

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA OCEÂNICA

MODELAGEM COMPUTACIONAL E MÉTODO DESIGN CONSTRUTAL APLICADOS À
OTIMIZAÇÃO GEOMÉTRICA DE PLACAS FINAS DE AÇO COM ENRIJECEDORES
SUBMETIDAS A CARREGAMENTO TRANSVERSAL UNIFORME

por

Grégori da Silva Troina

Dissertação para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Oceânica (PPGEO)

Rio Grande, Dezembro, 2017

MODELAGEM COMPUTACIONAL E MÉTODO DESIGN CONSTRUTAL APLICADOS À
OTIMIZAÇÃO GEOMÉTRICA DE PLACAS FINAS DE AÇO COM ENRIJECEDORES
SUBMETIDAS A CARREGAMENTO TRANSVERSAL UNIFORME

por

Grégori da Silva Troina
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica (PPGEO) da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande (FURG), como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Oceânica.

Área de Concentração: Engenharia Marítima

Linha de Pesquisa: Estruturas e Equipamentos Oceânicos

Orientador: Prof. Dr. Liércio André Isoldi

Coorientador: Prof. Dr. Elizaldo Domingues dos Santos

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Luiz Alberto Oliveira Rocha
PPGEM/UNISINOS

Prof. Dr. Mauro de Vasconcellos Real
PPGEO/FURG

Prof. Dr. Paulo Roberto de Freitas Teixeira
PPGEO/FURG

Prof. Dr. Liércio André Isoldi
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica

Rio Grande, 19 de dezembro de 2017

**MODELAGEM COMPUTACIONAL E MÉTODO DESIGN CONSTRUTAL APLICADOS À
OTIMIZAÇÃO GEOMÉTRICA DE PLACAS FINAS DE AÇO COM ENRIJECEDORES
SUBMETIDAS A CARREGAMENTO TRANSVERSAL UNIFORME**

Grégori da Silva Troina

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de:

MESTRE EM ENGENHARIA OCEÂNICA

Tendo sido aprovada em sua forma final pela Coordenação de Pós Graduação em Engenharia Oceânica



Prof. Dr. Liércio André Isoldi
Coordenador do PPGeo - FURG

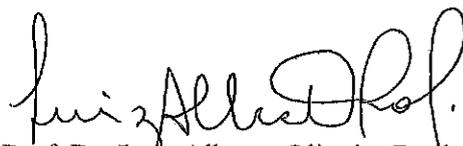
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Liércio André Isoldi
Orientador - PPGeo/FURG



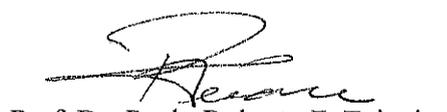
Prof. Dr. Elizaldo Domingues dos Santos
Coorientador - PPGeo/FURG



Prof. Dr. Luiz Alberto Oliveira Rocha
Membro Externo - UNISINOS



Prof. Dr. Mauro de Vasconcellos Real
PPGeo/FURG



Prof. Dr. Paulo Roberto F. Teixeira
PPGeo/FURG

À memória da minha avó **Sra. Ondina Noely Troina Ferreira**, quem me trouxe e me incentivou a vir a Rio Grande para alcançar um futuro melhor através da educação.

To the memory of my grandmother **Mrs. Ondina Noely Troina Ferreira**, who brought me and encouraged me to come to Rio Grande to achieve a better future through education.

AGRADECIMENTOS

A Deus acima de tudo.

À FURG por me acolher durante a minha graduação em Engenharia Mecânica, também como Professor Substituto da EE e agora durante o Mestrado em Engenharia Oceânica.

Ao CNPq pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento do mestrado acadêmico.

Aos professores do PPGE0 pela maestria, dedicação e competência.

Aos Profs. Oberdan Nogueira e Fabiane Binsfeld pela carta de recomendação ao mestrado.

Aos alunos e alunas do PPGE0 e aos acadêmicos da graduação Marcelo Langhinrichs e João Pedro pela amizade e pelos auxílios prestados.

Ao Prof. Dr. Liércio Isoldi pela orientação, paciência e por ter sido o grande incentivador desta minha caminhada. Sou muito grato pela oportunidade que tive de conviver e aprender com a sua estimada pessoa, com o seu exemplo de profissionalismo e dedicação.

Ao Prof. Dr. Elizaldo dos Santos pela coorientação e pelas parcerias desenvolvidas ao longo do curso.

À Banca Examinadora pela disposição em avaliar o trabalho e pelas contribuições dadas para um melhor desenvolvimento dessa pesquisa.

À minha família, de perto e de longe, que mesmo se envolvendo pouco foi combustível que me impulsionou a seguir em frente.

E aos meus alunos, alunas, amigos e amigas que estiveram sempre na torcida e prontos para ajudar, em especial, agradeço aos meus tios Luciano e Márcia e Maria e Lotti por todo o suporte dado a mim nesses últimos dois anos aqui na cidade de Rio Grande/RS.

RESUMO

Estruturas que utilizam placas finas de aço com enrijecedores são amplamente empregadas na indústria aeronáutica, construção civil, além de assumirem um papel importante no setor de construção e reparação naval. Simulações numéricas são ferramentas imprescindíveis para a solução de problemas complexos de engenharia que envolvem essas estruturas. A fim de determinar relações geométricas ótimas que minimizam os deslocamentos transversais em placas enrijecidas submetidas a esforços transversais uniformemente distribuídos, esse trabalho utilizou modelos computacionais para analisar deflexões de placas retangulares reforçadas por enrijecedores de seção transversal também retangular. Para a obtenção das diferentes configurações geométricas a serem analisadas em busca da geometria ótima, foi aplicado o método Design Construtal. Além dos princípios do Design Construtal, essa pesquisa utilizou a técnica de otimização por Busca Exaustiva, ou seja, um grande número de geometrias foi estudado para a obtenção daquelas com melhor comportamento estrutural quanto à deflexão. As soluções numéricas foram obtidas através do software *ANSYS*[®], que emprega a metodologia dos elementos finitos (MEF) para a resolução de problemas estruturais. Os modelos utilizados para as análises foram construídos com elementos finitos bidimensionais (*SHELL93*) e tridimensionais (*SOLID95*). Uma placa de referência foi adotada para a geração de todas as geometrias de placas a serem analisadas, sendo a construção da placa enrijecida resultado da transformação de uma certa quantidade de material da espessura da placa de referência em enrijecedores longitudinais e transversais. Após as simulações numéricas, os resultados obtidos foram apresentados em gráficos de dispersão de pontos para mostrar a influência dos graus de liberdade nos resultados de deflexão central das placas. Para todos os casos simulados foi possível perceber um padrão no comportamento da deflexão conforme se aumentava a relação entre altura do enrijecedor e sua espessura, sendo possível ajustar a esses gráficos curvas de potência com coeficientes de qualidade de ajuste todos superiores a 92 %. As placas otimizadas foram determinadas para as cinco frações volumétricas ϕ (relação entre o volume de material dos enrijecedores e o volume total de material da placa enrijecida) estudadas e apresentaram redução superior a 90 % em seus deslocamentos transversais quando comparadas com a deflexão no centro da placa de referência não enrijecida. Por fim, foi avaliada a influência do parâmetro ϕ em relação às placas otimizadas, com o objetivo de encontrar a configuração com melhor performance estrutural global (em termos de deslocamentos transversais) entre todos os resultados gerados nessa pesquisa.

Palavras-chave: Deflexão, Placas, Enrijecedores, Simulação Numérica e Design Construtal.

ABSTRACT

Structures that use thin steel plates with stiffeners are widely employed in the aeronautical industry, civil construction, and perform an important role at the shipbuilding and ship repairing industries. Numerical simulations are very powerful tools for solving complex engineering problems involving these kinds of structures. In order to determine optimal geometric relationships that minimize transversal displacements in stiffened plates submitted to uniformly transversal loads, this study applied computational models for deflection of rectangular plates with rectangular cross section stiffeners analysis. Regarding the range of analyzed geometrical configurations in the search of optimal geometry, the Constructal Design method was applied. In addition to the principles of Constructal Design, this research used an exhaustive search optimization technique, that is, a vast number of geometries were studied to obtain those with better structural behavior regarding deflection. Numerical solutions were carried out with *ANSYS*® code, which employs a finite element methodology (FEM) to solve structural problems. Used analyzed domains were discretized with two-dimensional (*SHELL93*) and three-dimensional finite elements (*SOLID95*). A reference plate was adopted for all studied plates geometries generation. The stiffened plate construction is the result of the transformation of a certain amount of material from the thickness of the reference plate into longitudinal and transverse stiffeners. After the numerical simulations, the results obtained were presented in scatter plots that showed degrees of freedom influence over plates central deflection. For all the simulated cases it was observed a deflection behavior pattern related to stiffeners height-thickness relation increase, being able to adjust to these graphs power curves with adjustment quality superior to 92 %. The optimized plates were determined as five studied volumetric fractions ϕ (relation between the volume of the stiffeners' material and the total volume of the material of the stiffened plate) and showed an over 90 % transversal displacements reduction in comparison with the not stiffened reference plate one. Finally, the influence of the ϕ parameter regarding the optimized plates was evaluated, aiming to find a configuration with better structural performance (in terms of transversal displacements) among all.

Keywords: Deflection, Plates, Stiffeners, Numerical Simulation e Constructal Design.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	10
LISTA DE TABELAS	14
LISTA DE SÍMBOLOS	15
1. INTRODUÇÃO.....	18
1.1. Estado da Arte	22
1.2. Objetivos	32
1.2.1. Objetivo Geral.....	33
1.2.2. Objetivos Específicos.....	33
1.3. Resumo da metodologia.....	33
1.4. Organização da dissertação	36
2. TEORIA DE PLACAS.....	37
2.1. Equação diferencial governante para placas finas	39
2.1.1. Condições de contorno das placas	47
2.1.2. Solução rigorosa da equação diferencial governante.....	51
2.1.3. Solução aproximada de Navier	52
2.1.4. Solução aproximada de Lévy.....	53
2.2. Equação diferencial governante para placas moderadamente espessas	57
2.2.1. Teoria de Reissner	57
2.2.2. Teoria de Mindlin.....	59
2.2.3. Teorias de cisalhamento de alta ordem	60
2.3. Equação diferencial governante para placas espessas.....	61
2.4. Placas com enrijecedores	63
3. MODELAGEM COMPUTACIONAL.....	66
3.1. Método dos Elementos Finitos (MEF).....	68
3.2. Análise estrutural com o software <i>ANSYS</i> [®]	71
3.2.1. Análise estrutural estática linear elástica	72
3.2.2. Elementos estruturais <i>SHELL93</i> e <i>SOLID95</i>	75
3.3. Verificação do modelo numérico-computacional.....	76
3.3.1. Placa quadrada simplesmente apoiada sem enrijecedores	78
3.3.2. Placa retangular simplesmente apoiada sem enrijecedores.....	81
3.3.3. Placa quadrada simplesmente apoiada com um enrijecedor central	84
3.3.4. Placa retangular simplesmente apoiada com dois enrijecedores ortogonais.....	88

3.3.5. Variação da altura de um enrijecedor central em uma placa retangular.....	91
4. TEORIA CONSTRUTAL.....	99
4.1. Lei Construtal.....	101
4.2. Método Design Construtal	101
4.3. Busca Exaustiva	102
4.4. Estudo de caso.....	102
5. RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	106
5.1. Teste de Convergência de Malhas	106
5.2. Análise para a fração volumétrica $\phi = 0,5$	108
5.3. Análise para a fração volumétrica $\phi = 0,4$	119
5.4. Análise para a fração volumétrica $\phi = 0,3$	122
5.5. Análise para a fração volumétrica $\phi = 0,2$	125
5.6. Análise para a fração volumétrica $\phi = 0,1$	128
5.7. Análise da influência da fração volumétrica ϕ	130
6. CONCLUSÕES	132
6.1. Propostas de continuidade.....	134
7. REFERÊNCIAS	135
APÊNDICE A – Tabela de expansão de cargas transversais $p_z(x,y)$ em série dupla trigonométrica (Fourier)	140
APÊNDICE B – Gráficos U_z (mm) x h_s/t_s para $\phi = 0,4; 0,3; 0,2$ e $0,1$.....	141
APÊNDICE C – Tabelas com as constantes $C1$ e $C2$ e coeficiente de determinação R^2 dos ajustes de curvas.....	161

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Utilização de placas com enrijecedores em estaleiros para construção naval	19
Figura 1.2 – Configuração típica de placa com enrijecedores longitudinais e transversais.....	19
Figura 1.3 – Pressão hidrostática sobre a estrutura do casco de um navio	20
Figura 1.4 – Exemplo de uma seção transversal de um navio	20
Figura 1.5 – Placa quadrada simplesmente apoiada com um enrijecedor	24
Figura 1.6 – Placa retangular simplesmente apoiada com um enrijecedor em cada direção	24
Figura 1.7 – Modelo físico de placa enrijecida	32
Figura 2.1 – Placa fina sob carregamento lateral distribuído.....	40
Figura 2.2 – Tensões internas em um elemento de placa.....	40
Figura 2.3 – Esforços internos em um elemento de placa	41
Figura 2.4 – Esforços internos no plano médio da placa	42
Figura 2.5 – Seção transversal de um elemento infinitesimal de placa antes e depois da deflexão ..	44
Figura 2.6 – Distorção angular de um elemento infinitesimal de placa.....	45
Figura 2.7 – Principais condições de contorno para placas	48
Figura 2.8 – Cisalhamento devido aos momentos torcionais.....	49
Figura 2.9 – Forças de canto em uma placa apoiada	51
Figura 2.10 – Placa retangular simplesmente apoiada em bordos opostos.....	54
Figura 2.11 – Fator numérico α para placas retangulares uniformemente carregadas e simplesmente apoiadas.....	57
Figura 2.12 – Seção transversal assumida pelas teorias de Reissner e Mindlin	58
Figura 2.13 – Seção transversal assumida pelas teorias de cisalhamento de alta ordem	61
Figura 2.14 – Elemento infinitesimal tridimensional de placa espessa	62
Figura 2.15 – Placa enrijecida por vigas ortogonais	64
Figura 2.16 – Modelo de placa enrijecida através do sistema placa – viga de reforço.....	65
Figura 3.1 – Divisão do domínio em subdomínios (elementos finitos).....	69
Figura 3.2 – Geometrias de elementos do MEF.....	70
Figura 3.3 – Corpo sólido dividido em subdomínios.....	73
Figura 3.4 – a) Elemento tipo <i>SHELL93</i> e b) Elemento tipo <i>SOLID95</i>	76
Figura 3.5 – Modelagem de placa enrijecida utilizando elemento finito <i>SHELL93</i>	77
Figura 3.6 – Placa quadrada sem enrijecedor: a) modelo físico [Adaptado de Silva (2010)] e b) condições de contorno e carregamento	78
Figura 3.7 – Malhas M1 para o domínio computacional da placa quadrada sem enrijecedor: a)	

<i>SHELL93 – Triangular</i> , b) <i>SHELL93 – Quadrilátero</i> , c) <i>SOLID95 – Tetraédrico</i> e d) <i>SOLID95 – Hexaédrico</i>	79
Figura 3.8 – Convergência de malha para a placa quadrada sem enrijecedor	80
Figura 3.9 – Deformada da placa quadrada sem enrijecedor (malhas independentes)	81
Figura 3.10 – Placa retangular sem enrijecedor: a) modelo físico [Adaptado de Silva (2010)] e b) condições de contorno e carregamento	82
Figura 3.11 – Malhas M1 para o domínio computacional da placa retangular sem enrijecedor: a) <i>SHELL93 – Triangular</i> , b) <i>SHELL93 – Quadrilátero</i> , c) <i>SOLID95 – Tetraédrico</i> e d) <i>SOLID95 – Hexaédrico</i>	82
Figura 3.12 – Convergência de malha para a placa retangular sem enrijecedor	83
Figura 3.13 – Deformada da placa retangular sem enrijecedor (malhas independentes)	84
Figura 3.14 – Placa quadrada com um enrijecedor: a) modelo físico [Adaptado de Silva (2010)] e b) condições de contorno e carregamento	85
Figura 3.15 – Malhas M1 para o domínio computacional da placa quadrada com um enrijecedor: a) <i>SHELL93 – Triangular</i> , b) <i>SHELL93 – Quadrilátero</i> , c) <i>SOLID95 – Tetraédrico</i> e d) <i>SOLID95 – Hexaédrico</i>	86
Figura 3.16 – Convergência de malha para a placa quadrada com um enrijecedor	86
Figura 3.17 – Deformada da placa quadrada com um enrijecedor (malhas independentes)	87
Figura 3.18 – Placa retangular com dois enrijecedores ortogonais: a) modelo físico [Adaptado de Silva (2010)] e b) condições de contorno e carregamento	88
Figura 3.19 – Malhas M1 para o domínio computacional da placa com dois enrijecedores ortogonais: a) <i>SHELL93 – Triangular</i> , b) <i>SHELL93 – Quadrilátero</i> , c) <i>SOLID95 – Tetraédrico</i> e d) <i>SOLID95 – Hexaédrico</i>	89
Figura 3.20 – Convergência de malha para a placa com dois enrijecedores ortogonais	90
Figura 3.21 – Deformada da placa com dois enrijecedores ortogonais (malhas independentes)	91
Figura 3.22 – Placa retangular com dois enrijecedores ortogonais: a) modelo físico [Adaptado de Silva (2010)] e b) condições de contorno e carregamento: $h_s = 2,00$ m	92
Figura 3.23 – Malhas M1 para o domínio computacional da placa retangular com um enrijecedor ($h_s = 2,00$ m): a) <i>SHELL93 – Triangular</i> , b) <i>SHELL93 – Quadrilátero</i> , c) <i>SOLID95 – Tetraédrico</i> e d) <i>SOLID95 – Hexaédrico</i>	92
Figura 3.24 – Convergência de malha para a placa com um enrijecedor central: $h_s = 0$ m	93
Figura 3.25 – Convergência de malha para a placa com um enrijecedor central: $h_s = 0,20$ m	94
Figura 3.26 – Convergência de malha para a placa com um enrijecedor central: $h_s = 0,60$ m	94
Figura 3.27 – Convergência de malha para a placa com um enrijecedor central: $h_s = 1,25$ m	95

Figura 3.28 – Convergência de malha para a placa com um enrijecedor central: $h_s = 2,00$ m.....	95
Figura 3.29 – Deformada da placa com um enrijecedor central: $h_s = 2,00$ m (malhas independentes)	98
Figura 4.1 – Comparação do design da natureza em uma bacia hidrográfica e um pulmão humano	100
Figura 4.2 – Modelo de placa com enrijecedores longitudinais e transversais: P (2,3).....	103
Figura 4.3 – Configurações geométricas geradas pela aplicação do Design Construtal.....	105
Figura 5.1 – Modelo para teste de convergência de malhas: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	106
Figura 5.2 – Convergência de malhas: a) $\phi = 0,1$; b) $\phi = 0,2$; c) $\phi = 0,3$; d) $\phi = 0,4$ e e) $\phi = 0,5$.	107
Figura 5.3 – Malha independente para fração volumétrica $\phi = 0,5$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	108
Figura 5.4 – Deflexão central para $\phi = 0,5$ e $N_{ls} = 2$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	109
Figura 5.5 – Deflexão central para $\phi = 0,5$ e $N_{ls} = 3$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	110
Figura 5.6 – Deflexão central para $\phi = 0,5$ e $N_{ls} = 4$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	111
Figura 5.7 – Deflexão central para $\phi = 0,5$ e $N_{ls} = 5$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	112
Figura 5.8 – Deflexão central para $\phi = 0,5$ e $N_{ls} = 6$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	113
Figura 5.9 – Ajuste de curva para P (6,2) e P (6,5): $\phi = 0,5$ e modelo <i>SHELL93</i>	114
Figura 5.10 – Influência da variação do N_{ls} no valor de $(U_z)_m$ para $\phi = 0,5$ e $N_{ls} = 2$ a 6: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	116
Figura 5.11 – Deformada da placa otimizada para $\phi = 0,5$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	118
Figura 5.12 – Tensões de von Mises na parte superior para $\phi = 0,5$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i> ...	118
Figura 5.13 – Tensões de von Mises na parte inferior para $\phi = 0,5$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	119
Figura 5.14 – Influência da variação do N_{ls} no valor de $(U_z)_m$ para $\phi = 0,4$ e $N_{ls} = 2$ a 6: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	120
Figura 5.15 – Deformada da placa otimizada para $\phi = 0,4$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	121
Figura 5.16 – Tensões de von Mises na parte superior para $\phi = 0,4$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i> ...	122
Figura 5.17 – Tensões de von Mises na parte inferior para $\phi = 0,4$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	122
Figura 5.18 – Influência da variação do N_{ls} no valor de $(U_z)_m$ para $\phi = 0,3$ e $N_{ls} = 2$ a 6: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	123
Figura 5.19 – Deformada da placa otimizada para $\phi = 0,3$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	124
Figura 5.20 – Tensões de von Mises na parte superior para $\phi = 0,3$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i> ...	124
Figura 5.21 – Tensões de von Mises na parte inferior para $\phi = 0,3$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	125
Figura 5.22 – Influência da variação do N_{ls} no valor de $(U_z)_m$ para $\phi = 0,2$ e $N_{ls} = 2$ a 6: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	126
Figura 5.23 – Deformada da placa otimizada para $\phi = 0,2$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	127

Figura 5.24 – Tensões de von Mises na parte superior para $\phi = 0,2$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i> ...	127
Figura 5.25 – Tensões de von Mises na parte inferior para $\phi = 0,2$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	128
Figura 5.26 – Influência da variação do N_{ls} no valor de $(U_z)_m$ para $\phi = 0,1$ e $N_{ls} = 2$ a 6: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	128
Figura 5.27 – Deformada da placa otimizada para $\phi = 0,1$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	129
Figura 5.28 – Tensões de von Mises na parte superior para $\phi = 0,1$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i> ...	130
Figura 5.29 – Tensões de von Mises na parte inferior para $\phi = 0,1$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	130
Figura 5.30 – Influência da variação da fração volumétrica ϕ no resultado de deflexão transversal	131
Figura A.1 – Expansão de carregamentos transversais $p_z(x,y)$ em série dupla de Fourier.....	140
Figura B.1 – Deflexão central para $\phi = 0,4$ e $N_{ls} = 2$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	141
Figura B.2 – Deflexão central para $\phi = 0,4$ e $N_{ls} = 3$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	142
Figura B.3 – Deflexão central para $\phi = 0,4$ e $N_{ls} = 4$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	143
Figura B.4 – Deflexão central para $\phi = 0,4$ e $N_{ls} = 5$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	144
Figura B.5 – Deflexão central para $\phi = 0,4$ e $N_{ls} = 6$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	145
Figura B.6 – Deflexão central para $\phi = 0,3$ e $N_{ls} = 2$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	146
Figura B.7 – Deflexão central para $\phi = 0,3$ e $N_{ls} = 3$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	147
Figura B.8 – Deflexão central para $\phi = 0,3$ e $N_{ls} = 4$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	148
Figura B.9 – Deflexão central para $\phi = 0,3$ e $N_{ls} = 5$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	149
Figura B.10 – Deflexão central para $\phi = 0,3$ e $N_{ls} = 6$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	150
Figura B.11 – Deflexão central para $\phi = 0,2$ e $N_{ls} = 2$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	151
Figura B.12 – Deflexão central para $\phi = 0,2$ e $N_{ls} = 3$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	152
Figura B.13 – Deflexão central para $\phi = 0,2$ e $N_{ls} = 4$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	153
Figura B.14 – Deflexão central para $\phi = 0,2$ e $N_{ls} = 5$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	154
Figura B.15 – Deflexão central para $\phi = 0,2$ e $N_{ls} = 6$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	155
Figura B.16 – Deflexão central para $\phi = 0,1$ e $N_{ls} = 2$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	156
Figura B.17 – Deflexão central para $\phi = 0,1$ e $N_{ls} = 3$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	157
Figura B.18 – Deflexão central para $\phi = 0,1$ e $N_{ls} = 4$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	158
Figura B.19 – Deflexão central para $\phi = 0,1$ e $N_{ls} = 5$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	159
Figura B.20 – Deflexão central para $\phi = 0,1$ e $N_{ls} = 6$: a) <i>SHELL93</i> e b) <i>SOLID95</i>	160

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1. Comparação dos resultados para a placa quadrada sem enrijecedor	80
Tabela 3.2. Comparação dos resultados para a placa retangular sem enrijecedor	83
Tabela 3.3. Comparação dos resultados para a placa quadrada com um enrijecedor	87
Tabela 3.4. Comparação dos resultados para a placa com dois enrijecedores ortogonais	90
Tabela 3.5. Comparação dos resultados para a placa retangular com um enrijecedor	96
Tabela 5.1. Valores de $(N_{ts})_o$, $(h_s/t_s)_{oo}$ e $(U_z)_{mm}$ para cada N_{ls} com $\phi = 0,5$	117
Tabela 5.2. Valores de $(N_{ts})_o$, $(h_s/t_s)_{oo}$ e $(U_z)_{mm}$ para cada N_{ls} com $\phi = 0,4$	120
Tabela 5.3. Valores de $(N_{ts})_o$, $(h_s/t_s)_{oo}$ e $(U_z)_{mm}$ para cada N_{ls} com $\phi = 0,3$	123
Tabela 5.4. Valores de $(N_{ts})_o$, $(h_s/t_s)_{oo}$ e $(U_z)_{mm}$ para cada N_{ls} com $\phi = 0,2$	126
Tabela 5.5. Valores de $(N_{ts})_o$, $(h_s/t_s)_{oo}$ e $(U_z)_{mm}$ para cada N_{ls} com $\phi = 0,1$	129
Tabela C.1. Valores de $C1$, $C2$ e R^2 para $\phi = 0,5$ e <i>SHELL93</i>	161
Tabela C.2. Valores de $C1$, $C2$ e R^2 para $\phi = 0,5$ e <i>SOLID95</i>	162
Tabela C.3. Valores de $C1$, $C2$ e R^2 para $\phi = 0,4$ e <i>SHELL93</i>	163
Tabela C.4. Valores de $C1$, $C2$ e R^2 para $\phi = 0,4$ e <i>SOLID95</i>	164
Tabela C.5. Valores de $C1$, $C2$ e R^2 para $\phi = 0,3$ e <i>SHELL93</i>	165
Tabela C.6. Valores de $C1$, $C2$ e R^2 para $\phi = 0,3$ e <i>SOLID95</i>	166
Tabela C.7. Valores de $C1$, $C2$ e R^2 para $\phi = 0,2$ e <i>SHELL93</i>	167
Tabela C.8. Valores de $C1$, $C2$ e R^2 para $\phi = 0,2$ e <i>SOLID95</i>	168
Tabela C.9. Valores de $C1$, $C2$ e R^2 para $\phi = 0,1$ e <i>SHELL93</i>	169
Tabela C.10. Valores de $C1$, $C2$ e R^2 para $\phi = 0,1$ e <i>SOLID95</i>	170

LISTA DE SÍMBOLOS

- a – Comprimento da placa [m]
 A_s – Área da seção transversal do enrijecedor [m²]
 b – Largura da placa [m]
 b_0 – Largura efetiva da placa enrijecida [m]
 B – Rigidez torcional efetiva da placa ortotrópica [N.m]
 $C1$ – Constante 1 do ajuste de curva de potência
 $C2$ – Constante 2 do ajuste de curva de potência
 D – Rigidez à flexão da placa [N.m]
 D_x – Rigidez à flexão da placa, na direção x [N.m]
 D_y – Rigidez à flexão da placa, na direção y [N.m]
 E – Módulo de elasticidade longitudinal (módulo de Young) [Pa]
 E_x – Módulo de elasticidade longitudinal na direção x [Pa]
 E_y – Módulo de elasticidade longitudinal na direção y [Pa]
 G – Módulo de elasticidade transversal [Pa]
 h_s – Altura do enrijecedor [m]
 k^2 – Coeficiente de correção de cisalhamento
 L – Menor dimensão lateral da placa retangular [m]
 M_x – Momento fletor em x [N.m]
 m_x – Momento fletor por unidade de comprimento em x [N.m/m]
 M_{xy} – Momento de torção que atua no plano ortogonal ao eixo x [N.m]
 m_{xy} – Momento de torção distribuído que atua no plano ortogonal ao eixo x [N.m/m]
 M_y – Momento fletor em y [N.m]
 m_y – Momento fletor por unidade de comprimento em y [N.m/m]
 M_{yx} – Momento de torção que atua no plano ortogonal ao eixo y [N.m]
 m_{yx} – Momento de torção distribuído que atua no plano ortogonal ao eixo y [N.m/m]
 N_{ls} – Número de enrijecedores na direção longitudinal [un]
 N_{ts} – Número de enrijecedores na direção transversal [un]
 p_x – Carga distribuída aplicada à placa na direção x [N/m²]
 p_y – Carga distribuída aplicada à placa na direção y [N/m²]
 p_z – Carga distribuída aplicada à placa na direção z [N/m²]
 Q_x – Força de cisalhamento transversal em x [N]
 q_x – Força de cisalhamento transversal por unidade de comprimento em x [N/m]

Q_y – Força de cisalhamento transversal em y [N]
 q_y – Força de cisalhamento transversal por unidade de comprimento em y [N/m]
 R_0 – Força de canto em placas bi-apoiadas [N]
 R^2 – Coeficiente de determinação do ajuste de curva
 S_{ls} – Espaçamento entre enrijecedores longitudinais [m]
 S_{ts} – Espaçamento entre enrijecedores transversais [m]
 t – Espessura da placa sem enrijecedores [m]
 t_p – Espessura da placa com enrijecedores [m]
 t_s – Espessura do enrijecedor [m]
 u – Componente de deslocamento na direção x [m]
 U_z – Deslocamento ou deflexão central das placas [m]
 v – Componente de deslocamento na direção y [m]
 V – Volume genérico de um corpo sólido [m³]
 V_s – Volume de material dos enrijecedores [m³]
 V_r – Volume total de material da placa de referência [m³]
 w – Componente de deslocamento na direção z [m]
 x – Direção x do eixos cartesianos
 X – Forças de corpo na direção x [N]
 y – Direção y do eixos cartesianos
 Y – Forças de corpo na direção y [N]
 z – Direção z do eixos cartesianos
 Z – Forças de corpo na direção z [N]
 ϕ – Fração volumétrica
 γ_{xy} – Deformação por cisalhamento
 δ – Indicador de deslocamentos e trabalhos virtuais
 ∇ – Operador diferencial delta
 ε_x – Deformação normal na direção do eixo x
 ε_y – Deformação normal na direção do eixo y
 σ_x – Tensão normal na direção do eixo x [Pa]
 σ_y – Tensão normal na direção do eixo y [Pa]
 σ_z – Tensão normal na direção do eixo z [Pa]
 τ – Tensão de cisalhamento [Pa]
 τ_{xy} – Tensão de cisalhamento no plano ortogonal ao eixo x na direção y [Pa]
 τ_{yx} – Tensão de cisalhamento no plano ortogonal ao eixo y na direção x [Pa]

τ_{xz} – Tensão de cisalhamento no plano ortogonal ao eixo x na direção z [Pa]

τ_{zx} – Tensão de cisalhamento no plano ortogonal ao eixo z na direção x [Pa]

τ_{yz} – Tensão de cisalhamento no plano ortogonal ao eixo y na direção z [Pa]

τ_{zy} – Tensão de cisalhamento no plano ortogonal ao eixo z na direção y [Pa]

ν – Coeficiente de Poisson

ν_x – Coeficiente de Poisson na direção x

ν_y – Coeficiente de Poisson na direção y

ω_x – Rotações das seções normais ao plano médio da placa na direção x

ω_y – Rotações das seções normais ao plano médio da placa na direção y

Ψ_x – Rotações do plano médio da placa na direção do eixo x

Ψ_y – Rotações do plano médio da placa na direção do eixo y

1. INTRODUÇÃO

Segundo Timoshenko e Gere (1961), placas finas são componentes estruturais planos que possuem uma de suas dimensões, referida como espessura, muito menor quando comparada às outras. Geometricamente seus contornos são feitos por linhas retas ou curvas, sendo as retangulares, quadradas e circulares as mais utilizadas. As condições de apoio podem ser do tipo bordas livres, bordas simplesmente apoiadas ou totalmente engastadas, podendo ainda ocorrer situações de apoios em elementos estruturais pontuais e elásticos. As cargas estáticas e dinâmicas aplicadas nas placas são, predominantemente, perpendiculares à superfície da mesma. Essas cargas externas geram internamente momentos de flexão, momentos de torção e forças de cisalhamento transversais.

Elementos estruturais formados por placas podem ser encontrados em diferentes áreas da engenharia, como nas indústrias automobilística, aeronáutica, de construção civil e de construção e reparação naval. No caso particular da indústria naval, as placas desempenham um papel importante que vai desde a composição do convés, plataformas de acesso, casco lateral e casco de fundo, até a construção de estruturas estanques como vasos de pressão. Além de conferir estanqueidade a um casco de um navio, por exemplo, as placas devem ser dimensionadas seguindo vários critérios de projeto, pois a sua ação como elemento estrutural é também muito relevante quando aliada às quilhas e vigas principais de uma embarcação (YASUHISA et al., 2009).

Devido a esbelteza das placas, ou seja, por serem elementos delgados com baixa rigidez à flexão em relação a momentos que atuam em seu plano nas direções longitudinais e transversais, logo percebeu-se a necessidade de aplicar estruturas de vigas nessas duas direções principais, a fim de incorporar rigidez estrutural à flexão segundo esses eixos (YASUHISA et al., 2009). Com o avanço das técnicas de soldagem, as placas com enrijecedores passaram a ocupar uma posição de destaque na indústria da construção em aço, em especial nas estruturas fabricadas em estaleiros como pode ser visto na Fig.1.1 (VASCONCELOS, 2014).

As estruturas navais, portanto, são constituídas em sua maioria por painéis enrijecidos formados pela aplicação de vigas esbeltas em uma chapa de pequena espessura, dispostas longitudinalmente e transversalmente, com a finalidade de aumentar a rigidez e a resistência global da chapa. Esse conjunto possui melhor capacidade para resistir às combinações de momento de flexão, torção, entre outros carregamentos. A Figura 1.2 mostra uma configuração típica de placa com enrijecedores utilizada em estruturas navais onshore e offshore.

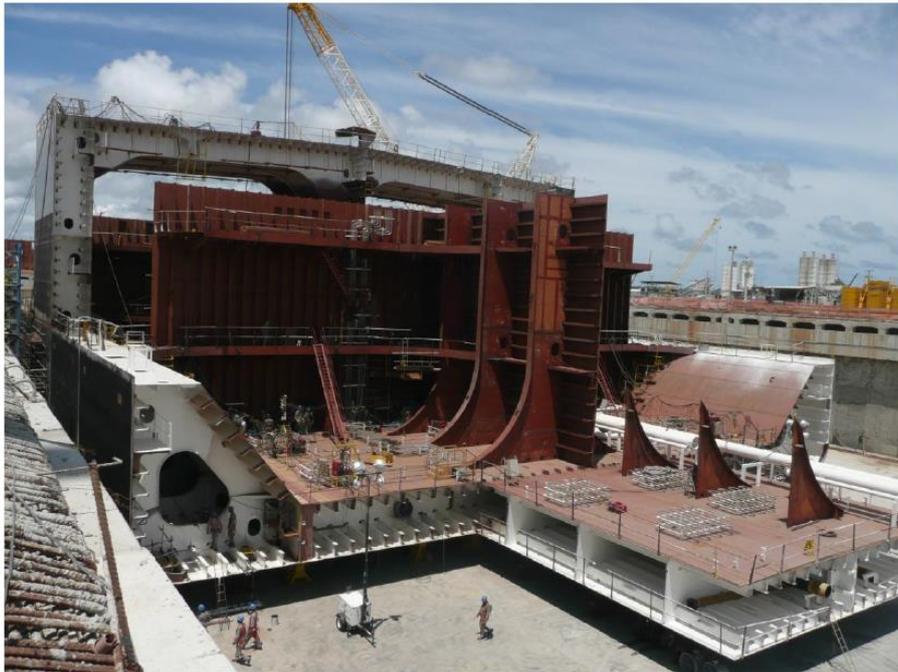


Figura 1.1 – Utilização de placas com enrijecedores em estaleiros para construção naval
(Fonte: VASCONCELOS, 2014)

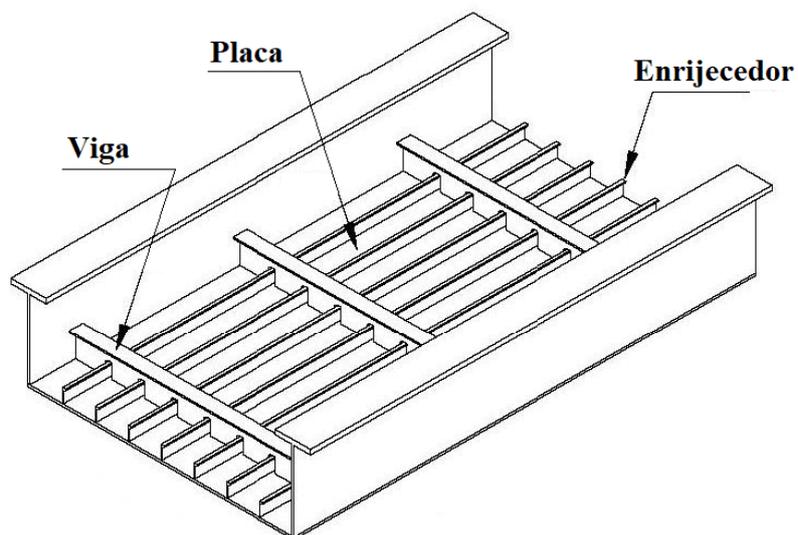


Figura 1.2 – Configuração típica de placa com enrijecedores longitudinais e transversais
(Fonte: Adaptada de YASUHISA et al., 2009)

Manrique (1989) afirma que as placas enrijecidas são componentes estruturais de particular uso nas estruturas navais, pois servem tanto para resistir às cargas longitudinais da flexão do navio

como para suportar as cargas devido à pressão hidrostática (ver Fig. 1.3) e devido aos diferentes itens a transportar. A estrutura do casco de um navio se assemelha a uma viga-caixão de grandes dimensões, como pode ser visto na Fig. 1.4, onde a presença dos enrijecedores tem o objetivo de conferir resistência em termos de flexão e também de flambagem para os painéis formados por elementos esbeltos de placa, além de contribuir com a resistência global da viga-navio.

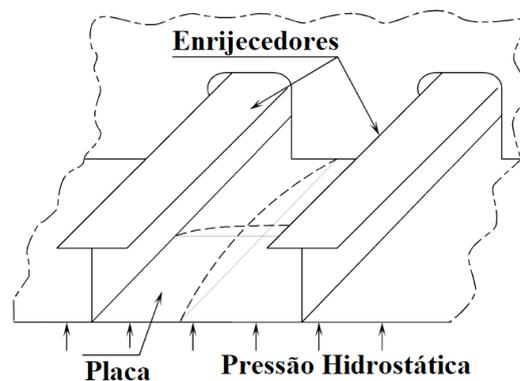


Figura 1.3 – Pressão hidrostática sobre a estrutura do casco de um navio
(Fonte: Adaptada de YASUHISA et al., 2009)

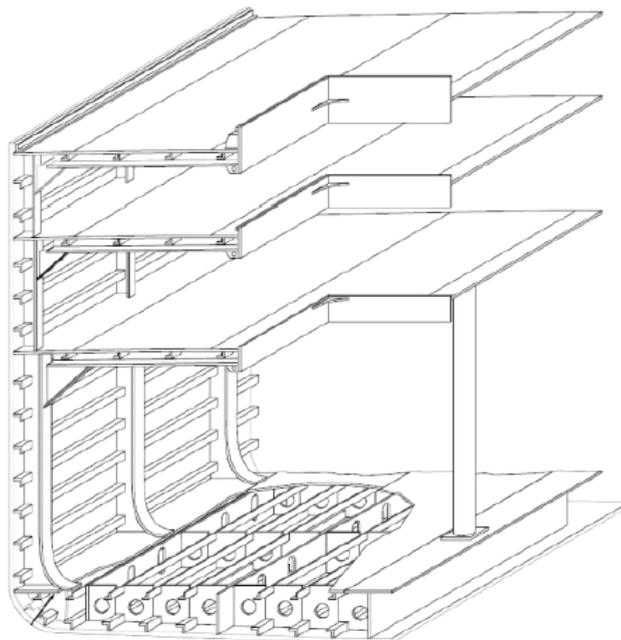


Figura 1.4 – Exemplo de uma seção transversal de um navio
(Fonte: GHAVAMI e KHEDMATI, 2012)

O estudo de placas passa pelo entendimento das diferentes teorias existentes sobre o assunto, as quais dependem de fatores como geometria, condições de carregamento e condições de contorno. De uma forma simples, pode-se dividir as teorias de placas quanto à espessura (teoria de membranas, placas finas, moderadamente espessas e espessas), quanto ao carregamento aplicado (análise estática ou dinâmica), quanto ao tipo de material empregado (isotrópico ou anisotrópico), quanto à ordem de grandeza das deflexões (pequenos ou grandes deslocamentos), além de outras análises específicas como estudos de estabilidade elástica e elasto-plástica (flambagem). O ponto em comum entre todas essas teorias citadas é que as equações diferenciais governantes desses problemas possuem grau de dificuldade matemática elevado, que só permite o desenvolvimento analítico para casos muito simples de geometria, carregamento e condições de contorno (SZILARD, 2004).

Havendo essa limitação em se obter resultados através de soluções analíticas, a simulação numérica torna-se uma importante ferramenta para a análise de elementos estruturais formados por placas. Dentre as diferentes metodologias que podem ser utilizadas para a solução desses problemas destaca-se o Método dos Elementos Finitos (MEF), que se baseia no método dos deslocamentos e na discretização de uma estrutura em subestruturas. Cada uma dessas subestruturas é designada elemento finito, sendo o resultado global para todo o domínio de uma estrutura obtido pela composição dos resultados de cada uma dessas partes elementares, as quais são interligadas através de conexões chamadas de nós (AZEVEDO, 2003).

De acordo com Cordeiro (2007), os projetos de otimização estrutural apresentam resultados satisfatórios na construção civil, indústria naval, automobilística e aeroespacial. Esses projetos têm como objetivo básico a redução do custo financeiro aliada à garantia de que a estrutura suporte a todas as solicitações mecânicas impostas, sejam elas estáticas ou dinâmicas. Segundo o *American Institute of Steel Construction – AISC* (1963), uma condição essencial para a economia em uma estrutura em aço consiste na utilização eficiente do material, o que pode ser alcançado ao se trabalhar na configuração geométrica das estruturas para uma melhor distribuição do mesmo.

Sendo assim, aproveitando a possibilidade de simulação de diferentes geometrias através de modelos numérico-computacionais que proporcionam resultados rápidos e com elevada acurácia, esse trabalho concentra-se no estudo das variações geométricas de placas enrijecidas submetidas a carregamentos transversais uniformemente distribuídos, a fim de avaliar a influência de parâmetros geométricos no desempenho estrutural quanto à minimização da deflexão no centro dessas estruturas e, com isso, determinar as configurações ótimas que representem uma melhor utilização/distribuição do material utilizado na construção das mesmas.

1.1. Estado da Arte

Segundo Szilard (2004), enquanto o desenvolvimento da mecânica estrutural como um todo começou com a investigação de problemas estáticos, os primeiros estudos analíticos e experimentais em placas foram dedicados, quase que exclusivamente, a vibrações livres. Após a contribuição de diversos cientistas, na segunda metade do século XIX surgiu a equação diferencial para o problema de placas finas submetidas à carga estática transversal, mais adiante consolidada como Teoria Clássica de Placas Finas ou Teoria de Placas de Kirchhoff-Love. Como a suposição mais importante da Teoria Clássica de Placas Finas negligenciava a deformação causada por cisalhamento transversal, Reissner e Mindlin publicaram, em meados do século XX, teorias um tanto diferentes para placas moderadamente espessas, visando eliminar a deficiência da teoria clássica acima mencionada.

A aplicação da teoria clássica de placas finas em problemas de placas reforçadas com enrijecedores ortogonais foi primeiramente sugerida por Huber (Nishino et al., 1974 apud Huber, 1923), que analisou uma laje de concreto enrijecida com diferentes reforços nas duas direções ortogonais e a representou por uma placa ortotrópica de espessura única equivalente tendo as mesmas características de rigidez da laje anterior. Utilizando uma metodologia similar, Nishino et al. (1974) estudaram placas ortotrópicas com reforços excêntricos dispostos ortogonalmente, levando em consideração a completa interação entre a placa e o sistema de enrijecedores. Conseguiram confirmar o que já estava relatado em outros trabalhos, ou seja, a equação de Huber produzia apenas soluções aproximadas quando negligenciava-se a influência do alongamento da superfície média da laje no cálculo das rigidezes elásticas. Por isso, propuseram que as rigidezes fossem calculadas de forma a superar essa limitação e obtiveram uma rigidez torcional que incorporava a interação entre a placa e os enrijecedores, visando remover, pelo menos em parte, a incerteza com relação ao comportamento à torção de placas ortotrópicas com enrijecedores excêntricos.

Com auxílio computacional, Yettram e Husain (1965) apresentaram um método para a representação de uma placa em flexão através de uma grelha de vigas ortogonalmente conectadas. Dando continuidade a um trabalho anterior, implementaram uma rotina iterativa para analisar o caso mais geral de placas com coeficiente de Poisson diferente de zero, já que a metodologia existente na época só conduzia a bons resultados exatos quando este coeficiente era nulo. Empregaram para as vigas de uma grelha as mesmas relações matemáticas entre momento e deflexão que se aplicam na análise de placas. As rigidezes efetivas de cada uma das vigas dependiam do coeficiente de Poisson e de dois parâmetros baseados nas segundas derivadas da deflexão transversal da estrutura segundo

os eixos cartesianos x e y . Em uma primeira aproximação, os valores desses dois parâmetros baseados na segunda derivada da deflexão eram assumidos como nulos. Assim, a rigidez à flexão das vigas era exatamente igual à rigidez à flexão da placa, sem nenhuma dependência do coeficiente de Poisson, ao contrário da rigidez à torção das vigas que dependia tanto da rigidez à flexão da placa como do coeficiente de Poisson. Em seguida, a grelha era analisada sob o ponto de vista da deflexão e, após o primeiro perfil da superfície defletida, era possível calcular os coeficientes dependentes para enfim reanalisar a estrutura e prever a sua nova e mais exata configuração deformada. Esse procedimento era repetido até se atingir o nível de acurácia desejado.

Rossow e Ibrahimkhail (1978) aplicaram o Método das Restrições em análises estáticas, via elementos finitos, de placas enrijecidas com reforços concêntricos e excêntricos. O campo de deslocamentos dos enrijecedores foram expressos em termos dos deslocamentos da superfície média da placa através de considerações cinemáticas realizadas. Sobrepondo a energia de deformação da placa e dos enrijecedores, a matriz de rigidez da estrutura composta foi obtida, para polinômios de aproximação de qualquer ordem. A característica distinta do Método das Restrições em uma análise por elementos finitos é a possibilidade de utilização de elementos baseados em polinômios completos de ordem arbitrária. O Método das Restrições é baseado no teorema da mínima energia potencial e pode ser entendido matematicamente como o problema de minimizar a energia potencial de uma estrutura elástica sujeita a um conjunto de restrições.

Portanto, através do Método das Restrições, Rossow e Ibrahimkhail (1978) solucionaram dois exemplos numéricos, um de placa quadrada com apenas um enrijecedor (Fig. 1.5) e outro de placa retangular com dois enrijecedores ortogonais (Fig. 1.6). Nessas análises foram utilizados dois elementos triangulares para modelar um quarto da placa e foram empregados polinômios de aproximação de ordem 4 até ordem 9. Além disso, para obter uma checagem independente das soluções, esses problemas foram resolvidos computacionalmente pelos softwares *NASTRAN*[®] e *STRUDL*[®]. Os resultados numéricos obtidos confirmaram o que já era observado em estudos anteriores sobre o Método das Restrições: elementos propriamente formulados de alta ordem podem fornecer bons resultados, com poucos elementos e poucos graus de liberdade, quando comparados com análises realizadas por elementos de baixa ordem.

Mukhopadhyay (1981) apresentou uma nova abordagem em relação a que era sugerida na época para considerar a presença de enrijecedores em elementos de placa quando submetidos a estado plano de tensões. Abordagens anteriores tinham uma aplicação limitada, pois se restringiam a análise apenas de enrijecedores dispostos ortogonal e igualmente espaçados. Com essa nova metodologia, a orientação dos enrijecedores podia ser arbitrária, bem como o espaçamento entre

eles. Além disso, há uma maior acurácia nesse novo modelo visto que os enrijecedores se conectam aos quatro nós do elemento de placa, enquanto que nos modelos aglomerados, que transformam o painel enrijecido em uma placa ortotrópica, os enrijecedores são tratados como elementos de barra que ficam acoplados a apenas dois nós do elemento de placa onde o reforço é localizado.

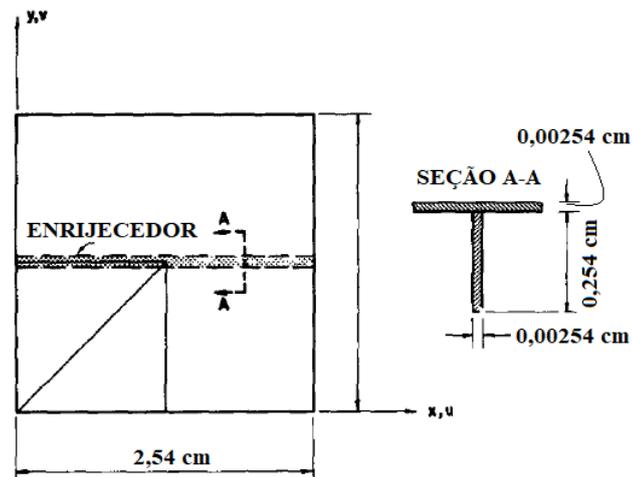


Figura 1.5 – Placa quadrada simplesmente apoiada com um enrijecedor
(Fonte: Adaptada de ROSSOW e IBRAHIMKHAIL, 1978)

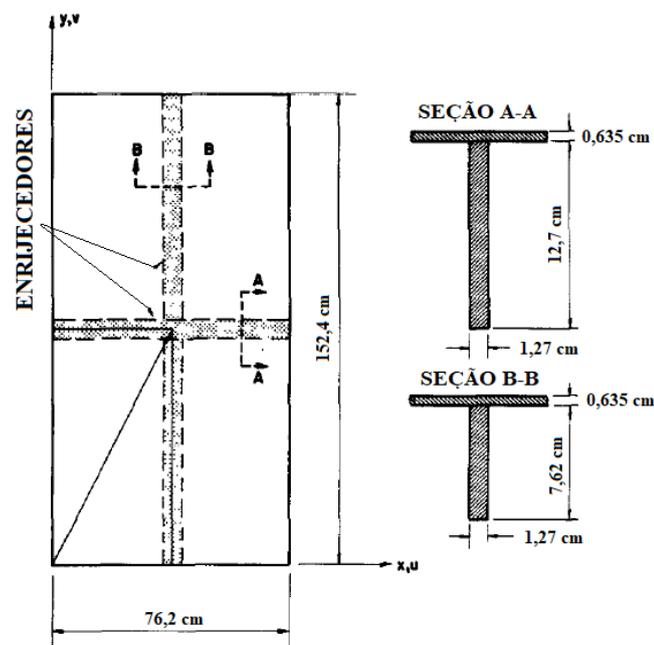


Figura 1.6 – Placa retangular simplesmente apoiada com um enrijecedor em cada direção
(Fonte: Adaptada de ROSSOW e IBRAHIMKHAIL, 1978)

O’Leary e Harari (1985) apresentaram um método via elementos finitos no qual eram impostas restrições entre o enrijecedor e a placa a que este se conectava através de multiplicadores Lagrangeanos. Os elementos finitos utilizados nessa análise foram do tipo vigas bidimensionais, sendo uma viga para representar a placa e outra viga para representar o enrijecedor. Essa abordagem também permitiu resolver problemas com enrijecedores maiores, mais espessos e amplamente espaçados.

Cheng et al. (1987) desenvolveram um método semi-analítico, através da utilização de funções de interpolação “B spline”, capaz de realizar análises estáticas, de vibração e de estabilidade de placas enrijecidas. O método Rayleigh-Ritz foi empregado juntamente com as funções de interpolação “B spline” cúbicas para descrever o campo de deslocamentos de uma placa enrijecida, idealizada como um sistema composto por uma chapa fina e um certo número de nervuras ortogonais. Como as funções “B spline” de ordem cúbica têm boas propriedades devido as suas partes polinomiais, o método tinha menos incógnitas, era mais fácil de programar e era econômico do ponto de vista computacional.

Harik e Salamoun (1988) estenderam o Método Analítico da Tira, desenvolvido para a solução de problemas de flexão de chapas retangulares, para analisar o comportamento estrutural de placas retangulares reforçadas. Neste método, a placa foi idealizada como um sistema de tiras de placas e segmentos de vigas rigidamente conectados entre si. O comportamento do sistema foi derivado impondo condições de continuidade e de borda na solução fechada das tiras de placas e dos elementos de viga individualmente. O método analítico da tira possui as vantagens do método semi-analítico de tira finita, mas sem a necessidade da representação polinomial e do processo de minimização associado a este último. As rigidezes de flexão, torção e deformação dos reforços foram consideradas na formulação. Os resultados numéricos para chapas enrijecidas e chapas contínuas sobre alguns pontos foram apresentados para diferentes condições de contorno e carregamento. Ao contrário do método da placa ortotrópica equivalente, que reduz o sistema real de enrijecedores a um único sistema de rigidez uniformemente distribuída, o Método Analítico da Tira considera uma continuidade por partes e pressupõe que a placa e o reforço se interceptam ao longo de uma linha infinitesimal e que o reforço é simétrico em relação ao plano médio da placa.

Sheikh e Mukhopadhyay (1992) generalizaram o Método da Tira Finita para placas enrijecidas de formato arbitrário. O diferencial dessa formulação mais geral residia no tratamento dos enrijecedores, pois demonstrou-se que o reforço poderia ser colocado em qualquer lugar dentro da tira de placas, introduzindo, portanto, uma considerável flexibilidade na análise dos problemas. Essas placas poderiam possuir várias formas, condições de contorno, cargas e também variada

disposição de reforços em sua estrutura. Em todos os casos analisados pela abordagem proposta, a comparação obtida com valores teóricos e/ou experimentais existentes indicou um bom grau de concordância.

Já Kukreti e Cheragni (1993) desenvolveram um procedimento de análise de placas com enrijecedores baseado em uma abordagem de energia. O sistema de placas enrijecidas constituído por uma placa simples suportada por uma rede de vigas de aço foi analisado, considerando dois tipos de sistemas de placas, um sistema em que as vigas são dispostas paralelamente ao vão maior (chamado sistema de placa com nervuras), e o outro em que, além das nervuras, havia também vigas transversais que reforçavam a placa na direção perpendicular ao vão a ser vencido (chamado sistema de placa grade). Considerou-se que as vigas estavam rigidamente conectadas à placa. O método de análise baseou-se no princípio de minimização da energia de deformação. Foi apresentada a formulação da função de deflexão para a placa, que era um produto de uma série polinomial e uma série trigonométrica. Esta função foi usada para calcular momentos na placa devido a um carregamento estático geral.

Combinando o Método dos Elementos Finitos com a teoria de deformação por cisalhamento de alta ordem, Biswal e Ghosh (1994) analisaram placas enrijecidas laminadas, assumindo um padrão de deformação transversal real e eliminando o uso de coeficientes de correção de cisalhamento. Um elemento retangular padrão com quatro nós e sete graus de liberdade em cada nó foi desenvolvido para uma placa laminada com uma espessura constante para qualquer camada individual. A rigidez do enrijecedor era acoplada aos quatro nós do elemento de placa onde o reforço estava colocado. A formulação do elemento presente foi verificada para placas enrijecidas isotrópicas, onde produziu boa concordância com os resultados analíticos e numéricos. A formulação foi então estendida à análise de placas enrijecidas laminadas, feitas de material compósito reforçado com fibras.

Mukhopadhyay (1994) estendeu a aplicação do Método das Diferenças Finitas, utilizado por ele próprio em análises de placas simples, para o estudo de placas contendo enrijecedores concêntricos e excêntricos. A excentricidade do reforço dá origem a três equações diferenciais parciais acopladas que envolvem deslocamentos nas três direções ortogonais u , v e w , as quais devem satisfazer às condições de contorno ao longo de duas bordas opostas. Essas equações resultantes foram então reduzidas a equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes, possíveis de serem solucionadas pela técnica de diferenças finitas. Com base nos valores conhecidos de deslocamentos, obtém-se as tensões resultantes em qualquer ponto da placa ou do reforço que se desejar. Foram analisadas placas retangulares enrijecidas com localização e

quantidades variadas de enrijecedores e sob diferentes condições de contorno e de carregamento.

O Método dos Elementos de Contorno foi aplicado por Tanaka e Bercin (1997) para análise da flexão elástica de placas enrijecidas. As rigidezes de flexão e torção, bem como a excentricidade das placas enrijecidas foram incluídas na formulação, tornando a análise aplicável a placas suportadas por vigas de seção transversal arbitrária abertas ou fechadas. Tendo obtido as equações integrais de contorno para uma placa e expresso o momento normal e a força de cisalhamento efetiva em termos de deflexão e inclinação em um contorno enrijecido, realizou-se a integração por funções de interpolação que são definidas em sub-regiões do domínio denominadas elementos de contorno, sendo as contribuições de todos os elementos posteriormente somadas. Os exemplos analisados por essa metodologia foram os mesmos estudados nos trabalhos anteriores de Rossow e Ibrahimkhail (1978) – placa quadrada com um enrijecedor concêntrico central, e Harik e Salamoun (1988) – placa retangular com dois enrijecedores igualmente espaçados fabricados com perfil W5x16, com boa concordância de resultados para ambos os casos.

Bedair (1997) analisou placas enrijecidas sob carregamento transversal utilizando o método da Programação Sequencial Quadrática. Nesse estudo a estrutura foi também idealizada como uma placa conectada de forma rígida a vigas enrijecedoras. A energia de deformação dessa estrutura idealizada foi obtida em termos de funções generalizadas de deslocamento dentro e fora do plano, onde os coeficientes dessas funções são como variáveis de projeto. A programação sequencial quadrática foi então utilizada para determinar a magnitude desses coeficientes que minimizam o potencial total de energia do sistema. Os dois exemplos analisados por Bedair foram ambos iguais aos estudados por Rossow e Ibrahimkhail (1978) – placa quadrada com um enrijecedor central e placa retangular com dois enrijecedores em cruz, ambos os casos com os reforços concêntricos e excêntricos. Esses dois exemplos também foram analisados por Siddiqi e Kukreti (1998) através do Método da Quadratura Diferencial.

Placas reforçadas por vigas também foram abordadas no artigo publicado por Sapountzakis e Katsikadelis (2000). Nesse trabalho os autores aplicaram uma metodologia que considerava os esforços e deformações no plano da placa bem como os esforços e deformações axiais nas vigas, sendo esses esforços avaliados nas regiões da interface de união entre os enrijecedores e a placa. Isso permitiu o cálculo dos esforços de cisalhamento nessas regiões de ligação entre a placa e os reforços, parâmetro importante para o projeto de placas reforçadas pré-fabricadas ou executadas em material compósito. A solução das equações diferenciais do problema foi obtida através do Método da Equação Análoga e um dos exemplos analisados para verificar a eficácia do método foram placas retangulares simplesmente apoiadas com um enrijecedor central também de seção transversal

retangular e diversas alturas diferentes. Os resultados de deflexão transversal apresentados por Sapountzakis e Katsikadelis (2000) se mostraram bem menores do que aqueles obtidos por outros autores, indicando um aumento da rigidez das placas enrijecidas ao serem implementadas as considerações realizadas para a região de interface entre placa e enrijecedor.

Guo et al. (2002) utilizaram uma formulação semi-discreta de elementos finitos para análise de flexão de placas enrijecidas e pontes compostas sistemas lajes-vigas submetidas a cargas transversais. A placa ou laje foi modelada por elementos de placa e os reforços ou vigas foram modelados por elementos de viga. Os deslocamentos causados pelas deformações axiais por causa da interação placa-reforço foram aproximados em termos das deformações de flexão. Isso aliviou a necessidade de graus de liberdade independentes para considerar esses deslocamentos axiais para os elementos de placa e viga. Consequentemente, a formulação foi consideravelmente simplificada e o modelo resultante tornou-se mais eficiente do ponto de vista computacional.

Fernandes e Venturini (2002) estenderam a formulação de flexão de placas pelo Método dos Elementos de Contorno, com base nas hipóteses de Kirchhoff, para a análise de estruturas enrijecidas usualmente empregadas na construção de painéis de pisos. As condições de equilíbrio e compatibilidade foram impostas por equações integrais, que tratavam a estrutura compósita como um único corpo. Dois procedimentos possíveis foram mostrados para lidar com o problema de placa enrijecida por vigas. No primeiro, o elemento de viga era considerado como uma região mais rígida, exigindo, portanto, a discretização de duas linhas internas com duas incógnitas por nó. No segundo esquema, o número de graus de liberdade ao longo da interface era reduzido em dois assumindo que o movimento da seção transversal é definido apenas por três componentes independentes.

Há também estudos de placas retangulares sob a ação de cargas pontuais, como Pape e Fox (2006), que analisaram a deflexão de placas retangulares finas reforçadas com vigas elásticas posicionadas na borda da estrutura usando uma abordagem de série infinita. Ambas rigidezes de flexão e de torção das vigas foram incluídas nas formulações. Foram estudadas placas com diferentes condições de contorno e diferentes valores de rigidez para as vigas de reforço.

O estudo de Hasan (2007) teve como objetivo identificar a localização ideal de enrijecedores de seção retangular achatada em placas quadradas de aço sob diferentes condições de contorno. Além de estudar configurações com reforços longitudinais, esse estudo propôs enrijecedores em formato quadrado acompanhando todo o perímetro da placa. A metodologia consistiu em avaliar as máximas tensões e deflexões que surgiam na estrutura após aplicação de uma carga estática uniformemente distribuída, utilizando para isso o Método dos Elementos Finitos por meio do software *NASTRAN*[®].

Kuang e Zhang (2008) propuseram um método semi-analítico para análise de flexão e deflexão de estruturas de placas e reforços sujeitas a cargas verticais. A abordagem proposta foi baseada no método dos elementos finitos e tinha como objetivo resolver problemas de placas enrijecidas com formato e aberturas irregulares utilizando menos variáveis em comparação com o próprio método dos elementos finitos tradicional. Esse método exige menor tempo computacional ao empregar transformações analíticas que expressam os deslocamentos dos nós pertencentes a uma mesma linha nodal através de funções para cada uma dessas linhas, reduzindo assim o número de variáveis desconhecidas ao número de parâmetros desconhecidos dessas funções.

Através de um estudo de otimização geométrica, Yousif et al. (2008) trabalharam na obtenção de recomendações de projeto para a altura de enrijecedores utilizados em placas de aço. Para isso utilizaram o software *ANSYS*[®], que se baseia no Método dos Elementos Finitos, para avaliar a influência da altura desses reforços na tensão máxima que ocorre em placas submetidas a carregamento distribuído uniforme. Foram modeladas diversas configurações geométricas de placas quadradas com um enrijecedor central excêntrico engastadas nas quatro bordas, utilizando elementos de placa do tipo *SHELL93* para a modelagem da placa e *SHELL63* para o enrijecedor, com o objetivo de encontrar os efeitos da espessura do reforço, das dimensões da placa e da magnitude da pressão aplicada, na altura ideal do perfil reforçador. Também foi aplicado o método analítico da equação de tensão máxima, obtida através da teoria de placas finas (TIMOSHENKO E KRIEGER, 1959) juntamente com a inclusão da rigidez à flexão devido aos enrijecedores, para comparação gráfica com os resultados numéricos.

Bedair (2009) realizou em seu trabalho uma ampla revisão bibliográfica e estado da arte sobre o tema de placas enrijecidas, as quais são encontradas em muitas aplicações de engenharia. Segundo Bedair (2009), vários procedimentos analíticos e numéricos foram desenvolvidos nas últimas décadas para análise dessas estruturas. A primeira parte do artigo analisou os procedimentos analíticos, numéricos e de placas ortotrópicas que foram desenvolvidos para análise de placas reforçadas. A idealização estrutural, a base teórica e os méritos de cada método também foram discutidos. A segunda parte do artigo analisou as filosofias de projeto que foram desenvolvidas para prever a resistência última dessas estruturas. Foi discutida a influência de vários parâmetros que afetam o desempenho estrutural, como imperfeições geométricas e dos materiais, perfil de reforço, etc. Os procedimentos de otimização para minimizar o peso da estrutura também foram revisados. Esse trabalho teve como objetivo oferecer um "manual de referência" abrangente e único para todos os tipos de aplicações de placas enrijecidas.

Silva (2010) apresentou estudos numéricos em pavimentos de laje nervurada que mostraram

que a consideração da excentricidade entre placa e viga de reforço resultou em redução dos deslocamentos da estrutura. Os pavimentos foram simulados com o software *ANSYS*[®] utilizando elementos de placa (*SHELL63*) para modelar a placa e elementos de viga (*BEAM44*) para modelar os reforços enrijecedores. Dentre os exemplos analisados na etapa de verificação do modelo computacional estão os mesmos apresentados por Rossow e Ibrahimkhail (1978), Tanaka e Bercin (1997), Bedair (1997), ou seja, placa quadrada reforçada por um enrijecedor central e placa retangular com dois enrijecedores ortogonais ou em cruz. Além disso, Silva (2010) estudou também o exemplo proposto por Sapountzakis e Katsikadelis (2000), que analisou as deflexões de uma placa retangular com reforço longitudinal central de espessura constante e diferentes alturas.

Vanam et al. (2012) implementaram no software matemático *MATLAB*[®] uma programação do Método dos Elementos Finitos para análise estática de uma placa retangular isotrópica não enrijecida com várias condições de contorno e vários tipos de carregamento. O elemento utilizado para discretização da estrutura foi um elemento quadrilátero de 4 nós (um em cada vértice). Os mesmos exemplos numéricos avaliados através do *MATLAB*[®] foram simulados usando o software *ANSYS*[®] também de análise de elementos finitos e, finalmente, foi feita uma comparação entre os resultados numéricos com os resultados obtidos pelos métodos analíticos baseados na teoria clássica de placas finas. Durante esta análise, a espessura ideal da placa foi obtida quando a placa é submetida a diferentes condições de carga e condições de contorno.

Bashkar e Pydah (2014) obtiveram as deflexões estáticas e as frequências naturais de vibração de placas finas enrijecidas usando um modelo analítico tridimensional para a placa e bidimensional (estado plano de tensões) para o enrijecedor, estando as placas simplesmente apoiadas em seus contornos. Desse modo, os efeitos não clássicos, como a deformação por cisalhamento transversal e a inércia rotativa, foram automaticamente contabilizados. Comparando a solução por esse método de elasticidade com vários outros modelos aproximados, foram quantificadas as contribuições individuais da placa e das vigas na deformação de cisalhamento total da estrutura para diferentes parâmetros geométricos e propriedades do material. Concluiu-se, através dos resultados, que há uma maior importância de efeitos não clássicos na análise de placas enrijecidas em comparação com placas sem enrijecedores.

Além das análises de placas no formato quadrado e retangular, outros formatos são possíveis em algumas aplicações de engenharia. O estudo de Gujar e Ladhane (2015) analisou a flexão de placas com forma circular e material isotrópico através da solução analítica advinda da Teoria Clássica de Placas e comparou com soluções numéricas obtidas pelo software de elemento finitos *ANSYS*[®]. As análises das placas circulares foram feitas no sistema de coordenadas cilíndricas.

Ambas as condições de contorno, simplesmente apoiada e totalmente engastada, foram abordadas nesse estudo cujo carregamento aplicado foi composto de carga uniformemente distribuída e carga concentrada no ponto central da placa circular. O objetivo principal da pesquisa era estudar o efeito da espessura variável da placa circular na deflexão e tensão de flexão máximas. O elemento de placa utilizado para a modelagem desse problema no *ANSYS*[®] foi o *SHELL181*.

Singh e Pal (2016) abordaram em seu artigo o estudo de placas enrijecidas isotrópicas e compósitas. A técnica de elementos finitos foi utilizada para modelar e analisar as placas através do software *ANSYS*[®]. O objetivo era minimizar a deformação da placa enrijecida sem aumentar o volume de material necessário para sua construção, variando arbitrariamente o comprimento, espessura e altura do reforço. Foram analisados exemplos numéricos de placa quadrada isotrópica ou compósita com e sem enrijecedor, submetidas a carregamento uniforme distribuído ou carga pontual localizada no centro da estrutura. Para a modelagem das placas isotrópicas, foram utilizados para as placas e enrijecedores os elementos *SHELL181* e *SOLID186*, respectivamente. No caso das placas compósitas, apenas o elemento *SHELL181* foi utilizado, tanto para a modelagem das placas como para a modelagem dos enrijecedores.

Zhao et al. (2016) propuseram vários novos modelos de elementos de placas enrijecidas com base na formulação absoluta de coordenadas nodais. Os elementos de placa enrijecida com diferentes condições de continuidade e performance geométrica foram desenvolvidos por um elemento de placa parametrizado completo e três diferentes elementos de viga. O efeito do reforço foi incorporado pela restrição interna dos campos de deslocamento do enrijecedor aos campos de deslocamento da placa. A massa e a rigidez de um reforço foram refletidas em todos os nós do elemento de placa em que é colocado, dessa forma o reforço pode ser posicionado em qualquer lugar dentro do elemento da placa ao longo de linhas de coordenadas locais e não precisa necessariamente ser colocado em linhas nodais, o que dá uma grande flexibilidade na escolha do tamanho da malha. Análises estáticas, dinâmicas e de vibrações livres foram conduzidas para validar os elementos propostos e estudar o desempenho dos enrijecedores. Os efeitos da dimensão da seção transversal e do número de enrijecedores também foram investigados numericamente para problemas de deformação linear e não linear.

Hosseini e Soltani (2017) analisaram a flexão de placas enrijecidas de geometria quadrada e retangular com reforços concêntricos e excêntricos pelo Método de Colocação sem Malha. Para obter as equações governantes de placas e vigas, a teoria de placas de Mindlin e a teoria de vigas de Timoshenko foram utilizadas, respectivamente, com as matrizes de rigidez da placa e das vigas obtidas separadamente. As matrizes de rigidez da placa e das vigas foram combinadas para formar

uma matriz de rigidez total. Além de ser independente da malha, esse método possui um processo de implementação mais simples em comparação com os outros métodos numéricos. Para produzir funções de interpolação sem malha, foi utilizado um método de interpolação de ponto radial. Além disso, a função de base radial multiquadrática foi utilizada para interpolações pontuais. São apresentados exemplos que mostram precisão aceitável quando o método é empregado na análise de placas quadradas e retangulares enrijecidas por vigas posicionadas concêntrica e excêntrica.

Diante do exposto, o presente trabalho propõe o estudo de uma placa de referência de comprimento a , largura b e espessura t , a qual tem uma fração de volume de material ϕ retirada da sua espessura para originar diferentes combinações de enrijecedores longitudinais N_{ls} e transversais N_{ts} , com diferentes alturas h_s e espessuras t_s . Dessa forma, novas espessuras t_p dependentes do parâmetro ϕ passam a valer para as placas enrijecidas. A análise dessas novas estruturas geradas é realizada, via Método dos Elementos Finitos, pela simulação numérica através do software *ANSYS*[®]. Os modelos computacionais empregados utilizam elementos bidimensionais (*SHELL93*) e tridimensionais (*SOLID95*). Ao final do estudo são obtidas recomendações geométricas que minimizam a deflexão transversal no centro das placas com enrijecedores quando submetidas a carga transversal uniformemente distribuída e bordas simplesmente apoiadas.

1.2. Objetivos

Para um melhor entendimento do objetivo geral e dos objetivos específicos, é importante apresentar a configuração geométrica das placas com enrijecedores a serem tratadas nesse trabalho. A Fig. 1.7 mostra um exemplo de placa retangular enrijecida com dois reforços longitudinais ($N_{ls} = 2$) e três reforços transversais ($N_{ts} = 3$).

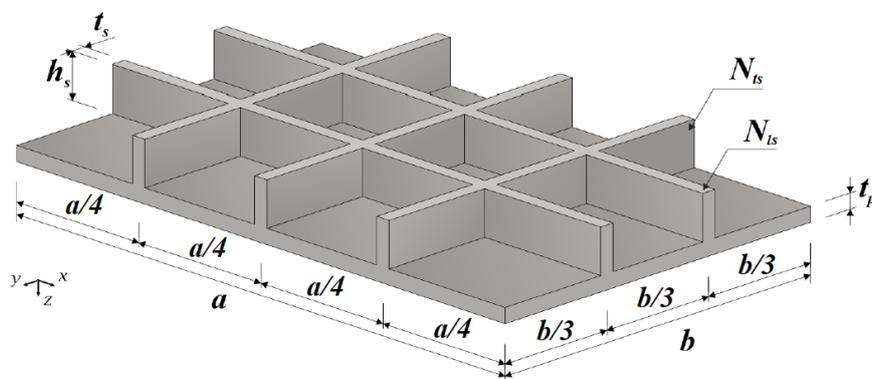


Figura 1.7 – Modelo físico de placa enrijecida

(Fonte: Adaptada de LIMA, 2016)

1.2.1. Objetivo Geral

Realizar simulações numéricas através de modelos computacionais de placas finas de aço com enrijecedores e aplicar o método Design Construtal para determinar, por meio da técnica de Busca Exaustiva, parâmetros geométricos ótimos que minimizem a deflexão central dessas placas enrijecidas quando submetidas a um carregamento transversal uniformemente distribuído e bordas simplesmente apoiadas.

1.2.2. Objetivos Específicos

Para alcançar o objetivo geral, os objetivos específicos a serem alcançados são:

- Desenvolver um modelo numérico-computacional no software *ANSYS*[®], empregando o elemento finito bidimensional *SHELL93*.
- Desenvolver um modelo numérico no software *ANSYS*[®], empregando o elemento finito tridimensional *SOLID95*.
- Aplicar o método Design Construtal para gerar as diferentes geometrias de placas enrijecidas a serem simuladas através dos modelos computacionais desenvolvidos e verificados.
- Avaliar a influência do número de enrijecedores longitudinais (N_{ls}) no comportamento estrutural, quanto à deflexão, das placas enrijecidas submetidas à carga transversal uniformemente distribuída;
- Avaliar a influência do número de enrijecedores transversais (N_{ts}) no comportamento estrutural, quanto à deflexão, das placas enrijecidas submetidas à carga transversal uniformemente distribuída;
- Avaliar a influência da relação entre a altura e a espessura dos enrijecedores (h_s/t_s) no comportamento estrutural, quanto à deflexão, das placas enrijecidas submetidas à carga transversal uniformemente distribuída;
- Avaliar a influência da fração volumétrica ϕ (definida pela relação entre o volume de material dos enrijecedores e o volume total de material da placa) no comportamento estrutural, quanto à deflexão, das placas enrijecidas submetidas à carga transversal uniformemente distribuída.

1.3. Resumo da metodologia

Os resultados dessa pesquisa foram obtidos através da modelagem computacional de placas finas de aço com e sem enrijecedores. A geometria, condições de contorno e cargas aplicadas foram dados de entrada para o software comercial *ANSYS*[®] utilizado. Por outro lado, o campo de deflexões

transversais em todo o domínio sob análise foi a principal grandeza de saída. O *ANSYS*[®] é um programa de simulação numérica que soluciona problemas de diversas áreas da física e resolve as equações diferenciais governantes dos problemas por meio do Método dos Elementos Finitos.

Para investigar a capacidade da modelagem computacional através do *ANSYS*[®] em representar adequadamente modelos físicos de placas enrijecidas, foram realizadas simulações e comparações de resultados numéricos obtidos computacionalmente com resultados provenientes de soluções analíticas ou referências científicas já publicadas sobre esse tema (procedimento de verificação). Para essa pesquisa, escolheu-se analisar somente problemas de placas simplesmente apoiadas e submetidas à ação de carregamento transversal uniformemente distribuído, já que estas estruturas possuem aplicações bem comuns em sistemas estruturais de engenharia e apresentam, além de algumas poucas soluções analíticas, muitas abordagens numéricas em artigos publicados, cujos resultados servem para comparações e verificações necessárias ao aprimoramento dos modelos computacionais a serem desenvolvidos.

Inicialmente foram analisadas placas sem enrijecedores, uma quadrada e outra retangular, pois estas situações permitem comparação direta com soluções analíticas consagradas na literatura. Após essa etapa, foram implementados problemas de placas com enrijecedores, sendo avaliados casos com apenas um enrijecedor ou com dois enrijecedores ortogonais. O último caso utilizado na verificação dos modelos computacionais consistiu de um estudo paramétrico que avaliou a influência da altura do único enrijecedor longitudinal presente em uma placa retangular no resultado de deflexão máxima que ocorre no centro da mesma. Essa última verificação é importante por estar de acordo com a principal proposta deste trabalho: analisar a influência de variações geométricas no comportamento mecânico de estruturas em termos dos seus deslocamentos.

Para todas as simulações realizadas na etapa de verificação dos modelos, foram utilizados dois diferentes tipos de elementos finitos: *SHELL93* e *SOLID95*. No entanto, como foram exploradas as opções triangular e quadrilátera do *SHELL93* e as opções tetraédrica e hexaédrica do *SOLID95*, pode-se dizer que as análises se desenvolveram com quatro diferentes tipos de elementos. Juntamente com a avaliação dos diferentes elementos, foram implementados seis tamanhos de malha a fim de testar a independência dos resultados quando ao grau de discretização das estruturas. Após análise dos resultados da etapa de verificação, foram selecionados, por apresentarem melhor acurácia e menor tempo computacional, apenas os elementos *SHELL93 – Quadrilátero* e *SOLID95 – Hexaédrico*. Os resultados dessa pesquisa foram gerados com esses dois tipos de elemento em paralelo visando também uma comparação de resultados entre eles.

Após a verificação dos modelos computacionais, o método Design Construtal foi empregado

para a geração das diferentes configurações geométricas de placas com enrijecedores a serem avaliadas neste trabalho. Uma placa de referência sem enrijecedores foi usada para dar origem às placas enrijecidas, as quais foram construídas por meio da transformação de uma quantidade de material da placa de referência em enrijecedores longitudinais (N_{ls}) e transversais (N_{ts}) para diferentes combinações $P(N_{ls}, N_{ts})$. É importante frisar que, ao aplicar o método Design Construtal, foi imposta a restrição que o volume total de material se mantivesse constante para todas as diversas configurações geométricas obtidas, por conta disso, como as medidas de largura e comprimento das placas foram mantidas iguais, o volume de material destinado aos enrijecedores foi retirado apenas da espessura da placa de referência.

Após definidos os modelos geométricos das placas enrijecidas, a modelagem computacional e a simulação numérica foram implementadas no ANSYS® para a obtenção dos resultados de deflexão transversal no centro das placas. Esses resultados foram então apresentados em gráficos e tabelas para facilitar a análise e compreensão.

Os graus de liberdade do problema foram analisados quanto a sua influência nos resultados de deflexão central das placas, são eles: o número de enrijecedores na direção longitudinal (N_{ls}), o número de enrijecedores na direção transversal (N_{ts}) e a relação (h_s/t_s) entre a altura (h_s) e a espessura (t_s) dos enrijecedores de seção transversal retangular. Da mesma maneira, a influência da fração volumétrica ϕ , que representa a relação entre o volume de material utilizado para gerar os enrijecedores (V_s) e o volume total de material da placa de referência (V_r), foi também analisada. Adicionalmente, foi observado um padrão similar entre todos os gráficos de deflexão central das placas em função da variação do grau de liberdade h_s/t_s e, a partir disso, foram ajustadas curvas de potência que melhor se aproximaram dos gráficos de pontos, obtendo assim equações com elevado grau de concordância com os pontos ajustados que podem ser utilizadas para prever resultados além dos simulados.

Por fim, baseando-se na técnica de Busca Exaustiva, encontrou-se, dentre todos os casos simulados, os valores ótimos para a fração volumétrica ϕ e para os graus de liberdade (N_{ls} , N_{ts} e h_s/t_s) testados. Tais valores ótimos foram aqueles que proporcionaram as mínimas deflexões transversais no centro das placas e que, portanto, otimizaram as estruturas do ponto de vista dos deslocamentos transversais. Sendo assim, foi possível através dessa pesquisa estabelecer algumas conclusões a respeito do problema de placas com enrijecedores e do seu comportamento mecânico-estrutural sob carregamento transversal uniformemente distribuído em condições de apoio simples em todas as suas bordas.

1.4. Organização da dissertação

No Capítulo 1, uma introdução aborda a importância da utilização de placas enrijecidas como elementos estruturais, contextualizando especialmente a aplicação dessas estruturas na Engenharia Naval e Oceânica. Este capítulo apresenta também um estado da arte que mostra os estudos que foram e ainda continuam sendo realizados sobre esse tema, além de expor os objetivos desta dissertação e um resumo da metodologia utilizada para alcançá-los.

No Capítulo 2, são apresentadas as teorias para os problemas de placas, mostrando em alguns casos as possíveis soluções analíticas propostas na literatura, obtidas através de algumas simplificações e aproximações. Neste capítulo são abordadas tanto as placas não enrijecidas como as placas reforçadas com enrijecedores.

No Capítulo 3, são apresentados os conceitos fundamentais da modelagem computacional e, de forma sucinta, são demonstrados os fundamentos teóricos e matemáticos do Método dos Elementos Finitos (MEF), principalmente quando aplicado à análise estrutural estática. Além disso, são detalhadas algumas características específicas da modelagem computacional com o software *ANSYS*[®] e verificada a eficácia dos modelos computacionais empregados nesta dissertação ao comparar os resultados numéricos obtidos por esses modelos com os resultados analíticos e/ou numéricos obtidos por referências científicas publicadas (procedimento de verificação).

No Capítulo 4, apresenta-se a Teoria Construtal, da qual deriva o método Design Construtal, método este que foi aplicado para construir as diferentes configurações geométricas de placas com enrijecedores que foram simuladas numericamente para obtenção dos resultados desta pesquisa.

Os resultados são apresentados no Capítulo 5, onde é avaliado o efeito da variação dos graus de liberdade (h_s/t_s , N_{ls} e N_{ts}) e da fração volumétrica (ϕ) na magnitude das deflexões que surgem no centro das placas. Os parâmetros geométricos otimizados são obtidos através da técnica de Busca Exaustiva, que é aplicada dentro espaço de busca formado pelas diferentes configurações geométricas simuladas. Ainda foi mostrado que é possível ajustar curvas de potência para descrever o comportamento da deflexão central das placas em função da variação do grau de liberdade h_s/t_s .

As conclusões a respeito desta pesquisa e sugestões para trabalhos futuros estão contidas no Capítulo 6. Por fim, as referências bibliográficas usadas para o embasamento e realização desta dissertação completam a sequência do texto, juntamente com o Apêndice A, que consiste de uma tabela com os coeficientes necessários para a expansão de uma determinada carga transversal em série dupla de Fourier, o Apêndice B, que traz todos os resultados gráficos de deflexão no centro das placas enrijecidas em função da variação do grau de liberdade h_s/t_s e o Apêndice C, que fornece as constantes $C1$ e $C2$ e os coeficientes de determinação R^2 de todos os ajustes de curvas realizados.

2. TEORIA DE PLACAS

Placas são estruturas planas que possuem uma dimensão, chamada espessura, muito menor que as outras duas dimensões laterais, largura e comprimento. Timoshenko e Gere (1961) e Szilard (2004) definem as placas como componentes estruturais bidimensionais planos que possuem uma dimensão, referida como espessura, muito menor em relação às outras. Geometricamente podem ter contornos retos ou curvos, sendo as quadradas, retangulares e circulares as aplicações mais comuns.

As placas podem atuar como componentes estruturais primários, ou seja, resistindo aos esforços principais em uma estrutura, ou podem servir como elementos secundários e terciários que auxiliam na distribuição desses esforços principais e completam vãos laterais, plataformas de acesso e pisos. Devido a essas diferentes aplicações, as placas são submetidas a diferentes tipos de esforços como cargas transversais (normais à sua superfície) e cargas atuando no seu próprio plano. Além disso, podem estar vinculadas a diferentes condições de contorno como apoios simples, bordas livres, bordas fixas ou apoios elásticos (YASUHISA et al., 2009).

O comportamento estrutural das placas se assemelha, até certo ponto, ao comportamento de uma malha bidimensional de vigas. No entanto, a continuidade física das placas lhes confere características especiais em termos de esforços internos, o que as tornam estruturas mais resistentes à ação das cargas externas. Com isso, pode-se dizer que as placas formam estruturas mais leves e mais resistentes quando comparadas a grelhas compostas por vigas interligadas de dimensões equivalentes (SZILARD, 2004).

Devido à complexidade das estruturas reais de engenharia, estuda-se os problemas físicos verdadeiros através da análise de modelos simplificados que contêm apenas as variáveis de maior importância para os problemas em questão. Em virtude disso, as placas foram enquadradas em tipos baseados na relação da sua espessura t com a menor dimensão lateral, chamada aqui de L , o que de acordo com Szilard (2004) gera uma classificação com os seguintes intervalos:

1. $\left(\frac{t}{L} < \frac{1}{50}\right)$: **Membranas** ou placas muito finas praticamente sem rigidez à flexão. Suportam as cargas externas através de forças axiais e de cisalhamento central;
2. $\left(\frac{1}{50} < \frac{t}{L} < \frac{1}{10}\right)$: **Placas rígidas ou placas finas** com rigidez à flexão. Suportam as cargas externas através de momentos internos de flexão e torção aliados a forças de cisalhamento transversal;

3. $\left(\frac{1}{10} < \frac{t}{L} < \frac{1}{5}\right)$: **Placas moderadamente espessas**, as quais são similares em vários aspectos às placas finas, mas com a importante diferença em considerar a influência das deformações de cisalhamento transversal;
4. $\left(\frac{t}{L} > \frac{1}{5}\right)$: **Placas espessas**, as quais são analisadas através do estado tridimensional de tensões em meios contínuos.

As estruturas de placas são estudadas através das equações governantes da teoria da elasticidade. Todavia, é uma tarefa muito difícil encontrar soluções exatas para as várias equações diferenciais que surgem nos problemas envolvendo esse tipo de estrutura. Na realidade, apenas para uma quantidade específica e limitada de condições de contorno e carregamento é possível se chegar a resultados analíticos representativos. Algumas alternativas para driblar essas dificuldades matemáticas são as soluções analíticas aproximadas ou as abordagens numérico-computacionais como as utilizadas no decorrer deste trabalho (SZILARD, 2004).

De acordo com Szilard (2004), dependendo da natureza das cargas aplicadas, a análise de placas pode ser do tipo estática ou dinâmica. No que se refere às deflexões, as teorias elásticas de placas dividem-se entre os problemas que apresentam pequenos ou grandes deslocamentos. Para materiais no regime linear elástico, as teorias se baseiam na relação linear entre tensão e deformação dada pela Lei de Hooke, já para os regimes não-linear elástico e de deformação plástica, as relações tensão-deformação são bem mais complexas. Ainda em relação aos materiais, existem teorias para tratar de problemas cujas propriedades mecânicas são isotrópicas (iguais em todas as direções) ou anisotrópicas (diferentes a depender da direção) e existem ainda situações em que as placas são compostas por camadas de materiais diferentes uma sobre a outra (teoria de laminados).

Essa dissertação se limita ao estudo do comportamento estrutural estático e linear-elástico de placas finas, com e sem enrijecedores, feitas de material isotrópico, suportadas por apoios simples e submetidas a esforços transversais uniformemente distribuídos. Com isso, as principais teorias existentes sobre placas são apresentadas de uma forma simples e genérica no decorrer deste capítulo, visando uma boa fundamentação teórica sobre a análise desse tipo de estrutura.

2.1. Equação diferencial governante para placas finas

De acordo com Szilard (2004), a teoria de placas seguindo as hipóteses de Kirchhoff e Love é uma abordagem simplificada do problema de placas finas submetidas a carregamentos transversais e condições de contorno diversas. Entende-se como carregamento transversal aquele que atua na direção normal à superfície da placa, causando a deflexão transversal da mesma, ou seja, um deslocamento para fora do plano da placa. Para uma análise estrutural mais completa, seria necessária a solução de equações diferenciais tridimensionais da teoria da elasticidade, entretanto, para os casos de placas de pequena espessura a análise a partir das formulações bidimensionais obtidas por Kirchhoff-Love conduz a resultados com boa acurácia e menos complicações matemáticas, o que coloca essa teoria numa posição importante.

As hipóteses assumidas por Kirchhoff e Love para a obtenção da equação que governa o problema de placas finas são:

1. Material da placa homogêneo, isotrópico e linear-elástico;
2. Placa inicialmente plana e o seu plano médio não sofrendo deformação durante a flexão;
3. A espessura t deve ser constante, sendo a menor dimensão lateral da placa no mínimo dez vezes maior que a sua espessura;
4. As deflexões transversais $w(x,y)$ da placa devem ser pequenas se comparadas com sua espessura, sendo considerada como deflexão máxima permitida o valor de um décimo da espessura;
5. As inclinações do plano médio da placa (rotações) são pequenas quando comparadas com a unidade;
6. As seções planas e normais ao plano médio da placa antes da sua deformação permanecem planas e normais ao plano médio da placa defletido, conseqüentemente, as deformações por cisalhamento transversal são negligenciadas;
7. A tensão normal σ_z na direção transversal à placa pode ser desprezada.

Essas hipóteses são consideradas para a dedução da equação diferencial governante da placa em termos da deflexão transversal $w(x,y)$. Devido à geometria retangular da placa, é mais conveniente utilizar o sistema de coordenadas cartesianas x , y e z . Além disso, é adotada a convenção prática de engenharia que considera positivos os momentos fletores que tracionam as fibras inferiores da placa e considera positivos os deslocamentos u , v , w e as componentes de forças internas e externas que apontam para o sentido positivo dos eixos coordenados.

A Figura 2.1 apresenta um modelo de placa fina, sob carregamento transversal distribuído,

posicionada em um sistema cartesiano de coordenadas. Já a Fig. 2.2 mostra as componentes de tensões internas que agem nas seções transversais de um elemento extraído do interior dessa placa fina. Essas tensões internas surgem justamente para resistir aos esforços externos sob os quais a estrutura está submetida.

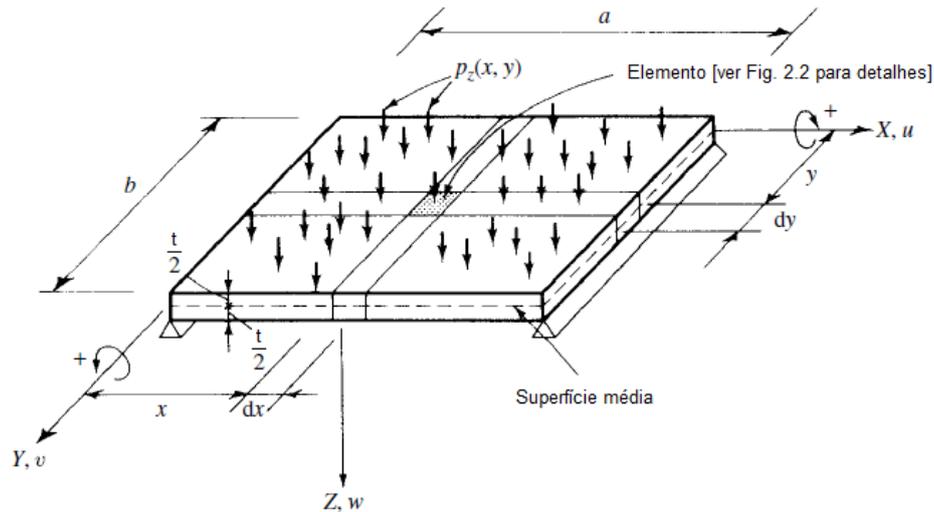


Figura 2.1 – Placa fina sob carregamento lateral distribuído
(Fonte: Adaptada de SZILARD, 2004)

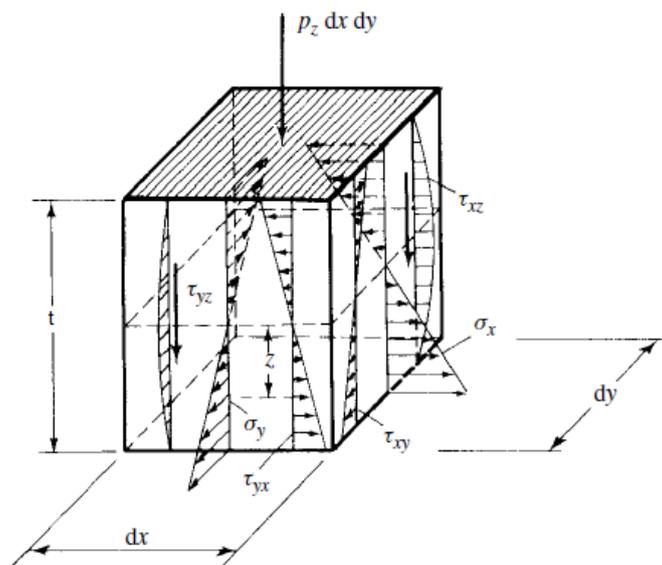


Figura 2.2 – Tensões internas em um elemento de placa
(Fonte: SZILARD, 2004)

Considerando o elemento infinitesimal da Fig. 2.3, que representa um elemento de placa sujeito apenas a esforços transversais, é possível visualizar os esforços internos que agem nas seções transversais. A equação governante é obtida através do equilíbrio de forças e momentos nesse elemento infinitesimal, de maneira similar ao que é feito na teoria elementar de vigas. No entanto, abordagens utilizando métodos de energia ou simplificações da teoria da elasticidade tridimensional também podem ser empregadas para essa dedução.

O comportamento de uma placa se assemelha em muitos aspectos ao de uma malha de vigas bidimensionais (grelha). Ou seja, a carga externa p_z é equilibrada por forças de cisalhamento transversal Q_x e Q_y e por momentos fletores M_x e M_y . No entanto, as placas possuem esforços (momentos) internos adicionais de torção M_{xy} e M_{yx} que as tornam estruturas com uma melhor relação resistência/peso quando comparadas às grelhas compostas por vigas equivalentes.

Na teoria de placas, é comum analisar os esforços por unidade de comprimento da superfície média. Sendo assim, os esforços distribuídos diferenciam-se dos demais através das notações: q_x , q_y , m_x , m_y , m_{xy} e m_{yx} . Na Fig. 2.3 é possível observar a superfície média de um elemento de placa fina que se encontra em estado de equilíbrio sob a ação de uma carga distribuída p_z . Como as formulações de Kirchhoff-Love reduzem o problema de placas finas a uma análise bidimensional, pode-se representar os esforços internos distribuídos por unidade de comprimento através do elemento plano da Fig. 2.4.

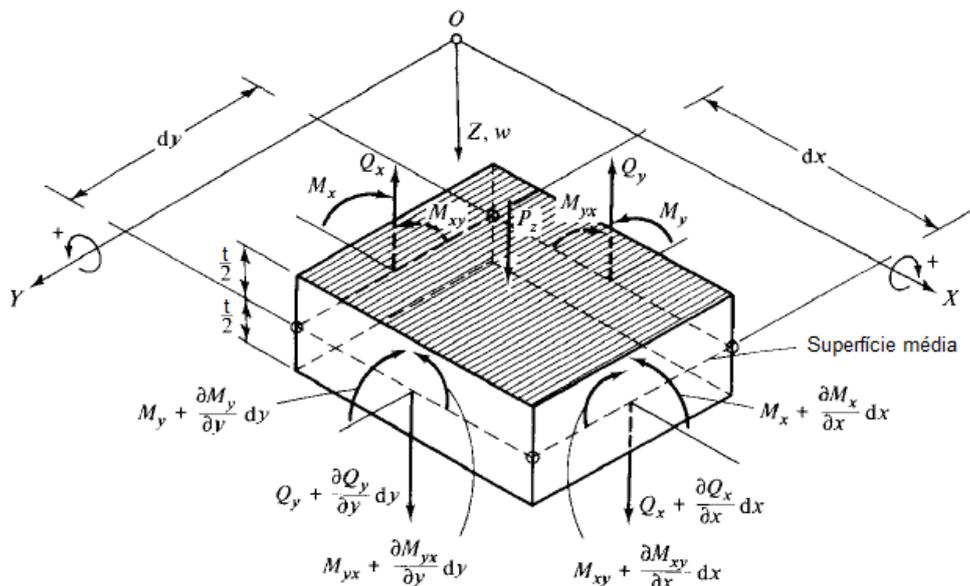


Figura 2.3 – Esforços internos em um elemento de placa

(Fonte: Adaptada de SZILARD, 2004)

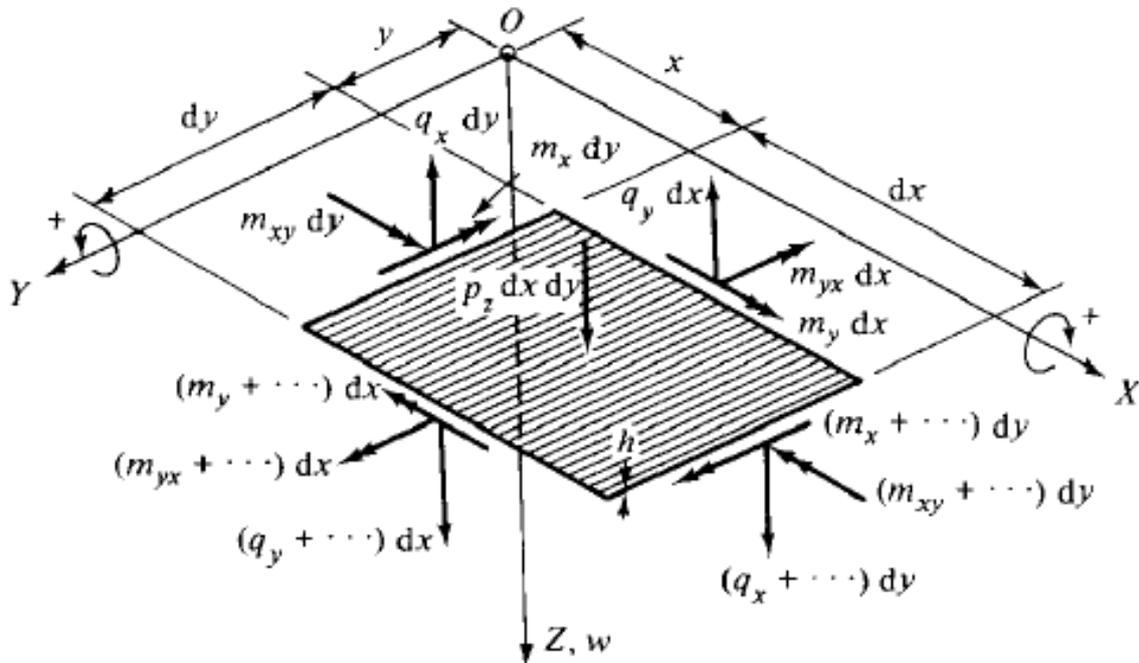


Figura 2.4 – Esforços internos no plano médio da placa

(Fonte: SZILARD, 2004)

Afim de encontrar a equação que governa o problema de placas finas, utiliza-se as equações fundamentais de equilíbrio de forças e momentos, começando pelo equilíbrio dos momentos em torno do eixo y :

$$\begin{aligned} \sum M_y = & \left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx \right) dy - m_x dy + \left(m_{yx} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy \right) dx - m_{yx} dx \\ & - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy \frac{dx}{2} - q_x dy \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Na Eq. (2.1) os incrementos dos esforços internos são obtidos através da expansão em série de Taylor truncada na primeira ordem. Como $(dx)^2$ representa uma pequena parcela de ordem superior, o termo $(\frac{1}{2})(\partial q_x / \partial x)(dx)^2 dy$ é desprezado, fazendo com que a equação de torne, após algumas simplificações:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = q_x \quad (2.2)$$

De forma análoga, o equilíbrio de momentos em torno do eixo x resulta em:

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = q_y \quad (2.3)$$

Já o equilíbrio de forças na direção z é dado por:

$$\sum F_z = - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy + q_x dy - \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dx + q_y dx - p_z dx dy = 0 \quad (2.4)$$

Que após simplificações torna-se igual a:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = - p_z(x, y) \quad (2.5)$$

Substituindo as Eqs. (2.2) e (2.3) na Eq. (2.5) e observando que os momentos torcionais são iguais em módulo $m_{xy} = m_{yx}$, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = - p_z(x, y) \quad (2.6)$$

A Eq. (2.6) é uma equação de segunda ordem em função dos momentos de flexão e de torção que surgem no interior de uma placa submetida a carregamento transversal distribuído. No entanto, para encontrar as equações que definem o campo de tensões, deformações e deslocamentos é preciso ir mais além na teoria da elasticidade. Aproveitando que esses momentos internos se relacionam com as componentes de tensões internas que atuam nas seções transversais do elemento infinitesimal retirado da placa, e que essas tensões, por sua vez, se relacionam com as deformações longitudinais ε_x e ε_y , é possível prosseguir com o desenvolvimento da Eq. (2.6) através da Lei de Hooke bidimensional para material linear-elástico, que consiste nas seguintes expressões:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad (2.7)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \quad (2.8)$$

onde E é o módulo de elasticidade e ν é o coeficiente de Poisson do material.

Os momentos de torção m_{xy} e m_{yx} surgem no plano onde atuam as tensões de cisalhamento torcionais τ_{xy} e τ_{yx} , as quais se relacionam com a deformação de cisalhamento γ_{xy} através da Lei de Hooke para o cisalhamento:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.9)$$

onde G é o módulo de cisalhamento transversal do material.

Através das análises geométricas da deflexão da seção transversal e da distorção angular de um elemento infinitesimal de placa, como mostrado nas Fig. 2.5 e 2.6, encontra-se as relações entre as deformações ε_x , ε_y , e γ_{xy} , e os deslocamentos transversais w . Essas análises são feitas comparando uma seção transversal localizada em uma coordenada y constante e a distorção angular sofrida por um elemento plano localizado em uma coordenada z constante, antes e depois da deflexão. Nesse momento é importante lembrar das hipóteses da teoria de placas finas, ou seja, as inclinações (rotações) do plano médio da placa devem ser pequenas quando comparadas com a unidade e as seções planas e normais ao plano médio da placa devem permanecer planas antes e depois da sua deflexão.

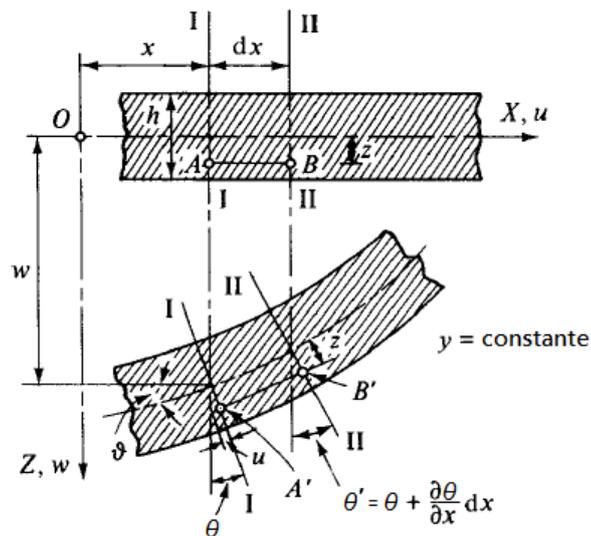


Figura 2.5 – Seção transversal de um elemento infinitesimal de placa antes e depois da deflexão

(Fonte: Adaptada de SZILARD, 2004)

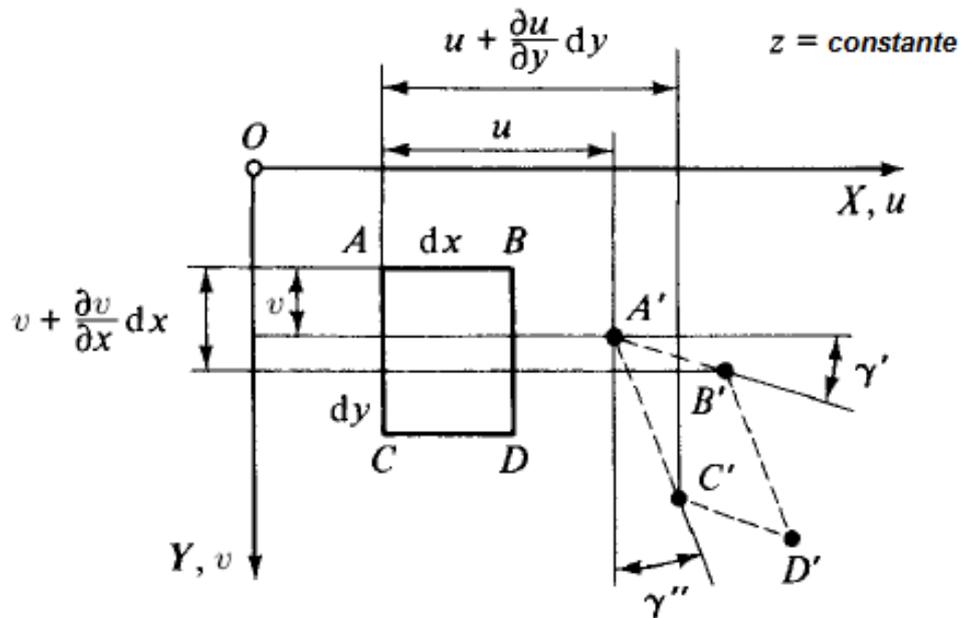


Figura 2.6 – Distorção angular de um elemento infinitesimal de placa
(Fonte: Adaptada de SZILARD, 2004)

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.11)$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.12)$$

A partir das relações tensão-deformação e deformação-deslocamento determinadas, aplica-se uma integração dos momentos provocados pelas componentes de tensão σ_x , σ_y , τ_{xy} e τ_{yx} , que atuam nas seções transversais do elemento de placa sob análise. Dessa maneira, consegue-se determinar os momentos resultantes internos de flexão m_x e m_y e de torção m_{xy} e m_{yx} em função do campo de deslocamentos da placa. As integrais a serem desenvolvidas são:

$$m_x = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_x z dz \quad (2.13)$$

$$m_y = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_y z dz \quad (2.14)$$

$$m_{xy} = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{xy} z dz \quad (2.15)$$

$$m_{yx} = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{yx} z dz \quad (2.16)$$

Com $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ e, portanto, $m_{xy} = m_{yx}$.

Por fim, substituindo as Eqs. (2.13), (2.14), (2.15) e (2.16) na Eq. (2.6), é deduzida a equação diferencial que governa o problema de placas finas de material elástico linear, submetidas a um carregamento distribuído transversal, no regime de pequenas deflexões:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z(x, y)}{D} \quad (2.17)$$

onde D é a rigidez à flexão da placa.

A rigidez à flexão de uma placa fina é determinada por:

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2.18)$$

onde t é a espessura da placa e E e ν são, respectivamente, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material.

Considerando que o operador diferencial Laplaciano para duas dimensões é expresso por:

$$\nabla^2(\bullet) = \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial y^2} \quad (2.19)$$

A Eq. (2.17) diferencial parcial, linear, não-homogênea, de quarta ordem e coeficientes constantes, também conhecida como equação bi-harmônica não-homogênea, pode ser escrita de uma forma mais compacta por:

$$D\nabla^2\nabla^2w(x,y) = p_z(x,y) \quad (2.20)$$

Apesar das deformações por cisalhamento transversal terem sido negligenciadas para a obtenção da equação governante de placas finas, os esforços de cisalhamento transversal existem e são expressos, por unidade de comprimento, em função da deflexão $w(x,y)$:

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w(x,y) \quad (2.21)$$

e

$$q_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w(x,y) \quad (2.22)$$

2.1.1. Condições de contorno das placas

O campo de deslocamentos $w(x,y)$ que satisfaz a Eq. (2.17) só será a solução completa para o problema de uma placa se, simultaneamente, forem satisfeitas as condições de contorno a que esta placa está submetida. Portanto, a Eq. (2.17) trata-se de um PVC (Problema de Valor de Contorno) e necessita, por ser de quarta ordem, de duas condições de contorno a serem atendidas em cada borda.

As condições de contorno em problemas de flexão de placas podem ser de deslocamento ou de esforços internos. As condições de deslocamento são também chamadas de condições de contorno geométricas e envolvem a deflexão transversal da placa ou a rotação do seu plano médio. Já as condições de esforços internos são ditas estáticas e envolvem os momentos de flexão, torção e forças de cisalhamento transversal. As principais condições de contorno para placas submetidas a carregamento transversal são ilustradas na Fig. 2.7.

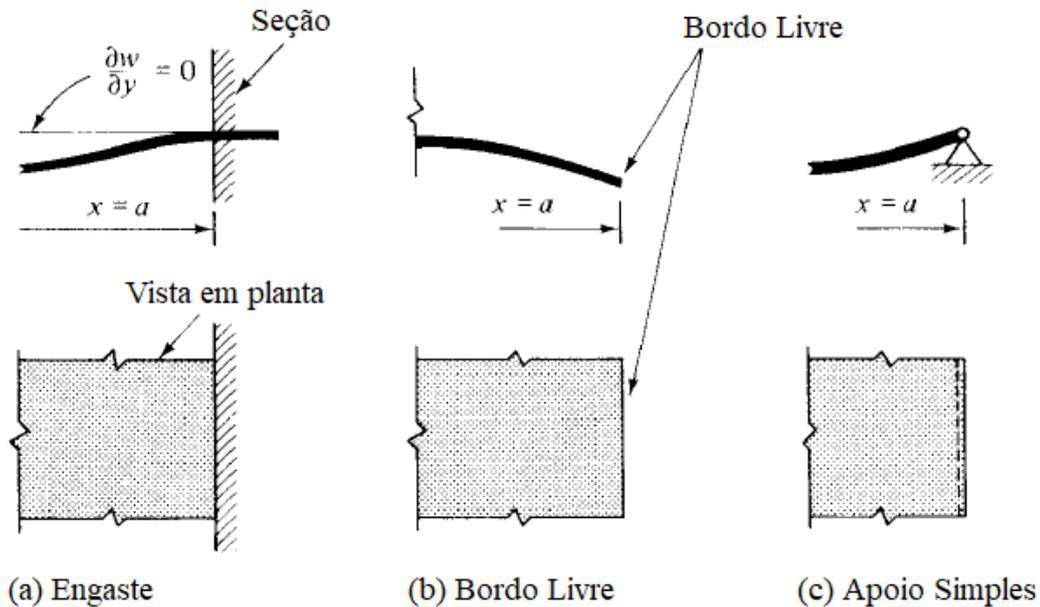


Figura 2.7 – Principais condições de contorno para placas

(Fonte: Adaptada de SZILARD, 2004)

Condições de Contorno Geométricas

Um exemplo de condição de contorno geométrica é quando se conhece os deslocamentos e inclinações dos bordos de uma placa. Tomando como exemplo uma placa retangular totalmente engastada de comprimento a , que se desenvolve ao longo do eixo x , e largura b , que se desenvolve ao longo do eixo y , tem-se que as deflexões nos seus quatro bordos serão nulas, assim como as inclinações. É possível representar matematicamente essas condições de contorno através das expressões:

$$(w)_x = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_x = 0 \quad \text{em } x = 0 \quad \text{e} \quad x = a \quad (2.23)$$

$$(w)_y = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_y = 0 \quad \text{em } y = 0 \quad \text{e} \quad y = b \quad (2.24)$$

Condições de Contorno Estáticas

Para o caso de condições de contorno estáticas, os esforços internos é que devem satisfazer às equações de restrição. Tomando como exemplo uma placa retangular de dimensões a e b igual à placa da seção anterior, mas hipoteticamente com todas as bordas livres, se o momento de flexão e o

esforço cortante em bordos livres devem ser nulos, as expressões para o momento fletor e esforço cortante dos contornos dessa placa devem ser igualadas a zero. Essa condição é representada matematicamente por:

$$(m_x)_x = 0, \quad (v_x)_x = 0 \quad \text{em } x = 0 \quad \text{e } x = a \quad (2.25)$$

$$(m_y)_y = 0, \quad (v_y)_y = 0 \quad \text{em } y = 0 \quad \text{e } y = b \quad (2.26)$$

onde v_x e v_y representam os esforços cortantes por unidade de comprimento que atuam nos planos normais aos eixos cartesianos x e y , respectivamente.

É importante ressaltar que o esforço cortante em um bordo de uma placa consiste de uma forma genérica em duas componentes, uma devido aos esforços de cisalhamento transversal q_x e q_y e outra devido ao efeito dos momentos torcionais m_{xy} e m_{yx} . Através da transformação dos momentos torcionais m_{xy} e m_{yx} em conjugados equivalentes (ver Fig. 2.8), obtém-se as chamadas forças suplementares de Kirchhoff (por unidade de comprimento) q_x^* e q_y^* que irão contribuir para o esforço cortante total no bordo da placa.

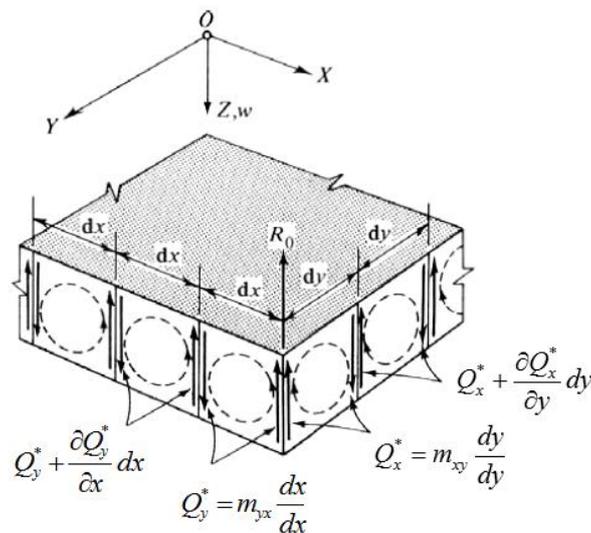


Figura 2.8 – Cisalhamento devido aos momentos torcionais

(Fonte: Adaptada de SZILARD, 2004)

Então, os esforços cortantes totais nos bordos livres de uma placa são dados por:

$$v_x = q_x + q_x^* = q_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \quad (2.27)$$

$$v_y = q_y + q_y^* = q_y + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x} \quad (2.28)$$

Finalmente, considerando as Eqs. (2.27) e (2.28), as condições de contorno para o caso de bordo livre dadas pelas Eqs. (2.25) e (2.26) passam a ser expressas de forma mais detalhada por:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_x = 0, \quad \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - v) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_x = 0 \quad \text{em } x = 0 \quad \text{e } x = a \quad (2.29)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_y = 0, \quad \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - v) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right)_y = 0 \quad \text{em } y = 0 \quad \text{e } y = b \quad (2.30)$$

Condições de Contorno Mistas

São as condições de contorno que envolvem considerações tanto em relação aos deslocamentos quanto em relação aos esforços internos. Placas retangulares simplesmente apoiadas nas quatro bordas, por exemplo, possuem condições de contorno mistas que impõem deslocamentos e momentos fletores nulos em todas as bordas. Considerando a mesma placa da seção anterior de dimensões a e b , essa condição é representada matematicamente por:

$$(w)_x = 0, \quad (m_x)_x = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_x = 0 \quad \text{em } x = 0 \quad \text{e } x = a \quad (2.31)$$

$$(w)_y = 0, \quad (m_y)_y = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_y = 0 \quad \text{em } y = 0 \quad \text{e } y = b \quad (2.32)$$

O efeito dos esforços suplementares de cisalhamento de Kirchhoff, discutidos anteriormente para bordos livres, também são importantes nas análises de placas simplesmente apoiadas. Para o caso específico de placas retangulares ou quadradas, esses esforços adicionais dão origem a indesejadas forças de canto na estrutura, além de contribuírem para o esforço cortante total nos bordos.

As forças suplementares de cisalhamento de Kirchhoff, obtidas por conjugados equivalentes aos momentos torcionais, somam-se nos vértices da placa e são as responsáveis pelo surgimento dessas forças de canto, que estão identificadas nas Figs. 2.8 e 2.9 por R_0 e são dadas por:

$$R_0 = 2m_{xy} = -2D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.33)$$

Caso não seja prevista a fixação dos vértices de placas simplesmente apoiadas, as forças de canto podem provocar o levantamento localizado dessas estruturas, como pode ser observado na Fig. 2.9. Além do mais, em algumas aplicações práticas esse levantamento é tão prejudicial que pode ocasionar falhas locais, o que requer reforços especiais para evitá-las.

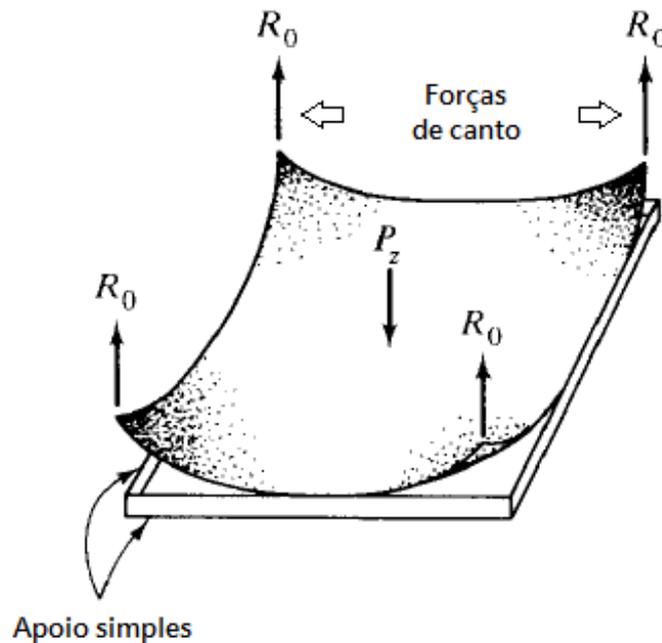


Figura 2.9 – Forças de canto em uma placa apoiada
(Fonte: Adaptada de SZILARD, 2004)

2.1.2. Solução rigorosa da equação diferencial governante

A solução rigorosa ou exata para a Eq. (2.17) é uma função $w(x,y)$ que deve satisfazer tanto o equilíbrio em relação à aplicação das cargas externas, quanto o equilíbrio com relação às forças de contorno e condições prescritas nos bordos de uma placa fina. Porém, devido à complexidade da maioria dos problemas que envolvem essas estruturas, a solução rigorosa da equação bi-harmônica de placas finas só é possível para casos muito simples de carregamento e condições de contorno.

De uma forma geral, a solução para o campo de deslocamentos da placa poderá ser obtida através da sobreposição de duas soluções, uma homogênea e outra particular. Essa sobreposição ou soma de duas soluções só pode ser feita devido à linearidade da equação diferencial que governa o problema de placas finas em regimes de pequenas deflexões. Portanto, caso seja possível encontrar as soluções homogênea $w_H(x,y)$ e particular $w_P(x,y)$, a solução geral da equação governante de uma placa fina será dada por:

$$w(x,y) = w_H(x,y) + w_P(x,y) \quad (2.34)$$

A interpretação física da solução homogênea da Eq. (2.17) é a obtenção da deflexão da placa $w_H(x,y)$ quando apenas as forças de borda estão atuando, ou seja, a solução da equação homogênea deve cumprir as condições de contorno prescritas e garantir o equilíbrio em caso de forças externas nas bordas. No entanto, a expressão da deflexão $w(x,y)$ só estará completa se for considerado o equilíbrio das forças externas relacionado com a carga transversal p_z . Para isso, deve ser então determinada a solução particular $w_P(x,y)$, que é a solução que satisfaz a equação diferencial não-homogênea e para a qual não há a obrigatoriedade de atender às condições de contorno.

Soluções rigorosas para algumas estruturas formadas por placas podem ser consultadas em livros clássicos sobre o assunto, como Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) e Szilard (2004), nos quais os autores apresentam abordagens analíticas fechadas para os casos mais simples em termos de geometria, carregamento e condições de contorno.

2.1.3. Solução aproximada de Navier

Uma alternativa para superar a dificuldade de se obter a solução rigorosa para a Eq. (2.17) é a utilização de alguns métodos de aproximação, como a solução por séries proposta por Navier. Esse método consiste em transformar a equação diferencial em uma simples equação algébrica, através da expansão da deflexão $w(x,y)$ e do termo de carga externa p_z em séries trigonométricas duplas senoidais.

Essa abordagem é limitada a placas retangulares com condições de contorno de apoio simples em todas as suas bordas. Dessa forma, a solução da equação diferencial é obtida assumindo a solução homogênea igual a zero ($w_H(x,y) = 0$). Já a solução particular $w_P(x,y)$, que será a própria solução geral $w(x,y)$, é expandida em uma série dupla de funções seno que atende todas as condições de contorno e deve satisfazer o equilíbrio das forças externas. A deflexão e o termo de carga externa expandidos em série dupla de senos fornecem as seguintes equações:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (2.35)$$

$$p_z(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (2.36)$$

onde a é a dimensão da placa na direção x , b é a dimensão da placa na direção y , W_{mn} são coeficientes desconhecidos e P_{mn} são os coeficientes da expansão do termo de carga externa em série dupla de Fourier, obtidos conforme Apêndice A para $m, n = 1, 2, 3, \dots, \infty$.

Através da substituição das Eqs. (2.35) e (2.36) na Eq. (2.17), são encontrados, através de uma simples equação algébrica, os coeficientes W_{mn} que fazem a solução de Navier atender à condição de equilíbrio quanto às forças externas. Desse modo, a solução final do problema de placas finas retangulares simplesmente apoiadas é dada por:

$$w(x, y) = \frac{1}{D\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{mn}}{[(m^2/a^2) + (n^2/b^2)]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (2.37)$$

A solução dessa série dupla infinita para as deflexões geralmente converge rapidamente e, portanto, necessita apenas do desenvolvimento de alguns poucos termos para fornecer bons resultados. Já a convergência em caso de cargas concentradas ou quando é usada para obtenção de esforços internos é lenta, especialmente na proximidade das bordas, sendo necessário para esses casos a consideração de mais termos da série.

2.1.4. Solução aproximada de Lévy

Um outro método para se obter a solução aproximada da Eq. (2.17) é apresentado por Levy, ao propor uma solução baseada em série trigonométrica simples. Esse método possui duas etapas, uma para a obtenção da solução homogênea $w_H(x, y)$ e outra para a obtenção da solução particular $w_P(x, y)$. A soma dessas duas soluções compõe justamente a solução geral $w(x, y)$ dada pela Eq. (2.34).

Dois condições devem ser respeitadas para a aplicação da solução de Lévy, uma delas é que pelo menos duas bordas opostas devem estar simplesmente apoiadas e a outra é que a carga externa deve possuir um perfil constante na direção paralela aos bordos simplesmente apoiados, variando apenas na direção perpendicular a esses bordos.

Considerando uma placa retangular com dois bordos simplesmente apoiados paralelos ao

eixo cartesiano y e carga externa variando apenas na direção do eixo cartesiano x , como mostra a Fig. 2.10, o método de Levy considera uma função apenas em x para satisfazer o equilíbrio de forças externas, ou seja, a solução particular será dada na forma $w_P(x)$, o que simplifica a Eq. (2.17) para:

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = \frac{p_z(x)}{D} \quad (2.38)$$

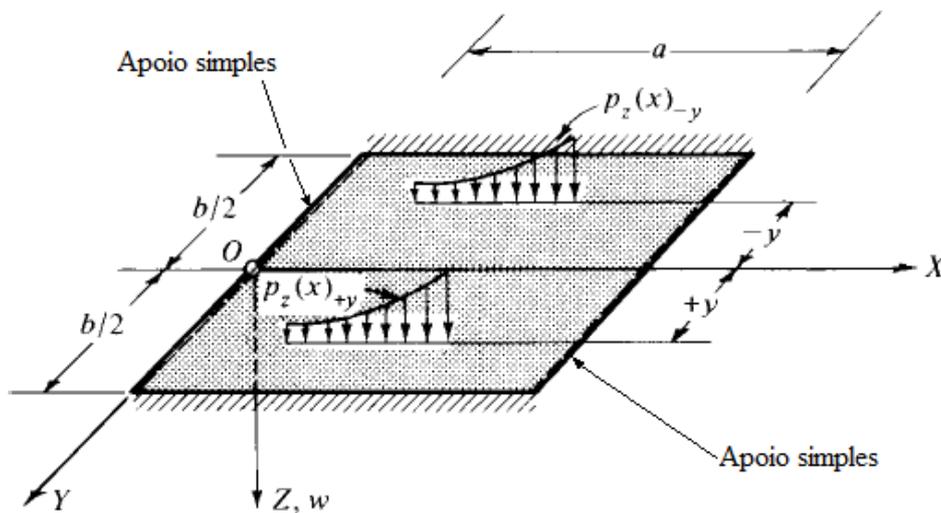


Figura 2.10 – Placa retangular simplesmente apoiada em bordos opostos

(Fonte: Adaptada de SZILARD, 2004)

A função proposta para a solução particular da Eq. (2.38) é uma série trigonométrica simples que atende às condições de contorno dos apoios, o que torna a convergência do método mais rápida segundo Szilard (2004). A função $p_z(x)$ da carga externa também é expandida em série trigonométrica simples, fornecendo as seguintes funções:

$$w_P(x) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.39)$$

$$p_z(x) = \sum_{m=1}^{\infty} P_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.40)$$

onde a é a dimensão da placa na direção x , b é a dimensão da placa na direção y , W_m são coeficientes desconhecidos e P_m são os coeficientes da expansão do termo de carga externa em série simples de Fourier.

Assim como no método de solução de Navier, ao substituir as Eqs. (2.39) e (2.40) na Eq. (2.38), são encontrados, através de uma simples equação algébrica, os coeficientes W_m que fazem a solução particular atender à condição de equilíbrio em relação às forças externas.

Para a solução homogênea $w_H(x, y)$, Lévy propõe também uma série trigonométrica simples que atende às condições de contorno de apoio na direção x . Além disso, essa série contém uma função $Y_m(y)$, em função apenas da variável y , que precisa ser encontrada de forma que essa solução homogênea $w_H(x, y)$ satisfaça a Eq. (2.17) igualada a zero.

$$w_H(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.41)$$

Devido à simetria tanto de carga como de condições de contorno em relação ao eixo x , como pode ser visto na Fig. 2.10, somente as funções pares da função $Y_m(y)$ são consideradas. Dessa forma, a solução geral proposta por Lévy assume a forma:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m \sin \frac{m\pi x}{a} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.42)$$

onde A_m e B_m são constantes que devem ser determinadas pela aplicação das condições de contorno das bordas paralelas ao eixo x , que serão iguais para $y = \pm b/2$ devido à simetria do problema.

A solução aproximada proposta por Lévy através da Eq. (2.42) é restrita a problemas em que haja simetria das condições de contorno das bordas opostas paralelas ao eixo x . No entanto, se fossem consideradas também as funções ímpares da função $Y_m(y)$, obter-se-ia uma solução geral mais abrangente, com quatro constantes a serem determinadas pelas condições de contorno da placa sem a exigência da simetria acima mencionada.

De qualquer forma, o método de Lévy é mais geral do que o método proposto por Navier. No entanto, por possuir algumas condições essenciais para ser aplicado, não resolve qualquer problema de análise de placas submetidas à carga transversal. Quanto à convergência, o método de Lévy é mais rápido quando comparado ao de Navier, sendo necessário apenas os primeiros termos da série para fornecer bons resultados, mesmo que o problema possua cargas concentradas.

Para o caso específico de placa retangular simplesmente apoiada nas quatro bordas e submetida a uma carga transversal uniformemente distribuída q , após a aplicação das condições de

contorno e obtenção da solução particular que garante o equilíbrio em relação à carga externa, a solução geral pelo método de Lévy fornece a seguinte expressão:

$$w(x, y) = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left(1 - \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m + 2}{2 \cosh \alpha_m} \cosh \frac{2\alpha_m y}{b} + \frac{\alpha_m}{2 \cosh \alpha_m} \frac{2y}{b} \sinh \frac{2\alpha_m y}{b} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.43)$$

onde q é a carga transversal uniformemente distribuída, D é a rigidez à flexão da placa, a é a dimensão da placa na direção x , b é a dimensão da placa na direção y e α_m é um coeficiente utilizado para simplificar a expressão, sendo igual a:

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a} \quad (2.44)$$

Como na maioria das aplicações de engenharia pretende-se determinar a deflexão máxima que ocorre nas estruturas, determina-se a expressão para a deflexão máxima w_{max} que ocorre no centro dessa placa ao substituir as coordenadas $x = a/2$ e $y = 0$ (ver Fig. 2.10) na Eq. (2.43):

$$w_{max} = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{(m-1)}{2}}}{m^5} \left(1 - \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m + 2}{2 \cosh \alpha_m} \right) \quad (2.45)$$

Para evitar o trabalhoso processo de encontrar a deflexão máxima através de equações que envolvem séries infinitas, como é o caso da Eq. (2.45), algumas bibliografias consagradas fornecem tabelas com coeficientes derivados do desenvolvimento dessas séries infinitas, fazendo com que o cálculo da deflexão máxima se torne rápido e prático para alguns casos específicos de carregamento e condições de contorno.

Para o exemplo de placa retangular simplesmente apoiada com carga uniformemente distribuída, a Fig. 2.11 mostra uma tabela fornecida pelo livro de Timoshenko e Krieger (1959), onde é possível obter o coeficiente α apenas com a relação entre as dimensões laterais da placa b/a . A Eq. (2.46) serve para encontrar a deflexão máxima no centro da placa através desse coeficiente α obtido na segunda coluna da tabela:

$$w_{max} = \alpha \frac{qa^4}{D} \quad (2.46)$$

É importante frisar aqui que tanto Timoshenko e Krieger (1959) como Szilard (2004)

utilizam em suas deduções a variável a como sendo a largura da placa e a variável b como sendo o comprimento da placa (diferente de como é feito ao longo de toda essa pesquisa, onde a é utilizada para o comprimento e b para a largura). Portanto, ao utilizar a Eq. (2.46), deve-se atentar para o fato de que o termo “ a^4 ” refere-se à largura da placa elevada à quarta potência e não o seu comprimento.

b/a	$w_{max} = \alpha \frac{qa^4}{D}$	b/a	$w_{max} = \alpha \frac{qa^4}{D}$	b/a	$w_{max} = \alpha \frac{qa^4}{D}$
	α		α		α
1.0	0.00406	1.5	0.00772	2.0	0.01013
1.1	0.00485	1.6	0.00830	3.0	0.01223
1.2	0.00564	1.7	0.00883	4.0	0.01282
1.3	0.00638	1.8	0.00931	5.0	0.01297
1.4	0.00705	1.9	0.00974	∞	0.01302

Figura 2.11 – Fator numérico α para placas retangulares uniformemente carregadas e simplesmente apoiadas

(Fonte: Adaptada de TIMOSHENKO e KRIEGER, 1959)

2.2. Equação diferencial governante para placas moderadamente espessas

A Teoria Clássica de Placas Finas possui certas limitações quanto à sua aplicação, já que negligencia a deformação por cisalhamento transversal da estrutura. Embora forneça resultados com boa acurácia para placas finas, nas análises de placas moderadamente espessas o uso dessa teoria clássica conduz a erros da ordem do quadrado da espessura da placa (SZILARD, 2004). Para superar essa limitação, existem métodos de análise que levam em conta essas deformações por cisalhamento negligenciadas, como as teorias propostas por Reissner e Mindlin e as teorias de cisalhamento de alta ordem.

2.2.1. Teoria de Reissner

A teoria de Reissner introduz a influência da deformação por cisalhamento transversal ao assumir uma variação linear do campo de deslocamentos através da espessura da placa. Por causa disso, à medida que a placa flexiona, as seções transversais planas, ainda que permaneçam planas, não mais permanecem perpendiculares à superfície média após a deformação como ocorria na Teoria Clássica de Placas Finas (ver Fig. 2.12). As rotações ω_x e ω_y das seções normais à superfície

média são agora calculadas levando em conta o efeito de distorção causado pela deformação por cisalhamento (SZILARD, 2004):

$$\omega_x = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{6}{5Gt}q_x \quad (2.47)$$

$$\omega_y = -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{6}{5Gt}q_y \quad (2.48)$$

onde G é o módulo de cisalhamento transversal.

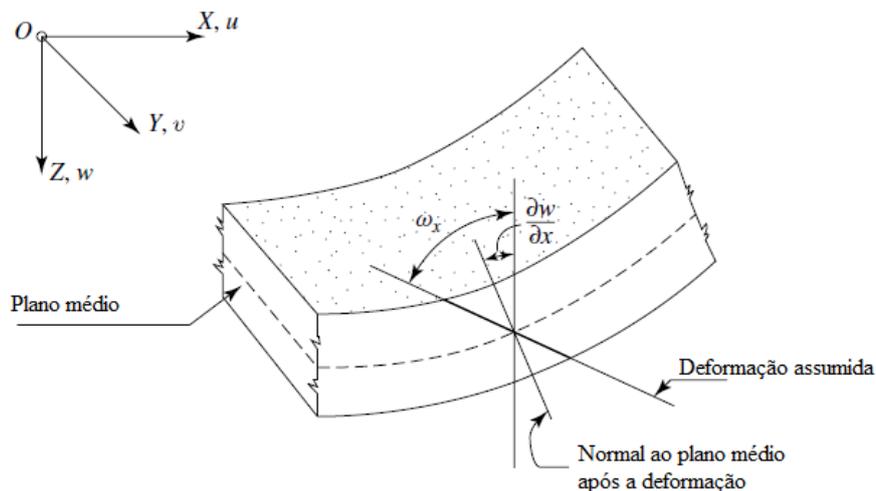


Figura 2.12 – Seção transversal assumida pelas teorias de Reissner e Mindlin

(Fonte: Adaptada de SZILARD, 2004)

A formulação de Reissner é obtida pela aplicação do teorema de Castigliano do mínimo trabalho usando tensões como variáveis. Esta teoria baseada em tensões fornece três equações diferenciais simultâneas:

$$D\nabla^2\nabla^2w = p_z - \frac{t^2}{10} \frac{2-\nu}{1-\nu} \nabla^2 p_z \quad (2.49)$$

$$q_x = -D \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial x} + \frac{t^2}{10} \nabla^2 q_x - \frac{t^2}{10} \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial p_z}{\partial x} \quad (2.50)$$

$$q_y = -D \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial y} + \frac{t^2}{10} \nabla^2 q_y - \frac{t^2}{10} \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial p_z}{\partial y} \quad (2.51)$$

As três equações diferenciais governantes Eqs. (2.49) a (2.51) representam um problema de integração de sexta ordem, portanto, três condições de contorno independentes devem ser mutuamente satisfeitas nas bordas da placa. No caso da Teoria Clássica de Placas Finas, duas condições de contorno apenas são necessárias em cada borda, isso por causa da transformação dos momentos torcionais m_{xy} e m_{yx} em conjugados equivalentes, que dá origem às chamadas forças de cisalhamento suplementares de Kirchhoff e reduz o problema de placas finas à quarta ordem apenas.

2.2.2. Teoria de Mindlin

Já a teoria de Mindlin, segundo Szilard (2004), é baseada em deslocamentos como variáveis. É conhecida também como teoria da deformação de primeira ordem e resolve o problema de placas moderadamente espessas utilizando os seguintes pressupostos cinemáticos para os deslocamentos no plano:

$$u = z\psi_x(x, y) \quad (2.52)$$

$$v = z\psi_y(x, y) \quad (2.53)$$

onde $\psi_x(x, y)$ e $\psi_y(x, y)$ representam as rotações do plano médio.

A suposição transversal da teoria de Mindlin é idêntica à suposição de Reissner, mostrada na Fig. 2.12. As Eqs. (2.52) e (2.53) produzem valores constantes para as deformações de cisalhamento transversais e para as correspondentes distribuições de tensões. Uma vez que a distribuição real da tensão em placas moderadamente espessas é parabólica, essa suposição é incorreta e não consegue

satisfazer a condição de tensão nula nas superfícies superior e inferior da placa. Por causa disso, é necessária a utilização de um fator de correção de cisalhamento denotado por k^2 .

Aplicando o teorema da mínima energia potencial, Mindlin obteve as seguintes equações diferenciais de equilíbrio:

$$k^2 Gt(\nabla^2 w + \phi) + p_z(x, y) = 0 \quad (2.54)$$

$$\frac{D}{2} \left[(1 - \nu) \nabla^2 \psi_x + (1 + \nu) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] - k^2 Gt \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.55)$$

$$\frac{D}{2} \left[(1 - \nu) \nabla^2 \psi_y + (1 + \nu) \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] - k^2 Gt \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.56)$$

onde k^2 é o fator de correção de cisalhamento e ϕ é dado por:

$$\phi = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \quad (2.57)$$

2.2.3. Teorias de cisalhamento de alta ordem

Enquanto as teorias de Reissner e Mindlin, ditas de primeira ordem, assumem que os deslocamentos causados pela deformação por cisalhamento dentro do plano variam linearmente, as teorias de alta ordem se diferem por utilizar aproximações cinemáticas mais próximas da realidade, através da introdução de variações cúbicas ou de ordem superior para esses componentes de deslocamento (SZILARD, 2004). Dessa forma, o perfil de deslocamentos não-linear se assemelha à Fig. 2.13.

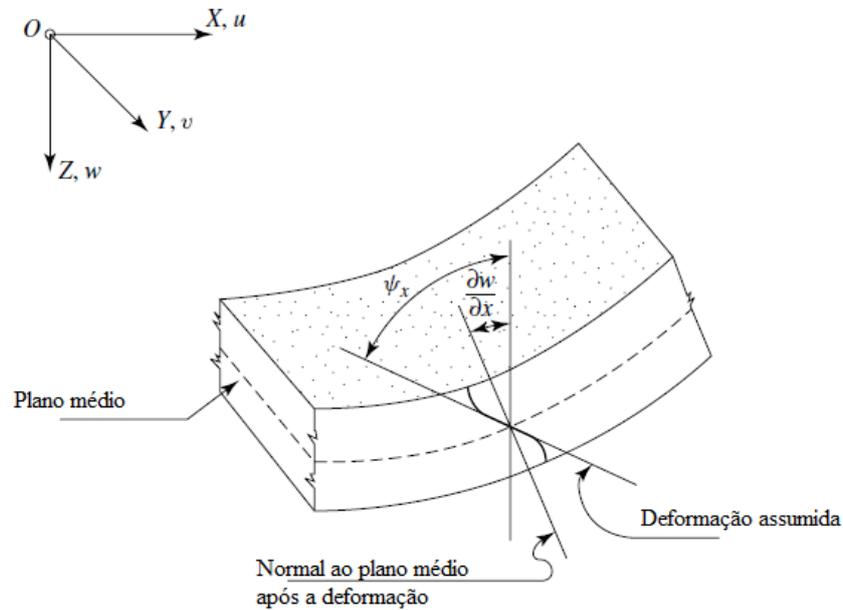


Figura 2.13 – Seção transversal assumida pelas teorias de cisalhamento de alta ordem

(Fonte: Adaptada de SZILARD, 2004)

2.3. Equação diferencial governante para placas espessas

Conforme afirma Szilard (2004), quando uma placa possui espessura significativa em comparação com a sua menor dimensão lateral, as equações governantes da elasticidade tridimensional devem ser aplicadas para determinar o estado tridimensional de tensões real da estrutura.

Para descrever o estado tridimensional de tensões em um sistema de coordenadas cartesiano retangular é utilizado um elemento infinitesimal 3D em forma de paralelepípedo (dx, dy, dz), como mostrado na Fig. 2.14. Diferentemente da Teoria Clássica de Placas Finas, agora considera-se as componentes cartesianas de tensão normal e cisalhamento em todas as faces do elemento, sendo os incrementos de tensão obtidos pelos dois primeiros termos de uma série de Taylor truncada na primeira ordem (SZILARD, 2004).

O estado tridimensional de tensão em qualquer ponto de um corpo elástico é definido por nove componentes de tensão, as quais podem ser representadas por um único tensor. Nesse caso o tensor é uma matriz de tensões simétrica em relação à diagonal principal, conforme a Eq. (2.58), por causa da lei de reciprocidade das tensões de cisalhamento (SZILARD, 2004).

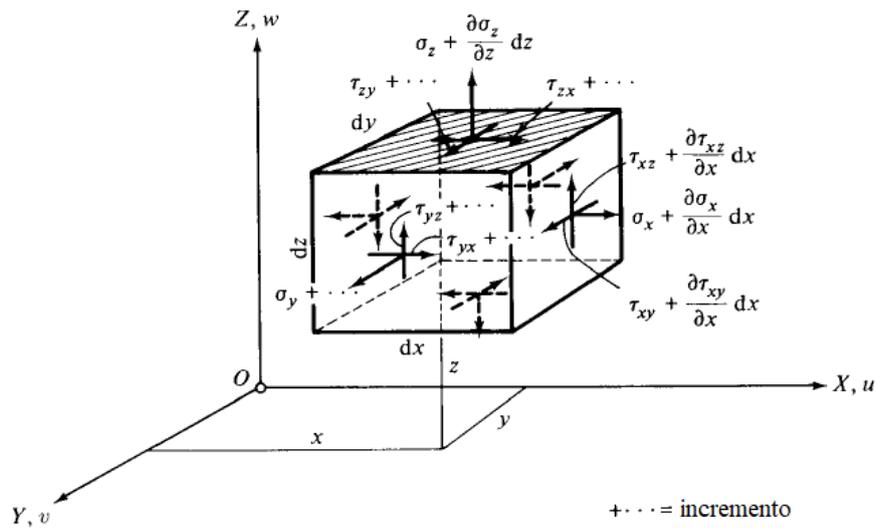


Figura 2.14 – Elemento infinitesimal tridimensional de placa espessa
(Fonte: Adaptada de SZILARD, 2004)

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Em geral, Szilard (2004) afirma que a solução de um problema de elasticidade tridimensional consiste em encontrar as tensões em um corpo elástico submetido a forças superficiais p_x , p_y , p_z e forças de corpo X , Y e Z , sendo que em alguns casos as forças de corpo são incorporadas às forças superficiais para simplificar a formulação matemática. Em se tratando de problemas com pequenos deslocamentos, são obtidas 15 equações lineares de campo para 15 incógnitas, são elas:

1. Três equações de equilíbrio;
2. Seis relações cinemáticas deformação-deslocamento;
3. Seis equações de tensão-deformação.

Além dessas equações de campo, um conjunto de condições de contorno deve também ser respeitado para se obter uma única solução para os problemas de elasticidade tridimensional. Os três tipos de condições de contorno para placas espessas são:

- (a) Estáticas: quando as forças de superfície (p_x, p_y, p_z) são prescritas.
- (b) Cinemáticas: quando os deslocamentos (u, v, w) são prescritos.
- (c) Mistas: são prescritas algumas forças de contorno e alguns deslocamentos.

2.4. Placas com enrijecedores

As estruturas de placas enrijecidas são muito comuns na engenharia atual, principalmente na estrutura de navios, pois apresentam maior relação entre rigidez estrutural e peso. Essas placas podem ser formadas de diferentes maneiras, uma delas é através da soldagem de perfis dispostos longitudinal e/ou transversalmente, o que confere ao conjunto uma melhor capacidade para resistir às combinações de momento de flexão, torção, entre outros carregamentos. Salomon (2000) divide as diferentes abordagens para a análise de placas enrijecidas em três grandes categorias: modelo de grelhas, placa ortotrópica e sistemas placa-vigas.

De acordo com Salomon (2000), a idealização de uma placa enrijecida como uma grelha requer que a placa possua uma largura efetiva variando em torno de 50% a 80% do espaçamento entre os reforços. A largura efetiva é porção da placa que é utilizada, juntamente com a seção transversal do enrijecedor, para o cálculo dos momentos de inércia e rigidezes à flexão e à torção nas direções longitudinal e transversal da placa, conforme pode ser visto na Fig. 2.15. Este método de análise fornece deflexões com erros normalmente de até 5% e ocasionalmente de até 10%, enquanto as tensões diferem geralmente entre 10% a 20% dos valores experimentais.

Já o modelo de placa ortotrópica tem como ideia básica converter uma placa enrijecida em uma placa ortotrópica equivalente de espessura única, sem a presença de enrijecedores. Na prática, uma placa é dita ortotrópica quando as suas propriedades estruturais diferem em duas direções ortogonais. Essa anisotropia estrutural pode ser introduzida por nervuras, ondulações, vigas enrijecedoras ou, em alguns outros casos, o próprio material estrutural é intrinsecamente ortotrópico.

De maneira similar à teoria de placas finas de Kirchhoff, mas agora assumindo quatro constantes elásticas (E_x, E_y, ν_x, ν_y) para a descrição das relações tensão-deformação nas duas direções principais (eixos de coordenadas x e y), a equação governante para o problema de placas ortotrópicas é dada por:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2B \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p_z(x, y) \quad (2.59)$$

onde D_x e D_y são as rigidezes à flexão em x e y e B é a rigidez torcional efetiva da placa ortotrópica.

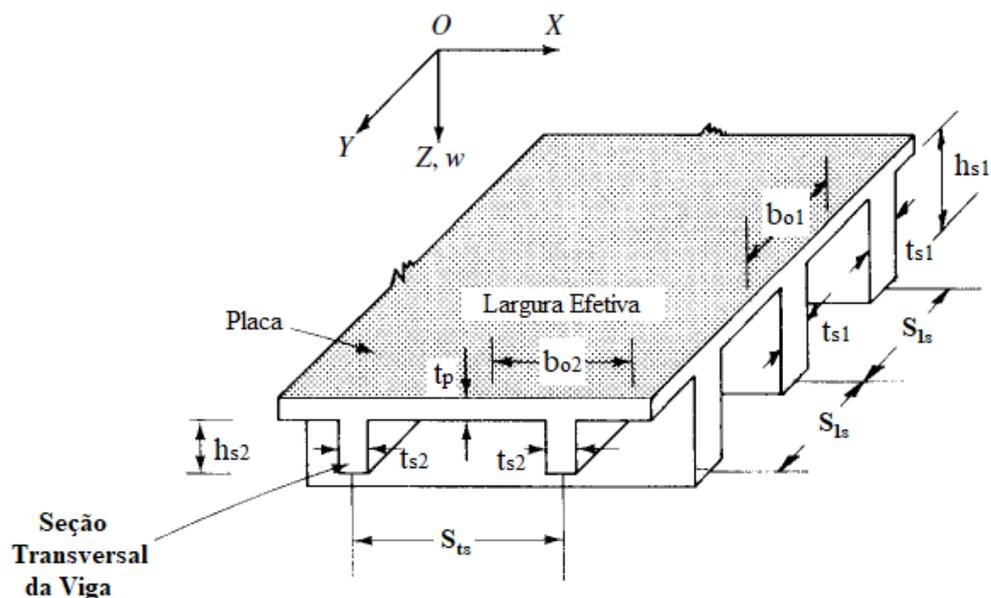


Figura 2.15 – Placa enrijecida por vigas ortogonais

(Fonte: Adaptada de SZILARD, 2004)

Para aplicação do modelo de placas ortotrópicas na análise de placas enrijecidas, é necessário definir expressões para determinar as propriedades seccionais de rigidez à flexão e à torção nas direções principais em que ocorre a ortotropia. Por se tratar de uma tarefa complicada, se possível, testes diretos para determinação dessas propriedades devem ser realizados. No entanto, com base em certas considerações analíticas, algumas aproximações razoáveis para o cálculo dessas rigidezes podem ser aplicadas, como as mostradas em Szilard (2004) e Timoshenko e Krieger (1959) para placas reforçadas por perfis ortogonais retangulares ou vigas I, placas corrugadas e lajes de concreto reforçadas.

Segundo Szilard (2004), embora o real comportamento estrutural de placas reforçadas com enrijecedores não possa ser completamente substituído pelo de placas ortotrópicas, dados experimentais indicam boa concordância de resultados ao aplicar tal idealização em casos onde os reforços são relativamente pequenos, estão próximos e uniformemente espaçados.

Por fim, as análises que tratam placas enrijecidas como um sistema composto por placa e vigas de reforço refletem o comportamento verdadeiro ou mais próximo da realidade do problema físico. Nesse tipo de abordagem são impostas condições de compatibilidade na região de ligação entre placa e viga de reforço, conforme a Fig. 2.16 adaptada do trabalho de Sapountzakis e Katsikadelis (2000).

Devido às dificuldades em resolver esses tipos de problemas de forma analítica, essa metodologia só foi impulsionada com o advento dos computadores digitais, que possibilitaram a solução desses modelos através de métodos numéricos. Entre os métodos numéricos mais utilizados na aplicação dessa metodologia, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é o mais poderoso e eficaz para obtenção das soluções numéricas com boa acurácia. Atualmente, o esforço de pesquisa é no sentido de tentar conseguir modelos de elementos finitos precisos e eficientes para placas reforçadas com perfis enrijecedores (SALOMON, 2000).

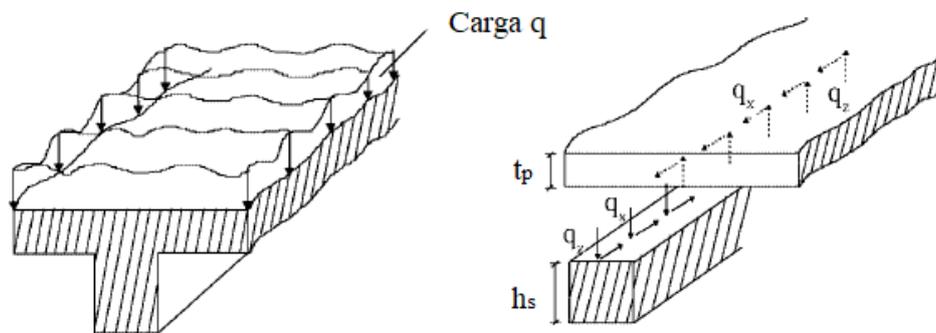


Figura 2.16 – Modelo de placa enrijecida através do sistema placa – viga de reforço
(Fonte: Adaptada de SAPOUNTZAKIS E KATSIKADELIS, 2000)

3. MODELAGEM COMPUTACIONAL

A Computação Científica e disciplinas correlatas foram potencializadas pela notável evolução dos equipamentos, da ciência da computação e das tecnologias de informação e comunicação, com o crescimento exponencial da capacidade de processamento e da velocidade das redes de transmissão de dados. Essa evolução da computação aliada à conectividade teve forte impacto não apenas no suporte à pesquisa científica, mas influenciou sobremaneira a própria forma de se fazer ciência. A Computação Científica, portanto, evoluiu do status de apenas contribuinte na criação de conhecimento para o status de componente essencial nos processos de inovação científica e tecnológica e de ganho de competitividade das economias. A modelagem computacional e a simulação numérica atualmente são peças estratégicas para a criação de novos conhecimentos e para o desenvolvimento de produtos e serviços inovadores (PDU-LNCC, 2016).

Neste contexto, a Computação Científica é o ramo do conhecimento que tem por objetivo criar modelos e métodos matemáticos e computacionais para compreender, analisar e resolver problemas científicos e tecnológicos interdisciplinares. Busca avançar no desenvolvimento de modelos, métodos, algoritmos e técnicas para simular condições, testar hipóteses, controlar e prever a evolução de processos e fenômenos. É uma alternativa cada vez mais utilizada para técnicas e observações da ciência experimental, principalmente nos casos em que as medições são impraticáveis, de alto risco ou muito custosas. Encontra aplicações em inúmeras áreas científicas e tecnológicas, sendo utilizada na indústria, comércio e serviços, entre outras áreas de interesse da sociedade (PDU-LNCC, 2016).

Modelos matemáticos, estabelecidos a partir de idealizações de modelos físicos, recaem em sistemas de equações diferenciais parciais ou ordinárias de elevado número de incógnitas, demandando forte esforço matemático na sua solução. A aproximação da solução dessas equações por procedimentos numéricos torna-se necessária à medida em que as ciências ambientais, engenharias, tecnológicas, biológicas e da saúde avançam no sentido da satisfação das necessidades humanas, tornando os problemas ainda mais complexos e desafiadores (PDU- LNCC, 2016).

A modelagem computacional destina-se à solução desses problemas complexos, que são regidos por equações diferenciais ordinárias e parciais e constituem problemas de valores iniciais ou de contorno. Os métodos de elementos finitos, diferenças finitas e volumes finitos são métodos numéricos adaptados à implementação computacional e são os mais comuns na resolução de modelos matemáticos baseados em equações diferenciais. Esses métodos são atrativos do ponto de vista do custo computacional por induzirem a transformação das equações diferenciais em sistemas

lineares, por suas qualidades de aproximação e pela flexibilidade em representar geometrias complexas (CANATO, 2007).

De modo geral, o uso da simulação é recomendado principalmente em casos de problemas muito complexos para tratamento analítico e quando a solução é muito cara ou mesmo impossível através de experimentos. O uso da simulação, principalmente quando se observam características estocásticas (aleatórias), possibilita a representação do comportamento dos sistemas com maior fidelidade e realismo (TANEMBAUM, 2001).

São fatores que tornam desejável e atrativo o uso de técnicas de simulação aliadas aos benefícios computacionais:

- Tempo: em computador é possível realizar análises que, se executados sobre o sistema real, poderiam consumir anos.

- Custo: embora a simulação em computador exija recursos humanos e alguns equipamentos, geralmente o custo se mantém muito abaixo se comparado à execução de experimentos sobre o sistema real.

- Impossibilidade de experimentação direta: há situações em que experimentações diretas no sistema real não podem ser realizadas por questões de segurança, de tempo, de acesso, ou ainda de inexistência (sistema em construção).

- Visualização: os computadores oferecem recursos que facilitam a visualização dos resultados de uma simulação (gráficos, tabelas, entre outros), bem como do estado do sistema durante o exercício de um modelo.

- Repetição: depois de construído, um modelo de representação pode ser executado várias vezes a um custo muito baixo.

- Interferência: um modelo é extremamente mais flexível para a realização de mudanças se comparado a um sistema real.

Modelos de simulação podem ser considerados como uma descrição do sistema real. O exercício de modelos de simulação em computador tem potencial para fornecer resultados precisos que, quando analisados estatisticamente, produzem informações que auxiliam na tomada de decisões sobre os problemas. Entretanto, este é um processo que por definição é uma aproximação da realidade que se deseja modelar, sendo baseado em hipóteses, suposições, simplificações e, por isso, é acompanhado de parcelas de erros que devem ser cuidadosamente analisadas e consideradas para as tomadas de decisões finais (TANEMBAUM, 2001).

O estudo de estruturas, analisando principalmente tensões e deformações mecânicas através de simulações computacionais, é conhecido como Mecânica dos Sólidos Computacional. Os softwares comerciais para a Mecânica de Sólidos Computacional, atualmente, apresentam sofisticadas interfaces aos usuários, facilitando a definição e a solução do problema e a análise dos resultados.

É comum, no contexto da engenharia estrutural, surgirem problemas em que a análise de uma estrutura possui condições de carregamento, condições de contorno e geometria complexas, tornando praticamente impossível a determinação de soluções analíticas. A aplicabilidade do processo de modelagem computacional e simulação numérica, além de possibilitar a solução aproximada com elevado nível de acurácia, permite também testar diferentes alternativas geométricas na busca pela otimização das estruturas (SZILARD, 2004).

Atualmente, existe uma gama de programas computacionais baseados em algoritmos específicos para a análise de estruturas através de métodos numéricos. Isso implica na possibilidade de implementação de um procedimento de simulação numérica completo que vai desde a construção da geometria do modelo, discretização em malhas, aplicação das condições de carregamento e vinculação e solução numérica pela resolução de sistemas de equações algébricas na etapa de processamento.

No presente trabalho, foi empregado o Método dos Elementos Finitos (MEF) para a análise estrutural de deflexão de placas com enrijecedores submetidas à carga transversal uniformemente distribuída. Para a realização das simulações numéricas, foi utilizado o software *ANSYS® Mechanical APDL*.

3.1. Método dos Elementos Finitos (MEF)

Na década de 1940, Courant (1943) apresentou uma solução polinomial por partes dos problemas de torção de Saint Venant aplicando um teorema de energia em combinação com elementos triangulares. Ele assumiu uma distribuição linear das funções de deformação entre esses elementos, através de uma abordagem que pode ser vista como uma extensão do método Rayleigh-Ritz. Consequentemente, é atribuída ao matemático Courant o pioneirismo no estabelecimento da base matemática do Método dos Elementos Finitos.

No entanto, este importante trabalho de Courant foi pouco reconhecido na época, já que era impraticável devido à falta de computadores digitais necessários para a solução do grande número de equações algébricas simultâneas resultantes. Portanto, o MEF só ganhou força com o desenvolvimento das tecnologias computacionais a partir da década de 1950.

Turner et al. (1956) introduziram pela primeira vez o método dos elementos finitos para a análise de tensões das estruturas de aeronaves, tornando essa ferramenta numérica a mais importante para engenheiros e cientistas que desejavam resolver problemas altamente complexos de meios contínuos elásticos e não elásticos de forma econômica. Esse trabalho é considerado o marco inicial da aplicação do método dos elementos finitos na solução de problemas de engenharia.

Em 1967, Zienkiewicz e Cheung publicaram o primeiro livro sobre o MEF. Desde então, o método tornou-se firmemente estabelecido como uma ferramenta praticamente indispensável para engenheiros e cientistas. Além de suas aplicações estruturais-mecânicas originais, o MEF é usado atualmente para solucionar problemas tão diversos quanto a condução de calor no estado estacionário e a dinâmica de fluidos, para citar alguns.

O método dos elementos finitos é definido por Burnett (1987) como uma técnica matemática assistida por computador para a obtenção de soluções numéricas aproximadas de equações abstratas de cálculo que predizem a resposta de sistemas físicos submetidos a influências externas. O funcionamento do método é descrito em etapas que vão desde a divisão do domínio do problema em regiões menores (subdomínios) chamadas de elementos finitos, passando pela transformação das equações governantes (diferenciais ou na forma variacional) em equações algébricas em cada elemento, até chegar ao cálculo numérico das equações elementares através da solução de um sistema de equações derivado da conexão entre elementos, obtendo assim a solução para todo o domínio do problema.

Segundo Szilard (2004), o MEF considera o contínuo como uma montagem de partículas de tamanho finito conectados por nós que atuam como um mecanismo vinculativo para manter o sistema discretizado em conjunto, conforme pode ser visto na Fig. 3.1.

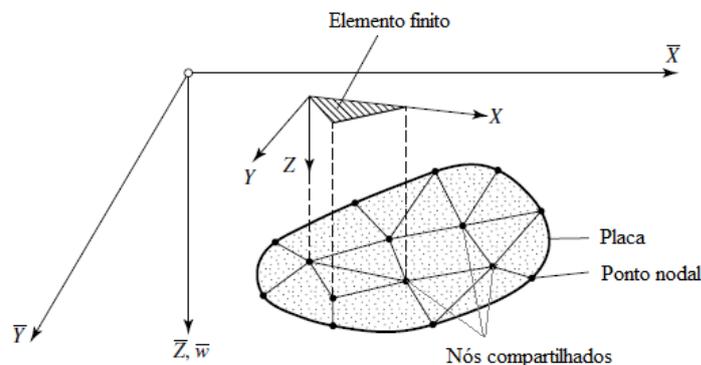


Figura 3.1 – Divisão do domínio em subdomínios (elementos finitos)

(Fonte: Adaptada de SZILARD, 2004)

Na aplicação do MEF para a análise de problemas da Mecânica dos Sólidos Computacional, as seguintes etapas são rotineiramente aplicadas:

- 1) discretização do domínio em um número finito de subdomínios, ou elementos finitos,
- 2) determinação de funções interpoladoras adequadas,
- 3) formulação do elemento,
- 4) imposição do carregamento externo e das condições de contorno,
- 5) montagem do sistema discreto através da conectividade dos nós,
- 6) solução do sistema de equações resultantes e
- 7) cálculos das tensões resultantes.

Dependendo da geometria e das características físicas do problema, o domínio de interesse pode ser discretizado em elementos de linha, área ou volume. Os elementos frequentemente aplicados no MEF são mostrados na Fig. 3.2. Cada elemento é identificado por um número específico e é definido por uma sequência de nós, sendo alguns nós compartilhados entre elementos para garantir a conectividade do modelo computacional.

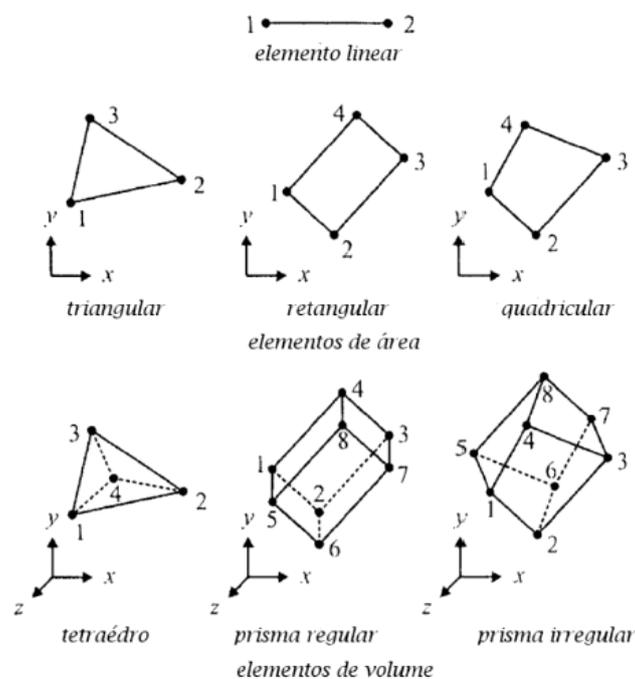


Figura 3.2 – Geometrias de elementos do MEF
(Fonte: MADENCI e GUVEN, 2006)

À medida que o tamanho do elemento finito se aproxima de um elemento infinitesimal, os resultados gerados pelo método dos elementos finitos se comparam favoravelmente com os obtidos a partir de uma análise matemática rigorosa. A partir do momento em que o elemento apresenta um tamanho relativamente maior quando comparado ao elemento diferencial, a malha de elementos já não produz resultados tão próximos da solução exata do problema, mesmo assim deve representar uma razoável aproximação. Portanto, erros de aproximação são inerentes aos métodos numéricos e, segundo Teixeira et al. (2009), recebem grandes parcelas referentes a equívocos durante à discretização do domínio computacional (refino de malha adotado).

A teoria básica envolvendo o MEF é bastante difundida, podendo ser encontrada facilmente em referências conceituadas como Zienkiewicz (1971), Gallagher (1975), Burnett (1987), Zienkiewicz e Taylor (1989), Kleiber e Hien (1992), Bathe (1996) e Przemieniecki (2009).

Mais recentemente, houve um enorme avanço no sentido de simplificar a análise computacional por elementos finitos, através da possibilidade de geração automática de malhas e da adaptação automática das malhas (refinamento de malha) para a redução de erros em regiões críticas. Desta maneira, a ferramenta de elementos finitos está cada vez mais próxima da engenharia comum e prática. Além disso, a integração das análises por elementos finitos com programas de CAD está transformando o método em uma ferramenta de análise que possibilita aos usuários a sua utilização eficaz sem que possuam o entendimento completo da metodologia numérica que está por trás da resolução dos problemas.

3.2. Análise estrutural com o software *ANSYS*[®]

A análise estrutural é uma das aplicações mais comuns do Método dos Elementos Finitos. Dentro desse contexto, vários programas computacionais foram criados com a proposta de utilizar essa metodologia numérica para solucionar uma ampla gama de problemas de engenharia estrutural. Em virtude da constante melhora no desempenho dos computadores, esses softwares são frequentemente atualizados para alcançar melhorias nos seus resultados, atender novas demandas e fornecer novos recursos aos usuários.

Nas análises realizadas nesta dissertação, será utilizado o software *ANSYS*[®] *Mechanical APDL*, que é desenvolvido por *ANSYS*[®] *Inc.*, uma companhia especializada em programas de simulação numérica para engenharia. As análises estruturais disponíveis neste programa incluem análise estática (linear e não-linear), modal, espectral, dinâmica e de flambagem. Em todas essas análises, as variáveis primárias calculadas são os deslocamentos nodais, enquanto que as demais grandezas como deformações, tensões e forças de reação são derivadas desses valores de

deslocamentos previamente calculados para todo o domínio computacional (ANSYS, 2009).

3.2.1. Análise estrutural estática linear elástica

Entre as análises estruturais disponíveis no *ANSYS*[®], a análise estática é aquela que despreza os efeitos dinâmicos e, no caso específico da análise linear elástica, também não leva em conta as não-linearidades como plasticidade, grandes deformações, grandes deslocamentos, superfícies de contato, fluência mecânica, entre outras. A análise estática de estruturas tem por objetivo principal quantificar a magnitude dos esforços internos e dos deslocamentos que se manifestam em qualquer sistema estrutural quando o mesmo é submetido a um carregamento arbitrário estático, desprezando-se o efeito das forças de amortecimento e das forças de inércia (MARINHO, 2002).

Considerando um corpo sujeito a um conjunto de forças que lhe provocam uma deformação, com base no seu estado de equilíbrio estático a sua configuração é modificada por um conjunto de deslocamentos muito pequenos (deslocamentos virtuais) e compatíveis com as condições fronteira. O princípio dos trabalhos virtuais ou princípio dos deslocamentos virtuais estabelece que o trabalho realizado pelas tensões internas na deformação virtual do corpo é igual ao trabalho realizado pelas forças exteriores nos deslocamentos virtuais dos seus pontos de aplicação (AZEVEDO, 2003).

O *ANSYS*[®] utiliza o princípio dos trabalhos virtuais para a montagem do sistema de equações algébricas a ser empregado no MEF. Portanto, a Eq. (3.1) mostra que o trabalho virtual total interno é igual ao trabalho virtual externo exercido por forças atuando em um corpo sólido. O prefixo δ indica que os deslocamentos ou deformações são virtuais:

$$\delta U = \delta W \quad (3.1)$$

$$\delta U = \int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (3.2)$$

$$\delta W = \int_V \{\delta u\}^T \{b\} dV + \int_V \{u\}^T [m] \{\ddot{u}\} dV \quad (3.3)$$

onde δU representa o trabalho virtual interno (energia de deformação), $\{\delta \varepsilon\}^T$ é o vetor transposto de deformações virtuais da estrutura, $\{\sigma\}$ é o vetor das tensões que surgem na estrutura, V é o volume do corpo sólido, δW representa o trabalho virtual externo, $\{\delta u\}^T$ é o vetor transposto de deslocamentos virtuais da estrutura, $\{b\}$ é o vetor de força por unidade de volume, $\{u\}^T$ é o vetor

transposto de deslocamentos da estrutura e $\{m\ddot{u}\}$ é o vetor de força de inércia, no qual $[m]$ é a matriz de densidade de massa e $\{\ddot{u}\}$ é o vetor de acelerações.

A análise estática da estrutura de um corpo sólido subdividido em regiões, como mostra a Fig. 3.3, pode ser feita considerando um elemento “e” de volume V_e e desprezando o efeito inercial de acelerações ($\ddot{u} = 0$). Dessa forma, a combinação das Eqs. (3.1) a (3.3) resulta para o elemento “e” em:

$$\int_V \{\delta \varepsilon_e\}^T \{\sigma_e\} dV = \int_V \{\delta u_e\}^T \{b\} dV \quad (3.4)$$

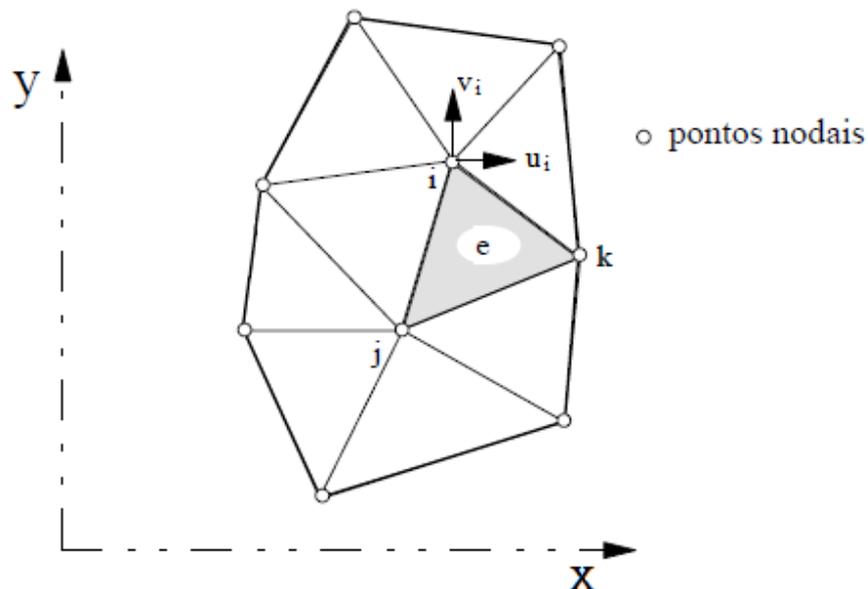


Figura 3.3 – Corpo sólido dividido em subdomínios

(Fonte: Adaptada de MARINHO, 2002)

Através da utilização das funções de interpolação de deslocamentos nodais e das relações de deformação-deslocamento e tensão-deformação, tem-se as seguintes equações:

$$\{u_e\} = [N_e]\{u\} \quad (3.5)$$

$$\{\delta u_e\} = [N_e]\{\delta u\} \quad \rightarrow \quad \{\delta u_e\}^T = \{\delta u\}^T [N_e]^T \quad (3.6)$$

$$\{\varepsilon_e\} = [B_e]\{u\} \quad (3.7)$$

$$\{\delta\varepsilon_e\} = [B_e]\{\delta u\} \quad \rightarrow \quad \{\delta\varepsilon_e\}^T = \{\delta u\}^T [B_e]^T \quad (3.8)$$

$$\{\sigma_e\} = [D_e]\{\varepsilon_e\} = [D_e][B_e]\{u\} \quad (3.9)$$

onde $\{u_e\}$ é o vetor do campo (ou função) de deslocamentos do elemento, $[N_e]$ é a matriz de funções de interpolação de deslocamentos nodais do elemento, $\{u\}$ é o vetor de deslocamentos nodais do elemento, $\{\delta u_e\}$ é o vetor do campo de deslocamentos virtuais do elemento, $\{\delta u\}$ é o vetor de deslocamentos virtuais nodais do elemento, $\{\varepsilon_e\}$ é o vetor do campo de deformações do elemento, $[B_e]$ é a matriz de compatibilidade cinemática ou matriz deformação-deslocamento do elemento, $\{\delta\varepsilon_e\}$ é o vetor do campo de deformações virtuais do elemento, $\{\sigma_e\}$ é o vetor do campo de tensões do elemento e $[D_e]$ é a matriz elástica do material correspondente ao elemento.

Substituindo as Eqs. (3.5) a (3.9) na Eq. (3.4), obtém-se as seguintes equações:

$$[K_e]\{u\} = \{F_e\} \quad (3.10)$$

$$[K_e] = \int_V [B_e]^T [D_e] [B_e] dV \quad (3.11)$$

$$\{F_e\} = \int_V [N_e]^T \{b\} dV \quad (3.12)$$

onde $\{u\}$ é o vetor de deslocamentos nodais do elemento, $[K_e]$ é a matriz de rigidez do elemento e $\{F_e\}$ é o vetor de forças externas sobre os nós do elemento.

Fazendo o somatório das equações algébricas elementares e realizando a adequada conectividade, através dos nós compartilhados, entre todos os elementos que compõem uma estrutura, é realizada a montagem de um sistema de equações algébricas único, capaz de representar a solução geral para toda o domínio do problema:

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad (3.13)$$

onde $\{u\}$ é o vetor dos deslocamentos nodais de toda a estrutura, $[K]$ é a matriz de rigidez global da estrutura e $\{F\}$ é o vetor de forças externas sobre a estrutura (as quais são distribuídas sobre os nós da malha).

3.2.2. Elementos estruturais *SHELL93* e *SOLID95*

No software *ANSYS*[®], há a disponibilidade de elementos do tipo barra, do tipo cascas (bidimensionais) e elementos sólidos (tridimensionais). Nessa pesquisa, a modelagem das placas enrijecidas foi realizada com os elementos do tipo *SHELL93* e *SOLID95*, pelas suas características expostas na sequência.

O elemento *SHELL93* é adequado para modelar problemas de cascas envolvendo estruturas planas ou curvas de pequena espessura. Esse elemento possui 6 graus de liberdade em cada um dos seus 8 nós: translação nas direções nodais x , y , e z e rotação em torno dos eixos nodais x , y , e z . As funções de interpolação utilizadas na sua formulação matemática são do tipo quadrática. Dentre as suas capacidades de análise estão a plasticidade, grandes deslocamentos e grandes deformações. Dentre as considerações estruturais importantes destaca-se que a tensão na direção normal ao plano do elemento varia linearmente ao longo da espessura e a tensão de cisalhamento transversal é assumida como constante ao longo da espessura. Além disso, esse elemento possui uma versão simplificada para geração de malhas com formato triangular como mostrado na Fig. 3.3a (ANSYS, 2009).

Já o *SOLID95* é um elemento de alta ordem que pode tolerar formas irregulares sem perda significativa na sua acurácia. Também é adequado para modelar geometrias curvas e, como mostrado na Fig. 3.3b, possui as variações geométricas tetraédrica, piramidal e prismática. Esse elemento é definido por 20 nós com 3 graus de liberdade cada: translações nas direções nodais x , y e z , sendo capaz de analisar plasticidade, fluência, grandes deslocamentos e grandes deformações (ANSYS, 2009).

Na versão triangular o elemento *SHELL93* passa a ter 6 nós, enquanto que o elemento *SOLID95* na sua versão tetraédrica passa a ter 10 nós. Como a quantidade de nós tem influência direta nas funções de interpolação de deslocamentos nodais dos elementos, espera-se que essas duas versões opcionais forneçam resultados diferentes dos gerados pelas versões originais.

Adicionalmente, pode-se afirmar que a modelagem com o elemento *SOLID95* é mais

completa e fornece resultados mais acurados em relação ao elemento *SHELL93*. Isso ocorre por que o elemento sólido considera todas as componentes do estado tridimensional de tensões e deformações de um corpo sólido, enquanto que o elemento bidimensional possui algumas simplificações inerentes ao estado plano de tensões e deformações.

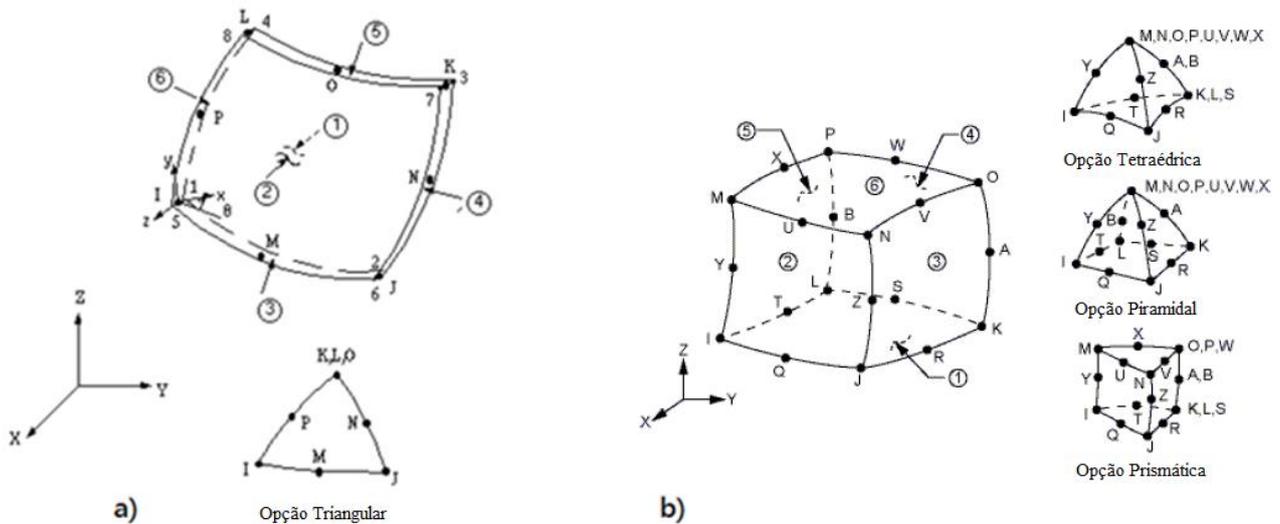


Figura 3.4 – a) Elemento tipo *SHELL93* e b) Elemento tipo *SOLID95*

(Fonte: Adaptada de ANSYS, 2009).

3.3. Verificação do modelo numérico-computacional

Testes de validação e verificação são inevitáveis em qualquer processo de modelagem computacional, pois esses procedimentos ajudam os analistas a adquirir confiança na utilização dos modelos desenvolvidos. Os resultados obtidos através de um modelo computacional só terão forte relação com sistema real se este modelo for uma boa representação desse sistema.

De acordo com Da Silva (2006), entende-se por verificação de um modelo computacional um conjunto de ações cuja meta é certificar se o modelo conceitual foi transcrito de forma adequada quando do uso da linguagem de simulação ou de programação. Quanto ao procedimento de validação, este objetiva certificar se a transformação entrada-saída (*input-output*) realizada pelo modelo tem exatidão satisfatória para representar a mesma ocorrência procedida no sistema real (ou seja, é necessária a comparação com resultados provenientes de experimentação prática do sistema).

Para o desenvolvimento dessa pesquisa, foi realizado o procedimento de verificação da capacidade dos modelos computacionais desenvolvidos no software *ANSYS*[®] em determinar as deflexões no centro de placas enrijecidas submetidas à carga transversal uniformemente distribuída.

Tal verificação se deu pela comparação de resultados obtidos pelos modelos desenvolvidos nesse trabalho com resultados provenientes de pesquisas já publicadas ou soluções analíticas quando possíveis.

Diferentes casos de placas com e sem enrijecedores foram analisados: placa quadrada e retangular sem enrijecedor, placa quadrada com um enrijecedor central, placa retangular com dois enrijecedores ortogonais e, por fim, um caso específico de placa retangular com um enrijecedor central longitudinal, a qual foi analisada para diferentes alturas desse único enrijecedor. Os modelos computacionais construídos utilizaram elementos finitos bidimensionais (*SHELL93*) e tridimensionais (*SOLID95*).

Conforme estudo realizado por Lima (2016), a modelagem de placas enrijecidas através do elemento *SHELL93* necessita de uma correção específica na representação dos enrijecedores. Conforme a Fig. 3.5, percebe-se uma região de sobreposição (em vermelho) na ligação entre a placa e o enrijecedor. Isso ocorre por que a modelagem realizada com o elemento *SHELL93* considera apenas a superfície média para a formação das estruturas a serem analisadas. Nesse caso, a altura do enrijecedor precisa receber um incremento de metade da espessura da placa, o que irá garantir a conectividade da estrutura placa-reforço e tornará a altura do enrijecedor conforme o modelo físico.

As análises realizadas por Lima (2016) mostraram que, ao considerar essa correção na altura dos enrijecedores, a modelagem de placas enrijecidas através do elemento *SHELL93* forneceu melhores resultados, enquanto as placas sem essa correção tiveram a sua rigidez estrutural significativamente reduzida. Portanto, as simulações que utilizaram o elemento *SHELL93* ao longo desta pesquisa foram todas feitas considerando esse ajuste na altura dos enrijecedores.

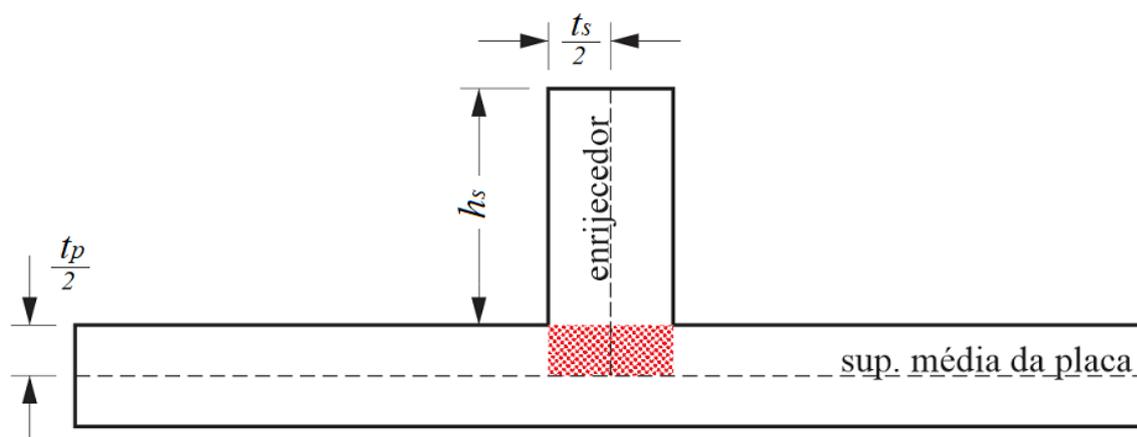


Figura 3.5 – Modelagem de placa enrijecida utilizando elemento finito *SHELL93*

(Fonte: Adaptada de LIMA, 2016)

3.3.1. Placa quadrada simplesmente apoiada sem enrijecedores

A verificação dos modelos computacionais a serem utilizados no decorrer dessa dissertação começou pela simulação numérica de um caso comum de placa fina quadrada sem nenhum enrijecedor, simplesmente apoiada em todas as suas quatro bordas. As condições de apoio simples restringem o movimento das quatro bordas na direção Z , além disso, uma carga distribuída de 10 kN/m^2 foi aplicada na direção ortogonal ao plano médio da placa, que é constituída de um material com módulo de elasticidade $E = 210 \text{ GPa}$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Pela Fig. 3.6, nota-se que, além da condição de contorno $U_z = 0$ em toda a borda, foram impostas restrições nas direções X ($U_x = 0$) e Y ($U_y = 0$), necessárias para evitar o movimento de corpo rígido da placa.

A solução numérica foi realizada através da modelagem com quatro tipos de elementos disponíveis no software ANSYS® (*SHELL93 – Triangular*, *SHELL93 – Quadrilátero*, *SOLID95 – Tetraédrico* e *SOLID95 – Hexaédrico*). Após obtidos os resultados, estes foram comparados com a solução analítica dada pela Eq. (2.46) derivada da aproximação de Lévy-Navier conforme Timoshenko e Krieger (1959).

A Figura 3.7 mostra um exemplo da discretização do domínio computacional em elementos finitos para cada modelo desenvolvido. Até um certo tamanho de elemento conseguiu-se manter iguais as quantidades de elementos das malhas do modelo *SHELL93 – Quadrilátero* e *SOLID95 – Hexaédrico*, enquanto a modelagem com *SHELL93 – Triangular* apresentava o dobro do número de entidades. Conforme diminuiu-se o tamanho do elemento, a discretização da espessura da placa passou a ser possível através do elemento sólido e com isso as malhas geradas com *SOLID95 – Hexaédrico* acabaram superando em número de elementos as malhas geradas com o elemento de área quadrilátero.

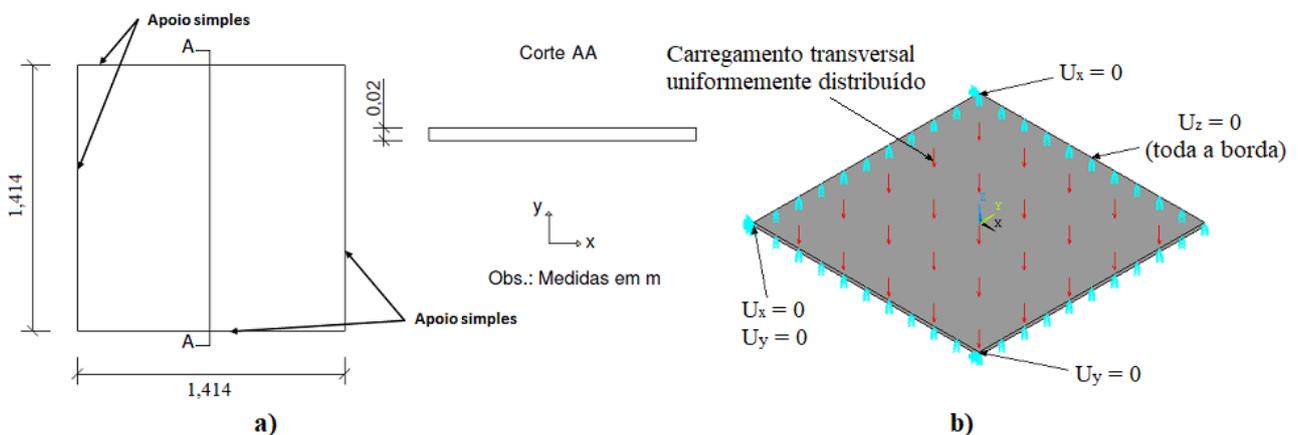


Figura 3.6 – Placa quadrada sem enrijecedor: a) modelo físico [Adaptado de Silva (2010)] e b) condições de contorno e carregamento

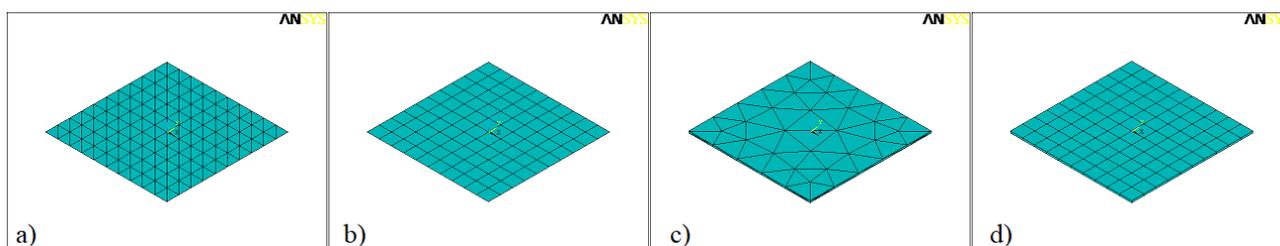


Figura 3.7 – Malhas M1 para o domínio computacional da placa quadrada sem enrijecedor: a) *SHELL93 – Triangular*, b) *SHELL93 – Quadrilátero*, c) *SOLID95 – Tetraédrico* e d) *SOLID95 – Hexaédrico*

Foram geradas seis malhas (M1, M2, M3, M4, M5 e M6) com seis tamanhos de elemento diferentes para cada um dos quatro modelos, sendo que, para uma mesma numeração de malha, a modelagem com *SOLID95 – Tetraédrico* foi realizada com tamanho de elemento duas vezes maior em relação aos outros casos, pois a característica peculiar desse elemento em gerar malhas com grande quantidade de entidades aumentava demasiadamente os tempos computacionais de solução numérica. Essa metodologia de geração de malha foi estendida para todos os demais exemplos analisados neste capítulo.

Após executar os procedimentos de solução e pós-processamento dos dados, obteve-se os resultados numéricos para as simulações realizadas. O gráfico da Fig. 3.8 apresenta os resultados obtidos nas simulações numéricas, através dos quais é possível avaliar a diferença relativa entre malhas consecutivas. A diferença relativa entre malhas consiste no valor absoluto da diferença percentual entre os resultados de duas malhas consecutivas, ou seja, representa o quanto maior ou menor é o resultado da malha seguinte em relação à malha imediatamente anterior.

Através da análise da diferença relativa entre os resultados das malhas consecutivas foi definida aquela que era refinada o suficiente para garantir resultados suficientemente acurados. Esse limite mínimo de refinamento precisa ser respeitado para que a malha não interfira significativamente na magnitude da solução. Por outro lado, refinar a malha muito mais do que o necessário é inviável do ponto de vista de custos e tempos computacionais de processamento.

Esse procedimento de análise de malhas é de suma importância em trabalhos envolvendo modelagem computacional e é conhecido como análise de convergência de malha ou teste de independência de malha. Uma malha suficientemente refinada é tratada como a malha independente para o problema em questão. As malhas independentes para a verificação desse exemplo numérico foram definidas como sendo aquelas que apresentaram, com menor número de elementos possíveis,

diferença em relação à malha seguinte de até 0,1 %.

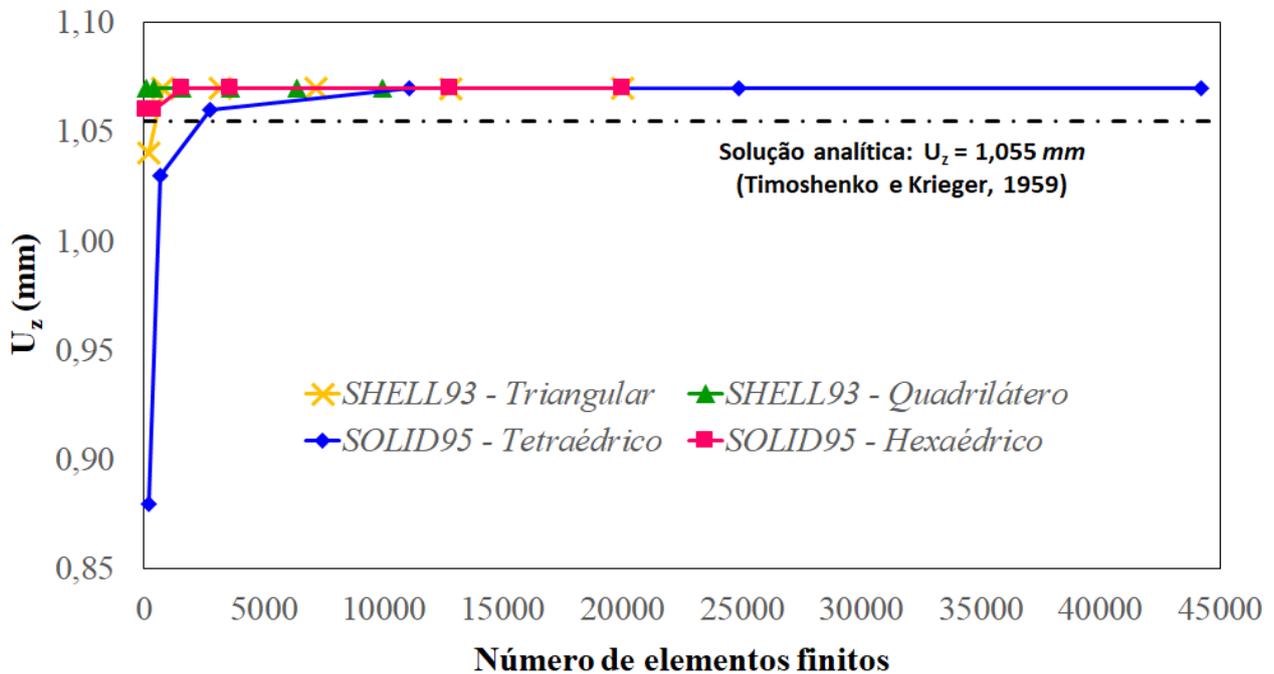


Figura 3.8 – Convergência de malha para a placa quadrada sem enrijecedor

A Tabela 3.1 compara os resultados obtidos pela malha independente de cada modelo, mostrando uma boa concordância com a solução analítica. A Fig. 3.9 mostra a configuração deformada da placa quadrada, indicando no centro da mesma os resultados de deflexão obtidos através da malha independente de cada modelo.

Tabela 3.1. Comparação dos resultados para a placa quadrada sem enrijecedor

Malha	U_z (mm)	Diferença (%)
Solução analítica (Timoshenko e Krieger, 1959)	1,055	-----
<i>SHELL93 – Triangular</i> (M3: 3.200 elementos)	1,069	1,33 %
<i>SHELL93 – Quadrilátero</i> (M2: 400 elementos)	1,069	1,33 %
<i>SOLID95 – Tetraédrico</i> (M4: 11.095 elementos)	1,065	0,95 %
<i>SOLID95 – Hexaédrico</i> (M5: 12.800 elementos)	1,069	1,33 %

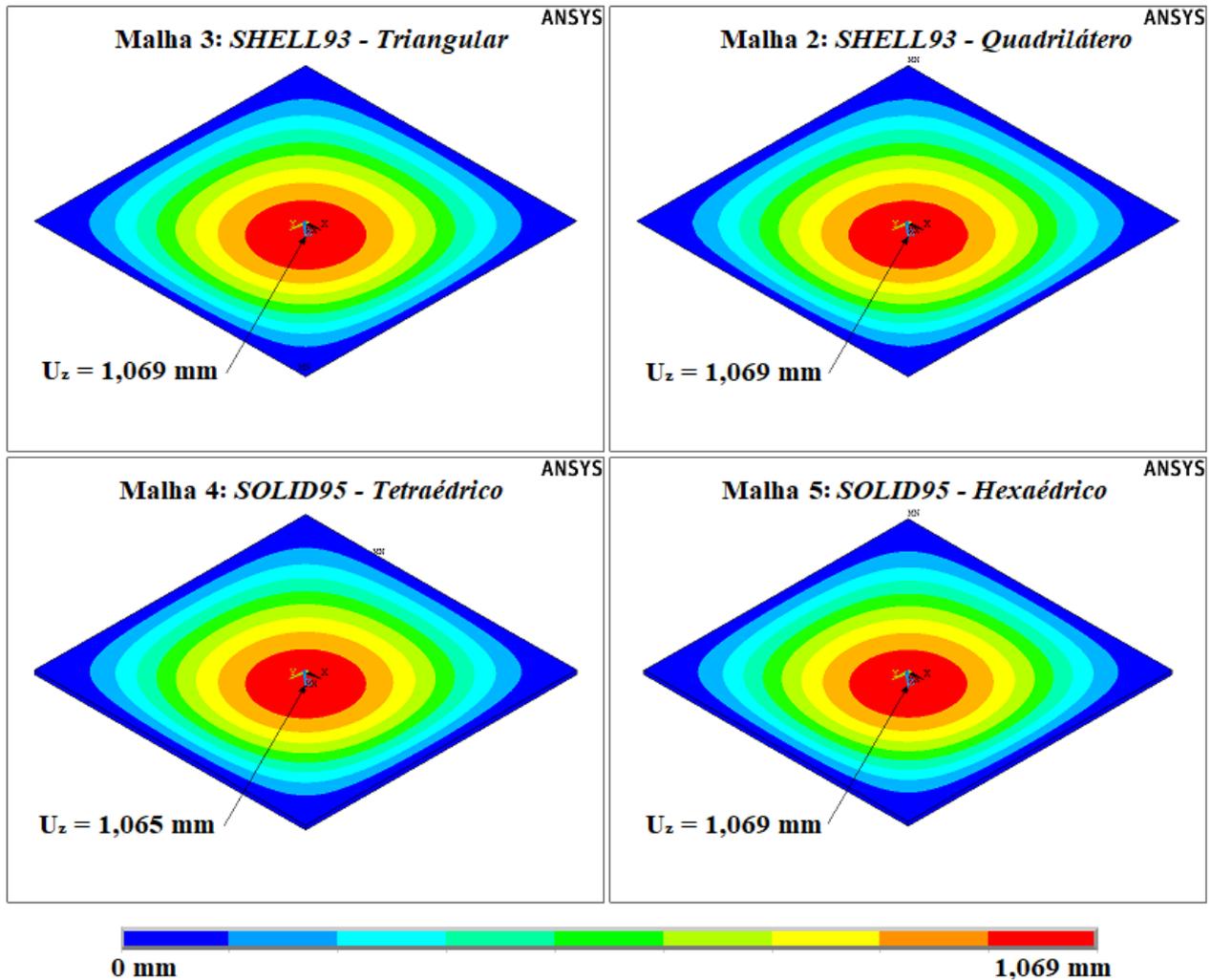


Figura 3.9 – Deformada da placa quadrada sem enrijecedor (malhas independentes)

3.3.2. Placa retangular simplesmente apoiada sem enrijecedores

Este exemplo numérico consistiu em simular numericamente uma placa fina retangular sem nenhum enrijecedor, simplesmente apoiada em todas as suas quatro bordas, como mostra a Fig. 3.10. Foram impostas ao modelo as mesmas condições de contorno, carregamento, assim como as mesmas características do material da placa quadrada analisada anteriormente. Também para este problema, foi possível comparar a solução numérica com a solução analítica dada pela Eq. (2.46).

Em cada modelo a malha independente foi definida como sendo aquela que apresentou, com menor número de elementos possíveis, diferença relativa de até 0,15 % em relação à malha seguinte. A Fig. 3.11 mostra um exemplo da discretização do domínio computacional em elementos finitos para cada tipo de elemento utilizado.

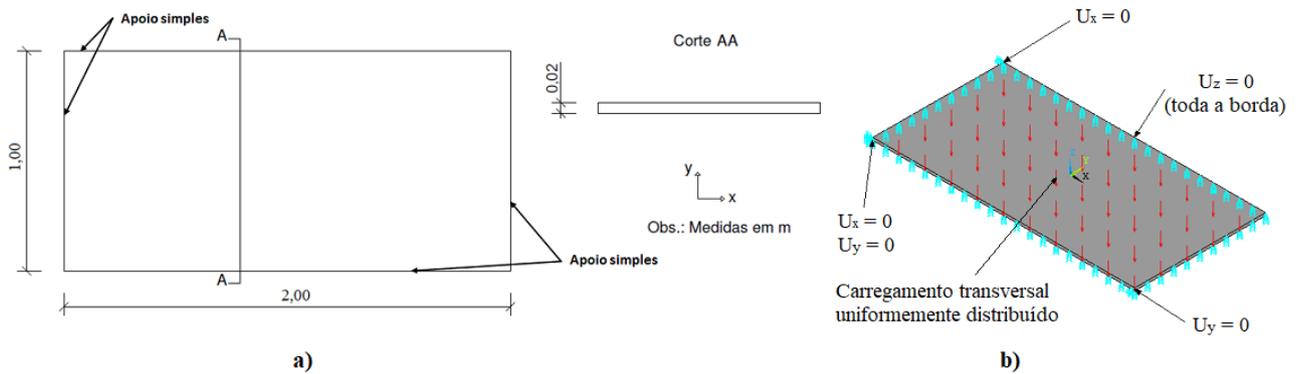


Figura 3.10 – Placa retangular sem enrijecedor: a) modelo físico [Adaptado de Silva (2010)] e b) condições de contorno e carregamento

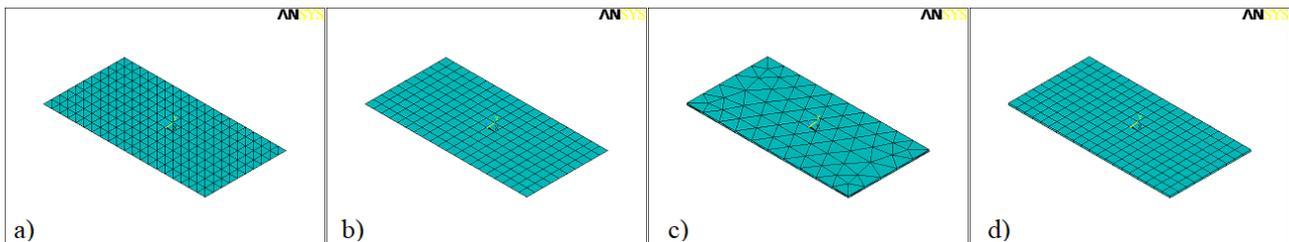


Figura 3.11 – Malhas M1 para o domínio computacional da placa retangular sem enrijecedor: a) *SHELL93 – Triangular*, b) *SHELL93 – Quadrilátero*, c) *SOLID95 – Tetraédrico* e d) *SOLID95 – Hexaédrico*

O gráfico da Fig. 3.12 mostra o comportamento convergente dos resultados para os quatro modelos empregados nas simulações, evidenciando também a proximidade das soluções numéricas em relação à solução analítica. A proximidade dos resultados numéricos com a solução analítica comprova a validade da Teoria Clássica de Placas quando aplicada em placas finas no regime de pequenas deflexões, ou seja, deslocamentos de até no máximo um décimo (1/10) da espessura da placa. Nesse caso, como a espessura da placa analisada era de 20 mm, a deflexão de 0,658 mm ficou bem abaixo do limite de 2 mm e, portanto, a solução analítica apresentou boa acurácia.

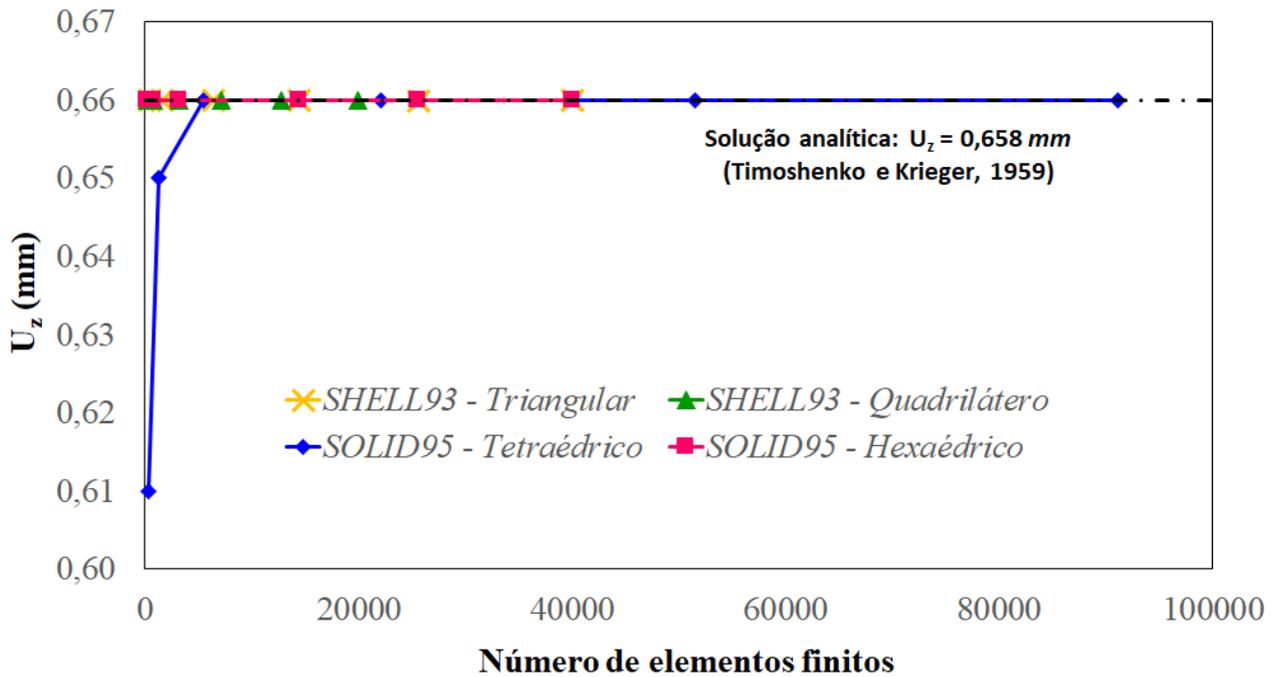


Figura 3.12 – Convergência de malha para a placa retangular sem enrijecedor.

A Tabela 3.2 compara os resultados obtidos através das malhas definidas como independentes, onde é possível observar uma boa concordância com a solução analítica:

Tabela 3.2. Comparação dos resultados para a placa retangular sem enrijecedor

Modelo	U_z (mm)	Diferença (%)
Solução analítica (Timoshenko e Krieger, 1959)	0,658	-----
<i>SHELL93 – Triangular</i> (M2: 1.600 elementos)	0,664	0,91 %
<i>SHELL93 – Quadrilátero</i> (M1: 200 elementos)	0,664	0,91 %
<i>SOLID95 – Tetraédrico</i> (M4: 22.073 elementos)	0,663	0,76 %
<i>SOLID95 – Hexaédrico</i> (M2: 800 elementos)	0,662	0,61 %

A Figura 3.13 mostra a configuração deformada da placa retangular considerando as malhas independentes de cada modelo:

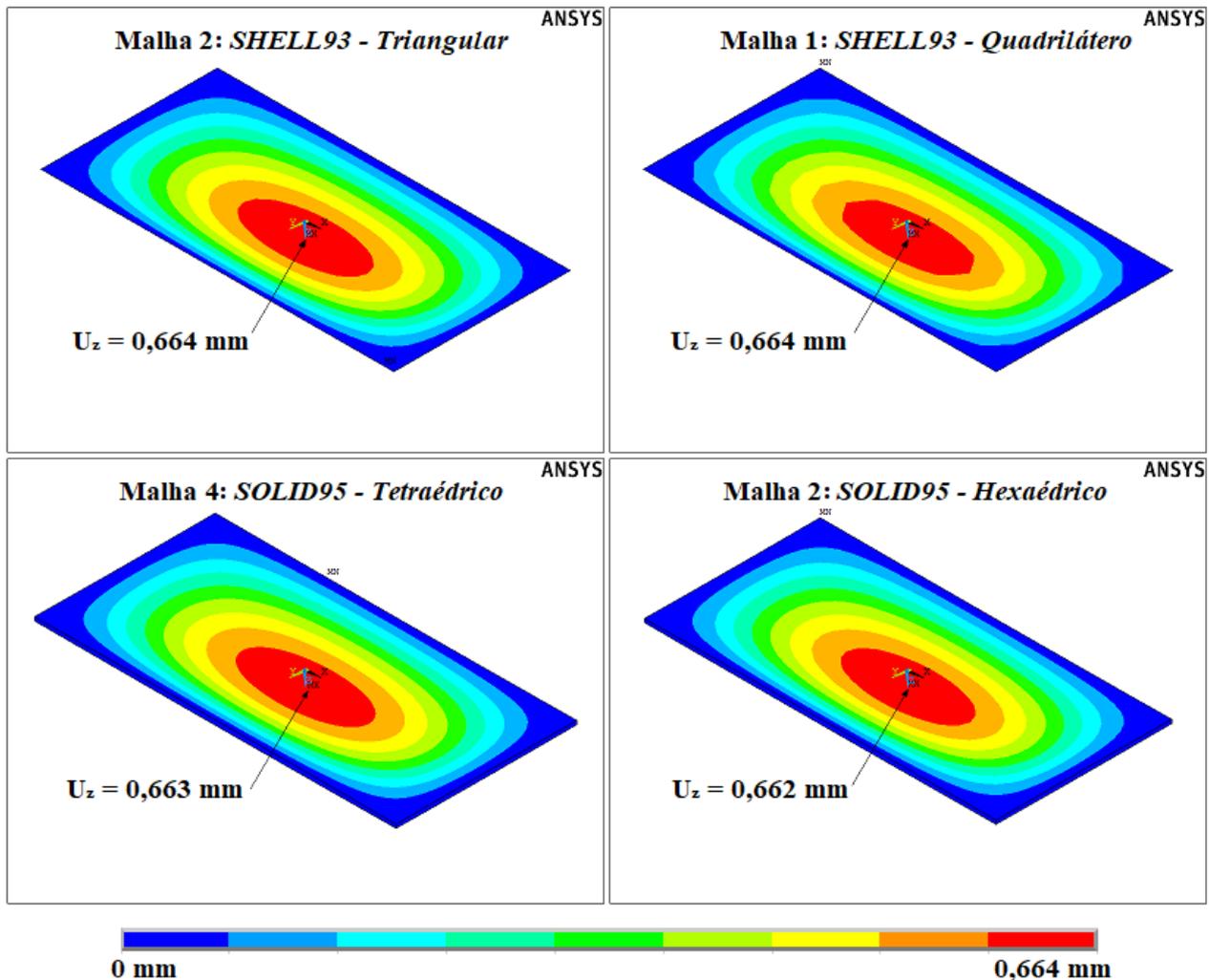


Figura 3.13 – Deformada da placa retangular sem enrijecedor (malhas independentes)

3.3.3. Placa quadrada simplesmente apoiada com um enrijecedor central

Para avaliar a modelagem computacional de placas com enrijecedores, inicialmente tomou-se como base o exemplo utilizado nos artigos publicados por Rossow e Ibrahimkhail (1978) e Tanaka e Bercin (1997). Esse exemplo, também analisado por Silva (2010), consiste em uma placa fina quadrada com um enrijecedor no meio do vão e apoio simples em todas as suas quatro bordas, como mostra a Fig. 3.14.

O material dessa placa possui $E = 11.721,09$ kN/cm² e $\nu = 0,3$. As condições de contorno impostas foram apoios simples que restringem o movimento das quatro bordas na direção z , inclusive as bordas do enrijecedor. A pressão ou força distribuída aplicada na placa foi igual a $0,000689$ kN/cm². A Fig. 3.12 mostra as dimensões da placa e o seu modelo computacional obtido através do ANSYS®.

A solução numérica para este caso foi comparada com as soluções encontradas pelas referências acima mencionadas, cada uma delas utilizando um método em particular. Silva (2010) utilizou o Método dos Elementos Finitos, combinando elementos bidimensionais (*SHELL63*) para modelagem da placa com elementos de viga (*BEAM44*) para modelagem do enrijecedor, enquanto Rossow e Ibrahimkhail (1978) e Tanaka e Bercin (1997) utilizaram, respectivamente, o Método das Restrições e o Método dos Elementos de Contorno.

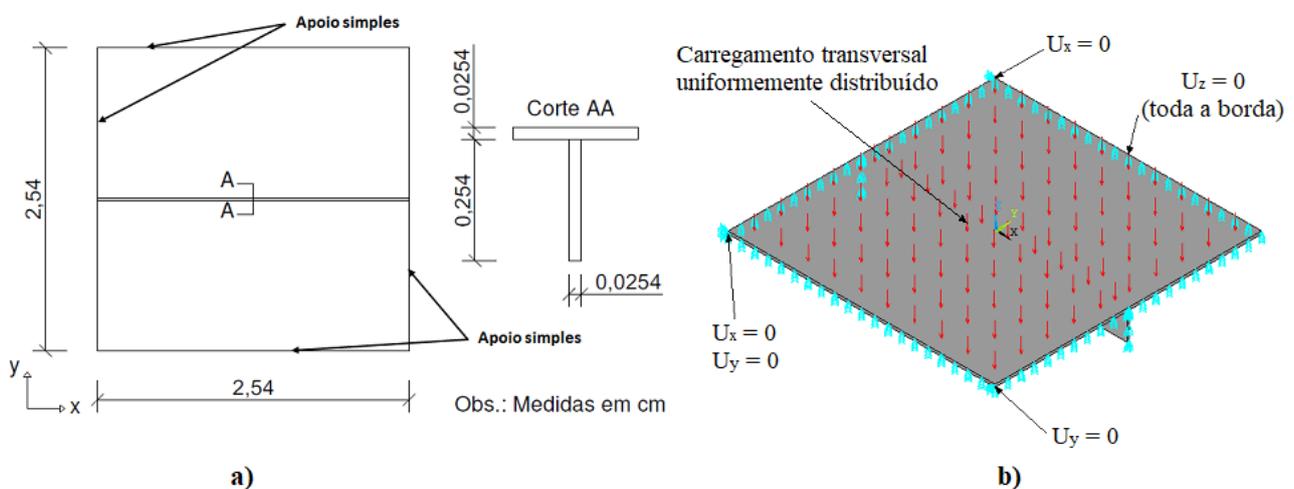


Figura 3.14 – Placa quadrada com um enrijecedor: a) modelo físico [Adaptado de Silva (2010)] e b) condições de contorno e carregamento

A Figura 3.15 mostra um exemplo da discretização do domínio computacional em elementos finitos para cada tipo de elemento utilizado. As malhas foram geradas de forma que os nós dos elementos na região de intersecção entre a placa e o enrijecedor coincidissem, dessa maneira conseguiu-se garantir a conectividade adequada para todo o domínio.

No caso dos elementos *SHELL93*, a conectividade foi facilmente obtida ao discretizar a placa e o enrijecedor com mesmo tamanho máximo de elemento, dessa forma o próprio software garantiu a conectividade entre eles. Já na modelagem com o *SOLID95 – Tetraédrico* foram gerados dois volumes, um para a placa e outro para o enrijecedor, para serem unidos em um único volume a ser discretizado pela malha tetraédrica livre do próprio programa, que garantiu a conectividade automaticamente. Por outro lado, a conectividade entre elementos na modelagem com o *SOLID95 – Hexaédrico* foi garantida através da criação de quatro volumes (um para o enrijecedor e três para a

placa: lado direito da placa, lado esquerdo e tira central de mesma espessura do enrijecedor).

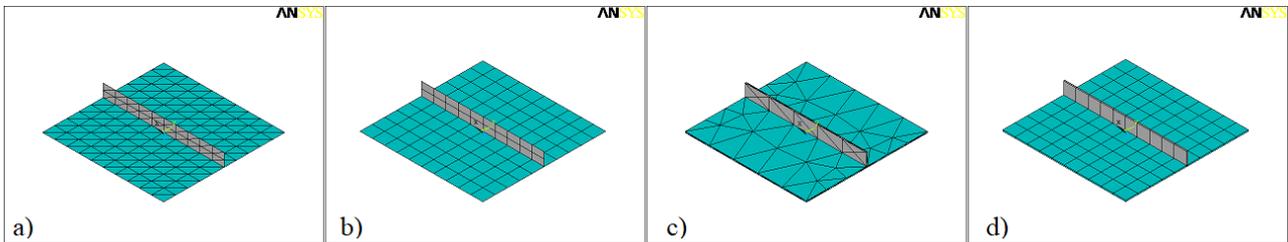


Figura 3.15 – Malhas M1 para o domínio computacional da placa quadrada com um enrijecedor: a) *SHELL93 – Triangular*, b) *SHELL93 – Quadrilátero*, c) *SOLID95 – Tetraédrico* e d) *SOLID95 – Hexaédrico*

As malhas independentes para este problema foram definidas como sendo aquelas que apresentaram, com menor número de elementos possíveis, diferença relativa de até 1,29% em relação à malha seguinte. O gráfico da Fig. 3.16 mostra o comportamento dos resultados.

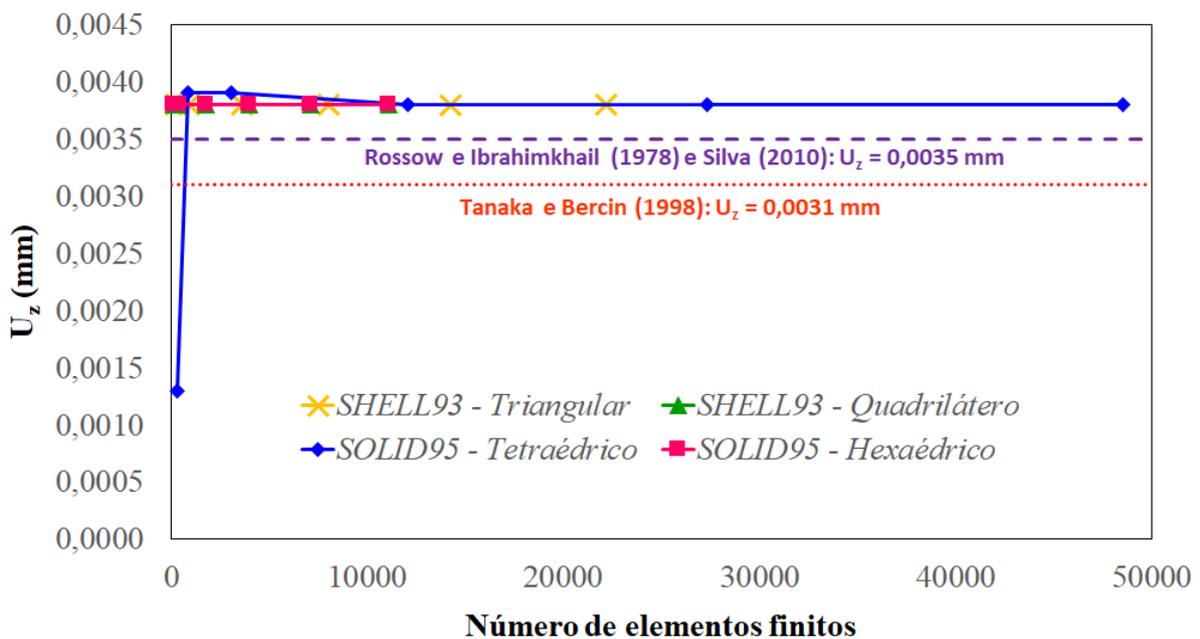


Figura 3.16 – Convergência de malha para a placa quadrada com um enrijecedor

A Tabela 3.3 compara os resultados obtidos através das malhas independentes de cada modelo com as soluções obtidas pelas referências. A Fig. 3.17 mostra a configuração deformada da

placa quadrada com um enrijecedor central.

Tabela 3.3. Comparação dos resultados para a placa quadrada com um enrijecedor

Placa Enrijecida	SHELL93		SOLID95		Rossow e Ibrahimkhail (1978)	Tanaka e Bercin (1997)	Silva (2010)
	Triangular	Quadrilátero	Tetraédrico	Hexaédrico			
Malha	M1: 240 elementos	M1: 120 elementos	M3: 3.075 elementos	M1: 120 elementos	----	----	----
U_z (mm)	0,0038	0,0038	0,0039	0,0038	0,0035	0,0031	0,0035

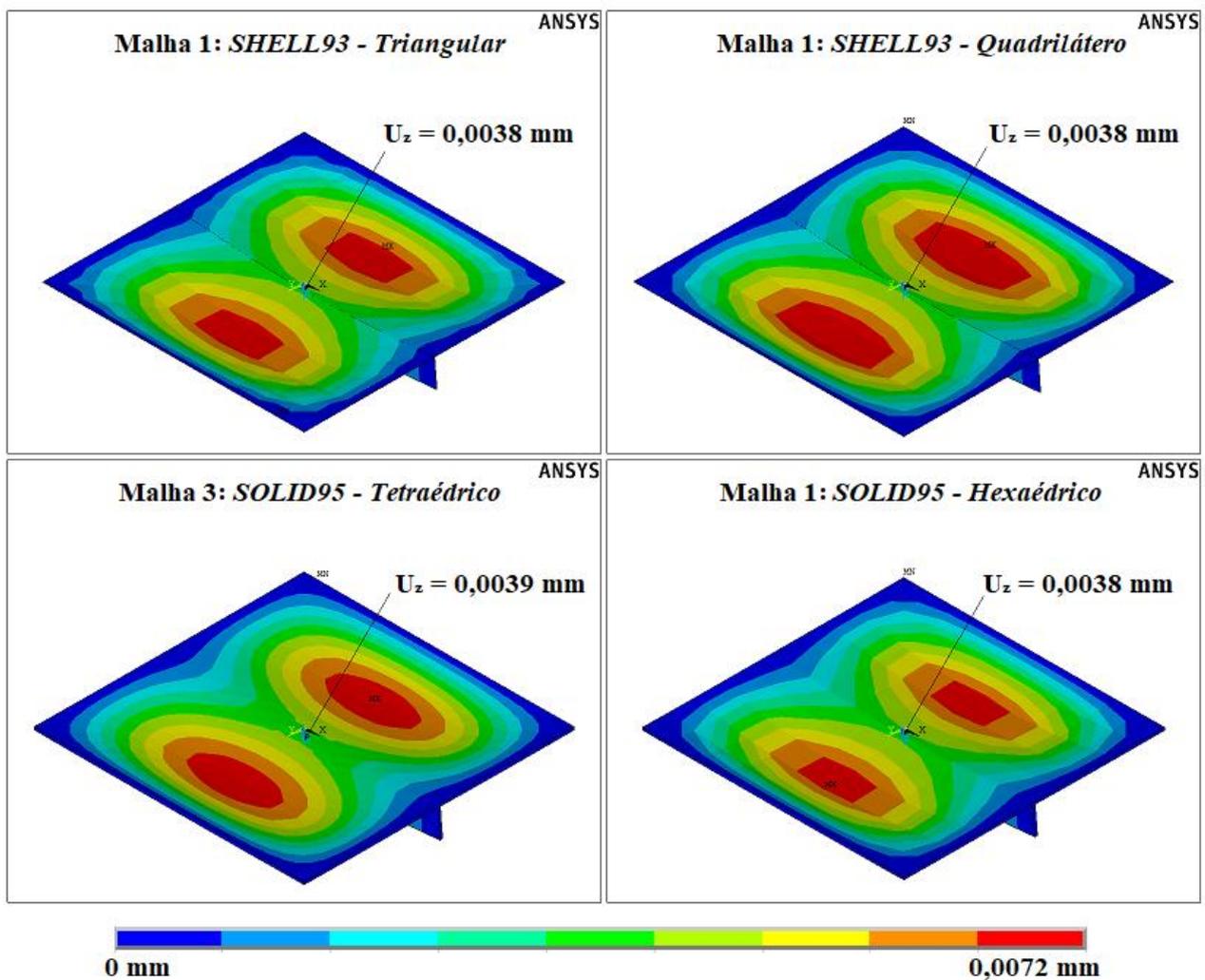


Figura 3.17 – Deformada da placa quadrada com um enrijecedor (malhas independentes)

3.3.4. Placa retangular simplesmente apoiada com dois enrijecedores ortogonais

Dando continuidade à verificação da modelagem computacional de placas com enrijecedores, tomou-se o exemplo utilizado nos artigos publicados por Rossow e Ibrahimkhail (1978), Bedair (1997) e Silva (2010). Esse exemplo consiste em uma placa fina retangular com dois enrijecedores que se cruzam ortogonalmente no centro da placa, como mostra a Fig. 3.18.

Silva (2010) utilizou novamente o Método dos Elementos Finitos, assim como Rossow e Ibrahimkhail (1978) continuou usando o Método das Restrições. Bedair (1997), por sua vez, fez uma análise através do método da programação sequencial quadrática (SQP – *Sequential Quadratic Programming*).

Para esse problema, o material utilizado possui módulo de elasticidade $E = 20.684,27$ kN/cm² e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. As bordas da placa, incluindo as bordas dos enrijecedores longitudinal e transversal, foram simplesmente apoiadas. A placa foi submetida à ação de uma força distribuída igual a 0,006895 kN/cm². A Fig. 3.18 apresenta o modelo físico e o modelo obtido dentro da plataforma computacional do *ANSYS*[®], sendo possível observar o carregamento distribuído e as condições de contorno mencionadas.

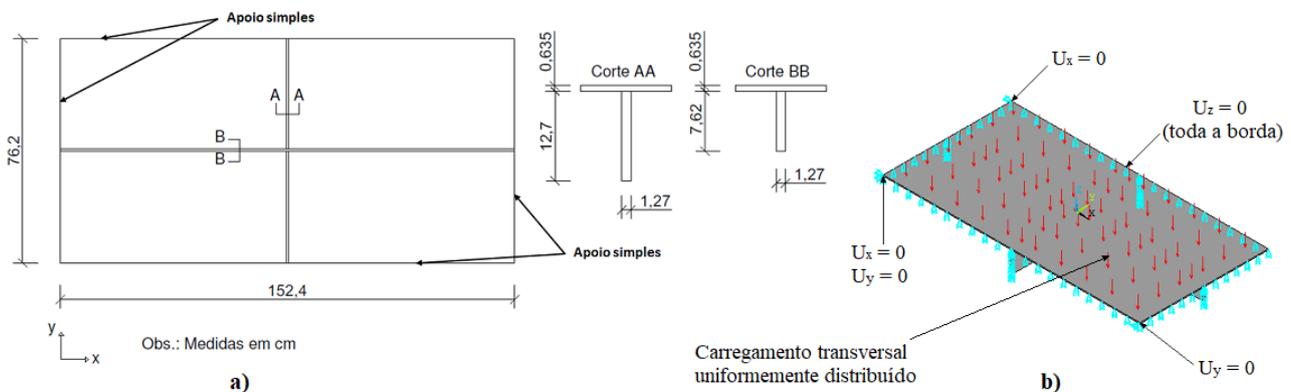


Figura 3.18 – Placa retangular com dois enrijecedores ortogonais: a) modelo físico [Adaptado de Silva (2010)] e b) condições de contorno e carregamento

A Figura 3.19 mostra a discretização do domínio computacional em elementos finitos para esse problema. As malhas foram geradas de maneira semelhante ao que foi feito para o problema de placa enrijecida anterior, de forma a garantir a conectividade adequada para todo o domínio. No caso dos elementos *SHELL93*, a conectividade foi obtida ao se dividir o enrijecedor transversal de altura maior em duas superfícies adjacentes. Para o caso da modelagem com o *SOLID95* –

Tetraédrico, foram gerados três volumes para construção do modelo, um para placa e um para cada enrijecedor. Já para a modelagem com o *SOLID95 – Hexaédrico*, foi necessária a criação de dezessete volumes (nove para compor a placa e oito para compor os enrijecedores longitudinal e transversal).

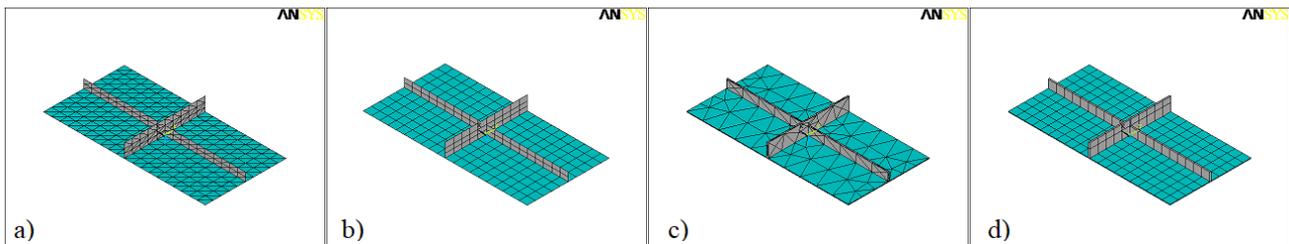


Figura 3.19 – Malhas M1 para o domínio computacional da placa com dois enrijecedores ortogonais: a) *SHELL93 – Triangular*, b) *SHELL93 – Quadrilátero*, c) *SOLID95 – Tetraédrico* e d) *SOLID95 – Hexaédrico*

As malhas independentes para este problema foram definidas como sendo aquelas que apresentaram, com menor número de elementos possíveis, diferença relativa de até 0,10 % em relação à malha seguinte.

O gráfico da Fig. 3.20 mostra o comportamento dos resultados de cada malha para cada modelo/tipo de elemento, evidenciando um comportamento convergente entre os modelos, porém diferente em torno de 19% a 27% dos resultados das referências. Como já mencionado, Silva (2010) usou um modelo numérico que adotava o elemento *SHELL63* para a placa e *BEAM44* para os enrijecedores. O elemento *SHELL63* possui 6 graus de liberdade por nó (como o elemento *SHELL93*), porém possui 4 nós e funções de interpolação lineares tendo, portanto, menor acurácia que o *SHELL93*. Além disso, uma malha pouco refinada (40x20 na placa) com 860 elementos foi usada em Silva (2010). Por esse motivo, esse exemplo foi simulado numericamente reproduzindo o modelo empregado por Silva (2010), mas com uma malha mais refinada (160x80 na placa) contendo 13.040 elementos. O resultado dessa simulação é também apresentado no gráfico da Fig. 3.20, onde é possível notar uma maior proximidade do resultado dessa nova simulação com os resultados obtidos pelos modelos propostos na presente pesquisa.

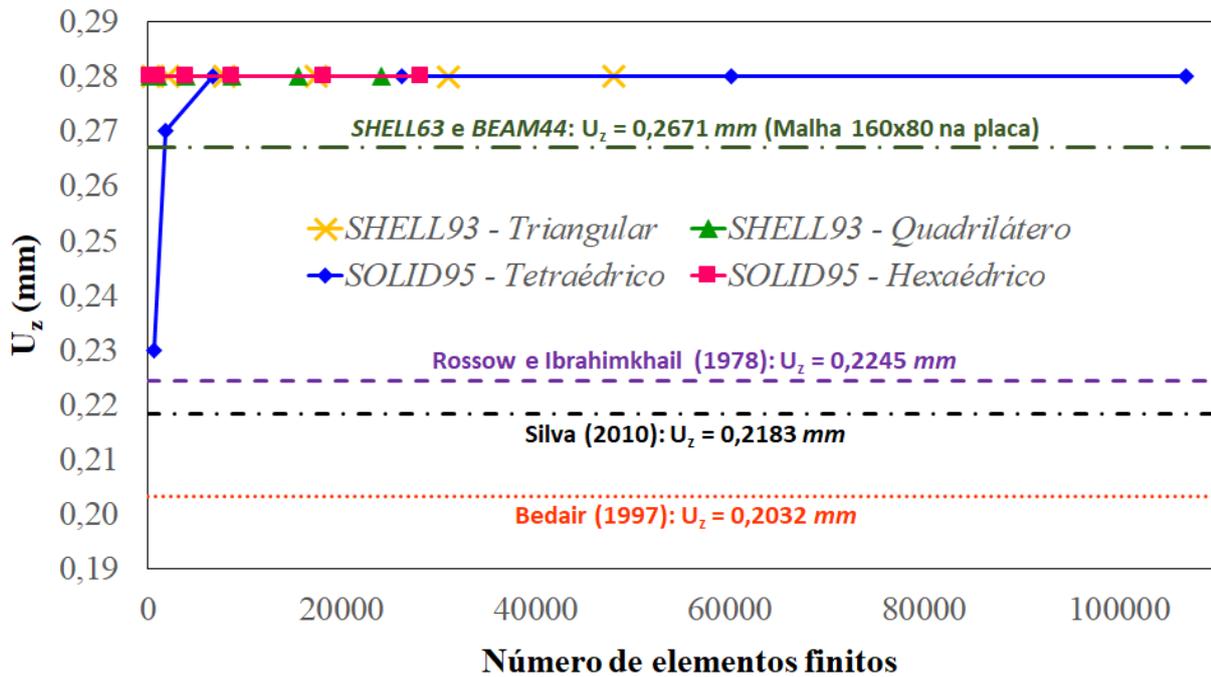


Figura 3.20 – Convergência de malha para a placa com dois enrijecedores ortogonais

A Tabela 3.4 compara os resultados obtidos pelos modelos numéricos com as soluções obtidas pelas referências e a Fig. 3.21 mostra a configuração deformada da placa retangular com dois enrijecedores ortogonais, indicando a deflexão no centro das mesmas para as malhas independentes.

Tabela 3.4. Comparação dos resultados para a placa com dois enrijecedores ortogonais

Placa Enrijecida	SHELL93		SOLID95		Rossow e Ibrahimkhail (1978)	Bedair (1997)	Silva (2010)
	Triangular	Quadrilátero	Tetraédrico	Hexaédrico			
Malha	M2: 2.040 elementos	M2: 1.020 elementos	M4: 26.166 elementos	M3: 3.928 elementos	----	----	----
U_z (mm)	0,2779	0,2780	0,2782	0,2781	0,2245	0,2032	0,2183

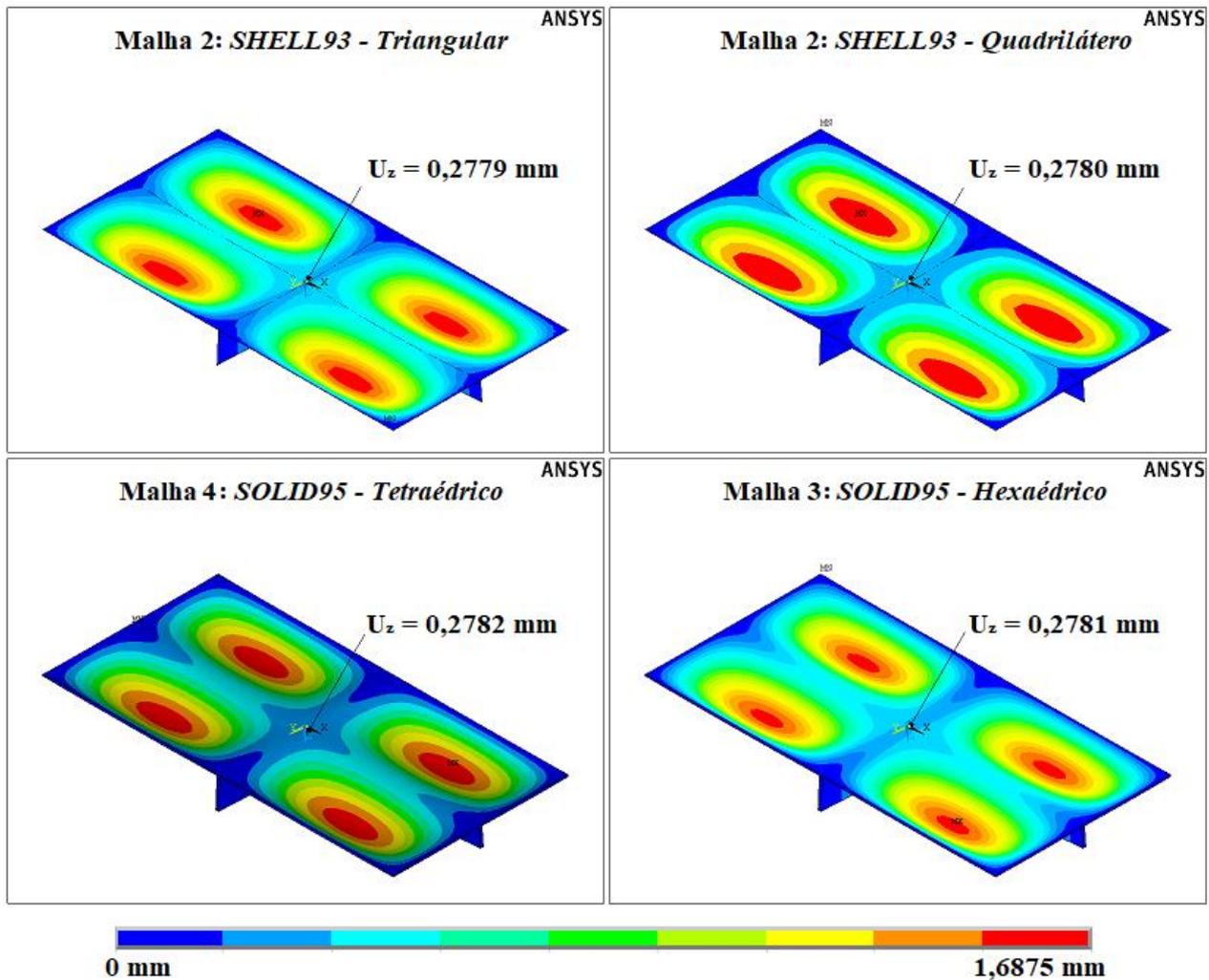
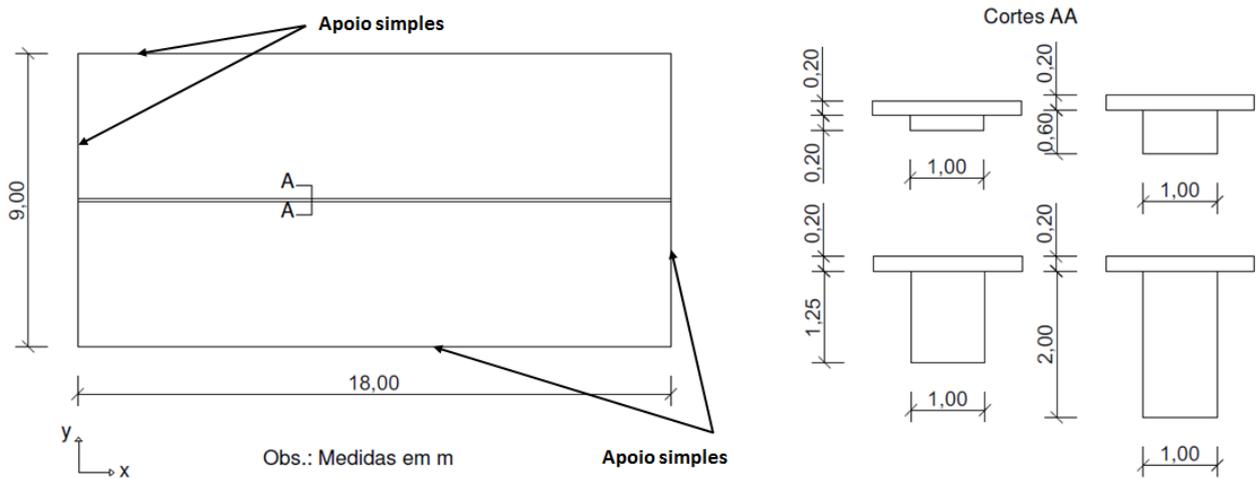


Figura 3.21 – Deformada da placa com dois enrijecedores ortogonais (malhas independentes)

3.3.5. Variação da altura de um enrijecedor central em uma placa retangular

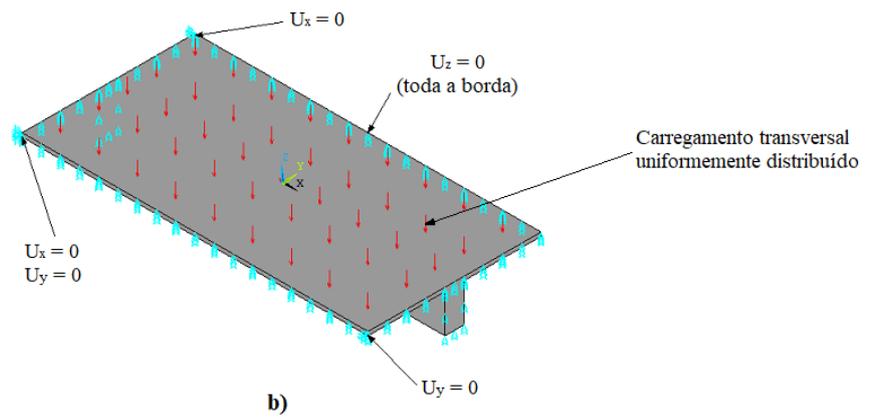
Por fim, visando avaliar a eficácia da modelagem computacional aplicada a estudos paramétricos, investigou-se a influência da variação da altura do enrijecedor de uma placa fina retangular simplesmente apoiada em todas as suas bordas, conforme a Fig. 3.22.

Nesse problema, a força distribuída aplicada sobre a placa foi de 10 kN/m^2 e o módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson utilizados foram, respectivamente, $3,0 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ e $0,154$. A principal característica desse problema é a avaliação das placas para diferentes valores de altura de enrijecedor, com isso, foi possível avaliar a qualidade do modelo computacional quando ocorrem variações de parâmetros geométricos. Na Fig. 3.23 é possível observar um exemplo das malhas geradas para os quatro modelos verificados, no caso específico da placa retangular com altura de enrijecedor $h_s = 2,00 \text{ m}$.



Obs.: Medidas em m

a)



b)

Figura 3.22 – Placa retangular com dois enrijecedores ortogonais: a) modelo físico [Adaptado de Silva (2010)] e b) condições de contorno e carregamento: $h_s = 2,00$ m

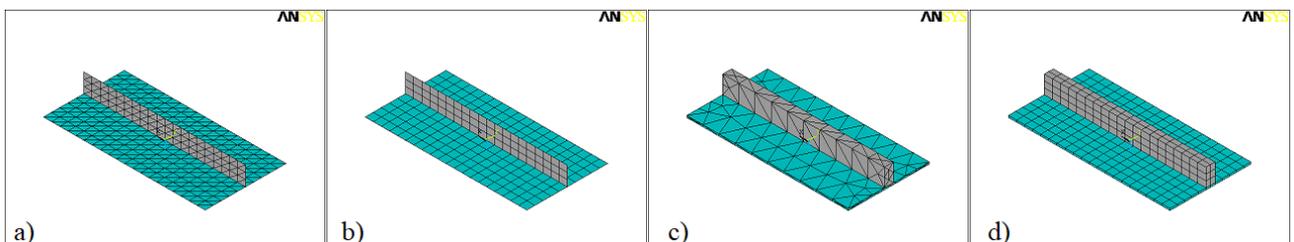


Figura 3.23 – Malhas M1 para o domínio computacional da placa retangular com um enrijecedor ($h_s = 2,00$ m): a) SHELL93 – Triangular, b) SHELL93 – Quadrilátero, c) SOLID95 – Tetraédrico e d) SOLID95 – Hexaédrico

Esse mesmo exemplo foi analisado por Sapountzakis e Katsikadelis (2000) através do Método da Equação Análoga e por Silva (2010) pelo Método dos Elementos Finitos. Os gráficos das Figs. 3.24 a 3.28 apresentam os resultados das simulações realizadas para as diferentes alturas de enrijecedor h_s .

O caso com altura de enrijecedor $h_s = 0$ m equivale à condição de uma placa sem enrijecedor, cuja solução analítica foi calculada pela Eq. (2.46), conforme Timoshenko e Krieger (1959), e apresentada no gráfico da Fig. 3.24. Notou-se, para esse caso com $h_s = 0$ m, que houve um comportamento convergente dos resultados obtidos pelos quatro modelos em estudo, além do mais os modelos concordaram entre si e se aproximaram das soluções de Silva (2010), Sapountzakis e Katsikadelis (2000) e da solução analítica obtida pelo método aproximado de Lévy (TIMOSHENKO e KRIEGER, 1959).

O limite que define o regime de pequenas deflexões, conforme Szilard (2004), consiste em um décimo da espessura da placa sob análise. Esse limite define o campo de aplicação da Eq. (2.46) advinda da Teoria Clássica de Placas Finas, a qual é restrita a aplicações onde ocorrem pequenos deslocamentos. Para o caso específico de $h_s = 0$ m, as deflexões obtidas através da solução analítica dada pela Eq. (2.46), apesar de terem sido maiores que o limite de pequenas deflexões, apresentaram resultados bem próximos dos resultados numéricos.

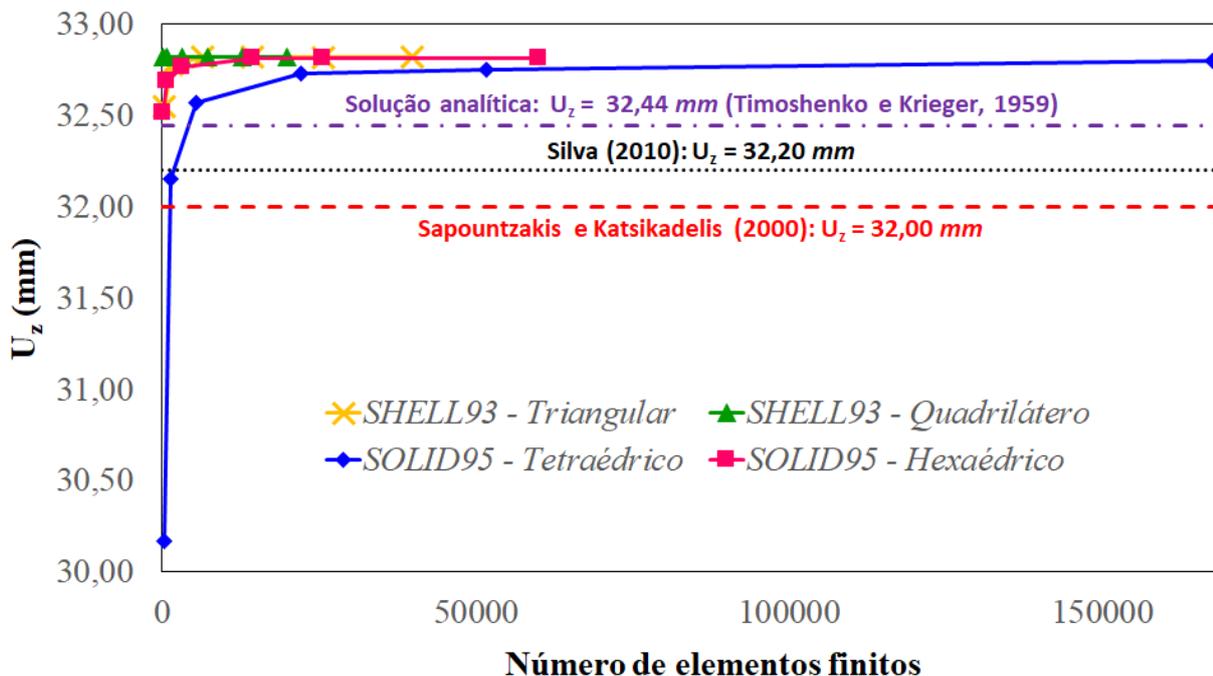


Figura 3.24 – Convergência de malha para a placa com um enrijecedor central: $h_s = 0$ m

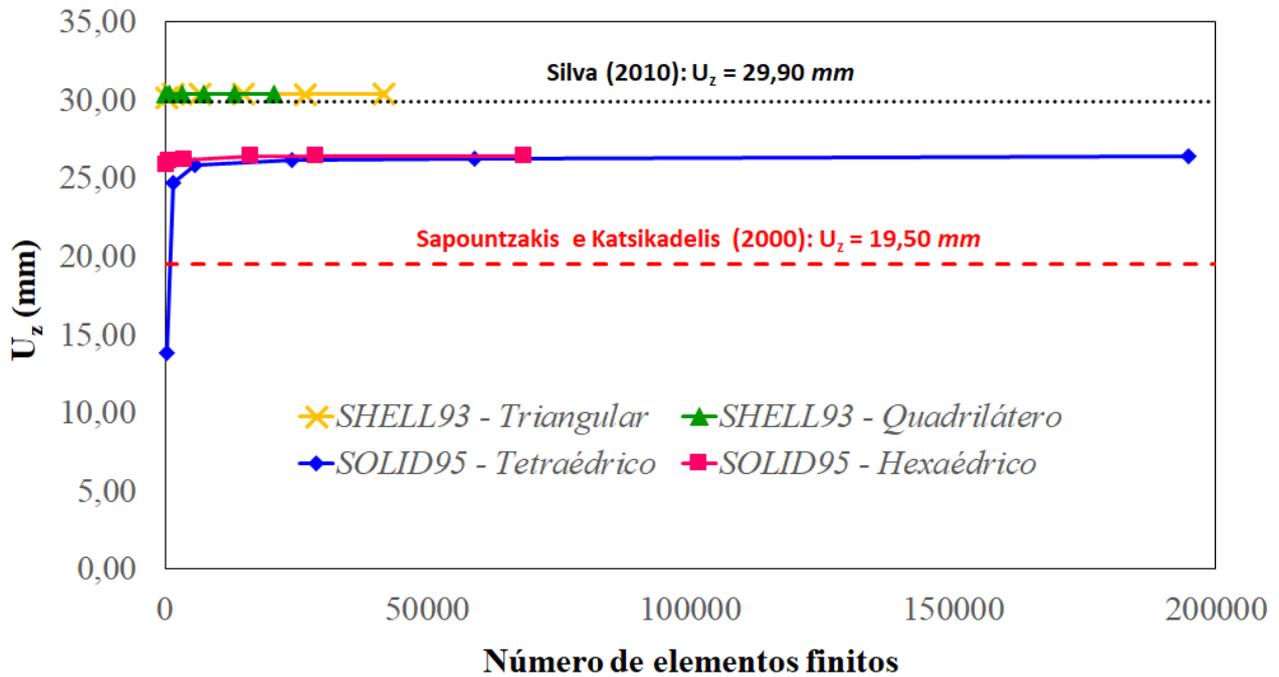


Figura 3.25 – Convergência de malha para a placa com um enrijecedor central: $h_s = 0,20$ m

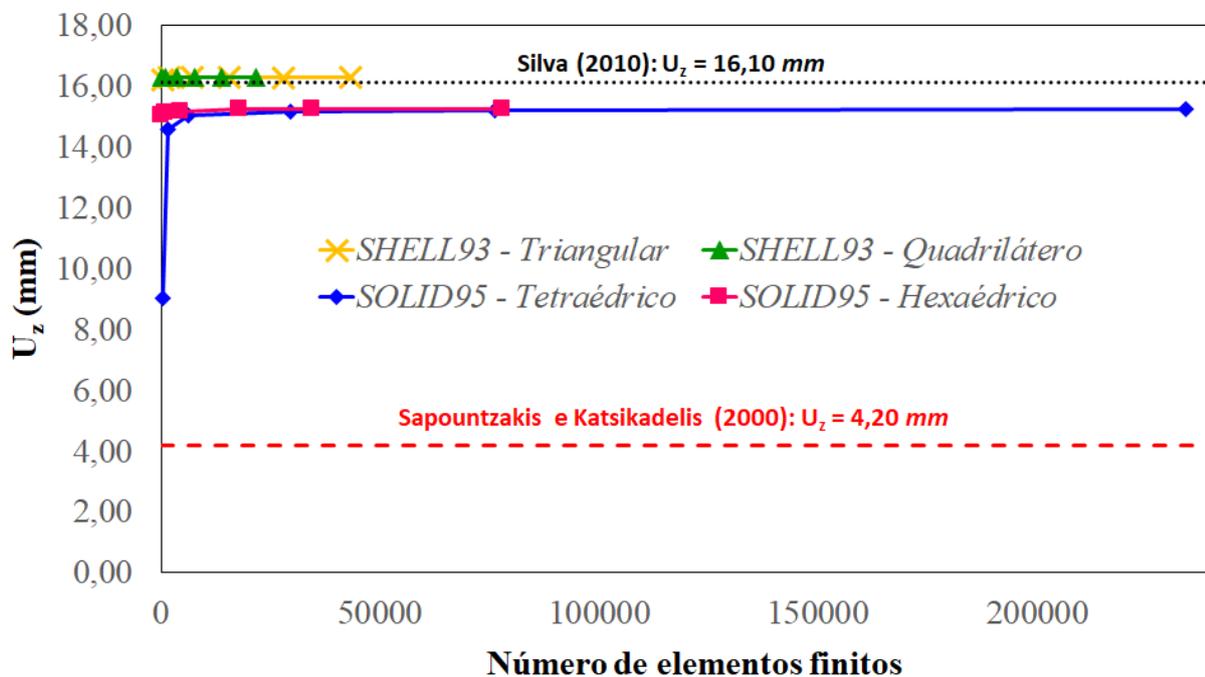


Figura 3.26 – Convergência de malha para a placa com um enrijecedor central: $h_s = 0,60$ m

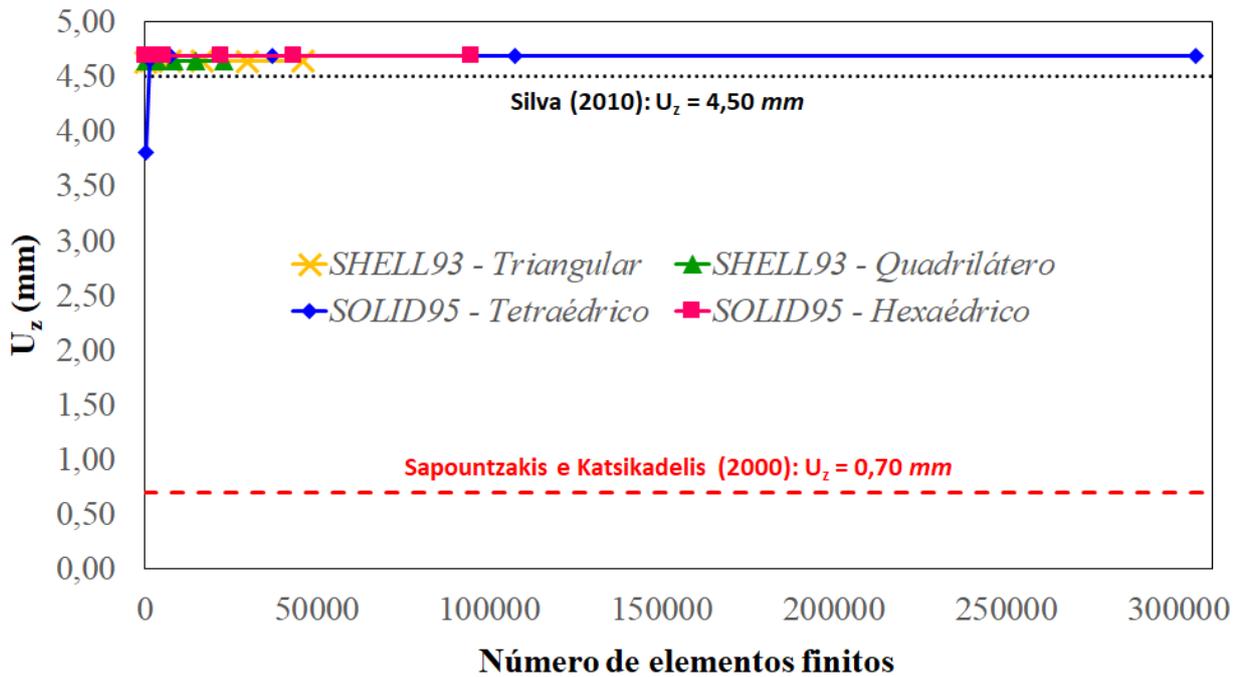


Figura 3.27 – Convergência de malha para a placa com um enrijecedor central: $h_s = 1,25$ m

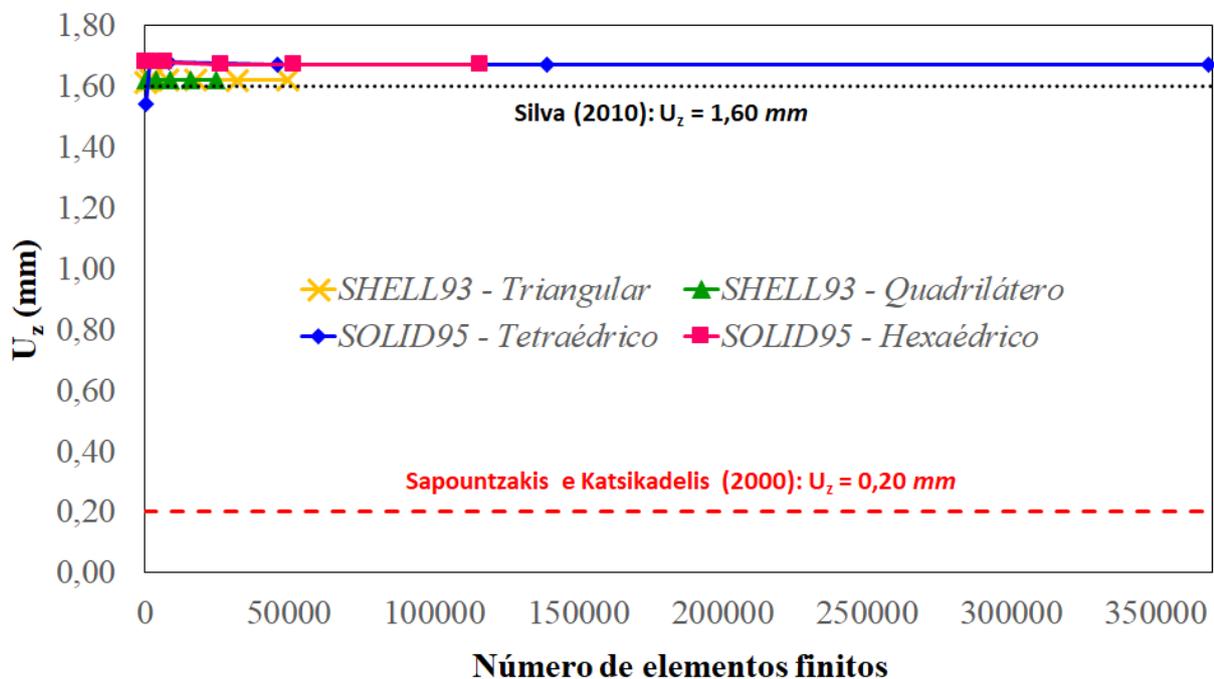


Figura 3.28 – Convergência de malha para a placa com um enrijecedor central: $h_s = 2,00$ m

Através da análise dos demais gráficos (Figs. 3.25 a 3.28), percebeu-se um comportamento convergente dos resultados produzidos pelos quatro modelos. Além disso, elementos do mesmo tipo concordaram entre si, ou seja, as versões tetraédrica e hexaédrica do elemento *SOLID95* apresentaram resultados próximos, assim como ocorreu com as versões triangular e quadrilátera do elemento *SHELL93*.

A Tabela 3.5 mostra os resultados obtidos através das malhas independentes dos quatro modelos, além das soluções obtidas pelas referências utilizadas para comparação. As malhas independentes para este problema não apresentaram diferença relativa acima de 0,63 % em relação à malha seguinte.

Tabela 3.5. Comparação dos resultados para a placa retangular com um enrijecedor

Altura do enrijecedor h_s (m)		<i>SHELL93</i>		<i>SOLID95</i>		Silva (2010)	Sapountzakis e Katsikadelis (2000)
		Triangular	Quadrilátero	Tetraédrico	Hexaédrico		
0,00	Malha	M2: 1.600 elementos	M1: 200 elementos	M4: 22.077 elementos	M3: 3.200 elementos	----	----
	U_z (mm)	32,78	32,82	32,73	32,76	32,20	32,00
0,20	Malha	M2: 1.680 elementos	M1: 220 elementos	M4: 24.269 elementos	M2: 960 elementos	----	----
	U_z (mm)	30,38	30,41	26,16	26,06	29,90	19,50
0,60	Malha	M2: 1.760 elementos	M1: 220 elementos	M4: 29.612 elementos	M3: 4.480 elementos	----	----
	U_z (mm)	16,29	16,30	15,17	15,18	16,10	4,20
1,25	Malha	M2: 1.840 elementos	M1: 240 elementos	M4: 37.183 elementos	M3: 5.680 elementos	----	----
	U_z (mm)	4,64	4,64	4,69	4,69	4,50	0,70
2,00	Malha	M1: 520 elementos	M1: 260 elementos	M4: 46.005 elementos	M3: 6.880 elementos	----	----
	U_z (mm)	1,61	1,61	1,67	1,67	1,60	0,20

Nota-se que os resultados com elementos bidimensionais melhor se aproximaram dos resultados de Silva (2010), já que este autor também utilizou elementos bidimensionais para a modelagem da placa (*SHELL63*). No entanto, cabe destacar que o modelo numérico empregando o

elemento finito tridimensional *SOLID95 – Hexaédrico*, pela sua quantidade de nós e regularidade da malha, é o que tende a produzir resultados com maior acurácia, uma vez que para esse elemento não são realizadas as simplificações que ocorrem nos elementos bidimensionais comumente utilizados para a modelagem de placas ou cascas.

Conforme aumentou-se a altura do enrijecedor, percebeu-se nos gráficos uma maior aproximação dos modelos *SHELL93* e Silva (2010) em relação aos resultados dos modelos *SOLID95*. Essa tendência indica que os elementos de placa – ou de vigas no caso de Silva (2010) – não estavam representando muito bem o modelo físico do problema quando o enrijecedor possuía altura pequena comparado à sua largura. No entanto, quando o enrijecedor passou a ter maior esbeltez (nos casos com altura $h_s = 1,25$ m e $h_s = 2,00$ m), a modelagem por elementos de placa ou por elementos de viga se tornou adequada. Dessa forma, com o aumento da altura do enrijecedor, os resultados de Silva (2010) e dos quatro modelos propostos nessa pesquisa passaram a concordar todos entre si.

Exceto na situação da placa sem enrijecedor ($h_s = 0$ m), os resultados obtidos por Sapountzakis e Katsikadelis (2000) apresentaram bastante divergência quando comparados com os resultados dos demais modelos. Segundo Silva (2010), essa divergência ocorreu por causa das diferenças entre a formulação do Método dos Elementos Finitos utilizada por este e a formulação do Método da Equação Análoga utilizada por Sapountzakis e Katsikadelis (2000).

A Fig. 3.29 apresenta a configuração deformada das placas retangulares enrijecidas com enrijecedor de altura $h_s = 2,00$ m, junto com a indicação dos valores obtidos para a deflexão no centro da estrutura utilizando as malhas independentes.

Em virtude de todos os exemplos numéricos analisados, foi possível concluir que os quatro modelos computacionais propostos foram devidamente verificados. Além do mais, observou-se que o melhor desempenho em termos de resultados acurados e tempos computacionais ocorreram com as versões quadrilátera do elemento bidimensional *SHELL93* e hexaédrica do elemento tridimensional *SOLID95*. Portanto, o estudo de otimização geométrica de placas enrijecidas desenvolvido nessa dissertação foi realizado utilizando apenas esses dois modelos computacionais: *SHELL93 – Quadrilátero* e *SOLID95 – Hexaédrico*.

Além disso, é importante frisar que o motivo de conduzir as análises dessa pesquisa com dois tipos de elementos (*SHELL93* e *SOLID95*) foi uma forma de verificar se haveria divergências significativas de resultados entre eles ao serem empregados em uma análise de placas enrijecidas

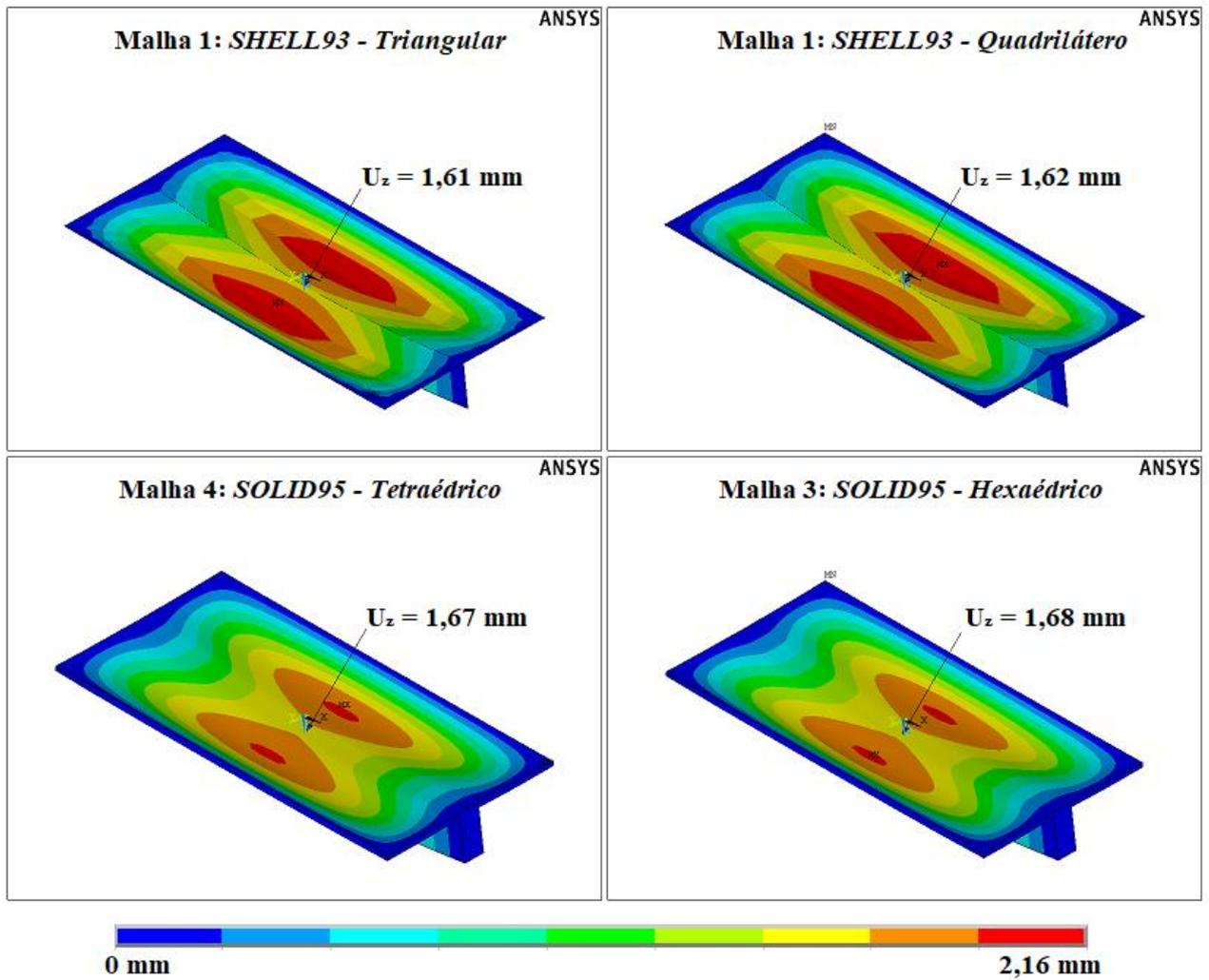


Figura 3.29 – Deformada da placa com um enrijecedor central: $h_s = 2,00 \text{ m}$ (malhas independentes)

4. TEORIA CONSTRUTAL

A Teoria Construtal, desenvolvida por Adrian Bejan, surgiu a partir da observação da complexidade das formas que surgem na natureza. É a visualização de que a geração das configurações geométricas em sistemas de fluxo ou escoamento é um fenômeno físico que não ocorre por acaso, mas baseia-se em um princípio físico denominado Lei Construtal.

De acordo com Bejan (2000), se houvesse um princípio responsável pela geração de todas as formas geométricas da natureza, uma vez que esse princípio se manifestaria em todos os lugares, se tornaria uma lei que ligaria a física à biologia. Esse pensamento explicaria, por exemplo, a organização, a complexidade e a diversidade dos sistemas abertos onde existem fluxos ou escoamentos, seja na natureza ou na engenharia.

Ao se considerar a Teoria Construtal, Bejan e Lorente (2008) mostraram que os fluxos são tratados e configurados como um fenômeno baseado em um princípio científico, de forma que a geometria ali presente representa a capacidade de movimento e luta de um mecanismo, pelo qual o sistema de fluxo ou escoamento alcança o objetivo global sob restrições globais e, por isso, consegue sobreviver no tempo. A forma das seções transversais dos rios e a maneira como as veias se interligam para atingir o pulmão são, por exemplo, determinadas por esse princípio, isto é, existe uma direção para onde os sistemas abertos (vivos) caminham para melhorar seu desempenho.

Considera-se que as melhores configurações que conectam um componente da geometria de fluxo com os demais componentes são em forma de árvore e, por esta razão, arquiteturas de fluxo dendríticas ocupam uma posição de destaque na natureza. As árvores são exemplos onde fluxos ou escoamentos conseguem fazer conexões entre pontos discretos e contínuos de uma geometria. Em outras palavras, entre um ponto e infinitudes de pontos, entre um volume e um ponto, uma área e um ponto, entre uma curva e um ponto, além do fluxo poder emanar em qualquer direção, como de volume-para-ponto ou de ponto-para-volume (BEJAN e LORENTE, 2008; BEJAN e ZANE, 2012).

A Teoria Construtal diz que a geração de formas e evolução física são considerados fenômenos macroscópicos que surgem naturalmente com a finalidade de fornecer condições de fluxo ou escoamento cada vez melhores. A evolução é de caráter multiescalar, de forma que cada componente de um fluxo ou escoamento do sistema evolui de maneira conjunta. Como esses elementos se fundem em estruturas cada vez maiores, uma hierarquia emerge de tal forma que os componentes de tamanho variados conseguem trabalhar juntos para que tudo flua de forma mais fácil. Essa situação é explicitada quando componentes menores de um sistema como riachos, árvores e ruas, se fundem em bacias hidrográficas, florestas e redes de transportes. Além dos

exemplos dados, as redes neurais em um cérebro e os alvéolos pulmonares são também exemplos clássicos de um sistema de ramificação. A Fig. 4.1 compara o delta (a foz) de um rio do Norte da Sibéria com um modelo de um pulmão humano (BEJAN e LORENTE, 2013).

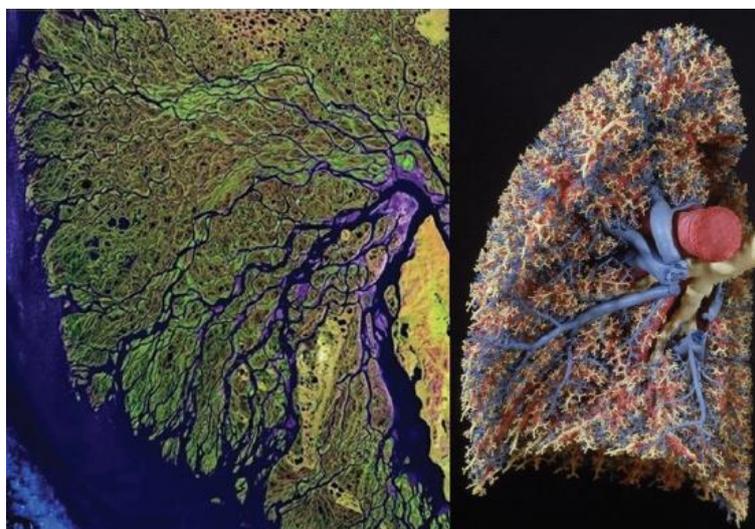


Figura 4.1 – Comparação do design da natureza em uma bacia hidrográfica e um pulmão humano
(Fonte: BEJAN e LORENTE, 2013)

Bejan e Lorente (2008) afirmaram, a partir da Teoria Construtal, que o sistema de fluxo ou escoamento é unicamente destinado a permanecer imperfeito. Sendo assim, a direção da evolução do sistema irá ocorrer no sentido de melhor distribuir essas imperfeições para que todo o corpo fluido escoe de maneira mais fácil. Dessa forma, o fenômeno natural não eliminará as imperfeições, mas irá distribuí-las para gerar a geometria menos imperfeita para o sistema naquele momento, já que ainda permitirá a evolução contínua do mesmo.

De acordo com Reis (2006), a Teoria Construtal conseguiu atrair muitos educadores e pesquisadores de diversas áreas (engenharia, física, sociologia, dentre outras), que passaram a aplicar a Lei Construtal para uma melhor engenharia, além de uma melhor organização de movimentação e conexão de pessoas, produtos e informações.

A aplicação da Teoria Construtal na análise de estruturas mecânicas possui tratamento semelhante ao dado para as configurações de fluxo ou escoamento, uma vez que nas estruturas mecânicas podem ser considerados fluxos de tensões através dos componentes sólidos. A estrutura sólida resultante da aplicação deste princípio é aquela com menos regiões de concentração de tensões, o que é conseguido quando as tensões são distribuídas uniformemente através do material

disponível, de acordo com o princípio que decorre da Lei Construtal (Bejan e Lorente, 2008).

4.1. Lei Construtal

De acordo com Bejan e Lorente (2006), existe um princípio que afirma, a partir de observações comuns, que se um sistema de fluxo, movimento ou escoamento possui liberdade suficiente para alterar a sua configuração, logo o sistema exhibe configurações que dão progressivamente melhores vias de acesso para as correntes que fluem através dele. Este princípio foi formulado em 1996 como a Lei Construtal da geração de configuração de fluxo e evolução, de forma que para um sistema de fluxo ou escoamento finito persistir no tempo, o mesmo deve evoluir de tal modo que proporcione o acesso mais fácil para as correntes que fluem através dele.

A Lei Construtal é então formulada pelo seguinte enunciado (Bejan e Lorente, 2008):

“Para que um sistema de fluxo de tamanho finito persista no tempo (viva), sua configuração (design) deve evoluir livremente no tempo de modo a proporcionar melhores e mais fáceis vias de acessos para às suas correntes (fluido, energia, espécies, etc.).”

Portanto, essa lei é a base para a Teoria Construtal da geração de configuração de fluxo e, segundo Bejan e Lorente (2008), este princípio prevê a forma natural de bacias hidrográficas, a concepção do design animal, engenharia, dinâmicas sociais, dentre outros.

4.2. Método Design Construtal

A aplicação da Lei Construtal se dá através do método Design Construtal, o qual serve para prever muitos fenômenos na natureza e designs em engenharia. Este método é empregado para a obtenção de configurações que aperfeiçoam os sistemas de fluxo ou de escoamento, através da distribuição ótima das imperfeições.

O método Design Construtal guia o projetista no tempo, na direção de arquiteturas de fluxo ou escoamento (fluidos, calor, tensões) que possuam maior desempenho global em condições de acesso específicas. Deve-se ter em mente que a arquitetura descoberta para um conjunto de condições se refere à configuração construtal apenas para estas condições específicas, pois para outro conjunto de condições, ter-se-á nova configuração construtal. Ou seja, a configuração construtal não é universal, não representa a solução para todos os problemas de design, o que é universal é a Lei Construtal e não apenas um de seus designs (Bejan e Lorente, 2008).

Segundo Bejan (2000), o Design Construtal é um método que permite a obtenção de uma geometria que possibilita a melhor performance de sistemas quando submetidos a alguma espécie

de fluxo ou escoamento. Para tal, o fluxo ou escoamento deve ser maleável e a geometria deve ser deduzida visando maximizar o desempenho global. Além disso, deve-se submeter a geometria a restrições globais e a variações de determinados graus de liberdade.

No presente trabalho, o Design Construtal foi aplicado visando a otimização geométrica de placas de aço com enrijecedores submetidas à carga transversal uniformemente distribuída. Através do Design Construtal foi possível definir o espaço de busca, ou em outras palavras, foi possível determinar as diferentes configurações geométricas de placas com enrijecedores a serem estudadas. Então, foi analisado o comportamento mecânico, quanto à deflexão, dessas placas com diferentes configurações geométricas, mas sem alteração do volume total de material empregado na construção das mesmas.

4.3. Busca Exaustiva

Para determinar a geometria ótima com o melhor desempenho dentre todos os arranjos geométricos derivados do método Design Construtal, foi utilizada nessa pesquisa uma técnica de busca por força bruta, também conhecida como Busca Exaustiva.

A técnica de Busca Exaustiva, segundo Khoury e Harder (2016), é um método de pesquisa estocástico simples, funcional e útil. Além disso, sua simplicidade o torna um bom método para a realização de um processo de otimização. O método de Busca Exaustiva refere-se a qualquer algoritmo de busca que sistematicamente analisa possíveis soluções uma após a outra, até que se encontre uma solução que seja aceitável ou até que o número máximo de tentativas atinja o nível predefinido.

Embora a Busca Exaustiva seja pouco sofisticada, ela tem a vantagem de ser capaz de pesquisar qualquer função, mesmo que esta tenha um comportamento complexo, irregular, múltiplos ótimos locais e até mesmo descontinuidades. Não há nesse procedimento nenhuma suposição sobre a característica da função e a sua aplicação não requer nenhum ponto de partida, uma interpolação ou uma derivada, sendo necessário apenas um intervalo de análise. Portanto, esse método pode realizar uma busca e gerar bons resultados em situações de completa ausência de conhecimento (Khoury e Harder, 2016).

4.4. Estudo de caso

Para a aplicação do método Design Construtal no problema de placas com enrijecedores submetidas a carga transversal, toma-se como base uma placa de referência de comprimento a , largura b e espessura t , da qual deve ser retirada uma fração de volume de material ϕ da sua espessura para originar diferentes combinações de enrijecedores longitudinais N_{ls} e transversais N_{ts} ,

com diferentes alturas h_s e espessuras t_s . Dessa forma, novas espessuras t_p dependentes do parâmetro ϕ passam a valer para as placas enrijecidas. A Fig. 4.2 mostra um modelo de uma placa enrijecida, com $N_{ls} = 2$ e $N_{ts} = 3$, onde é possível observar os parâmetros geométricos a serem estudados.

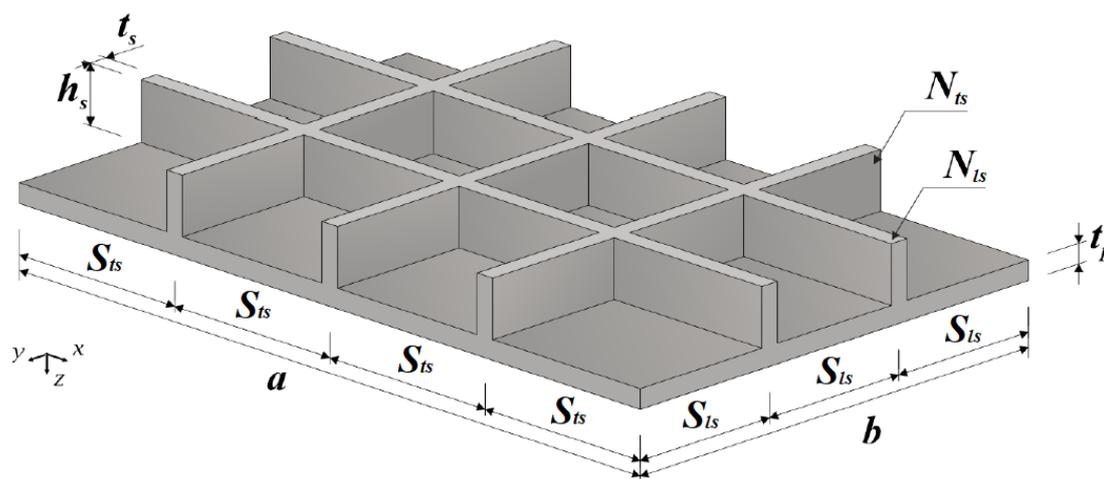


Figura 4.2 – Modelo de placa com enrijecedores longitudinais e transversais: P (2,3)

(Fonte: Adaptada de LIMA, 2016)

A fração de volume de material ϕ retirada da placa de referência para originar os enrijecedores é um parâmetro de restrição do método Design Construtal para cada valor específico de ϕ analisado, mas também pode ser tratada como grau de liberdade do problema ao ser variada. É definida matematicamente por:

$$\phi = \frac{V_s}{V_r} = \frac{N_{ls}(ah_s t_s) + N_{ts}[(b - N_{ls}t_s)h_s t_s]}{abt} \quad (4.1)$$

onde V_s é o volume da placa transformado em reforços e V_r é o volume da placa não enrijecida utilizada como referência.

Tendo em vista que a largura e o comprimento da placa são, via de regra, dados de projeto, a fração de volume a ser convertida em enrijecedores será deduzida integralmente da espessura da placa de referência. Dessa forma, todas as placas analisadas possuem mesma largura e comprimento e todos os arranjos geométricos possuem a mesma quantidade de material, possibilitando uma avaliação comparativa entre eles. A manutenção da mesma quantidade de material em todas as

placas é a principal restrição aplicada nessa pesquisa por meio do Design Construtal.

Após definida uma fração volumétrica ϕ para análise, os graus de liberdade que surgem devido à aplicação do Design Construtal nesse problema são: a relação h_s/t_s e a quantidade de enrijecedores longitudinais N_{ls} e transversais N_{ts} . Cabe informar que todos os enrijecedores apresentam seção transversal retangular, mesma altura nas direções longitudinal e transversal e espaçamentos longitudinais S_{ls} e transversais S_{ts} equidistantes, dados por:

$$S_{ls} = \frac{b}{(N_{ls} + 1)} \quad (4.2)$$

$$S_{ts} = \frac{a}{(N_{ts} + 1)} \quad (4.3)$$

Para cada ϕ , foram analisadas placas formadas por 25 combinações de enrijecedores longitudinais e transversais, obedecendo o formato $P(N_{ls}, N_{ts})$ através da variação dos seguintes graus de liberdade: $N_{ls} = 2, 3, 4, 5, 6$ e $N_{ts} = 2, 3, 4, 5, 6$. Foram adotados valores comerciais de espessura de chapas de aço para as espessuras utilizadas nos enrijecedores, portanto, a altura dos enrijecedores h_s e, conseqüentemente, a relação h_s/t_s deriva de valores de espessura t_s previamente estabelecidos.

As diferentes alturas de enrijecedor h_s para os diferentes arranjos geométricos foram obtidas pela Eq. (4.1). No entanto, só foram simulados os casos em que a altura dos enrijecedores não violou as seguintes restrições geométricas: $h_s \leq 0,3$ m (para evitar uma desproporção exagerada entre a altura do enrijecedor e as dimensões laterais da placa) e $h_s/t_s \geq 1$ (para evitar que a espessura do enrijecedor fosse maior que sua altura, o que descaracterizaria o reforço que, em geral, deve possuir altura maior que a sua espessura).

Para gerar os resultados dessa pesquisa, adotou-se uma placa de referência com espessura de 20 mm, largura 1 m e comprimento 2 m. As frações volumétricas adotadas foram $\phi = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$ e $0,5$. Quanto ao material das placas, foram utilizados módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson, respectivamente, iguais a 200 GPa e 0,3. Todas as placas foram simuladas com condições de contorno de apoio simples em todas as suas quatro bordas (incluindo as bordas dos enrijecedores) e submetidas a um carregamento uniformemente distribuído de 10 kN/m². A Fig. 4.3 apresenta, esquematicamente, as configurações geométricas geradas pela aplicação do Design Construtal, as quais foram, posteriormente, simuladas através do software ANSYS®.

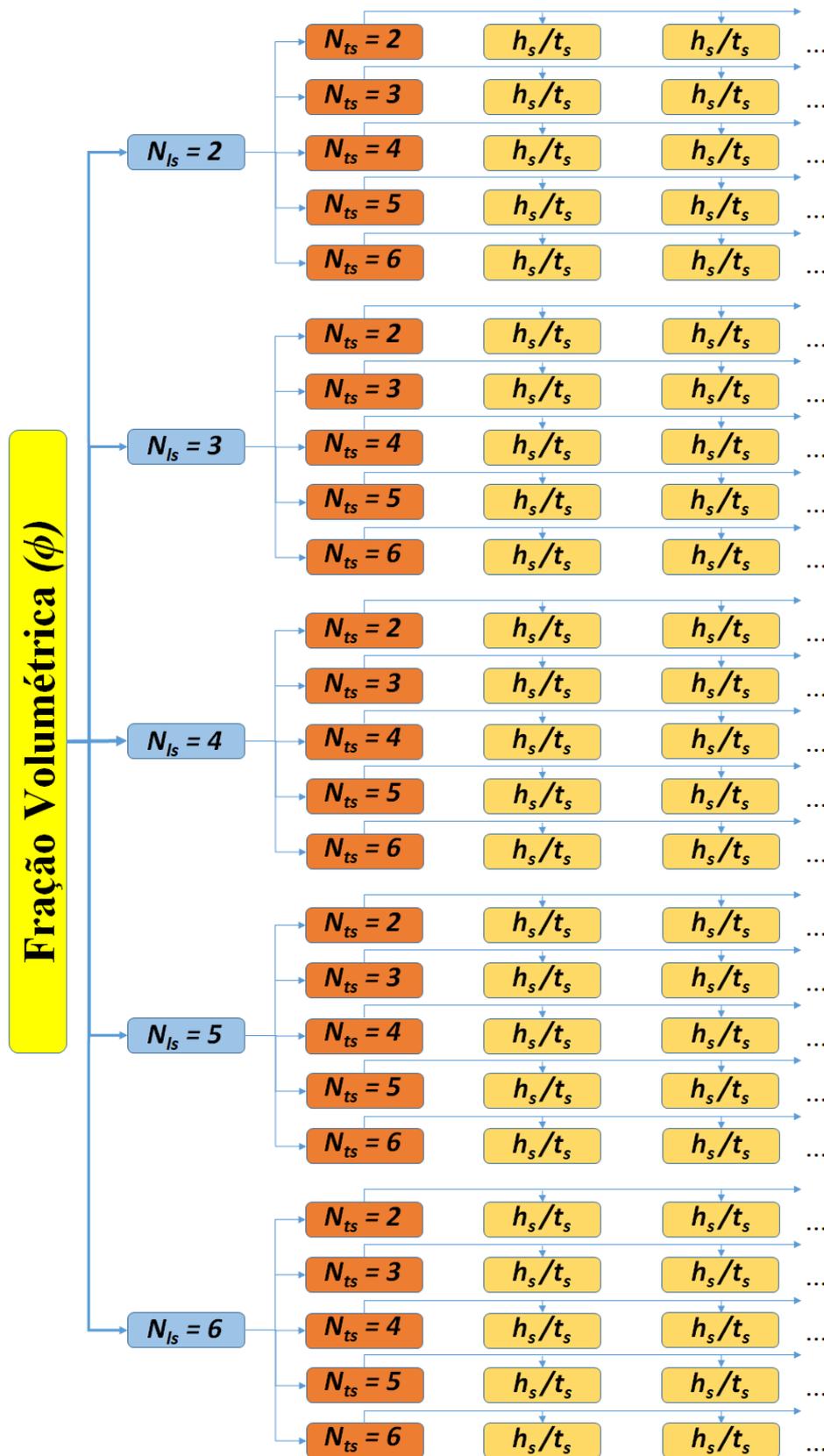


Figura 4.3 – Configurações geométricas geradas pela aplicação do Design Construtal

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Como mencionado anteriormente, uma placa não enrijecida de espessura $t = 20$ mm, largura $b = 1$ m e comprimento $a = 2$ m foi adotada como referência para essa pesquisa, sendo essa placa constituída de um aço com módulo de elasticidade $E = 200$ GPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. As condições de contorno aplicadas às bordas foram apoios simples, incluindo as bordas dos enrijecedores no caso das placas enrijecidas e a carga distribuída uniforme no valor de 10 kN/m². Os elementos finitos utilizados nas análises numéricas, via *ANSYS*[®], foram o elemento bidimensional *SHELL93 – Quadrilátero* e o elemento tridimensional *SOLID95 – Hexaédrico*.

5.1. Teste de Convergência de Malhas

Já que o refinamento da malha adotado em simulações, via elementos finitos, é uma das maiores fontes de erros em análises numéricas, faz-se necessário a realização de testes de convergência de malha (testes de independência de malha). Esse tipo de teste tem como objetivo avaliar a influência do refinamento da malha adotado na magnitude e variabilidade dos resultados obtidos. Dessa forma, esse teste é útil para a determinação de tamanhos de elementos adequados que reduzam, ao mínimo possível, os erros decorrentes de uma discretização mal implementada.

Para a determinação do refinamento adequado das malhas a serem utilizadas nas simulações numéricas, foram realizados testes de convergência de malha para cada parâmetro ϕ (fração volumétrica). Foram adotadas as geometrias mais complexas para a realização dos testes de malha, ou seja, as placas com configuração P (6,6) e menor espessura de enrijecedor. Além disso, foram aplicadas as mesmas condições de contorno e carregamento a serem empregadas para todas as demais placas analisadas nessa pesquisa, a saber, bordas simplesmente apoiadas e carga uniformemente distribuída de 10 kN/m², conforme mostra a Fig. 5.1.

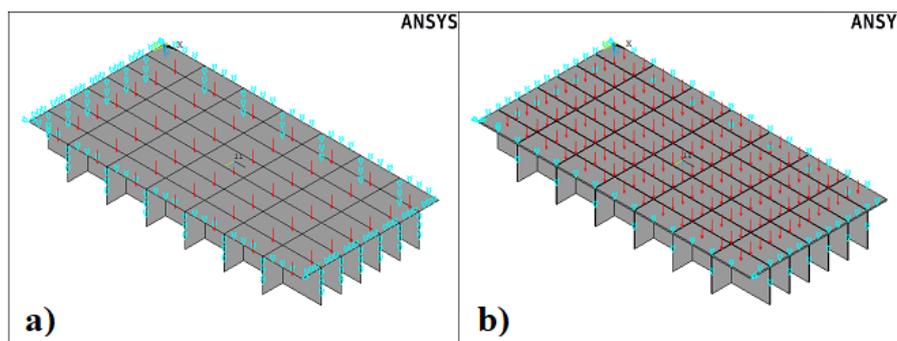


Figura 5.1 – Modelo para teste de convergência de malhas: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

Para a realização dos testes foram utilizadas 4 malhas (M1, M2, M3 e M4), sendo o tamanho do elemento de cada malha baseado em uma fração da largura da placa, conforme a legenda da Fig. 5.2. Considerando as simulações apresentadas nos gráficos da Fig. 5.2, observa-se em todos os casos de fração volumétrica avaliados uma estabilização dos resultados a partir da malha M3 para ambos os tipos de elementos *SHELL93* e *SOLID95*.

Portanto, as malhas utilizadas para gerar os resultados dessa pesquisa consideraram o tamanho máximo de elemento correspondente ao tamanho da malha M3, ou seja, 1/60 da largura da placa (aproximadamente 16,67 mm). A Fig. 5.3 mostra a discretização da placa P (6,6) utilizando elemento correspondente à malha independente M3, para o caso de fração volumétrica $\phi = 0,5$.

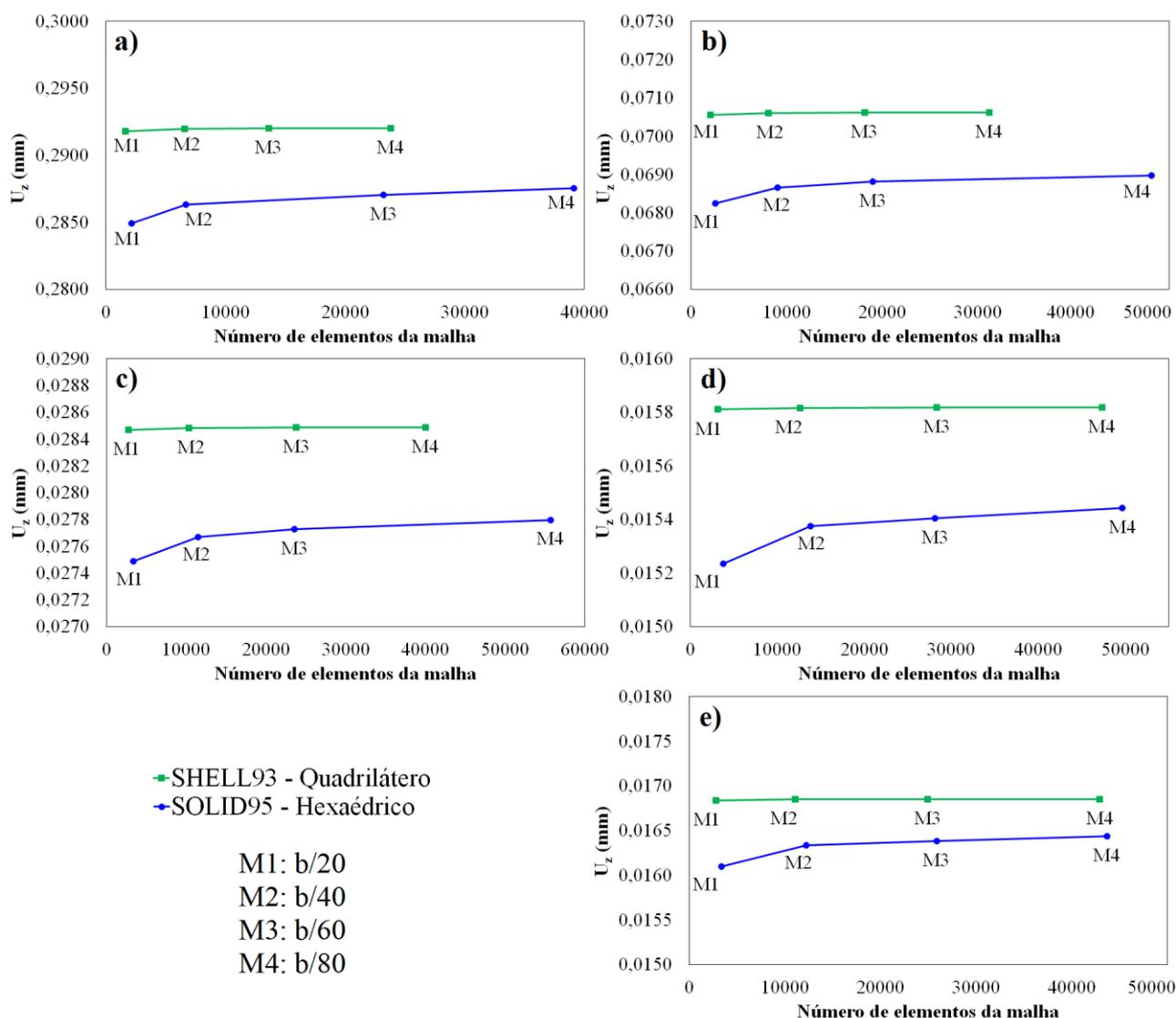


Figura 5.2 – Convergência de malhas: a) $\phi = 0,1$; b) $\phi = 0,2$; c) $\phi = 0,3$; d) $\phi = 0,4$ e e) $\phi = 0,5$

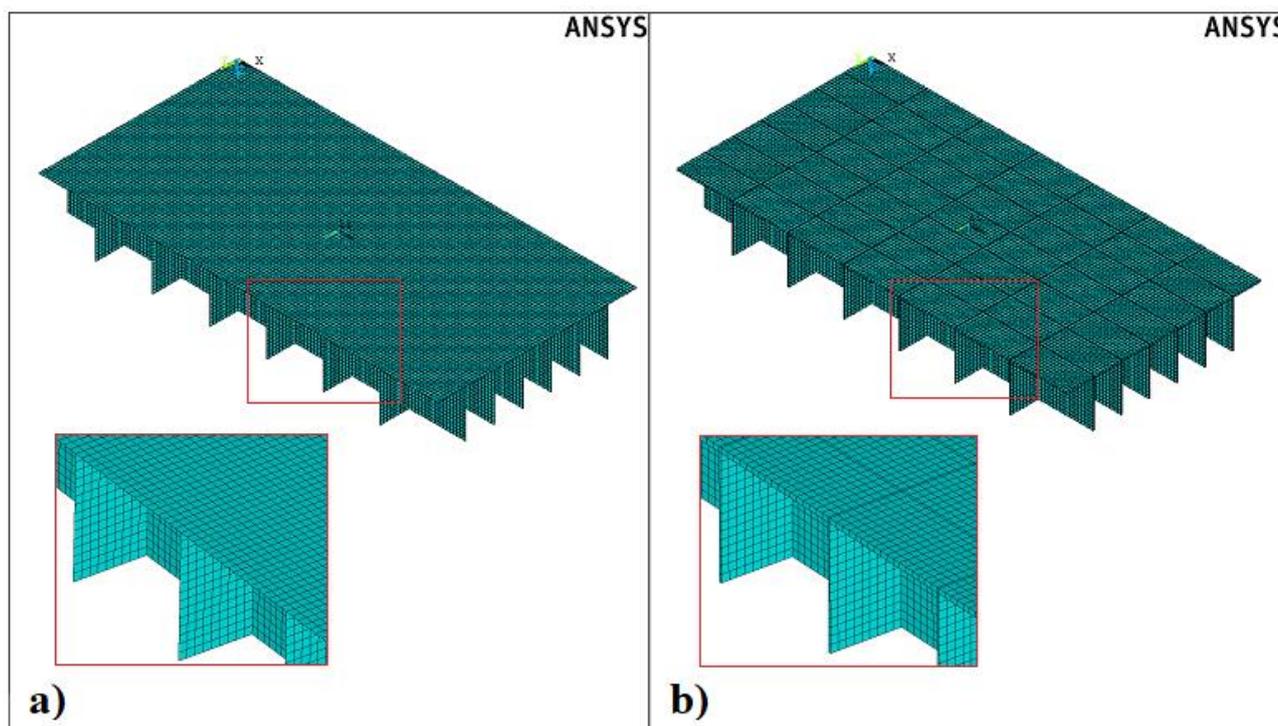


Figura 5.3 – Malha independente para fração volumétrica $\phi = 0,5$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

5.2. Análise para a fração volumétrica $\phi = 0,5$

Os resultados foram primeiramente gerados para o parâmetro $\phi = 0,5$. Isso significa que metade da espessura da placa foi convertida em enrijecedores seguindo as diversas combinações P (N_{ls} , N_{ts}) apresentadas na Fig. 4.3. Foram utilizados valores comerciais de chapas de aço variando de 1/8 pol (3,18 mm) a 3 pol (76,20 mm) para a espessura dos enrijecedores, de forma que para cada combinação P (N_{ls} , N_{ts}) obtiveram-se ainda diferentes configurações devido à variação do grau de liberdade h_s/t_s . Vale lembrar que as configurações com altura de enrijecedor maior que 0,3 m ou com relação h_s/t_s menor que 1 foram descartadas, pelos motivos explicados no capítulo anterior.

Após a simulação numérica de todas as configurações de placas enrijecidas, foram gerados gráficos de dispersão de pontos com os valores das deflexões no centro das placas para cada combinação P (N_{ls} , N_{ts}), em função da variação do grau de liberdade h_s/t_s . Notou-se que a simples transformação de parte do material da placa de referência em enrijecedores melhorou o comportamento mecânico quanto à deflexão de todas as placas enrijecidas, já que todas as configurações analisadas apresentaram deflexão menor em relação à placa não enrijecida ($U_{zr} = 0,698$ mm – obtida pela Eq. (2.46) de TIMOSHENKO E KRIEGER, 1959). Observou-se, através dos gráficos das Figs. 5.4 a 5.8, que mesmo a pior geometria, no caso a P (6,2) com $h_s/t_s = 1,02$,

apresentou resultado de deflexão $U_z = 0,443$ mm (modelo *SHELL93*) 36,53 % menor que a deflexão obtida para a placa de referência.

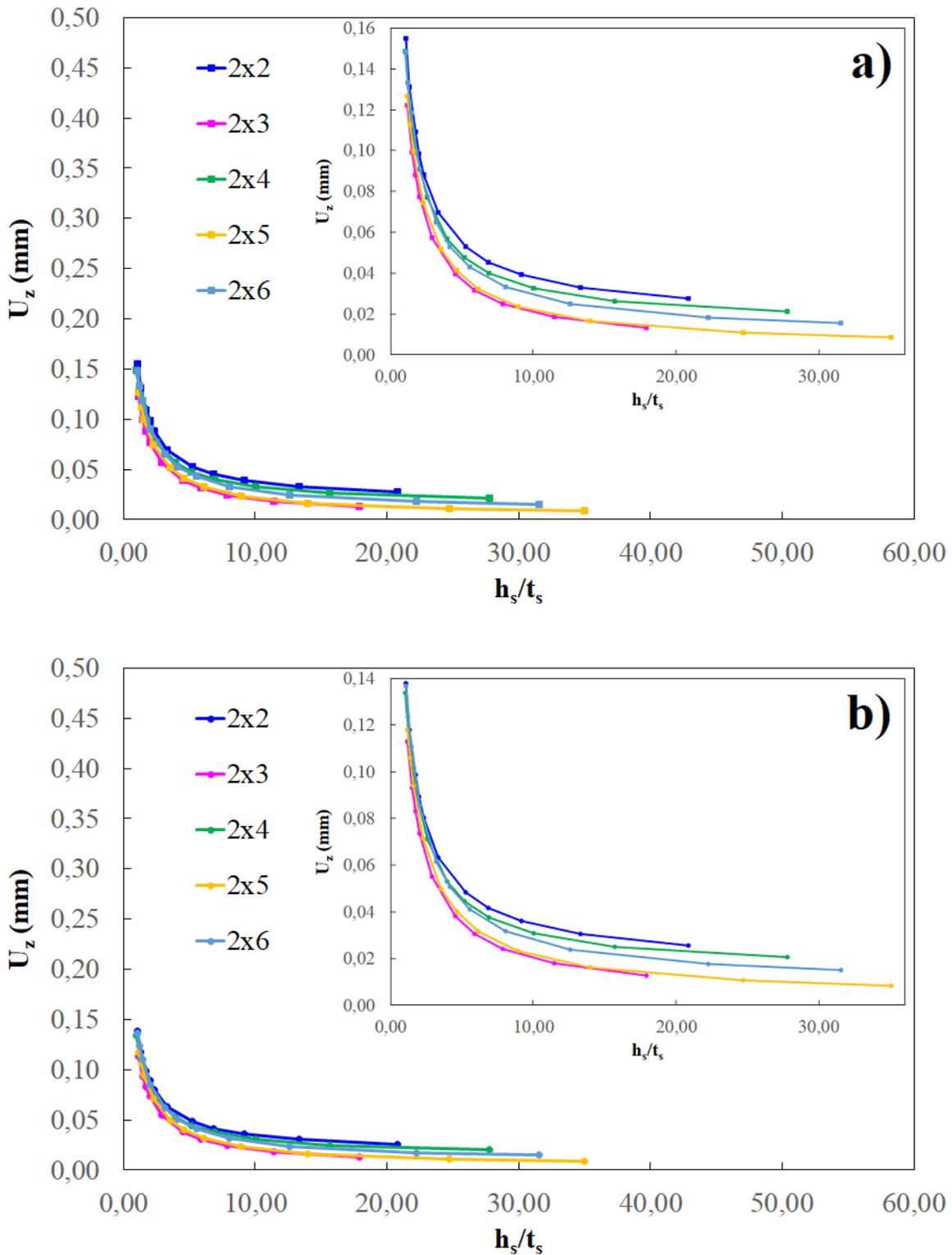


Figura 5.4 – Deflexão central para $\phi = 0,5$ e $N_{Is} = 2$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

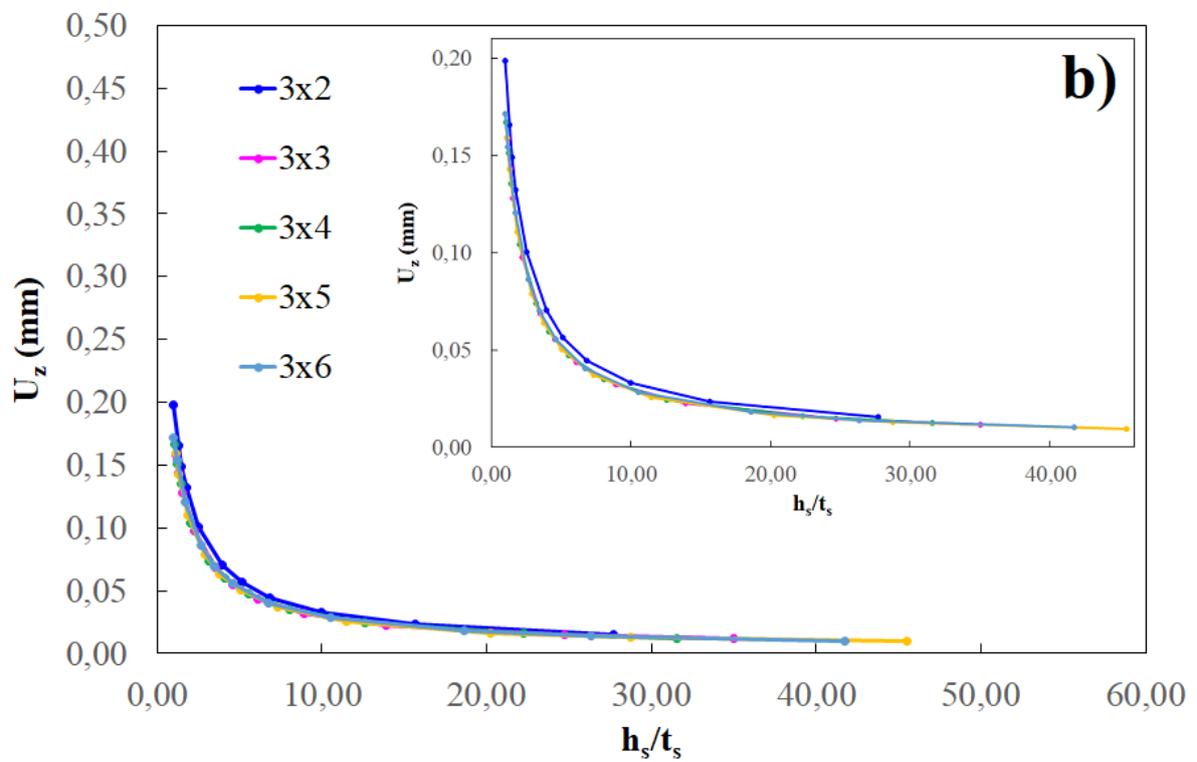
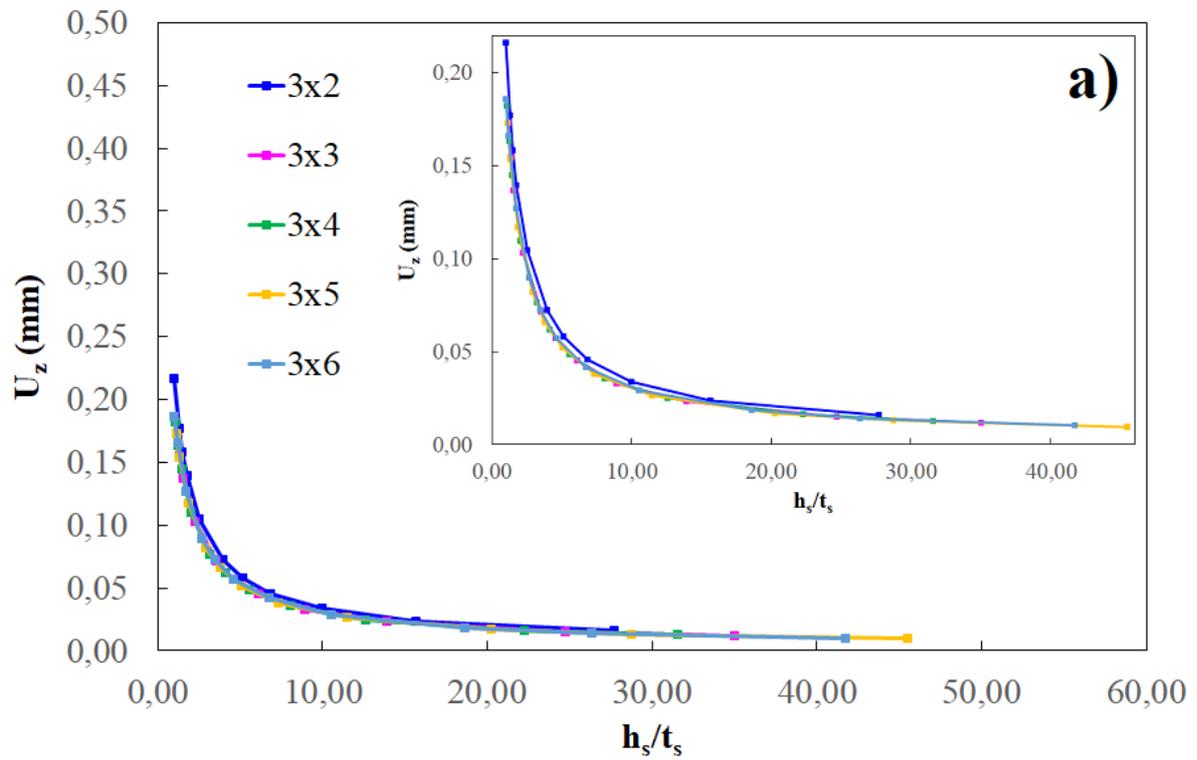


Figura 5.5 – Deflexão central para $\phi = 0,5$ e $N_{ls} = 3$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

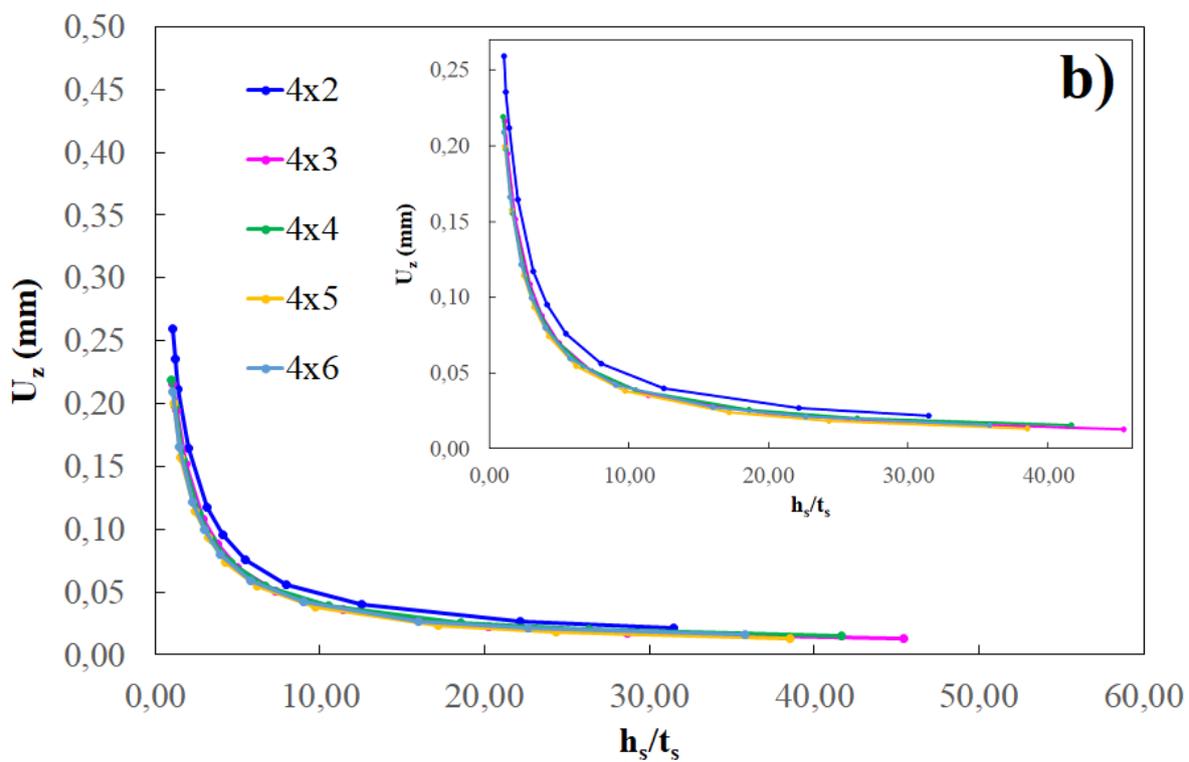
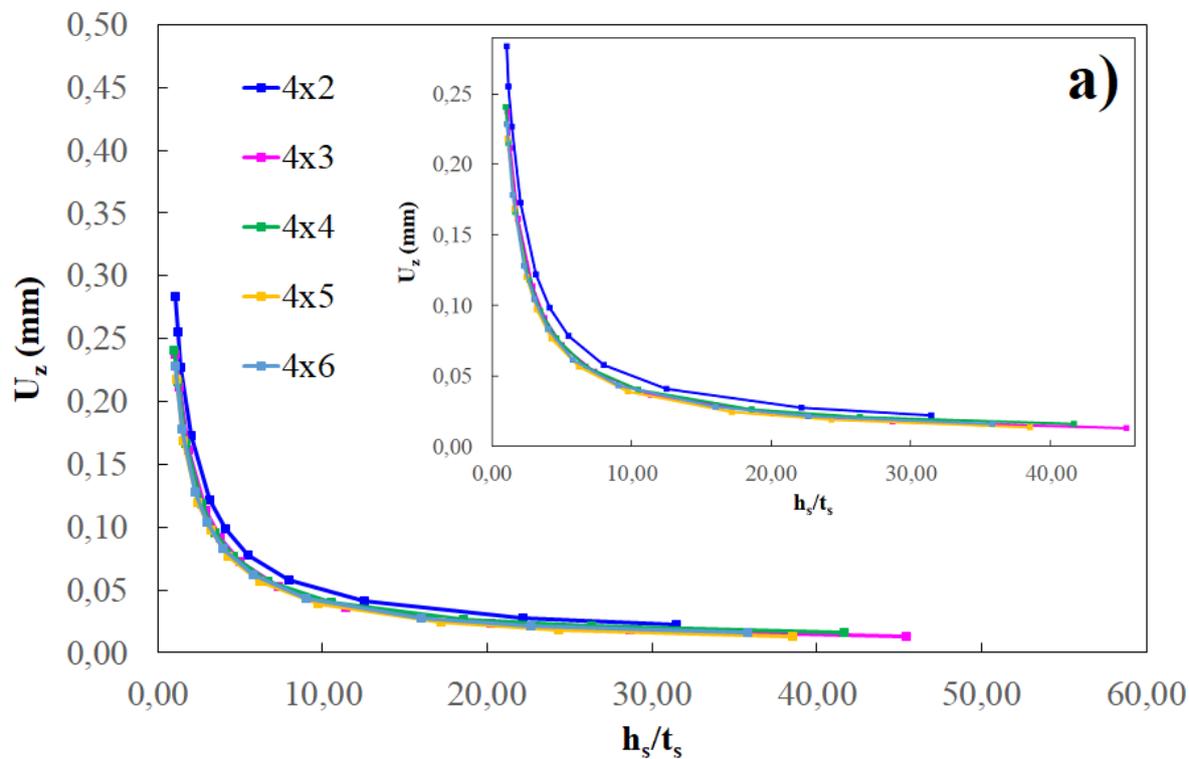


Figura 5.6 – Deflexão central para $\phi = 0,5$ e $N_{ls} = 4$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

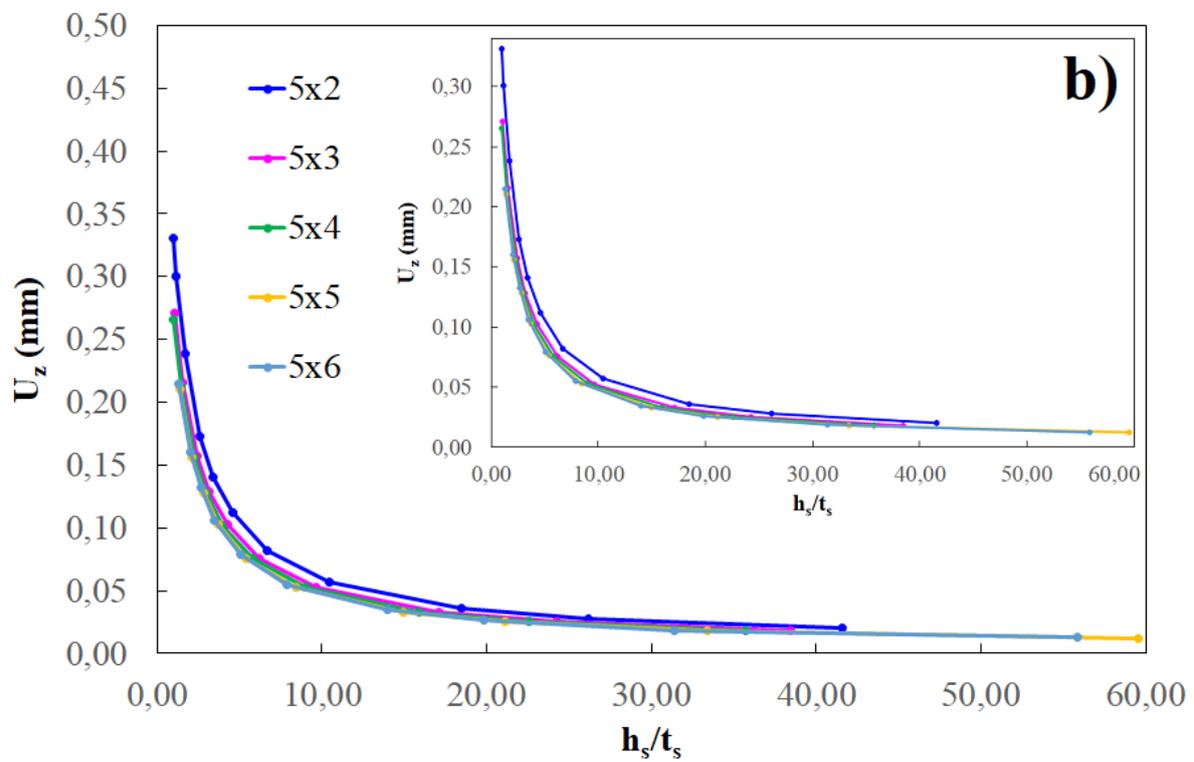
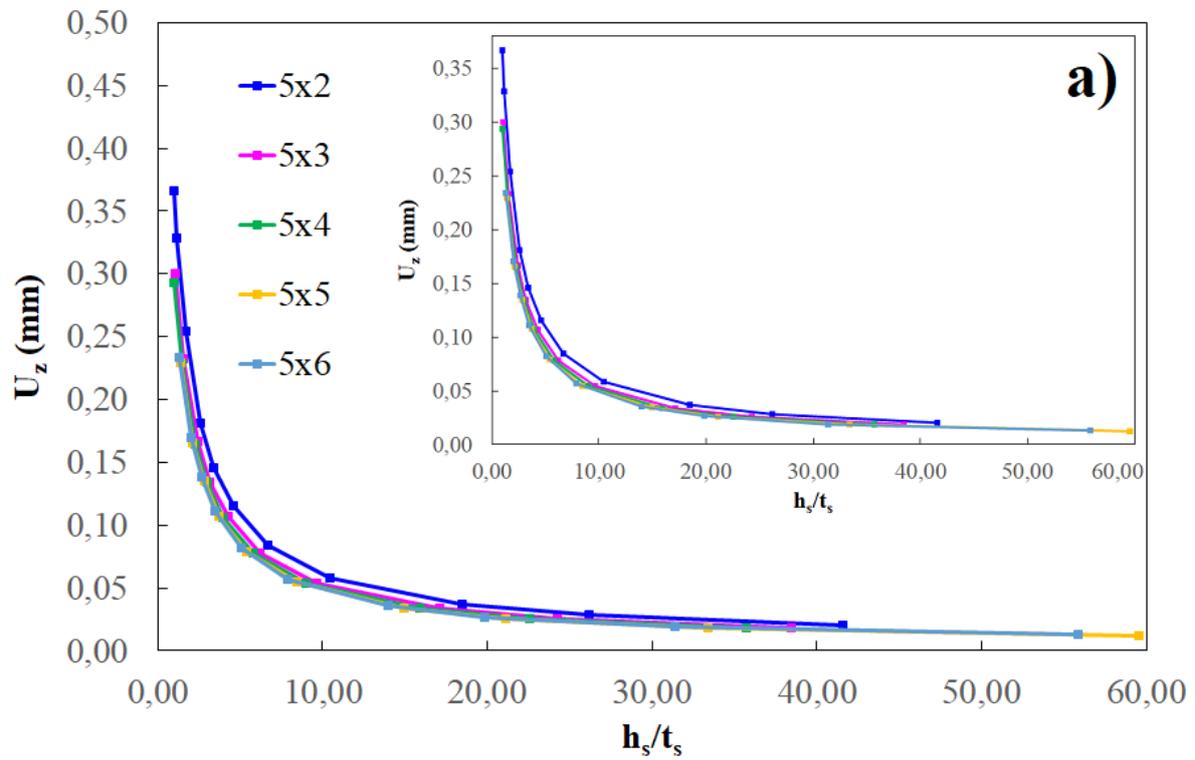


Figura 5.7 – Deflexão central para $\phi = 0,5$ e $N_{ls} = 5$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

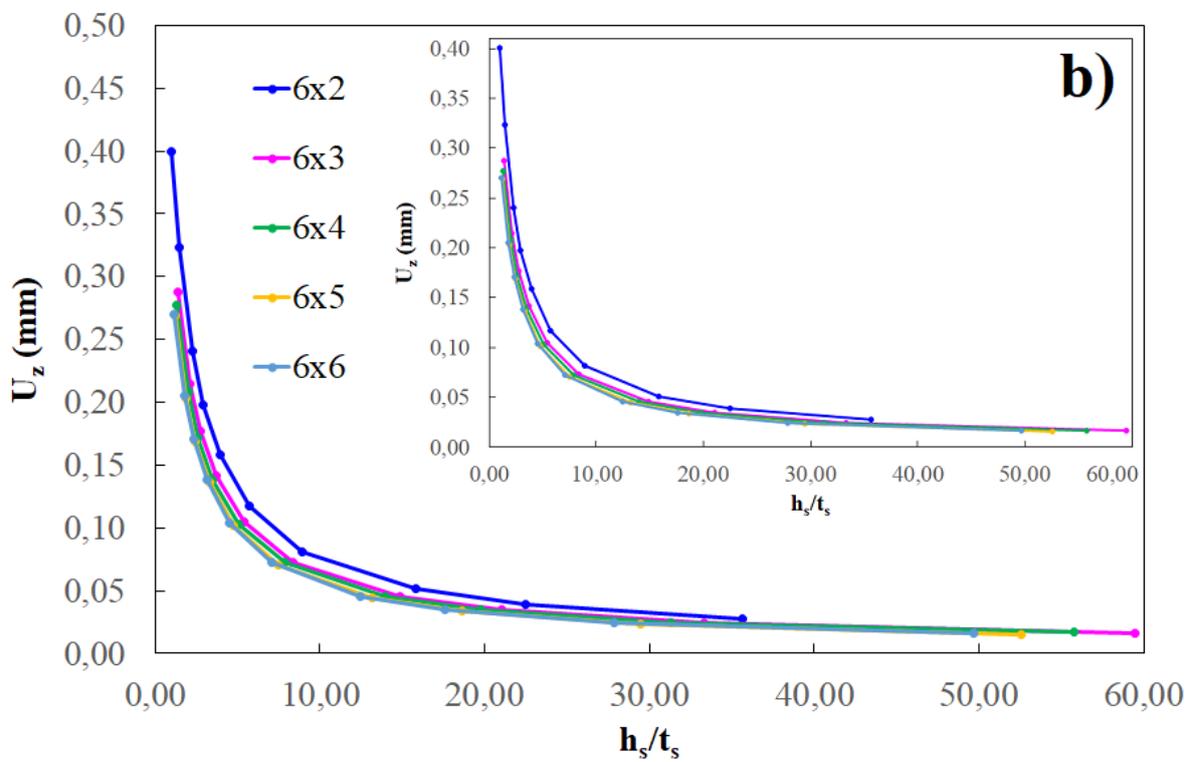
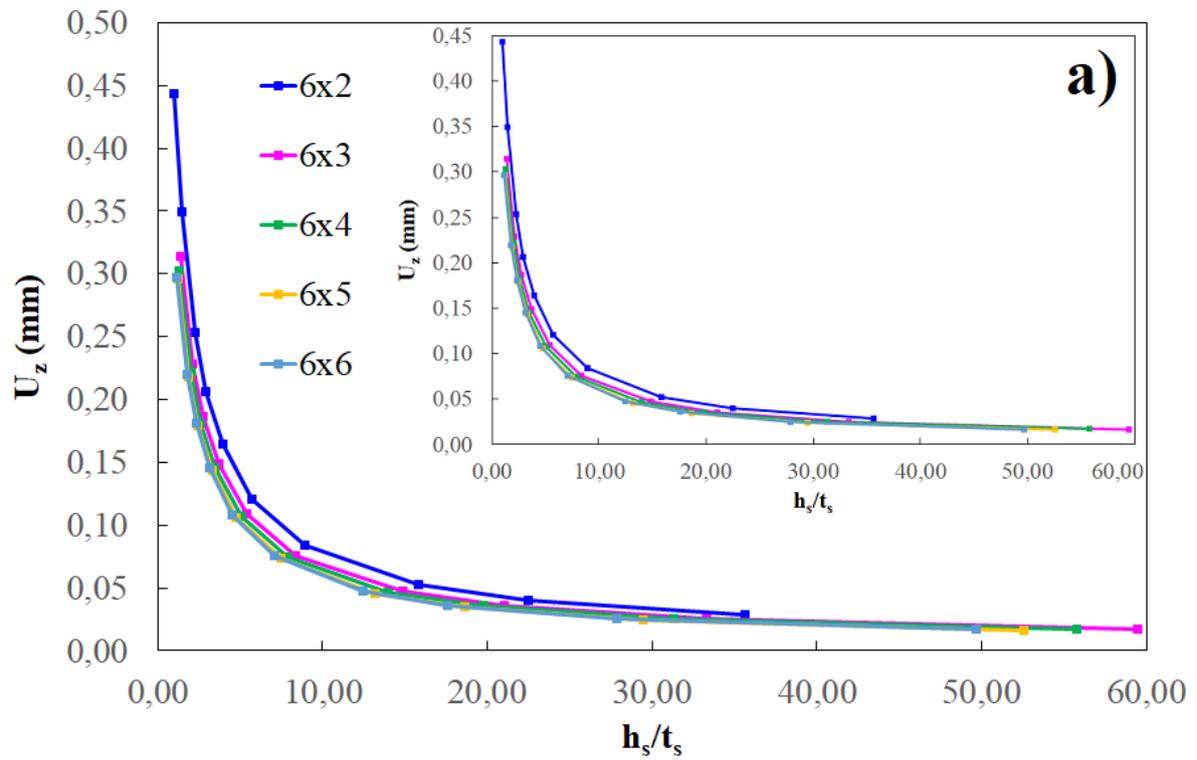


Figura 5.8 – Deflexão central para $\phi = 0,5$ e $N_{ls} = 6$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

Através dos gráficos apresentados nas Figs 5.4 a 5.8, percebeu-se que o aumento da relação h_s/t_s provocava uma redução no valor de deslocamento central das placas U_z , o que pode ser explicado pelo aumento do momento de inércia da seção transversal das novas estruturas formadas. A partir daí foi possível ajustar curvas de potência aos resultados gráficos conforme a Eq. (5.1), as quais descreveram matematicamente e com boa acurácia essa relação entre deflexão central U_z e a relação h_s/t_s . Para exemplificar os ajustes de curvas realizados, é apresentado na Fig. 5.9 um gráfico com a equação das curvas de potência que melhor se adequam aos resultados de deflexão central obtidos para as placas P (6,2) e P (6,5), com $\phi = 0,5$ e modelo *SHELL93 - Quadrilátero*.

$$U_z = C1 \left(\frac{h_s}{t_s} \right)^{C2} \quad (5.1)$$

onde $C1$ e $C2$ são constantes que dependem da quantidade de enrijecedores longitudinais N_{ls} e transversais N_{ts} .

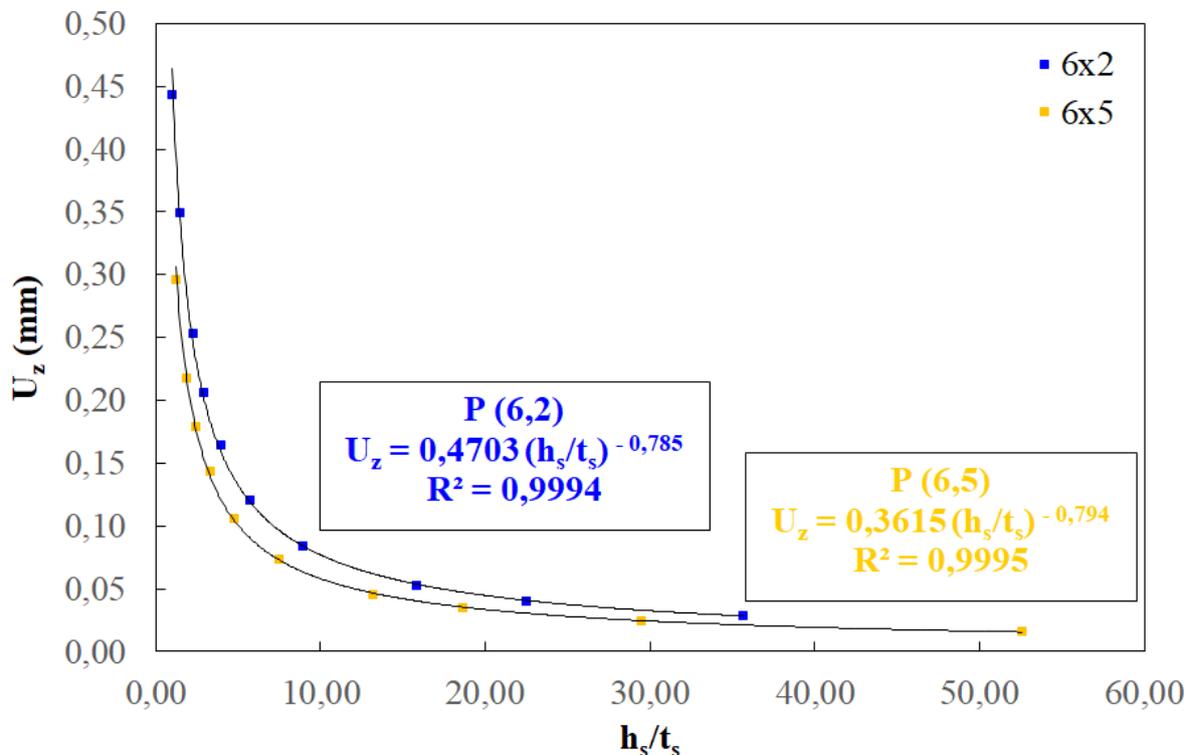


Figura 5.9 – Ajuste de curva para P (6,2) e P (6,5): $\phi = 0,5$ e modelo *SHELL93*

Além das equações das curvas de potência, o gráfico da Fig. 5.9 apresenta os valores para os coeficientes de determinação R^2 de cada ajuste. Tal coeficiente é um parâmetro cujo valor varia entre 0 e 1 e indica a qualidade do ajuste, ou seja, quanto mais próximo o R^2 for da unidade, maior a proximidade da curva em relação aos pontos ajustados. Nos dois casos apresentados, as placas P (6,2) e P (6,5) tiveram ajustes com qualidade superior a 99 %.

No Apêndice C, são apresentadas as tabelas com todos os valores de $C1$, $C2$ e R^2 referentes às curvas ajustadas para todos os resultados gerados nessa pesquisa, assim como o intervalo do grau de liberdade h_s/t_s utilizado nas simulações numéricas para a obtenção dos pontos que geraram essas curvas. É importante salientar que todos os valores de $C2$ apresentaram sinal negativo, corroborando justamente o comportamento observado no gráfico da Fig. 5.9 de diminuição da deflexão central das placas conforme se aumentava a relação h_s/t_s .

Outro ponto importante é que ao comparar os resultados, por exemplo, da placa P (6,2) com $h_s/t_s = 35,62$ e P (6,2) com $h_s/t_s = 1,02$, foi observada uma redução de quase 94 % em termos de deslocamento transversal do ponto central da placa. Vale lembrar que a aplicação do Design Construtal implicou em um volume total constante de aço empregado na construção das placas, portanto, esse considerável ganho de rigidez estrutural ocorreu apenas devido à influência da variação da geometria, por causa de uma melhor distribuição do material ao longo da estrutura.

O método Design Construtal permitiu avaliar a influência de todos os parâmetros geométricos (graus de liberdade) no comportamento mecânico quanto à deflexão das placas enrijecidas sob análise. Dessa forma os graus de liberdade N_{ls} , N_{ts} e h_s/t_s foram avaliados com o objetivo de encontrar a menor deflexão central dentre todos os arranjos geométricos estudados, para cada fração volumétrica ϕ adotada. Para isso, foram inicialmente determinadas as relações h_s/t_s ótimas, chamadas $(h_s/t_s)_o$, isto é, as relações h_s/t_s que minimizaram pela primeira vez as deflexões no centro das placas para cada combinação $P(N_{ls}, N_{ts})$. As deflexões minimizadas apenas uma vez em relação ao grau de liberdade h_s/t_s foram chamadas $(U_z)_m$.

O gráfico da Fig. 5.10 mostra os deslocamentos centrais das placas enrijecidas minimizados pelo primeiro critério $(U_z)_m$, considerando cada combinação de número de enrijecedores longitudinais N_{ls} e número de enrijecedores transversais N_{ts} .

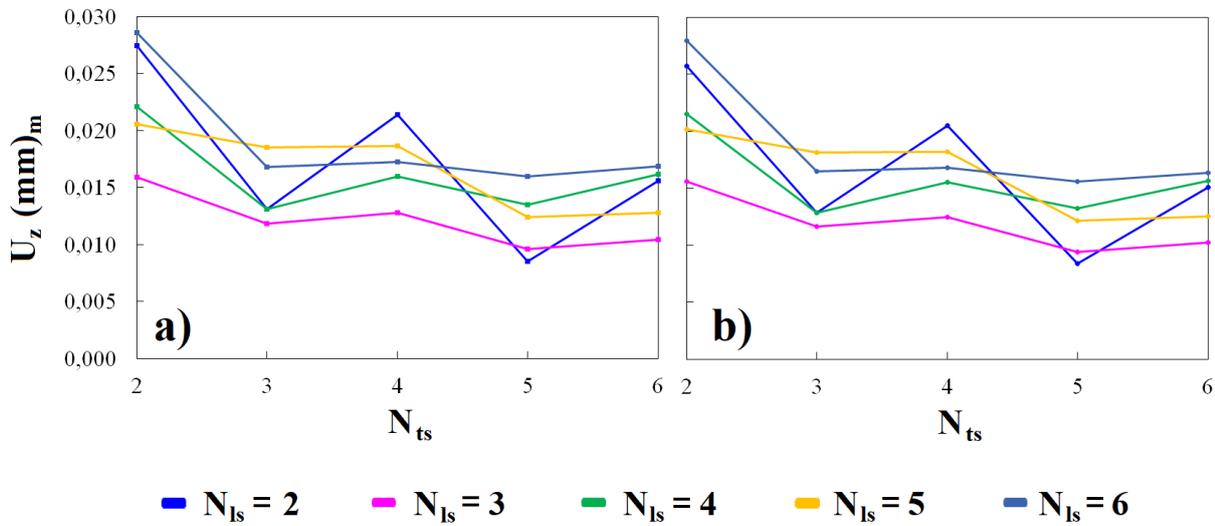


Figura 5.10 – Influência da variação do N_{ts} no valor de $(U_z)_m$ para $\phi = 0,5$ e $N_{ls} = 2$ a 6: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

Através da Fig. 5.10, percebeu-se que um aumento na quantidade de enrijecedores nem sempre proporcionava um aumento da rigidez da placa. Ao manter-se o volume de material constante, o aumento de enrijecedores diminuía a quantidade de material a ser empregada na altura dos reforços, o que também diminuía o momento de inércia da seção transversal e, conseqüentemente, reduzia a rigidez. Outra importante observação é que os resultados apresentaram um comportamento oscilatório conforme se aumentava o número de enrijecedores transversais (N_{ts}), ou seja, placas com quantidade ímpar de enrijecedores transversais apresentaram melhores resultados quando comparadas às que possuíam quantidade par. Essa tendência pode ser explicada pelo fato das placas com quantidade ímpar de enrijecedores possuírem um enrijecedor localizado exatamente na linha central que divide as placas pela metade, o que reduzia, portanto, a deflexão no centro geométrico dessas configurações.

A Tabela 5.1 apresenta, para ambos os modelos (*SHELL93* e *SOLID95*) e para cada valor (N_{ls}), a geometria otimizada pela segunda vez em função da quantidade de enrijecedores transversais (N_{ts}). Nesse caso, o valor ótimo de (N_{ts}) passou a ser denominado de $(N_{ts})_o$, que representa a quantidade de enrijecedores transversais que minimizou pela segunda vez a deflexão transversal no centro da placa, então chamada de $(U_z)_{mm}$. Conseqüentemente, a relação $(h_s/t_s)_{oo}$ duas vezes otimizada foi também definida.

Tabela 5.1. Valores de $(N_{ts})_o$, $(h_s/t_s)_{oo}$ e $(U_z)_{mm}$ para cada N_{ts} com $\phi = 0,5$

N_{ts}	$(N_{ts})_o$	t_s (mm)	h_s (mm)	$(h_s/t_s)_{oo}$	$(U_z)_{mm}$ (mm) <i>SHELL93</i>	$(U_z)_{mm}$ (mm) <i>SOLID95</i>
2	5	8,00	280,27	35,03	0,0086	0,0084
3	5	6,35	288,83	45,48	0,0096	0,0094
4	3	6,35	288,33	45,41	0,0132	0,0129
5	5	4,75	282,94	59,57	0,0124	0,0121
6	5	4,75	249,77	52,58	0,0160	0,0156

Notou-se, pela Tab. 5.1, que os deslocamentos $(U_z)_{mm}$ tenderam a valores mais elevados quando se aumentava o grau de liberdade N_{ts} . Isso ocorreu justamente por causa da aplicação do método Design Construtal, que impôs a restrição de volume de material constante para a fabricação de todas as configurações geométricas analisadas. Mantendo o volume constante, um aumento no número de enrijecedores longitudinais N_{ts} acarretava em um maior uso da porção de material para formação da quantidade de reforços da estrutura, ocasionando a diminuição da altura dos reforços e refletindo diretamente no momento de inércia e rigidez do conjunto.

Ao considerar todas as análises realizadas, finalmente foi encontrada a geometria que apresentou a melhor performance em termos de deslocamentos, para a fração volumétrica $\phi = 0,5$ adotada. A configuração geométrica $P(2,5)$ (em destaque na Tab. 5.1), definida pela relação $(h_s/t_s)_{ooo} = 35,03$ três vezes otimizada, $(N_{ts})_{oo} = 5$ duas vezes otimizado e $(N_{ts})_o = 2$ uma vez otimizado, apresentou o menor deslocamento central três vezes minimizado $(U_z)_{mmm} = 0,0086$ mm para as simulações realizadas com o elemento *SHELL93* e $(U_z)_{mmm} = 0,0084$ mm para as simulações realizadas com o elemento *SOLID95*.

Observou-se que ganhos de performance estrutural consideráveis puderam ser alcançados ao se trabalhar na configuração geométrica de estruturas de placas enrijecidas. Para o parâmetro $\phi = 0,5$, por exemplo, houve uma redução na deflexão transversal do centro da placa de 98,77 % em relação à deflexão da placa sem enrijecedores utilizada como referência. Em outras palavras, o deslocamento obtido para a placa enrijecida otimizada foi em torno de 81 vezes menor quando comparado ao deslocamento obtido para a placa de referência sem reforços (a deflexão no centro da placa enrijecida otimizada correspondeu a apenas 1,23 % da deflexão obtida no centro da placa de referência).

A configuração deformada e a distribuição de tensões de von Mises da placa enrijecida otimizada $P(2,5)$ são apresentadas para os elementos *SHELL93* e *SOLID95* nas Figs. 5.11 a 5.13. As tensões de von Mises com valores abaixo do limite de escoamento (250 MPa), tanto para o modelo com elementos *SHELL93*, como para o modelo com *SOLID95*, indicaram que as análises realizadas ocorreram dentro do regime elástico de tensões e deformações.

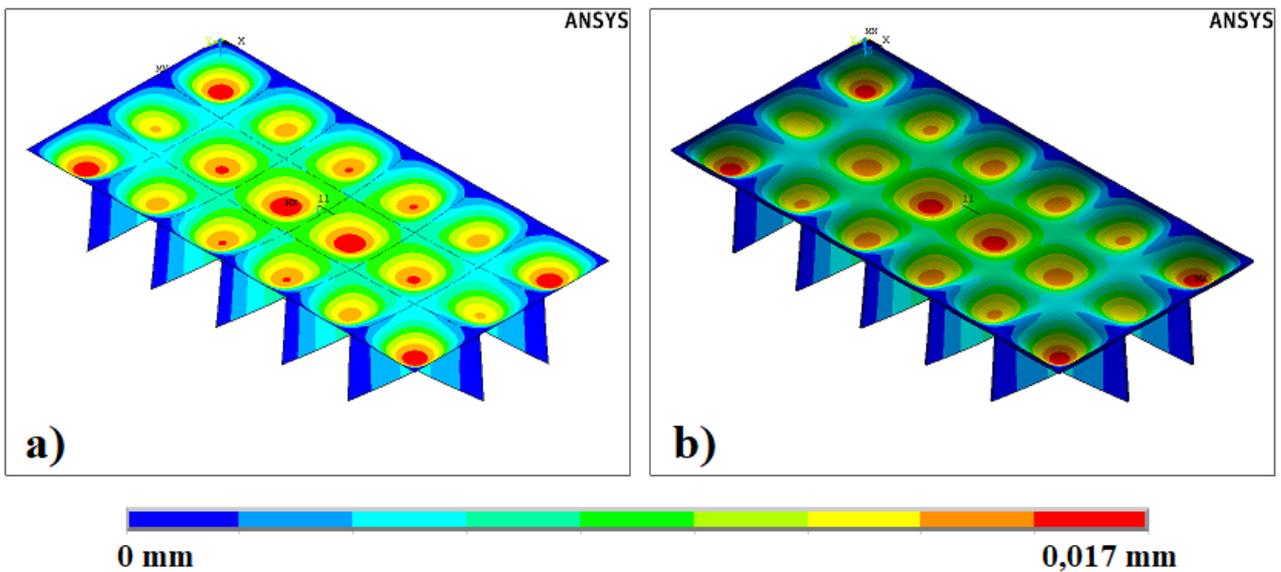


Figura 5.11 – Deformada da placa otimizada para $\phi = 0,5$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

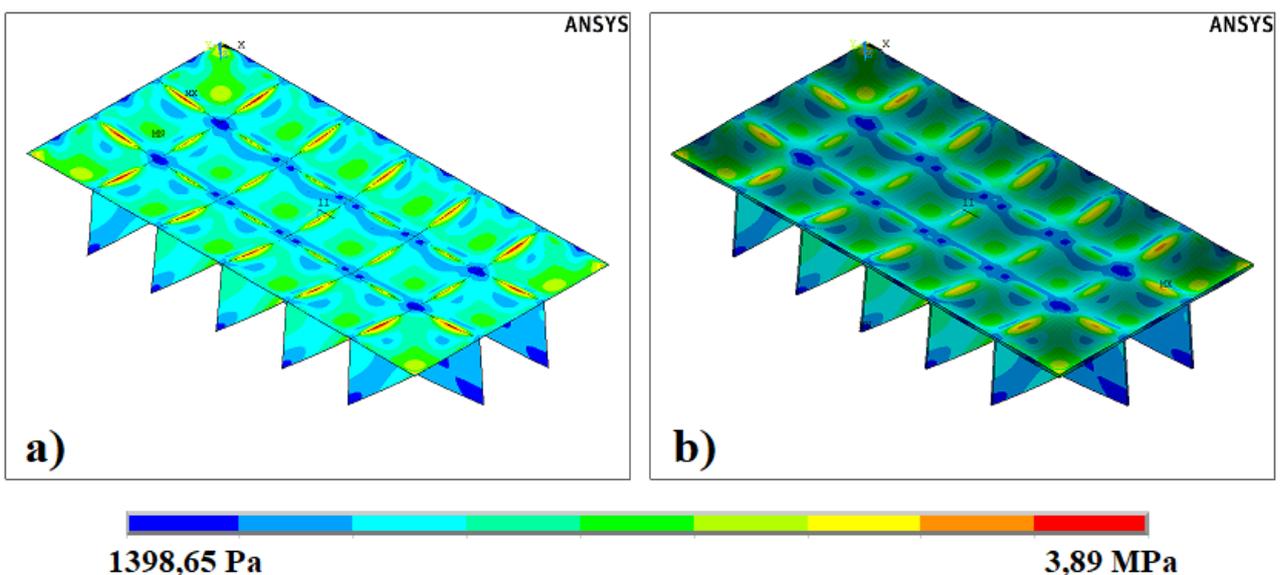


Figura 5.12 – Tensões de von Mises na parte superior para $\phi = 0,5$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

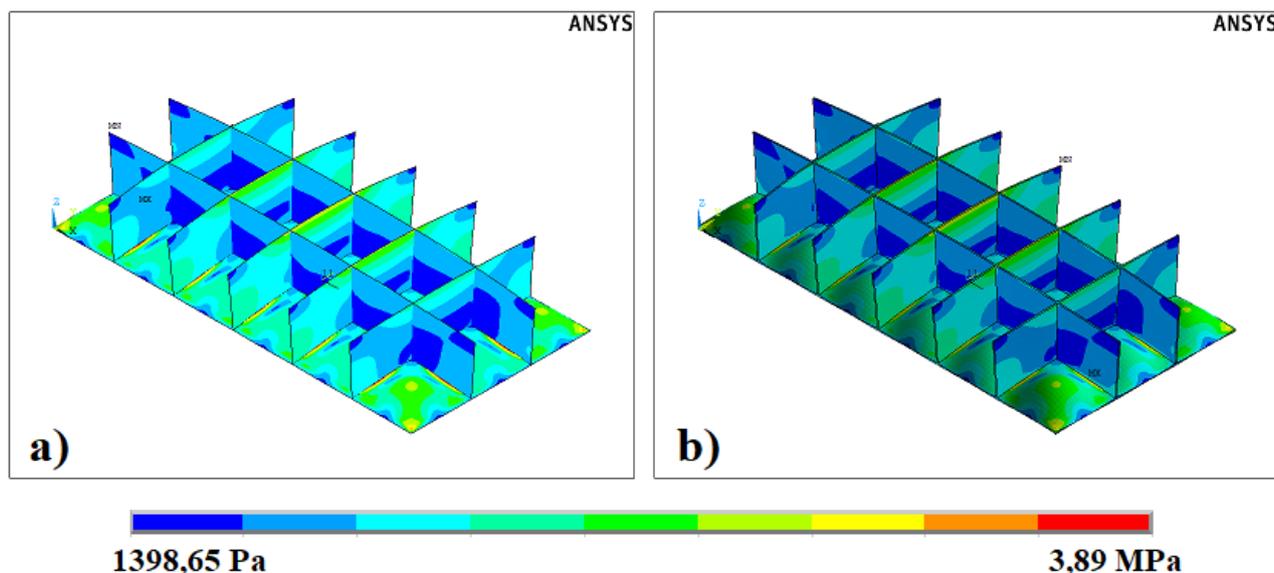


Figura 5.13 – Tensões de von Mises na parte inferior para $\phi = 0,5$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

Para uma análise mais detalhada em termos de tensões, testes de independência de malha para análises de tensões deveriam ter sido previamente realizados. Portanto, esses resultados de tensões de von Mises serviram apenas para uma simples verificação dos esforços internos que surgiram na estrutura, de forma que se pudesse ter apenas uma ideia sobre a ordem de grandeza e o regime de tensões e deformações ao qual a placa estava submetida nesses casos específicos analisados.

5.3. Análise para a fração volumétrica $\phi = 0,4$

As análises para todos os outros valores de fração volumétrica ϕ foram similares ao que foi apresentado na seção anterior para $\phi = 0,5$. No Apêndice B, Figs. B1 até B20, são apresentados os gráficos mostrando a variação da deflexão transversal no centro das placas enrijecidas em função da variação do grau de liberdade h_s/t_s , para todos os casos de fração volumétrica estudados e para as diferentes combinações P (N_{ls} , N_{ts}). No Apêndice C, Tabelas C.1 até C.10, podem ser consultados todos os valores das constantes $C1$ e $C2$ que definiram as curvas de potência ajustadas para todos os resultados gerados nessa pesquisa, assim como o coeficiente de determinação R^2 de cada ajuste, considerando ambas as simulações com os elementos finitos *SHELL93* e *SOLID95*.

Nas análises de resultados que se seguem, são apresentados apenas os gráficos com as combinações P (N_{ls} , N_{ts}) otimizadas uma vez segundo a relação $(h_s/t_s)_o$, as tabelas com as geometrias otimizadas pela segunda vez segundo o número de enrijecedores transversais ótimo

$(N_{ts})_o$ e, por fim, as configurações deformadas e distribuição de tensão de von Mises das placas com melhor performance, em termos de deslocamento transversal, para cada parâmetro ϕ adotado.

O gráfico da Fig. 5.14 mostra os deslocamentos centrais minimizados uma vez $(U_z)_m$ para as placas enrijecidas, considerando cada combinação de número de enrijecedores longitudinais N_{ls} e número de enrijecedores transversais N_{ts} , mas agora com fração volumétrica $\phi = 0,4$.

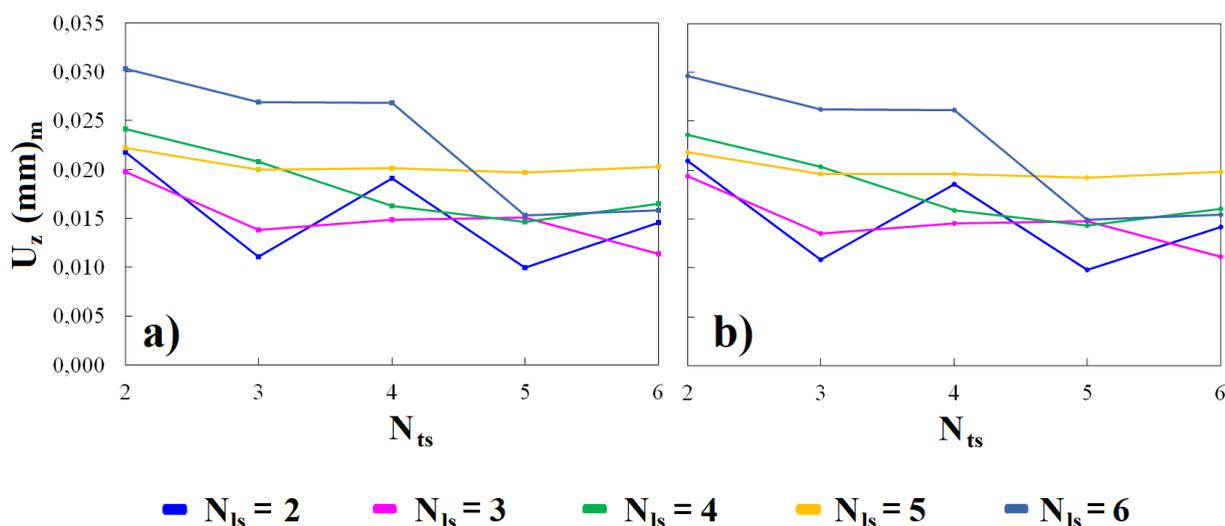


Figura 5.14 – Influência da variação do N_{ts} no valor de $(U_z)_m$ para $\phi = 0,4$ e $N_{ls} = 2$ a 6: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

A Tabela 5.2 apresenta, para ambos os modelos (*SHELL93* e *SOLID95*) e para cada valor (N_{ls}), a geometria otimizada pela segunda vez em função da quantidade de enrijecedores transversais (N_{ts}).

Tabela 5.2. Valores de $(N_{ts})_o$, $(h_s/t_s)_{oo}$ e $(U_z)_{mm}$ para cada N_{ls} com $\phi = 0,4$

N_{ls}	$(N_{ts})_o$	t_s (mm)	h_s (mm)	$(h_s/t_s)_{oo}$	$(U_z)_{mm}$ (mm) <i>SHELL93</i>	$(U_z)_{mm}$ (mm) <i>SOLID95</i>
2	5	6,35	281,95	44,40	0,0100	0,0098
3	6	4,75	282,72	59,52	0,0113	0,0111
4	5	4,75	261,02	54,95	0,0146	0,0143
5	5	4,75	226,35	47,65	0,0197	0,0192
6	5	3,18	297,64	93,60	0,0153	0,0149

A partir da Tab. 5.2, finalmente foi encontrada a geometria que apresenta a melhor performance em termos de deslocamentos para $\phi = 0,4$. A configuração geométrica $P(2,5)$, definida pela relação $(h_s/t_s)_{ooo} = 44,40$ três vezes otimizada, $(N_{ts})_{oo} = 5$ duas vezes otimizado e $(N_{ts})_o = 2$ uma vez otimizado, apresenta o menor deslocamento central três vezes minimizado $(U_z)_{mmm} = 0,0100$ mm para as simulações realizadas com o elemento *SHELL93* e $(U_z)_{mmm} = 0,0098$ mm para as simulações realizadas com o elemento *SOLID95*. Houve uma redução na deflexão transversal do centro da placa de 98,57 % em relação à deflexão da placa sem enrijecedores utilizada como referência (ou seja, o deslocamento obtido é quase 70 vezes menor quando comparado ao deslocamento obtido para a placa de referência).

A configuração deformada e a distribuição de tensões de von Mises dessa placa enrijecida otimizada $P(2,5)$ são apresentadas para os elementos *SHELL93* e *SOLID95* nas Figs. 5.15 a 5.17.

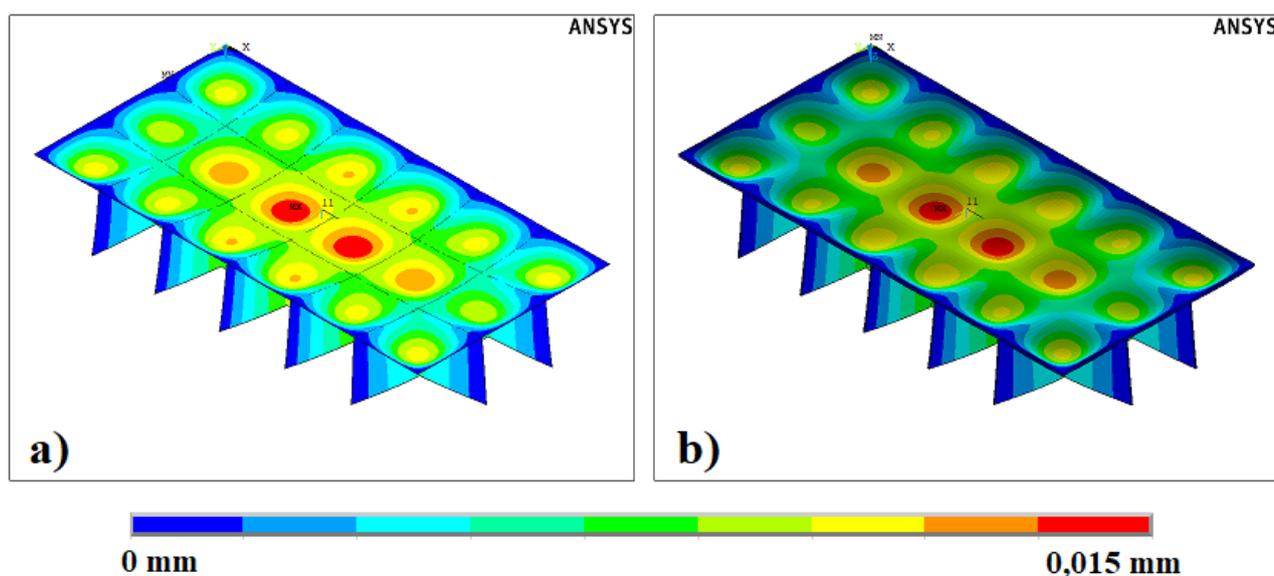


Figura 5.15 – Deformada da placa otimizada para $\phi = 0,4$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

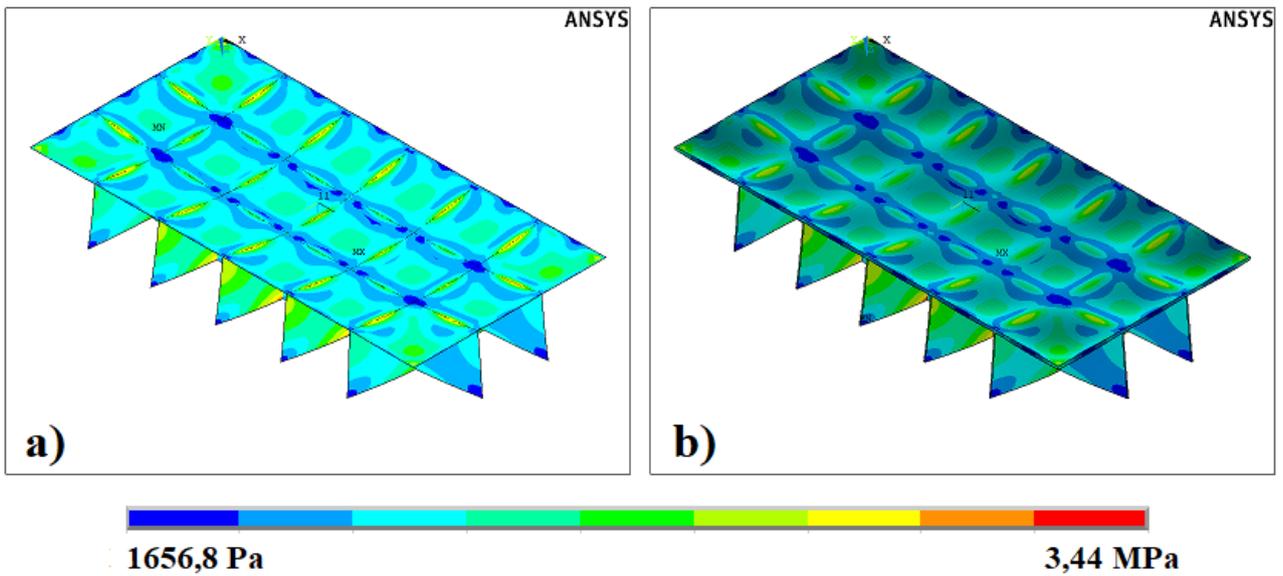


Figura 5.16 – Tensões de von Mises na parte superior para $\phi = 0,4$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

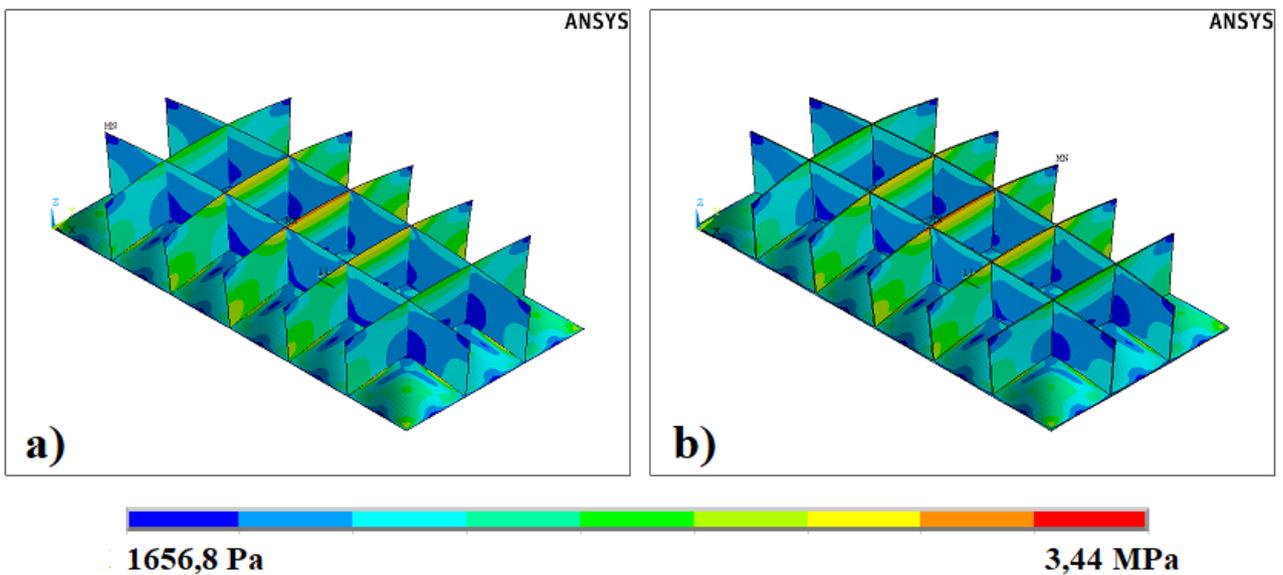


Figura 5.17 – Tensões de von Mises na parte inferior para $\phi = 0,4$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

5.4. Análise para a fração volumétrica $\phi = 0,3$

O gráfico da Fig. 5.18 mostra os deslocamentos uma vez minimizados $(U_z)_m$ no centro das placas enrijecidas, considerando cada combinação de número de enrijecedores longitudinais N_{ls} e número de enrijecedores transversais N_{ts} , mas agora com fração volumétrica $\phi = 0,3$.

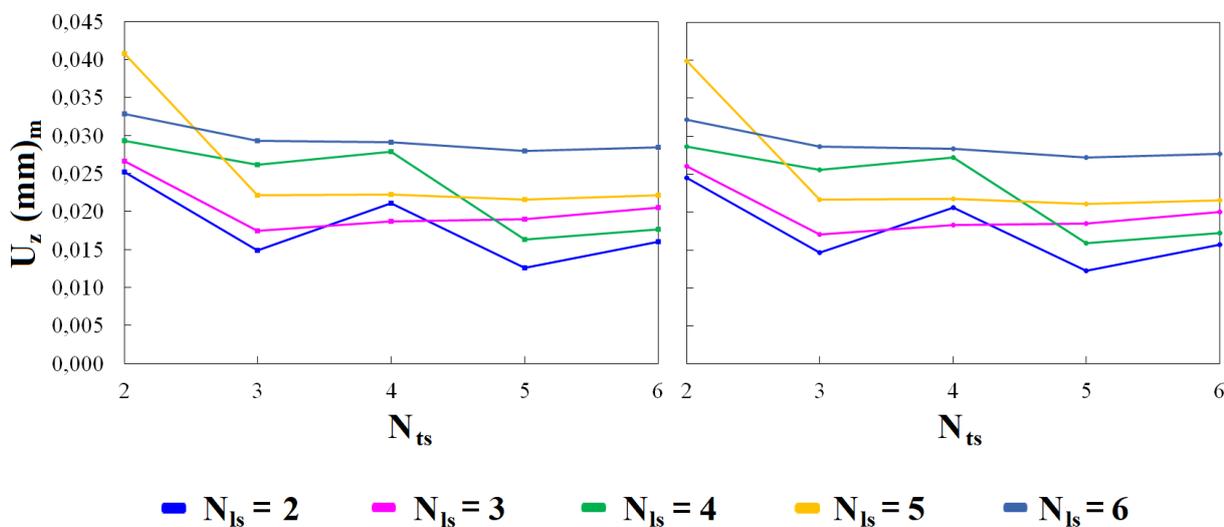


Figura 5.18 – Influência da variação do N_{ts} no valor de $(U_z)_m$ para $\phi = 0,3$ e $N_{ls} = 2$ a 6: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

A Tabela 5.3 apresenta as geometrias otimizadas pela segunda vez em função de (N_{ts}) . A configuração geométrica $P(2,5)$, definida pela relação $(h_s/t_s)_{ooo} = 59,41$ três vezes otimizada, $(N_{ts})_{oo} = 5$ duas vezes otimizado e $(N_{ts})_o = 2$ uma vez otimizado, apresenta o menor deslocamento central três vezes minimizado $(U_z)_{mmm} = 0,0126$ mm para as simulações realizadas com o elemento *SHELL93* e $(U_z)_{mmm} = 0,0123$ mm para as simulações realizadas com o elemento *SOLID95*. Para fração volumétrica $\phi = 0,3$, houve uma redução na deflexão transversal central da placa de 98,19 %.

Tabela 5.3. Valores de $(N_{ts})_o$, $(h_s/t_s)_{oo}$ e $(U_z)_{mm}$ para cada N_{ls} com $\phi = 0,3$

N_{ls}	$(N_{ts})_o$	t_s (mm)	h_s (mm)	$(h_s/t_s)_{oo}$	$(U_z)_{mm}$ (mm) <i>SHELL93</i>	$(U_z)_{mm}$ (mm) <i>SOLID95</i>
2	5	4,75	282,20	59,41	0,0126	0,0123
3	3	4,75	282,04	59,38	0,0174	0,0171
4	5	3,18	291,70	91,73	0,0163	0,0159
5	5	3,18	252,91	79,53	0,0216	0,0211
6	5	3,18	223,23	70,20	0,0279	0,0272

As Figs. 5.19 a 5.21 apresentam a deformada e a distribuição de tensões de von Mises.

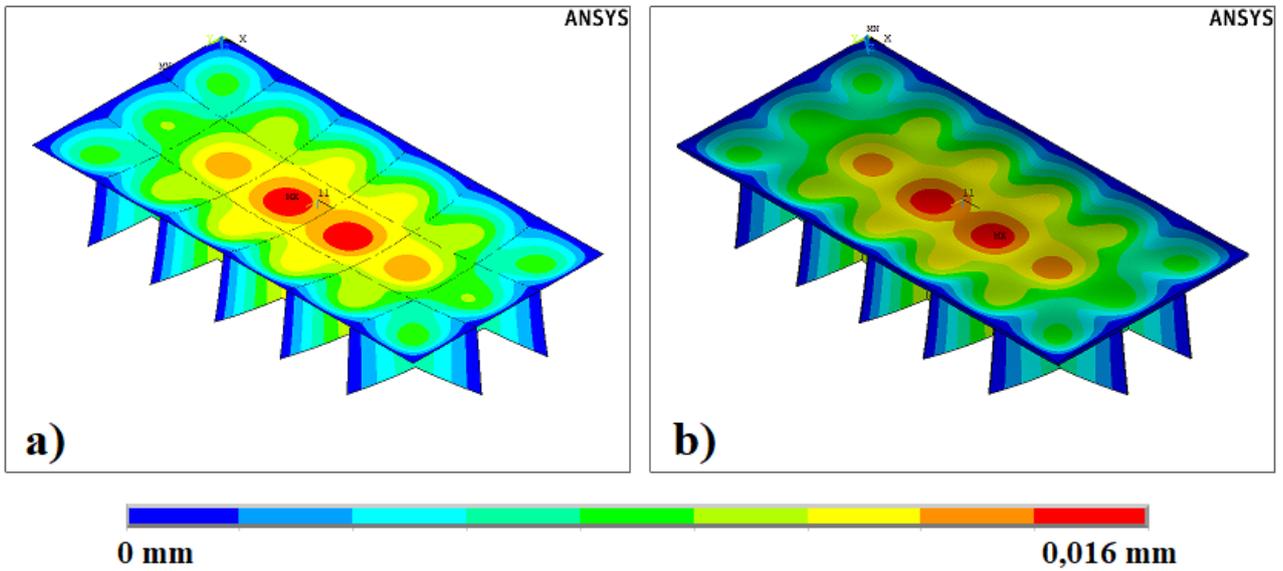


Figura 5.19 – Deformada da placa otimizada para $\phi = 0,3$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

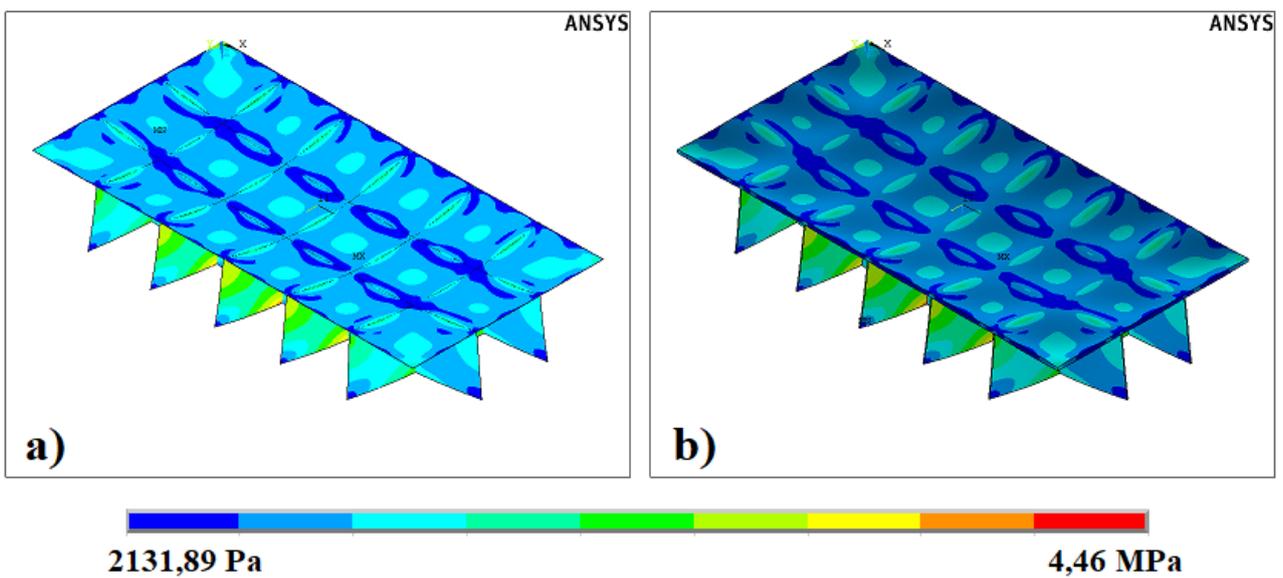


Figura 5.20 – Tensões de von Mises na parte superior para $\phi = 0,3$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

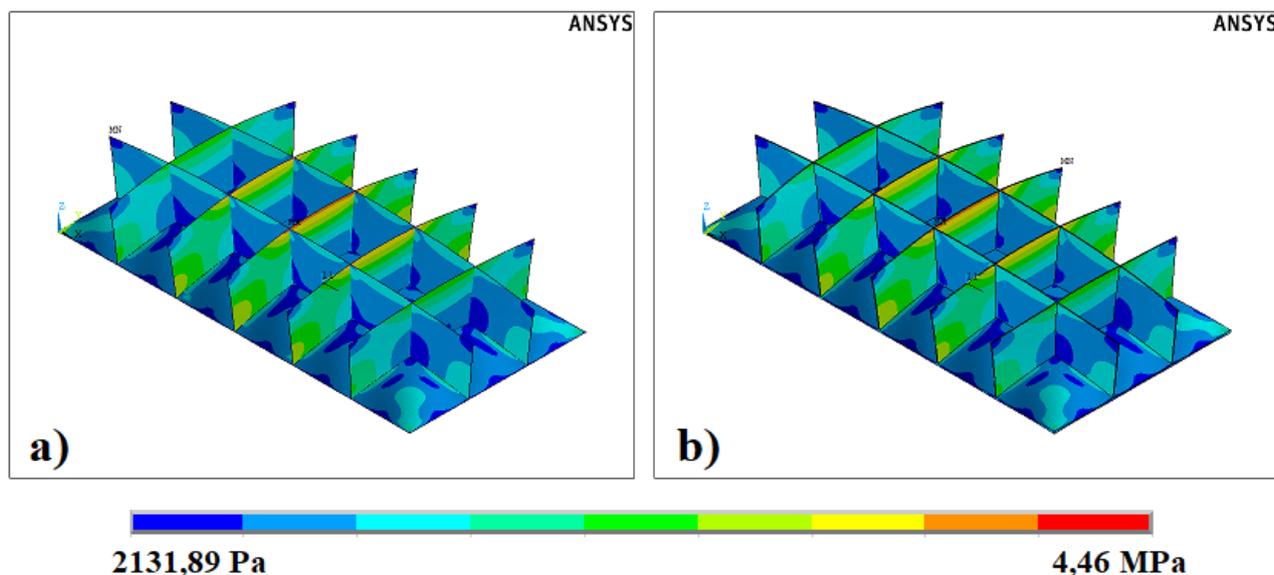


Figura 5.21 – Tensões de von Mises na parte inferior para $\phi = 0,3$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

5.5. Análise para a fração volumétrica $\phi = 0,2$

O gráfico da Fig. 5.22 mostra os deslocamentos uma vez minimizados $(U_z)_m$ no centro das placas enrijecidas, considerando cada combinação de número de enrijecedores longitudinais N_{ls} e número de enrijecedores transversais N_{ts} , mas agora com fração volumétrica $\phi = 0,2$. Notou-se, que o comportamento oscilatório dos gráficos devido a variação de enrijecedores transversais pares e ímpares começou a diminuir conforme a fração volumétrica ϕ foi diminuindo, ou seja, conforme a espessura da placa enrijecida t_p aumentava, a tendência de zigue-zague dos gráficos desaparecia.

A Tabela 5.1 apresenta as geometrias otimizadas pela segunda vez. A placa *P* (2,5), definida pela relação $(h_s/t_s)_{ooo} = 88,21$ três vezes otimizada, $(N_{ls})_{oo} = 5$ duas vezes otimizado e $(N_{ls})_o = 2$ uma vez otimizado, apresentou o menor deslocamento central três vezes minimizado $(U_z)_{mmm} = 0,0180$ mm para as simulações realizadas com o elemento *SHELL93* e $(U_z)_{mmm} = 0,0177$ mm para as simulações realizadas com o elemento *SOLID95*. Para o parâmetro $\phi = 0,2$, houve, portanto, uma redução na deflexão transversal do centro da placa de 97,42 %.

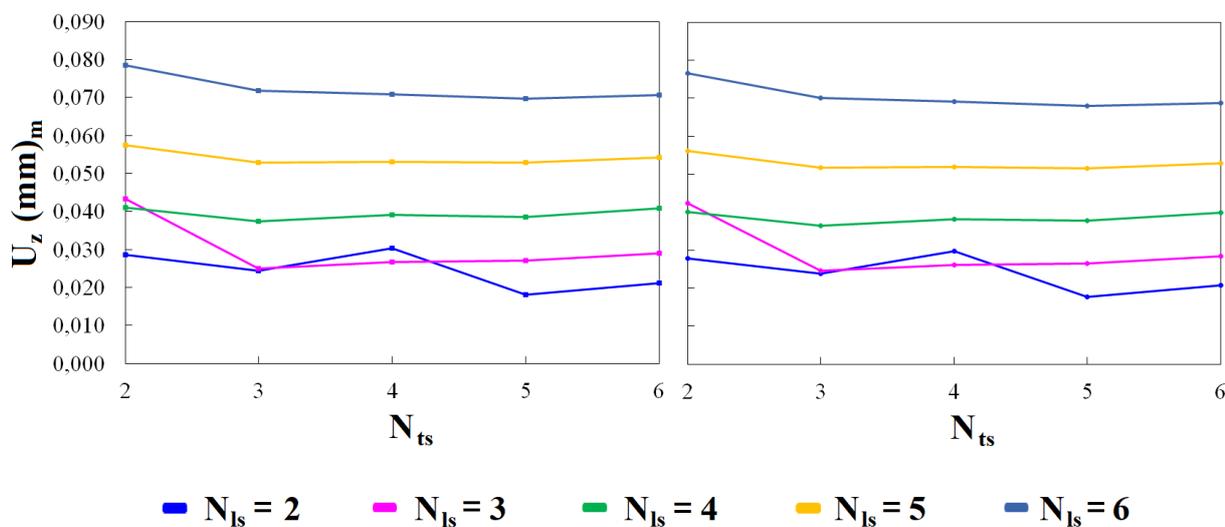


Figura 5.22 – Influência da variação do N_{ts} no valor de $(U_z)_m$ para $\phi = 0,2$ e $N_{ls} = 2$ a 6: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

Tabela 5.4. Valores de $(N_{ts})_o$, $(h_s/t_s)_{oo}$ e $(U_z)_{mm}$ para cada N_{ls} com $\phi = 0,2$

N_{ls}	$(N_{ts})_o$	t_s (mm)	h_s (mm)	$(h_s/t_s)_{oo}$	$(U_z)_{mm}$ (mm) <i>SHELL93</i>	$(U_z)_{mm}$ (mm) <i>SOLID95</i>
2	5	3,18	280,52	88,21	0,0180	0,0177
3	3	3,18	280,42	88,18	0,0251	0,0245
4	3	3,18	229,50	72,17	0,0373	0,0365
5	5	3,18	168,61	53,02	0,0528	0,0515
6	5	3,18	148,82	46,80	0,0696	0,0679

As Figs. 5.23 a 5.25 apresentam a configuração deformada e a distribuição de tensões de von Mises dessa placa enrijecida otimizada $P(2,5)$, para $\phi = 0,2$.

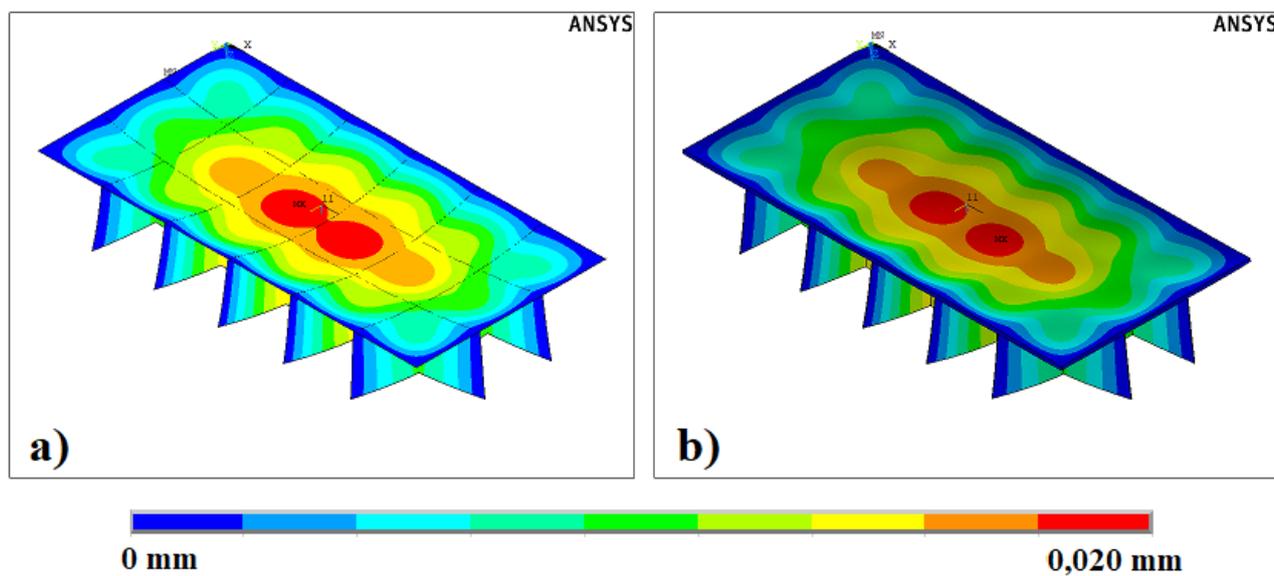


Figura 5.23 – Deformada da placa otimizada para $\phi = 0,2$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

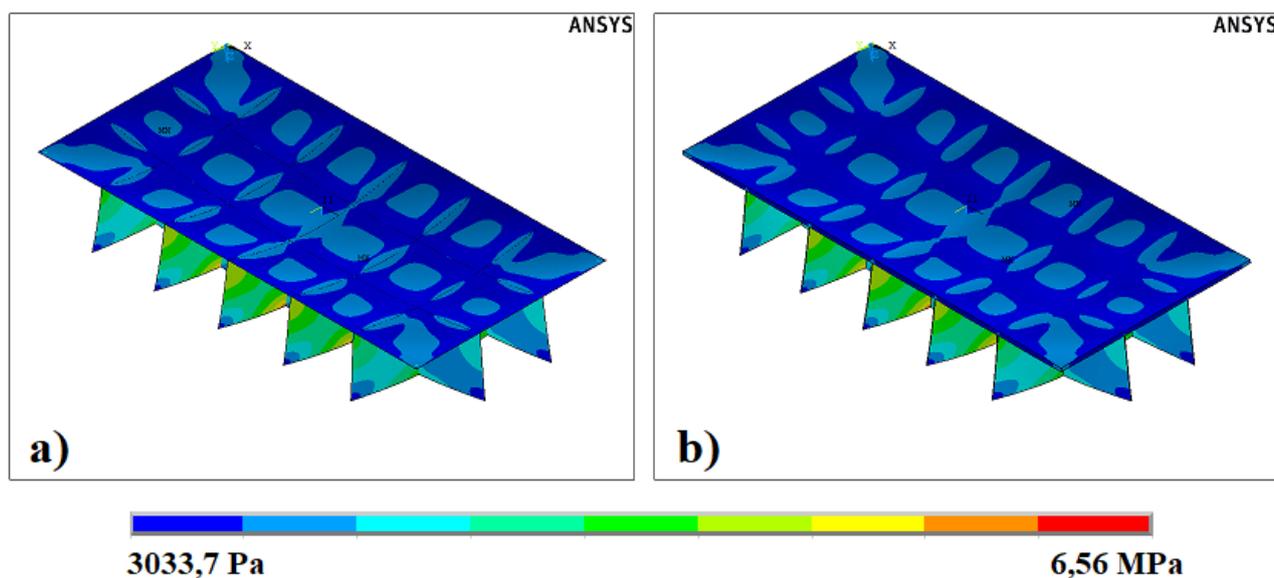


Figura 5.24 – Tensões de von Mises na parte superior para $\phi = 0,2$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

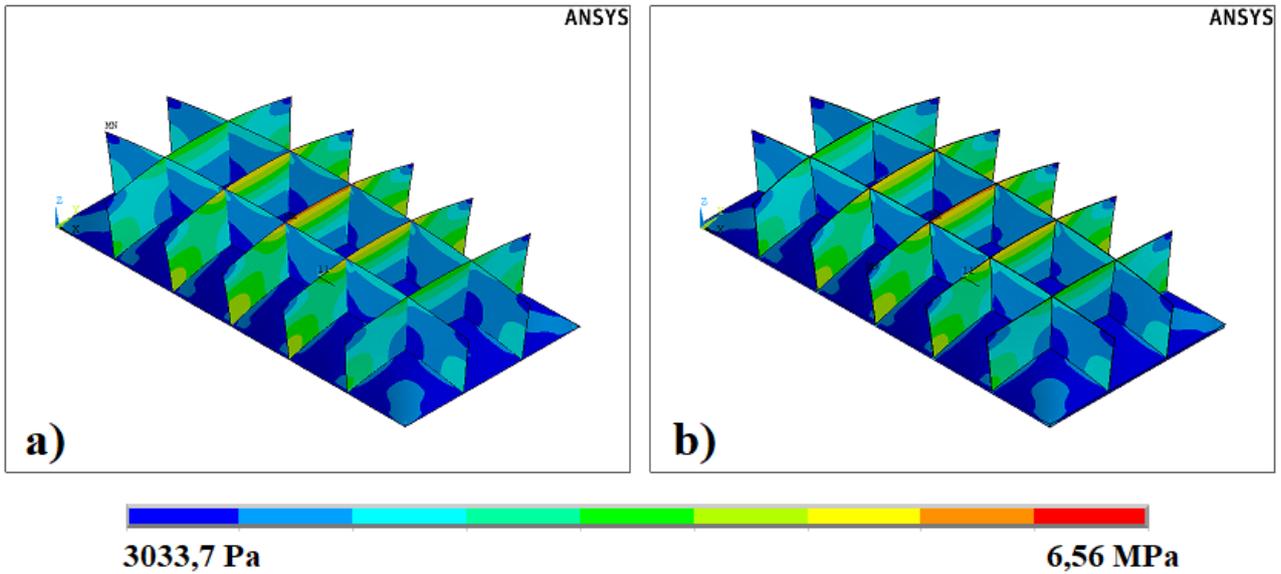


Figura 5.25 – Tensões de von Mises na parte inferior para $\phi = 0,2$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

5.6. Análise para a fração volumétrica $\phi = 0,1$

O gráfico da Fig. 5.26 mostra os deslocamentos uma vez minimizados $(U_z)_m$ no centro das placas enrijecidas, considerando cada combinação de número de enrijecedores longitudinais N_{ls} e transversais N_{ts} , mas agora com fração volumétrica $\phi = 0,1$. Percebeu-se, nesse caso, a não existência da oscilação devido ao número de enrijecedores transversais pares ou ímpares.

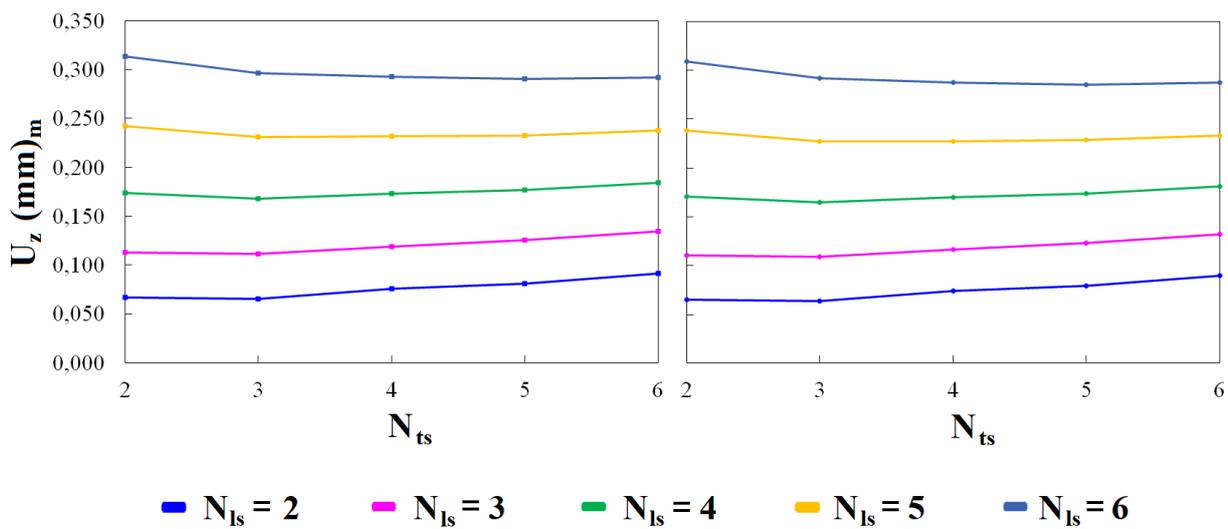


Figura 5.26 – Influência da variação do N_{ts} no valor de $(U_z)_m$ para $\phi = 0,1$ e $N_{ls} = 2$ a 6: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

A Tabela 5.1 apresenta as geometrias otimizadas pelo grau de liberdade (N_{ts}). A configuração geométrica $P(2,3)$, definida pela relação $(h_s/t_s)_{ooo} = 56,66$ três vezes otimizada, $(N_{ts})_{oo} = 3$ duas vezes otimizado e $(N_{ts})_o = 2$ uma vez otimizado, apresentou o menor deslocamento central três vezes minimizado $(U_z)_{mmm} = 0,0652$ mm para as simulações realizadas com o elemento *SHELL93* e $(U_z)_{mmm} = 0,0639$ mm para as simulações realizadas com o elemento *SOLID95*. Portanto, houve uma redução na deflexão transversal de 90,66 % em relação à placa de referência não enrijecida.

Tabela 5.5. Valores de $(N_{ts})_o$, $(h_s/t_s)_{oo}$ e $(U_z)_{mm}$ para cada N_{ts} com $\phi = 0,1$

N_{ts}	$(N_{ts})_o$	t_s (mm)	h_s (mm)	$(h_s/t_s)_{oo}$	$(U_z)_{mm}$ (mm) <i>SHELL93</i>	$(U_z)_{mm}$ (mm) <i>SOLID95</i>
2	3	3,18	180,19	56,66	0,0652	0,0639
3	3	3,18	140,21	44,09	0,1115	0,1094
4	3	3,18	114,75	36,08	0,1679	0,1649
5	3	3,18	97,11	30,54	0,2310	0,2269
6	5	3,18	74,41	23,40	0,2902	0,2852

As Figs. 5.27 a 5.29 mostram a configuração deformada e a distribuição de tensões de von Mises dessa placa enrijecida otimizada $P(2,3)$ para os elementos *SHELL93* e *SOLID95* e $\phi = 0,1$.

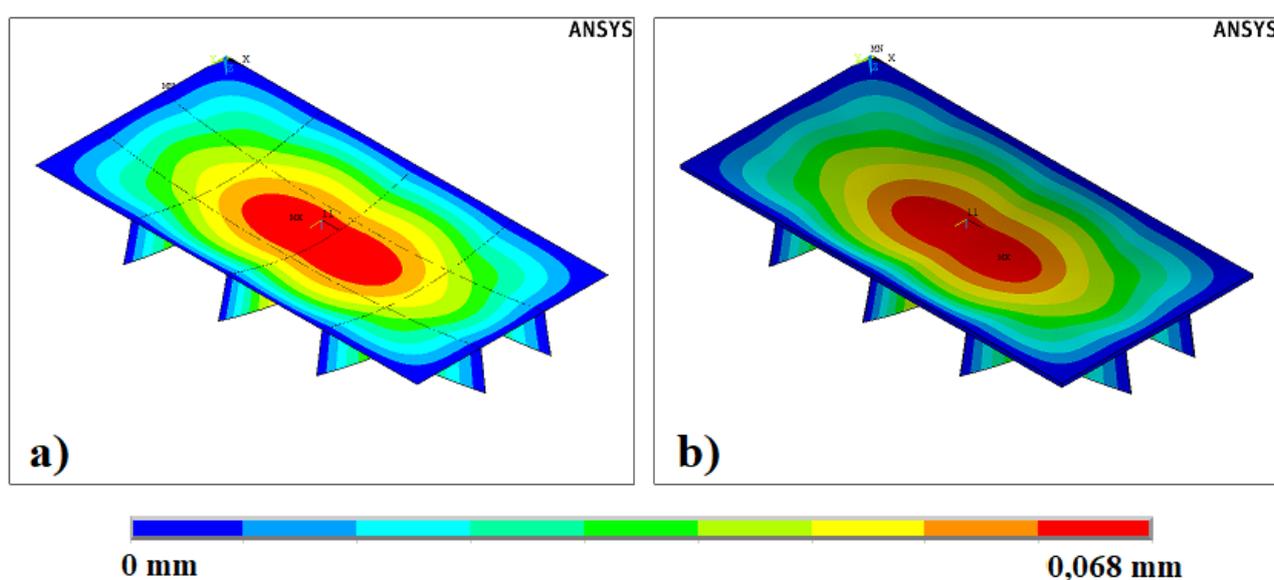


Figura 5.27 – Deformada da placa otimizada para $\phi = 0,1$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

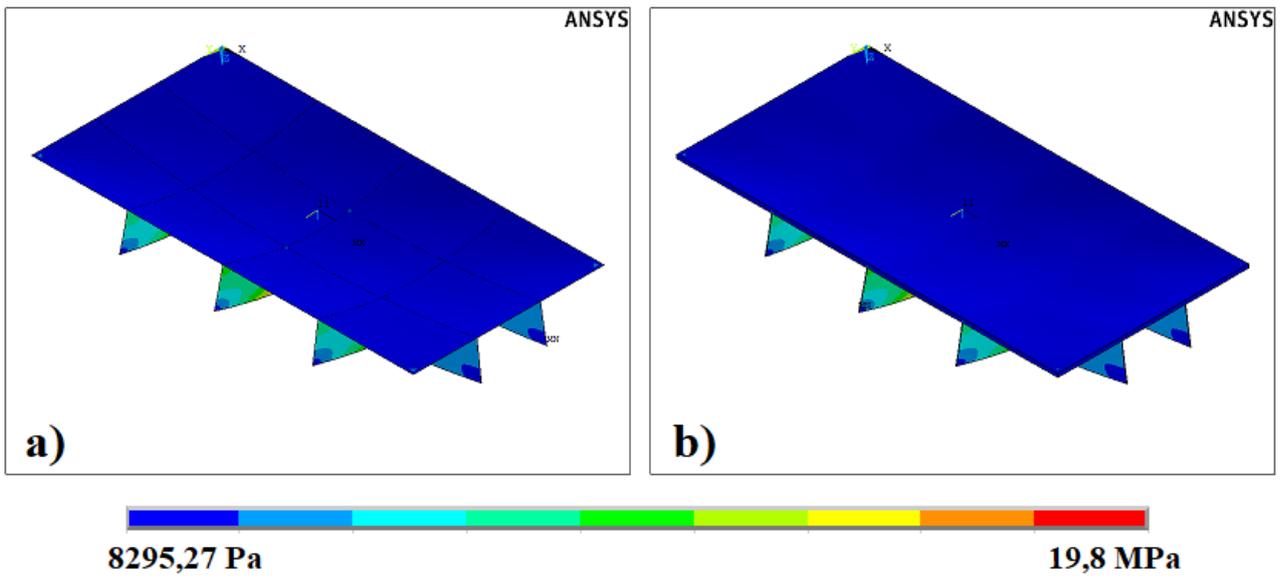


Figura 5.28 – Tensões de von Mises na parte superior para $\phi = 0,1$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

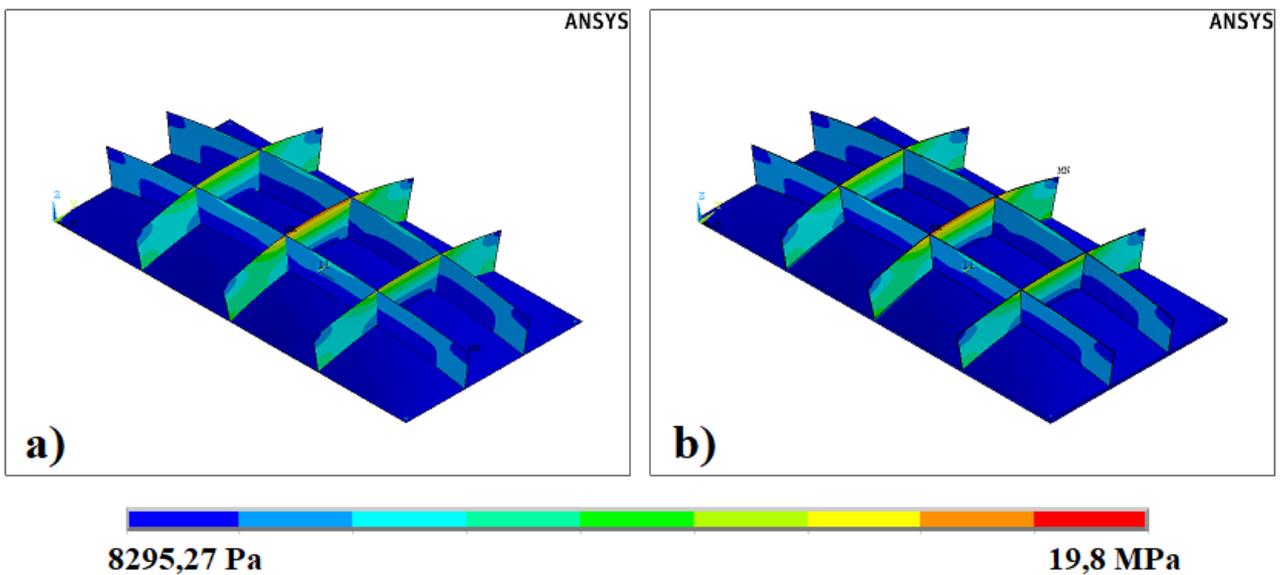


Figura 5.29 – Tensões de von Mises na parte inferior para $\phi = 0,1$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

5.7. Análise da influência da fração volumétrica ϕ

Por fim, foi avaliada a influência do parâmetro ϕ sobre os resultados de deflexão central das placas enrijecidas, agora tratando este parâmetro não somente como uma restrição, mas também como um grau de liberdade do problema. O gráfico da Fig. 5.30 mostra os deslocamentos centrais minimizados três vezes $(U_z)_{mmm}$ para cada fração volumétrica analisada ϕ . A partir desse gráfico foi possível determinar a placa com a melhor performance global entre todos os resultados gerados

nessa pesquisa, mostrando que a melhor configuração foi a placa ótima obtida com fração volumétrica uma vez otimizada $\phi_o = 0,5$, relação $(h_s/t_s)_{oooo} = 35,03$ quatro vezes otimizada, $(N_{ts})_{ooo} = 5$ três vezes otimizado e $(N_{ts})_{oo} = 2$ duas vezes otimizado, a qual apresentou deslocamento central quatro vezes minimizado $(U_z)_{mmmm} = 0,0086$ mm para as simulações realizadas com o elemento *SHELL93* e $(U_z)_{mmmm} = 0,0084$ mm para as simulações realizadas com o elemento *SOLID95*. Portanto, constatou-se que a melhor de todas as configurações obtidas por todas essas análises realizadas proporcionou uma redução global na deflexão transversal do centro da placa enrijecida de 98,77 % em relação à placa de referência não enrijecida utilizada para comparação.

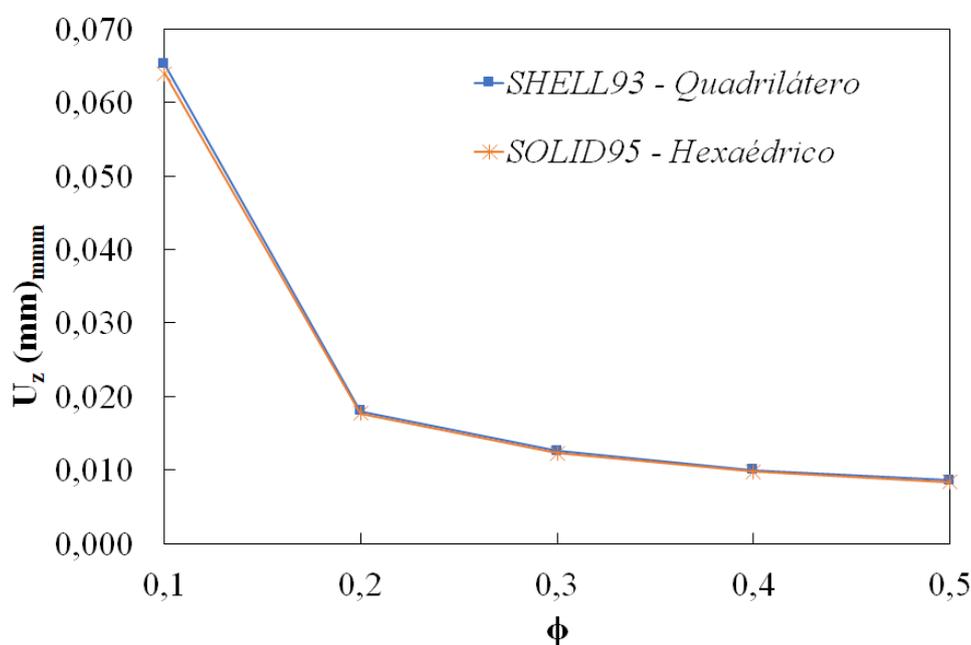


Figura 5.30 – Influência da variação da fração volumétrica ϕ no resultado de deflexão transversal

Foi também possível observar pela análise da Fig. 5.30 que, a partir de $\phi = 0,3$, existiu uma tendência de estabilização no valor da deflexão minimizada. Portanto, não existiram diferenças significativas para o deslocamento transversal do ponto central da placa para valores de fração volumétrica entre $0,3 \leq \phi \leq 0,5$. No entanto, ao fazer uma análise simplificada das tensões máximas de von Mises encontradas, percebeu-se um ponto de mínima tensão em $\phi = 0,4$, o que reforça a importância de uma análise mais completa desse problema combinando os resultados de deflexão com os resultados de tensão, já que a placa otimizada em termos de minimização das tensões não foi exatamente a mesma placa ótima obtida pela minimização dos deslocamentos.

6. CONCLUSÕES

Ao usar o software *ANSYS*® para analisar os modelos computacionais de placas enrijecidas, juntamente com a aplicação do método Design Construtal, foi possível realizar uma avaliação sobre a influência de diferentes parâmetros geométricos no comportamento mecânico, em termos de deslocamentos, de placas enrijecidas, as quais são estruturas importantes e amplamente utilizadas na engenharia mecânica e naval, mais especificamente no setor de reparação e construção de embarcações.

Observou-se que, através da redistribuição do material empregado na construção de placas enrijecidas, foi possível alcançar uma melhoria significativa na rigidez estrutural dessas estruturas. Também foi demonstrado que, além do número de enrijecedores transversais e longitudinais, a relação h_s/t_s teve uma forte influência na rigidez das placas.

Além disso, para cada combinação dos graus de liberdade N_{Is} e N_{ts} foi possível definir uma curva de potência ajustada para descrever matematicamente a relação entre o deslocamento central e o grau de liberdade h_s/t_s . Os coeficientes de determinação R^2 dos ajustes, que servem como um indicador de qualidade, apresentaram valores todos superiores a 92 %, chegando a valores com até 99,99 % de grau de exatidão, indicando a boa acurácia dos ajustes realizados. As equações dessas curvas ajustadas possuem grande utilidade ao possibilitar a obtenção de deslocamentos no centro das placas para outros valores de h_s/t_s dentro dos intervalos simulados ou, até mesmo, extrapolar esses resultados para valores fora desses intervalos, sendo esta uma contribuição científica inédita proposta por essa pesquisa.

A análise das diferentes placas enrijecidas com mesmo volume de material mostrou que o aumento do número de enrijecedores nem sempre implicava em redução na deflexão das placas, ressaltando a importância da realização de estudos de otimização geométrica para uma melhor utilização do material em projetos e construções que utilizam essas estruturas. Confirmou-se, o que já era esperado, que a geometria possuía grande influência no comportamento estrutural de placas enrijecidas, onde, por exemplo, a placa P (6,2) com $h_s/t_s = 35,62$ apresentou um deslocamento quase 94 % menor quando comparada a uma placa também P (6,2) com $h_s/t_s = 1,02$, na situação específica de $\phi = 0,5$ e modelagem com *SHELL93 – Quadrilátero*.

As geometrias ótimas para a maioria das frações volumétricas estudadas tiveram configuração P (2,5), sendo diferente apenas para a fração volumétrica $\phi = 0,1$, na qual a placa ótima obtida apresentou configuração P (2,3). Já que os espaçamentos dos reforços foram mantidos equidistantes, percebeu-se um padrão no espaçamento dos enrijecedores das configurações ótimas P

(2,5), onde todos os reforços ficaram afastados em 0,33 m um do outro.

As deflexões transversais no centro de todas as placas otimizadas foram mais de 90 % menores do que a deflexão central da placa sem enrijecedores utilizada como referência. A placa ótima global dentre todas as configurações analisadas foi encontrada para a fração volumétrica uma vez otimizada $\phi_o = 0,5$, com relação $(h_s/t_s)_{oooo} = 35,03$ quatro vezes otimizada, $(N_{ts})_{ooo} = 5$ três vezes otimizado e $(N_{ts})_{oo} = 2$ duas vezes otimizado, a qual apresentou deslocamento central quatro vezes minimizado $(U_z)_{mmmm} = 0,0086$ mm para as simulações realizadas com o elemento *SHELL93* e $(U_z)_{mmmm} = 0,0084$ mm para as simulações realizadas com o elemento *SOLID95*. Dessa forma, a melhor configuração geométrica de placa enrijecida obtida por essa pesquisa proporcionou uma redução global na deflexão transversal do centro da placa de 98,77 % em relação à placa de referência sem enrijecedores.

Devido à proximidade dos resultados gerados pelos dois modelos (*SHELL93* e *SOLID95*), conclui-se também que a modelagem de placas finas com elementos tipo casca se mostrou mais vantajosa, já que apresentou resultados com boa acurácia e menor tempo/custo computacional.

Ao observar o comportamento da configuração deformada das geometrias ótimas de cada fração volumétrica ϕ (Figs. 5.11, 5.15, 5.19, 5.23 e 5.27), foi possível observar que a espessura da placa sofreu vários deslocamentos localizados (pontos em vermelho) para $\phi = 0,5$ (Fig. 5.11). Isso ocorreu por causa da grande quantidade de material destinada aos enrijecedores, o que deixou a espessura da placa enrijecida t_p demasiadamente fina. Para valores menores do parâmetro ϕ , menos material da placa de referência foi transformado em enrijecedores, com isso a espessura da placa enrijecida t_p tornou-se mais grossa, fazendo com que a configuração deformada da placa se aproximasse cada vez mais da configuração deformada da placa sem enrijecedores, isto é, com menos deslocamentos locais e um deslocamento mais global da estrutura ocorrendo próximo da região central da mesma.

Outro comportamento interessante percebido durante as análises foi a estabilização dos resultados de deflexão conforme se aumentava a relação h_s/t_s . Através dos gráficos das Figs. 5.4 a 5.8 e das figuras do apêndice B (Fig. B.1 até a Fig. B.20), observou-se uma tendência assintótica para a maioria dos resultados de deflexão central das placas com h_s/t_s acima de 20. Portanto, exceto para alguns casos de $\phi = 0,1$ onde esse comportamento assintótico foi pouco acentuado ou inexistente, a maioria dos casos simulados não apresentou ganho significativo de desempenho, em termos de redução de deflexão, para relações h_s/t_s acima de 20 ($h_s/t_s > 20$). Essa conclusão é importante, pois um aumento demasiado da relação h_s/t_s pode ser prejudicial à estrutura por tornar ainda mais esbeltos os enrijecedores e possibilitar o surgimento de problemas de estabilidade

(flambagem) ou concentração de tensões. Isso reforça a necessidade de um estudo em paralelo que considere as tensões que surgem nessas estruturas simuladas e a possibilidade de ocorrência de flambagem local dos perfis enrijecedores.

Dessa maneira, através da aplicação de modelagem computacional junto ao método Design Construtal, verificou-se que foi possível obter recomendações geométricas otimizadas para placas enrijecidas com objetivo de minimizar os deslocamentos no centro dessas estruturas. Além disso, através desse estudo foi possível estabelecer algumas ideias gerais sobre o comportamento mecânico de estruturas formadas por placas e enrijecedores, ideias estas que podem servir como base para o auxílio e orientação de demais projetos de pesquisa relacionados a esse tema.

6.1. Propostas de continuidade

Como propostas de continuidade desse trabalho, são sugeridas as seguintes ações:

1. Considerar maiores valores de frações volumétricas ($\phi > 0,5$) para avaliar a influência de uma grande porção de material sendo transformada em enrijecedores.
2. Considerar diferentes combinações de placas $P(N_{ls}, N_{ts})$ com N_{ls} e N_{ts} podendo ser iguais a 0 ou 1 e também para N_{ls} e N_{ts} maiores do que 6.
3. Considerar diferentes espaçamentos entre enrijecedores.
4. Realizar um estudo das tensões nas placas enrijecidas, para que se encontrem placas otimizadas também sob esse importante critério de resistência.
5. Realizar um estudo de estabilidade quanto a possíveis ocorrências de flambagem local em enrijecedores demasiadamente esbeltos.
6. Ampliar a análise estrutural ao incluir não linearidades que surgem devido aos processos de fabricação das placas com enrijecedores por processos de soldagem.
7. Realizar um estudo de placas reforçadas com perfis de diferentes seções transversais como perfis I, bulbo, entre outros, visando a investigação da influência de mais graus de liberdade no comportamento de placas enrijecidas submetidas a carregamento transversal.
8. Além de tudo isso, há a possibilidade de variar as condições de contorno das placas, bem como o tipo de carregamento.

7. REFERÊNCIAS

- AISC, **Design manual for orthotropic steel plate deck bridges**. New York, 188 p., 1963.
- ANSYS Inc., **ANSYS User's Manual: Analysis Systems**, 2009.
- AZEVEDO, A. F. M. **Método dos Elementos Finitos**. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. 1ª ed. Porto, 2003.
- BHASKAR, K.; PYDAH, A. An elasticity approach for simply-supported isotropic and orthotropic stiffened plates. **International Journal of Mechanical Sciences** **89**, pp. 21-30, 2014.
- BATHE, K.J. **Finite element procedures. Revision of: Finite element procedures in engineering analysis**, Prentice- Hall, 1996.
- BEDAIR, O. K., Analysis of stiffened plates under lateral loading using sequential quadratic programming (SQP), **Computers & Structures Vol. 62**, No. 1, pp. 63-80, 1997.
- BEDAIR, O. K. Analysis and Limit State Design of Stiffened Plates and Shells: A World View. **Applied Mechanics Reviews** **62:2**, 2009.
- BEJAN, A., **Shape and Structure, from engineering to nature**, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000.
- BEJAN, A.; LORENTE, S. **Design with Constructal Theory**. Wiley, Hoboken, 2008.
- BEJAN, A.; ZANE, J. P. **Design in Nature: How the Constructal Law governs evolution in biology, physics, technology, and social organizations**. Anchor Books, 2012.
- BEJAN, A.; LORENTE, S. Constructal law of design and evolution: Physics, biology, technology, and society. **Journal of Applied Physics** **113**, 2013.
- BISWAL, K. C.; GHOSH, A. K. Finite element analysis for stiffened laminated plates using higher order shear deformation theory. **Computers & Structures** **53**, pp. 161-171, 1994.
- BURNETT, D. S. **Finite Element Analysis - From Concepts to Applications**, Addison-Wesley, 1987.
- CANATO, D. A., 2007. **Utilização de Conceitos de Integração de Sistemas Direcionados a Domótica - Estudo de Caso para Automação Residencial**. Campinas. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).
- CHENG, S. P.; DADE, H.; ZONGMU, W. Static, vibration and stability analysis of stiffened plates using B Spline functions. **Computers & Structures**, Vol. 27, No. 1, pp. 73-78, 1987.
- CORDEIRO, M. F., 2007. **Uma Técnica para Otimização Estrutural Mediante a Derivada Topológica**. Rio de Janeiro. Dissertação de conclusão de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ).

- COURANT, R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. **Bull. Amer. Math. Soc.** **49**, no. 1, pp. 1-23, 1943.
- DA SILVA, L. C., **Verificação, Validação e Experimentação com Modelos de Simulação**. Departamento de Engenharia Rural, Universidade Federal do Espírito Santo, 2006.
- FERNANDES, G. R.; VENTURINI, W. S. Stiffened plate bending analysis by the boundary element method. **Computational Mechanics** **28**, pp. 275-281, 2002.
- GALLAGHER, R. H. **Finite Element Analysis: Fundamentals**. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1975.
- GHAVAMI, K.; KHEDMATI, M. R. Nonlinear large deflection analysis of stiffened plates. **Finite Element Analysis - Applications in Mechanical Engineering**, Dr. Farzad Ebrahimi (Ed.), InTech, DOI: 10.5772/48368, 2012.
- GUJAR, P. S.; LADHANE, K. B. Bending Analysis of Simply Supported and Clamped Circular Plate. **SSRG International Journal of Civil Engineering (SSRG-IJCE) Volume 2 Issue 5**, pp. 69-75, 2015.
- GUO, M.; HARIK, I. E.; REN, W. Semi-discrete finite element analysis of slab-girder bridges. **Computers and Structures** **80**, pp. 1789-1796, 2002.
- HARIK, I. E.; SALAMOUN, G. L. The analytical strip method of solution for stiffened rectangular plates. **Computers & Structures Vol. 29**. No. 2, pp. 283-291, 1988.
- HASAN, M. M. Optimum design of stiffened square plates for longitudinal and square ribs. **Al-Khwarizmi Engineering Journal, Vol.3, No. 3**, pp 13-30, 2007.
- HOSSEINI S. H.; SOLTANI B. Analysis of Rectangular Stiffened Plates Based on FSDT and Meshless Collocation Method. **Journal of Solid Mechanics Vol. 9, No. 3**, pp. 568-586, 2017.
- KHOURY, R.; HARDER, D.W. **Numerical Methods and Modelling for Engineering**. Springer International Publishing, 2016.
- KLEIBER, M.; HIEN, T. D. **The stochastic finite element method**. John Wiley e Sons, Chichester, U.K, 1992.
- KUANG, J.S.; ZHANG, H. A semi-analytical method for plate and grid structures. **Engineering and Computational Mechanics** 161, Issue EM3, pp. 121-128, 2008.
- KUKRETI, A. R.; CHERAGHI, E. Analysis procedure for stiffened plate system using as energy approach. **Computers & Structures Vol. 46**, No. 4, pp. 649-657, 1993.
- LIMA, J. P., 2016. **Análise numérica da flambagem de placas finas de aço com enrijecedores através do método design construtal**. Rio Grande. Dissertação de conclusão de Mestrado em Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio Grande (FURG).
- MADENCI, E.; GUVEN, I. **The Finite Element Method and Applications in Engineering Using**

ANSYS. Ed. Springer, 2006.

- MANRIQUE, L. J. C., 1989. **Colapso de painéis planos enrijecidos**. Rio de Janeiro. Dissertação de conclusão de Mestrado em Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ).
- MARINHO, I. J. P., 2002. **Projeto ótimo de estruturas metálicas de arquibancadas reutilizáveis via ANSYS**. Rio de Janeiro. Dissertação de conclusão de Mestrado em Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio).
- MUKHOPADHYAY, M. Stiffened plate plane stress elements for the analysis of ships' structures. **Computers & Structures Vol. 13**, pp. 563-573, 1981.
- MUKHOPADHYAY, M. Stiffened Plates in Bending. **Computers & Structures 50**, pp. 541-548, 1994.
- NISHINO, F.; PAMA, R. P.; LEE, S. **Orthotropic plates with eccentric stiffeners**, 1974. Disponível em: <http://doi.org/10.5169/seals-26286>. Acessado em 19/11/2017.
- O'LEARY, J. R.; HARARI, I. Finite element analysis of stiffened plates. **Computers & Structures Vol. 21**, No. 5, pp. 973-985, 1985.
- PAPE, D. A.; FOX, A. J. Deflection Solutions for Edge Stiffened Plates. **Proceedings of the 2006 IJME - INTERTECH Conference**, 2006.
- PDU-LNCC, **Plano Diretor da Unidade, Laboratório Nacional de Computação Científica**. Brasil, Julho de 2016.
- PRZEMIENIECKI, J. S. **Finite Element Structural Analysis: New Concepts**. AIAA (American Institute of Aeronautics & Astronautics), Reston, Virgínia, 2009.
- REIS, A. H. Constructal theory: from engineering to physics, and how systems flow develop shape and structure. **Applied Mechanics Reviews**, v. 59, p. 269-281, 2006.
- ROSSOW, M. P. e IBRAHIMKHAIL, A. K. Constraint Method Analysis of Stiffened Plates. **Computers & Structures**, Vol. 8, pp. 51- 60, 1978.
- SALOMON, A., 2000. **An Evaluation of Finite Element Models of Stiffened Plates**. Department of Ocean Engineering, Degree of Master of Science in Naval Architecture and Marine Engineering, Massachusetts Institute of Technology.
- SAPOUNTZAKIS, E. J. e KATSIKADELIS, J. T. Analysis of Plates Reinforced with Beams. **Computational Mechanics**, Vol. 26, pp 66-74, 2000.
- SHEIKH, A. H.; MUKHOPADHYAY, M. Analysis of stiffened plate with arbitrary planform by the general spline finite strip method. **Computers & Structures Vol. 42**, No. 1, pp. 53-67, 1992.
- SIDDIQI, Z.; KUKRETI, A. Analysis of Eccentrically Stiffened Plates With Mixed Boundary Conditions Using Differential Quadrature Method. **Appl. Math. Model.**, 22, pp. 251-275, 1998.

- SILVA, H. B. S., 2010. **Análise numérica da influência da excentricidade na ligação placa-viga em pavimentos usuais de edifícios**. Dissertação de mestrado em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia, Universidade Federal de São Carlos.
- SINGH, R. R.; PAL, P. Analysis of stiffened isotropic and composite plate. **International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET) Vol. 03 Issue 02**, 2016.
- SZILARD, R. **Theories and Applications of Plate Analysis: Classical Numerical and Engineering Methods**. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2004.
- TANAKA, M. e BERCIN, A. N. Static bending analysis of stiffened plates using the boundary element method. **Transactions on Modelling and Simulation vol 18**, pp. 203-212, 1997.
- TANEMBAUM, A. **Sistemas Operacionais Modernos**. Prentice-Hall do Brasil, Rio de Janeiro, 2001.
- TEIXEIRA, G. DE M.; KESSLER, M. P.; MALISKA, C. R. **Fontes de Erro: Identificar, Quantificar e Reduzir a Intervalos Aceitáveis**. Artigo técnico, 2009. http://www.esss.com.br/blog/wp-content/uploads/2009/09/ESSS_Artigo_Tecnico_21.pdf
- TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. **Theory of Elastic Stability**. McGraw-Hill, New York, 1961.
- TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of plates and shells**. McGraw Hill, 1959.
- TURNER, M., CLOUGH, R., MARTIN, H., & TOPP, L. Stiffness and deflection analysis of complex structures. **Journal of the Aeronautical Sciences 23**, 805-823, 1956.
- VANAM, B. C. L.; RAJYALAKSHMI M.; INALA, R. Static analysis of an isotropic rectangular plate using finite element analysis (FEA). **Journal of Mechanical Engineering Research Vol. 4(4)**, pp. 148-162, 2012.
- VASCONCELOS, A. M. 2014. **Análise da sequência de soldagem em painéis típicos navais**. Trabalho de conclusão de Curso em Engenharia Naval e Oceânica, Escola Politécnica da Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- YASUHISA, Y.; YU, T.; MASAKI, M.; TETSUO, O. **Design of Ship Hull Structures: A Practical Guide for Engineers**. Springer. Takaya, Yokohama, and Tokyo, 2009.
- YETTRAM, A.L.; HUSAIN, H.M. The representation of a plate in flexure by a grid of orthogonally connected beams. **Journal Mech. Ncl. Pergamon Press Ltd. Vol. 7**, pp. 243-251, 1965.
- YOUSIF, M. V.; NAIEF, N. K. M.; HAMAD, Y. M. Optimum Height of Plate Stiffener under Pressure Effect. **The 1st Regional Conference of Eng. Sci. NUCEJ Spatial ISSUE vol.11**, No.3, pp. 459-468, 2008.
- ZHAO, C., YU, H., ZHENG, B. e WANG, H. New stiffened plate elements based on the absolute nodal coordinate formulation. **J Multi-body Dynamics**, DOI: 10.1177/1464419316660931, 2016.

ZIENKIEWICZ, O.C. **The Finite Element Method in Engineering Science**. 2^a ed. McGraw- Hill, London, 1971.

ZIENKIEWICZ, O. C. CHEUNG, Y. K., **The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics**. London: Mc-Graw Hill; 1967.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method**. 4^aed. - 2 Volumes. McGraw-Hill, London, 1989.

APÊNDICE A – Tabela de expansão de cargas transversais $p_z(x,y)$ em série dupla trigonométrica (Fourier)

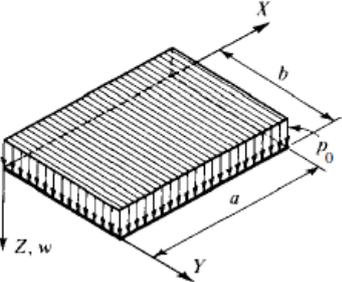
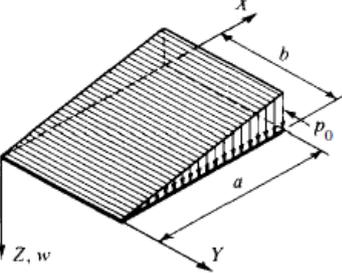
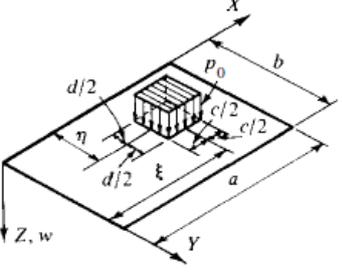
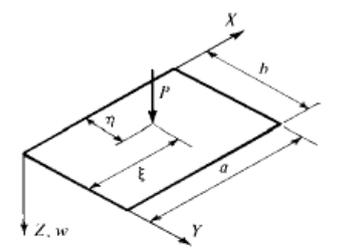
Carga	Coeficientes da Expansão
$p_z(x, y) = \sum \sum P_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$	P_{mn}
<p>1</p> 	$P_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^2 mn}$ <p>for $m, n = 1, 3, 5, \dots$</p>
<p>2</p> 	$P_{mn} = -\frac{8p_0 \cos m\pi}{\pi^2 mn}$ <p>for $m, n = 1, 2, 3, \dots$</p>
<p>3</p> 	$P_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^2 mn} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}$ $\times \sin \frac{m\pi c}{2a} \sin \frac{n\pi d}{2b}$ <p>for $m, n = 1, 2, 3, \dots$</p>
<p>4</p> 	$P_{mn} = \frac{4P}{ab} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}$ <p>for $m, n = 1, 2, 3, \dots$</p>

Figura A.1 – Expansão de carregamentos transversais $p_z(x,y)$ em série dupla de Fourier
(Fonte: Adaptada de SZILARD, 2004)

APÊNDICE B – Gráficos U_z (mm) x h_s/t_s para $\phi = 0,4; 0,3; 0,2$ e $0,1$

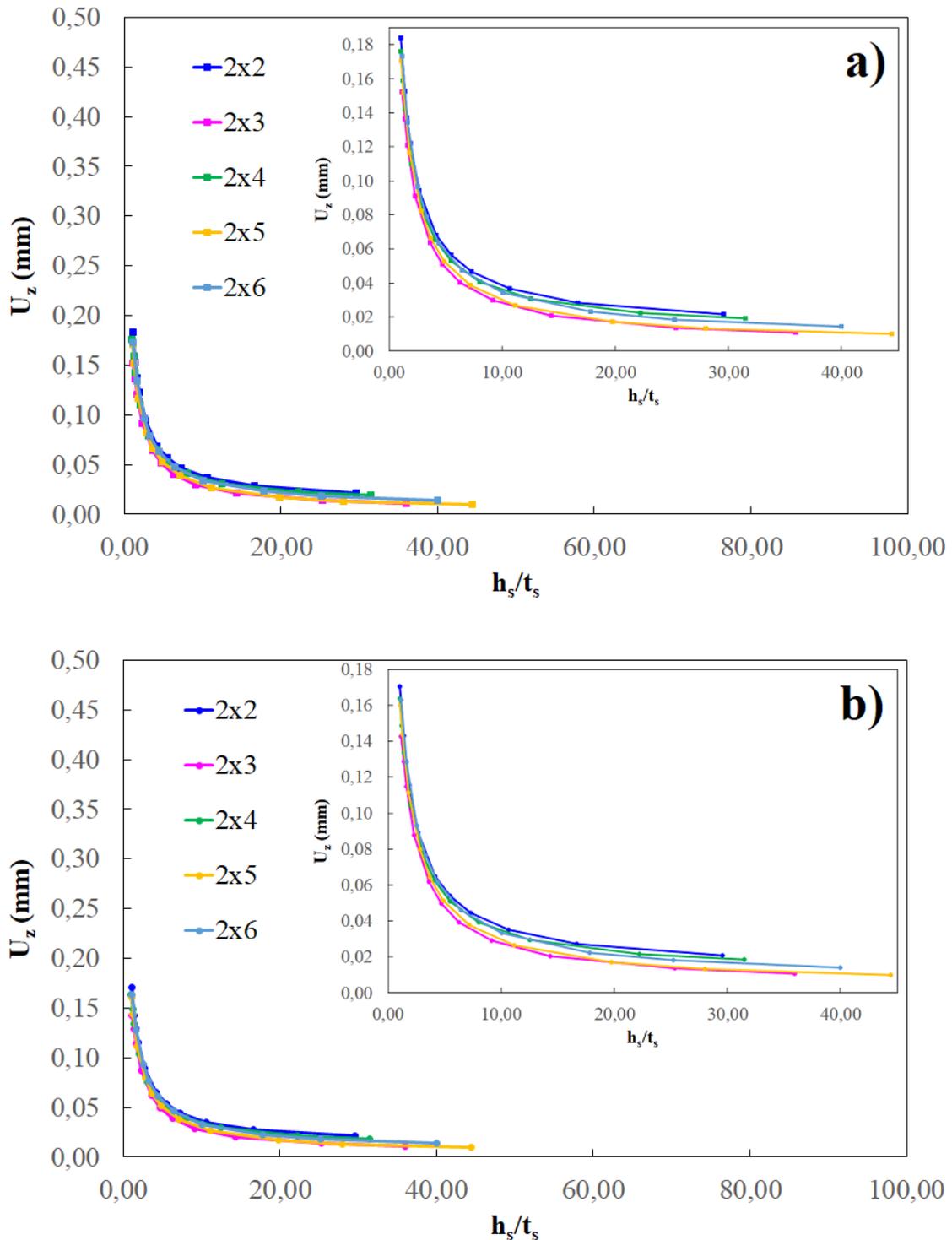


Figura B.1 – Deflexão central para $\phi = 0,4$ e $N_{ls} = 2$: a) SHELL93 e b) SOLID95

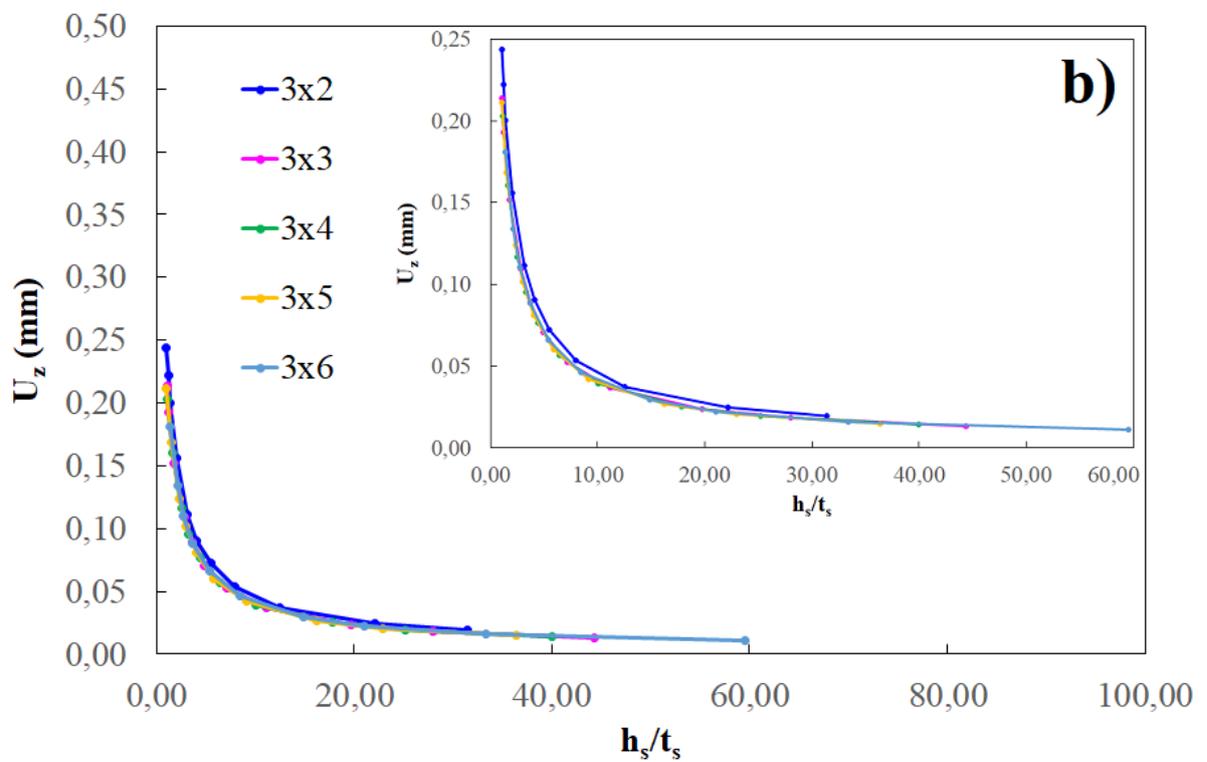
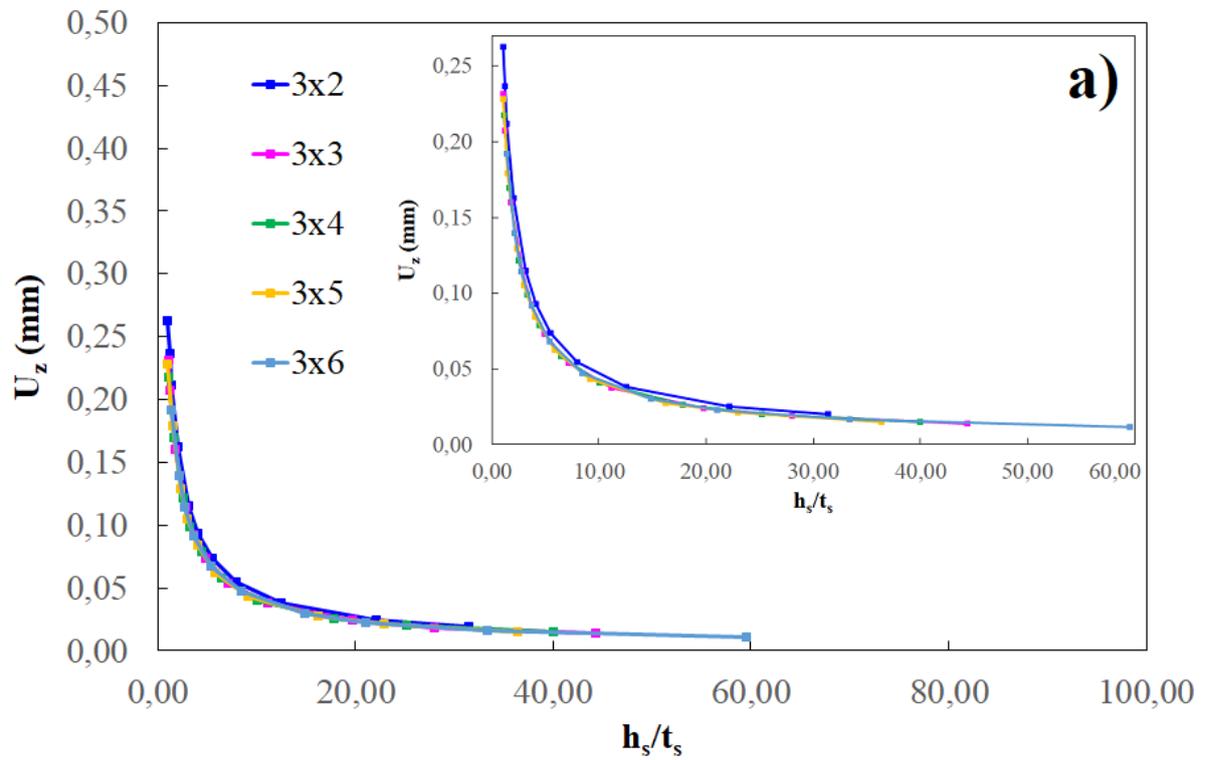


Figura B.2 – Deflexão central para $\phi = 0,4$ e $N_{ls} = 3$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

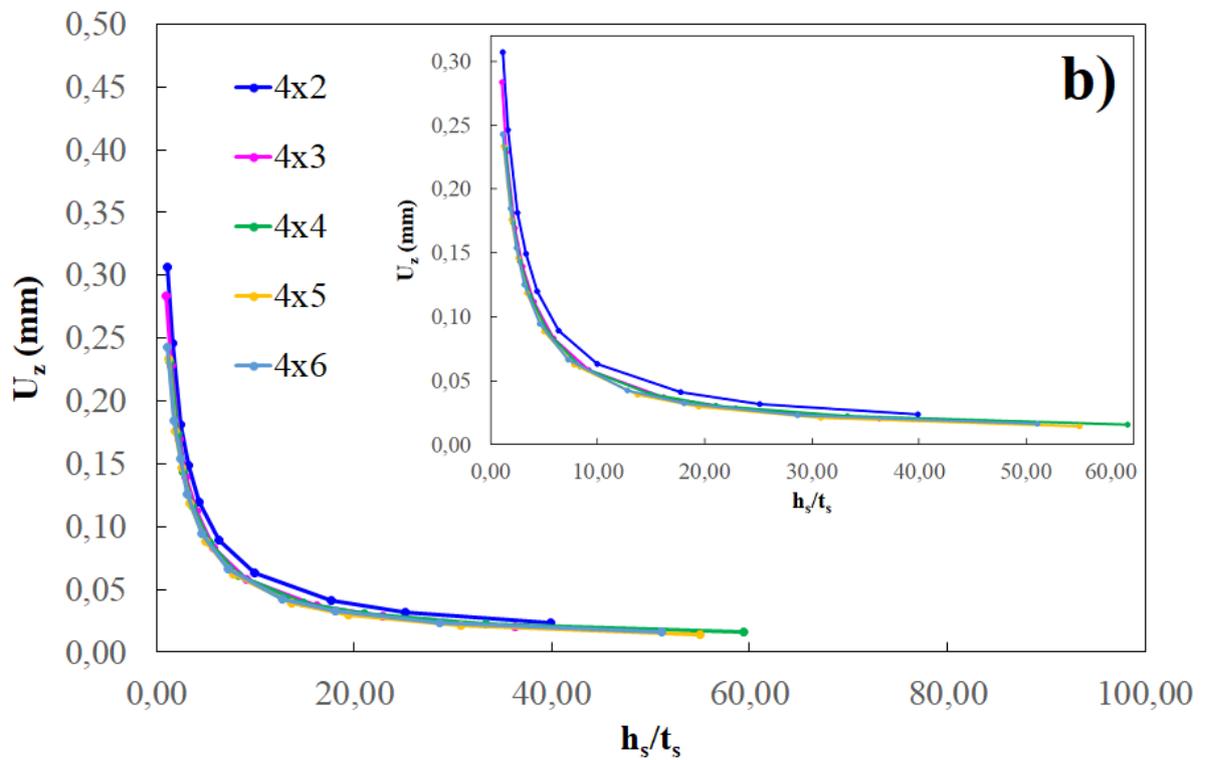
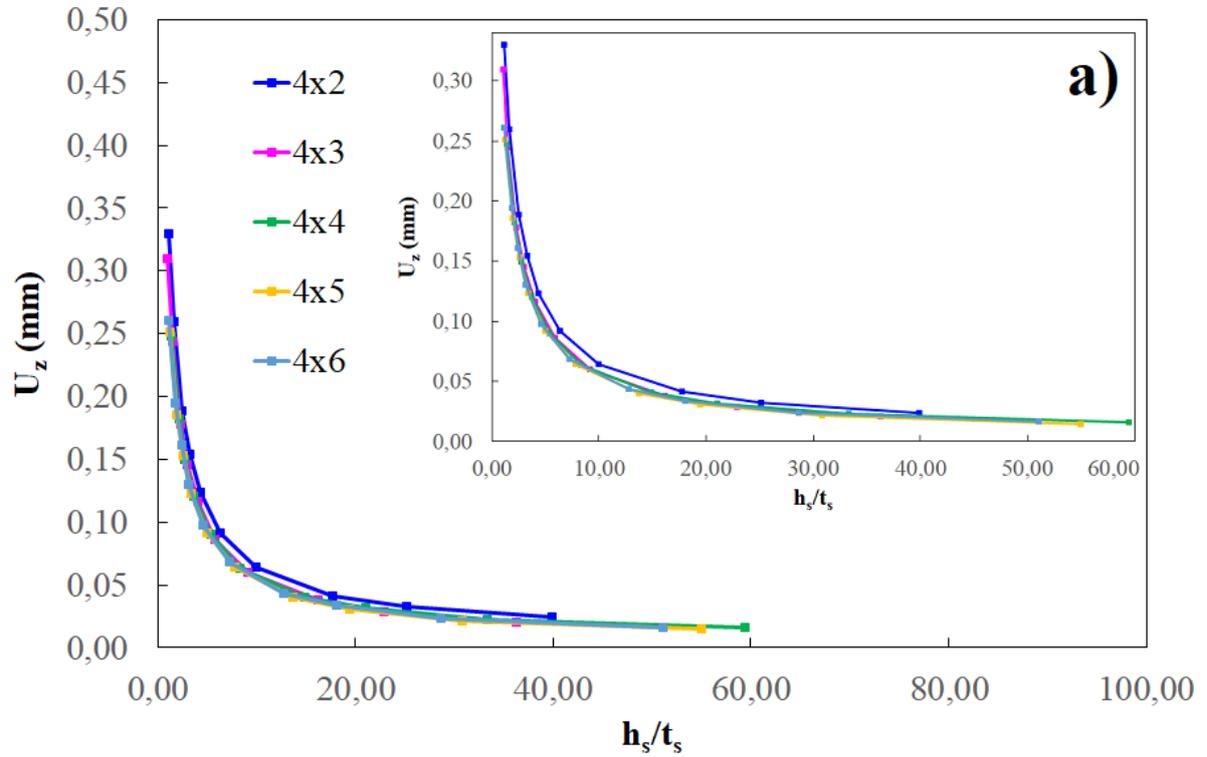


Figura B.3 – Deflexão central para $\phi = 0,4$ e $N_{ls} = 4$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

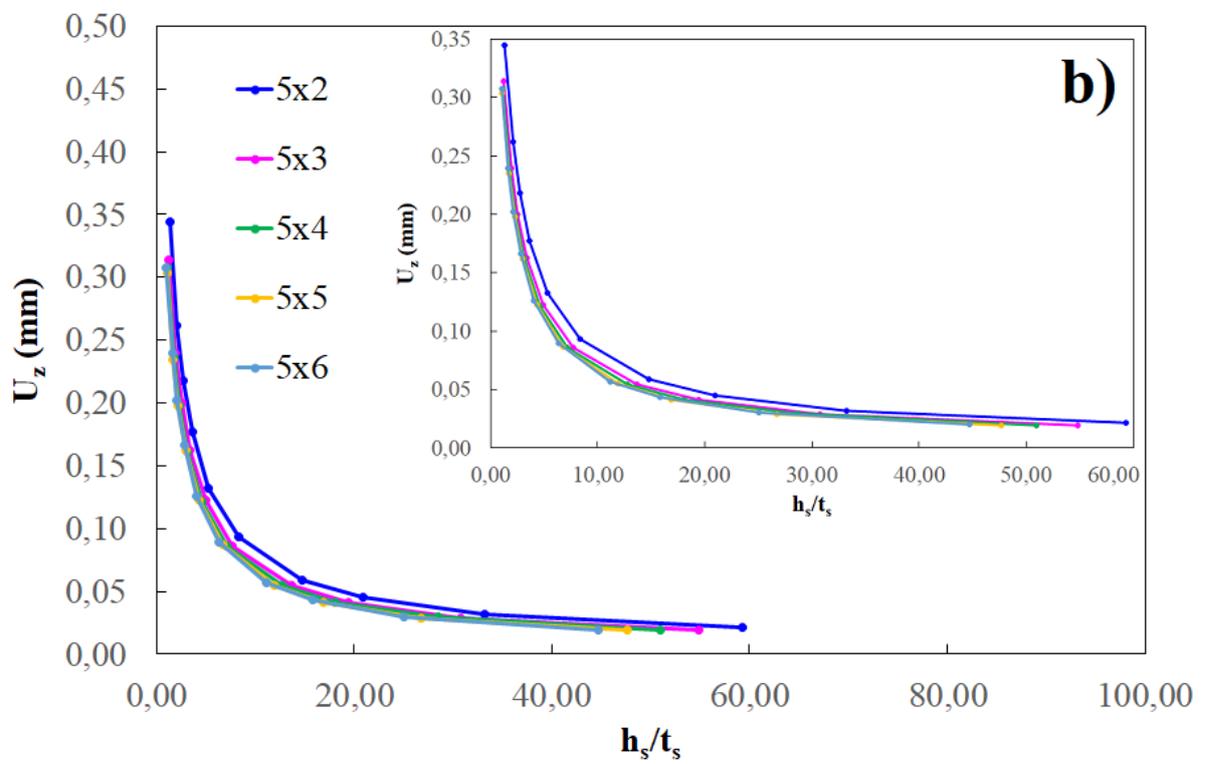
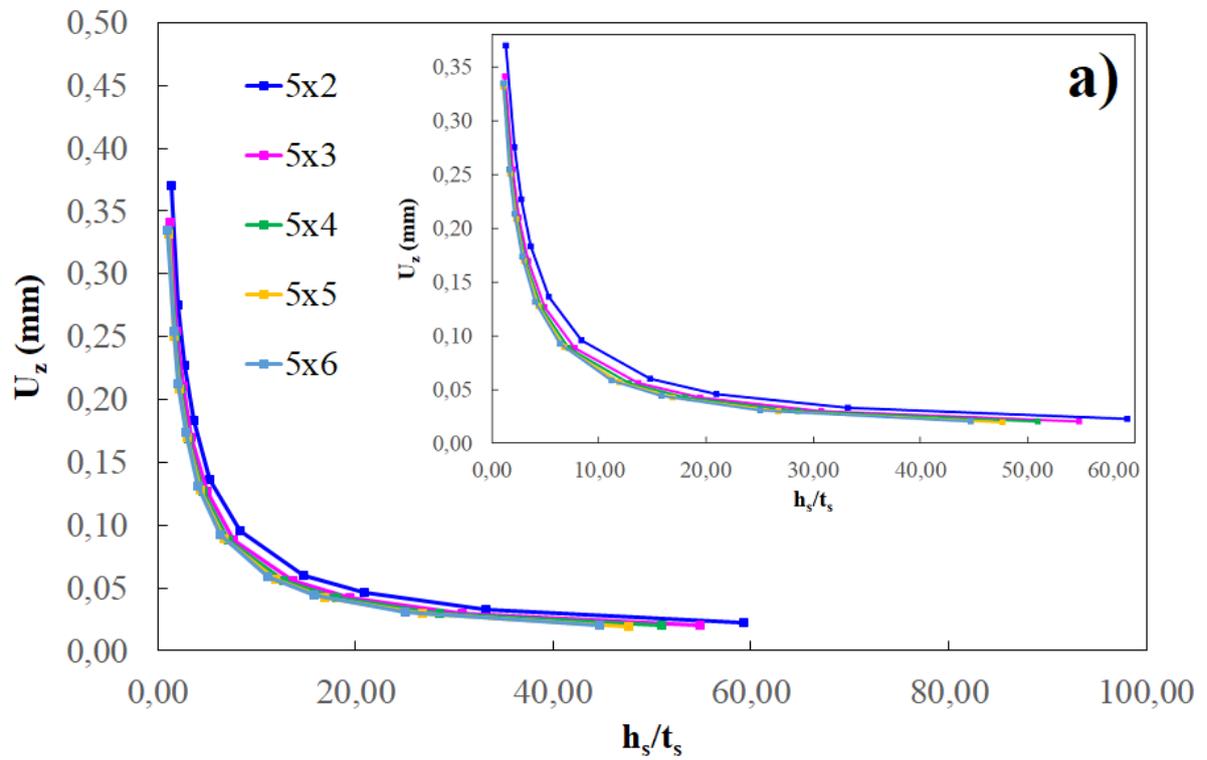


Figura B.4 – Deflexão central para $\phi = 0,4$ e $N_{ls} = 5$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

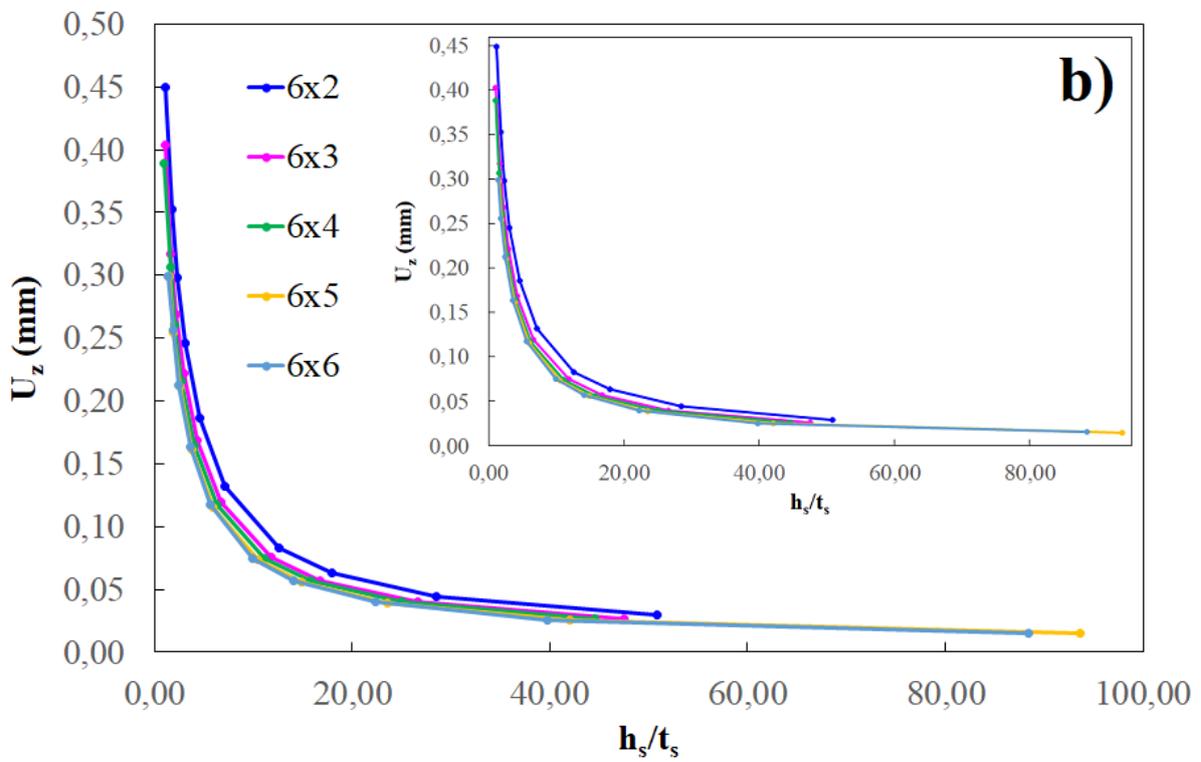
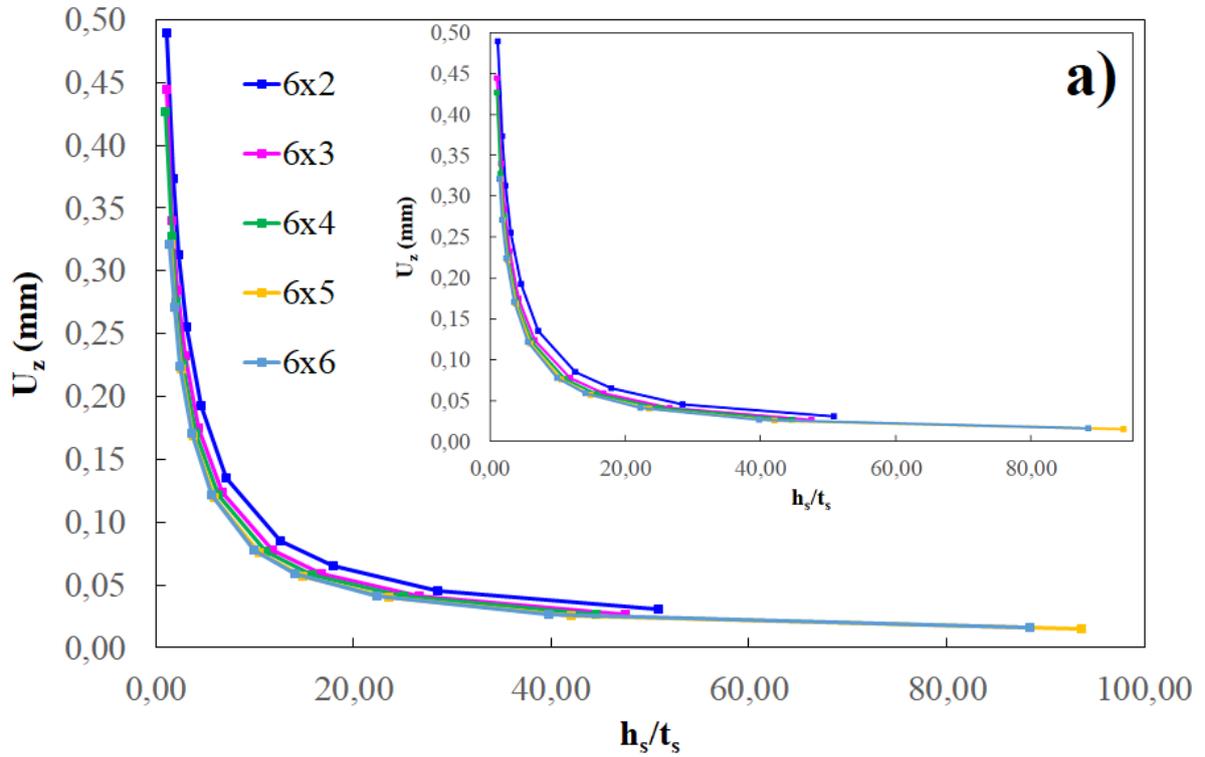


Figura B.5 – Deflexão central para $\phi = 0,4$ e $N_{ls} = 6$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

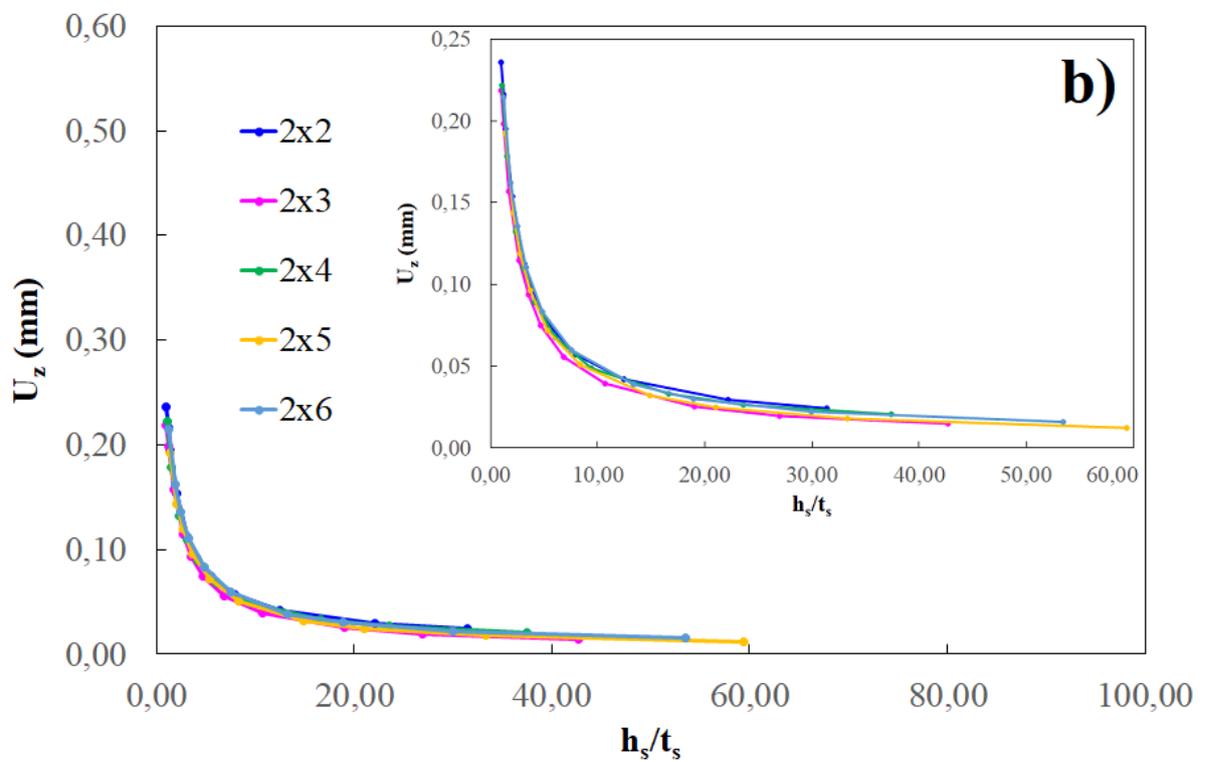
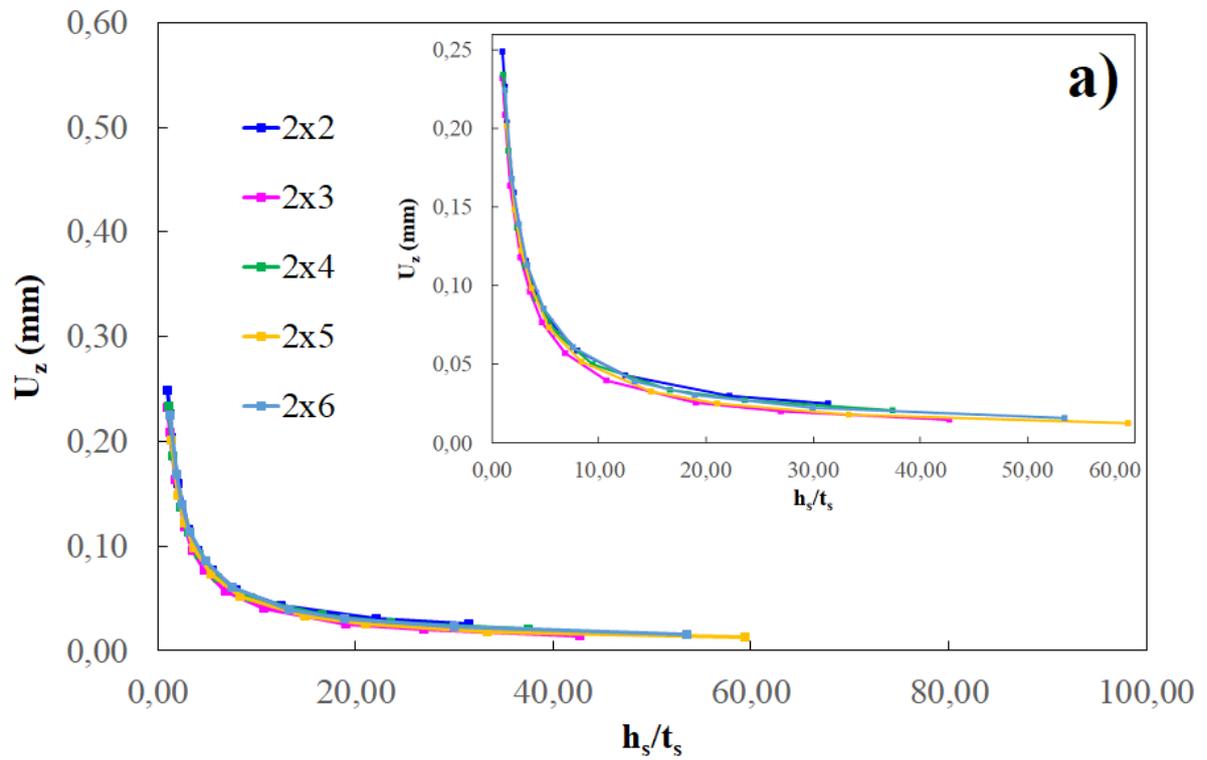


Figura B.6 – Deflexão central para $\phi = 0,3$ e $N_{ls} = 2$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

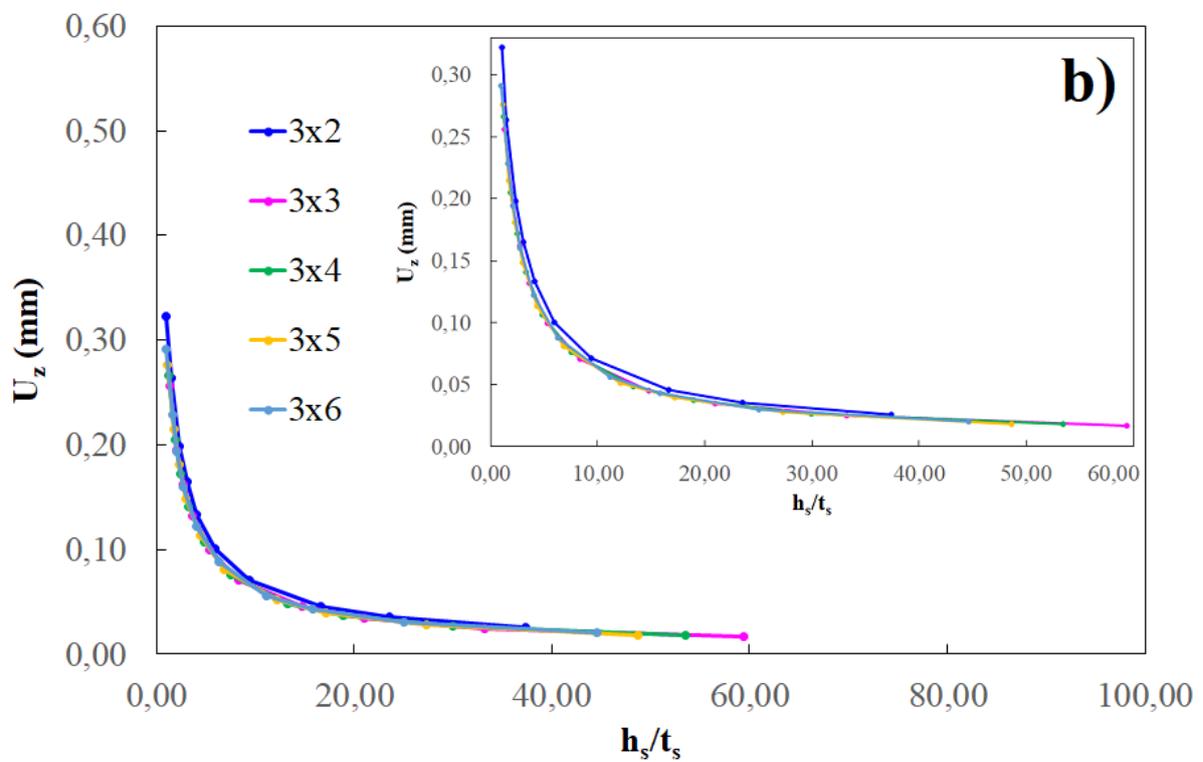
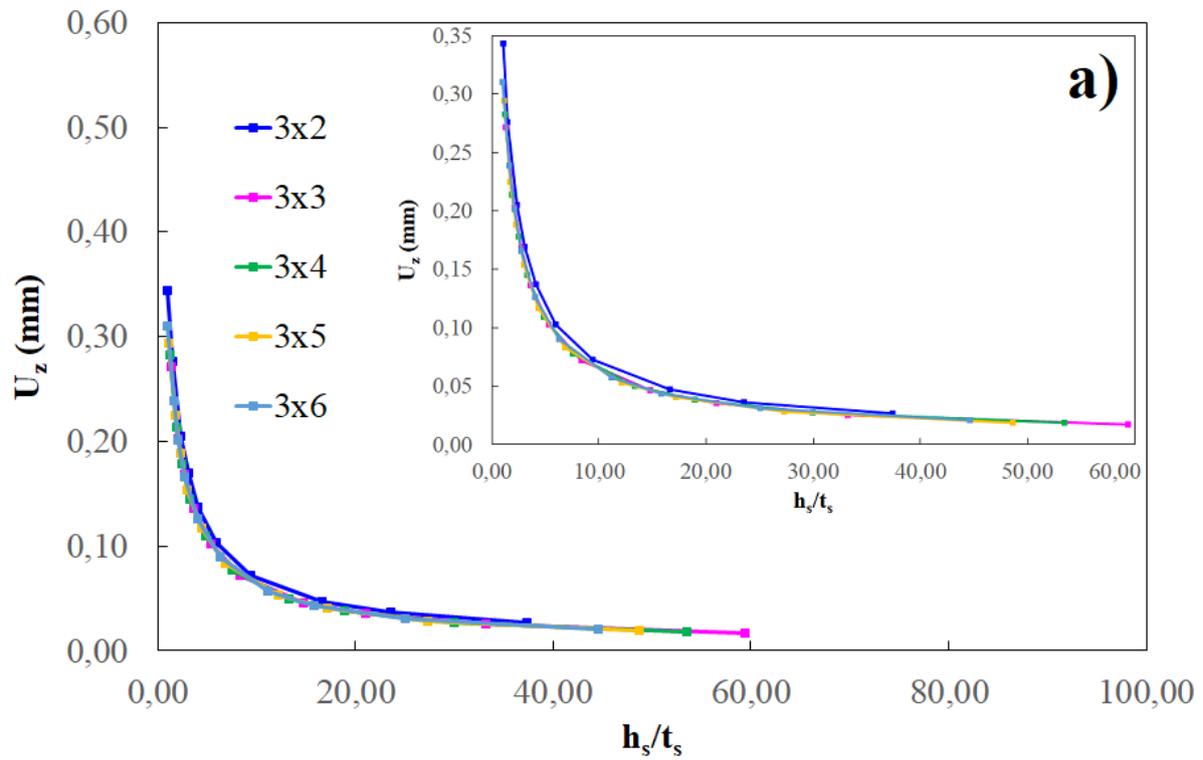


Figura B.7 – Deflexão central para $\phi = 0,3$ e $N_{ls} = 3$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

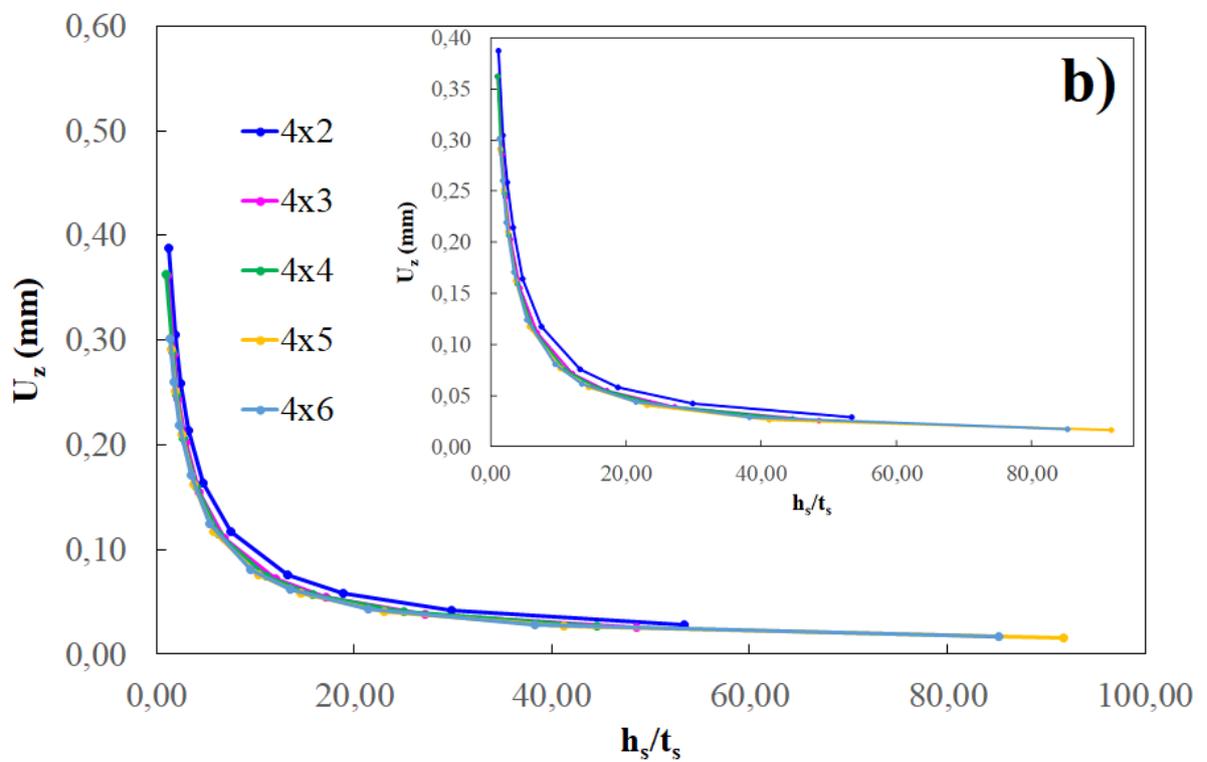
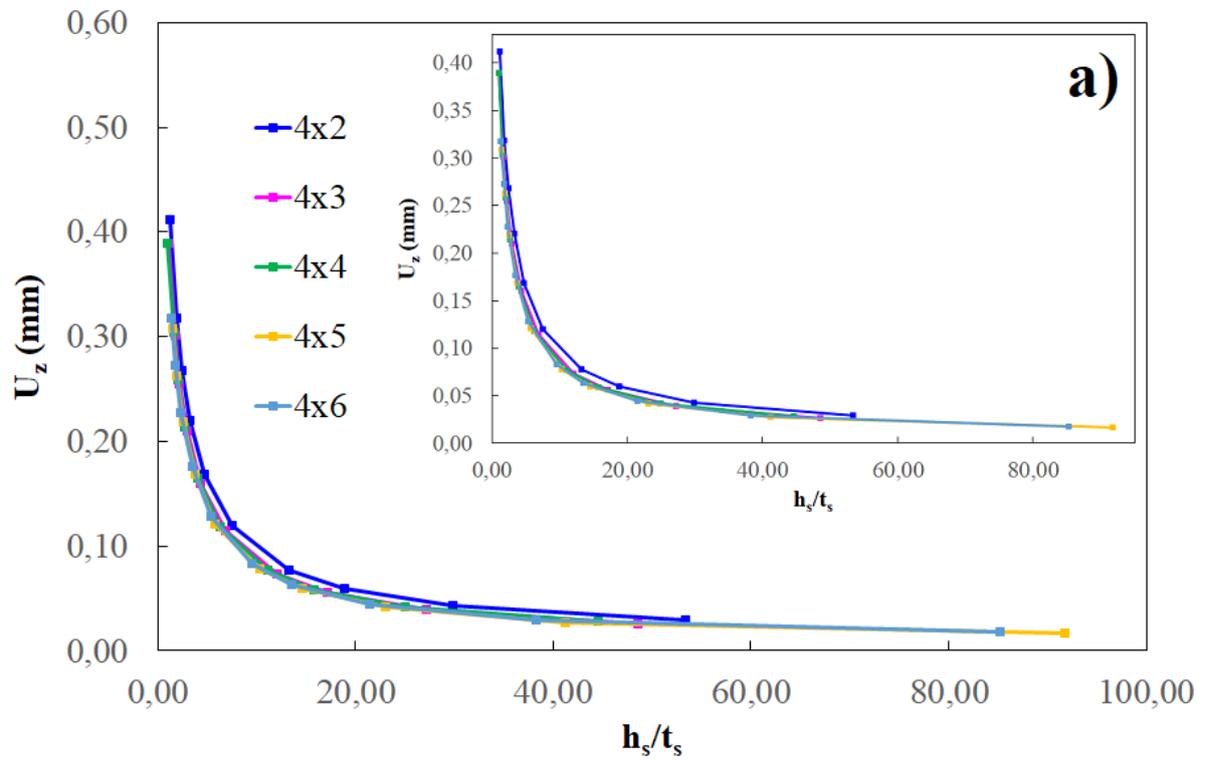


Figura B.8 – Deflexão central para $\phi = 0,3$ e $N_{ls} = 4$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

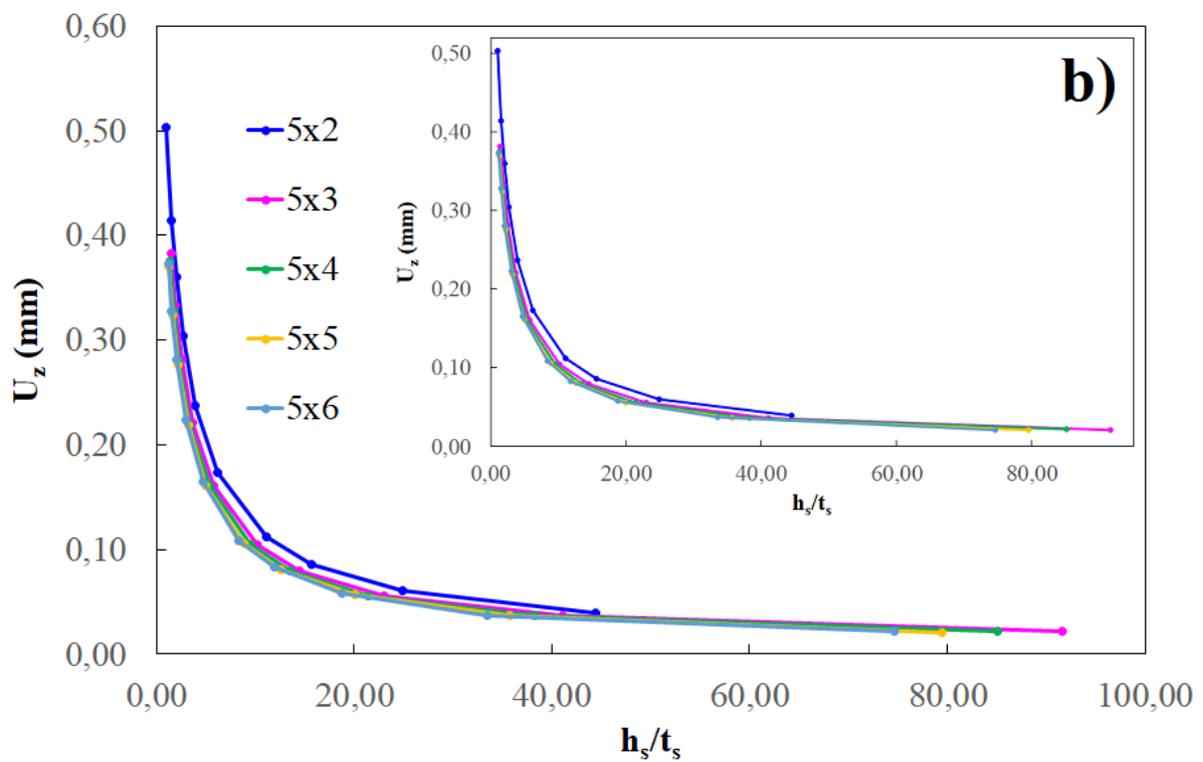
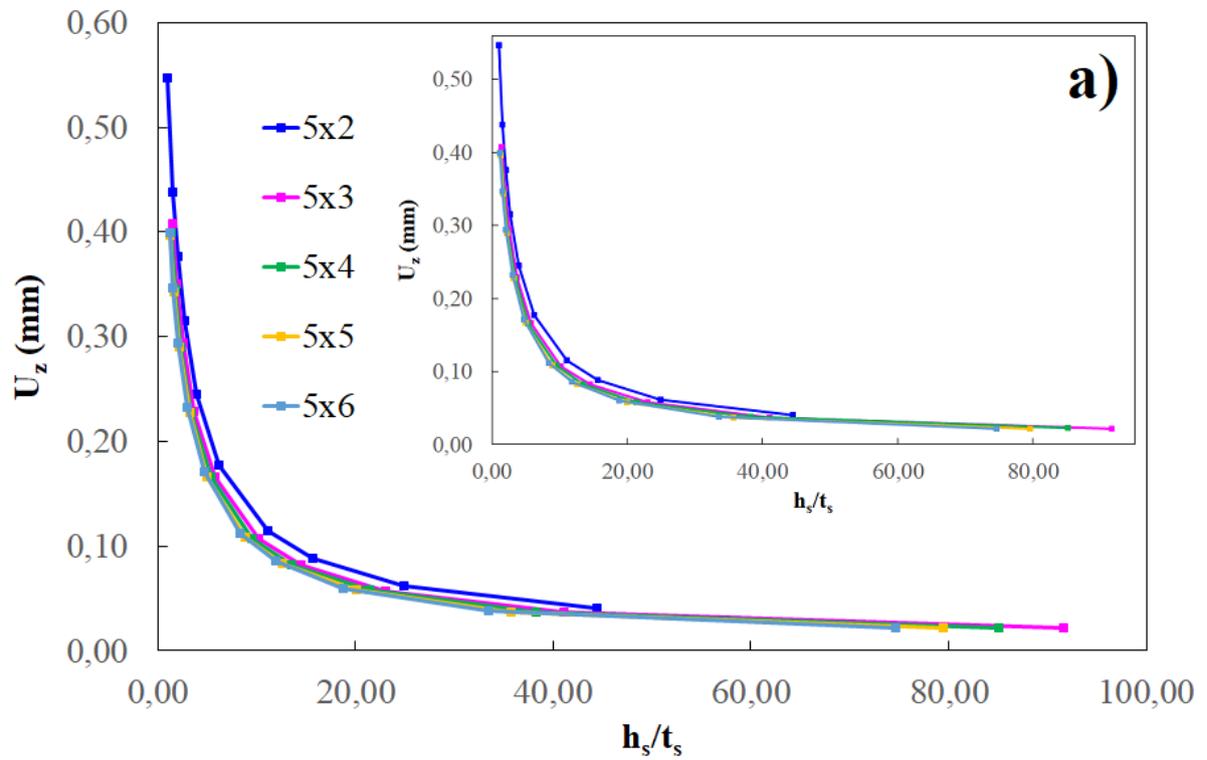


Figura B.9 – Deflexão central para $\phi = 0,3$ e $N_{ls} = 5$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

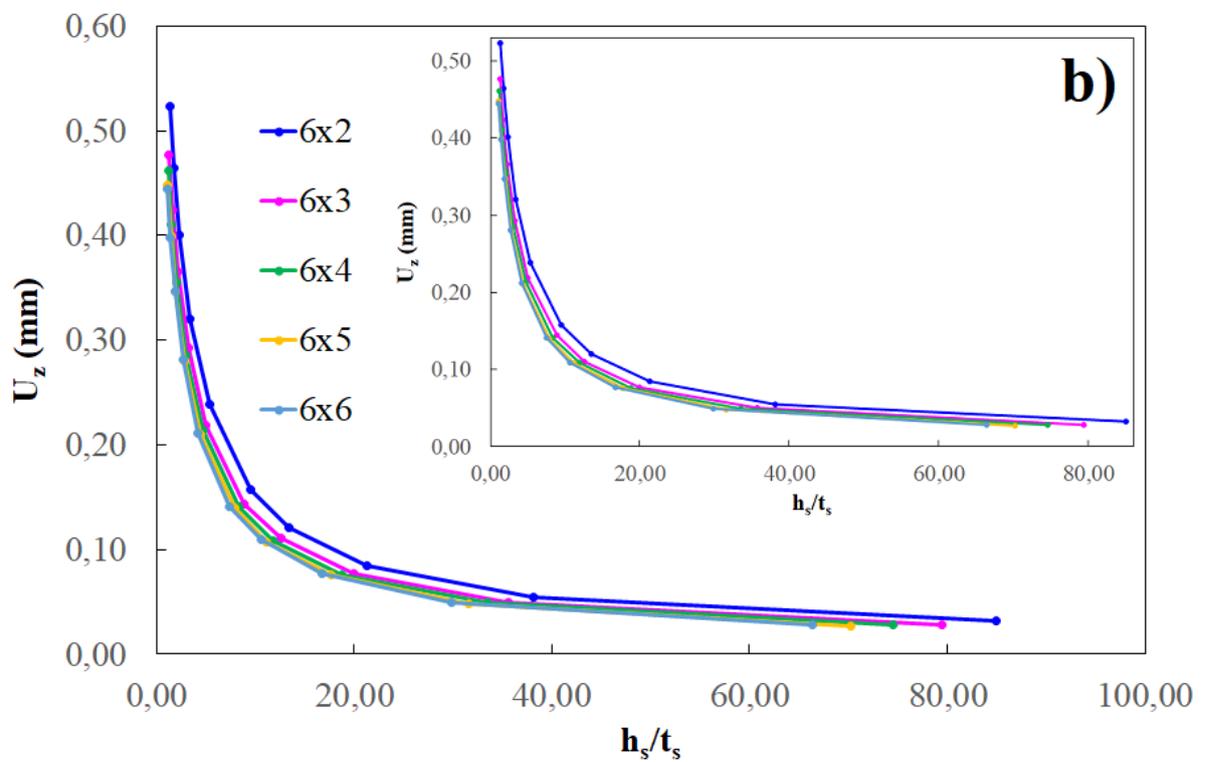
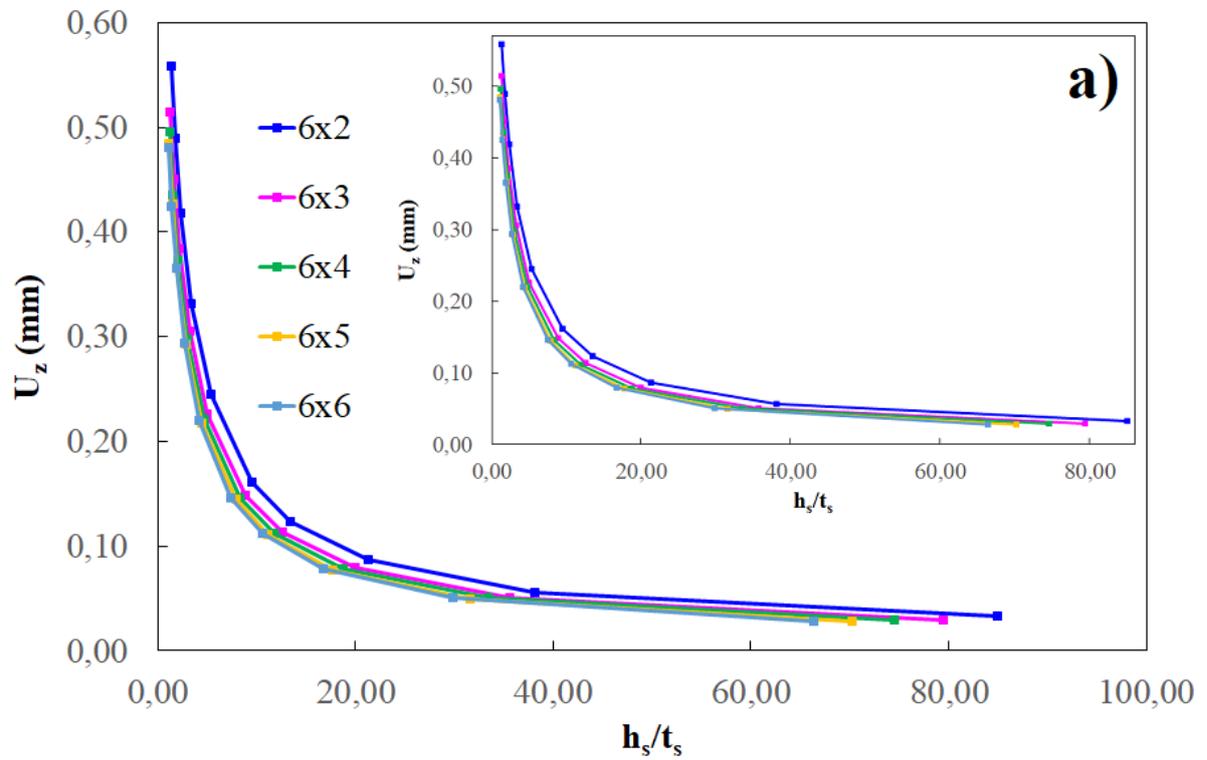


Figura B.10 – Deflexão central para $\phi = 0,3$ e $N_{ls} = 6$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

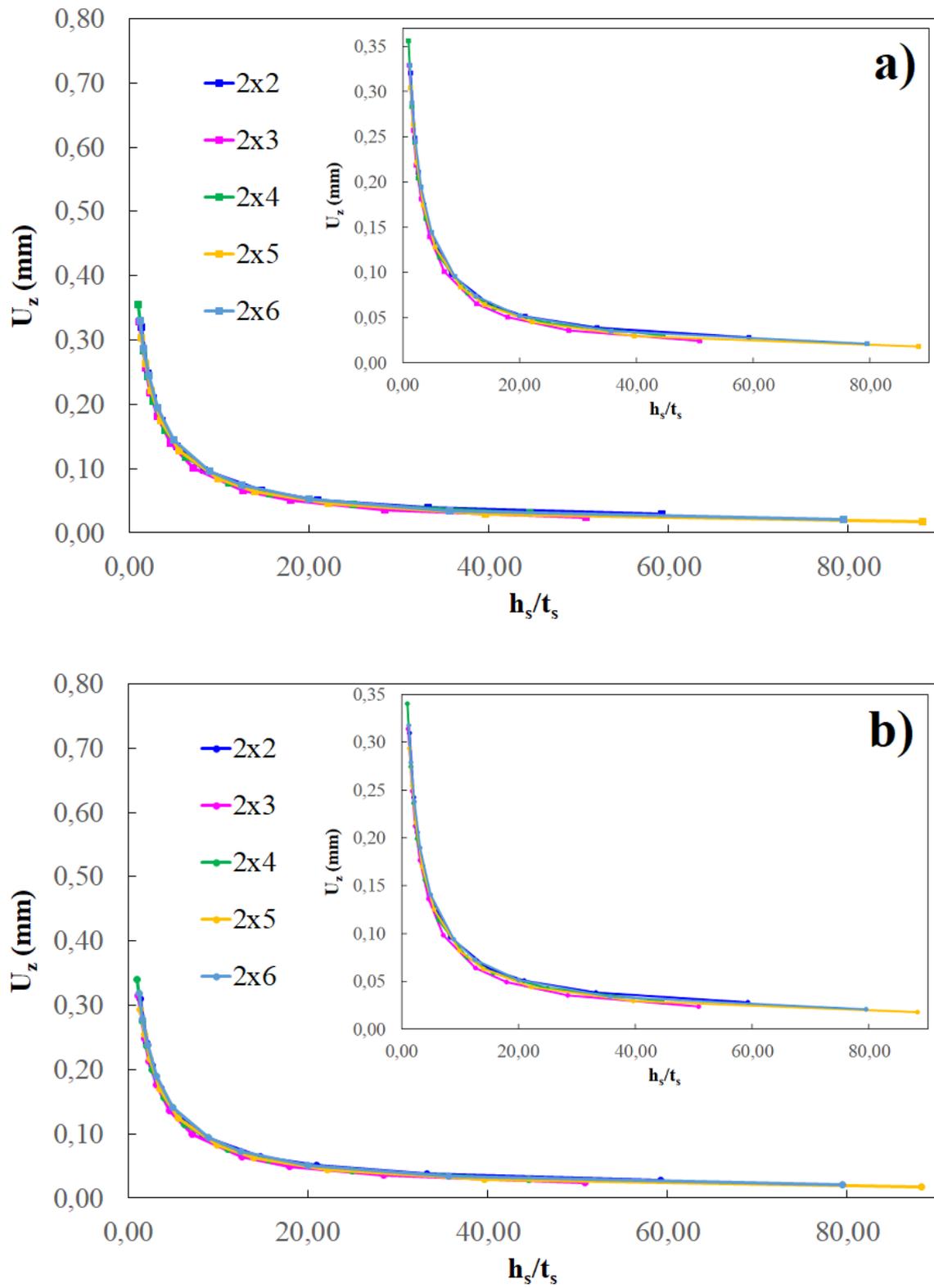


Figura B.11 – Deflexão central para $\phi = 0,2$ e $N_{ts} = 2$: a) SHELL93 e b) SOLID95

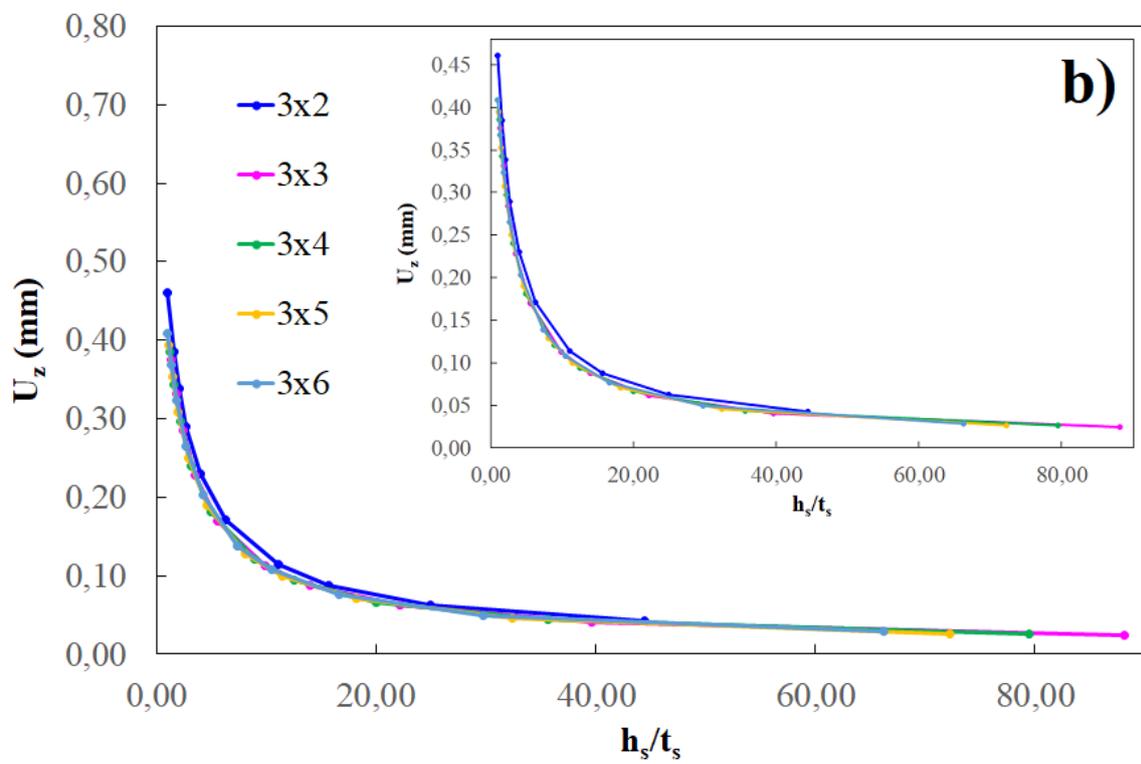
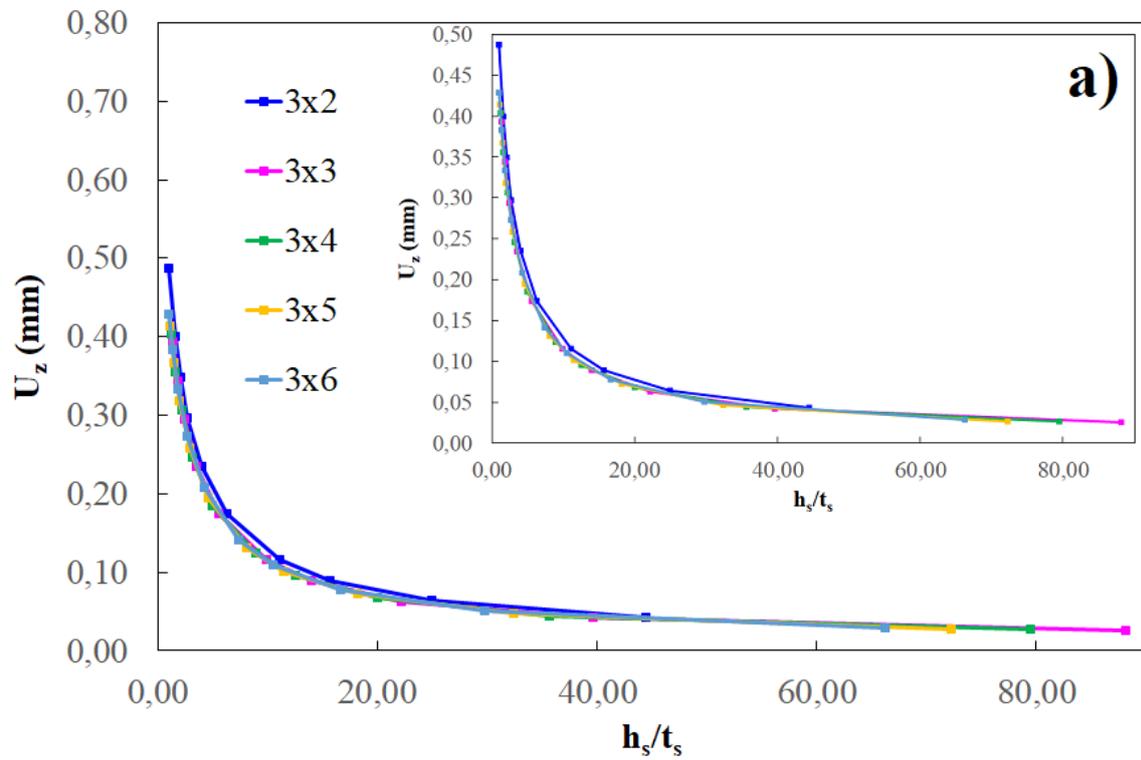


Figura B.12 – Deflexão central para $\phi = 0,2$ e $N_{ls} = 3$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

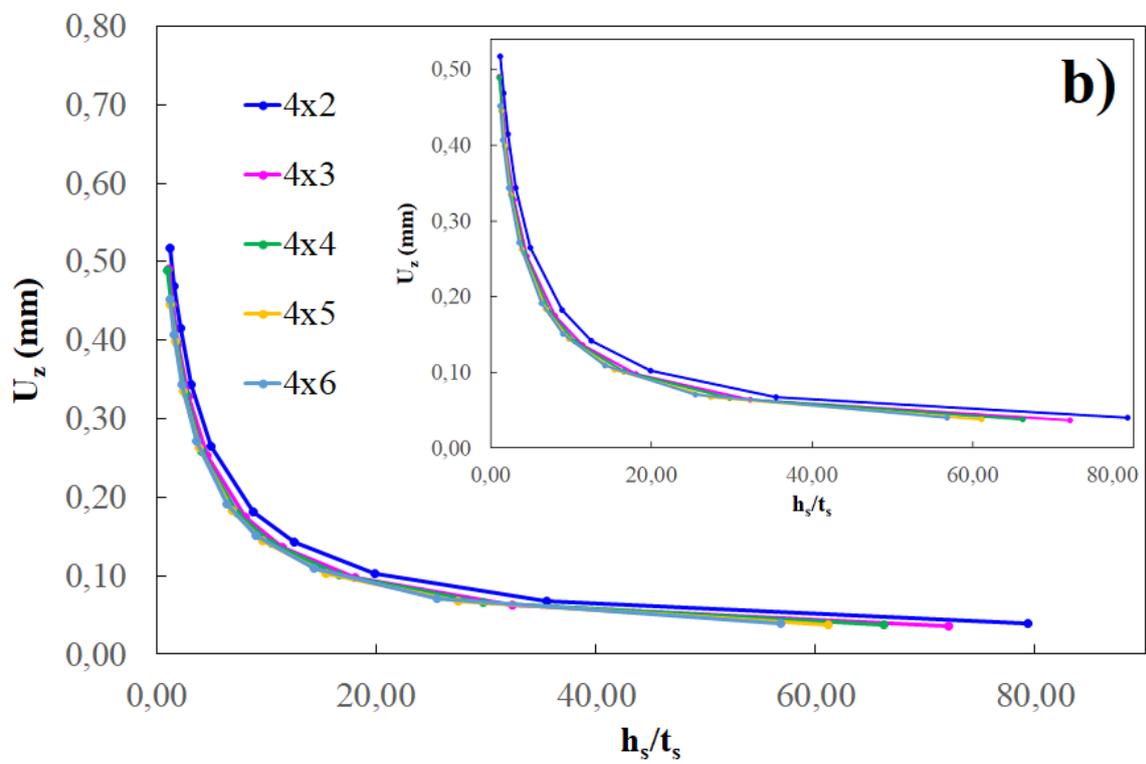
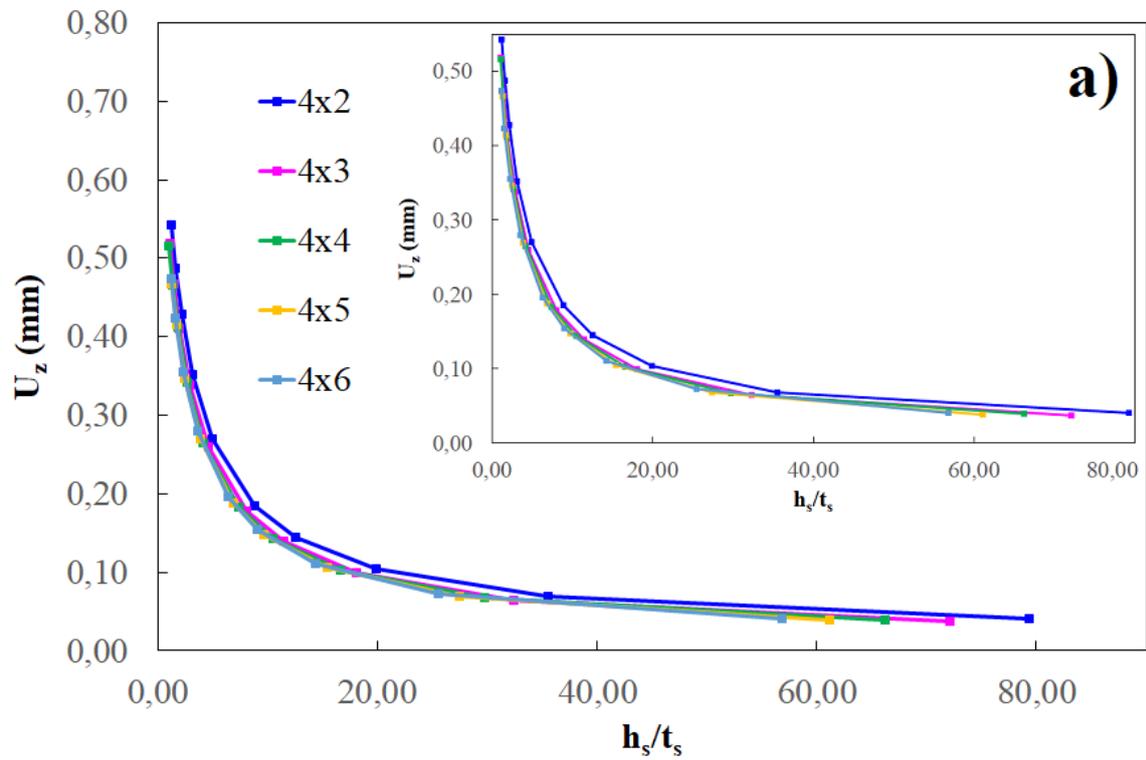


Figura B.13 – Deflexão central para $\phi = 0,2$ e $N_{ls} = 4$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

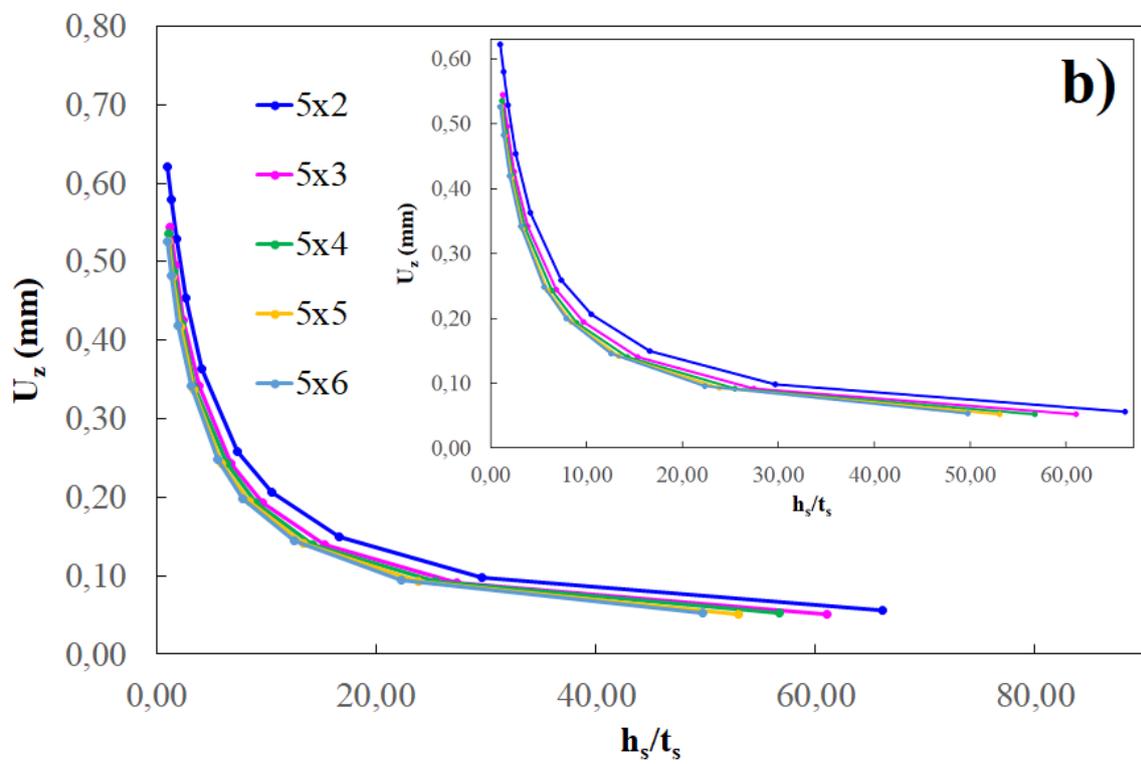
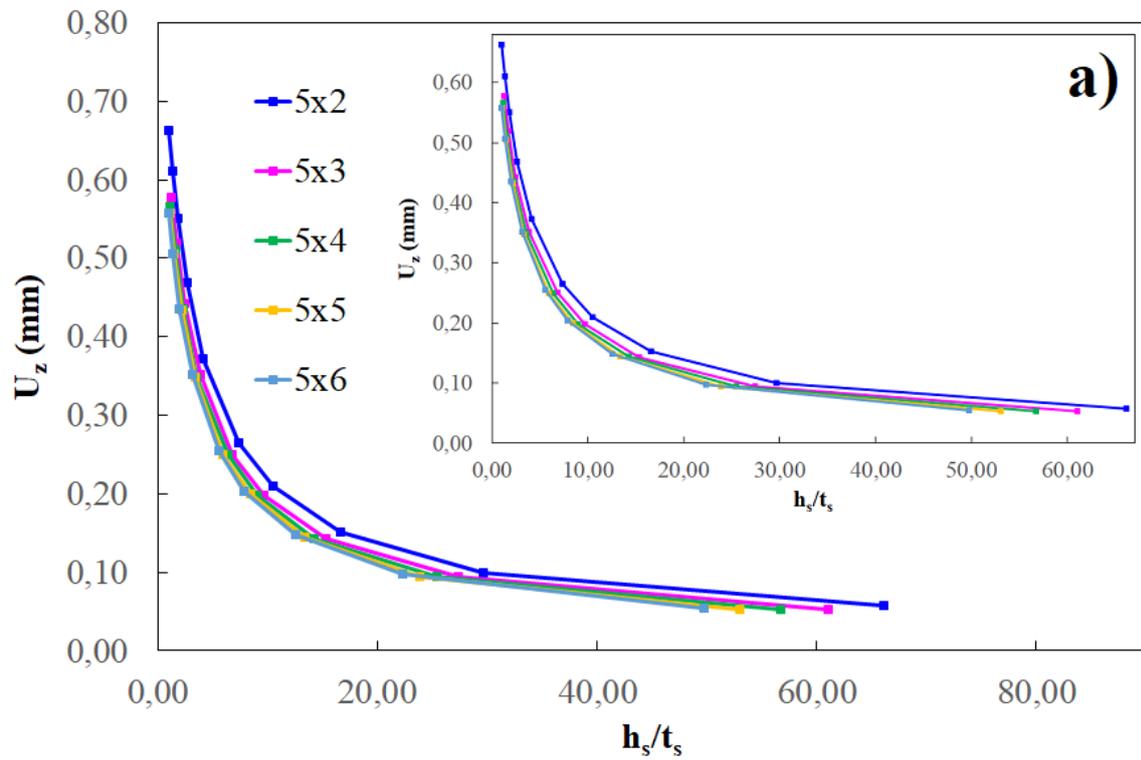


Figura B.14 – Deflexão central para $\phi = 0,2$ e $N_{ls} = 5$: a) SHELL93 e b) SOLID95

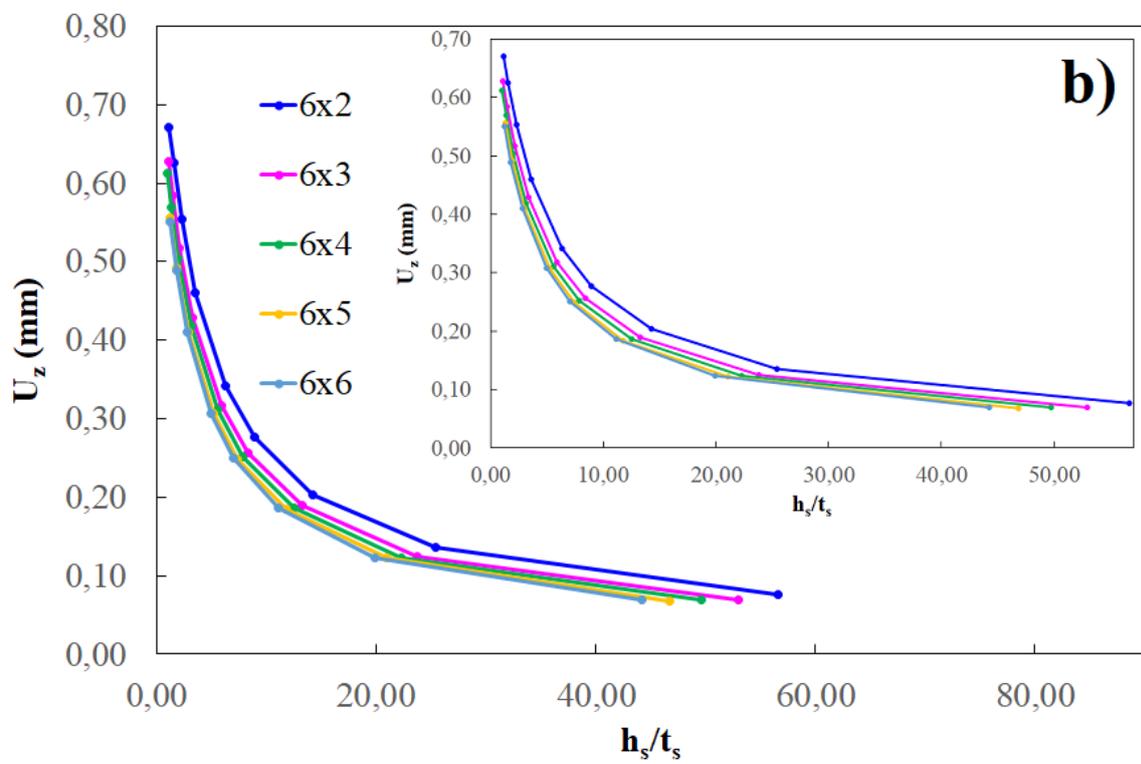
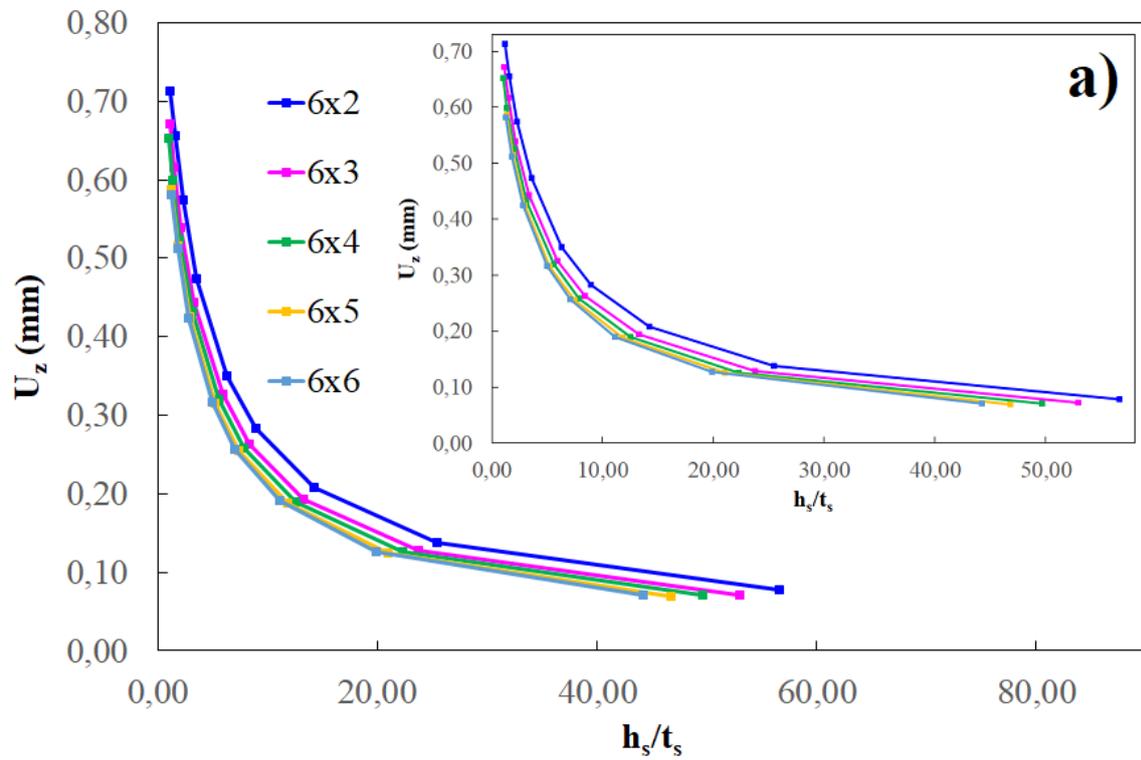


Figura B.15 – Deflexão central para $\phi = 0,2$ e $N_{ls} = 6$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

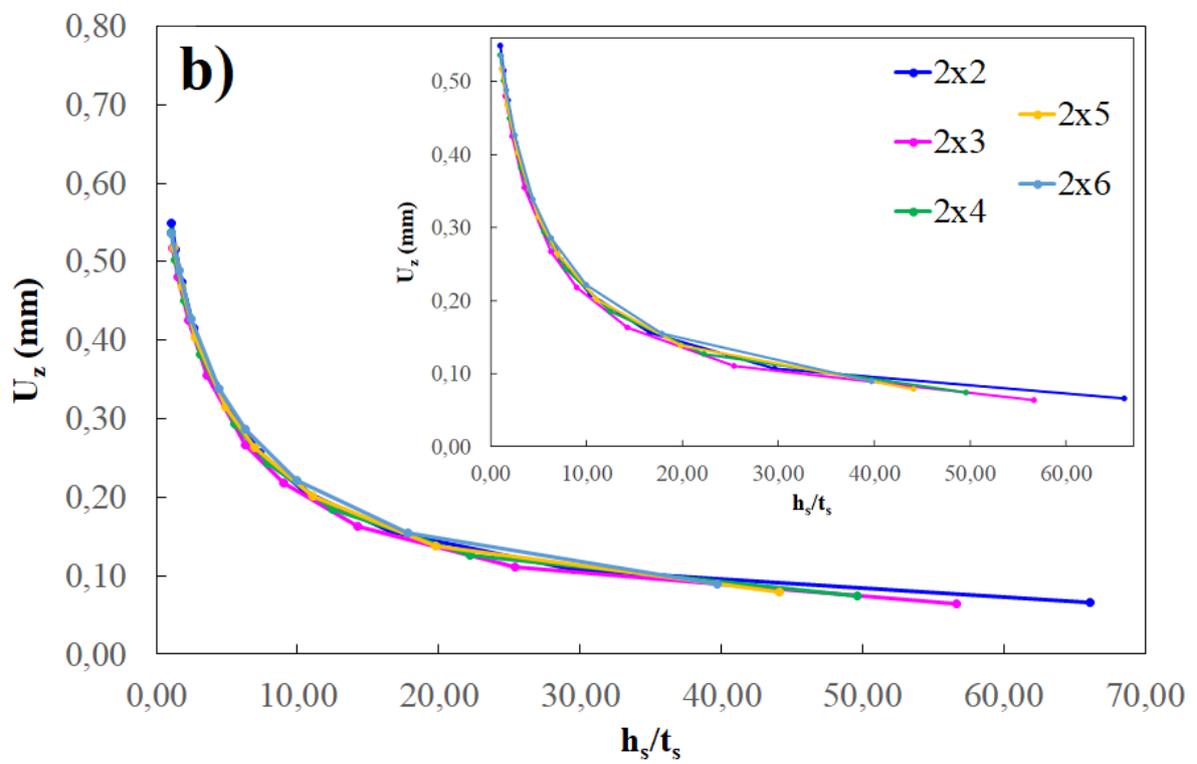
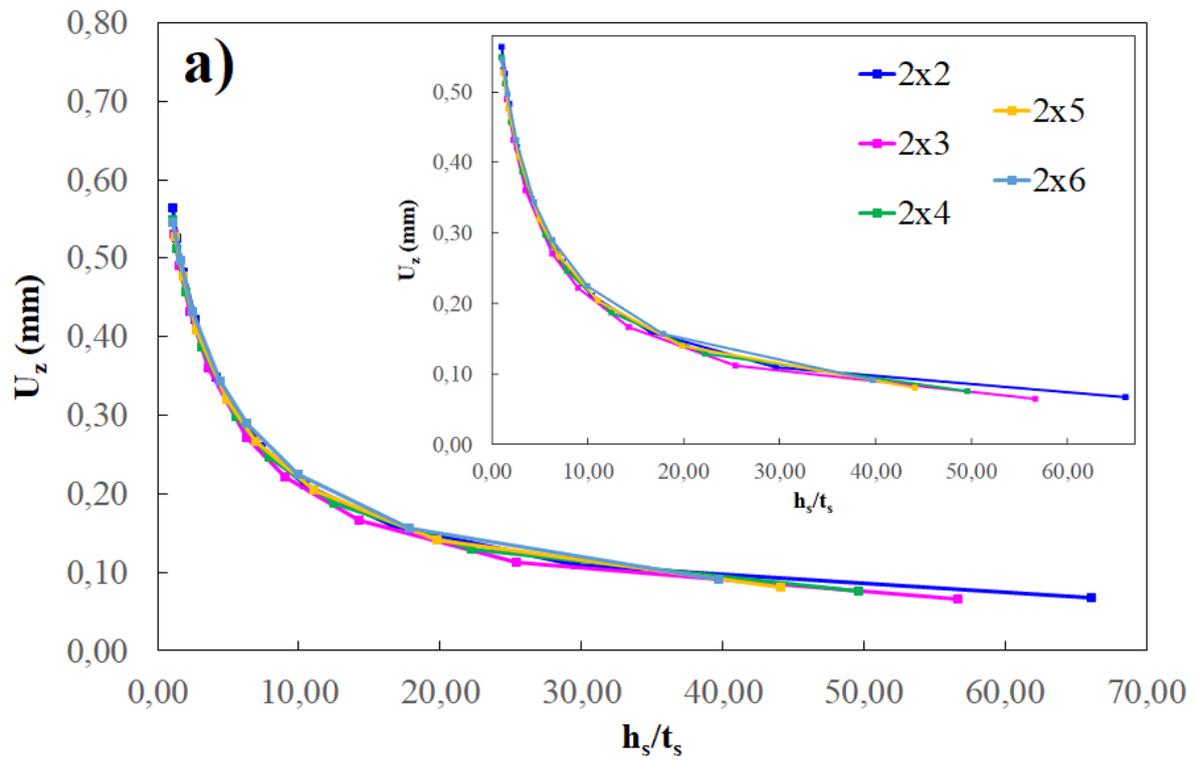


Figura B.16 – Deflexão central para $\phi = 0,1$ e $N_{ls} = 2$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

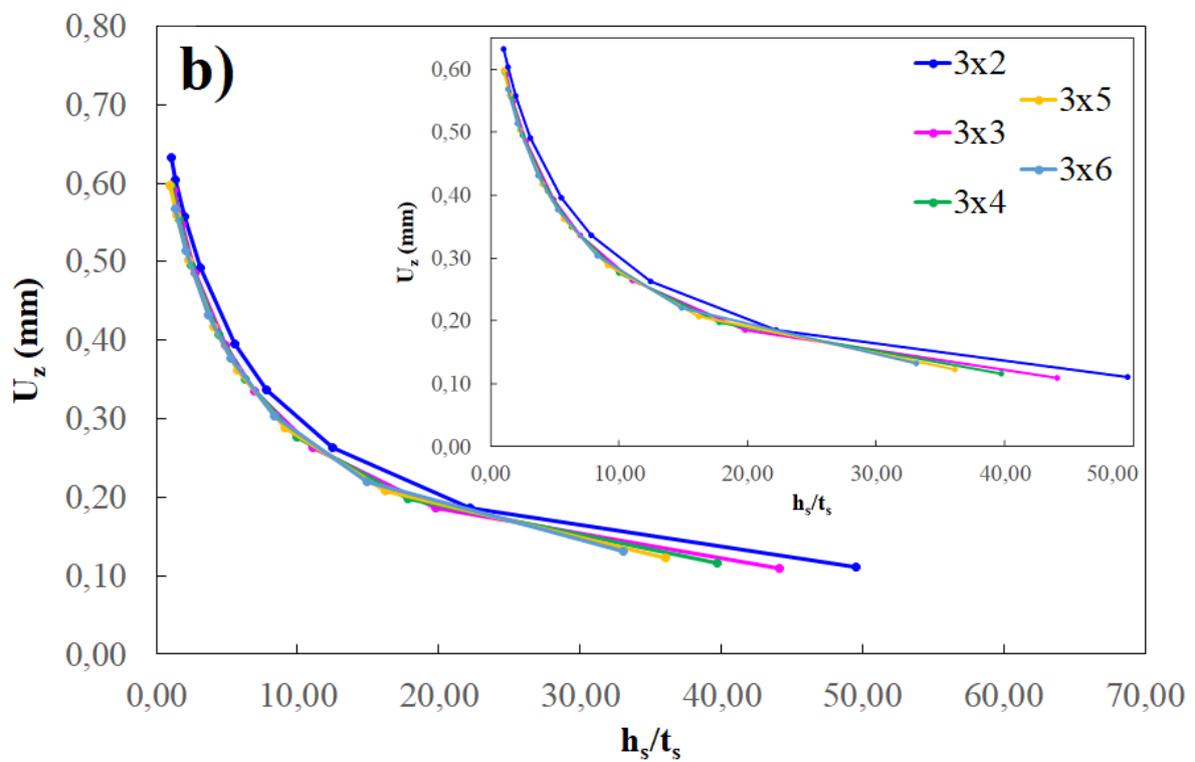
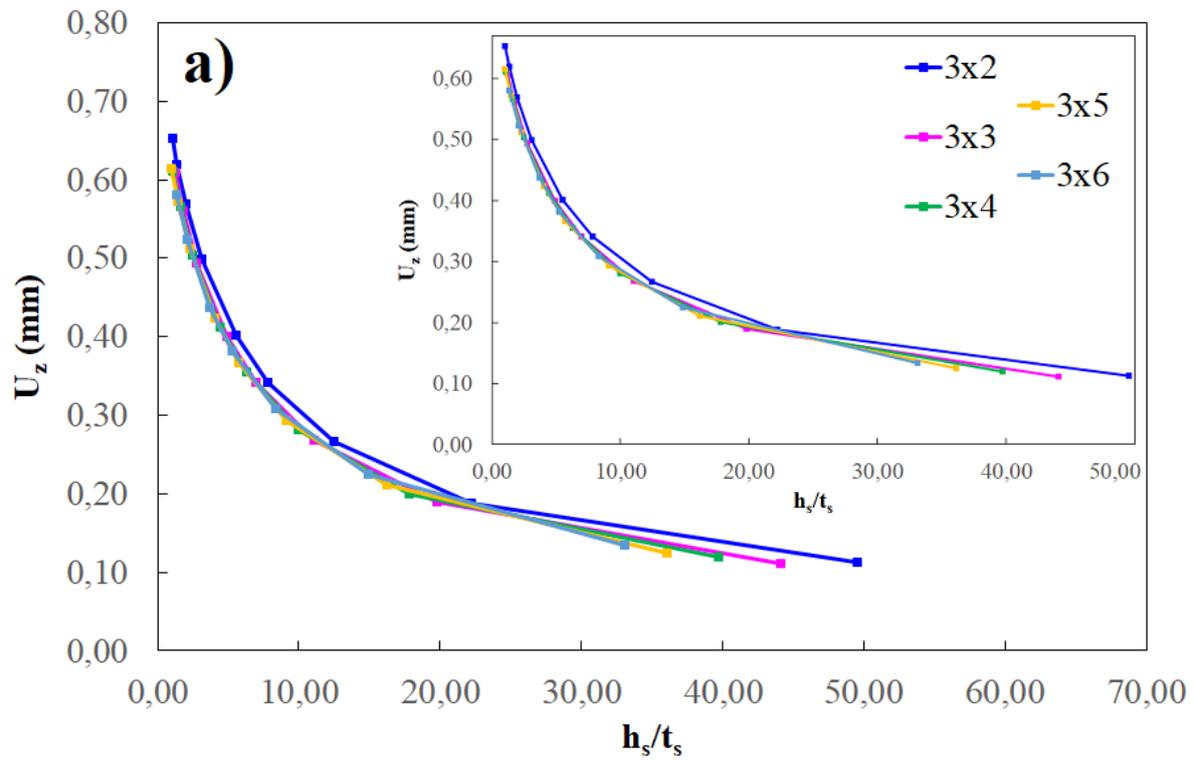


Figura B.17 – Deflexão central para $\phi = 0,1$ e $N_{ls} = 3$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

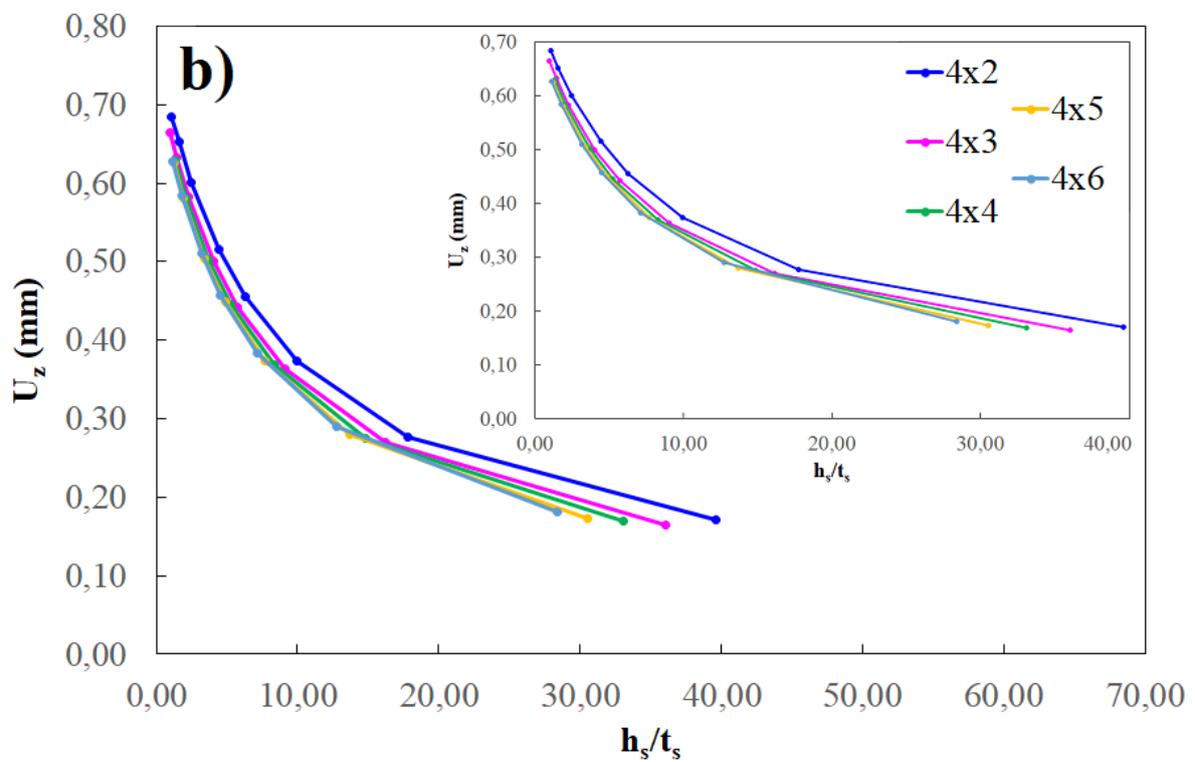
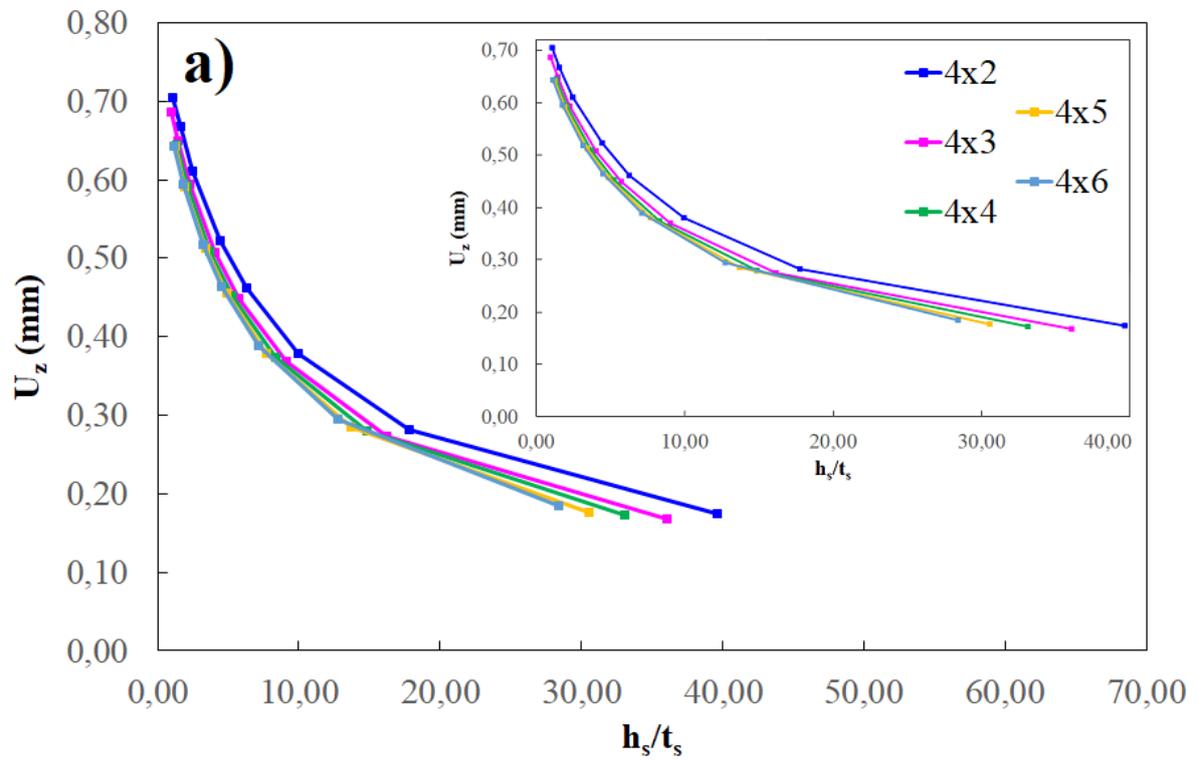


Figura B.18 – Deflexão central para $\phi = 0,1$ e $N_{ls} = 4$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

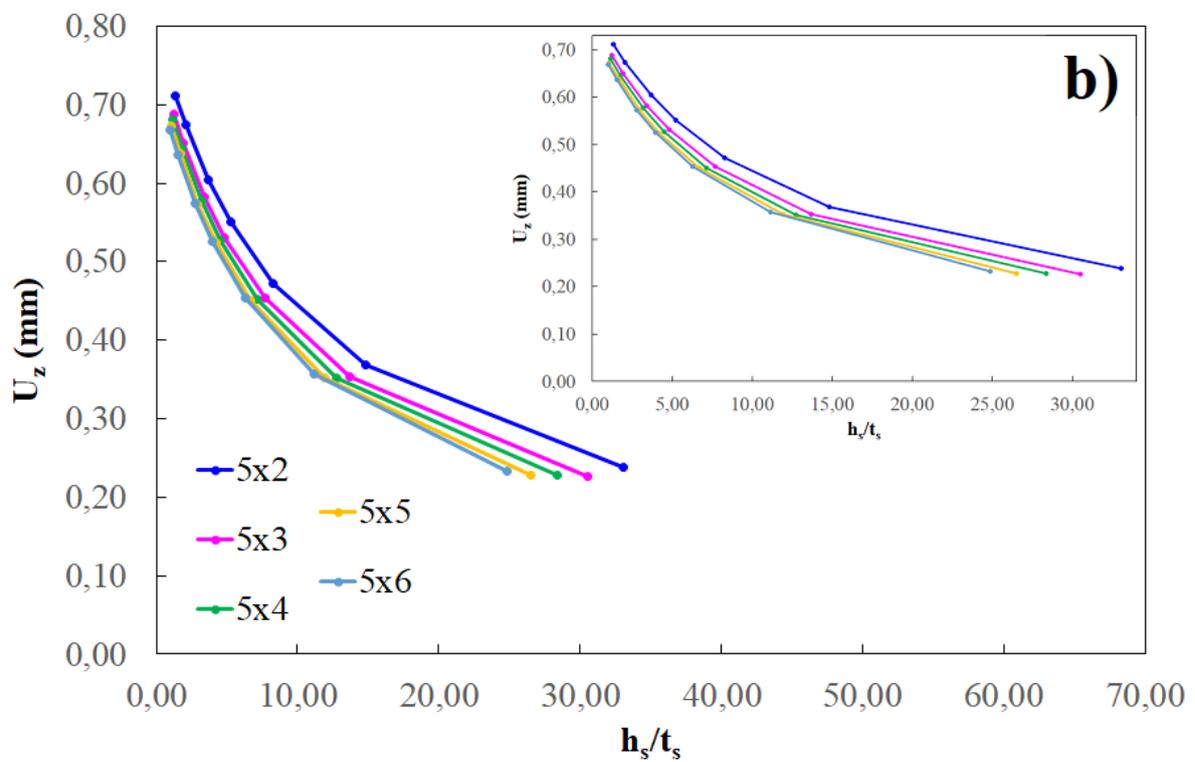
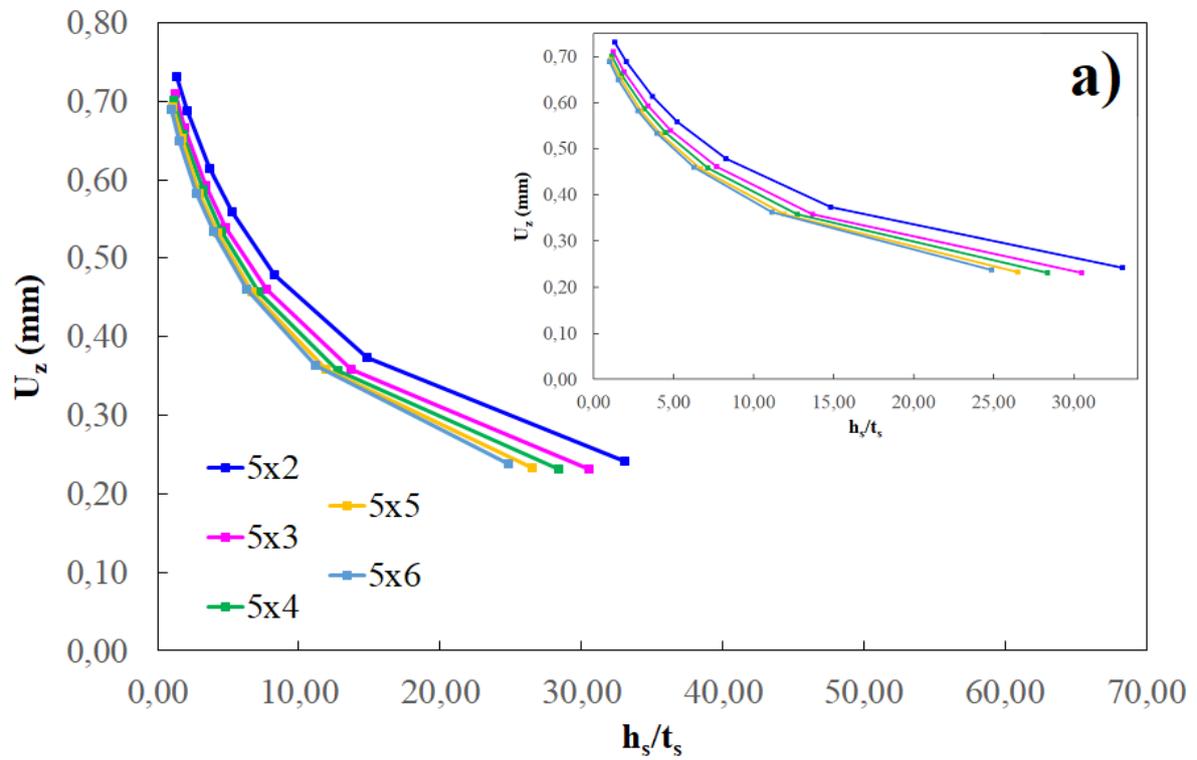


Figura B.19 – Deflexão central para $\phi = 0,1$ e $N_{ls} = 5$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

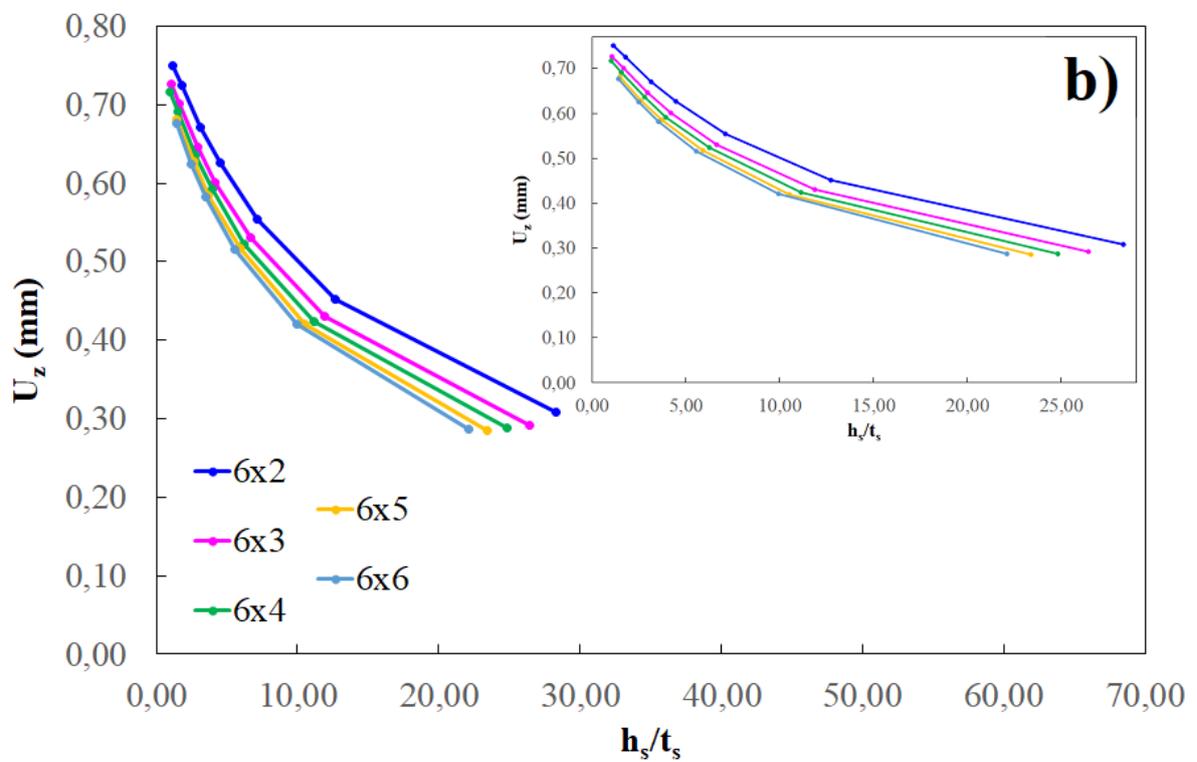
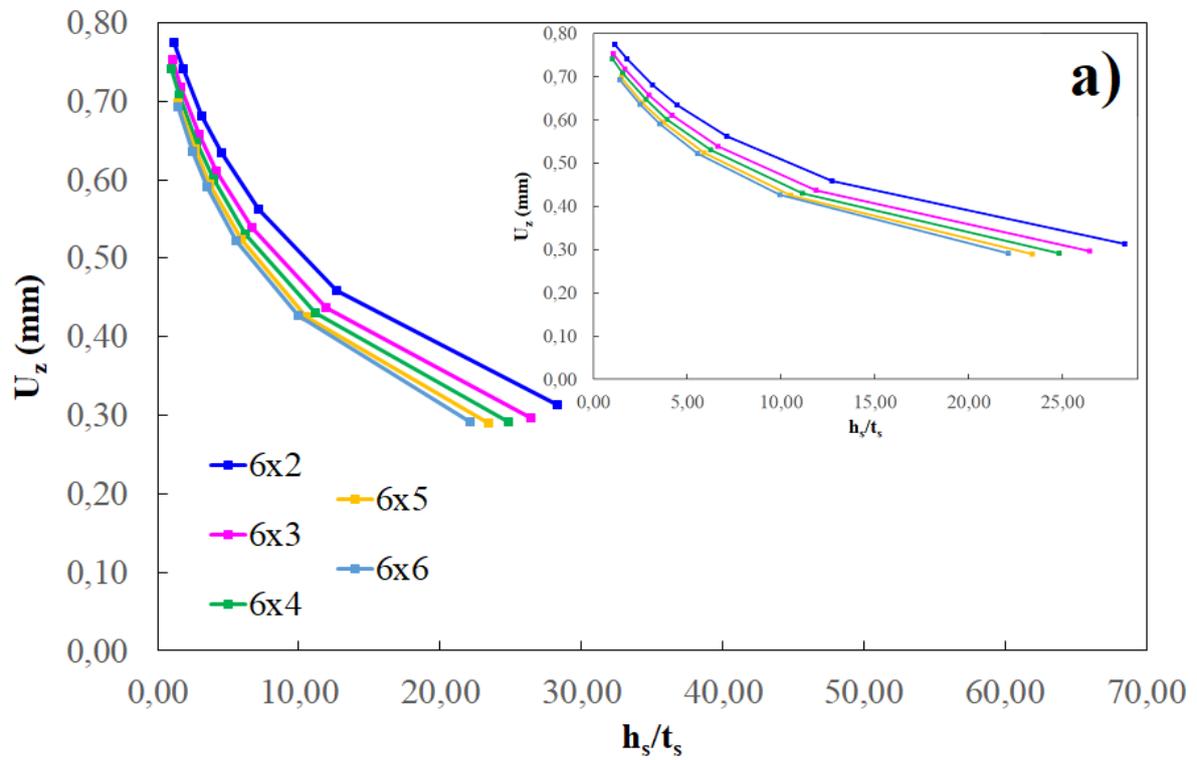


Figura B.20 – Deflexão central para $\phi = 0,1$ e $N_{ls} = 6$: a) *SHELL93* e b) *SOLID95*

APÊNDICE C – Tabelas com as constantes $C1$ e $C2$ e coeficiente de determinação R^2 dos ajustes de curvas

Tabela C.1. Valores de $C1$, $C2$ e R^2 para $\phi = 0,5$ e *SHELL93*

$P(N_{ts}, N_{ts})$	$C1$	$C2$	R^2	Intervalo
P (2,2)	0,150	-0,592	0,9921	$1,06 \leq h_s/t_s \leq 20,84$
P (2,3)	0,138	-0,823	0,9998	$1,16 \leq h_s/t_s \leq 17,91$
P (2,4)	0,140	-0,608	0,9890	$1,02 \leq h_s/t_s \leq 27,79$
P (2,5)	0,143	-0,807	0,9994	$1,18 \leq h_s/t_s \leq 35,03$
P (2,6)	0,148	-0,683	0,9949	$1,07 \leq h_s/t_s \leq 31,55$
P (3,2)	0,218	-0,800	0,9996	$1,01 \leq h_s/t_s \leq 27,72$
P (3,3)	0,196	-0,802	0,9995	$1,17 \leq h_s/t_s \leq 35,00$
P (3,4)	0,192	-0,797	0,9997	$1,07 \leq h_s/t_s \leq 31,55$
P (3,5)	0,191	-0,797	0,9995	$1,13 \leq h_s/t_s \leq 45,48$
P (3,6)	0,194	-0,796	0,9996	$1,04 \leq h_s/t_s \leq 41,73$
P (4,2)	0,293	-0,764	0,9994	$1,05 \leq h_s/t_s \leq 31,45$
P (4,3)	0,261	-0,796	0,9995	$1,12 \leq h_s/t_s \leq 45,40$
P (4,4)	0,245	-0,751	0,9988	$1,03 \leq h_s/t_s \leq 41,69$
P (4,5)	0,245	-0,801	0,9997	$1,13 \leq h_s/t_s \leq 38,53$
P (4,6)	0,240	-0,766	0,9995	$1,05 \leq h_s/t_s \leq 35,82$
P (5,2)	0,380	-0,789	0,9996	$1,01 \leq h_s/t_s \leq 41,55$
P (5,3)	0,335	-0,799	0,9996	$1,11 \leq h_s/t_s \leq 38,43$
P (5,4)	0,313	-0,793	0,9996	$1,04 \leq h_s/t_s \leq 35,75$
P (5,5)	0,301	-0,793	0,9993	$1,39 \leq h_s/t_s \leq 59,57$
P (5,6)	0,295	-0,791	0,9994	$1,31 \leq h_s/t_s \leq 55,90$
P (6,2)	0,470	-0,785	0,9994	$1,02 \leq h_s/t_s \leq 35,62$
P (6,3)	0,412	-0,794	0,9994	$1,37 \leq h_s/t_s \leq 59,43$
P (6,4)	0,378	-0,780	0,9993	$1,30 \leq h_s/t_s \leq 55,80$
P (6,5)	0,361	-0,794	0,9995	$1,23 \leq h_s/t_s \leq 52,58$
P (6,6)	0,348	-0,782	0,9995	$1,17 \leq h_s/t_s \leq 49,72$

Tabela C.2. Valores de $C1$, $C2$ e R^2 para $\phi = 0,5$ e *SOLID95*

$P(N_{ls}, N_{ts})$	$C1$	$C2$	R^2	Intervalo
P (2,2)	0,134	-0,578	0,9917	$1,06 \leq h_s/t_s \leq 20,84$
P (2,3)	0,129	-0,804	0,9999	$1,16 \leq h_s/t_s \leq 17,91$
P (2,4)	0,127	-0,591	0,9891	$1,02 \leq h_s/t_s \leq 27,79$
P (2,5)	0,135	-0,793	0,9996	$1,18 \leq h_s/t_s \leq 35,03$
P (2,6)	0,137	-0,670	0,9955	$1,07 \leq h_s/t_s \leq 31,55$
P (3,2)	0,204	-0,781	0,9996	$1,01 \leq h_s/t_s \leq 27,72$
P (3,3)	0,182	-0,783	0,9997	$1,17 \leq h_s/t_s \leq 35,00$
P (3,4)	0,179	-0,778	0,9997	$1,07 \leq h_s/t_s \leq 31,55$
P (3,5)	0,178	-0,781	0,9995	$1,13 \leq h_s/t_s \leq 45,48$
P (3,6)	0,181	-0,780	0,9995	$1,04 \leq h_s/t_s \leq 41,73$
P (4,2)	0,273	-0,746	0,9995	$1,05 \leq h_s/t_s \leq 31,45$
P (4,3)	0,242	-0,778	0,9995	$1,12 \leq h_s/t_s \leq 45,40$
P (4,4)	0,227	-0,735	0,9990	$1,03 \leq h_s/t_s \leq 41,69$
P (4,5)	0,228	-0,784	0,9995	$1,13 \leq h_s/t_s \leq 38,53$
P (4,6)	0,223	-0,751	0,9994	$1,05 \leq h_s/t_s \leq 35,82$
P (5,2)	0,351	-0,770	0,9991	$1,01 \leq h_s/t_s \leq 41,55$
P (5,3)	0,309	-0,779	0,9992	$1,11 \leq h_s/t_s \leq 38,43$
P (5,4)	0,289	-0,774	0,9991	$1,04 \leq h_s/t_s \leq 35,75$
P (5,5)	0,280	-0,779	0,9993	$1,39 \leq h_s/t_s \leq 59,57$
P (5,6)	0,276	-0,777	0,9993	$1,31 \leq h_s/t_s \leq 55,90$
P (6,2)	0,436	-0,766	0,9985	$1,02 \leq h_s/t_s \leq 35,62$
P (6,3)	0,383	-0,778	0,9993	$1,37 \leq h_s/t_s \leq 59,43$
P (6,4)	0,352	-0,766	0,9992	$1,30 \leq h_s/t_s \leq 55,80$
P (6,5)	0,335	-0,777	0,9992	$1,23 \leq h_s/t_s \leq 52,58$
P (6,6)	0,322	-0,767	0,9992	$1,17 \leq h_s/t_s \leq 49,72$

Tabela C.3. Valores de $C1$, $C2$ e R^2 para $\phi = 0,4$ e *SHELL93*

$P(N_{ls}, N_{ts})$	$C1$	$C2$	R^2	Intervalo
P (2,2)	0,184	-0,662	0,9952	$1,07 \leq h_s/t_s \leq 29,55$
P (2,3)	0,175	-0,784	0,9994	$1,20 \leq h_s/t_s \leq 35,96$
P (2,4)	0,176	-0,672	0,9962	$1,06 \leq h_s/t_s \leq 31,50$
P (2,5)	0,183	-0,781	0,9994	$1,09 \leq h_s/t_s \leq 44,40$
P (2,6)	0,187	-0,714	0,9979	$1,15 \leq h_s/t_s \leq 39,98$
P (3,2)	0,275	-0,771	0,9997	$1,04 \leq h_s/t_s \leq 31,44$
P (3,3)	0,250	-0,775	0,9996	$1,09 \leq h_s/t_s \leq 44,37$
P (3,4)	0,247	-0,771	0,9995	$1,15 \leq h_s/t_s \leq 39,98$
P (3,5)	0,246	-0,781	0,9996	$1,06 \leq h_s/t_s \leq 36,39$
P (3,6)	0,248	-0,770	0,9991	$1,38 \leq h_s/t_s \leq 59,52$
P (4,2)	0,371	-0,751	0,9995	$1,14 \leq h_s/t_s \leq 39,88$
P (4,3)	0,334	-0,775	0,9994	$1,04 \leq h_s/t_s \leq 36,32$
P (4,4)	0,314	-0,742	0,9987	$1,38 \leq h_s/t_s \leq 59,47$
P (4,5)	0,313	-0,773	0,9995	$1,28 \leq h_s/t_s \leq 54,95$
P (4,6)	0,307	-0,754	0,9993	$1,19 \leq h_s/t_s \leq 51,07$
P (5,2)	0,482	-0,762	0,9993	$1,35 \leq h_s/t_s \leq 59,33$
P (5,3)	0,425	-0,769	0,9994	$1,26 \leq h_s/t_s \leq 54,85$
P (5,4)	0,397	-0,764	0,9993	$1,18 \leq h_s/t_s \leq 51,00$
P (5,5)	0,381	-0,767	0,9992	$1,11 \leq h_s/t_s \leq 47,65$
P (5,6)	0,371	-0,763	0,9990	$1,05 \leq h_s/t_s \leq 44,72$
P (6,2)	0,585	-0,754	0,9989	$1,16 \leq h_s/t_s \leq 50,86$
P (6,3)	0,512	-0,761	0,9988	$1,10 \leq h_s/t_s \leq 47,55$
P (6,4)	0,472	-0,752	0,9987	$1,04 \leq h_s/t_s \leq 44,64$
P (6,5)	0,455	-0,759	0,9992	$1,53 \leq h_s/t_s \leq 93,60$
P (6,6)	0,437	-0,751	0,9992	$1,45 \leq h_s/t_s \leq 88,46$

Tabela C.4. Valores de $C1$, $C2$ e R^2 para $\phi = 0,4$ e *SOLID95*

$P(N_{ls}, N_{ts})$	$C1$	$C2$	R^2	Intervalo
P (2,2)	0,172	-0,653	0,9956	$1,07 \leq h_s/t_s \leq 29,55$
P (2,3)	0,165	-0,772	0,9995	$1,20 \leq h_s/t_s \leq 35,96$
P (2,4)	0,165	-0,660	0,9966	$1,06 \leq h_s/t_s \leq 31,50$
P (2,5)	0,174	-0,771	0,9995	$1,09 \leq h_s/t_s \leq 44,40$
P (2,6)	0,178	-0,706	0,9981	$1,15 \leq h_s/t_s \leq 39,98$
P (3,2)	0,260	-0,756	0,9995	$1,04 \leq h_s/t_s \leq 31,44$
P (3,3)	0,235	-0,760	0,9994	$1,09 \leq h_s/t_s \leq 44,37$
P (3,4)	0,233	-0,760	0,9994	$1,15 \leq h_s/t_s \leq 39,98$
P (3,5)	0,232	-0,767	0,9993	$1,06 \leq h_s/t_s \leq 36,39$
P (3,6)	0,237	-0,762	0,9991	$1,38 \leq h_s/t_s \leq 59,52$
P (4,2)	0,351	-0,739	0,9992	$1,14 \leq h_s/t_s \leq 39,88$
P (4,3)	0,312	-0,759	0,9989	$1,04 \leq h_s/t_s \leq 36,32$
P (4,4)	0,298	-0,733	0,9988	$1,38 \leq h_s/t_s \leq 59,47$
P (4,5)	0,295	-0,762	0,9993	$1,28 \leq h_s/t_s \leq 54,95$
P (4,6)	0,290	-0,744	0,9992	$1,19 \leq h_s/t_s \leq 51,07$
P (5,2)	0,456	-0,751	0,9991	$1,35 \leq h_s/t_s \leq 59,33$
P (5,3)	0,398	-0,755	0,9990	$1,26 \leq h_s/t_s \leq 54,85$
P (5,4)	0,373	-0,751	0,9989	$1,18 \leq h_s/t_s \leq 51,00$
P (5,5)	0,355	-0,753	0,9986	$1,11 \leq h_s/t_s \leq 47,65$
P (5,6)	0,347	-0,749	0,9983	$1,05 \leq h_s/t_s \leq 44,72$
P (6,2)	0,549	-0,741	0,9981	$1,16 \leq h_s/t_s \leq 50,86$
P (6,3)	0,475	-0,744	0,9978	$1,10 \leq h_s/t_s \leq 47,55$
P (6,4)	0,439	-0,737	0,9978	$1,04 \leq h_s/t_s \leq 44,64$
P (6,5)	0,427	-0,748	0,9991	$1,53 \leq h_s/t_s \leq 93,60$
P (6,6)	0,411	-0,741	0,9990	$1,45 \leq h_s/t_s \leq 88,46$

Tabela C.5. Valores de $C1$, $C2$ e R^2 para $\phi = 0,3$ e *SHELL93*

$P(N_{ls}, N_{ts})$	$C1$	$C2$	R^2	Intervalo
P (2,2)	0,255	-0,688	0,9989	$1,04 \leq h_s/t_s \leq 31,42$
P (2,3)	0,245	-0,753	0,9995	$1,04 \leq h_s/t_s \leq 42,75$
P (2,4)	0,247	-0,695	0,9989	$1,07 \leq h_s/t_s \leq 37,44$
P (2,5)	0,259	-0,754	0,9992	$1,37 \leq h_s/t_s \leq 59,41$
P (2,6)	0,264	-0,719	0,9989	$1,23 \leq h_s/t_s \leq 53,49$
P (3,2)	0,378	-0,734	0,9992	$1,06 \leq h_s/t_s \leq 37,38$
P (3,3)	0,352	-0,745	0,9993	$1,36 \leq h_s/t_s \leq 59,38$
P (3,4)	0,344	-0,738	0,9993	$1,23 \leq h_s/t_s \leq 53,49$
P (3,5)	0,341	-0,745	0,9991	$1,13 \leq h_s/t_s \leq 48,67$
P (3,6)	0,341	-0,738	0,9988	$1,04 \leq h_s/t_s \leq 44,64$
P (4,2)	0,503	-0,718	0,9989	$1,22 \leq h_s/t_s \leq 53,39$
P (4,3)	0,455	-0,732	0,9986	$1,12 \leq h_s/t_s \leq 48,60$
P (4,4)	0,430	-0,717	0,9984	$1,03 \leq h_s/t_s \leq 44,60$
P (4,5)	0,428	-0,732	0,9991	$1,49 \leq h_s/t_s \leq 91,73$
P (4,6)	0,419	-0,720	0,9991	$1,39 \leq h_s/t_s \leq 85,23$
P (5,2)	0,614	-0,704	0,9967	$1,02 \leq h_s/t_s \leq 44,50$
P (5,3)	0,569	-0,723	0,9990	$1,47 \leq h_s/t_s \leq 91,62$
P (5,4)	0,533	-0,718	0,9989	$1,38 \leq h_s/t_s \leq 85,15$
P (5,5)	0,511	-0,721	0,9986	$1,29 \leq h_s/t_s \leq 79,53$
P (5,6)	0,496	-0,717	0,9983	$1,22 \leq h_s/t_s \leq 74,61$
P (6,2)	0,751	-0,700	0,9979	$1,36 \leq h_s/t_s \leq 84,99$
P (6,3)	0,667	-0,708	0,9977	$1,28 \leq h_s/t_s \leq 79,41$
P (6,4)	0,618	-0,702	0,9976	$1,21 \leq h_s/t_s \leq 74,52$
P (6,5)	0,586	-0,705	0,9970	$1,14 \leq h_s/t_s \leq 70,20$
P (6,6)	0,562	-0,699	0,9967	$1,09 \leq h_s/t_s \leq 66,35$

Tabela C.6. Valores de $C1$, $C2$ e R^2 para $\phi = 0,3$ e *SOLID95*

$P(N_{ls}, N_{ts})$	$C1$	$C2$	R^2	Intervalo
P (2,2)	0,244	-0,681	0,9991	$1,04 \leq h_s/t_s \leq 31,42$
P (2,3)	0,234	-0,744	0,9993	$1,04 \leq h_s/t_s \leq 42,75$
P (2,4)	0,236	-0,687	0,9990	$1,07 \leq h_s/t_s \leq 37,44$
P (2,5)	0,250	-0,748	0,9992	$1,37 \leq h_s/t_s \leq 59,41$
P (2,6)	0,255	-0,714	0,9989	$1,23 \leq h_s/t_s \leq 53,49$
P (3,2)	0,360	-0,724	0,9986	$1,06 \leq h_s/t_s \leq 37,38$
P (3,3)	0,336	-0,736	0,9992	$1,36 \leq h_s/t_s \leq 59,38$
P (3,4)	0,328	-0,730	0,9990	$1,23 \leq h_s/t_s \leq 53,49$
P (3,5)	0,325	-0,735	0,9986	$1,13 \leq h_s/t_s \leq 48,67$
P (3,6)	0,325	-0,729	0,9982	$1,04 \leq h_s/t_s \leq 44,64$
P (4,2)	0,480	-0,710	0,9984	$1,22 \leq h_s/t_s \leq 53,39$
P (4,3)	0,430	-0,721	0,9978	$1,12 \leq h_s/t_s \leq 48,60$
P (4,4)	0,407	-0,707	0,9976	$1,03 \leq h_s/t_s \leq 44,60$
P (4,5)	0,408	-0,725	0,9990	$1,49 \leq h_s/t_s \leq 91,73$
P (4,6)	0,401	-0,714	0,9989	$1,39 \leq h_s/t_s \leq 85,23$
P (5,2)	0,579	-0,691	0,9950	$1,02 \leq h_s/t_s \leq 44,50$
P (5,3)	0,539	-0,714	0,9986	$1,47 \leq h_s/t_s \leq 91,62$
P (5,4)	0,506	-0,709	0,9984	$1,38 \leq h_s/t_s \leq 85,15$
P (5,5)	0,483	-0,712	0,9980	$1,29 \leq h_s/t_s \leq 79,53$
P (5,6)	0,469	-0,707	0,9976	$1,22 \leq h_s/t_s \leq 74,61$
P (6,2)	0,712	-0,691	0,9971	$1,36 \leq h_s/t_s \leq 84,99$
P (6,3)	0,627	-0,697	0,9967	$1,28 \leq h_s/t_s \leq 79,41$
P (6,4)	0,583	-0,692	0,9966	$1,21 \leq h_s/t_s \leq 74,52$
P (6,5)	0,550	-0,693	0,9958	$1,14 \leq h_s/t_s \leq 70,20$
P (6,6)	0,529	-0,688	0,9954	$1,09 \leq h_s/t_s \leq 66,35$

Tabela C.7. Valores de $C1$, $C2$ e R^2 para $\phi = 0,2$ e *SHELL93*

$P(N_{ls}, N_{ts})$	$C1$	$C2$	R^2	Intervalo
P (2,2)	0,400	-0,660	0,9987	$1,35 \leq h_s/t_s \leq 59,28$
P (2,3)	0,393	-0,706	0,9985	$1,16 \leq h_s/t_s \leq 50,86$
P (2,4)	0,389	-0,669	0,9982	$1,02 \leq h_s/t_s \leq 44,53$
P (2,5)	0,410	-0,701	0,9989	$1,42 \leq h_s/t_s \leq 88,21$
P (2,6)	0,413	-0,681	0,9986	$1,28 \leq h_s/t_s \leq 79,41$
P (3,2)	0,550	-0,657	0,9956	$1,01 \leq h_s/t_s \leq 44,48$
P (3,3)	0,534	-0,682	0,9983	$1,41 \leq h_s/t_s \leq 88,18$
P (3,4)	0,516	-0,672	0,9977	$1,28 \leq h_s/t_s \leq 79,41$
P (3,5)	0,507	-0,673	0,9965	$1,17 \leq h_s/t_s \leq 72,23$
P (3,6)	0,501	-0,663	0,9954	$1,07 \leq h_s/t_s \leq 66,24$
P (4,2)	0,701	-0,637	0,9955	$1,27 \leq h_s/t_s \leq 79,31$
P (4,3)	0,641	-0,647	0,9942	$1,16 \leq h_s/t_s \leq 72,17$
P (4,4)	0,606	-0,635	0,9936	$1,07 \leq h_s/t_s \leq 66,21$
P (4,5)	0,614	-0,653	0,9942	$1,29 \leq h_s/t_s \leq 61,15$
P (4,6)	0,597	-0,642	0,9933	$1,20 \leq h_s/t_s \leq 56,82$
P (5,2)	0,791	-0,597	0,9882	$1,06 \leq h_s/t_s \leq 66,10$
P (5,3)	0,760	-0,623	0,9909	$1,28 \leq h_s/t_s \leq 61,08$
P (5,4)	0,715	-0,618	0,9903	$1,20 \leq h_s/t_s \leq 56,77$
P (5,5)	0,682	-0,615	0,9889	$1,12 \leq h_s/t_s \leq 53,02$
P (5,6)	0,657	-0,607	0,9878	$1,06 \leq h_s/t_s \leq 49,74$
P (6,2)	0,903	-0,572	0,9839	$1,18 \leq h_s/t_s \leq 56,66$
P (6,3)	0,823	-0,580	0,9839	$1,11 \leq h_s/t_s \leq 52,94$
P (6,4)	0,772	-0,576	0,9836	$1,05 \leq h_s/t_s \leq 49,68$
P (6,5)	0,785	-0,601	0,9871	$1,32 \leq h_s/t_s \leq 46,80$
P (6,6)	0,753	-0,594	0,9863	$1,25 \leq h_s/t_s \leq 44,23$

Tabela C.8. Valores de $C1$, $C2$ e R^2 para $\phi = 0,2$ e *SOLID95*

$P(N_{ls}, N_{ts})$	$C1$	$C2$	R^2	Intervalo
P (2,2)	0,390	-0,658	0,9986	$1,35 \leq h_s/t_s \leq 59,28$
P (2,3)	0,379	-0,701	0,9981	$1,16 \leq h_s/t_s \leq 50,86$
P (2,4)	0,376	-0,665	0,9977	$1,02 \leq h_s/t_s \leq 44,53$
P (2,5)	0,398	-0,698	0,9987	$1,42 \leq h_s/t_s \leq 88,21$
P (2,6)	0,402	-0,678	0,9983	$1,28 \leq h_s/t_s \leq 79,41$
P (3,2)	0,528	-0,649	0,9942	$1,01 \leq h_s/t_s \leq 44,48$
P (3,3)	0,514	-0,677	0,9978	$1,41 \leq h_s/t_s \leq 88,18$
P (3,4)	0,498	-0,667	0,9971	$1,28 \leq h_s/t_s \leq 79,41$
P (3,5)	0,487	-0,667	0,9956	$1,17 \leq h_s/t_s \leq 72,23$
P (3,6)	0,482	-0,657	0,9944	$1,07 \leq h_s/t_s \leq 66,24$
P (4,2)	0,675	-0,632	0,9943	$1,27 \leq h_s/t_s \leq 79,31$
P (4,3)	0,612	-0,640	0,9929	$1,16 \leq h_s/t_s \leq 72,17$
P (4,4)	0,581	-0,628	0,9921	$1,07 \leq h_s/t_s \leq 66,21$
P (4,5)	0,589	-0,648	0,9931	$1,29 \leq h_s/t_s \leq 61,15$
P (4,6)	0,574	-0,637	0,9920	$1,20 \leq h_s/t_s \leq 56,82$
P (5,2)	0,753	-0,588	0,9854	$1,06 \leq h_s/t_s \leq 66,10$
P (5,3)	0,725	-0,616	0,9891	$1,28 \leq h_s/t_s \leq 61,08$
P (5,4)	0,683	-0,610	0,9884	$1,20 \leq h_s/t_s \leq 56,77$
P (5,5)	0,649	-0,607	0,9868	$1,12 \leq h_s/t_s \leq 53,02$
P (5,6)	0,627	-0,599	0,9855	$1,06 \leq h_s/t_s \leq 49,74$
P (6,2)	0,861	-0,563	0,9805	$1,18 \leq h_s/t_s \leq 56,66$
P (6,3)	0,780	-0,570	0,9805	$1,11 \leq h_s/t_s \leq 52,94$
P (6,4)	0,734	-0,567	0,9804	$1,05 \leq h_s/t_s \leq 49,68$
P (6,5)	0,748	-0,593	0,9849	$1,32 \leq h_s/t_s \leq 46,80$
P (6,6)	0,719	-0,587	0,9840	$1,25 \leq h_s/t_s \leq 44,23$

Tabela C.9. Valores de $C1$, $C2$ e R^2 para $\phi = 0,1$ e *SHELL93*

$P(N_{ls}, N_{ts})$	$C1$	$C2$	R^2	Intervalo
P (2,2)	0,663	-0,519	0,9854	$1,05 \leq h_s/t_s \leq 66,07$
P (2,3)	0,666	-0,542	0,9831	$1,18 \leq h_s/t_s \leq 56,66$
P (2,4)	0,643	-0,511	0,9792	$1,04 \leq h_s/t_s \leq 49,60$
P (2,5)	0,672	-0,524	0,9790	$1,23 \leq h_s/t_s \leq 44,11$
P (2,6)	0,657	-0,499	0,9750	$1,11 \leq h_s/t_s \leq 39,71$
P (3,2)	0,767	-0,448	0,9664	$1,03 \leq h_s/t_s \leq 49,56$
P (3,3)	0,769	-0,471	0,9704	$1,23 \leq h_s/t_s \leq 44,09$
P (3,4)	0,736	-0,454	0,9671	$1,11 \leq h_s/t_s \leq 39,71$
P (3,5)	0,710	-0,440	0,9631	$1,01 \leq h_s/t_s \leq 36,12$
P (3,6)	0,749	-0,457	0,9703	$1,35 \leq h_s/t_s \leq 33,12$
P (4,2)	0,839	-0,384	0,9522	$1,10 \leq h_s/t_s \leq 39,66$
P (4,3)	0,790	-0,386	0,9512	$1,01 \leq h_s/t_s \leq 36,08$
P (4,4)	0,820	-0,410	0,9623	$1,35 \leq h_s/t_s \leq 33,10$
P (4,5)	0,789	-0,401	0,9600	$1,25 \leq h_s/t_s \leq 30,58$
P (4,6)	0,765	-0,388	0,9578	$1,26 \leq h_s/t_s \leq 28,41$
P (5,2)	0,904	-0,341	0,9474	$1,34 \leq h_s/t_s \leq 33,05$
P (5,3)	0,857	-0,347	0,9484	$1,24 \leq h_s/t_s \leq 30,54$
P (5,4)	0,824	-0,342	0,9480	$1,16 \leq h_s/t_s \leq 28,38$
P (5,5)	0,796	-0,337	0,9469	$1,08 \leq h_s/t_s \leq 26,51$
P (5,6)	0,774	-0,329	0,9455	$1,02 \leq h_s/t_s \leq 24,87$
P (6,2)	0,892	-0,277	0,9314	$1,15 \leq h_s/t_s \leq 28,33$
P (6,3)	0,853	-0,286	0,9341	$1,07 \leq h_s/t_s \leq 26,47$
P (6,4)	0,825	-0,285	0,9348	$1,01 \leq h_s/t_s \leq 24,84$
P (6,5)	0,864	-0,320	0,9558	$1,49 \leq h_s/t_s \leq 23,40$
P (6,6)	0,840	-0,315	0,9553	$1,41 \leq h_s/t_s \leq 22,12$

Tabela C.10. Valores de $C1$, $C2$ e R^2 para $\phi = 0,1$ e *SOLID95*

$P(N_{ls}, N_{ts})$	$C1$	$C2$	R^2	Intervalo
P (2,2)	0,650	-0,518	0,9840	$1,05 \leq h_s/t_s \leq 66,07$
P (2,3)	0,653	-0,541	0,9818	$1,18 \leq h_s/t_s \leq 56,66$
P (2,4)	0,631	-0,511	0,9777	$1,04 \leq h_s/t_s \leq 49,60$
P (2,5)	0,661	-0,524	0,9778	$1,23 \leq h_s/t_s \leq 44,11$
P (2,6)	0,647	-0,498	0,9736	$1,11 \leq h_s/t_s \leq 39,71$
P (3,2)	0,749	-0,445	0,9630	$1,03 \leq h_s/t_s \leq 49,56$
P (3,3)	0,752	-0,469	0,9680	$1,23 \leq h_s/t_s \leq 44,09$
P (3,4)	0,721	-0,452	0,9646	$1,11 \leq h_s/t_s \leq 39,71$
P (3,5)	0,695	-0,438	0,9602	$1,01 \leq h_s/t_s \leq 36,12$
P (3,6)	0,736	-0,456	0,9684	$1,35 \leq h_s/t_s \leq 33,12$
P (4,2)	0,820	-0,381	0,9474	$1,10 \leq h_s/t_s \leq 39,66$
P (4,3)	0,770	-0,383	0,9463	$1,01 \leq h_s/t_s \leq 36,08$
P (4,4)	0,804	-0,408	0,9595	$1,35 \leq h_s/t_s \leq 33,10$
P (4,5)	0,773	-0,399	0,9569	$1,25 \leq h_s/t_s \leq 30,58$
P (4,6)	0,750	-0,386	0,9546	$1,26 \leq h_s/t_s \leq 28,41$
P (5,2)	0,884	-0,337	0,9417	$1,34 \leq h_s/t_s \leq 33,05$
P (5,3)	0,836	-0,343	0,9430	$1,24 \leq h_s/t_s \leq 30,54$
P (5,4)	0,805	-0,339	0,9427	$1,16 \leq h_s/t_s \leq 28,38$
P (5,5)	0,777	-0,334	0,9413	$1,08 \leq h_s/t_s \leq 26,51$
P (5,6)	0,756	-0,326	0,9395	$1,02 \leq h_s/t_s \leq 24,87$
P (6,2)	0,869	-0,272	0,9217	$1,15 \leq h_s/t_s \leq 28,33$
P (6,3)	0,829	-0,280	0,9248	$1,07 \leq h_s/t_s \leq 26,47$
P (6,4)	0,803	-0,281	0,9255	$1,01 \leq h_s/t_s \leq 24,84$
P (6,5)	0,845	-0,317	0,9519	$1,49 \leq h_s/t_s \leq 23,40$
P (6,6)	0,823	-0,313	0,9516	$1,41 \leq h_s/t_s \leq 22,12$