0,012	9,703
12,25	10350	0,012	11,484

Tabela A.24. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica P(6,5).

Tamanho do elemento (mm)	Número de elementos	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
400	51	0,011	5,498
200	120	0,011	6,495
100	255	0,011	7,168
50	819	0,011	8,270
25	2583	0,011	9,526
12,50	10044	0,011	11,283

Tabela A.25. Teste de convergência de malha para a configuração geométrica P(6,6).

Tamanho do elemento (mm)	Número de elementos	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
384	91	0,011	5,201
192	133	0,011	6,213
96	287	0,011	6,830
48	819	0,011	7,871
24	2583	0,011	9,049
12	10332	0,011	10,707

APÊNDICE B – Resultados numéricos obtidos para cada configuração geométrica

Tabela B.1. Resultados numéricos para a placa P(2,2) com simetria.

Número de elementos	h_s/t_s	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
10206	31,4176	0,0158	6,8348
9558	22,1622	0,0171	7,4783
8586	12,5059	0,0202	8,6337
8100	7,9958	0,0240	9,7317
7776	5,4900	0,0284	10,7519
7452	4,1191	0,0328	11,4478
7290	3,1534	0,0379	12,2178
6966	2,0206	0,0486	13,2957
6804	1,4137	0,0596	14,1013
6804	1,2057	0,0651	14,5104
6642	1,0409	0,0708	14,5284

Tabela B.2. Resultados numéricos para a placa P(2,3) com simetria.

Número de elementos	h_s/t_s	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
10398	42,7470	0,0126	6,8799
9398	26,9707	0,0137	7,7307
8598	19,0309	0,0149	8,3861
7798	10,7456	0,0152	9,7220
7198	6,8746	0,0179	10,8012
6798	4,7232	0,0258	11,7685
6598	3,5459	0,0301	12,6044
6398	2,7163	0,0349	13,3343
6198	1,7427	0,0451	14,6654
5998	1,2208	0,0555	15,5114
5998	1,0419	0,0608	16,0325

Tabela B.3. Resultados numéricos para a placa P(2,4) com simetria.

Número de elementos	h_s/t_s	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
9948	37,4378	0,0115	6,7789
8938	23,6265	0,0128	7,5459
8332	16,6749	0,0142	8,2009
7524	9,4196	0,0177	9,3908
7120	6,0292	0,0219	10,4964
6716	4,1444	0,0268	11,3493
6514	3,1127	0,0316	12,0790
6514	2,3856	0,0369	12,9857
6110	1,5320	0,0481	13,7598
6110	1,0743	0,0591	14,7366

Tabela B.4. Resultados numéricos para a placa P(2,5) com simetria.

Número de elementos	h_s/t_s	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
9900	59,4087	0,0091	6,0782
8325	33,3017	0,0102	6,8835
7425	21,0202	0,0116	7,6380
6975	14,8380	0,0131	8,3247
6300	8,3850	0,0170	9,5352
5850	5,3689	0,0215	10,5471
5625	3,6919	0,0268	11,5471
5400	2,7738	0,0319	12,2159
5175	2,1267	0,0375	12,7509
4950	1,3668	0,0492	13,7197

Tabela B.5. Resultados numéricos para a placa P(2,6) com simetria.

Número de elementos	h_s/t_s	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
10512	53,4905	0,0083	6,1451
9060	29,9886	0,0095	6,9798
8334	18,9317	0,0112	7,8069
7608	13,3657	0,0130	8,3729
6882	7,5552	0,0173	9,5239
6640	4,8390	0,0224	10,6941
6156	3,3285	0,0283	11,3733
6156	2,5015	0,0339	12,2893
5914	1,9185	0,0401	12,7786
5672	1,2337	0,0526	13,6289

Tabela B.6. Resultados numéricos para a placa P(3,2) com simetria.

Número de elementos	h_s/t_s	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
10128	37,3781	0,0128	8,7677
8928	23,5790	0,0150	9,8358
8448	16,6349	0,0174	10,8690
7488	9,3895	0,0232	12,5800
7008	6,0049	0,0302	14,1201
6528	4,1242	0,0383	15,2818
6288	3,0951	0,0462	16,2333
6048	2,3702	0,0549	16,9834
5808	1,5196	0,0727	18,7997
5568	1,0637	0,0897	18,6356

Tabela B.7. Resultados numéricos para a placa P(3,3) com simetria.

Número de elementos	h_s/t_s	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
10472	59,3771	0,0098	8,2325
8888	33,2780	0,0113	9,5061
7832	21,0013	0,0133	10,6543
7304	14,8222	0,0154	11,6857
6512	8,3730	0,0208	13,4717
5984	5,3593	0,0272	14,9146
5720	3,6839	0,0347	16,2812
5456	2,7668	0,0419	17,1650
5192	2,1205	0,0499	17,8262
4928	1,3618	0,0660	18,9699

Tabela B.8. Resultados numéricos para a placa P(3,4) com simetria.

Número de elementos	h_s/t_s	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
10124	53,4905	0,0096	7,7748
8516	29,9886	0,0113	8,8814
7712	18,9317	0,0135	9,9815
7176	13,3657	0,0158	10,8857
6372	7,5552	0,0216	12,4295
5836	4,8390	0,0284	13,6485
5568	3,3285	0,0362	14,8041
5300	2,5015	0,0437	15,5001
5300	1,9185	0,0518	16,4882
5032	1,2337	0,0681	17,4006

Tabela B.9. Resultados numéricos para a placa P(3,5) com simetria.

Número de elementos	h_s/t_s	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
10254	48,6658	0,0089	7,9187
8724	27,2909	0,0106	9,0655
7500	17,2335	0,0129	9,9775
7194	12,1698	0,0153	10,9793
6276	6,8828	0,0214	12,4059
5970	4,4108	0,0285	13,8333
5664	3,0357	0,0365	14,9456
5358	2,2826	0,0441	15,6090
5052	1,7516	0,0523	16,0348
5052	1,1277	0,0684	17,4606

Tabela B.10. Resultados numéricos para a placa P(3,6) com simetria.

Número de elementos	h_s/t_s	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
9970	44,6394	0,0087	7,6923
8400	25,0385	0,0106	8,7328
7458	15,8148	0,0131	9,6754
7144	11,1704	0,0159	10,6143
6202	6,3204	0,0224	11,8852
5888	4,0522	0,0300	13,1769
5574	2,7903	0,0385	14,1365
5260	2,0990	0,0464	14,6342
5260	1,6114	0,0548	15,4928
4946	1,0384	0,0712	16,0849

Tabela B.11. Resultados numéricos para a placa P(4,2) com simetria.

Número de elementos	h_s/t_s	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
10314	53,3885	0,0128	10,0742
8898	29,9120	0,0161	11,6907
7954	18,8708	0,0201	13,1317
7482	13,3143	0,0243	14,4132
6774	7,5164	0,0343	16,5563
6302	4,8078	0,0456	18,1768
6066	3,3026	0,0581	19,6441
6066	2,4789	0,0696	21,0261
5830	1,8986	0,0819	21,5886
5594	1,2176	0,1054	22,3494

Tabela B.12. Resultados numéricos para a placa P(4,3) com simetria.

Número de elementos	h_s/t_s	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
10564	48,6024	0,0114	10,8693
9144	27,2433	0,0142	12,6208
8292	17,1955	0,0177	14,2215
7724	12,1378	0,0215	15,4971
6872	6,8587	0,0303	17,5537
6588	4,3913	0,0404	19,5410
6304	3,0195	0,0515	21,0030
6020	2,2685	0,0617	21,7885
6020	1,7391	0,0726	22,9809
5736	1,1176	0,0935	23,8489

Tabela B.13. Resultados numéricos para a placa P(4,4) com simetria.

Número de elementos	h_s/t_s	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
10550	44,6038	0,0114	10,0198
9100	25,0118	0,0143	11,5160
8230	15,7935	0,0180	12,8728
7650	11,1524	0,0218	13,9428
7070	6,3068	0,0309	15,9907
6490	4,0412	0,0411	17,2820
6200	2,7811	0,0522	18,4509
6200	2,0909	0,0623	19,6495
5910	1,6043	0,0731	19,9866
5620	1,0327	0,0935	20,4619

Tabela B.14. Resultados numéricos para a placa P(4,5) com simetria.

Número de elementos	h_s/t_s	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
10080	91,7305	0,0085	8,0793
7752	41,2132	0,0107	9,6503
6624	23,1182	0,0137	11,0410
6060	14,6028	0,0173	12,3794
5496	10,3149	0,0211	13,2743
4932	5,8371	0,0301	14,9949
4650	3,7428	0,0402	16,4562
4368	2,5776	0,0511	17,4274
4368	1,9392	0,0610	18,5468
4368	1,4890	0,0715	19,4736

Tabela B.15. Resultados numéricos para a placa P(4,6) com simetria.

Número de elementos	h_s/t_s	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
10446	85,2262	0,0084	7,7685
8325	38,3016	0,0107	9,2868
7416	21,4911	0,0139	10,7233
6507	13,5791	0,0177	11,7717
6204	9,5945	0,0217	12,8431
5598	5,4326	0,0311	14,4623
5295	3,4855	0,0415	15,8217
4992	2,4018	0,0526	16,6996
4992	1,8080	0,0626	17,7088
4689	1,3891	0,0730	17,7981

Tabela B.16. Resultados numéricos para a placa P(5,2) com simetria.

Número de elementos	h_s/t_s	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
10035	44,4975	0,0154	12,3992
8775	24,9320	0,0203	14,5916
7830	15,7299	0,0262	16,4598
7200	11,0988	0,0324	17,9144
6570	6,2663	0,0468	20,5838
5940	4,0087	0,0627	22,1832
5625	2,7539	0,0794	23,5162
5625	2,0673	0,0944	24,8011
5310	1,5835	0,1098	25,0016
4995	1,0158	0,1381	25,0874

Tabela B.17. Resultados numéricos para a placa P(5,3) com simetria.

Número de elementos	h_s/t_s	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
10218	91,6179	0,0103	10,5903
8034	41,1375	0,0135	13,0438
6786	23,0613	0,0178	15,1336
5850	14,5575	0,0230	16,7806
5538	10,2767	0,0285	18,3930
4914	5,8082	0,0411	20,7740
4602	3,7195	0,0551	22,6834
4290	2,5581	0,0698	23,8431
4290	1,9222	0,0830	25,1666
3978	1,4740	0,0966	25,1632

Tabela B.18. Resultados numéricos para a placa P(5,4) com simetria.

Número de elementos	h_s/t_s	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
10488	85,1484	0,0101	9,7187
8220	38,2493	0,0134	11,7955
6924	21,4518	0,0176	13,5273
6276	13,5477	0,0228	15,1665
5952	9,5680	0,0283	16,5729
5304	5,4125	0,0408	18,6475
4980	3,4693	0,0545	20,3094
4656	2,3883	0,0690	21,3090
4656	1,7962	0,0817	22,4345
4332	1,3786	0,0949	22,4099

Tabela B.19. Resultados numéricos para a placa P(5,5) com simetria.

Número de elementos	h_s/t_s	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
10062	79,5323	0,0095	9,5940
7956	35,7400	0,0126	11,6372
6552	20,0523	0,0168	13,2064
5820	12,6689	0,0219	14,6791
5499	8,9507	0,0273	15,9470
5148	5,0673	0,0396	18,2552
4797	3,2506	0,0529	19,8110
4446	2,2396	0,0668	20,7513
4095	1,6856	0,0790	20,9526
4095	1,2948	0,0916	21,8088

Tabela B.20. Resultados numéricos para a placa P(5,6) com simetria.

Número de elementos	h_s/t_s	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
10287	74,6112	0,0093	9,1071
8037	33,5397	0,0126	10,9454
6966	18,8242	0,0169	12,5487
6228	11,8972	0,0222	13,9167
5859	8,4083	0,0276	15,0903
5121	4,7634	0,0400	16,7329
4752	3,0578	0,0533	18,0231
4752	2,1083	0,0672	19,4548
4383	1,5879	0,0793	19,6229
4383	1,2206	0,0916	20,3435

Tabela B.21. Resultados numéricos para a placa P(6,2) com simetria.

Número de elementos	h_s/t_s	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
10290	84,9932	0,0132	11,8790
8232	38,1450	0,0193	14,7832
7056	21,3735	0,0263	17,2597
6174	13,4853	0,0345	19,1979
5880	9,5155	0,0430	21,0428
5292	5,3728	0,0623	23,6512
4998	3,4373	0,0826	25,5800
4704	2,3616	0,1033	26,5702
4704	1,7729	0,1210	27,6668
4410	1,3581	0,1388	27,3286

Tabela B.22. Resultados numéricos para a placa P(6,3) com simetria.

Número de elementos	h_s/t_s	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
10374	79,4138	0,0122	12,7369
8064	35,6603	0,0170	15,6870
7074	19,9924	0,0230	18,3539
6414	12,6212	0,0301	20,6004
5754	8,9104	0,0376	21,9570
5424	5,0368	0,0543	25,0762
5094	3,2260	0,0721	27,0125
4764	2,2190	0,0903	28,0096
4764	1,6677	0,1060	29,1784
4434	1,2790	0,1218	28,8623

Tabela B.23. Resultados numéricos para a placa P(6,4) com simetria.

Número de elementos	h_s/t_s	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
10350	74,5218	0,0120	11,4844
7977	33,4795	0,0166	13,9040
6960	18,7789	0,0225	16,0885
6282	11,8611	0,0296	17,9159
5943	8,3778	0,0368	19,4488
5265	4,7403	0,0532	21,4985
4926	3,0391	0,0704	23,0124
4926	2,0927	0,0878	24,6614
4587	1,5742	0,1029	24,6673
4587	1,2085	0,1180	25,3751

Tabela B.24. Resultados numéricos para a placa P(6,5) com simetria.

Número de elementos	h_s/t_s	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
10044	70,1976	0,0112	11,2828
7830	31,5501	0,0156	13,6294
6723	17,7043	0,0213	15,6021
6354	11,1874	0,0281	17,6207
5985	7,9052	0,0351	19,0626
5247	4,4768	0,0508	20,9817
4878	2,8728	0,0673	22,3995
4878	1,9800	0,0839	23,9679
4509	1,4907	0,0982	23,9729
4509	1,1455	0,1125	24,6821

Tabela B.25. Resultados numéricos para a placa P(6,6) com simetria.

Número de elementos	h_s/t_s	w (mm)	σ_{vM} (MPa)
10332	66,3476	0,0110	10,7066
8064	29,8309	0,0155	12,8262
6930	16,7460	0,0213	14,6665
6552	10,5860	0,0282	16,5167
5796	7,4831	0,0352	17,3899
5418	4,2411	0,0508	19,5868
5040	2,7236	0,0670	20,8624
5040	1,8787	0,0833	22,2366
4662	1,4156	0,0972	22,2266
4662	1,0886	0,1110	22,8035