

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

**REDUÇÃO DIMENSIONAL DE IMAGENS: APLICAÇÃO DE
FUNÇÕES DE (PRÉ) AGREGAÇÃO BASEADAS NA INTEGRAL
DE CHOQUET**

por

Jéssica Camila Saldivia Bueno

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Modelagem Computacional

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Graçaliz Pereira Dimuro
Coorientador: Prof^o. Dr. Eduardo Nunes Borges

Rio Grande, novembro, 2018

Ficha catalográfica

B928r Bueno, Jéssica Camila Saldivia.
 Redução dimensional de imagens : aplicação de funções de (pré) agregação baseadas na integral de Choquet / Jéssica Camila Saldivia Bueno. – 2018.
 72f.

 Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Rio Grande/RS, 2018.
 Orientadora: Dra. Graçaliz Pereira Dimuro.
 Coorientador: Dr. Eduardo Nunes Borges.

 1. Integral de Choquet 2. Funções de agregação 3. Funções de pré-agregação 4. Redução dimensional de imagens I. Dimuro, Graçaliz Pereira II. Borges, Eduardo Nunes III. Título.

CDU 004.932

Jéssica Camila Saldivia Bueno

“Redução Dimensional de Imagens: Aplicação de Funções de (Pré) Agregação baseadas na Integral de Choquet”

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande - FURG, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área concentração: Modelagem Computacional.

Aprovado em

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Dr^a. Graçaliz Pereira Dimuro
Orientadora – FURG

Prof^a. Dr^a. Catia Maria dos Santos Machado
FURG

Prof. Dr. Benjamín René Callejas Bedregal
DIMAP

Rio Grande - RS
2018

Dedico este trabalho ao meu pai Nilton José Bueno (in memoriam),
com todo o meu amor e gratidão.

AGRADECIMENTOS

À Maria Cristina Saldivia Bueno, minha mãe, pelo apoio sempre que necessário.

A minha família, por torcerem pela realização dos meus sonhos.

Aos meus amigos, pelo incentivo e momentos de descontração que oportunizaram, em especial a Daniela Dalla Chiesa que me aguentou e compartilhou as angustias da pós-graduação e ao Leslie Darien Pérez Fernández que sempre esteve disposto a sair para tomar uma cerveja e fumar um charuto.

À orientadora, Prof^a Dra. Graçaliz Dimuro, pelas ideias, contribuição, dedicação, paciência e ensinamentos compartilhados.

Ao coorientador, Prof^o Dr. Eduardo Borges, pela imensa paciência, companheirismo, dedicação e compartilhamento de conhecimentos.

Aos colegas da pós-graduação que compartilharam ideias durante os estudos em disciplinas e durante a escrita desta dissertação.

Ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pelo apoio financeiro recebido.

À Universidade Federal do Rio Grande pela estrutura e assistência estudantil oferecida.

E a todos que passaram pela minha vida e que de alguma forma me incentivaram e me ajudaram nesta trajetória.

"É muito melhor arriscar coisas grandiosas, alcançar triunfos e glórias, mesmo expondo-se à derrota, do que formar fila com os pobres de espírito que nem gozam muito nem sofrem muito, porque vivem nessa penumbra cinzenta que não conhece vitória nem derrota."

Theodore Roosevelt

RESUMO

O crescente aumento do volume de dados, juntamente com a alta complexidade destes, tem gerado a necessidade de se desenvolver técnicas de extração de conhecimento cada vez mais eficientes, tanto em custo computacional quanto em precisão. A maioria dos problemas que são tratados por essas técnicas, como classificação de imagens, tem informações complexas a serem identificadas. Esses métodos usam uma variedade de funções dentro das diferentes etapas que são empregadas em suas arquiteturas. Uma dessas etapas consiste no uso de funções de agregação para redimensionar imagens. Neste contexto, apresenta-se um estudo de funções de agregação e pré-agregação baseadas em integral de Choquet. A principal característica da integral de Choquet, em comparação com outras funções de agregação, é considerar, por meio de uma medida *fuzzy*, a interação entre os elementos a serem agregados. Neste sentido, apresenta-se um estudo avaliativo do desempenho de algumas funções de agregação e pré-agregação baseadas na integral de Choquet em redução dimensional de imagens. Portanto, o objetivo principal deste trabalho é comparar tais funções com as usuais na literatura que são as funções máximo e média, procurando resultados que podem ser melhores do que destas funções. Os resultados foram avaliados utilizando uma série de medidas de qualidade de imagem. Foi possível observar que a integral de Choquet e suas generalizações mantiveram a integridade da imagem original, sendo capaz de minimizar problemas de bordas serrilhadas em linhas oblíquas/diagonais e de contraste em comparação com os agregadores usuais embora não sejam quantitativamente as mais similares com a imagem original conforme mostrado com as medidas de qualidade.

Palavras-chaves: Integral de Choquet. Funções de Agregação. Funções de Pré-Agregação. Redução Dimensional de Imagens.

ABSTRACT

The increasing data volume, along with their high complexity, has generated the need to develop increasingly efficient knowledge extraction techniques, both in computational cost and precision. Most of the problems that are processed by these techniques such as image classification have complex information to be identified. These methods use a variety of functions inside the different steps that are employed in their architectures. One of these steps, called pooling layer, is used to aggregate functions to resize images. In this context, it presents a study of aggregation and pre-aggregation functions of Choquet integral. The main feature of Choquet integral, in comparison with other aggregation functions, is to consider, through a fuzzy measure, the interaction between the elements to be aggregated. In this way an evaluation study of the performance of aggregation and pre-aggregation functions based on Choquet integral in dimensional reduction of images is presented. The purpose of this work is to compare such functions with the usual ones in the literature, such as the maximum and mean functions, looking for results that may be better than these functions. The results were evaluated using a series of image quality measures. It was possible to observe that the Choquet integral and its generalizations maintained the integrity of the original image, being able to minimize problems of serrated edges in oblique / diagonal and contrast lines in comparison with the usual aggregators although they are not quantitatively the most similar with the image as shown with the quality measures.

Keywords: Integral of Choquet. Aggregation Functions. Pre-Aggregation Functions. Dimensional Image Reduction.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Justificativa	17
1.2	Objetivos da Dissertação	17
1.3	Organização do Texto	18
2	FUNÇÕES DE AGREGAÇÃO	19
2.1	Definição e Exemplos	19
2.2	T-norma	20
2.3	Cópula	21
2.4	Integral de Choquet	22
2.5	Generalização da Integral de Choquet por Cópulas	26
2.6	Funções de Comportamento Médio	27
2.7	Considerações Finais	28
3	FUNÇÕES DE PRÉ-AGREGAÇÃO	29
3.1	Funções de Pré-Agregação Baseadas na Integral de Choquet	30
3.2	Considerações Finais	33
4	REDUÇÃO DIMENSIONAL DE IMAGENS	34
4.1	Agregadores Máximo e Média	35
4.2	Novos Agregadores Baseados na Integral de Choquet	36
4.3	Redimensionamento	37
4.4	Funções de Medida de Qualidade	41
4.5	Considerações Finais	42
5	ESTUDO EXPERIMENTAL	43
5.1	Metodologia	43
5.2	Análise Quantitativa dos Resultados Experimentais	47
5.3	Análise Qualitativa por Inspeção Visual	57
5.4	Considerações Finais	62
6	CONCLUSÕES	63
7	REFERÊNCIAS	65
8	ANEXOS	70
8.1	Anexo A - Imagens de Entrada	70

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: Modelo Genérico de Classificação. Fonte: [Adaptado] TAN; STEINBACH; KUMAR (2009).	15
Figura 2.1: Gráficos das t-normas apresentadas no Ex. 2.3. Fonte: Autora.	21
Figura 2.2: Integral de Choquet com relação à medida <i>fuzzy</i> da potência. Fonte: Autora.	25
Figura 2.3: Escala de <i>Pixels</i> . Fonte:	25
Figura 2.4: Representação de uma Imagem em Tons de Cinza. Fonte: https://www.dcc.fc.up.pt/~nam/aulas/0001/pi/trabalho2/trab2/	26
Figura 4.1: Esquema da Redução de Imagens. Fonte: BELIAKOV; BUS-TINCE; PATERNAIS (2012)	34
Figura 4.2: Exemplo de Redução de Imagem - Função Máximo. Fonte: Autora.	35
Figura 4.3: Exemplo de Redução de Imagem - Função Média. Fonte: Autora.	35
Figura 4.4: Ilustração da Desvantagem da Função Máximo. Fonte: [Adaptado] YU <i>et al.</i> (2014)	36
Figura 4.5: Ilustração da Desvantagem da Função Média. Fonte: [Adaptado] YU <i>et al.</i> (2014)	36
Figura 4.6: Exemplo de Redução de Imagem - Função Choquet com relação à medida <i>fuzzy</i> da potência para $q = 0.5$. Fonte: Autora.	37
Figura 4.7: Técnica <i>Nearest Neighbor</i> . Fonte: Autora	38
Figura 4.8: Etapas do Processo em uma Matriz de <i>Pixels</i> . Fonte: Autora.	39
Figura 4.9: Exemplo da Aplicação do Processo. Fonte: Autora	40
Figura 5.1: Teste de Friedman para medida AD. Fonte: Autora.	48
Figura 5.2: <i>Boxplot</i> Medida de Qualidade AD. Fonte: Autora	49
Figura 5.3: Teste de Friedman para medida MD↓. Fonte: Autora.	50
Figura 5.4: <i>Boxplot</i> Medida de Qualidade MD↓. Fonte: Autora	51
Figura 5.5: Teste de Friedman para medida MSE↓. Fonte: Autora.	52
Figura 5.6: <i>Boxplot</i> Medida de Qualidade MSE↓. Fonte: Autora	52
Figura 5.7: Teste de Friedman para medida NAE↓. Fonte: Autora.	53
Figura 5.8: <i>Boxplot</i> Medida de Qualidade NAE↓. Fonte: Autora	53
Figura 5.9: Teste de Friedman para medida PSNR↑. Fonte: Autora.	54
Figura 5.10: <i>Boxplot</i> Medida de Qualidade PSNR↑. Fonte: Autora	54
Figura 5.11: Teste de Friedman para medida NK↑. Fonte: Autora.	55
Figura 5.12: <i>Boxplot</i> Medida de Qualidade NK↑. Fonte: Autora	55
Figura 5.13: Teste de Friedman para medida SC↓. Fonte: Autora.	56
Figura 5.14: <i>Boxplot</i> Medida de Qualidade SC↓. Fonte: Autora	56
Figura 5.15: Aplicação dos agregadores na Imagem 138_4.	58

Figura 5.16: Aplicação dos agregadores na Imagem 138_6.	59
Figura 5.17: Aplicação dos agregadores na Imagem 52_3.	60
Figura 5.18: Aplicação dos agregadores na Imagem 127_3.	61
Figura 8.1: Imagem 127_1. Fonte: <i>IIIT 5K-Word dataset</i>	70
Figura 8.2: Imagem 127_2. Fonte: <i>IIIT 5K-Word dataset</i>	70
Figura 8.3: Imagem 127_3. Fonte: <i>IIIT 5K-Word dataset</i>	70
Figura 8.4: Imagem 138_4. Fonte: <i>IIIT 5K-Word dataset</i>	70
Figura 8.5: Imagem 138_5. Fonte: <i>IIIT 5K-Word dataset</i>	71
Figura 8.6: Imagem 138_6. Fonte: <i>IIIT 5K-Word dataset</i>	71
Figura 8.7: Imagem 159_1. Fonte: <i>IIIT 5K-Word dataset</i>	71
Figura 8.8: Imagem 161_1. Fonte: <i>IIIT 5K-Word dataset</i>	71
Figura 8.9: Imagem 161_2. Fonte: <i>IIIT 5K-Word dataset</i>	71
Figura 8.10: Imagem 52_1. Fonte: <i>IIIT 5K-Word dataset</i>	72
Figura 8.11: Imagem 52_2. Fonte: <i>IIIT 5K-Word dataset</i>	72
Figura 8.12: Imagem 52_3. Fonte: <i>IIIT 5K-Word dataset</i>	72

LISTA DE TABELAS

Tabela 1:	Recorte da Tabela de Dados da Medida de Qualidade MD↓. Fonte:	
	Autora	45
Tabela 2:	MD↓. Fonte: Autora	46
Tabela 3:	Valores do Parâmetro q para cada Medida de Qualidade de Imagem	47
Tabela 4:	Médias AD	48
Tabela 5:	Médias MD	50
Tabela 6:	Médias MSE	52
Tabela 7:	Médias NAE	53
Tabela 8:	Médias PSNR	54
Tabela 9:	Médias NK	55
Tabela 10:	Médias SC	56

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathcal{A}$	Função de Agregação
T	Função t-norma
C	Função Cópula
N	Conjunto de Índices $\{1, 2, \dots, n\}$
2^N	Conjunto das Partes de N
$\emptyset$	Conjunto Vazio
m	Medida <i>Fuzzy</i>
$ A $	Cardinalidade do Conjunto A
$\mathfrak{C}_m$	Integral de Choquet com relação à Medida <i>Fuzzy</i> m
$\mathfrak{C}_m^{T_M}$	Generalização da integral de Choquet pela Cópula do Mínimo
$\mathfrak{C}_m^{T_{Ham}}$	Generalização da integral de Choquet pela t-norma de <i>Hamacher Product</i>
$\mathfrak{C}_m^{F_{NA}}$	Generalização da integral de Choquet pela função F_{NA}
I	Número de linhas
J	Número de Colunas

LISTA DE ABREVIATURAS

T-Norma	Norma Triangular
OWA	<i>Ordered Weighted Averaging</i>
LAE	<i>Left absorbent Element</i>
RNE	<i>Right Neutral Element</i>
LC	<i>Left Conjunctive</i>
AD	<i>Average Difference</i>
SC	<i>Structural Content</i>
NK	<i>Normalized Cross-Correlation</i>
MD	<i>Maximum Difference</i>
NAE	<i>Normalized Absolute Error</i>
MSE	<i>Mean Squared Error</i>
PSNR	<i>Peak Signal to Noise Ratio</i>

1 INTRODUÇÃO

O crescente aumento do volume de dados, juntamente com a alta complexidades destes, tem gerado a necessidade de se desenvolver técnicas de extração de conhecimento cada vez mais eficientes, tanto em custo computacional quanto em precisão. Atualmente, as técnicas de extração de conhecimento de dados são capazes de aprender por si próprias com base em informações dadas, gerando, desta forma, um modelo — hipótese, ou função — capaz de resolver determinado problema. Ou seja, é realizado um processo de aprendizagem com base em exemplos obtendo-se conhecimento útil para tomada de decisão. Esse processo é denominado Aprendizagem de Máquina (FACELI *et al.*, 2015).

As técnicas para extração de conhecimento de conjuntos de dados na área de Aprendizagem de Máquina são divididas, geralmente, em aprendizado não supervisionado e aprendizado supervisionado (MCCUE, 2006). O aprendizado não supervisionado é utilizado em conjuntos de dados que não são rotulados. Esse tipo de aprendizado realiza uma tarefa descritiva, ou seja, busca encontrar padrões/semelhanças nos dados fornecidos utilizando-se de técnicas como associação ou agrupamento.

Por outro lado, o aprendizado supervisionado executa uma tarefa preditiva, ou seja, através de dados rotulados é possível gerar um modelo capaz de prever determinada variável (MARSLAND, 2014). Se a variável alvo (variável a ser prevista) assumir valores em um domínio infinito e ordenado, tem-se um problema de regressão. Já se o domínio da variável alvo for um conjunto de valores qualitativos (nominais), tem-se um problema de classificação (FACELI *et al.*, 2015).

A classificação é uma das técnicas mais utilizadas no contexto de extração de conhecimento de dados sendo aplicada em diversos campos, como saúde (MAHMOODIAN; *et al.*, 2011), criminal (MCCUE, 2006), entre outros (BORGES *et al.*, 2011; LANES *et al.*, 2017). Em um modelo de classificação os dados de entrada são um conjunto de observações, onde cada observação é representada por um vetor do tipo $(\mathbf{x}, y)$, sendo $\mathbf{x}$ o conjunto de atributos e y o atributo alvo que será denominado por rótulo da classe (TAN; STEINBACH; KUMAR, 2009), conforme o modelo representado na Fig. 1.1.

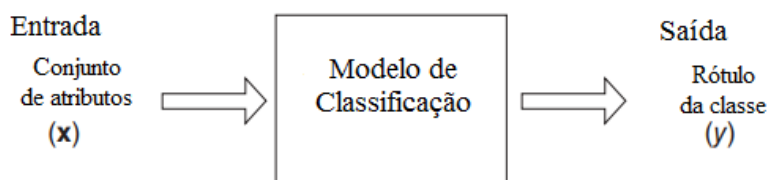


Figura 1.1: Modelo Genérico de Classificação. Fonte: [Adaptado] TAN; STEINBACH; KUMAR (2009).

Dessa forma, o problema de classificação consiste em tomar vetores e decidir a qual

das M classes ele pertence (MARS LAND, 2014). Essa decisão é tomada por um classificador que aprendeu por meio de exemplos, que no caso são os dados conhecidos. Atualmente, existem diversos algoritmos que tratam problemas de classificação, os quais são baseados em diferentes estratégias de modelagem, tais como Árvore de Decisão, Teorema de Bayes, Redes Bayesianas, Regras e dentre eles o Sistema de Classificação Baseado em Regras *Fuzzy* (ISHIBUCHI; NAKASHIMA; NII, 2004).

Na área de Visão Computacional, a classificação de imagens é um problema muito comum, onde os principais problemas enfrentados são, por exemplo, identificar padrões em imagens, rotular imagens coletadas, distinguir seres vivos e objetos, entre outros. A maioria desses problemas tem informações complexas a serem identificadas. Para isso são utilizados métodos de aprendizado de máquina como Redes Neurais por Convolução (WU, 2017) e Redes de Aprendizado Profundo (HAN; KIM; LEE, 2017).

Observa-se que estes métodos usam uma variedade de funções dentro das diferentes etapas que são empregadas em suas arquiteturas. Uma destas etapas, denominada de camada *pooling* consiste no uso de funções de agregação ¹, como o máximo ou média aritmética (SCHERER; MÜLLER; BEHNKE, 2004).

Na literatura, tem sido dada muita evidência a funções de agregação baseadas na integral de Choquet, que tem sido aplicadas no contexto de classificação baseada em regras *fuzzy* (LUCCA *et al.*, 2018). A integral de Choquet é uma integral *fuzzy* (RALESCU; ADAMS, 1980) e é definida em relação a uma medida *fuzzy* (WANG; KLIR, 1992) que modela a interação entre os elementos a serem agregados. Portanto, faz-se necessária uma escolha prévia da medida *fuzzy* a ser utilizada no problema.

De acordo com LUCCA *et al.* (2016) a integral de Choquet oferece maior flexibilidade no modelo de agregação ao permitir atribuir importância a todos os possíveis grupos de critérios, pois a mesma combina as entradas de tal forma que a importância dos diferentes grupos de entrada pode ser levada em consideração. Para aperfeiçoar a agregação de informações significativas sem degradar seu poder discriminativo no processamento de imagens (PAGOLA *et al.*, 2017), propõe-se a substituição da função máximo e média, usuais na literatura, pela integral de Choquet (CHOQUET, 1954).

Nesta dissertação foca-se em uma tarefa específica de processamento de imagens que é a redução de tamanho de uma imagem. Para analisar o papel da integral de Choquet neste tipo de tarefa, é necessário um estudo da aplicação de funções de agregação baseadas na integral de Choquet para reduzir o tamanho de uma imagem.

Esse estudo foi realizado aplicando a integral de Choquet e algumas de suas generalizações (LUCCA *et al.*, 2016, 2017, 2018) em um grupo de imagens, obtendo-se os resultados de cada imagem individualmente e comparando os resultados com os das fun-

¹No contexto de processamento de imagens utiliza-se o termo *pooling* em vez de agregação, porém neste trabalho será adotado o termo agregação devido às funções de agregação.

ções máximo e média aritmética. As comparações dos resultados das imagens de entrada com as de saída são feitas através de funções de medida de qualidade de imagem.

Com o estudo realizado, apresenta-se uma discussão sobre a seguinte pergunta de pesquisa: “As funções baseadas em integral de Choquet podem superar ou igualar a qualidade das funções máximo e média, usuais na literatura para redução dimensional de imagens?”.

1.1 Justificativa

Atualmente, são fundamentais técnicas cada vez mais eficientes na extração de informações de imagens. Dessa forma, diversos estudos são feitos objetivando o melhoramento de tais técnicas. Neste sentido, pretende-se minimizar a perda de informações em imagens nas etapas em que ocorre a redução dimensional da imagem.

A redução dimensional de imagens é muito frequente em métodos/algoritmos de extração de conhecimento de imagens. A redução da imagem se faz necessária para que se diminua o número de parâmetros dentro do modelo que o algoritmo está aprendendo, pois é mais simples a extração de informações de imagens reduzidas, consequentemente, melhorando a detecção de objetos em imagens.

Dessa forma, este estudo busca melhorar técnicas de extração de informações de imagens, onde serão aplicadas funções de comportamento médio que podem reter uma maior informação ao reduzir dimensionalmente a imagem. Portanto, pretende-se apresentar uma estudo que forneça funções capazes de melhorar a extração de conhecimento de imagens.

1.2 Objetivos da Dissertação

O objetivo principal desta dissertação é realizar uma pesquisa exploratória e experimental, onde são aplicadas funções de agregação e pré-agregação baseadas na integral de Choquet em redução dimensional de imagens a fim de reduzir perdas de informações significativas contidas nas imagens.

Buscam-se alcançar os seguintes objetivos específicos:

- Apresentar funções de agregação e pré-agregação alternativas às funções usuais aplicadas em redução dimensional de imagens;
- Analisar e avaliar quantitativamente a qualidade dos resultados da aplicação das funções baseadas na integral de Choquet, obtidos através de medidas de qualidade de imagem;
- Comparar qualitativamente as imagens resultantes dos agregadores empregados.

1.3 Organização do Texto

O restante desta dissertação está organizada da seguinte maneira:

- No Capítulo 2, é definida função de agregação. Neste capítulo, são apresentados os conceitos de operadores como t-norma e Cópula. Posteriormente, define-se a integral de Choquet. Em seguida, é apresentada a generalização da integral de Choquet por Cópulas.
- No Capítulo 3, é apresentada a definição de função de pré-agregação, além de pré-requisitos necessários para gerar uma família de funções de pré-agregação baseadas na integral de Choquet.
- No Capítulo 4, é descrito o processo de redução dimensional de imagens, assim como as funções de medida de qualidade imagens adotadas para comparar as imagens de entrada com as imagens de saída, após a redimensionalização.
- No Capítulo 5, é apresentada a metodologia aplicada no estudo da redução dimensional de imagens utilizando funções de agregação e pré-agregação baseadas na integral de Choquet, além disto são apresentadas as análises dos resultados obtidos.
- Por fim, o Capítulo 6 expõe as principais contribuições desta dissertação, e apresenta algumas pretensões para trabalhos futuros.

2 FUNÇÕES DE AGREGAÇÃO

Agregação é um processo de combinar diferentes valores numéricos retornando um único valor. A regra que realiza essa tarefa é denominada função de agregação (GRABISCH *et al.*, 2009). Os valores de entrada de uma função de agregação podem ser, por exemplo, graus de pertinência de conjuntos *fuzzy*, peso de critérios, graus de preferência, etc. Sendo assim, sua aplicação ocorre em diversas áreas das ciências exatas como estatística, ciência da computação, matemática, economia entre outras.

2.1 Definição e Exemplos

Definição 2.1 Denomina-se aridade de uma função o número n de argumentos que compõem as n -uplas ordenadas pertencentes à função.

Definição 2.2 Uma função $\mathcal{A} : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ de aridade n é dita de agregação se satisfaz as seguintes condições:

(A1) Condições de contorno: $\mathcal{A}(\overbrace{0, 0, \dots, 0}^{n\text{-vezes}}) = 0$ e $\mathcal{A}(\overbrace{1, 1, \dots, 1}^{n\text{-vezes}}) = 1$.

(A2) Monotonicidade: $\mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \mathcal{A}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ sempre que $x_i \leq y_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, ou seja, $\mathcal{A}$ é não-decrescente em cada argumento.

A função de agregação definida no domínio $[0, 1]^n$ e contra-domínio $[0, 1]$ visa o contexto *fuzzy*. Poderia ser considerado um intervalo fechado da reta real diferente desse. As funções de agregação mais comuns na literatura são as funções de máximo, que pode ser definida como $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, e a função mínimo definida por $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, além, é claro, da tão conhecida função média, exemplificada a seguir.

Exemplo 2.1 Considerando que há n critérios para avaliar determinado problema e que cada critério assume um valor no intervalo $[0, 1]$. O objetivo é determinar um valor que represente a agregação dos n critérios. Uma forma muito utilizada para obtenção desse valor é aplicação de alguma média. Neste caso, escolhe-se, por exemplo, a média aritmética que é uma função de agregação definida por

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n),$$

onde x_i é o valor do critério i para $i \in \{1, \dots, n\}$.

Exemplo 2.2 Seja $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$. Algumas funções de agregação bem conhecidas são dadas abaixo:

$$\mathcal{A}(\vec{x}) = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}, \text{ (média harmônica)}$$

$$\mathcal{A}(\vec{x}) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}, \text{ (média geométrica)}$$

$$\mathcal{A}(\vec{x}) = \min \left\{ 1, \sum_{i=1}^n x_i \right\}. \text{ (soma limitada)}$$

As duas próximas seções apresentam dois tipos especiais de operadores, t-norma e Cópula, que são também funções de agregação.

2.2 T-norma

Definição 2.3 (ALSINA; FRANK; SCHWEIZER, 2006) *A norma triangular (t-norma) é uma função $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ que para todo $x, y, u, z \in [0, 1]$ satisfaz as seguintes condições:*

- (T1) *Comutatividade: $T(x, y) = T(y, x)$.*
- (T2) *Associatividade: $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$.*
- (T3) *Monotonicidade: $T(x, y) \leq T(u, z)$ sempre que $x \leq u$ e $y \leq z$.*
- (T4) *Condição de Contorno: $T(1, x) = x$.*

Toda t-norma T (Def. 2.3) é uma função de agregação.

De fato:

- (i) Condições de Contorno: por (T4) tem-se $T(1, x) = x$, fazendo $x = 1$, $T(1, 1) = 1$. Por outro lado, por (T3) e (T4) tem-se $0 \leq T(0, x) \leq T(1, x) = x$, tomando $x = 0$, obtém-se $0 \leq T(0, 0) \leq T(1, 0) = 0$, portanto, $T(0, 0) = 0$. Logo, a condição (A1) é satisfeita.
- (ii) Monotonicidade: a condição (A2) é imediatamente satisfeita dada a condição (T3).

Então por (i) e (ii) a t-norma é uma função de agregação.

Observa-se que a função de agregação t-norma pode ser estendida para aridade n (KLEMENT; MESIAR; PAP, 2000).

Exemplo 2.3 *As principais t-normas são:*

$$\begin{aligned} T_M(x, y) &= \min(x, y), & (\text{mínimo}) \\ T_P(x, y) &= xy, & (\text{produto}) \\ T_L(x, y) &= \max(x + y - 1, 0), & (\text{produto limitado – Lukasiewicz t-norma}) \\ T_D(x, y) &= \begin{cases} 0 & \text{se } (x, y) \in [0, 1]^2 \\ \min(x, y) & \text{caso contrário} \end{cases} . & (\text{produto drástico}) \end{aligned}$$

A Figura 2.1 ilustra as superfícies geradas pelas t-normas apresentadas neste exemplo, respectivamente.

Outra importante t-norma é a *Hamacher Product* que será utilizada nesta dissertação para criar funções de pré-agregação (Cap. 3) com base na integral de Choquet.

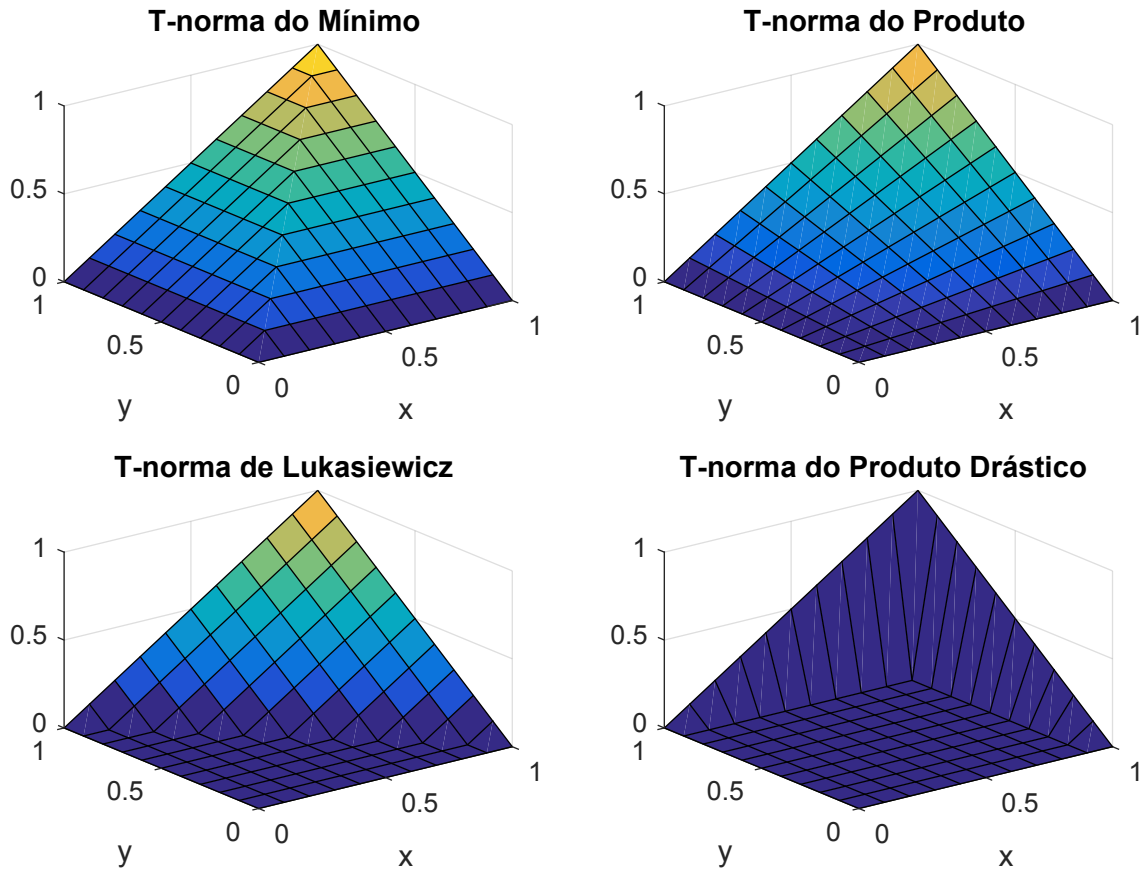


Figura 2.1: Gráficos das t-normas apresentadas no Ex. 2.3. Fonte: Autora.

Definição 2.4 A Hamacher Product é uma t-norma $T_{Ham} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ definida da seguinte forma:

$$T_{Ham}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y = 0 \\ \frac{xy}{x + y - xy} & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

2.3 Cópula

Definição 2.5 (ALSINA; FRANK; SCHWEIZER, 2006) A Cópula é uma função $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ que para todo $x, y, u, z \in [0, 1]$ satisfaz as seguintes condições:

(C1) Condições de Contorno: $C(x, 0) = C(0, x) = 0$ e $C(x, 1) = C(1, x) = x$.

(C2) Monotonicidade: $C(x, y) - C(x, z) - C(u, y) + C(u, z) \geq 0$ sempre que $x \leq u$ e $y \leq z$.

De acordo com a definição dada, tem-se que a Cópula é uma função monótona não-decrescente, e ainda pela condição (C1) tem-se que C é uma função de agregação.

Exemplo 2.4 As t-normas do produto, Lukasiewicz, mínimo e Hamacher Product são alguns exemplos de Cópulas.

Observa-se que nem toda Cópula é uma t-norma, o exemplo a seguir apresenta uma função que é uma Cópula, mas não é uma t-norma.

Exemplo 2.5 A função $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, definida por $C(x, y) = xy + x^2y(1 - x)(1 - y)$ é uma Cópula, no entanto, não é uma t-norma.

A próxima seção apresenta um tipo especial de função de agregação que é a integral de Choquet. A integral de Choquet desempenha um importante papel dentre as funções de agregação, pois em seu modelo é considerado a relação entre os atributos através de uma medida *fuzzy*, além da importância de cada atributo.

2.4 Integral de Choquet

A integral de Choquet (CHOQUET, 1954) é uma extensão da integral de Lebesgue (NELSON, 2015), sendo definida com base em uma medida *fuzzy*. A medida *fuzzy* tem diversas interpretações dependendo do contexto do problema a ser trabalhado. No contexto de funções de agregação, a medida *fuzzy* representa o grau de relação entre os elementos a serem agregados. Desta forma, a grande utilização da integral de Choquet ocorre devido ao seu modelo considerar a importância de cada atributo a ser agregado, bem como suas interações.

Definição 2.6 Seja $N = \{1, \dots, n\}$ e 2^N o conjunto das partes de N . A função $m : 2^N \rightarrow [0, 1]$ é uma medida *fuzzy* se, para todo conjunto $A, B \subseteq N$, as seguintes condições são satisfeitas:

(m1) Condições de Contorno: $m(\emptyset) = 0$ e $m(N) = 1$.

(m2) Monotonicidade: $m(A) \leq m(B)$ sempre que $A \subseteq B$.

Exemplo 2.6 Seja o conjunto $N = \{1, 2, 3\}$. O conjunto das partes de N é dado por $2^N = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Exemplo 2.7 Seja $N = \{1, \dots, n\}$, $A \subseteq N$ e $|A|$ a cardinalidade do conjunto A . Algumas medidas *fuzzy* são dadas abaixo:

Medida Uniforme:

$$m_U(A) = \frac{|A|}{n}.$$

Medida de Dirac:

$$m_D^i(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in A \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \text{ onde } i \in N \text{ é fixado.}$$

Medida Aditiva: Seja $W = (w_1, \dots, w_n) \in [0, 1]^n$ tal que $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. Considerando $m_W(\{i\}) = w_i$, tem-se para $|A| > 1$ a medida definida por

$$m_W(A) = \sum_{i \in A} w_i.$$

Medida OWA²: Seja $W = (w_1, \dots, w_n) \in [0, 1]^n$ tal que $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. Para cada subconjunto A não-vazio, tem-se

$$m_{sW}(A) = \sum_{i=1}^{|A|} w_i.$$

Medida da Potência:

$$m_P(A) = \left(\frac{|A|}{n}\right)^q, \text{ onde } q > 0. \quad (2.1)$$

Definição 2.7 Uma medida fuzzy m em 2^N é denominada aditiva se para cada par de subconjuntos $A, B \subseteq N$ disjuntos, tem-se $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

Exemplo 2.8 Seja $N = \{1, 2, 3\}$ e m a medida fuzzy $m(N) = 1$, $m(\{1, 2\}) = 0.4$, $m(\{1, 3\}) = 0.7$, $m(\{2, 3\}) = 0.9$, $m(\{1\}) = 0.1$, $m(\{2\}) = 0.3$, $m(\{3\}) = 0.6$ e $m(\emptyset) = 0$. Desta forma, m satisfaz a condição da Def. 2.7, portanto, m é uma medida fuzzy aditiva.

Definição 2.8 Uma medida fuzzy m em 2^N é denominada simétrica se para os subconjuntos $A, B \subseteq N$ tal que $|A| = |B|$, tem-se $m(A) = m(B)$.

Exemplo 2.9 Seja $N = \{1, 2, 3\}$ e m a medida fuzzy $m(N) = 1$, $m(\{1, 2\}) = m(\{1, 3\}) = m(\{2, 3\}) = 0.7$, $m(\{1\}) = m(\{2\}) = m(\{3\}) = 0.2$ e $m(\emptyset) = 0$. Desta forma, m satisfaz a condição da Def. 2.8, logo m é uma medida fuzzy simétrica.

Observa-se que as medidas fuzzy m_D^i e m_W são aditivas. Por outro lado, m_P , m_{sW} são simétricas. Já a medida uniforme m_U é aditiva e simétrica.

Definição 2.9 Seja $m : 2^N \rightarrow [0, 1]$ uma medida fuzzy. A integral de Choquet discreta de $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$ com relação à medida fuzzy m é uma função $\mathfrak{C}_m : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, definida por

$$\mathfrak{C}_m(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n (x_{(i)} - x_{(i-1)}) \cdot m(A_{(i)}), \quad (2.2)$$

onde $\vec{x}_{\nearrow} = (x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$ é uma permutação não-decrescente de $\vec{x}$, isto é, $0 \leq x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$, por convenção $x_{(0)} = 0$, e $A_{(i)} = \{(i), \dots, (n)\}$ é o subconjunto dos índices das $n - i + 1$ maiores componentes de $\vec{x}$.

²Sigla na Língua Inglesa - Ordered Weighted Averaging (OWA)

A integral de Choquet Eq.(2.2) assim definida satisfaz as condições da Def. 2.2, logo é uma função de agregação. Além disso, a integral de Choquet Eq. (2.2) pode ser escrita na forma expandida como:

$$\mathfrak{C}_m(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n (x_{(i)} \cdot m(A_{(i)}) - x_{(i-1)} \cdot m(A_{(i)})), \quad (2.3)$$

Exemplo 2.10 *A média aritmética ponderada é um caso da integral de Choquet com respeito à medida fuzzy aditiva. Assim como, a média aritmética ponderada ordenada é um caso da integral de Choquet com respeito à medida fuzzy OWA. Já a integral de Choquet em relação à medida uniforme equivale à média aritmética.*

Exemplo 2.11 *Seja $\vec{x} = (0.8, 0.1, 0.6)$ tal que $\vec{x}_{\nearrow} = (0.1, 0.6, 0.8)$. A integral de Choquet do vetor $\vec{x}$ com relação à medida fuzzy uniforme $m_U(A) = \frac{|A|}{n}$ é calculada da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_m(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^3 (x_{(i)} - x_{(i-1)}) m_U(A_{(i)}) \\ &= (x_{(1)} - x_{(0)}) m_U(A_{(1)}) + (x_{(2)} - x_{(1)}) m_U(A_{(2)}) + (x_{(3)} - x_{(2)}) m_U(A_{(3)}) \\ &= (0.1 - 0) \frac{3}{3} + (0.6 - 0.1) \frac{2}{3} + (0.8 - 0.6) \frac{1}{3} \\ &= \frac{0.1 \cdot 3 + 0.5 \cdot 2 + 0.2 \cdot 1}{3} \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

Portanto, $\mathfrak{C}_m(0.8, 0.1, 0.6) = 0.5$.

Exemplo 2.12 *Seja o conjunto de vetores de dois argumentos contido no espaço $[0, 1] \times [0, 1]$. A Fig. 2.2 ilustra o comportamento da integral de Choquet Eq. (2.2) com respeito à medida fuzzy da potência, onde considerou-se para primeira superfície $q = 0.01$ e para a segunda o valor de $q = 1$. Observa-se que quando $q = 1$ a medida fuzzy da potência equivale à medida fuzzy uniforme, onde tal circunstância faz com que a integral de Choquet equivalha à média aritmética dos valores de cada vetor de entrada, isto pode ser observado no Ex. 2.11. Logo, a integral de Choquet com relação à medida fuzzy uniforme é equivalente à média aritmética.*

No contexto desta dissertação, a integral de Choquet tem como domínio os valores dos *pixels* de uma imagem de entrada que estão em escala de cinza, e variam de 0 a 255 *pixels*³ (a Fig. 2.3 ilustra essa variação). Entende-se como *pixel* a menor unidade de uma imagem que pode ser representado em um dispositivo de exibição digital, ou seja, é um

³A palavra *pixel* advém da aglutinação das palavras *picture* e *element*.

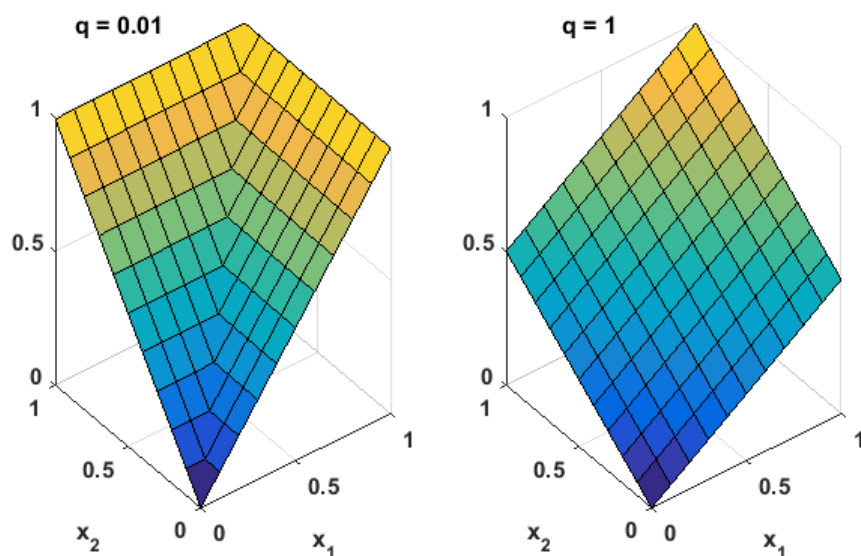


Figura 2.2: Integral de Choquet com relação à medida *fuzzy* da potência. Fonte: Autora.

elemento de imagem (GONZALEZ; WOODS, 2002). Os *pixels* são combinados para formar uma imagem.

Ressalta-se que a principal característica da integral do Choquet, em comparação com outras funções de agregação, reside no fato de que ela considera, por meio de uma medida *fuzzy*, a interação entre os elementos a serem agregados. Por exemplo, o máximo não considera a relação entre os elementos a serem agregados, descartando informações importantes entre esses elementos (ou vizinhança). Assim, entende-se que quanto mais informações das relações entre os *pixels* a serem agregados, melhor será a imagem de saída (BARRENECHEA *et al.*, 2013).

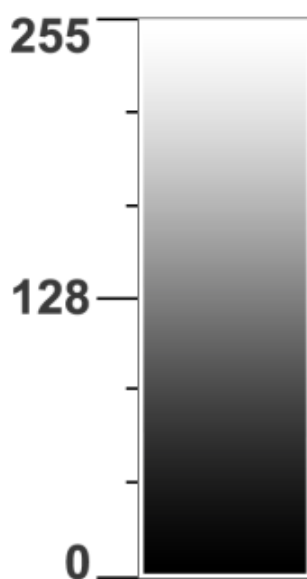


Figura 2.3: Escala de *Pixels*. Fonte:

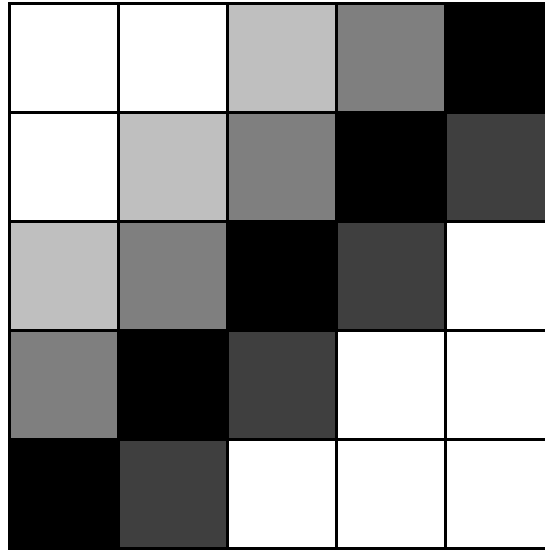


Figura 2.4: Representação de uma Imagem em Tons de Cinza. Fonte: <https://www.dcc.fc.up.pt/~nam/aulas/0001/pi/trabalho2/trab2/>

A Figura 2.4, apresenta uma imagem em tons de cinza, onde cada quadrado da imagem representa um *pixel*. Esta imagem apresenta 5×5 *pixels* de tamanho. A matriz que apresenta os *pixels* da imagem é dada por:

$$\begin{bmatrix} 255 & 255 & 127 & 50 & 0 \\ 255 & 127 & 50 & 0 & 25 \\ 127 & 50 & 0 & 25 & 255 \\ 50 & 0 & 25 & 255 & 255 \\ 0 & 25 & 255 & 255 & 255 \end{bmatrix}$$

Cada valor da matriz representa um *pixel* associado à imagem de acordo com a escala apresentada na Fig. 2.3.

2.5 Generalização da Integral de Choquet por Cópulas

A integral de Choquet pode ser generalizada por Cópulas, gerando uma família de funções de agregação denominadas CC-integrais (LUCCA *et al.*, 2017). Essa generalização é construída trocando-se o operador do produto da integral de Choquet na forma expandida Eq. (2.3) por uma Cópula.

Definição 2.10 *Seja $m : 2^N \rightarrow [0, 1]$ uma medida fuzzy e $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ uma Cópula. A integral de Choquet discreta baseada em Cópula com relação à medida fuzzy*

m é uma função $\mathfrak{C}_m^C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, definida por

$$\mathfrak{C}_m^C(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n C(x_{(i)}, m(A_{(i)})) - C(x_{(i-1)}, m(A_{(i)})), \quad (2.4)$$

onde $\vec{x}_{\nearrow} = (x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$ é uma permutação não-decrescente de $\vec{x}$, isto é, $0 \leq x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$, por convenção $x_{(0)} = 0$, e $A_{(i)} = \{(i), \dots, (n)\}$ é um subconjunto dos índices das $n - i + 1$ maiores componentes de $\vec{x}$.

Proposição 2.1 Para qualquer Cópula $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ e medida fuzzy $m : 2^N \rightarrow [0, 1]$, $\mathfrak{C}_m^C$ satisfaz a condição de contorno (A1) da função de agregação Def. 2.2.

Demonstração em [LUCCA et al. \(2017\)](#).

Proposição 2.2 Para qualquer Cópula $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ e medida fuzzy $m : 2^N \rightarrow [0, 1]$, $\mathfrak{C}_m^C$ satisfaz a condição de monotonicidade (A2) da função de agregação Def. 2.2.

Demonstração em [LUCCA et al. \(2017\)](#).

Portanto, segue das Prop. 2.1 e 2.2 que para qualquer Cópula $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ e medida fuzzy $m : 2^N \rightarrow [0, 1]$, $\mathfrak{C}_m^C$ é uma função de agregação. Além disso, tem-se da demonstração da Prop. 2.2 que $\min(\vec{x}) \leq \mathfrak{C}_m^C(\vec{x}) \leq \max(\vec{x})$ para todo $\vec{x} \in [0, 1]^n$.

Definição 2.11 Aplicando na Eq. (2.4) a t -norma do mínimo que também é uma Cópula, obtém-se:

$$\mathfrak{C}_m^{T_M}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n (\min\{x_{(i)}, m(A_{(i)})\} - \min\{x_{(i-1)}, m(A_{(i)})\}). \quad (2.5)$$

Outras tantas CC-integrais podem ser formadas, basta trocar a Cópula C da Eq. (2.4) ([LUCCA et al., 2017](#)).

2.6 Funções de Comportamento Médio

Definição 2.12 Uma função $f : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ tem comportamento médio se satisfaz a seguinte condição:

$$\min(\vec{x}) \leq f(\vec{x}) \leq \max(\vec{x}) \text{ para todo } \vec{x} \in [0, 1]^n.$$

Exemplo 2.13 As funções média aritmética, média aritmética ordenada, média geométrica, média harmônica, média ponderada ordenada, mediana, bem como integral de Choquet são exemplos de funções de comportamento médio, isto é, cumprem a Def. 2.12 ([BELIAKOV; SOLA; SÁNCHEZ, 2016](#)).

Além das funções clássicas apresentadas no exemplo acima, temos outras funções de comportamento médio, como a integral de Choquet Def. 2.9 e a CC-integral Eq. (2.5).

Definição 2.13 *Uma função $f : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ é chamada de idempotente se para qualquer $\vec{x} = (t, t, \dots, t)$, $t \in [0, 1]$ tem-se $f(t, t, \dots, t) = t$.*

As funções de agregação máximo e mínimo, por exemplo, são funções idempotentes. Observa-se que devido à condição de monotonicidade da função de agregação $\mathcal{A}$, idempotência (Def 2.13) é equivalente à função ter comportamento médio (Def. 2.12) (BELIAKOV; PRADERA; CALVO, 2007).

2.7 Considerações Finais

Neste capítulo foi apresentado o conceito de função de agregação. Os exemplos apresentados foram inspirados no livro BELIAKOV; PRADERA; CALVO (2007) e BELIAKOV; SOLA; SÁNCHEZ (2016). Mais propriedades, exemplos e detalhes sobre funções de agregação podem ser encontrados em BELIAKOV; PRADERA; CALVO (2007), GRABISCH *et al.* (2009) e BELIAKOV; SOLA; SÁNCHEZ (2016). Um contexto mais geral sobre medidas *fuzzy* e suas propriedades podem ser encontrados em WANG; KLIR (1992).

Como visto, este capítulo deu ênfase à integral de Choquet que conforme a definição dada também é uma função de agregação e, portanto, pode ser utilizada em diversos problemas, entre eles classificação de dados. Além disso, ressalta-se que a função integral de Choquet $\mathfrak{C}_m$ (Eq. 2.2), bem como a sua extensão por cópula $\mathfrak{C}_m^{T_M}$ (Eq. 2.5) foram escolhidas para serem aplicadas neste estudo de redução dimensional, visto que apresentaram os melhores resultados em Sistemas de Classificação Baseados em Regras *Fuzzy* como demonstrado nos trabalhos BARRENECHEA *et al.* (2013) e LUCCA *et al.* (2017), respectivamente. O próximo capítulo apresenta uma generalização do conceito de função de agregação.

3 FUNÇÕES DE PRÉ-AGREGAÇÃO

Como visto no capítulo anterior, as funções de agregação podem ser aplicadas em diversos contextos, porém algumas das aplicações podem ser limitadas devido aos seus dois pré-requisitos, que são as condições de contorno e monotonicidade, que no caso é ser não-decrescente em cada argumento.

Definição 3.1 (LUCCA *et al.*, 2016) *Seja $\vec{r} = (r_1, \dots, r_n)$ um vetor real de dimensão n tal que $\vec{r} \neq (0, \dots, 0)$. A função $F : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ é $\vec{r}$ -não-decrescente se para todo $(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$ e para todo $c > 0$ tal que $(x_1 + cr_1, \dots, x_n + cr_n) \in [0, 1]^n$, tem-se:*

$$F(x_1 + cr_1, \dots, x_n + cr_n) \geq F(x_1, \dots, x_n).$$

Ou seja, uma função $\vec{r}$ -não-decrescente é uma função que não decresce na direção de um determinado vetor $\vec{r}$. Desta forma, se diz que F é monótona direcional. Observa-se que toda função não-decrescente é $\vec{r}$ -não-decrescente para todo vetor real não negativo $\vec{r}$.

Definição 3.2 (LUCCA *et al.*, 2016) *Uma função $F : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ é dita função de pré-agregação de aridade n , se satisfaz as seguintes condições:*

(PA1) *Condições de Contorno:* $F(0, \dots, 0) = 0$ e $F(1, \dots, 1) = 1$

(PA2) *Monotonicidade:* *existe um vetor real $\vec{r} \in [0, 1]^n$, $\vec{r} \neq \vec{0}$, tal que F é $\vec{r}$ -não-decrescente.*

Exemplo 3.1 *A função $f : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ definida por $f(x, y) = x - (\max\{0, x - y\})^2$ é $(0, 1)$ -não-decrescente, além disso é uma função de pré-agregação, porém não é uma função de agregação.*

Exemplo 3.2 *Seja a função $Mod : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ definida como a função que retorna o valor mais frequente do vetor de entrada, tal função é denominada como moda. Observa-se que esta função satisfaz as condições de contorno da função de agregação, por outro lado não respeita o critério de monotonicidade.*

Por exemplo, definindo-a como $Mod : [0, 1]^5 \rightarrow [0, 1]$ e tomando os seguintes vetores: $(0.6, 0.3, 0.6, 0.6, 0.3)$ e $(0.6, 0.4, 0.8, 0.7, 0.4)$. Tem-se $(0.6, 0.3, 0.6, 0.6, 0.3) \leq (0.6, 0.4, 0.8, 0.7, 0.4)$, porém $Mod(0.6, 0.3, 0.6, 0.6, 0.3) \geq Mod(0.6, 0.4, 0.8, 0.7, 0.4)$.

Portanto, é possível verificar que a função moda não é uma função de agregação. Porém, se tomarmos o vetor $(1, \dots, 1)$, a função moda cumpre a condição de monotonicidade das funções de pré-agregação, sendo então $(1, \dots, 1)$ -não-decrescente. Logo, conclui-se que a função moda não é uma função de agregação, porém é uma função de

pré-agregação. Isso mostra que por mais que as funções de agregação sejam importantes, elas têm suas limitações, e funções usuais, como a moda, não se encaixam, contudo com a flexibilização da condição de monotonicidade é possível defini-la como uma pré-agregação

Note que toda função de agregação é uma função de pré-agregação, porém a recíproca não é verdadeira. Observa-se que diferente do que ocorre em funções de agregação, onde a classe das funções de agregação idempotente equivale à classe das funções de agregação com comportamento médio, isso não pode ser garantido para funções de pré-agregação. Tais apontamentos são apresentados e discutidos nos trabalhos de [LUCCA et al. \(2018\)](#) e [LUCCA et al. \(2018\)](#).

3.1 Funções de Pré-Agregação Baseadas na Integral de Choquet

A construção de funções de pré-agregação com base na integral de Choquet ocorre, inicialmente, trocando-se o operador do produto da Eq. (2.2) por outro operador que pode ou não ser uma função de agregação e deve cumprir alguns requisitos que serão apresentados a seguir.

Definição 3.3 ([LUCCA et al., 2016](#)) *Seja $m : 2^N \rightarrow [0, 1]$ uma medida fuzzy e $M : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ um função tal que $M(x, 0) = 0$ para todo $x \in [0, 1]$. Deste modo, podemos estender a integral de Choquet para a função dada por:*

$$\mathfrak{C}_m^M(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n M(x_{(i)} - x_{(i-1)}, m(A_{(i)})), \quad (3.1)$$

onde $N = 1, \dots, n$, $\vec{x}_{\nearrow} = (x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$ é uma permutação não-decrescente do vetor de entrada $\vec{x}$, isto é, $0 \leq x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$, por convenção $x_{(0)} = 0$, e $A_{(i)} = \{(i), \dots, (n)\}$ é o subconjunto dos índices das $n - i + 1$ maiores componentes de $\vec{x}$.

Teorema 3.1 *Seja $M : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ uma função tal que para todo $x, y \in [0, 1]$ satisfaz $M(x, y) \leq x$, $M(x, 1) = x$, $M(0, y) = 0$ e M é $(1, 0)$ -não-decrescente. Então, para toda medida fuzzy m , $\mathfrak{C}_m^M$ é uma função de pré-agregação idempotente (Def. 2.13) e com comportamento médio (Def. 2.12).*

Demonstração em [LUCCA et al. \(2016\)](#).

Exemplo 3.3 *Seja a t -norma T_{Ham} (Def. 2.4) e considerando a Def. 3.3. Pode-se aplicar o Teorema 3.1, considerando T_{Ham} como a função M uma vez que satisfaz tais condições,*

e obtém-se a seguinte função de pré-agregação:

$$\mathfrak{C}_{\mathfrak{m}}^{T_{Ham}}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \begin{cases} 0, & \text{se } x_{(i)} = x_{(i-1)} \text{ e } \mathfrak{m}(A_{(i)}) = 0 \\ \frac{(x_{(i)} - x_{(i-1)}) \cdot \mathfrak{m}(A_{(i)})}{x_{(i)} - x_{(i-1)} + \mathfrak{m}(A_{(i)}) - (x_{(i)} - x_{(i-1)}) \cdot \mathfrak{m}(A_{(i)})}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.2)$$

As t-normas apresentadas no Ex. 2.3 também satisfazem as condições do Teorema 3.1, portanto, também geram funções de pré-agregação $\mathfrak{C}_{\mathfrak{m}}^M$. Logo, a generalização da integral de Choquet por t-normas nos dá um família grande de funções de pré-agregação (LUCCA *et al.*, 2016).

Uma nova familia de funções de pré-agregação foi ainda desenvolvida por LUCCA *et al.* (2018), onde são denominadas de C_F integrais.

Definição 3.4 *Seja uma função $F: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$. Definem-se as seguintes propriedades:*

(LAE) *Elemento absorvente à esquerda $\forall y \in [0, 1] : F(0, y) = 0$.*

(RNE) *Elemento neutro à direita: $\forall x \in [0, 1] : F(x, 1) = x$;*

(LC) *Propriedade conjuntiva à esquerda: $\forall x, y \in [0, 1] : F(x, y) \leq x$.*

Pode-se criar uma família de funções de pré-agregação definida pela integral de Choquet discreta na forma estendida usando uma função $F : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ com 0 como elemento absorvente à esquerda, obtendo-se a partir disto a chamada C_F .

Definição 3.5 (LUCCA *et al.*, 2018) *Seja uma função $F : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ e $\mathfrak{m} : 2^N \rightarrow [0, 1]$ uma medida fuzzy. A integral de Choquet baseada em F com respeito à medida $\mathfrak{m}$, chamada C_F integral, é a função $\mathfrak{C}_{\mathfrak{m}}^F : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, definida para todo $\vec{x} \in [0, 1]^n$, por*

$$\mathfrak{C}_{\mathfrak{m}}^F(\vec{x}) = \min \left\{ 1, \sum_{i=1}^n F(x_{(i)} - x_{(i-1)}, \mathfrak{m}(A_{(i)})) \right\} \quad (3.3)$$

onde $N = 1, \dots, n$, $\vec{x}_{\nearrow} = (x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$ é uma permutação não-decrescente do vetor de entrada $\vec{x}$, isto é, $0 \leq x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$, por convenção $x_{(0)} = 0$, e $A_{(i)} = \{(i), \dots, (n)\}$ é o subconjunto dos índices das $n - i + 1$ maiores componentes de $\vec{x}$.

Proposição 3.1 $\mathfrak{C}_{\mathfrak{m}}^F$ é bem definida, para qualquer $F : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ e medida fuzzy $\mathfrak{m} : 2^N \rightarrow [0, 1]$

Proposição 3.2 Para qualquer medida fuzzy $\mathfrak{m} : 2^N \rightarrow [0, 1]$ e $F : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ com 0 como elemento absorvente à esquerda e 1 como elemento neutro à direita, $\mathfrak{C}_{\mathfrak{m}}^F$ é idempotente.

Proposição 3.3 Para qualquer medida fuzzy $m : 2^N \rightarrow [0, 1]$ e $F : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ com propriedade conjuntiva à esquerda, tem-se que $\mathfrak{C}_m^F \leq \max$

Proposição 3.4 Para qualquer medida fuzzy $m : 2^N \rightarrow [0, 1]$ e $F : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ com 0 como elemento absorvente à esquerda. Se F satisfaz a condição $\mathcal{A}(1, \dots, 1) = 1$, então $\mathfrak{C}_m^F$ satisfaz a condição $\mathcal{A}(0, \dots, 0) = 0$

Proposição 3.5 Para qualquer medida fuzzy $m : 2^N \rightarrow [0, 1]$, se a função $F : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ satisfaz um das seguintes condições:

- (i) F é $(1, 0)$ -não-decrescente;
- (ii) F satisfaz a propriedade de elemento direito neutro;

então $\mathfrak{C}_m^F$ é $\vec{1}$ -não-decrescente.

Teorema 3.2 Para qualquer medida fuzzy $m : 2^N \rightarrow [0, 1]$ e função $F : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ com 0 como elemento absorvente à esquerda e 1 como elemento neutro à direita, $\mathfrak{C}_m^F$ é uma função $\vec{1}$ -pré-agregação

Teorema 3.3 Para qualquer medida fuzzy $m : 2^N \rightarrow [0, 1]$ e uma função $(1, 0)$ -pré-agregação $F : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ com 0 como elemento absorvente à esquerda, $\mathfrak{C}_m^F$ é uma função $\vec{1}$ -pré-agregação.

As demonstrações das Proposições 3.1–3.5, bem como dos Teoremas 3.2 e 3.3 são apresentadas em [LUCCA et al. \(2018\)](#).

Exemplo 3.4 Seja $F_{NA} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ a função com 0 como elemento absorvente à esquerda e 1 como elemento neutro à direita, dada da seguinte forma:

$$F_{NA}(x, y) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq y \\ \min\left\{\frac{x}{2}, y\right\}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.4)$$

Considerando a Def. 3.5, pode-se aplicar a função F_{NA} , onde obtém-se a seguinte função de pré-agregação:

$$\mathfrak{C}_m^{F_{NA}}(\vec{x}) = \min \left\{ 1, \sum_{i=1}^n \begin{cases} x_{(i)} - x_{(i-1)}, & \text{se } x_{(i)} - x_{(i-1)} \leq m(A_{(i)}) \\ \min\left\{\frac{x_{(i)} - x_{(i-1)}}{2}, m(A_{(i)})\right\}, & \text{caso contrário} \end{cases} \right\} \quad (3.5)$$

3.2 Considerações Finais

Neste capítulo foi apresentado o conceito de função de pré-agregação e apresentada uma família de funções de pré-agregação baseadas na integral de Choquet. Tais funções têm sido usadas em problemas de classificação e apresentam bom desempenho em Sistema de Classificação Baseado em Regras *Fuzzy*. As funções de pré-agregação $\mathfrak{C}_m^{T_{Ham}}$ (Eq. 3.2) e $\mathfrak{C}_m^{F_{NA}}$ (Eq. 3.5) foram definidas neste capítulo, pois foram escolhidas para serem testadas no processo de redução dimensional de imagens.

A escolha dessas funções foi feita com base em seus desempenhos em Sistema de Classificação Baseados em Regras *Fuzzy*, pois no trabalho [LUCCA *et al.* \(2016\)](#) $\mathfrak{C}_m^{T_{Ham}}$ apresentou o melhor desempenho comparada aos seus pares. Já no trabalho [LUCCA *et al.* \(2018\)](#) a função $\mathfrak{C}_m^{F_{NA}}$ superou as demais. O próximo capítulo apresenta o processo de redução dimensional de imagens através de funções de agregação, além disso apresenta funções de medida de qualidade de imagens.

4 REDUÇÃO DIMENSIONAL DE IMAGENS

Uma imagem pode ser definida como uma função bidimensional $f(x, y)$, onde x e y são as coordenadas espaciais em um plano, e o valor de f em qualquer par ordenado do plano é chamado de intensidade ou nível de cinza da imagem naquele ponto (GONZALEZ; WOODS, 2002). Redimensionar imagens significa modificar seu tamanho original, isto é, uma imagem pode ser ampliada ou reduzida.

Segundo PAGOLA *et al.* (2017), redimensionar imagens é uma das principais etapas em diversos métodos de classificação de imagens, por exemplo, em Redes Neurais de Convolução (SCHERER; MÜLLER; BEHNKE, 2004), *Bag-of-Words* (WANG; HUANG, 2015), entre outros (BOUREAU; PONCE; LECUN, 2010). Para reduzir uma imagem, geralmente usa-se uma função que combina vetores de *pixels* de entrada retornando um único valor associado a cada vetor de entrada.

A Fig. 4.1 apresenta um esquema de como uma imagem pode ser reduzida através de algum agregador, onde a imagem original apresenta tamanho 9×9 sendo reduzida para 3×3 .

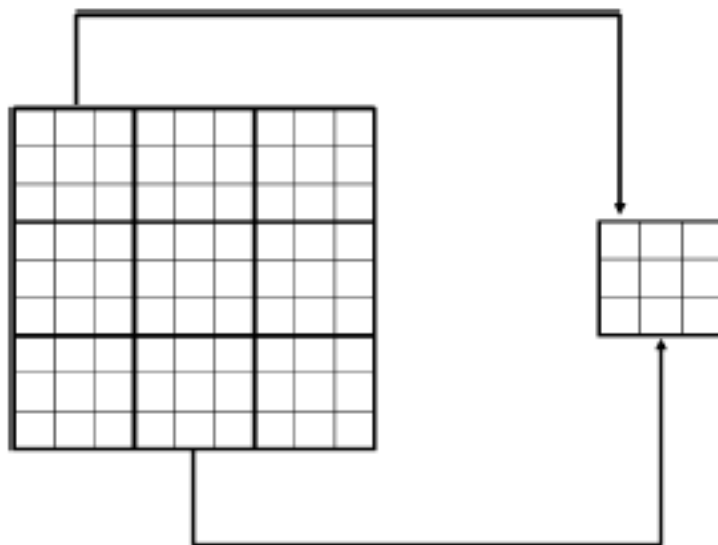


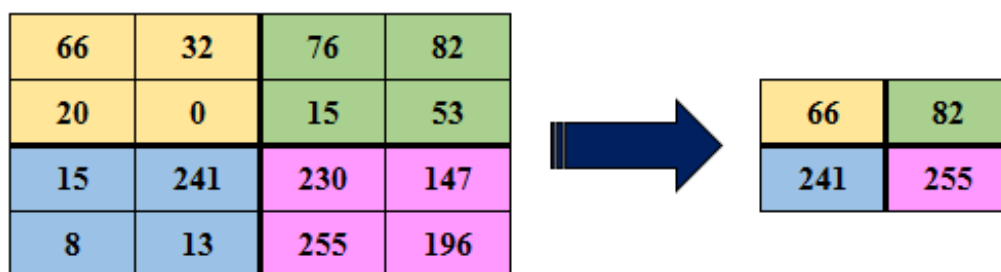
Figura 4.1: Esquema da Redução de Imagens. Fonte: BELIAKOV; BUSTINCE; PATERNAIS (2012)

Neste esquema, a imagem original foi dividida em 9 janelas (retângulos) 3×3 , em cada uma destas 9 janelas foi aplicado um agregador que retorna um único valor, gerando, desta forma, uma imagem reduzida de tamanho 3×3 .

4.1 Agregadores Máximo e Média

Os operadores de agregação mais populares em métodos de classificação de imagens, na etapa de redução dimensional, são as funções máximo e média, de acordo com YU *et al.* (2014). As Figuras 4.2 e 4.3 ilustram a aplicação das funções máximo e média, respectivamente, com base no que foi esquematizado na Fig. 4.1.

Conforme YU *et al.* (2014), embora as funções de agregação máximo e média possam funcionar muito bem em alguns conjuntos de dados, devido a sua eficiência computacional, pode talvez não funcionar bem em algum outro conjunto de dados. Em outras palavras, é uma espécie de empirismo escolher o agregador na etapa de redução dimensional de algum método de classificação de imagens.

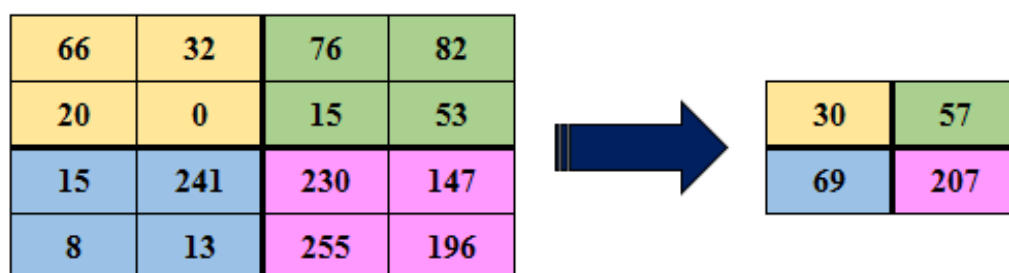


66	32	76	82
20	0	15	53
15	241	230	147
8	13	255	196

66	82
241	255

Figura 4.2: Exemplo de Redução de Imagem - Função Máximo. Fonte: Autora.

A função de agregação máximo, ao contrário da média, apresenta um fator negativo, pois ao ser aplicada em um vetor de *pixels* de uma imagem, não considera a relação entre os elementos. Ou seja, considera uma única característica de determinada janela, isto é, o maior *pixel* da janela em questão.



66	32	76	82
20	0	15	53
15	241	230	147
8	13	255	196

30	57
69	207

Figura 4.3: Exemplo de Redução de Imagem - Função Média. Fonte: Autora.

A Fig. 4.4 evidencia quando esta desvantagem é nítida. Observa-se que a maioria dos *pixels*, de cada uma das quatro janelas que a imagem de entrada foi dividida, apresentam o valor máximo do domínio dos *pixels*, 255. Quando aplicado o agregador máximo nestas

janelas, obtém-se uma imagem reduzida em branco. Ou seja, o operador máximo não foi capaz de conservar as características desta imagem de entrada ao reduzi-la.

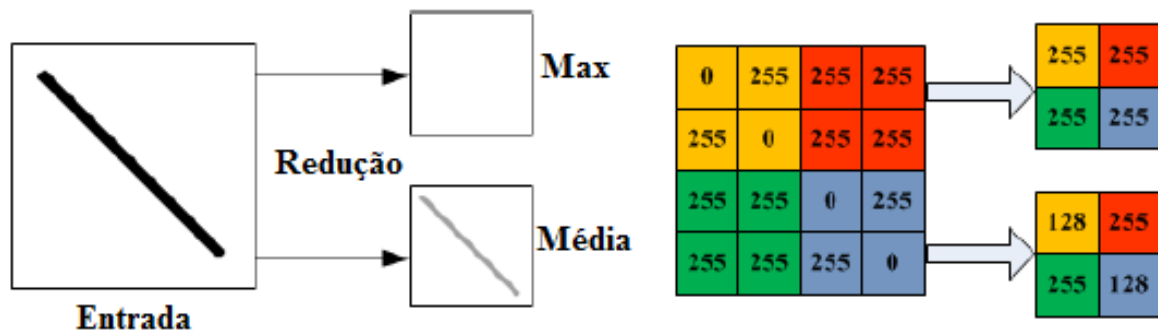


Figura 4.4: Ilustração da Desvantagem da Função Máximo. Fonte: [Adaptado] YU *et al.* (2014)

Por outro lado, a função de agregação média relaciona os elementos a serem agregados, porém quando aplicada, por exemplo, na imagem da Fig. 4.5 não apresenta vantagens em relação ao agregador máximo. O agregador média, por levar em consideração todos os elementos de cada janela, ocasiona a diminuição do contraste entre o objeto da frente e do fundo da imagem. Isso ocorre, geralmente, quando há uma grande quantidade de *pixels* de baixa magnitude a serem agregados, como é possível ver na imagem reduzida da Fig. 4.5.

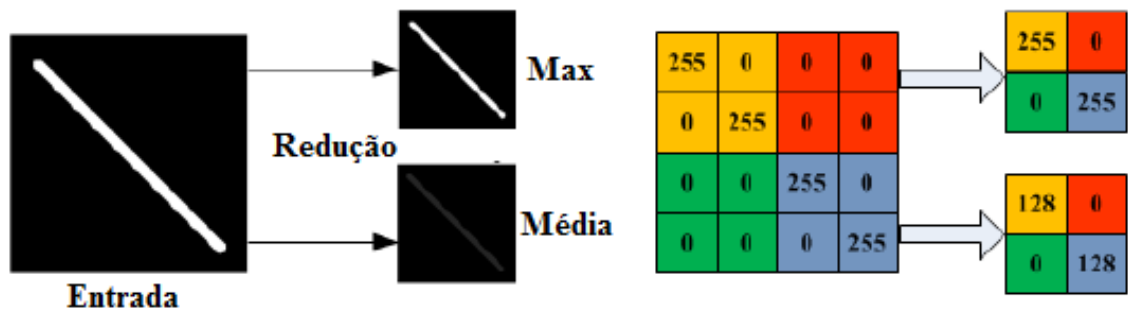


Figura 4.5: Ilustração da Desvantagem da Função Média. Fonte: [Adaptado] YU *et al.* (2014)

4.2 Novos Agregadores Baseados na Integral de Choquet

De acordo com BOUREAU; PONCE; LECUN (2010), diversos trabalhos mostraram que os operadores de agregação utilizados na tarefa de redução dimensional podem influenciar o desempenho dos métodos de classificação de imagens, mas tais estudos são empíricos. Neste contexto, apresenta-se um estudo de funções de agregação baseadas na

integral de Choquet objetivando apresentar novos agregadores para redução de imagens que possam apresentar resultados melhores que os agregadores clássicos, como máximo e média.

A Figura 4.6 ilustra a aplicação da integral de Choquet Eq. (2.2), considerando-se a medida *fuzzy* da potência quando $q = 0.5$. A matriz de *pixels* da imagem de entrada é a mesma que foi considerada na Fig. 4.2 para o agregador máximo e Fig. 4.3 para o agregador média.

Para que a integral de Choquet seja aplicada é necessário a normalização dos *pixels* a fim de que estejam no seu domínio que é o intervalo $[0, 1]$ exigido pela definição da integral de Choquet (Def. 2.9). Após, aplica-se a integral que retornará um valor do intervalo $[0, 1]$, logo este valor resultante é transformado para escala de *pixel* novamente, gerando uma imagem reduzida, conforme elucidado na Fig. 4.6.

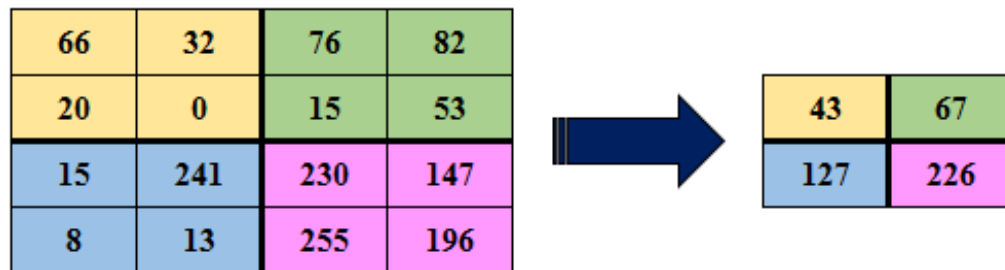


Figura 4.6: Exemplo de Redução de Imagem - Função Choquet com relação à medida *fuzzy* da potência para $q = 0.5$. Fonte: Autora.

4.3 Redimensionamento

De acordo com FEDOROV (2013), uma tarefa importante no processamento de imagens é o redimensionamento, pois se faz necessário muitas vezes para visualização, análise, e compação de imagens. Existem, basicamente, dois métodos que são aplicados para redimensionar imagens. Esses métodos são conhecidos por *Resampling* e *Resizing* (ACHARYA; TSAI, 2007).

O método *Resampling* usa técnicas de interpolação como bilinear, bicúbica, entre outras. Já o método de *Resizing* utiliza técnicas como *Nearest Neighbor*, isto é, vizinho mais próximo. A técnica de *Nearest Neighbor* duplica os *pixels* o quanto for necessário para se atingir determinada altura e largura desejadas.

Neste trabalho, foi adotada a técnica de *Nearest Neighbor*. A Figura 4.7, ilustra a aplicação desta técnica. A imagem inicialmente tem tamanho 2×2 e deseja-se obter uma imagem 4×4 . Para isso cada *pixel* da imagem de entrada é quadruplicado em cada uma das quatro janelas da imagem 4×4 .

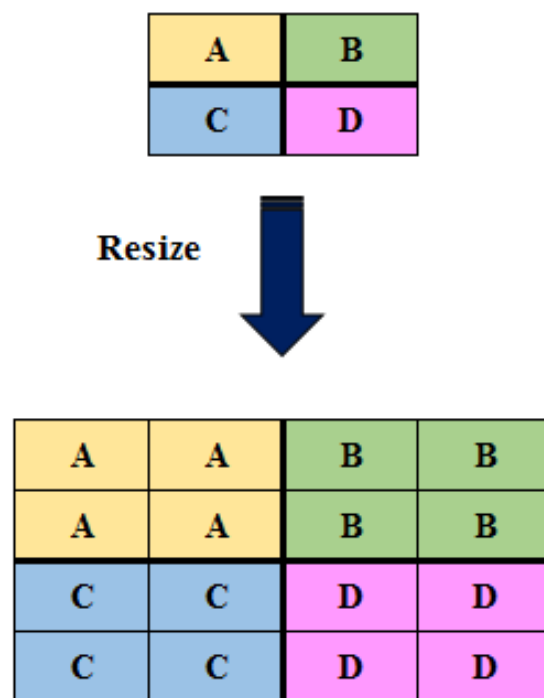


Figura 4.7: Técnica *Nearest Neighbor*. Fonte: Autora

A Figura 4.8 ilustra o processo de entrada/saída que podemos ter de uma imagem. É aplicado um agregador, neste exemplo o agregador máximo, na imagem de entrada 4×4 considerando janelas de 2×2 , isto é, 4 *pixels* por janela com *stride* 2, obtendo-se uma imagem reduzida 2×2 . Posteriormente, aplica-se o *resize*, utilizando a técnica *Nearest Neighbor*, com o propósito que a imagem de saída tenha a mesma dimensão da imagem de entrada.

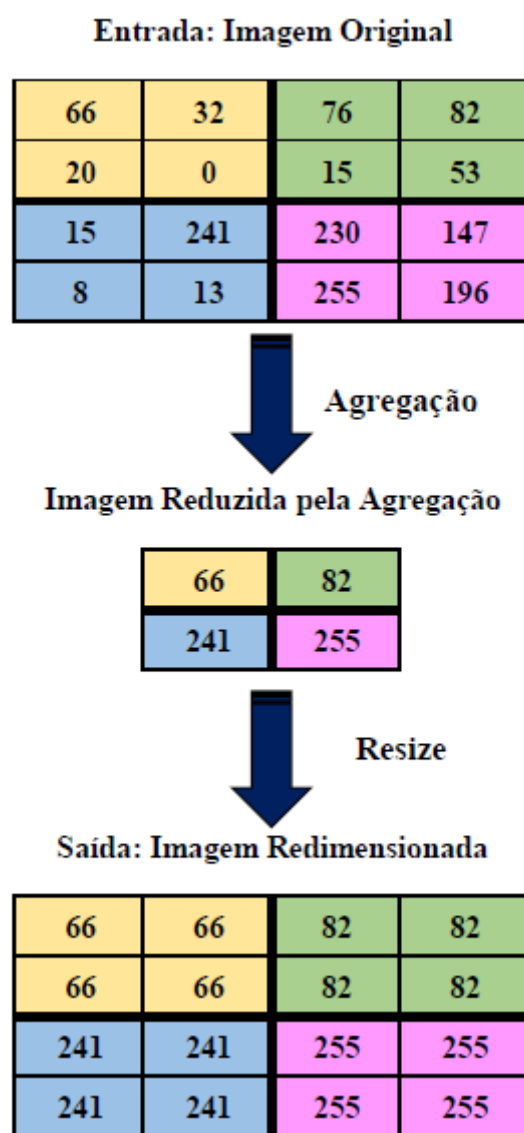


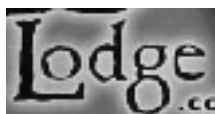
Figura 4.8: Etapas do Processo em uma Matriz de *Pixels*. Fonte: Autora.

A Figura 4.8 mostrou o processo de entrada/saída com base numa matriz de *pixels*. Já a Fig. 4.9 mostra um exemplo com uma imagem ⁴. Observa-se que o redimensionamento da imagem após a redução é necessário para que se possa comparar o quanto a imagem de entrada se assemelha a imagem de saída. Isto é, pode-se avaliar o quanto o processo de redução dimensional afetou a qualidade da imagem de entrada. A próxima seção apresenta funções que ajudam a medir a similaridade entre tais imagens.

Entrada: Imagem Original



Agregação: Imagem Reduzida pelo Agregador Máximo



Saída: Imagem Redimensionada

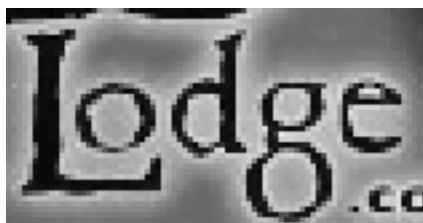


Figura 4.9: Exemplo da Aplicação do Processo. Fonte: Autora

⁴Imagem retirada de *IIT 5K-Word dataset*: <https://cvit.iit.ac.in/projects/SceneTextUnderstanding/IIT5K.html>

4.4 Funções de Medida de Qualidade

A qualidade de uma imagem é medida através da comparação desta com a que seria a imagem ideal. Sabe-se que uma imagem pode sofrer alterações através de ruídos, desfoque, degradações entre outras, desta forma, quando se avalia a qualidade de uma imagem, na verdade está se fazendo uma comparação entre a imagem ideal e a “distorcida” (SHEIKH; BOVIK, 2006). Muitas vezes a imagem é distorcida durante o seu processamento, assim a avaliação da qualidade da imagem tem sido muito aplicada e estudada na área de visão computacional (WANG, 2011).

De acordo com YOGITA; PATIL (2015), a avaliação da qualidade do conteúdo da imagem pode ser classificada em dois tipos: avaliação subjetiva da qualidade e avaliação objetiva da qualidade. A avaliação da qualidade da imagem por inspeção visual humana é conhecida como avaliação subjetiva da qualidade. Na avaliação objetiva da qualidade, a qualidade da imagem é avaliada por meio de uma máquina que utiliza funções para tal medida de similaridade.

Há diversas funções de medida de qualidade na literatura (ESKICIOGLU; FISHER, 1995). Essas funções, de modo geral, estabelecem uma relação correspondente entre os *pixels* da imagem original e da imagem processada, retornando um valor numérico que fornece o quão próximas as imagens estão.

Neste trabalho, foram adotadas sete medidas objetivas de qualidade de imagem usuais na literatura e são denominadas e definidas como segue:

Definição 4.1 (ESKICIOGLU; FISHER, 1995) *Seja uma imagem de dimensão $I \times J$, onde I é o número de linhas e J o número de colunas. Além disso, $P(i, j)$ representa a imagem original e $\widehat{P}(i, j)$ representa a imagem modificada. Ou seja, $P(i, j)$ e $\widehat{P}(i, j)$ representam o nível de cinza da imagem original e modificada, respectivamente, no ponto (i, j) . Assim, pode-se definir as seguintes medidas de qualidade de imagem:*

Average Difference (AD):

$$AD = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (P(i, j) - \widehat{P}(i, j)) \quad (4.1)$$

Maximum Difference (MD↓):

$$MD = \text{Max}|P(i, j) - \widehat{P}(i, j)|, \text{ onde } i \text{ varia de } 1 \text{ até } I \text{ e } j \text{ de } 1 \text{ até } J. \quad (4.2)$$

Mean Squared Error (MSE↓):

$$MSE = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (P(i, j) - \widehat{P}(i, j))^2 \quad (4.3)$$

Normalized Absolute Error (NAE↓):

$$NAE = \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J |O((P(i, j)) - O(\widehat{P}(i, j))|}{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J |O(P(i, j))|} \quad (4.4)$$

Normalized Cross-Correlation (NK↑):

$$NK = \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (P(i, j) \times \widehat{P}(i, j))}{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (P(i, j))^2} \quad (4.5)$$

Peak Signal to Noise Ratio (PSNR↑):

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{(2^n - 1)^2}{\sqrt{MSE}} \quad (4.6)$$

Structural Content (SC↓):

$$SC = \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (P(i, j))^2}{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\widehat{P}(i, j))^2} \quad (4.7)$$

Essas medidas têm por finalidade mensurar o quanto a imagem de saída se aproxima ou a semelha da imagem de entrada. A flecha ↑ denota que quanto maior melhor a qualidade, ou seja, mais similares são as imagens. Por outro lado, ↓ indica que quanto menor melhor a aproximação das imagens. Observa-se que a medida de qualidade AD não apresenta flecha, pois quanto mais próxima de zero mais semelhantes são as imagens.

4.5 Considerações Finais

Neste Capítulo foram apresentados conceitos de redução e redimensionamento de imagens, bem como definidas medidas de qualidade de imagem usuais na literatura. O próximo Capítulo apresenta um estudo experimental feito em imagens, onde foi implementado agregadores baseados na integral de Choquet para reduzir imagens, e posteriormente será aplicada a técnica de *Nearest Neighbor* para comparar a qualidade das imagens depois de reduzidas pelos agregadores em questão.

5 ESTUDO EXPERIMENTAL

Neste capítulo são apresentadas as etapas do estudo da aplicação dos agregadores baseados na integral de Choquet, bem como os agregadores usuais na literatura em redução dimensional de imagens. Primeiramente, é descrito o processo e os parâmetros considerados, posteriormente, são apresentados os resultados das comparações entre os agregadores.

5.1 Metodologia

Para o estudo dos agregadores em redução dimensional de imagens foram consideradas as funções máximo e média usuais na literatura. Por outro lado, a escolha das funções de agregação e pré-agregação baseadas na integral de Choquet foi feita com base no desempenho que obtiveram em Sistemas de Classificação Baseados em Regras *Fuzzy* publicado em trabalhos recentes. Tais funções são:

Funções de agregação:

- Integral de Choquet – $\mathfrak{C}_m$ (Eq. 2.2) (BARRENECHEA *et al.*, 2013);
- Generalização da integral de Choquet pela Cópula do Mínimo Def. 2.11 – $\mathfrak{C}_m^{T_M}$ (Eq. 2.5) (LUCCA *et al.*, 2017);

Funções de pré-agregação:

- Generalização da integral de Choquet pela t-norma de *Hamacher Product* Def. 2.4 – $\mathfrak{C}_m^{T_{Ham}}$ (Eq. 3.2) (LUCCA *et al.*, 2016);
- Generalização da integral de Choquet pela função F_{NA} Def. 3.4 – $\mathfrak{C}_m^{F_{NA}}$ (Eq. 3.5) (LUCCA *et al.*, 2018).

Nas funções baseadas na integral de Choquet, citadas acima, considerou-se a medida *fuzzy* da potência (Eq. 2.1).

Objetivando estudar os agregadores, foram escolhidas, aleatoriamente, 12 imagens (Anexo 8.1) do banco de dados *IIIT 5K-Word dataset* ⁵ e, posteriormente, convertidas para escala de cinza através da função *rgb2gray* do *software* MATLAB ⁶.

Para cada uma dessas 12 imagens, foram realizados experimentos considerando janelas de tamanhos 2×2 , 3×3 e 4×4 , e *stride* 2 e 3. Além disso, variou-se o parâmetro q da medida *fuzzy* da potência (Eq. 2.1) considerando-se os valores $q = 0.1$, $q = 0.3$, $q = 0.5$ e $q = 0.7$.

⁵<https://cvit.iit.ac.in/projects/SceneTextUnderstanding/IIIT5K.html>

⁶<https://www.mathworks.com/products/matlab.html>

Etapa 1 - Redução Dimensional das Imagens:

Cada imagem de entrada gerou 144 imagens reduzidas, uma para cada combinação distinta das configurações de janela, *stride*, expoente da medida *fuzzy* da potência e agregador. Portanto, considerando as 12 imagens de entrada, foram geradas 288 imagens reduzidas para cada uma das seis funções de agregação consideradas.

Etapa 2 - Restauração da Dimensão:

Na sequência emprega-se o *resize*, utilizando a técnica *Nearest Neighbor*, a fim de retornar à mesma dimensão da imagem de entrada. O *resize* é utilizado após agregação com o propósito de comparação da imagem de entrada com a imagem que foi reduzida pela agregação, visto que só é possível aplicar medidas de qualidade de imagens uma vez que a imagem de entrada tenha a mesma dimensão da imagem de saída.

Etapa 3 - Análise por Medidas de Qualidade

A fim de realizar comparações das imagens de entrada com as imagens de saída, após o redimensionamento, foram aplicadas sete medidas de qualidade AD, SC↓, NK↑, MD↓, NAE↓, MSE↓ e PSNR↑ definidas na Seção 4.4. A Tabela 1 mostra um recorte das primeiras linhas da tabela de dados gerados pela medida de qualidade MD↓, onde tal tabela na íntegra contém 288 linhas, a fim de ilustrar como os dados são organizados para realização das análises.

Para cada medida de qualidade de imagem obtém-se uma tabela com os resultados da comparação das imagens originais feitas com as respectivas imagens agregadas. Na tabela acima, tem-se na primeira coluna o nome de cada imagem, de acordo com os nomes dados no Anexo 8.1, a segunda coluna contém o *stride* que assume valores 2 e 3, na coluna seguinte consta o valor do parâmetro q que assume valores 0.1, 0.3, 0.5 e 0.7, na quarta coluna tem-se o tamanho da janela que possui valores 2, 3 e 4. Nas demais colunas é apresentado o valor da medida de qualidade MD↓ para cada agregador aplicado. Ou seja, considerando-se a primeira linha da tabela, tem-se a imagem 127_1 com *stride* = 2, q = 0.1, W = 2 (janela 2×2) e os resultados apresentados nas demais colunas da primeira linha são os resultados da medida de qualidade MD↓ aplicada sobre a imagem que passou pelo processo de agregação e foi redimensionada (Fig. 4.8).

Etapa 4 - Refinamento dos Dados com Relação ao Parâmetro q :

A integral de Choquet com relação à medida *fuzzy* da potência tem sido implementada nos trabalhos de classificação de forma que o parâmetro q é aprendido por um algoritmo de otimização, ou seja, este parâmetro é testado dentro do classificador até que se obtenha um resultado satisfatório para o problema que está sendo tratado. Neste sentido, como

Tabela 1: Recorte da Tabela de Dados da Medida de Qualidade MD↓. Fonte: Autora

Imagem	Stride	q	W	$\mathfrak{C}_m$	$\mathfrak{C}_m^{T_{Ham}}$	$\mathfrak{C}_m^{T_M}$	$\mathfrak{C}_m^{F_{NA}}$	Max	Mean
127_1	2	0.1	2	86	86	150	86	0	80
127_1	3	0.1	2	195	198	225	198	106	124
127_1	3	0.1	3	180	171	232	204	31	109
127_1	2	0.1	3	233	233	233	233	233	233
127_1	2	0.1	4	233	233	233	233	233	233
127_1	3	0.1	4	236	236	236	236	236	236
127_2	2	0.1	2	74	74	154	74	0	94
127_2	3	0.1	4	168	170	198	135	3	118
127_2	3	0.1	3	156	154	213	155	83	135
127_2	3	0.1	2	218	214	230	214	143	171
127_2	2	0.1	3	231	231	231	231	231	231
127_2	2	0.1	4	231	231	231	231	231	231
127_3	3	0.1	4	41	41	153	47	41	153
127_3	2	0.1	2	11	3	119	61	0	109
127_3	3	0.1	2	148	150	183	150	151	175
127_3	3	0.1	3	145	136	197	154	135	198
127_3	2	0.1	3	239	239	239	239	239	239
127_3	2	0.1	4	239	239	239	239	239	239

está sendo feito um estudo exploratório de agregadores baseados na integral de Choquet com relação à medida *fuzzy* da potência em comparação com os agregadores máximo e média que não dependem do parâmetro q , foi realizado um refinamento dos dados com base neste parâmetro.

Para cada uma das sete tabelas de dados das medidas de qualidade de imagem, fez-se o ordenamento dos dados com relação a cada agregador, objetivando encontrar o melhor q para cada imagem que foi agregada. Por exemplo, na Tabela 2 é apresentada a tabela relativa à medida MD↓. Sabe-se de acordo com a flecha de MD↓ que a qualidade é inversamente proporcional ao valor da medida. Portanto, ordenando do menor valor de MD↓ para o maior, é possível obter o melhor q para cada imagem de acordo com o agregador ordenado.

Na sequência é criada uma tabela que apresenta o melhor parâmetro q para cada imagem com relação a cada agregador, posteriormente, escolhe-se o valor de q mais frequente em cada uma das tabelas de medida de qualidade de imagem, isto é, aplica-se a função moda. Por exemplo, na Tabela 2 o parâmetro q mais frequente é 0.1. Desta forma, para medida de qualidade MD↓ são consideradas só as imagens com $q = 0.1$, logo a tabela original que tinha 288 linhas de dados foi reduzida a 72 linhas.

Observa-se que esse refinamento dos dados é possível por dois motivos: primeiro porque as funções máximo e média não dependem do parâmetro q , logo a configuração $stride = 2$, $q = 0.1$ e $W = 2$ gera a mesma imagem para $stride = 2$, $q = 0.5$ e $W = 2$

Tabela 2: MD↓. Fonte: Autora

Imagem	ζ_m	ζ_m^{THam}	ζ_m^{TM}	ζ_m^{FNA}
127_1	0.1	0.1	0.1	0.1
127_2	0.1	0.1	0.1	0.1
127_3	0.1	0.1	0.1	0.7
138_4	0.1	0.1	0.1	0.1
138_5	0.1	0.1	0.1	0.1
138_6	0.1	0.1	0.1	0.1
159_1	0.1	0.7	0.7	0.7
161_1	0.1	0.1	0.1	0.1
161_2	0.1	0.1	0.1	0.1
52_1	0.1	0.1	0.1	0.1
52_2	0.1	0.1	0.1	0.1
52_3	0.1	0.1	0.5	0.5

quando aplicada as funções máximo ou média, portanto, adotando somente um dos valores para o parâmetro q evita-se o uso de imagens repetidas na análise dos resultados. Segundo, quando implementado este processo em um algoritmo capaz de otimizar a integral de Choquet, este irá busca o melhor valor para o parâmetro q , desta forma como não está se utilizando um algoritmo para tal, se fez manualmente a escolha entre os valores de q testados.

Etapa 5 - Análise Estatística:

Para análise dos resultados são utilizadas técnicas estatísticas. São aplicados testes de validação de hipóteses, onde o principal objetivo da análise estatística é verificar se existe significância estatística entre os tratamentos aplicados nos dados (BUSSAB; MORETTIN, 2010). Para isso são apresentadas duas hipóteses:

Hipótese Nula: H_0 , se esta hipótese é rejeitada, aceita-se a hipótese alternativa;

Hipótese Alternativa: H_1 .

Os testes de hipóteses adotados foram não paramétricos de Friedman (HODGES; LEHMANN, 1962) e Wilcoxon (WILCOXON, 1945), visto que não há garantia de normalidade e homocedasticidade dos dados. O teste de Friedman não paramétrico é aplicado para apontar diferenças estatísticas entre um grupo de resultados, isto é, entre as funções de agregação utilizadas.

Seja μ a mediana da medida de qualidade de cada agregador. O teste de hipótese de Friedman é formulado da seguinte forma:

Hipótese Nula: $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_6$

Hipótese Alternativa: Há diferença entre alguma das medianas comparadas.

Confirmada a existência de diferenças entre grupos, isto é, rejeitada a hipótese nula aceita-se a hipótese alternativa, fazendo-se necessário um teste *post hoc* para verificar entre quais grupos existem essas diferenças. Para isso foi utilizado o teste pareado não paramétrico de Wilcoxon que se assemelha ao teste de Friedman. O teste de Wilcoxon realiza uma comparação par a par, onde verifica se a hipótese nula de que os agregadores sejam iguais de forma que se a hipótese nula for rejeitada tem-se que o par comparado apresenta diferenças significativas.

Para realização dos testes de hipóteses definiu-se o nível de significância de 5%, isto é, $\alpha = 0.05$ significa que tem-se no máximo 5% de chances de rejeitar a hipótese nula caso seja verdadeira. A medida adotada para se aceitar ou rejeitar a hipótese é o *p*-valor, onde se $p - \text{valor} < \alpha$ rejeita-se a hipótese nula, caso $p - \text{valor} > \alpha$ aceita-se a hipótese nula. Ressalta-se que todos os experimentos realizados nesta dissertação foram executados no *software* MATLAB.

5.2 Análise Quantitativa dos Resultados Experimentais

Como mencionado na seção anterior, foi feito um refinamento dos dados das medidas de qualidade considerando o parâmetro q da medida *fuzzy* da potência, dessa forma a Tabela 3 apresenta o parâmetro q considerado para cada medida de qualidade de imagem. Ou seja, ao serem aplicados os testes de hipóteses nos dados de cada medida de qualidade de imagem será considerado somente o parâmetro q correspondente à medida de qualidade apresentada na Tabela 3.

Tabela 3: Valores do Parâmetro q para cada Medida de Qualidade de Imagem

AD	SC↓	NK↑	MD↓	NAE↓	MSE↓	PSNR↑
$q = 0.1$	$q = 0.1$	$q = 0.1$	$q = 0.1$	$q = 0.7$	$q = 0.7$	$q = 0.7$

A seguir são apresentados os resultados de cada medida de qualidade de imagem. As tabelas que contém os resultados das médias apresentam em cor **azul** o nome das funções baseadas em integral de Choquet, por outro lado em cor **vermelha** as funções usuais na literatura e em negrito apresentam-se os melhores agregadores de cada tipo.

- *Average Difference*

Aplicando-se o teste de Friedman nos dados da medida de qualidade AD, obteve-se a rejeição da hipótese nula, p -valor inferior a 0.05 (Fig. 5.1), é possível verificar na Fig 5.2 que existe uma diferença entre a variação dos agregadores. Dessa forma, existe diferença significativa entre os agregadores implementados nas imagens. Logo, emprega-se o teste *post hoc* de Wilcoxon para verificar em quais pares de agregadores há diferenças. De acordo com a Tabela 4, o melhor agregador foi a função média e o segundo melhor foi a generalização da integral de Choquet pela Cópula do Mínimo. Conforme o teste *post hoc* há diferenças entre as duas, portanto não houve melhora quantitativamente. Porém, generalização da integral de Choquet pela Cópula do Mínimo superou a função máximo.

Friedman's ANOVA Table					
Source	SS	df	MS	Chi-sq	Prob>Chi-sq
Columns	527.389	5	105.478	150.68	9.55505e-31
Error	732.611	355	2.064		
Total	1260	431			

Figura 5.1: Teste de Friedman para medida AD. Fonte: Autora.

Tabela 4: Médias AD

AD					
$\mathfrak{C}_m$	$\mathfrak{C}_m^{T_{Ham}}$	$\mathfrak{C}_m^{T_M}$	$\mathfrak{C}_m^{F_{NA}}$	Max	Mean
28,1915	-28,2495	-18,5387	-25,8725	-28,1740	1,4930

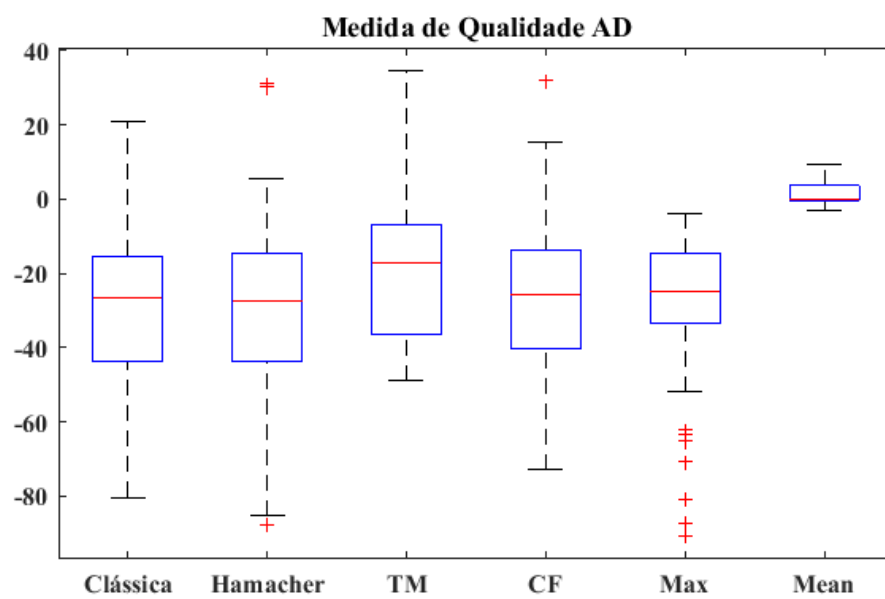


Figura 5.2: *Boxplot* Medida de Qualidade AD. Fonte: Autora

- *Maximum Difference*

O teste de Friedman quando aplicado na medida de qualidade $MD\downarrow$, rejeitou a hipótese nula, p – valor inferior a 0.05 (Fig. 5.3), a Fig 5.4 mostra que existe uma diferença entre a variação dos agregadores. Assim existe diferença estatística significativa entre os agregadores implementados nas imagens de acordo medida a medida $MD\downarrow$. Empregando-se o teste *post hoc* de Wilcoxon verificou-se que há diferença entre generalização da integral de Choquet pela t-norma de *Hamacher Product* e a função máximo. A Tabela 5 mostra que a função máximo ficou em primeiro comparada a generalização da integral de Choquet pela t-norma de *Hamacher Product*. Portanto, a generalização da integral de Choquet pela t-norma de *Hamacher Product* não supera função máximo, mas comparada a função média apresenta melhores resultados.

Friedman's ANOVA Table					
Source	SS	df	MS	Chi-sq	Prob>Chi-sq
Columns	301.91	5	60.3819	136.89	8.21143e-28
Error	492.09	355	1.3862		
Total	794	431			

Figura 5.3: Teste de Friedman para medida $MD\downarrow$. Fonte: Autora.

Tabela 5: Médias MD

$MD\downarrow$					
ζ_m	$\zeta_m^{T_{Ham}}$	$\zeta_m^{T_M}$	$\zeta_m^{F_{NA}}$	Max	Mean
150,69	149,34	188,47	162,94	134,30	182,66

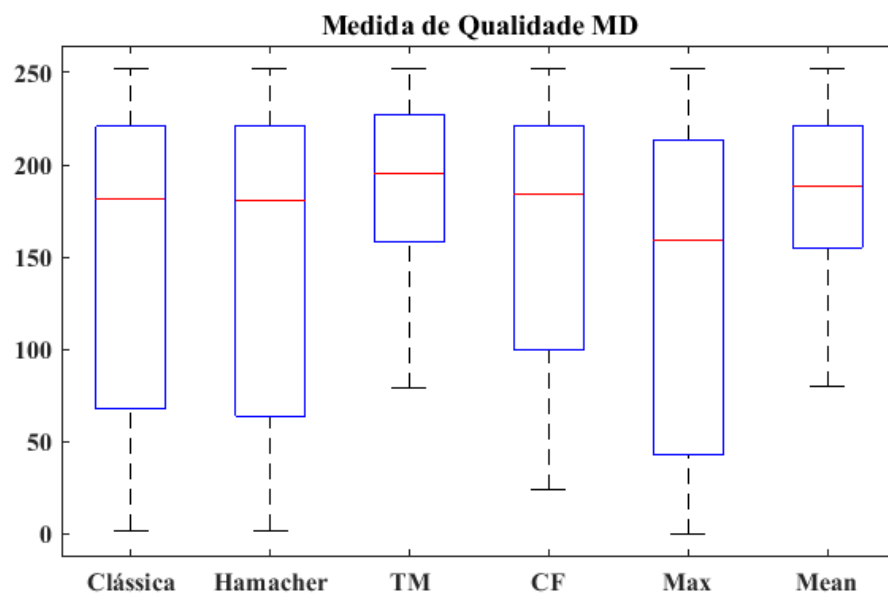


Figura 5.4: *Boxplot* Medida de Qualidade MD↓. Fonte: Autora

- *Mean Squared Error*

De acordo com teste de hipóteses de Friedman quando aplicado na medida de qualidade $MSE\downarrow$ a hipótese nula foi rejeitada, p – valor inferior a 0.05 (Fig. 5.5), a Fig 5.6 mostra que existe uma diferença entre a variação dos agregadores. Logo, aplica-se o teste *post hoc* de Wilcoxon que identificou diferenças estatísticas significativas entre os agregadores integral de Choquet e média. Observa-se na Tabela 6 que a função média obteve o melhor desempenho, e em segundo lugar tem-se a integral de Choquet. Além disso, observa-se que apesar da integral de Choquet não superar a função média, ela apresentou resultado superior ao agregador máximo.

Friedman's ANOVA Table					
Source	SS	df	MS	Chi-sq	Prob>Chi-sq
Columns	783.25	5	156.65	223.79	2.29576e-46
Error	476.75	355	1.343		
Total	1260	431			

Figura 5.5: Teste de Friedman para medida $MSE\downarrow$. Fonte: Autora.

Tabela 6: Médias MSE

$MSE\downarrow$					
$\mathcal{C}_m$	$\mathcal{C}_m^{THam}$	$\mathcal{C}_m^{TM}$	$\mathcal{C}_m^{FNA}$	Max	Mean
2390,38	3420,66	2581,10	3865,32	4103,56	1493,59

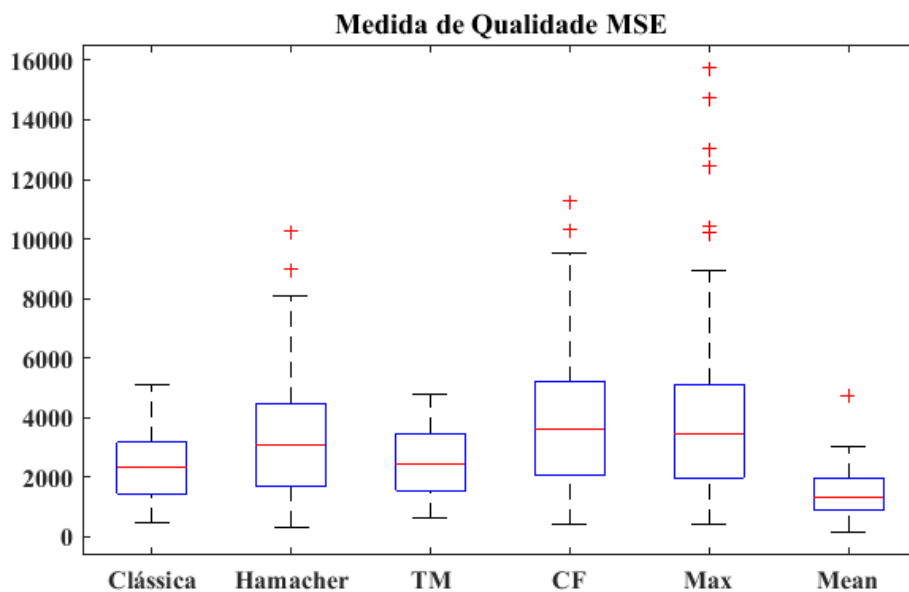


Figura 5.6: *Boxplot* Medida de Qualidade $MSE\downarrow$. Fonte: Autora

- *Normalized Absolute Error*

Aplicando-se o teste de Friedman, obteve-se rejeição da hipótese nula, p – valor inferior a 0.05 (Fig. 5.7), a Fig 5.8 mostra a variação dos agregadores. Dessa forma, aplica-se o teste *post hoc* de Wilcoxon que apresentou diferenças significativas entre os agregadores integral de Choquet e média. A Tabela 7 mostra que a função média obteve o melhor desempenho, e em segundo lugar tem-se a integral de Choquet. Observa-se ainda que apesar da integral de Choquet não superar a função média, ela apresentou resultado estatisticamente igual à função máximo.

Friedman's ANOVA Table					
Source	SS	df	MS	Chi-sq	Prob>Chi-sq
Columns	600.333	5	120.067	171.52	3.4511e-35
Error	659.667	355	1.858		
Total	1260	431			

Figura 5.7: Teste de Friedman para medida NAE↓. Fonte: Autora.

Tabela 7: Médias NAE

NAE↓					
$\mathcal{C}_m$	$\mathcal{C}_m^{T_{Ham}}$	$\mathcal{C}_m^{T_M}$	$\mathcal{C}_m^{F_{NA}}$	Max	Mean
0,3128	0,3544	0,3372	0,3679	0,3489	0,1990

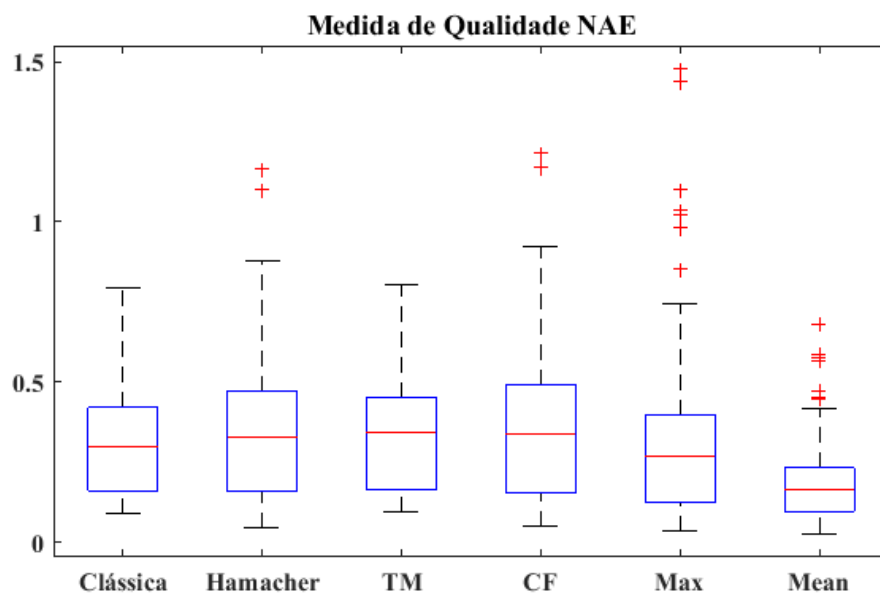


Figura 5.8: *Boxplot* Medida de Qualidade NAE↓. Fonte: Autora

- *Peak Signal to Noise Ratio*

Segundo o teste de hipóteses de Friedman quando aplicado na medida de qualidade PSNR $\uparrow$ rejeita-se a hipótese nula, p – valor inferior a 0.05 (Fig. 5.9), na Fig 5.10 é apresentada a diferença entre a variação dos agregadores. Em seguida, empregase-se o teste *post hoc* de Wilcoxon que identificou diferenças significativas entre os agregadores integral de Choquet e média. Na Tabela 8 mostra-se que a função média obteve o melhor desempenho, e em segundo lugar tem-se a integral de Choquet. Além disso, observa-se que apesar da integral de Choquet não superar a função média, ela apresentou resultado superior ao agregador máximo.

Friedman's ANOVA Table					
Source	SS	df	MS	Chi-sq	Prob>Chi-sq
Columns	783.25	5	156.65	223.79	2.29576e-46
Error	476.75	355	1.343		
Total	1260	431			

Figura 5.9: Teste de Friedman para medida PSNR $\uparrow$. Fonte: Autora.

Tabela 8: Médias PSNR

PSNR $\uparrow$					
$\mathcal{C}_m$	$\mathcal{C}_m^{T_{Ham}}$	$\mathcal{C}_m^{T_M}$	$\mathcal{C}_m^{F_{NA}}$	Max	Mean
14,94	13,70	14,53	13,13	13,23	17,21

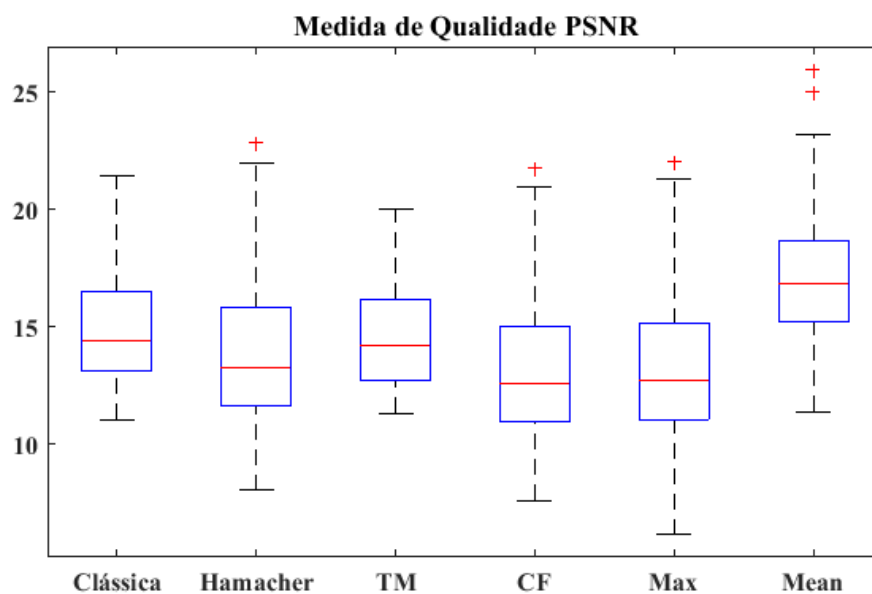


Figura 5.10: *Boxplot* Medida de Qualidade PSNR $\uparrow$. Fonte: Autora

- *Normalized Cross-Correlation*

Aplicando-se o teste de Friedman nos dados da medida de qualidade $NK\uparrow$, obteve-se a rejeição da hipótese nula, p – valor inferior a 0.05 (Fig. 5.11), a Fig 5.12 apresenta a variação dos agregadores. De acordo com a Tabela 9 o melhor agregador foi a integral de Choquet e o segundo melhor foi o máximo, porém de acordo teste *post hoc* de Wilcoxon não foram identificadas diferenças significativas entre a integral de Choquet e o agregador máximo. Portanto, ambos agregadores têm o mesmo comportamento.

Friedman's ANOVA Table					
Source	SS	df	MS	Chi-sq	Prob>Chi-sq
Columns	506.194	5	101.239	144.63	1.85703e-29
Error	753.806	355	2.123		
Total	1260	431			

Figura 5.11: Teste de Friedman para medida $NK\uparrow$. Fonte: Autora.

Tabela 9: Médias NK

$NK\uparrow$					
$\mathcal{C}_m$	$\mathcal{C}_m^{T_{Ham}}$	$\mathcal{C}_m^{T_M}$	$\mathcal{C}_m^{F_{NA}}$	Max	Mean
1,1356	1,1342	1,0627	1,1238	1,1167	0,9127

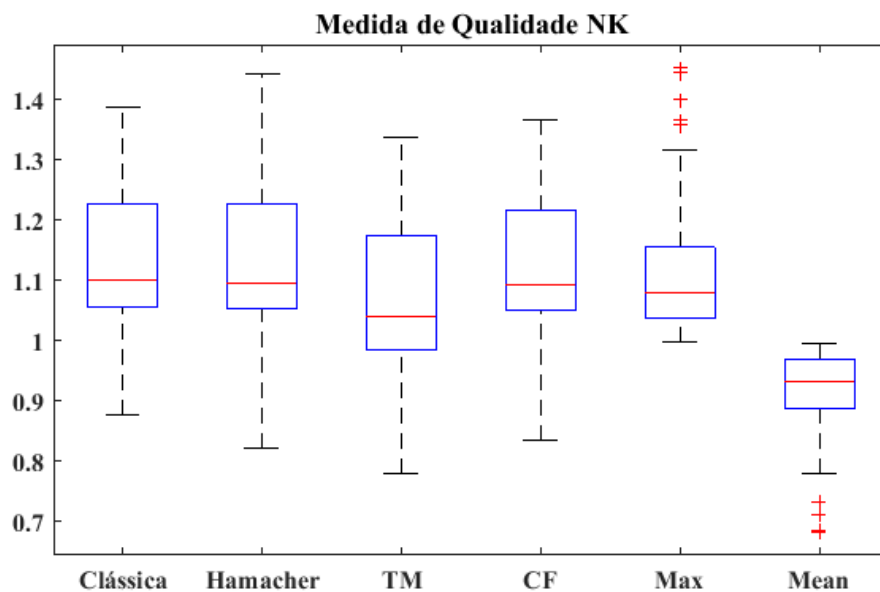


Figura 5.12: *Boxplot* Medida de Qualidade $NK\uparrow$. Fonte: Autora

- *Structural Content*

De acordo com o teste de Friedman a hipótese nula foi rejeitada, p – valor inferior a 0.05 (Fig. 5.13), a Fig 5.14 apresenta a variação dos agregadores. Na Tabela 10 mostra-se que o melhor agregador foi a integral de Choquet e o segundo melhor foi o máximo, porém de acordo teste *post hoc* de Wilcoxon não foram identificadas diferenças significativas entre a integral de Choquet e o agregador máximo. Sendo assim, ambos agregadores têm o mesmo comportamento.

Friedman's ANOVA Table					
Source	SS	df	MS	Chi-sq	Prob>Chi-sq
Columns	549.25	5	109.85	156.93	4.46726e-32
Error	710.75	355	2.002		
Total	1260	431			

Figura 5.13: Teste de Friedman para medida $SC\downarrow$. Fonte: Autora.

Tabela 10: Médias SC

$SC\downarrow$					
ζ_m	$\zeta_m^{T_{Ham}}$	$\zeta_m^{T_M}$	$\zeta_m^{F_{NA}}$	Max	Mean
0,7002	0,7024	0,8267	0,7163	0,7181	1,0961

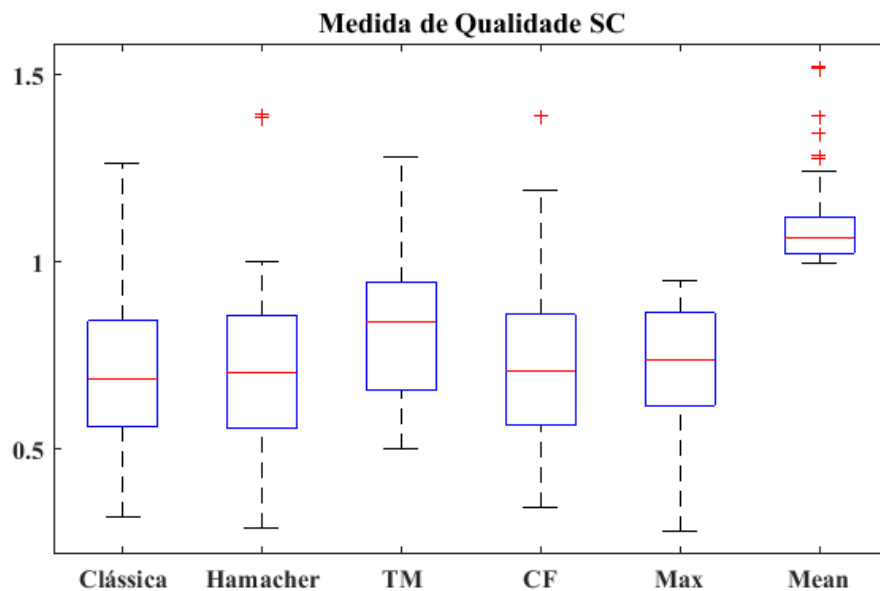


Figura 5.14: *Boxplot* Medida de Qualidade $SC\downarrow$. Fonte: Autora

As análises das medidas de qualidade de imagem mostram que as funções baseadas na integral de Choquet comparadas com as usuais na literatura não apresentam o melhor

desempenho em AD, MD↓, NAE↓, MSE↓ e PSNR↑ ficando em segundo lugar. Por outro lado, nas medidas de qualidade NK↑ e SC↓ a integral de Choquet apresentou desempenho estatisticamente equivalente..

5.3 Análise Qualitativa por Inspeção Visual

A seguir são apresentadas algumas das imagens obtidas no estudo experimental a fim de mostrar quais efeitos visuais podem surgir dependendo do agregador aplicado. A Fig. 5.15 apresenta a imagem de entrada 138_4 (Anexo 8.1), e as imagens agregadas considerando-se $stride = 2$, $q = 0.7$ e $W = 2$. É possível observar que a imagem da integral de Choquet Clássica quando comparada ao agregador máximo apresenta bordas mais suaves no contorno da palavra *Wild*, isso é, o agregador máximo apresenta bordas serri-lhadas com mais destaque. Já a imagem agregada pela função média, quando comparada a integral de Choquet apresenta um contraste baixo deixando a imagem mais embaçada do que a original.



Imagem de Entrada



Clássica

*Hamacher**TM**CF_{NA}**Max**Mean*

Figura 5.15: Aplicação dos agregadores na Imagem 138_4.

Já a Fig. 5.16 apresenta a imagem de entrada 138_6 (Anexo 8.1), e as imagens agregadas considerando-se $stride = 2$, $q = 0.7$ e $W = 4$. Observa-se que nesta imagem de entrada o agregador máximo não apresentou tanta semelhança com a imagem original, diferentemente da imagem da integral de Choquet Clássica. Nota-se que a imagem do agregador máximo em regiões curvas da palavra *Lodge* não foi capaz de manter a espessura aproximada da original. Novamente, a imagem da função média apresenta-se de forma mais embaçada do que a integral de Choquet.



Imagem de Entrada



Clássica



Hamacher



TM



CF_{NA}



Max



Mean

Figura 5.16: Aplicação dos agregadores na Imagem 138_6.

A Fig. 5.17 apresenta a imagem de entrada 138_4 (Anexo 8.1), e as imagens agregadas considerando-se $stride = 3$, $q = 0.1$ e $W = 3$. Destaca-se que na imagem da integral de Choquet o fundo que está na cor preta se assemelha mais ao fundo da imagem original do que as demais imagens que ficaram com fundo em tons de cinza, porém nenhum agregador ficou nitidamente próximo à imagem de entrada.

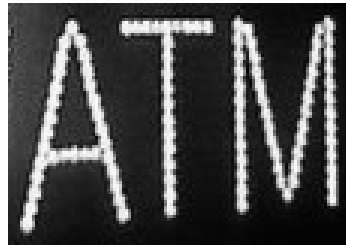


Imagem de Entrada



Clássica



Hamacher



TM



CF_{NA}



Max



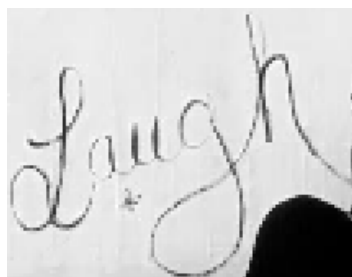
Mean

Figura 5.17: Aplicação dos agregadores na Imagem 52_3.

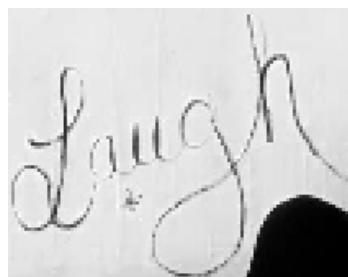
A Fig. 5.18 apresenta a imagem de entrada 138_4 (Anexo 8.1), e as imagens agregadas considerando-se $stride = 2$, $q = 0.1$ e $W = 2$. É possível observar que a imagem agregada pela integral de Choquet mantém a tonalidade da cor da palavra *Laugh*, ao contrário do máximo que suaviza esta cor, bem como o serrilhado que é mais saliente do que na imagem da integral de Choquet.



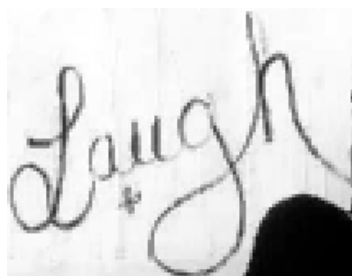
Imagem de Entrada



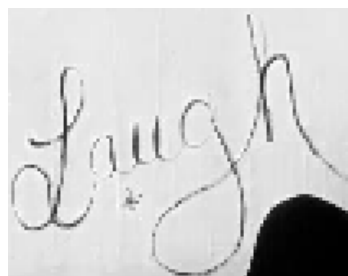
Clássica



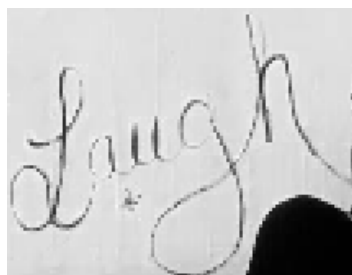
Hamacher



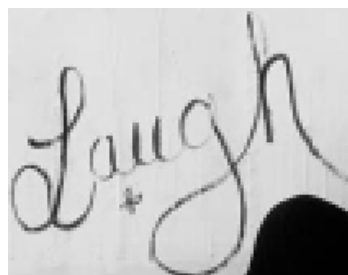
TM



CF_{NA}



Max



Mean

Figura 5.18: Aplicação dos agregadores na Imagem 127_3.

5.4 Considerações Finais

Neste Capítulo apresentou-se como foi realizado o trabalho, assim como todos os parâmetros adotados e testes de análises escolhidos para avaliar os resultados obtidos. Além disso, mostrou-se os resultados quantitativos através de medidas de qualidade de imagem e qualitativos por inspeção visual de diferenças na integridade das imagens, geradas pelo estudo exploratório de agregadores baseados na integral de Choquet e usuais na literatura de redução dimensional de imagens.

6 CONCLUSÕES

O diferencial deste trabalho está em apresentar funções de agregação em redução dimensional de imagens baseadas na integral de Choquet como alternativa às funções usuais como máximo e média. Os resultados da aplicação da integral de Choquet em redução dimensional mostram-se satisfatórios uma vez que este estudo foi feito de modo a verificar como os agregadores da integral de Choquet podem se comportar quando aplicados em dados de imagens.

Embora a integral de Choquet e suas generalizações não tenha apresentado a melhor performance na análise quantitativa dos dados através das medidas de qualidade, observou-se que apresentaram os melhores detalhes visuais em muitos dos resultados experimentais. Ou seja, a integral de Choquet manteve a integridade da imagem original, sendo capaz de minimizar problemas de bordas serrilhadas em linhas oblíquas/diagonais e de contraste em comparação com os agregadores máximo e média, embora não sejam as mais similares quantitativamente com a imagem original conforme mostrado com as medidas de qualidade.

Ressalta-se que a escolha dos valores do parâmetro q da medida *fuzzy* da potência foram escolhidos de maneira aleatória, visto que este parâmetro está definido num intervalo contínuo o que impossibilitaria uma inspeção manual como foi realizada. Portanto, a agregação baseada na integral de Choquet tem potencial para ser melhorada, já que o parâmetro q pode ser aprendido por algum algoritmo capaz de otimizá-lo, por consequência os resultados se mostram promissores e úteis para aplicação na etapa de agrupamento em métodos de classificação de imagens, uma vez que as imagens resultantes da integral Choquet e suas generalizações consideradas podem ser mais representativas para identificação de palavras contidas em imagens.

Como trabalhos futuros, pretende-se efetuar a aplicação dos agregadores baseados na integral de Choquet na etapa de agrupamento em métodos de classificação de imagens. Além disso, serão analisados outros tipos de funções de agregação baseadas na Integral de Choquet, tais como funções que não apresentam comportamento médio e têm apresentado resultados satisfatórios em problemas de classificação (LUCCA *et al.*, 2018).

Tem-se como produções científicas resultantes desta dissertação:

- Best Paper Award, Second Place, North American Fuzzy Information Processing Society:

DIAS, C. A.; BUENO, J. C. S.; BORGES, E. N.; BOTELHO, S. S. C.; DIMURO, G. P.; LUCCA, G.; FERNÁNDEZ, J.; BUSTINCE, H. Using the Choquet integral in the pooling layer in deep learning networks. **In: Fuzzy Information Processing. NAFIPS 2018. Communications in Computer and Information Science**, Springer, vol. 831, p. 144–154, 2018.

- BUENO, J. C. S.; DIAS, C. A.; DIMURO, G. P.; BORGES, E. N.; BOTELHO, S. S. C.; MATTOS, V. L. D.; BUSTINCE, H. Funções de Agregação Baseadas em Integral de Choquet Aplicadas em Redimensionalização de Imagens. **No prelo**, n., p., 2018.

7 REFERÊNCIAS

- ACHARYA, T; TSAI, P. Computational foundations of image interpolation algorithms. **ACM: Ubiquity**, v. 8, n. 42, p. 1–17, 2007.
- ALSINA, C.; FRANK, M. J.; SCHWEIZER, B. **Associative Functions: triangular Norms and Copulas**. [s.l.]: World Scientific, 2006.
- BARRENECHEA, H.; SOLA, H. B.; FERNANDEZ, J.; SANZ, J. A. Using the Choquet integral in the fuzzy reasoning method of fuzzy rule-based classification systems. **Axioms**, n. 2, p. 208–223, 2013.
- BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. **Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática**. 3º edição. Campinas: UNICAMP/IMECC, 2015.
- BELIAKOV, G.; BUSTINCE, H.; PATERNAIS, DANIEL. Image Reduction Using Means on Discrete Product Lattices **IEEE Transactions on Image Processing**, v. 21, n. 3, p. 1070–183, 2012.
- BELIAKOV, G.; PRADERA, A.; CALVO, T. **Aggregation Functions: A Guide for Practitioners**. Berlin: Springer, 2007.
- BELIAKOV, G.; SOLA, H. B.; SÁNCHEZ, T. C. **A Practical Guide to Averaging Functions**. [s.l.]: Springer, 2016.
- BOJADZIEV, G.; BOJADZIEV, M. **Fuzzy Logic for Business, Finance, and Management**. 2nd Edition. [s.l.]: World Scientific, 2007.
- BORGES, E. N.; de CARVALHO, M. G.; GALANTE, R.; GONÇALVES, M. A.; LAENDER, A. H. F. An unsupervised heuristic-based approach for bibliographic metadata deduplication. **Information Processing & Management**, v. 47, p. 706–718, 2011.
- BOUREAU, Y.; LECUN, Y ; PONCE, J. A Theoretical Analysis of Feature Pooling in Visual Recognition. **In 27th International Conference on International Conference on Machine Learning**, p. 111–118, 2010.
- BUENO, J. C. S.; DIAS, C. A.; DIMURO, G. P.; BORGES, E. N.; BOTELHO, S. S. C.; MATTOS, V. L. D.; BUSTINCE, H. Funções de Agregação Baseadas em Integral de Choquet Aplicadas em Redimensionalização de Imagens. **No prelo**, n. , p. , 2018.
- BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. **Estatística Básica**. São Paulo: Editora Saraiva, 2010.

- CHI, Z.; YAN, H.; PHAM, T. **Fuzzy Algorithms with Applications to Image Processing and Pattern Recognition**. Singapore: World Scientific , 1996.
- CHOQUET, G. Theory of capacities. **Annales de l'Institut Fourier** **5**, p. 131–295, 1954.
- DIAS, C. A.; BUENO, J. C. S.; BORGES, E. N.; BOTELHO, S. S. C.; DIMURO, G. P.; LUCCA, G.; FERNÁNDEZ, J.; BUSTINCE, H. Using the Choquet integral in the pooling layer in deep learning networks. **In: Fuzzy Information Processing. NAFIPS 2018. Communications in Computer and Information Science**, Springer, vol. 831 , p. 144–154, 2018.
- DIMURO, G. P.; LUCCA, G.; BEDREGAL, B.; MESIAR, R.; SANZ, J. A.; BUSTINCE, H. Generalized $C_{F_1 F_2}$ -integrals: from Choquet-like aggregation to ordered directionally monotone functions. **No prelo**, n. , p. , 2018.
- ESKICIOGLU, A. M.; FISHER, P. S. Image Quality Measures And Their Performance. **IEEE Transactions on communications**, v. 43, n. 12, p. 2959–2965, 1995.
- FACELI, K.; LORENA, A. C.; GAMA, J.; de CARVALHO, A. C. P. L. F. **Inteligência Artificial: Uma Abordagem de Aprendizagem de Máquina**. Rio de Janeiro: LTC, 2015.
- FEDOROV, D. A. Image-scaling method with an integral factor based on wavelet transformation. **Journal of Optical Technology**, v. 80, n. 3, p. 166–170, 2013.
- GONZALEZ, R. C.; WOODS, R. E. **Digital Image Processing**. New Jersey: Prentice Hall, 2002.
- GRABISCH, M.; MARICHAL, J.; MESIAR, R.; PAP, E. **Aggregation Functions**. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- HAN, J.; KAMBER, M. **Data Mining: Concepts and Techniques**. 2nd edition. [S.l.]: Morgan Kaufmann Publishers, 2006.
- HAN, Y.; KIM, J.; LEE, K. Deep convolutional neural networks for predominant instrument recognition in polyphonic music. **IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech and Language Processing**, v. 25, p. 208–221, 2017.
- HODGES, J. L.; LEHMANN, E. L. Rank methods for combination of independent experiments in analysis of variance. **The Annals of Mathematical Statistics**, v. 33, N. 2, p. 208–221, 2017.
- ISHIBUCHI, H.; NAKASHIMA, T.; NII, M. **Classification and Modeling with Linguistic Information Granules: Advanced Approaches to Linguistic Data Mining**. Berlin: Springer, 2004.

- KLEMENT, E. P.; MESIAR, R.; PAP, E. **Triangular Norms**. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 2000.
- LANES, M. A.; BORGES, E. N.; GALANTE, R. The effects of classifiers diversity on the accuracy of stacking. **In: International Conference on Software Engineering & Knowledge Engineering**. Pittsburgh: KSI Research Inc. and Knowledge Systems Institute Graduate School, v. 1, p. 1–6, 2017.
- LUCCA, G.; DIMURO, G. P.; FERNÁNDEZ, J.; BUSTINCE, H.; BEDREGAL, B. R. C.; SANZ, J. A. Improving the performance of fuzzy rule-based classification systems based on a non-averaging generalization of CC-integrals named $C_{F_1F_2}$ -integrals. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, No Prelo, 2018.
- LUCCA, G.; SANZ, J. A.; DIMURO, G. P.; BEDREGAL, B.; ASIAIN, M. J.; ELKANO, M.; BUSTINCE, H. CC-integrals: Choquet-like copula-based aggregation functions and its application in fuzzy rule-based classification systems. **Knowledge-Based Systems**, n. 119, p. 32–43, 2017.
- LUCCA, G.; SANZ, J. A.; DIMURO, G. P.; BEDREGAL, B.; BUSTINCE, H.; MESIAR, R. C_F -integrals: A new family of pre-aggregation functions with application to fuzzy rule-based classification systems. **Information Sciences**, n. 435, p. 94–110, 2018.
- LUCCA, G.; SANZ, J. A.; DIMURO, G. P.; BEDREGAL, B.; MESIAR, R.; KOLESÁROVÁ, A.; BUSTINCE, H. Preaggregation functions: Construction and an application. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 24, n. 2, p. 260–272, 2016.
- MAHMOODIAN, H.; MARHABAN, M. H.; ABDULRAHIM, R.; ROSLI, R.; SARI-PAN, M. I. Using fuzzy association rule mining in cancer classification. **Australasian Physical & Engineering Sciences in Medicine**, v. 34, p. 41–24, 2011.
- MARSLAND, S. **Machine learning: An Algorithmic Perspective**. 2nd edition. [S.l.]: CRC Press, 2014.
- MCCUE, C. **Data mining and predictive analysis: intelligence gathering and crime analysis**. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2006.
- MESIAR, R.; MESIAROVÁ, A. Fuzzy integrals – what are they?. **International journal of intelligent systems**, v. 23, n. 2, p. 199–212, 2008.
- NELSON, G. S. **A User-Friendly Introduction to Lebesgue Measure and Integration**. [S.l.]: AMS, 2015.

- PAGOLA, M.; FORCEN, J. I.; BARRENECHEA, E.; LOPEZ-MOLINA, C.; BUSTINCE, H. Use Of OWA Operators for Feature Aggregation in Image Classification. **In: International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)**, Naples, Italy, p. 1–6, 2017.
- RALESCU, D.; ADAMS, G. The fuzzy integral. **J. Math. Anal. Appl.**, n. 75, p. 562–570, 1980.
- ROSS, T. J. **Fuzzy Logic with Engineering Applications**. [s.l.]: Wiley, 2004.
- SCHERER, D.; MÜLLER, A.; BEHNKE, S. Evaluation of pooling operations in convolutional architectures for object recognition. **International Conference on Artificial Neural Networks**, p.92–101, 2010.
- SHEIKH, H. R.; BOVIK, A. C. Image information and visual quality. **IEEE Transactions on Image Processing**, vol. 15, n. 2, p.430–44, 2006.
- SYROPOULOS, A. **Theory of Fuzzy Computation**. New York: Springer, 2014.
- TAN, P.; STEINBACH, M.; KUMAR, V. **Introdução ao Data Mining**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2009.
- WANG, C.; HUANG, K. How to use Bag-of-Words model better for image classification **Image and Vision Computing**, v. 38, p. 65–74, 2015.
- WANG, Z. Applications of Objective Image Quality Assessment Methods **IEEE Signal Processing Magazine**, v. 28, n. 6, p. 137–142, 2011.
- WANG, Z.; KLIR, G. **Fuzzy Measure Theory**. [S.l.]: Springer, 1992.
- WILCOXON, F. Individual comparisons by ranking methods. **Biometrics bulletin**, vol. 1, n. 6, p. 80–83, 1945.
- WITTEN, I. H.; FRANK, E.; HALL, M. A. **Data Mining: Concepts and Techniques**. 3rd edition. [S.l.]: Morgan Kaufmann Publishers, 2011.
- WU, J. **Introduction to convolutional neural networks**. National Key Lab for Novel Software Technology, 2017.
- YOGITA, H.; PATIL, H. A Survey on Image Quality Assessment Techniques, Challenges and Databases. **In IJCA Proceedings on National Conference on Advances in Computing**, p. 34—38, 2015.

YU, D.; WANG, H.; CHEN, P.; WEI, Z. Mixed pooling for convolutional neural networks. **In International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology.** Springer , p. 364—375, 2014.

ZADEH, L. A. Fuzzy Sets. **Information and Control**, v. 8, n. 3, p. 338–353, 1965.

8 ANEXOS

8.1 Anexo A - Imagens de Entrada

Imagens originais usadas neste trabalho.



Figura 8.1: Imagem 127_1. Fonte: *IIIT 5K-Word dataset*

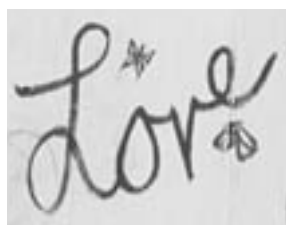


Figura 8.2: Imagem 127_2. Fonte: *IIIT 5K-Word dataset*



Figura 8.3: Imagem 127_3. Fonte: *IIIT 5K-Word dataset*



Figura 8.4: Imagem 138_4. Fonte: *IIIT 5K-Word dataset*



Figura 8.5: Imagem 138_5. Fonte: *IIIT 5K-Word dataset*



Figura 8.6: Imagem 138_6. Fonte: *IIIT 5K-Word dataset*



Figura 8.7: Imagem 159_1. Fonte: *IIIT 5K-Word dataset*



Figura 8.8: Imagem 161_1. Fonte: *IIIT 5K-Word dataset*



Figura 8.9: Imagem 161_2. Fonte: *IIIT 5K-Word dataset*



Figura 8.10: Imagem 52_1. Fonte: *IIIT 5K-Word dataset*



Figura 8.11: Imagem 52_2. Fonte: *IIIT 5K-Word dataset*



Figura 8.12: Imagem 52_3. Fonte: *IIIT 5K-Word dataset*