UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS COMPUTACIONAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

# GRÁFICOS DE CONTROLE: ASPECTOS TEÓRICOS E PRÁTICOS A PARTIR DA ÓTICA DA LÓGICA FORMAL E DA LÓGICA *FUZZY*

**Ismael Batista Maidana Silvestre**

**Rio Grande, RS, Brasil, 2014**

# GRÁFICOS DE CONTROLE: ASPECTOS TEÓRICOS E PRÁTICOS A PARTIR DA ÓTICA DA LÓGICA FORMAL E DA LÓGICA *FUZZY*

**Por**

**ISMAEL BATISTA MAIDANA SILVESTRE**

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Modelagem Computacional.

Orientadora: Profª Drª. Viviane Leite Dias de Mattos
Co-orientadora: Profª Drª. Cátia Maria dos Santos Machado

RIO GRANDE, RS – BRASIL
Julho de 2014

S5878g Silvestre, Ismael Batista Maidana.
Gráficos de controle: aspectos teóricos e práticos a partir da ótica da lógica formal e da lógica fuzzy / Ismael Batista Maidana Silvestre. - 2014.
151 f.

Inclui quadros, gráficos e tabelas.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande/FURG, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional.

Orientadora: Drª. Viviane Leite Dias de Mattos
Coorientadora : Dr.ª Cátia Maria dos Santos Machado

1. Lógica fuzzy. 2. Controle de Qualidade. 3. Gráficos de Controle. 4. Processo de Produção. I. Mattos, Viviane Leite Dias de. II. Machado, Cátia Maria dos Santos. III. Título.

CDU 004.43

Catalogação na fonte: Bibliotecária Flávia Reis de Oliveira CRB10/1946

**Banca Examinadora**

Profª Dra. Viviane Leite Dias de Mattos (Orientadora) - FURG

Profª Dra. Andreia Cristina Konrath - UFSC

Profª Dra. Diana Francisca Adamatti - FURG

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer a minha família, em especial a minha mãe que sempre preocupada, busca nas suas orações a proteção de Deus, para que sempre esteja me protegendo onde quer que eu ande.

Um agradecimento especial à minha Orientadora Viviane Leite Dias de Mattos. Posso dizer que foi mais que uma Orientadora, foi uma companheira de pesquisa, sempre disposta e dedicada. Sou muito grato e muito feliz por ter tido essa oportunidade. A coorientadora e professora Cátia Machado, exemplo de dedicação e persistência. As duas são exemplos que pretendo seguir.

Agradeço o companheirismo dos meus amigos, colegas de trabalho, pelo apoio e torcida na realização desse trabalho.

Agradeço aos demais professores do Programa de Mestrado em Modelagem Computacional, pelos conselhos e ensinamentos, importantes nesse processo de formação.

Agradeço aos avaliadores que participaram como juízes na coleta de dados. Ao aluno Leonardo Regina, que realizou grande parte do trabalho de coleta de dados. Também, ao aluno Matheus Muller Korb pelas contribuições no desenvolvimento do algoritmo que transforma valores *crisp* em valores *fuzzy*.

A paciência e companheirismo de Daniela Renata Jacobsen.

Por fim, agradeço a Deus pela vida e proteção em todos os momentos.

# SUMÁRIO

**LISTA DE FIGURAS** ..... **8**

**LISTA DE TABELAS** ..... **10**

**LISTA DE QUADROS** ..... **12**

**LISTA DE ABREVIATURAS** ..... **13**

**RESUMO** ..... **15**

**ABSTRACT** ..... **16**

**1 INTRODUÇÃO** ..... **17**

1.1 APRESENTAÇÃO DO TEMA ..... 17
1.2 CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA E JUSTIFICATIVA ..... 18
1.3 OBJETIVOS ..... 21
*1.3.1 Objetivo Geral* ..... *21*
*1.3.2 Objetivos Específicos* ..... *21*
1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO ..... 22

**2 REVISÃO DE LITERATURA** ..... **23**

2.1 CONTROLE DE QUALIDADE ..... 23
*2.1.1 Conceitos Básicos do Controle de Qualidade* ..... *24*
2.2 GRÁFICOS DE CONTROLE ..... 26
2.3 CLASSIFICAÇÃO DOS GRÁFICOS DE CONTROLE ..... 29
*2.3.1 Gráficos de Controle para Variáveis* ..... *30*
2.4 CONCEITOS DE FUZZY ..... 37
*2.4.1 Conceitos Básicos de Conjuntos Fuzzy* ..... *38*
2.5 OPERAÇÕES COM CONJUNTOS FUZZY ..... 45
2.6 MÉTODO DE TRANSFORMAÇÃO DE NÚMERO CRISP EM NÚMERO FUZZY ..... 48
2.7 GRÁFICO DE CONTROLE FUZZY ..... 54
*2.7.1 Gráfico de controle fuzzy para média* ..... *55*
*2.7.2 Gráfico de controle fuzzy para a amplitude* ..... *57*
2.8 DOMINÂNCIA FUZZY ..... 60
*2.8.1 Dominância Fuzzy Proposta por Yuan* ..... *60*
2.9 CONSTRUÇÃO E INTERPRETAÇÃO DOS GRÁFICOS FUZZY ..... 66
2.10 IOGURTE: PRODUÇÃO E NORMAS DE QUALIDADE ..... 72
*2.10.1 O Processo de Produção do Iogurte* ..... *73*
*2.10.2 Resoluções e classificação das bebidas lácticas fermentadas* ..... *77*
*2.10.3 Características definidoras da qualidade do Iogurte* ..... *78*

*2.10.4 Características Sensoriais* ..... *79*
2.11 FECHAMENTO DO CAPÍTULO ..... 82

**3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS ..... 83**

3.1 DEFINIÇÃO DA ESTRATÉGIA ..... 83
*3.1.1 CEP e Lógica Fuzzy* ..... *84*
3.2 ESTUDO DE CASO ..... 85
*3.2.1 Objeto de Estudo* ..... *85*
*3.2.2 Instrumento* ..... *86*
*3.2.3 Coleta de Dados* ..... *86*
*3.2.4 Análise de Dados* ..... *86*

**4 RESULTADOS E DISCUSSÕES ..... 88**

4.1 A ESTRATÉGIA PROPOSTA ..... 88
4.2 APLICAÇÃO ..... 89
*4.2.1 Descrição do Processo Produtivo Analisado* ..... *90*
4.2.1.1 Coleta e transporte do leite ..... 90
4.2.1.2 Processo de produção do iogurte ..... 91
4.2.1.3 Descrição do produto – iogurte ..... 91
*4.2.2 Seleção das Características de Qualidade a Serem Monitoradas e Observações* ..... *92*
*4.2.3 Resultados obtidos com a aplicação da estratégia proposta* ..... *93*
4.2.3.1 Característica cor ..... 94
4.2.3.2 Característica aroma ..... 99
4.2.3.3 Característica consistência ..... 104
4.2.3.4 Característica sabor ..... 108
4.2.3.5 Característica acidez ..... 113
*4.2.4 Considerações Finais* ..... *117*
4.3 FECHAMENTO DO CAPÍTULO ..... 118

**5 CONCLUSÃO ..... 120**

5.1 PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES ..... 121
5.2 TRABALHOS FUTUROS ..... 122

**REFERÊNCIAS ..... 124**

**ANEXO 1 – FATORES CONSTANTES ..... 129**

**APÊNDICE 1 – INSTRUMENTO UTILIZADO NA COLETA DE DADOS ..... 130**

**APÊNDICE 2 – DADOS COLETADOS ..... 132**

**APÊNDICE 3 – NÚMEROS *FUZZY* ..... 142**

**APÊNDICE 4 – IMPLEMENTAÇÕES UTILIZADAS ..... 147**

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Concorrência entre empresas ..... 17

Figura 2 – Representação do comportamento de um processo: (a) Processo estável e previsível: apenas causas comuns presentes e (b) Processo não estável e não previsível: causas especiais presentes ..... 25

Figura 3 - Estrutura de um gráfico de controle ..... 27

Figura 4 - Exemplo de Gráfico de Controle para Média e Amplitude ..... 34

Figura 5 - Gráfico de Controle ( $\overline{X}$ ) ..... 36

Figura 6 - Gráfico de controle $R$ ..... 37

Figura 7 - Conjunto representando valor (a) *crisp* e (b) *fuzzy* referente a cor de um produto 39

Figura 8 - Função do conjunto de membros do número *fuzzy* triangular ..... 52

Figura 9 - Exemplo de Gráfico de Controle *Fuzzy* para Média ..... 57

Figura 10 - Exemplo de Gráfico de Controle Fuzzy para a Amplitude ..... 59

Figura 11 - Gráfico de controle *fuzzy* $\overline{X}$ ..... 68

Figura 12 - Gráfico de controle *fuzzy* $R$ ..... 71

Figura 13 - Porcentagem de ácido lático em função do tempo de fermentação ..... 74

Figura 14 - Curva de desenvolvimento simbiótico da cultura lática durante a fermentação do Iogurte ..... 75

Figura 15 - Fases da produção de Iogurte ..... 76

Figura 16 - Gráfico de controle de Shewhart e gráfico de controle *fuzzy* de média para a cor do iogurte ..... 94

Figura 17 - Gráfico de controle de Shewhart e gráfico de controle *fuzzy* ( $R$ ) para a cor do iogurte ..... 97

Figura 18 - Gráfico de controle de Shewhart e gráfico de controle *fuzzy* de média para o aroma do iogurte..... 99

Figura 19 - Gráfico de controle de Shewhart e gráfico de controle *fuzzy* ( $R$ ) para o aroma do iogurte..... 102

Figura 20 - Gráfico de controle de Shewhart e gráfico de controle *fuzzy* ( $\overline{X}$ ) para a consistência do iogurte..... 104

Figura 21 - Gráfico de controle de Shewhart e gráfico de controle *fuzzy* $R$ para a consistência do iogurte..... 106

Figura 22 - Gráfico de controle de Shewhart e gráfico de controle *fuzzy* ( $\overline{X}$ ) para o sabor do iogurte..... 108

Figura 23 - Gráfico de controle de Shewhart e gráfico de controle *fuzzy* $R$ para o sabor do iogurte..... 111

Figura 24 - Gráfico de controle de Shewhart e gráfico de controle *fuzzy* ( $\overline{X}$ ) para a acidez do iogurte..... 113

Figura 25 - Gráfico de controle de Shewhart e gráfico de controle *fuzzy* $R$ para a acidez do iogurte..... 115

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Observações obtidas na análise de um processo produtivo ..... 35

Tabela 2 - Exemplo de conjuntos *fuzzy* para a variável cor ..... 40

Tabela 3 - Valores médios de $a$ e $b$ em cada amostra ..... 66

Tabela 4 - Amplitudes dos valores de $a$ e de $b$ em cada amostra ..... 67

Tabela 5 - Avaliação do gráfico de controle *fuzzy* para a Cor com $\gamma = 0{,}5$ e $\gamma = 0{,}7$ ..... 69

Tabela 6 - Avaliação do Gráfico de controle *fuzzy* para $\gamma = 0{,}5$ e $\gamma = 0{,}7$ ..... 72

Tabela 7 - Requisitos físico-químicos dos leites fermentados ..... 78

Tabela 8 - Critérios microbiológicos, concentrações no produto final ..... 79

Tabela 9 - Informações nutricionais do iogurte produzido na Agroindústria da Instituição A 92

Tabela 10 – Cor do iogurte: avaliação do gráfico de controle *fuzzy* $(\overline{X})$ para $\gamma = 0{,}5$ e $\gamma = 0{,}7$ ..... 96

Tabela 11 – Cor do iogurte: avaliação do gráfico de controle *fuzzy* $(R)$ para $\gamma = 0{,}5$ e $\gamma = 0{,}7$ ..... 98

Tabela 12 – Aroma do iogurte: avaliação do gráfico de controle *fuzzy* $(\overline{X})$ para $\gamma = 0{,}5$ e $\gamma = 0{,}7$ ..... 101

Tabela 13 – Aroma do iogurte: avaliação do gráfico de controle *fuzzy* $(R)$ para $\gamma = 0{,}5$ e $\gamma = 0{,}7$ ..... 103

Tabela 14 – Consistência do iogurte: avaliação do gráfico de controle *fuzzy* $(\overline{X})$ para $\gamma = 0{,}5$ e $\gamma = 0{,}7$ ..... 105

Tabela 15 – Consistência do iogurte: avaliação do gráfico de controle *fuzzy* $(R)$ para $\gamma = 0{,}5$ e $\gamma = 0{,}7$ ..... 107

Tabela 16 – Sabor do iogurte: avaliação do gráfico de controle *fuzzy* $(\overline{X})$ para $\gamma = 0{,}5$ e $\gamma = 0{,}7$ ..... 110

Tabela 17 – Sabor do iogurte: avaliação do gráfico de controle *fuzzy* $(R)$ para $\gamma = 0{,}5$ e $\gamma = 0{,}7$ ..... 112

Tabela 18 – Acidez do iogurte: avaliação do gráfico de controle *fuzzy* $(\overline{X})$ para $\gamma = 0{,}5$ e $\gamma = 0{,}7$ ..... 114

Tabela 19 – Acidez do iogurte: avaliação do gráfico de controle *fuzzy* $(R)$ para $\gamma = 0{,}5$ e $\gamma = 0{,}7$ ..... 116

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Resumo da interpretação dos resultados dos gráficos para média ..... 117

Quadro 2 – Resumo da interpretação dos resultados dos gráficos para amplitude..... 118

## LISTA DE ABREVIATURAS

CEP - Controle Estatístico de Processos

ISO9000 - Séries de Padrões de qualidade definidos pelo ISO (*International Organization for Standardization)*

MAPA – Ministério da Agricultura e Pecuária

$\overline{X}$ - Gráfico de Controle para a Média

$R$ - Gráfico de Controle para a Amplitude

$S$ - Gráfico de Controle para o Desvio Padrão

$p$ - Gráfico de Fração de Defeituosos

$np$ - Gráfico do Número de Unidades Defeituosas

$c$ - Gráfico do Número de Defeitos

$u$ - Gráfico do Número de não Conformidades por Unidade

UEP - Unidade de Ensino e Produção

$LIC$ - Limite Inferior de Controle

$LC$ - Linha Central

$LSC$ - Limite Superior de Controle

$k$ - Número de Amostras

$n$ - Tamanho da Amostra

$\alpha$ - Grau de pertinência

$\tilde{s}_{\overline{X}}$ - Limite Superior do Gráfico de Controle *Fuzzy* de Média

$\tilde{i}_{\overline{X}}$ - Limite Inferior do Gráfico de Controle *Fuzzy* de Média

$\tilde{s}_R$ - Limite Superior do Gráfico de Controle *Fuzzy* para a Amplitude

$\tilde{i}_R$ - Limite Inferior do Gráfico de Controle *Fuzzy* para a Amplitude

$\tilde{N}^S$ - Parte superior do número *fuzzy* $\tilde{N}$

$\tilde{N}^I$ - Parte inferior do número *fuzzy* $\tilde{N}$

$a$ - Valor real inferior do número *fuzzy* triangular

$m$ - Valor real central do número *fuzzy* triangular

$b$ - Valor real superior do número *fuzzy* triangular

$\tilde{x}_{ij}$ - Número *fuzzy* correspondente ao produto $j$ da amostra $i$

$\tilde{\bar{x}}_i$ - Número médio *fuzzy*

$DF(\tilde{s}_{\bar{X}}, \tilde{\bar{x}}_i)$ - Dominância *fuzzy* de $\tilde{s}_{\bar{X}}$ em relação a $\tilde{\bar{x}}_i$

$\gamma$ - Grau de dominância utilizada na ordenação de números *fuzzy*

**RESUMO**

O presente trabalho faz um enlace de teorias propostas por dois trabalhos: Transformação de valores *crisp* em valores *fuzzy* e construção de gráfico de controle *fuzzy*. O resultado desse enlace é um gráfico de controle *fuzzy* que foi aplicado em um processo de produção de iogurte, onde as variáveis analisadas foram: Cor, Aroma, Consistência, Sabor e Acidez. São características que dependem da percepção dos indivíduos, então a forma utilizada para coletar informações a respeito de tais característica foi a análise sensorial. Nas analises um grupo denominado de juízes, atribuía individualmente notas para cada amostra de iogurte em uma escala de 0 a 10. Esses valores *crisp*, notas atribuídas pelos juízes, foram então, transformados em valores *fuzzy*, na forma de número *fuzzy* triangular. Com os números *fuzzy,* foram construídos os gráficos de controle *fuzzy* de média e amplitude. Com os valores *crisp* foram construídos gráficos de controle de Shewhart para média e amplitude, já consolidados pela literatura. Por fim, os resultados encontrados nos gráficos tradicionais foram comparados aos encontrados nos gráficos de controle *fuzzy.* O que pode-se observar é que o gráfico de controle *fuzzy*, parece satisfazer de forma significativa a realidade do processo, pois na construção do número *fuzzy* é considerada a variabilidade do processo. Além disso, caracteriza o processo de produção em alguns níveis, onde nem sempre o processo estará totalmente em controle ou totalmente fora de controle. O que vai ao encontro da teoria *fuzzy*: se não é possível prever com exatidão determinados resultados é melhor ter uma margem de aceitação, o que implicará na redução de erros.

Palavras-chave: Lógica *fuzzy*; Controle de Qualidade; Gráficos de Controle; Processo de Produção.

**ABSTRACT**

The present job is about a union of theories proposed by two jobs: the transformation of *crisp* values in *fuzzy* values and the built of *fuzzy* chart control. The result of this union is a *fuzzy* chart control that was applied in a yogurt production, where the analyzed varieties were: Color, Smell, Consistency, Flavor and Acidity. The characteristics depend on the individual perception, then the way to collect the information about these characteristics was the sensory analysis. In the analysis of a group named judges, it was attributed grades to each yogurt sample in a scale from 0 to 10. These *crisp* values, the grades attributed by the judges, were then, transformed in *fuzzy* values, in the triangular *fuzzy* number. With the *fuzzy* numbers, it was built the *fuzzy* average and amplitude control charts. With the *crisp* values it was built average and amplitude control Shewhart charts, already consolidate by the literature. Lastly, the Shewhart charts results were compared to the *fuzzy* control charts. It can be observed that the *fuzzy* control chart, seems to satisfy in a significant way the reality of the process, because in the built of the *fuzzy* number is considered process variability. Besides, it characterizes the production process in some levels, where not always the process was totally in or out of control. What is also in the fuzzy theory: if it is not possible to forecast rightly the results, it is better to have an acceptance level, it results in a small mistakes probability.

Keywords: *Fuzzy logic*; Quality control; Control charts; Production Process.

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Apresentação do Tema

Hoje em dia, com a abertura de mercado pela globalização da economia, as empresas vêm buscando maneiras de se diferenciar dos concorrentes de forma a garantir sua perenidade no mercado. Com isso, cada vez mais ferramentas estatísticas tornam-se necessárias para melhorar as potencialidades dos processos de fabricação visando satisfazer as necessidades dos clientes de modo rápido e eficiente. Para Campus (1999), a Qualidade é definida como sendo aquele produto ou serviço que atende perfeitamente, de forma segura, confiável, acessível e no tempo certo, as necessidades do cliente. A figura 1 faz uma breve referência da concorrência entre empresas pelo mercado consumidor.

Figura 1 - Concorrência entre empresas

.

Fonte: Metal Concep

Dentro deste contexto assumem importante papel as técnicas estatísticas, em especial, o controle estatístico de processos (CEP). Os primeiros registros desta técnica surgiram na década de 20, desenvolvidos por Walter Shewhart (Shewhart, 1938), tendo sua gênese na indústria de componentes elétricos e sendo utilizado em períodos específicos, como, durante a Segunda Guerra Mundial. Neste período, situações como a de um soldado, frente a frente com o inimigo, puxar o cordão da granada e essa não funcionar, trazia grandes problemas para o desfecho das batalhas. Por volta dos anos 70, nasce o Sistema da Qualidade, tendo como premissa as práticas de controle da área nuclear e material bélico.

Parte-se do pressuposto de que o que garante a sobrevivência das empresas em um mercado exigente e concorrido é ter produtos com boa qualidade e custo competitivo. Nesse contexto a estatística, ou ainda as técnicas de controle estatístico de processos, vêm sendo muito usadas nas organizações de forma a conhecer e monitorar processos, buscando melhorar a qualidade e diminuir custos associados às falhas de processo e retrabalhos.

O controle estatístico de processos permite fazer uma distinção clara entre os tipos de causas de problemas que ocorrem no processo de produção, direcionando corretamente as ações necessárias e, em curto prazo, garantindo que as falhas sejam identificadas durante o processo, minimizando as perdas, e não em inspeções realizadas no final do processo ou pelo próprio cliente. Para este fim, uma das principais tendências observadas atualmente está relacionada à disseminação dos conceitos da melhoria da qualidade, não somente entre os operários ligados diretamente ao produto, mas em todas as atividades da empresa. Segundo Deming (1992), a melhoria da qualidade aumenta a produtividade.

## 1.2 Caracterização do Problema e Justificativa

Com o desenvolvimento dos processos produtivos e o aumento da competitividade no mercado, as empresas buscam cada vez mais alternativas para melhorar a qualidade do seu produto final, visando atender as exigências dos consumidores. Nessa perspectiva, ferramentas estatísticas, como gráficos de controle, são fundamentais para diagnosticar falhas em etapas especificas da

produção, possibilitando sua correção a fim de diminuir os custos da produção e, ao final do processo, ter produtos com maior qualidade, o que vai de encontro ao esperado pelos consumidores.

As normas da ISO 9000 (*International Organization for Standardization*), na sua última versão (2008), apresentam o CEP incorporado ao Controle de Qualidade, devendo as empresas certificadas ou em processo de certificação implementar Controle Estatístico em seu processo produtivo (FARIAS, 2001). Esta exigência foi apresentada já na versão 2000 da referida norma.

O CEP possibilita o controle da qualidade durante a execução do processo em tempo real. Dessa forma, minimiza a formação de produtos fora do padrão, ou seja, diminui a quantidade de produtos defeituosos no final do processo. O CEP baseia-se em uma estratégia preventiva de controle de qualidade, ao contrário de outros procedimentos que fazem a inspeção no final dos processos, quando os erros cometidos já não podem mais ser corrigidos.

As empresas, por sua vez, demandam um produto que seja industrialmente rentável e que atenda as exigências dos consumidores. Necessita, portanto, beneficiá-lo adequadamente para manter ou melhorar a qualidade do produto que é ofertado. Uma ferramenta estatística que vai ao encontro dessas prerrogativas: ter no final do processo produtos com qualidade elevada e minimização de custos com produtos defeituosos e retrabalhos, são os gráficos de controle, os quais possibilitam a remoção das causas protagonistas de produtos fora dos padrões adequados.

Segundo Montgomery (2012), os gráficos de controle são uma das ferramentas mais importantes para a estabilização de processos industriais e, atualmente, também para serviços e processos administrativos. Além de importantes, são de fácil entendimento e os resultados são visualmente identificados, de forma que, muitas vezes, o próprio operador possa identificar algo fora dos padrões pré-estabelecidos.

Muitos gráficos já foram desenvolvidos e tiveram sua eficiência comprovada, como os gráficos $\overline{X}$ (média), $R$ (amplitude) e $S$ (desvio padrão) para variáveis e os gráficos $p$ (proporção de defeitos), $np$ (quantidade de defeitos) e $c$ (quantidade de defeitos por unidade) para atributos, todos com várias especificidades para se adaptarem aos diversos contextos. Também os gráficos das médias móveis e da soma acumulada têm sido bastante utilizados. Entretanto, todos têm sido

construídos partindo do pressuposto de que as informações são precisas, o que muitas vezes não acontece. O desempenho de gráficos construídos a partir de informações imprecisas, fazendo uso da lógica *fuzzy*, é uma área que requer mais estudos.

De acordo com Zadeh (1975), a utilização de números *fuzzy* pode ser extremamente útil na mensuração de variáveis complexas e mal definidas por possibilitar a diminuição de ocorrência de resultados incorretos. Ele associa números *crisp* a pontos em um plano e números *fuzzy* a bolas com limites flexíveis num parque para ilustrar a ideia de que seria mais fácil acertar o alvo (resultado da mensuração) com números *fuzzy*.

Mas, se as variáveis a serem analisadas são complexas ou mal definidas, como obter números *fuzzy* na mensuração das diversas características de qualidade a serem analisadas em um CEP? Como usar estas informações na construção de gráficos de controle? Como interpretar os resultados obtidos?

Nestas práticas, um fato que talvez possa ser um fator que dificulte a popularização do uso de lógica *fuzzy* e que precisa ser levado em consideração é a dificuldade de desenvolver estratégias de mensuração que forneçam o número *fuzzy* a ser usado na construção de tais gráficos.

Outro aspecto a considerar é a forma de ordenação destes resultados *fuzzy*, tendo em vista que existem vários métodos propostos com esta finalidade. Consequentemente, ao pensar em definir uma estratégia de construção de gráficos de controle *fuzzy*, também é necessário definir como estes números serão obtidos e interpretados.

Alguns gráficos construídos a partir de números *fuzzy* já foram propostos, entretanto, estudar e aprimorar técnicas que possam melhorar a qualidade de processos produtivos pode ser extremamente útil para o desenvolvimento tecnológico e industrial, além de trazer inúmeros benefícios para a sociedade. O desenvolvimento destas técnicas possibilita a identificação de possíveis problemas em etapas específicas da produção que comprometem o produto final, deixando-o fora dos padrões pré-estabelecidos. A identificação e remoção de falhas durante a produção garantem produtos finais com melhor qualidade, além de diminuição dos custos com produtos defeituosos e retrabalhos.

## 1.3 Objetivos

### 1.3.1 Objetivo Geral

A proposta desse trabalho é desenvolver uma estratégia para elaboração de gráficos de controle, construídos a partir de informações imprecisas, para caracterização e monitoramento de processos, avaliando a sua utilização na caracterização de um processo produtivo, etapa inicial da implantação de um Controle Estatístico de Processo.

### 1.3.2 Objetivos Específicos

Para alcançar o objetivo geral, têm-se os seguintes objetivos específicos:

- aprimorar os conhecimentos sobre o uso de gráficos de controle para conhecimento e monitoramento de processos produtivos, buscando uma visão crítica;
- revisar os principais conceitos sobre números *fuzzy*, conjuntos *fuzzy* e lógica *fuzzy*, focando nas suas principais propriedades, que permitirão utilizá-los na construção de gráficos de controle;
- selecionar e estudar detalhadamente um processo produtivo;
- desenvolver uma estratégia na construção de gráficos de controle a partir de uma revisão bibliográfica sobre números, conjuntos e lógica *fuzzy*;
- selecionar características de qualidade no processo produtivo estudado;
- investigar o comportamento e eficácia de gráficos de controle tradicionais e das cartas de controle *fuzzy* no processo produtivo estudado;
- avaliar a viabilidade da estratégia desenvolvida na construção de gráficos de controle;
- refletir sobre aos achados sob a ótica da lógica formal e da lógica *fuzzy*.

- De forma a facilitar a utilização da estratégia, gerar um conjunto de recomendações sobre os resultados encontrados sob a ótica da lógica formal e da lógica *fuzzy*.

## 1.4 Estrutura do Trabalho

O presente documento está estruturado em cinco capítulos, caracterizados a seguir:

Capítulo 2 – trata da revisão de literatura. Serão apresentados conteúdos relacionados a qualidade, controle estatístico de processos, gráficos de controle, números e conjuntos *fuzzy,* além de discorrer sobre o processo produtivo a ser analisado;

Capítulo 3 – descreve a metodologia utilizada no desenvolvimento do estudo, fazendo um relato da maneira como as diversas etapas do trabalho foram executadas;

Capítulo 4 – apresenta e discute os resultados encontrados;

Capítulo 5 – finalizando o trabalho, manifesta as conclusões originadas do desenvolvimento do trabalho, com algumas recomendações para futuros trabalhos relacionados ao tema.

Complementando esta estruturação, são utilizados anexos e apêndices para apresentar algumas informações complementares.

# 2 REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo serão apresentados os principais tópicos estudados que são de fundamental importância para o desenvolvimento do trabalho. Alguns tópicos do processo produtivo analisado também são apresentados de forma a enfatizar a sua importância.

## 2.1 Controle de Qualidade

Segundo Besterfild (1994), quando se menciona o termo “qualidade”, ele está sendo associado a produtos ou serviços excelentes, que satisfazem nossas expectativas. Tais expectativas se definem em função da utilização do produto, do uso que se dará ao produto ou serviço, e de seu respectivo preço de venda. Quando um produto corresponde ou supera nossas expectativas, ele apresenta qualidade.

Para Besterfild (1994), o controle de qualidade está relacionado com atividades de especificação, produção, instalação, inspeção e manutenção durante o uso.

Em um processo produtivo, as características dos produtos apresentam variabilidade, ou seja, dificilmente dois produtos ou itens serão exatamente iguais. Dois são os tipos de causas responsáveis por esses resultados: causas comuns e causas especiais. Causas comuns são situações intrínsecas ao processo, naturais e não podem ser eliminadas. Já causas especiais podem ser identificadas e eliminadas, como, diferenças entre máquinas, mudança de operador e diferentes fornecedores.

Para identificar e diferenciar causas comuns de especiais, o americano Dr. Walter Shewhart desenvolveu uma técnica simples, porém muito eficaz, chamada

gráfico de controle do processo. O uso destes gráficos foi proposto com a intenção de identificar causas especiais (causadoras de produtos defeituosos) através da analise dos dados provenientes de amostragem, diminuindo assim o número de produtos defeituosos.

A partir de então, outros países começaram a adotá-las e aperfeiçoá-las, como aconteceu no Japão, por exemplo. Com os seminários realizados na década de 50 pelo engenheiro americano Joseph Moses Juran[1], os japoneses começaram a perceber que o controle da qualidade dependia muito de fatores humanos e culturais. Através dessa percepção, foi desenvolvido um método japonês para o controle da qualidade total com a participação de todos os setores da empresa, o que contribuiu muito para que o Japão passasse a fabricar produtos da mais alta qualidade.

Atualmente, vários países perceberam as vantagens da utilização do controle de qualidade e um número considerável de empresas em todo mundo estão utilizando suas ferramentas com o objetivo de diminuir perdas e melhorar a qualidade do produto final.

### 2.1.1 Conceitos Básicos do Controle de Qualidade

Conforme já mencionado, mesmo em um processo produtivo muito bem projetado e operado, a variabilidade está presente. Contudo a diferença entre os produtos pode ser grande ou praticamente imperceptível e as causas podem ser as mais diversas possíveis, desde problemas no monitoramento do processo até causas mais específicas, como o desgaste em uma máquina. Estudar essas causas é fundamental para o gerenciamento da produção e redução da variabilidade.

Distinguir causas comuns de especiais não é tão simples como por vezes pode parecer. Segundo Deming (1992), a confusão entre causas comuns e causas especiais pode levar a perdas consideráveis e custos mais elevados. Tratar uma causa comum como sendo especial gera custos desnecessários e maior variabilidade na produção. Por outro lado, se causas especiais passarem

[1] Foi um consultor de negócios, famoso por seu trabalho com qualidade e gestão da qualidade.

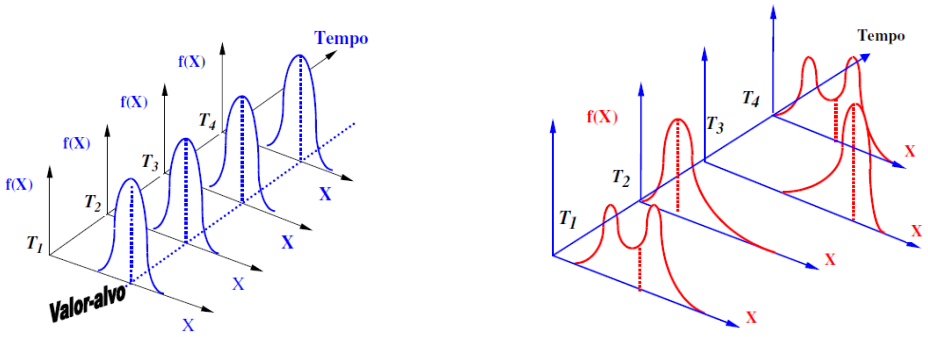
despercebidas podem ser incorporadas ao processo, tornando aceitável o que deveria ser rejeitado. Perde-se a oportunidade de melhoria do produto.

Causas comuns (figura 2 (a)) são causas inerentes ao processo, são aleatórias e geram pouca variabilidade. São causas que estão presentes em todo processo de produção, fazem parte do padrão natural, são resultado do efeito cumulativo de pequenas causas de variabilidade que acontecem diariamente. Um processo onde somente causas comuns estão presentes é dito um processo estável ou sob controle estatístico.

Já causas especiais (figura 2 (b)) são causas que não seguem um padrão aleatório, são consideradas falhas na operação. Fazem com que o processo saia do seu padrão, provocando alteração na forma, tendência central ou variabilidade das características de qualidade. A identificação e neutralização dessas causas se justificam inclusive economicamente, pois são causas que reduzem significativamente o desempenho do processo. As causas especiais, na maioria das vezes são locais e podem ser resolvidas pelos próprios operadores.

Figura 2 – Representação do comportamento de um processo: (a) Processo estável e previsível: apenas causas comuns presentes e (b) Processo não estável e não previsível: causas especiais presentes

(a) (b)




Fonte: Ribeiro (2000)

Uma maneira de monitorar um processo produtivo é através do uso de gráficos de controle. Além de eficientes, os gráficos de controle são de fácil visualização e entendimento, o que facilita na identificação de prováveis causas especiais que podem ocorrer no processo.

Segundo Samohyl (2009, p.101), os gráficos de controle são elementos visuais para o monitoramento da conformidade de características dos produtos e

processos. Mediante a utilização correta de gráficos de controle pode-se rapidamente identificar alterações inusitadas em pontos estratégicos na linha de produção.

## 2.2 Gráficos de Controle

O gráfico de controle é composto por três linhas, duas das quais são os limites de controle, inferior e superior (LIC e LSC, respectivamente) e no centro tem-se uma linha que representa a média ou alvo do processo (LC- Linha Central). Tradicionalmente, as linhas dos limites de controle ficam numa distância de três desvios-padrão da média ou alvo do processo. Na prática, o uso dos três desvios-padrão tem funcionado bem, mas por vezes o uso de outros critérios para os limites de controle pode ser conveniente.

O gráfico de controle serve para monitorar de forma contínua uma determinada característica de qualidade. Oferece uma imagem do percurso do processo. Segundo Besterfild (1994), o gráfico de controle serve para melhorar a qualidade do processo, para definir a habilidade ou capacidade deste, para decidir quando se pode prosseguir com o processo e quando é preciso fazer ajustes e investigar possíveis causas de instabilidade.

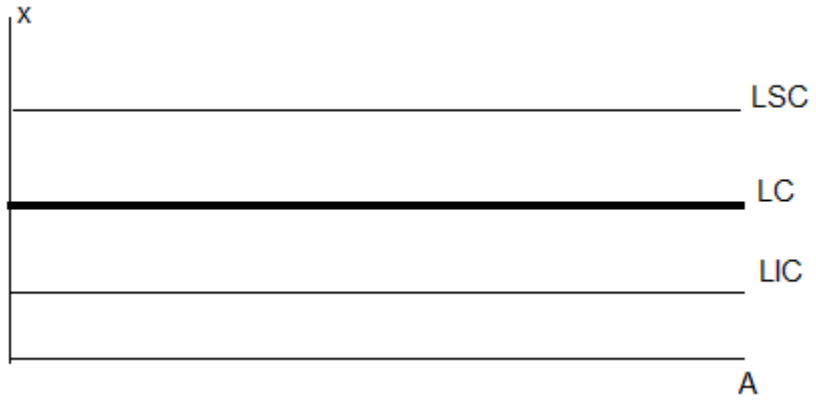
Para se construir um gráfico, onde seja possível fazer análises sobre o desempenho do processo, é preciso ter um número mínimo de amostras. Para Paranthaman (1990), esse número deve ser no mínimo 25. Entretanto, segundo Siqueira (1997), não existe uma regra para definir o tamanho do subgrupo e o número de subgrupos para se construir um gráfico de controle. Esta definição deve levar em conta o volume de produção, o custo da inspeção e a importância da informação obtida.

O gráfico de controle descreve o processo considerando duas características fundamentais: centralização, normalmente determinada pela média e dispersão, normalmente verificada pelo desvio padrão ou amplitude. Os gráficos de controle são divididos, em geral, em dois grandes grupos: avaliação por variável e avaliação por atributo.

Definem-se variáveis como características que podem ser medidas em intensidade, tais como, velocidade, altura, massa, volume entre outros. Já atributo é definido como características que só podem ser contados ou classificados, tais como: passa/não passa, claro/escuro, com trinca/sem trinca, entre outros.

A interpretação dos dados coletados (observações) em um processo deve ser a mais objetiva e detalhada possível, com a localização do valor central (média) e a dispersão dos mesmos (amplitude ou desvio padrão). Um exemplo de gráfico de controle é apresentado na figura 3 (PALADINI, 1990).

Figura 3 - Estrutura de um gráfico de controle




Fonte: PALADINI (1990).

OBS: LSC - Limite Superior de Controle; LIC - Limite Inferior de Controle; LC - Linha Média ou Linha Central; x - Valor observado da característica; A - Número de amostra.

Uma das particularidades dos gráficos de controle é que, ao observar o seu comportamento, podem-se encontrar evidências de que o processo esteja ou não, sob controle estatístico. Assim, se todos os pontos plotados no gráfico estão entre dois limites de controle sem qualquer tendência particular, ou seja, a disposição dos mesmos é aleatória, encontram-se evidências de que o processo está sob controle estatístico.

Pontos fora dos limites de controle são frutos de variações de causas especiais, assim, identifica-se que o processo pode estar fora de controle estatístico, mas a investigação das causas é que mostrará isto. Devem-se identificar os fatores que causam esta variação e eliminar estes pontos para a determinação dos limites de controle do gráfico.

Quando em um gráfico de controle a distribuição dos dados não for aleatória, ou seja, apresentar algum comportamento atípico ao padrão do processo, pode ser algum sintoma de causa especial que esteja ocorrendo no processo de produção. Há uma infinidade de padrões não aleatórios que podem ser encontrados em gráficos de controle, tais como os descritos em Western Electric (1956). Alguns são:

a) periodicidade ou ciclo - quando a distribuição dos pontos apresenta subidas e descidas em intervalos regulares de tempo, associado normalmente a uma das condições do processo, como: temperatura, operador, turno, entre outros, que sofrem mudanças periódicas;

b) tendência - quando os pontos se direcionam nitidamente para cima ou para baixo. É o exemplo típico de desgaste de ferramentas, cansaço de operadores, entre outros;

c) deslocamento - quando apresenta mudança no nível de desempenho do processo, normalmente justificadas por introdução de novas máquinas, novas embalagens e novos métodos ou até mesmo de um programa de qualidade;

d) falta ou excesso de variabilidade - na primeira hipótese a distribuição dos dados se posiciona próxima à linha central. Normalmente é fruto de erros de coleta (dados falsos) ou seleção imprópria de subgrupos racionais. Na segunda hipótese, a distribuição dos dados assume um comportamento inverso, com picos extremos de comportamento. É resultado de ajustes frequentes de máquinas ou interferência de outros níveis de fatores de causa de variação que normalmente justificaria uma melhor estratificação dos dados;

e) sequência - situação em que pontos consecutivos incidem em um dos lados da linha média central. Esta sequência de pontos chama-se de “comprimento da sequência” (KUME, 1993). O mesmo autor considera como sendo anormal uma sequência de 7 pontos ou até mesmo uma sequência onde mais que 80% dos pontos do gráfico estarem localizados de um só lado da linha central.

Para a construção de um gráfico de controle o primeiro passo é a coleta de amostras. A coleta de amostras deve ser feita de forma periódica durante o processo de produção, sendo que a frequência da coleta das amostras é determinada a partir de considerações técnicas e econômicas definidas durante a fase de planejamento da produção (FALCÃO, 2001).

## 2.3 Classificação dos Gráficos de Controle

Segundo Ishikawa (1989), os gráficos de controle são classificados de acordo com o tipo de característica por elas monitoradas, podendo ser gráficos de controle por variáveis ou gráficos de controle por atributos, conforme já mencionado.

Os gráficos de controle para variáveis são utilizados quando as características de qualidade podem ser expressas em termos numéricos (MONTGOMERY, 2012). Nesse caso, as características são mensuráveis, podendo ser expressas em uma escala continua de valores, como: características que incluem comprimento, tempo, peso, resistência e volume de produção.

Já os gráficos de controle por atributos são utilizados quando as características não podem ser representadas numericamente, onde cada item inspecionado é classificado como conforme ou não conforme. Dessa forma, é possível estudar e avaliar um processo através do comportamento de números e proporções ou somente o fato de determinado item estar ou não dentro de padrões pré-estabelecidos, dependendo da medição e dos custos envolvidos (MONTGOMERY, 2012). Outra forma de utilizar gráficos de controle por atributos é comparar determinado produto com um padrão, onde as características controladas assumem valores discretos ao serem contados, como, o número de defeitos em cada unidade de produtos (ISHIKAWA, 1989).

Existem vários tipos de gráficos de controle que podem ser utilizados de acordo com as características do contexto a ser analisado, podendo usar diferentes sistemas de medição e apresentando vantagens e limitações. Souza (2010) faz uma discreta comparação usando dois dos principais gráficos de controle para variáveis ($\overline{X}, R$) e ($\overline{X}, S$), respectivamente gráfico para média e amplitude e gráfico para média e desvio padrão, além de um gráfico de controle por atributos, gráfico $p$.

Gráficos $\overline{X}$ e $R$: (variável)

a) Uso típico: monitora a variação da média e da amplitude;

b) Vantagens: apresenta facilidade na elaboração dos cálculos;

c) Desvantagens: indica com menor segurança a variabilidade do processo;

d) Sistema de Medição: tamanho da amostra ($n$) menor que 10 e constante, normalmente entre 4 e 6. Número de amostras ($k$) entre 20 e 25.

Gráficos $\overline{X}$ e $S$: (variável)

a) Uso típico: monitora a variação da média e do desvio;

b) Vantagens: uma ótima visão da variação estatística de um processo. Indica com maior segurança a variabilidade do processo;

c) Desvantagens: apresenta maior dificuldade operacional;

d) Sistema de Medição: tamanho da amostra ($n$) maior que 10 e pode ser bastante variável. Número de amostras ($k$) entre 20 e 25.

Gráfico de controle $p$: (atributo) representa a proporção/ou fração de defeituosos

a) Uso típico: quando o característico de qualidade de interesse é representado pela proporção de itens defeituosos;

b) Vantagens: usado nos casos onde não é possível realizar medições;

c) Desvantagens: mais complexos de usar com amostras de tamanho variável por exigir mais cálculos;

d) Sistema de Medição: $n$, tamanho da amostra, pode ser variável.

Além dos gráficos citados anteriormente, existem outros que são especialmente úteis quando se tem interesse em avaliar a qualidade de algum processo, como: gráficos de controle $X_i$ individual e a amplitude móvel, gráfico de controle *np*, gráficos de controle *c*, gráfico padronizado, CUSUM e EWMA. Uma descrição sobre esses gráficos podem ser encontrado em Samohyl (2009).

### 2.3.1 Gráficos de Controle para Variáveis

O gráfico de controle para a média tem sido um dos gráficos mais utilizados ao longo dos anos, sendo o primeiro lançado por Shewhart ainda na década de 1920. Esse tipo de gráfico é adequado para variáveis mensuráveis, onde é possível quantificar determinada característica expressa através de valores contínuos.

As amostras devem ser coletadas em pequenos subgrupos de mesmo tamanho e periodicamente, de forma a minimizar a ocorrência de causas especiais dentro de um mesmo subgrupo. É comum usar amostras com no máximo 10 elementos (amostras maiores tem custos maiores, o que pode não ser vantajoso para a amostragem), mesmo sabendo que quanto maior o tamanho dos subgrupos mais fácil é a detecção de pequenas mudanças no processo, ou seja, aumenta a sensibilidade dos gráficos de controle.

Nesta etapa será feito uma descrição mais detalhada dos gráficos de controle $\overline{X}$ e $R$, os quais foram usados no desenvolvimento deste trabalho. O primeiro é usado para avaliar a tendência central do processo, enquanto que o segundo para avaliar a variabilidade.

A construção dos gráficos descritos a seguir pressupõem que a característica de qualidade em estudo é normalmente distribuída com média $\mu$ e desvio padrão $\sigma$ conhecidos. No entanto, nas aplicações práticas, esta restrição não tem tanta relevância, pois as características quantitativas medidas em escala contínua têm, em geral, distribuição normal ou aproximadamente normal (ALMAS, 2003).

Todavia, mesmo sabendo-se que a constatação da normalidade da característica de qualidade não é de extrema importância, recomenda-se que se faça essa checagem durante o estabelecimento de um gráfico de controle para um novo processo que não se tenha informações prévias, pois assim será garantida maior efetividade da ferramenta na avaliação do processo. Caso os dados estejam divergindo fortemente desta distribuição, pode-se ainda lançar mão de transformações matemáticas na tentativa de aproximá-los da situação de normalidade.

Sejam $k$ amostras de tamanho $n$ e suas respectivas médias: $\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_k$, então um estimador para a média geral é dado por:

$$\hat{\mu} = \overline{\overline{X}} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\overline{X}_j \qquad (2.1)$$

Desta forma, $\overline{\overline{X}}$ pode ser usado como a linha central de um gráfico de controle $\overline{X}$, ou seja, um estimador de $\mu$.

Para construir os limites de controle para a média utilizam-se as amplitudes das amostras de tamanho $n$ para estimar o desvio padrão $\sigma$. Desta forma, a amplitude para uma amostra, $x_1, x_2, ..., x_n$, de tamanho $n$, pode ser definida como:

$$R = x_{\max} - x_{\min} \tag{2.2}$$

Da relação entre amplitude e o desvio padrão tem-se a variável aleatória $W = R/\sigma$, que á chamada de amplitude relativa, a qual é uma função que depende do tamanho da amostra $n$ com média $d_2$. Logo, um estimador para $\sigma$ é dado por: $\hat{\sigma} = R/d_2$ (valor tabulado de $d_2$ e de outras constantes podem ser consultados no Anexo 1).

Tem-se que a média das amplitudes $R_1, R_2, ..., R_k$ pode ser dada por:

$$\overline{R} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} R_j \tag{2.3}$$

e desta forma, o desvio padrão $\sigma$ pode ser estimado por:

$$\hat{\sigma} = \frac{\overline{R}}{d_2} \tag{2.4}$$

Essa forma de estimar o desvio padrão é particularmente boa para amostras de tamanho pequeno, $2 \le n \le 5$, mas perde a eficiência na medida que a amostra aumenta de tamanho. Isto ocorre devido ao fato desta medida não levar em consideração os dados da amostra entre o valor mínimo ($x_{\min}$) e o valor máximo ($x_{\max}$).

Com esses resultados e considerando uma amplitude de três erros padrão em torno da média são definidos os parâmetros de um gráfico de controle para $\overline{X}$ como:

$$\begin{cases} LIC = \overline{\overline{X}} - \dfrac{3}{d_2\sqrt{n}}\overline{R} \\ LC = \overline{\overline{X}} \\ LSC = \overline{\overline{X}} + \dfrac{3}{d_2\sqrt{n}}\overline{R} \end{cases} \tag{2.5}$$

Ainda é possível definir a determinação destes limites empregando a constante tabulada $A_2$ (ver Anexo 1), usando a expressão:

$$A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}} \tag{2.6}$$

em que $d_2$ depende de $n$. Dessa forma, as expressões em 2.5 podem ser simplificadas e escritas como:

$$\begin{cases} LIC = \overline{\overline{X}} - A_2\overline{R} \\ LC = \overline{\overline{X}} \\ LSC = \overline{\overline{X}} + A_2\overline{R} \end{cases} \tag{2.7}$$

Analogamente, pode-se também construir um gráfico de controle para a estatística $R$, onde a média pode ser estimada por $\overline{R}$ e o desvio padrão pode ser estimado por $\hat{\sigma}_R$, que é uma função dependente da amplitude relativa $W = R/\sigma$ e cujo desvio padrão é proporcional a $d_3$ (Anexo 1), também sendo uma função que depende exclusivamente do tamanho da amostra $n$. Então, $R = W\sigma$ e o desvio padrão de $R$, o qual é obtido pela expressão $\sigma_R = d_3\sigma$, pode ser estimado por:

$$\hat{\sigma}_R = d_3\frac{\overline{R}}{d_2} \tag{2.8}$$

Logo, os parâmetros do gráfico de controle $R$ com limites de três sigmas, podem ser definidos como:

$$\begin{cases} LSC = \overline{R} + 3\hat{\sigma}_R = \overline{R} + 3d_3\dfrac{\overline{R}}{d_2} \\ LC = \overline{R} \\ LIC = \overline{R} - 3\hat{\sigma}_R = \overline{R} - 3d_3\dfrac{\overline{R}}{d_2} \end{cases} \tag{2.9}$$

É possível isolar os termos que dependem exclusivamente de tamanho da amostra $n$, fazendo isto se tem:

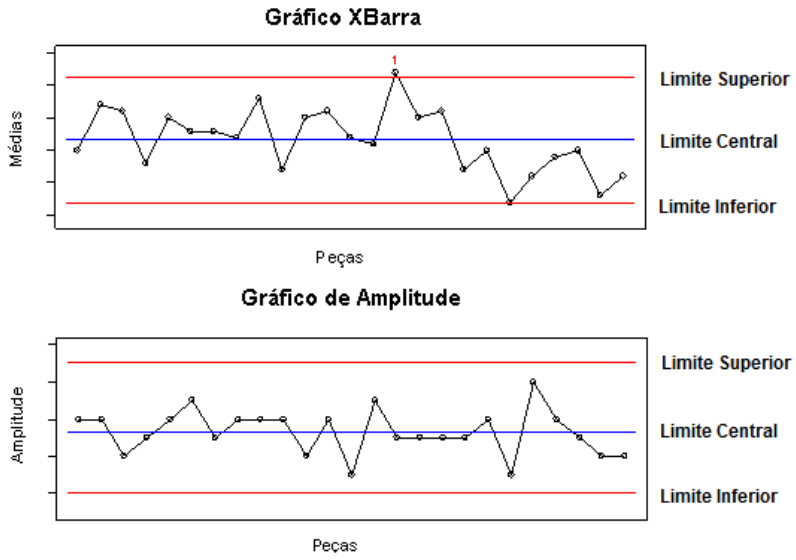
$$\begin{cases} D_3 = 1 - 3\dfrac{d_3}{d_2} \\ \quad e \\ D_4 = 1 + 3\dfrac{d_3}{d_2} \end{cases} \tag{2.10}$$

Usando essas simplificações em (2.9), os parâmetros do gráfico $R$ ficam:

$$\begin{cases} LSC = \overline{R}D_4 \\ LC = \overline{R} \\ LIC = \overline{R}D_3 \end{cases} \tag{2.11}$$

Na figura 4 apresentada a seguir se tem exemplos de gráficos de controle para média e amplitude. No gráfico de controle para a média pode-se perceber um ponto encontra-se fora dos limites de controle, indicando a possibilidade de que o processo não esteja sob controle estatístico. A probabilidade de um ponto ficar fora destes limites é de apenas 0,0027, o que sugere que pode ter ocorrido alguma causa especial que afetou a estabilidade do processo. O recomendado é que se fique alerta. Muitas vezes é aconselhável diminuir o intervalo entre amostras consecutivas. Entretanto, observe que neste gráfico não se consegue visualizar periodicidade, nem tendência e, as sequências maiores apresentam apenas quatro pontos. Já no gráfico de controle para a amplitude não é encontrado nenhum indicativos de que o processo esteja fora de controle estatístico.

Figura 4 - Exemplo de Gráfico de Controle para Média e Amplitude




Fonte: Portal Action

**Exemplo 1** – Considere as observações obtidas na avaliação de um processo produtivo apresentadas na tabela 1. São 19 amostras de tamanho quatro. Nesta tabela também são apresentadas a média e amplitude de cada uma das 19 amostras.

Para construir um gráfico para monitoramento da média é necessário encontrar, a partir das médias de cada amostra, a média geral (Eq. 2.1) e a amplitude média (Eq. 2.3), que fornecem os resultados $\overline{\overline{X}} = 1{,}1688$ e $\overline{R} = 0{,}2927$.

Tabela 1 - Observações obtidas na análise de um processo produtivo

| Número da amostra | Unidade de amostragem | | | | Média $(\overline{X})$ | Amplitude $(R)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | | |
| 1 | 1,288889 | 1,4 | 0,888888 | 1,288889 | 1,21666645 | 0,511112 |
| 2 | 1,02222 | 0,888888 | 1,044444 | 1,02222 | 0,994443 | 0,155556 |
| 3 | 1,644444 | 1,533334 | 1,511112 | 1,222222 | 1,477778 | 0,422222 |
| 4 | 1,066666 | 1,355556 | 1,022222 | 1,044444 | 1,122222 | 0,333334 |
| 5 | 1,27907 | 1,023256 | 1,069767 | 1,162791 | 1,1337209 | 0,255814 |
| 6 | 1,023256 | 0,860465 | 0,837209 | 0,813954 | 0,883721 | 0,209302 |
| 7 | 0,767442 | 1,093023 | 0,790698 | 0,767442 | 0,8546511 | 0,325582 |
| 8 | 1,255814 | 1,255814 | 1,186047 | 1,232558 | 1,2325582 | 0,069767 |
| 9 | 0,813954 | 0,837209 | 0,767442 | 0,790698 | 0,80232555 | 0,069767 |
| 10 | 0,906977 | 0,837209 | 0,72093 | 0,697674 | 0,7906977 | 0,209302 |
| 11 | 0,790697 | 1,093023 | 0,883721 | 0,953488 | 0,93023235 | 0,302326 |
| 12 | 0,790698 | 0,790698 | 0,767442 | 0,837209 | 0,79651155 | 0,069768 |
| 13 | 1,604651 | 1,372093 | 1,395349 | 1,488372 | 1,4651161 | 0,232558 |
| 14 | 0,930232 | 1,27907 | 0,976744 | 1,162791 | 1,08720915 | 0,348837 |
| 15 | 1,255814 | 1,906977 | 1,44186 | 1,558139 | 1,54069759 | 0,651163 |
| 16 | 1,255814 | 1,372093 | 1,511628 | 1,232558 | 1,34302325 | 0,27907 |
| 17 | 2,162791 | 2,232558 | 2,302326 | 1,697675 | 2,09883724 | 0,604651 |
| 18 | 1,511628 | 1,44186 | 1,488372 | 1,302325 | 1,4360464 | 0,209302 |
| 19 | 1,16279 | 0,976744 | 1,000000 | 0,860465 | 0,99999995 | 0,302325 |

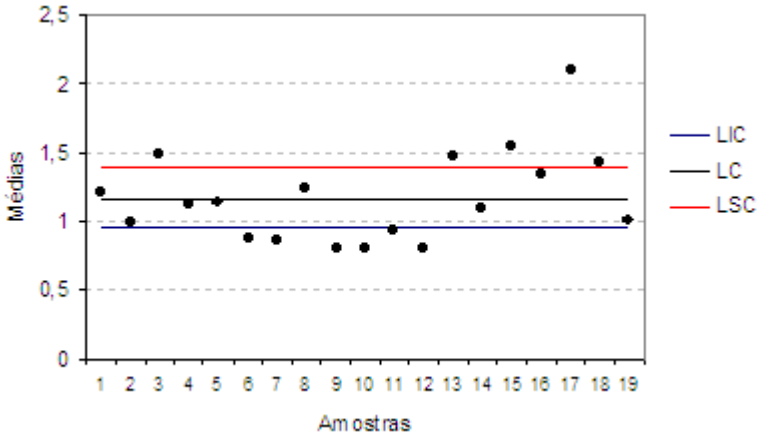
Fonte: Levantamento de dados.

Considerando que $d_2 = 2{,}059$ (Anexo 1), pela Eq. (2.6), $A_2 = 0{,}729$. Com esses valores e usando a Eq. (2.7) para os limites de controle superior e inferior e linha central, tem-se que:

$$\begin{cases} LIC = 1{,}1688 - 0{,}729(0{,}2927) = 0{,}9554 \\ LC = 1{,}1688 \\ LSC = 1{,}1688 - 0{,}729(0{,}2927) = 1{,}3822 \end{cases}$$

Com estes limites de controle e com os respectivos valores médios de cada amostra, conforme tabela 1, tem-se o gráfico de controle da figura 5.

Figura 5 - Gráfico de Controle ( $\overline{X}$ )




Fonte: Análise de dados

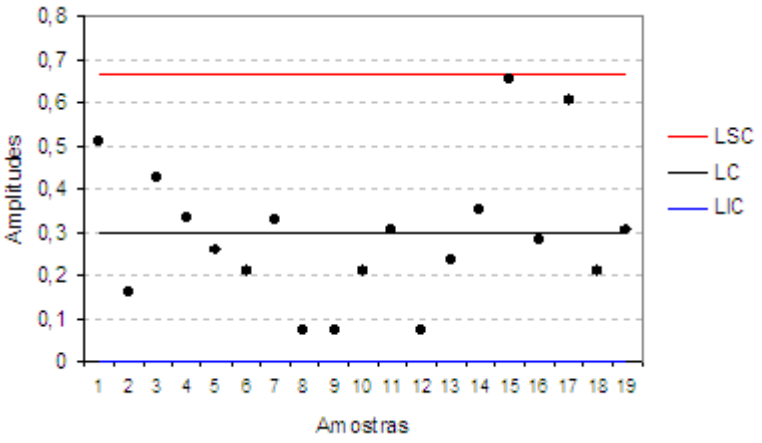
Existem vários aspectos em um gráfico de controle convencional que podem indicar a possibilidade de existência de algum causa especial no processo. O critério mais fácil de observar é a ocorrência de um ponto fora dos limites de controle. Existem vários indicativos de que o processo esteja fora de controle, na figura 5, 11 dos 19 pontos extrapolam os limites de controle. Apesar da probabilidade de um ponto ficar fora destes limites ser de 0,0027, o que segundo a regra 1 de interpretação, ARL (Averege Run Length), $ARL = 1/0{,}0027$, indica que a cada 370 pontos existe a probabilidade de apenas 1 estar fora dos limites de controle, nesse caso eles ocorreram com muita frequência, o que sugere a presença de alguma causa especial afetando a estabilidade do processo. Observa-se também que parece existir uma mudança de padrão nos valores das médias a partir da amostra 15.

Para construir o gráfico para monitoramento da amplitude, é possível calcular os limites de controle de $R$, conforme Eq. (2.11). Considere que $D_3 = 0{,}000$ e $D_4 = 2{,}282$ (Anexo 1) .Tem-se então que:

$$\begin{cases} LSC = 2{,}282.(0{,}2927) = 0{,}6679 \\ LC = 0{,}2927 \\ LIC = 0{,}0.(0{,}2927) = 0 \end{cases}$$

Com estes limites de controle e com as respectivas amplitudes de cada amostra, conforme tabela 1, tem-se o gráfico de controle da figura 6.

Figura 6 - Gráfico de controle $R$




Fonte: Análise de dados.

Nesse gráfico da figura 6, não existem pontos fora dos limites de controle, assim como também corridas com mais de 4 pontos. Entretanto, a variabilidade aparece, pois dois pontos apresentam alta variabilidade (amostras 15 e 17), sugerindo a presença de alguma causa especial se a interpretação do gráfico for feita em conjunto com o gráfico da figura 5.

## 2.4 Conceitos de *Fuzzy*

A teoria de conjuntos *fuzzy* (nebulosos) é usada para representar modelos de entendimento incerto, que possuem papel essencial na notável habilidade humana de tomar decisões racionais em ambientes de incertezas e imprecisões (ZADEH, 1988).

Uma boa motivação, talvez a principal, da teoria de conjuntos *fuzzy* é a possibilidade de trabalhar com uma estrutura formal quantitativa, sendo possível capturar as imprecisões do conhecimento humano, conhecimento na linguagem natural. Essa teoria visa ser a ponte que une modelos matemáticos tradicionais, precisos, de sistemas físicos, e a representação mental, geralmente imprecisa, desses sistemas (DUBOIS, 1991).

A mente humana opera com conceitos subjetivos, tais como: alto, baixo, velho e novo, que são incorporados em classes na teoria *fuzzy*, onde a pertinência ou não de um elemento a uma classe ocorre de forma gradual e não abrupta (ZADEH, 1990). Com o advento dessa teoria, surgem ferramentas robustas para a aplicação do conhecimento humano e suas experiências, em muitos sistemas industriais, de tráfego e ciência médica, entre outras (SUZUKI, 1993).

A seguir, serão abordados alguns tópicos da teoria *fuzzy*, que darão suporte ao propósito desse trabalho, ou seja, analisar um processo produtivo através de Gráficos de Controle *fuzzy*.

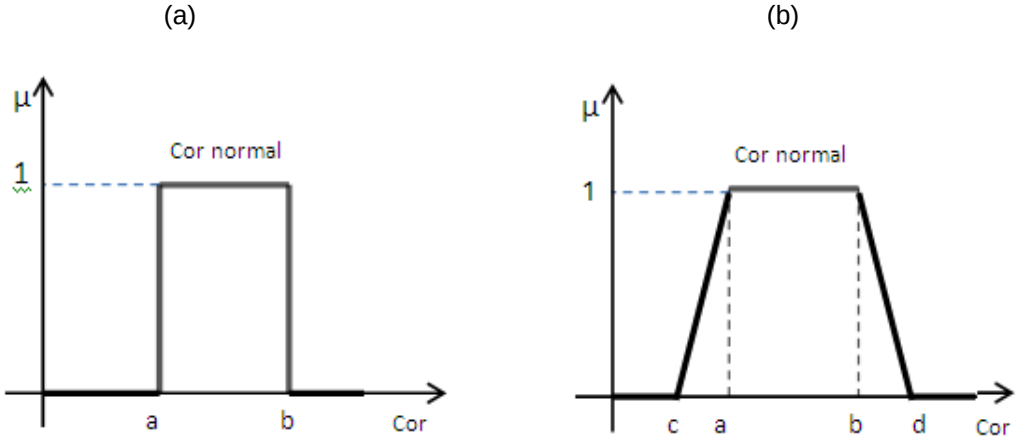
### 2.4.1 Conceitos Básicos de Conjuntos *Fuzzy*

Na teoria dos conjuntos clássicos (*crisp*), um objeto pertence ou não pertence a um conjunto, apresentando apenas dois graus de pertinência em relação ao conjunto $[0\ ou\ 1]$ (GARCIA, 2012). Já os conjuntos *fuzzy* possuem diferentes graus de pertinência de um dado objeto em relação ao conjunto, os quais variam suavemente no intervalo do discurso dado por $[0,1]$. Seja, por exemplo, um conjunto de observações obtidas por especialistas na classificação da cor de um alimento. O conjunto de observações pode tanto ser representado por conjuntos clássicos (*crisp*) quanto por conjuntos *fuzzy*. A função de pertinência $\mu_N(x)$ do conjunto clássico $N$ é dada por:

$$\mu_N(x) = \begin{cases} 1 & , se\ x \in N \\ 0 & , se\ x \notin N \end{cases} \tag{2.12}$$

Nesses conjuntos, o elemento $x$ é membro do conjunto $N$ quando $\mu(x) = 1$ ou não é membro deste conjunto quando $\mu(x) = 0$. Uma função de pertinência de um conjunto clássico associado, por exemplo, à característica de qualidade cor de um alimento é mostrado na figura 7 (a).

Figura 7 - Conjunto representando valor (a) *crisp* e (b) *fuzzy* referente a cor de um produto




Fonte: Dados fictícios

Nos conjuntos *fuzzy*, a transição abrupta é substituída por uma função de mudança suave. O conjunto *fuzzy* de observações da cor, representado na figura 7 (b), faz uso de uma função de pertinência trapezoidal, representada por:

$$\mu_N(x) = \begin{cases} 0 & , se\ x < c \\ \dfrac{x-c}{a-c} & , se\ c \le x < a \\ 1 & , se\ a \le x \le b \\ \dfrac{x-d}{b-d} & , se\ b < x \le d \\ 0 & , se\ x > d \end{cases} \tag{2.13}$$

Nessa função de pertinência, ou mesmo no gráfico 7(b), pode-se perceber que todo elemento que estiver fora do intervalo $[c, d]$ terá grau de pertinência 0, ou seja, está distante o suficiente de forma a estar totalmente fora do conjunto. Da mesma forma, é possível perceber que um determinado elemento $x$, entre $[c, a]$, aumenta proporcionalmente seu grau de pertinência na medida em que $x$ se aproxima de $a$. Isso acontece da forma similar no intervalo $[b, d]$, onde o elemento $x$ diminui seu grau de pertinência na medida em que aparecer mais próximo de $d$. E por fim, todos os elementos entre $[a, b]$ pertencem totalmente ao conjunto.

A função de pertinência triangular pode ser considerada como um caso particular da função trapezoidal em que $a = b$. Esse caso será melhor estudado posteriormente.

As funções de pertinência *fuzzy* podem ser representadas por variáveis linguísticas que podem ser expressas por palavras ou sentenças usadas em um idioma (TELLES, 2005). Uma variável linguística é definida por três elementos principais: $(x, T(x), I)$, onde $x$ é o nome da variável, $T(x)$ é um conjunto de valores linguísticos para os valores de $x$ em um intervalo $I$ associado ao universo de discurso. No caso da variável linguística cor de um alimento, tem-se:

T(cor) = {*não característico, pouco característico, medianamente característico, muito característico, perfeitamente característico*}

onde cada termo em $T(x)$ é caracterizado por um subconjunto *fuzzy* em um universo de discurso em um intervalo $I$.

**Exemplo 2** - Seja $N$ o conjunto universo de notas atribuídas pelos avaliadores durante o processo de análise sensorial do iogurte, para a variável cor, e os subconjuntos *fuzzy*, contidos em $N$, classificados como: não característico, pouco característico, medianamente característico, muito característico, perfeitamente característico, envolvendo todas as possibilidades de subconjuntos *fuzzy* de $N$, que pode ser denotado por $\tilde{X}(N)$. Têm-se os seguintes resultados apresentados na tabela 2.

$$N = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$$

Tabela 2 - Exemplo de conjuntos *fuzzy* para a variável cor

| | Grau de pertinência dos termos linguísticos | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Notas | Não Característico | Pouco Característico | Medianamente Característico | Muito Característico | Perfeitamente Característico |
| 1 | 1 | 0,5 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0,5 | 1 | 0,5 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0,5 | 1 | 0,5 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0,5 | 1 | 0,5 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0,5 | 1 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Fonte: Dados fictícios

Matematicamente, o conjunto *fuzzy* $\tilde{N}$ definido em um universo de discurso "cor de um alimento" pode ser representado por:

$$\tilde{N} = \left\{(x, \mu_{\tilde{N}}(x)) / x \in \tilde{N}\right\} \tag{2.14}$$

**Exemplo 3** - O conjunto *fuzzy* $\tilde{N}$, pouco característico, da tabela 2, pode ser descrito como:

$$\tilde{N} = \{(1; 0{,}5), (3; 1), (5; 0{,}5)\}$$

Quando o universo de discurso é contínuo, o conjunto $\tilde{N}$ pode ser representado pela equação (2.15):

$$\tilde{N} = \int_I \mu_{\tilde{N}}(x) / xdx \tag{2.15}$$

onde $\int_I \mu_{\tilde{N}}(x)/xdx$ significa coleção de todos os pontos. Entretanto, se o universo de discurso for discreto, o conjunto $\tilde{N}$ pode ser representado pela equação (2.16).

$$\tilde{N} = \sum_{i=1}^{n} \mu_{\tilde{N}}(x_i) / x_i \tag{2.16}$$

Estes conjuntos apresentam algumas propriedades importantes, sendo as principais, de acordo com Melo (2009), apresentadas a seguir.

**a) Suporte**

O suporte de um conjunto *fuzzy* $\tilde{N}$ é um conjunto *crisp* que contém todos os elementos $x \in I$, desde que $\mu_{\tilde{N}}(x) > 0$, ou seja:

$$Sup(\tilde{N}) = \left\{x \in I / \mu_{\tilde{N}}(x) > 0\right\} \tag{2.17}$$

**Exemplo 4** - O suporte do conjunto *fuzzy* $\tilde{N}$, pouco característico, da tabela 2 é o conjunto *crisp* seguinte:

$$S(\tilde{N}) = \{(1, 3, 5\}$$

**b) Supremo**

A altura de um conjunto *fuzzy* $\tilde{N}$ é o valor máximo da pertinência de $x$ em *I,* definida por:

$$h(\tilde{N}) = \underbrace{Sup}_{x \in I} \quad \mu_{\tilde{N}}(x) \tag{2.18}$$

onde $Sup$ denota a operação matemática *supremum*.

O contradomínio de uma função de pertinência é um subconjunto de números reais não negativos, cujo supremo é finito.

**c) Normalização**

Considera-se que uma função de pertinência seja limitada ao contradomínio $[0,1]$. Isso é feito por conveniência, ou seja, assume-se como verdade que um conjunto *fuzzy* é normal ou normalizado. Logo, um conjunto *fuzzy* $\tilde{N}$ é dito normal quando $\sup_{x \in I} \mu_{\tilde{N}}(x) = 1$. Caso $\sup_{x \in I} \mu_{\tilde{N}}(x) < 1$, ele é chamado subnormal. Para normalizar um conjunto *fuzzy* $\tilde{N}$ não normal e não vazio, é preciso:

$$\mu'_{\tilde{N}}(x) = \frac{\mu_{\tilde{N}}(x)}{\sup_{x \in I} \mu_{\tilde{N}}(x)} \tag{2.19}$$

**d) Core**

O core de um conjunto *fuzzy* $\tilde{N}$ consiste de todos os elementos $x$ cujo grau de pertinência é igual a *1*.

$$Core(\tilde{N}) = \{x \in I \,/\, \mu_{\tilde{N}}(x) = 1\} \tag{2.20}$$

**e) Conjuntos** $\alpha$ - corte

Seja um conjunto *fuzzy* $\tilde{N}$ definido em $I$, a partir do grau de pertinência $\alpha \in [0,1]$, o conjunto de $\alpha$ - corte é o conjunto $\tilde{N}_\alpha$, contendo todos os elementos de

$I$, que possuem graus de pertinência em $\tilde{N}$ maiores ou iguais do que o valor especificado em $\alpha$. Então

$$\tilde{N}_{\alpha} = \{x \in I / \mu_{\tilde{N}}(x) \geq \alpha\} \text{ para } \alpha \in (0,1] \tag{2.21}$$

O conjunto de $\alpha$-corte robusto, $\tilde{N}'_{\alpha}$, inclui apenas os elementos de graus de pertinência maiores que $\alpha$. Conforme representação abaixo:

$$\tilde{N}'_{\alpha} = \{x \in I / \mu_{\tilde{N}}(x) > \alpha\} \tag{2.22}$$

Neste caso, se $\alpha = 0$ o suporte de $\tilde{N}$ corresponde, exatamente, ao conjunto de $\alpha$-corte robusto $\tilde{N}$.

**Exemplo 5** - Conforme tabela 2, os conjuntos de $\alpha$-corte possíveis, para o conjunto *fuzzy* $\tilde{N}$, pouco característico, são:

$$\tilde{N}_{0,5} = \{1, 3, 5\}$$

$$\tilde{N}_{1,0} = \{3\}$$

Neste caso, o conjunto de $\alpha$-corte robusto para $\alpha = 0{,}5$ é $\tilde{N}'_{\alpha} = \{3\}$.

### f) Convexidade

A convexidade de conjuntos *fuzzy* é uma generalização do conceito de convexidade de conjuntos *crisp*, sendo definida em $R^n$, para todo $n \in N$. Um conjunto *fuzzy* será dito convexo se todos os seus conjuntos de $\alpha$-corte forem convexos, isso para todo $\alpha \in (0, 1]$.

Simplificadamente em $R$, e para todo $x_1, x_2 \in I$ e $\lambda \in [0, 1]$, onde min caracteriza o operador mínimo (menor valor em um conjunto de valores), um conjunto *fuzzy* será convexo se:

$$\mu_{\tilde{N}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_{\tilde{N}}(x_1), \mu_{\tilde{N}}(x_2)) \tag{2.23}$$

**g) Cardinalidade**

A cardinalidade escalar, ou simplesmente cardinalidade, $\left|\tilde{N}\right|$, de um conjunto *fuzzy* $\tilde{N}$, definido em $I$, é o somatório dos graus de pertinência de todos os elementos de $I$ em $\tilde{N}$. Formalmente expresso por:

$$\left|\tilde{N}\right| = \sum_{x \in I} \mu_{\tilde{N}}(x) \tag{2.24}$$

Para um conjunto $I$, em um universo infinito, a cardinalidade, que nem sempre existe (é necessário que $\mu_{\tilde{N}}(x)$ seja integrável), é dada por:

$$\left|\tilde{N}\right| = \int_{x} \mu_{\tilde{N}}(x)dx \tag{2.25}$$

A cardinalidade relativa, $\left\|\tilde{N}\right\|$, de um conjunto *fuzzy* $\tilde{N}$ depende da cardinalidade do conjunto universo considerado. Assim, é preciso escolher o mesmo conjunto universo $I$, caso se queria comparar conjuntos *fuzzy* através de sua cardinalidade relativa. Pode ser interpretada como a fração dos elementos de $I$, presentes em $\tilde{N}$, medidos por seus graus de pertinência:

$$\left\|\tilde{N}\right\| = \frac{\left|\tilde{N}\right|}{\left|I\right|} \tag{2.26}$$

**Exemplo 6** - A cardinalidade escalar do conjunto *fuzzy* $\tilde{N}$, muito característico, da tabela 2 é:

$$\left|\tilde{N}\right| = 0 + 0 + 0{,}5 + 1 + 0{,}5 + 0 = 2$$

A cardinalidade relativa do conjunto *fuzzy* $\tilde{N}$, muito característico, é:

$$\left\|\tilde{N}\right\| = 2/6 = 0{,}333$$

### *h) Fuzzificação*

A *fuzzificação* (“*fuzzification*”) acontece, quando o conjunto *fuzzy* $\tilde{N}$ é obtido pelo “alargamento” *fuzzy* de um conjunto *crisp*, isto é, um conjunto *crisp* é convertido em um conjunto *fuzzy* apropriado, para expressar medidas de incertezas.

**Exemplo 7** - Dado o conjunto *crisp* $X = \{x \mid 6 < x < 8\}$, então pelo processo de *fuzzificação*, ter-se-ia o seguinte conjunto *fuzzy* $\tilde{N} = \{x | 6 \lessapprox x \lessapprox 8\}$, onde o símbolo $\approx$ é denominado um *fuzzificador*, e significa aproximadamente.

### i) Defuzzificação

A defuzzificação é a conversão de um conjunto *fuzzy* em um valor *crisp*, ou vetor de valores (OLIVEIRA, 1995, SONG, 1994, FILEV, 1993; MABUCHI, 1993, YAGER *et al*., 1993). A determinação do centro, centróide, primeiro máximo ou ainda média dos máximos, são alguns dos critérios utilizados para o processo de defuzzificação.

**Exemplo 8** - O conjunto *fuzzy* $\tilde{N}$, pouco característico, da tabela 2, pode ser descrito como:

$$\tilde{N} = \{(1; 0{,}5), (3; 1), (5; 0{,}5)\}$$

No processo de defuzzificação, utilizando o critério de determinação do centróide, a saída desse conjunto seria representado por 3, uma vez que seu grau de pertinência é 1, justificando sua centralidade em números *fuzzy* triangulares.

## 2.5 Operações com conjuntos fuzzy

As operações *fuzzy* – complemento, interseção e união – fazem parte de uma estrutura consistente da teoria dos conjuntos *fuzzy*, para a extensão de conjuntos *crisp* (ZADEH, 1965). Nessas operações padrões, são utilizados os

operadores min (mínimo) e max (máximo) para a interseção e a união de conjuntos *fuzzy*, respectivamente. Existem outros operadores sugeridos por outros autores que variam em generalidade e adaptabilidade, com certas propriedades que dependem do contexto empregado.

**a) Complemento *fuzzy***

A função de pertinência padrão do complemento de um conjunto *fuzzy* $\tilde{N}$, $\mu_{c\tilde{N}}(x)$, para todo $x \in I$, é definida por:

$$\mu_{c\tilde{N}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{N}}(x) \tag{2.27}$$

**Exemplo 9** - O complemento do conjunto *fuzzy* $\tilde{N}$, muito característico, da tabela 2, é $c\tilde{N}$ não muito característico, que é representado por:

$$\mu_{c\tilde{N}}(x) = \{(1;1), (3;1), (5;0{,}5), (9;0{,}5), (10,1)\}$$

O complemento *fuzzy* de $\tilde{N}$, $\mu_{c\tilde{N}}(x)$, pode ser interpretado não somente como o grau de pertinência pelo qual $x$ pertence à $c\tilde{N}$, mas também como sendo o grau de não pertinência do elemento $x$ ao conjunto *fuzzy* $\tilde{N}$. Dado um conjunto *fuzzy* $\tilde{N}$, podemos obter $c\tilde{N}$ aplicando-se a função $c$ aos valores $\mu_{\tilde{N}}(x)$ para todo $x$:

$$\mu_{c\tilde{N}}(x) = c(\mu_{\tilde{N}}(x)) \tag{2.28}$$

Para produzir complementos *fuzzy* convenientes, a função $c$ deve satisfazer, no mínimo dois axiomas: condições de contorno e monotonicidade, conforme podem ser encontrados em Klir (1995).

**b) Interseção *fuzzy***

A interseção *fuzzy* padrão dos conjuntos *fuzzy* $\tilde{N}$ e $\tilde{M}$ é o conjunto *fuzzy* $\tilde{N} \cap \tilde{M}$, para todo $x \in I$, de modo que:

$$\mu_{\tilde{N}\cap\tilde{M}}(x) = \min[\mu_{\tilde{N}}(x), \mu_{\tilde{M}}(x)] \tag{2.29}$$

**Exemplo 10** - A interseção dos conjuntos *fuzzy* $\tilde{N}$, muito característico, e de $\tilde{M}$, medianamente característico, conforme Tabela 2, é dada por:

$$\mu_{\tilde{N}\cap\tilde{M}}(x) = \{(5;\ 0{,}5),\ (7;\ 0{,}5)\}$$

De forma genérica, a interseção de dois números *fuzzy* $\tilde{N}$ e $\tilde{M}$, pode ser especificada pela operação binária no intervalo unitário, ou seja, pela função da forma:

$$i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \tag{2.30}$$

O grau de pertinência de cada elemento em $\tilde{N} \cap \tilde{M}$ pode ser constituído pelo grau de pertinência de $x$ em $\tilde{N}$ e do grau de pertinência de seu correspondente em $\tilde{M}$, conforme função a seguir:

$$\mu_{\tilde{N}\cap\tilde{M}}(x) = i[\mu_{\tilde{N}}(x), \mu_{\tilde{M}}(x)] \tag{2.31}$$

A função $i$, para ser considerada como interseção *fuzzy*, deve satisfazer a quatro axiomas: condições de contorno, comutatividade, monotonicidade e associatividade. Em algumas aplicações são necessários alguns requisitos, como: $i$ ser uma função contínua e idempotência. Todos esses axiomas são descritos em Klir (1995).

**c) União**

A união *fuzzy* é dada de forma semelhante a interseção. O conjunto *fuzzy* $\tilde{N} \cup \tilde{M}$ é a união *fuzzy* padrão dos conjuntos $\tilde{N}$ e $\tilde{M}$ para todo $x \in I$ e é formalizada por:

$$\mu_{\tilde{N}\cup\tilde{M}}(x) = \max[\mu_{\tilde{N}}(x), \mu_{\tilde{M}}(x)] \tag{2.32}$$

**Exemplo 11** - A união dos conjuntos *fuzzy* $\tilde{N}$, muito característico, e de $\tilde{M}$, medianamente característico, conforme tabela 2, é dada por:

$$\mu_{\tilde{N}\cup\tilde{M}}(x) = \{(3;\,0{,}5),\,(5;\,1),\,(7;\,1),\,(9;\,0{,}5)\}$$

As mesmas considerações feitas para a interseção são válidas para a união.

## 2.6 Método de Transformação de Número Crisp em Número Fuzzy

Escalas qualitativas e quantitativas têm sido utilizadas em processos de mensuração. Entretanto, se algumas podem deixar a desejar pela sua falta de precisão, outras também podem deixar a desejar pelo seu rigor, distanciando-se da maneira de pensar dos humanos. Sob o enfoque da lógica *fuzzy*, ao trabalhar com escalas quantitativas, um resultado discreto não é tratado como exatamente igual ao valor obtido, mas como o entorno deste valor. Esta estruturação é mais semelhante à forma de pensar e tirar conclusões dos humanos, razão pela qual a utilização da lógica *fuzzy* parece ser extremamente pertinente em mensurações que dependam da percepção humana pela utilização dos cinco sentidos (avaliação sensorial). A seguir é apresentado um método para transformar valores *crisp* em valores *fuzzy* proposto em Cheng (2005).

Para estimar um valor *fuzzy* triangular, denotado como $(a, m, b)$, é necessário obter três informações. Inicialmente identifica-se o centro $(m)$ em torno do qual estão distribuídas as notas atribuídas pelos avaliadores à determinada característica. Cada nota será representada por $g_i$, sendo $i = 1, 2, 3, ..., t$, onde $t$ é o número de avaliadores. Encontrar esse centro se resume ao cálculo de uma média aritmética ponderada entre os $g_i$.

Para tal, inicialmente são calculadas as distâncias entre as notas dos juízes de acordo com a expressão:

$$d_{ij} = \left| g_i - g_j \right| \tag{2.33}$$

que são dispostas em uma matriz $D = \lfloor d_{ij} \rfloor_{tXt}$. Nesta matriz cada linha apresenta então as distâncias entre cada $g_i$ e as demais notas. Após determina-se a proximidade de $g_i$ ao centro das notas pela expressão:

$$\bar{d}_i = \sum_{j=1}^{t} \frac{d_{ij}}{(t-1)} \tag{2.34}$$

O menor valor de $\bar{d}_i$ indica o $g_i$ mais próximo do centro e, consequentemente, valor com maior importância na estimação da tendência central do número *fuzzy*.

Para medir o grau de importância de cada $g_i$ é feita uma comparação entre os $g_i$, com base nas suas distancias médias, ou seja:

$$p_{ij} = \frac{\bar{d}_j}{\bar{d}_i} \tag{2.35}$$

Os resultados são colocados em outra matriz, $P = \lfloor p_{ij} \rfloor_{tXt}$, onde $p_{ij}$ é a importância relativa de $g_i$ comparada ao $g_j$. A matriz $P$, obtida a partir da comparação das distancias, será perfeitamente consistente, pois $p_{ii} = 1$ e $p_{ij} = \frac{1}{p_{ji}}$.

Considerando $w_i$ como o grau de importância de $g_i$ e, portanto $0 \leq w_i \leq 1$, tem-se como consequência da consistência da matriz $P$:

$$p_{ij} = \frac{w_i}{w_j}, \forall\, i,\ j\,. \tag{2.36}$$

Se $w$ for um vetor coluna de $w_i$, $i = 1, 2, 3, ..., t$, conforme equação (2.36) segue que, $Pw = tw$, o que implica em $t$ ser um autovalor de $P$ e $w$ o autovetor correspondente. De acordo com Cheng (2005), no método descrito por Saaty (2001), o valor de $w$ é considerado como um peso, ou seja:

$$w_j = \frac{1}{\sum_{i=1}^{t} p_{ij}},\ j = 1, ..., t \tag{2.37}$$

sendo $\sum_{i=1}^{t} w_i = 1$. O grau de importância $w_i$ representa o peso associado ao $g_i$ e servirá para estimar o centro $m$ do número *fuzzy*, definido como:

$$m = \sum_{i=1}^{t} w_i g_i \tag{2.38}$$

Para estimar a extensão do número *fuzzy*, isto é, determinar seus limites inferior e superior é preciso medir a variabilidade das possibilidades. Cheng (2005) considera a definição da variância de possibilidades do número *fuzzy* $F$ apresentada em Carlsson e Fullér (2001):

$$Var\ (F) = \int_0^1 \alpha \left( \frac{e^l(\alpha) + e^\mu(\alpha)}{2} - e^l(\alpha) \right)^2 d\alpha + \int_0^1 \alpha \left( \frac{e^l(\alpha) + e^\mu(\alpha)}{2} - e^\mu(\alpha) \right)^2 d\alpha$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \alpha \left[ e^\mu(\alpha) - e^l(\alpha) \right]^2 d\alpha \qquad (2.39)$$

onde $e^l(\alpha)$ e $e^\mu(\alpha)$ são o limite inferior e superior, respectivamente do $\alpha$- nível determinado de $F$. De acordo com o autor, Fullér e Majlender (2003) generalizaram a definição acima ao introduzir uma função peso, $\omega(\alpha)$, para medir a importância do $\alpha$- nível do conjunto $F$. Com a definição do peso $\omega$ a variância de possibilidades do conjunto $F$, é expressa por:

$$Var_\omega(F) = \int_0^1 \left[ \frac{e^\mu(\alpha) - e^l(\alpha)}{2} \right]^2 \omega(\alpha) d\alpha\ , \qquad (2.40)$$

onde a função peso é não negativa, crescente e satisfaz: $\int_0^1 \omega(\alpha) d\alpha = 1$.

A definição do peso $\omega$ na determinação da variância de possibilidades proporciona um meio de utilizar os pesos determinados pela Eq. (2.37) para estimar a extensão do número *fuzzy*. No entanto, para permitir a utilização das pontuações encontradas nessa estimativa, o estudo de Cheng (2005) redefiniu o peso $\omega$ da variância de possibilidades de um número *fuzzy* triangular baseado nas definições de Carlsson e Fullér (2001) e Fullér e Majlender (2003), isto é,

$$Var_\omega(F) = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^1 \left[ m - e^l(\alpha) \right]^2 \omega(\alpha) d\alpha + \int_0^1 \left[ m - e^\mu(\alpha) \right]^2 \omega(\alpha) d\alpha \right\} \qquad (2.41)$$

Na Eq. (2.41), o centro do número *fuzzy* $(m)$, substitui a média aritmética do conjunto de nível $\alpha$ na definição de Carlsson e Fullér (2001). Conforme salientado em Cheng (2005), quando $F$ for simétrico, o peso $\omega$ na variância das possibilidades definida na Eq. (2.41) será igual a variância de possibilidades definida por Fullér e Majlender (2003).

Sendo $a$ e $b$ os valores extremos, esquerdo e direito, respectivamente, e $\omega(\alpha) = 2\alpha$, a Eq.(2.41) pode ser reescrita como:

$$s^2 = Var_\omega(F) = \frac{(m-a)^2 + (b-m)^2}{12} \tag{2.42}$$

Seja a razão da dispersão entre $a$ e $b$ expressa por $\rho$, conforme equação:

$$\rho = \frac{m-a}{b-m} \tag{2.43}$$

Das Eqs. (2.42) e (2.43) podem ser obtidas as expressões:

$$a = m - \sqrt{\frac{12\rho^2 s^2}{1+\rho^2}} \tag{2.44}$$

e

$$b = m + \sqrt{\frac{12 s^2}{1+\rho^2}} \tag{2.45}$$

No entanto, para encontrar $a$ e $b$, é preciso obter os valores de $s^2$ e $\rho$. De acordo com o autor Cheng (2005), pode-se aproximar $s^2$ com base na Eq. (2.41) conforme expressão seguinte:

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{2}\left\{ \frac{\sum_{i \in \arg\{g_i < m\}} w_i (m-g_i)^2}{\sum_{i \in \arg\{g_i < m\}} w_i} + \frac{\sum_{i \in \arg\{g_i > m\}} w_i (m-g_i)^2}{\sum_{i \in \arg\{g_i > m\}} w_i} \right\} \tag{2.46}$$

Com relação à aproximação $\rho$, calcula-se $g^l$ e $g^r$ como a média ponderada dos valores menores que $m$ e a média ponderada dos valores maiores que $m$, respectivamente, ou seja:

$$g^l = \frac{\sum_{i \in \arg\{g_i < m\}} w_i g_i}{\sum_{i \in \arg\{g_i < m\}} w_i}, \tag{2.47}$$

e

$$g^r = \frac{\sum_{i \in \arg\{g_i > m\}} w_i g_i}{\sum_{i \in \arg\{g_i > m\}} w_i}. \tag{2.48}$$

Assumindo que $g^l$ e $g^r$ estão no mesmo conjunto de membros no nível de $F$, a razão de distribuição dos dados da esquerda para a direita pode ser aproximada por:

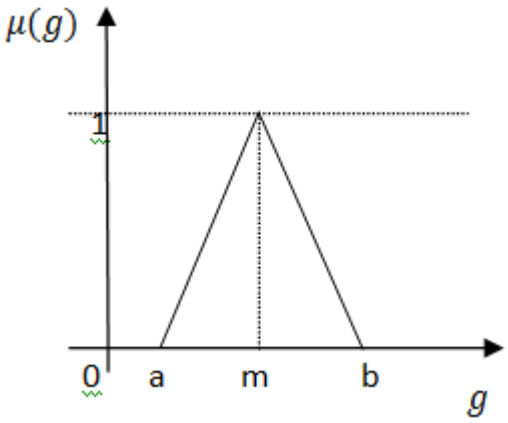
$$\hat{\rho} = \frac{m - g^l}{g^r - m} \tag{2.49}$$

Com os parâmetros de $m$, $a$ e $b$, o número *fuzzy* triangular é mostrado na figura 8 e definido como:

$$\mu(g;a,m,b) = \begin{cases} 1 - \dfrac{m-g}{m-a}, & a \le g \le m \\ 1 - \dfrac{g-m}{b-m}, & m < g \le b \\ 0, & outros\ valores \end{cases} \tag{2.50}$$

onde $0 \le g \le G$. O número *fuzzy* triangular com a forma da Eq. (2.50) é então denotado como $(a, m, b)$.

Figura 8 - Função do conjunto de membros do número *fuzzy* triangular




Fonte: Dados fictícios

**Exemplo 12** - Pode-se pensar em uma função de pertinência *fuzzy* para dizer o quão próximo uma pessoa está dos 30 anos. Abaixo uma possibilidade de função de pertinência triangular.

$$\mu(g) = \begin{cases} 1 - \dfrac{30-g}{20}, & 20 \le g \le 30 \\ 1 - \dfrac{g-30}{20} & 30 < g \le 40 \\ 0, & outros\ valores \end{cases}$$

**Exemplo 13** - Considere os cinco valores *crisps*: $g_1 = 0{,}55556$; $g_2 = 1{,}11111$; $g_3 = 1{,}22222$, $g_4 = 1{,}66667$ e $g_5 = 1{,}88889$. Para transformá-los em um valor *fuzzy*, inicialmente é determinada a matriz D, conforme Eq. (2.33), que representa a distância relativa entre as notas atribuídas. Portanto:

$$D = \begin{bmatrix} 0{,}00000 & 0{,}55555 & 0{,}66666 & 1{,}11111 & 1{,}33333 \\ 0{,}55555 & 0{,}00000 & 0{,}11111 & 0{,}55556 & 0{,}77778 \\ 0{,}666667 & 0{,}11111 & 0{,}00000 & 0{,}44445 & 0{,}66667 \\ 1{,}11111 & 0{,}55556 & 0{,}44445 & 0{,}00000 & 0{,}22222 \\ 1{,}33333 & 0{,}77778 & 0{,}66667 & 0{,}22222 & 0{,}00000 \end{bmatrix}$$

Em seguida é calculada a distância média de cada nota $g_i$ em relação às demais, onde $\bar{d}_i$ representa a distância média do *i-ésimo* juiz (Eq. 2.34), obtendo-se os seguintes resultados: $\bar{d}_1 = 0{,}916663$; $\bar{d}_2 = 0{,}500000$; $\bar{d}_3 = 0{,}472223$; $\bar{d}_4 = 0{,}583335$ e $.\bar{d}_5 = 0{,}750000$.

Após é determinado o grau de importância de $g_i$ comparado ao $g_j$, $p_{ij}$, organizados na matriz $P$ (Eq. 2.35).

$$P = \begin{bmatrix} 1{,}00000 & 0{,}54546 & 0{,}51515 & 0{,}63637 & 0{,}81819 \\ 1{,}83333 & 1{,}00000 & 0{,}94445 & 1{,}16667 & 1{,}50000 \\ 1{,}94117 & 1{,}05882 & 1{,}00000 & 1{,}23530 & 1{,}58823 \\ 1{,}57142 & 0{,}85714 & 0{,}80952 & 1{,}00000 & 1{,}28571 \\ 1{,}22222 & 0{,}66667 & 0{,}62963 & 0{,}77778 & 1{,}00000 \end{bmatrix}$$

A partir destas informações, são determinados pela Eq. (2.37) os pesos $w_i$ associados a cada nota atribuída por determinado avaliador $i$, sendo encontrados os seguintes resultados: $w_1 = 0{,}132133$; $w_2 = 0{,}242243$; $w_3 = 0{,}256492$; $w_4 = 0{,}207636$

e $w_5 = 0{,}161495$. A Eq. (2.38) permite encontrar o valor central $m$ do número *fuzzy*: $m = 1{,}307165$.

Para estimar a variância das possibilidades é usada a Eq. (2.46), sendo encontrado $\hat{S}^2 = 0{,}178382$. Conforme definições anteriores, para encontrar $\rho$, razão da distribuição dos dados em torno de $m$, é preciso encontrar os valores de $g^l$ e $g^r$. De acordo com as Eqs. (2.47) e (2.48) estes valores são, respectivamente, $g^l = 1{,}039926$ e $g^r = 1{,}763891$. Dessa forma, usando a Eq. (2.49), tem-se que a razão da dispersão é $\hat{\rho} = 0{,}585116$. Finalizando, os extremos do número *fuzzy* são calculados usando as Eqs. (2.44) e (2.45) respectivamente para $a$ e $b$, sendo encontrados os valores $a = 0{,}568286$ e $b = 2{,}569954$. O número *fuzzy* determinado é $(0{,}568286; 1{,}307165; 2{,}569954)$.

## 2.7 Gráfico de Controle Fuzzy

Os gráficos de controle *fuzzy* são usados para caracterização e monitoramento de processos em que as observações são representadas por números *fuzzy*. Eles se assemelham muito aos gráficos de controle convencionais, que usualmente são construídos da seguinte forma: um para o monitoramento da tendência central e outro para o monitoramento da variabilidade, o que também é feito com os gráficos de controle *fuzzy*. Entretanto, nos gráficos de controle convencionais, são definidas três linhas: $LC$, linha central; $LI$, limite inferior e $LS$, limite superior. Já nos de controle *fuzzy* são definidas cinco linhas, pois para cada extremo do número *fuzzy* são usados dois limites, um superior e outro inferior. A seguir será feita uma breve descrição de um processo usado para a construção de um tipo de gráficos de controle *fuzzy*, além de algumas questões teóricas necessárias para a sua elaboração.

### 2.7.1 Gráfico de controle *fuzzy* para média

O método descrito na sequência foi adaptado de Shu e Wu (2011).

Sejam $\tilde{x}_{11}, ..., \tilde{x}_{kn}$ observações *fuzzy* (números *fuzzy*) para $k$ amostras com $n$ observações, sendo $i = 1, ..., k$ e $j = 1, ..., n$. Considere um tipo de número *fuzzy*, o triangular, representado na forma $\tilde{x}_{ij} = (a_{ij}, m_{ij}, b_{ij})$, para $i = 1, ..., k$ e $j = 1, ..., n$.

Sejam $a_{11}, ..., a_{kn}$ os valores assumidos por $a_{ij}$, onde $i = 1, ..., k$ e $j = 1, ..., n$. Os limites de controle inferior ($LIa_{\overline{X}}$) e superior ($LSa_{\overline{X}}$) para o limite inferior do número *fuzzy* podem ser calculados por meio das expressões apresentadas em (2.51).

$$\begin{cases} LIa_{\overline{X}} = \overline{a} - \dfrac{3}{d_2\sqrt{n}}\overline{R}_a \\ \quad e \\ LSa_{\overline{X}} = \overline{a} + \dfrac{3}{d_2\sqrt{n}}\overline{R}_a \end{cases} \tag{2.51}$$

onde

$$\overline{a} = \frac{1}{kn}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tag{2.52}$$

e

$$\overline{R}_a = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left[\max\{a_{i1}, ..., a_{in}\} - \min\{a_{i1}, ..., a_{in}\}\right] \tag{2.53}$$

O valor de $d_2$ para amostras de tamanho $n$, sendo $2 \le n \le 25$, está no Anexo 1.

Sejam $b_{11}, ..., b_{kn}$ os valores assumidos por $b_{ij}$, onde $i = 1, ..., k$ e $j = 1, ..., n$. Os limites de controle inferior ($LIb_{\overline{X}}$) e superior ($LSb_{\overline{X}}$) para o limite superior do número *fuzzy* podem ser calculados através das expressões a seguir:

$$\begin{cases} LIb_{\overline{X}} = \overline{b} - \dfrac{3}{d_2\sqrt{n}}\overline{R}_b \\ e \\ LSb_{\overline{X}} = \overline{b} + \dfrac{3}{d_2\sqrt{n}}\overline{R}_b \end{cases} \tag{2.54}$$

onde

$$\overline{b} = \frac{1}{kn}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \tag{2.55}$$

e

$$\overline{R}_b = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left[\max\{b_{i1}, ..., b_{in}\} - \min\{b_{i1}, ..., b_{in}\}\right] \tag{2.56}$$

Sejam $m_{11}, ..., m_{kn}$ os valores assumidos por $m_{ij}$, onde $i = 1, ..., k$ e $j = 1, ..., n$. A linha central do gráfico de controle ($LC$) é definida pela expressão (2.57).

$$\overline{m} = \frac{1}{kn}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} m_{ij} \tag{2.57}$$

Para encontrar o limite superior de controle *fuzzy* ($\tilde{s}_{\overline{X}}$) é preciso levar em consideração as Eqs. (2.51) e (2.54) e definir o intervalo fechado $A$, dado por:

$$A = [\min\{LSa_{\overline{X}}, LSb_{\overline{X}}\}, \max\{LSa_{\overline{X}}, LSb_{\overline{X}}\}] \tag{2.58}$$

Desse intervalo tem-se o limite superior de $\tilde{s}_{\overline{X}}$, que é representado como $(\tilde{s}_{\overline{X}})^S$ e o limite inferior de $\tilde{s}_{\overline{X}}$, representado como $(\tilde{s}_{\overline{X}})^I$. Logo,

$$(\tilde{s}_{\overline{X}})^I = \min\{LSa_{\overline{X}}, LSb_{\overline{X}}\} \text{ e } (\tilde{s}_{\overline{X}})^S = \max\{LSa_{\overline{X}}, LSb_{\overline{X}}\} \tag{2.59}$$

De forma semelhante, se pode encontrar o limite inferior de controle *fuzzy* ($\tilde{i}_{\overline{X}}$), para tal é necessário considerar as Eqs. (2.51) e (2.54), e definir o intervalo fechado $B$, dado por:

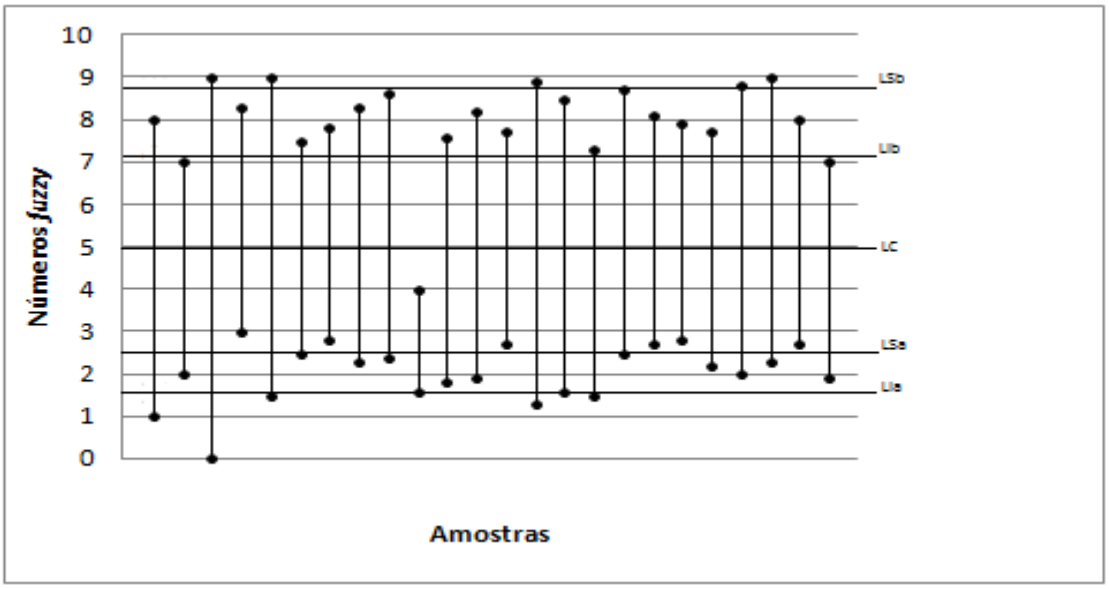
$$B = [\min\{LIa_{\overline{X}}, LIb_{\overline{X}}\}, \max\{LIa_{\overline{X}}, LIb_{\overline{X}}\}] \tag{2.60}$$

Desse intervalo tem-se o limite inferior de $\tilde{i}_{\bar{X}}$, que é representado por $(\tilde{i}_{\bar{X}})^I$ e o limite superior de $\tilde{i}_{\bar{X}}$, representado por $(\tilde{i}_{\bar{X}})^S$. Então segue que:

$$(\tilde{i}_{\bar{X}})^I = [\min\{LIa_{\bar{X}}, LIb_{\bar{X}}\} \text{ e } (\tilde{i}_{\bar{X}})^S = \max\{LIa_{\bar{X}}, LIb_{\bar{X}}\}. \quad (2.61)$$

Na figura 9, tem-se um exemplo genérico de um gráfico de controle *fuzzy* para a média.

Figura 9 - Exemplo de Gráfico de Controle *Fuzzy* para Média




Fonte: Dados fictícios

Este gráfico foi construído com base em dados fictícios, servindo apenas para apresentar aos leitores a formatação gráfica que será proposta. Para a interpretação de um gráfico *fuzzy* é preciso levar em consideração a dominância entre números *fuzzy*. Será apresentado um método na seção 2.8.

### 2.7.2 Gráfico de controle *fuzzy* para a amplitude

Da mesma forma como na construção do gráfico de controle de média, o processo de construção do gráfico de controle para a amplitude $(R)$ se assemelha

muito do utilizado na elaboração do gráfico para a amplitude convencional, com valores *crisp*.

Considere $\tilde{x}_{11}, ..., \tilde{x}_{kn}$ observações *fuzzy* triangulares (números *fuzzy*) para $k$ amostras com $n$ observações, sendo $i = 1, ..., k$ e $j = 1, ..., n$, representados na forma $\tilde{x}_{ij} = (a_{ij}, m_{ij}, b_{ij})$, para $i = 1, ..., k$ e $j = 1, ..., n$.

Sejam $(a_{i1}, ..., a_{ik})$ para $i = 1, ..., k$, valores que compõem o limite inferior do número *fuzzy*. Pode-se calcular os limites de controle, superior e inferior para a amplitude de a ($LSa_R$ e $LIa_R$, respectivamente), usando as seguintes equações:

$$\begin{cases} LSa_R = D_4 \overline{R}_a \\ LIa_R = D_3 \overline{R}_a \end{cases} \tag{2.62}$$

De forma similar, podem-se calcular os limites de controle a partir de $(b_{i1}, ..., b_{ik})$, sendo $i = 1, ..., k$, para limite superior da amplitude de b, de acordo com as seguintes equações:

$$\begin{cases} LSb_R = D_4 \overline{R}_b \\ LIb_R = D_3 \overline{R}_b \end{cases} \tag{2.63}$$

No gráfico $R$, além das quatro linhas que representam estes limites são plotados todos os valores $R_{ia} = \max\{a_{i1}, ..., a_{ik}\} - \min\{a_{i1}, ..., a_{ik}\}$ para $i = 1, ..., k$ e, da mesma forma todos os valores $R_{ib} = \max\{b_{i1}, ..., b_{ik}\} - \min\{b_{i1}, ..., b_{ik}\}$ com $i = 1, ..., k$, que representam, respectivamente, as amplitudes dos valores reais de $a$ e $b$.

Os valores médios das amplitudes de $a$ e de $b$, respectivamente $\overline{R}_a$ e $\overline{R}_b$ são obtidos pelas expressões definidas em (2.53) e (2.56).

Para ter o limite superior de controle *fuzzy* ($\tilde{s}_R$) é preciso levar em consideração as Eqs. (2.62) e (2.63), e definir o intervalo fechado $H$, dado por:

$$H = [\min\{LSa_R, LSb_R\}, \max\{LSa_R, LSb_R\}] \tag{2.64}$$

Desse intervalo, tira-se o limite superior de $\tilde{s}_R$, que será representado por $(\tilde{s}_R)^S$ e o limite inferior de $\tilde{s}_R$, representado por $(\tilde{s}_R)^I$. Então se tem que:

$$(\tilde{s}_R)^I = [\min\{LSa_R, LSb_R\} \text{ e } (\tilde{s}_R)^S = \max\{LSa_R, LSb_R\} \tag{2.65}$$

De forma semelhante, pode-se encontrar o limite inferior de controle *fuzzy* ($\tilde{i}_R$), para tal serão levadas em consideração as Eqs. (2.62) e (2.63), e após definido o intervalo fechado $J$, dado por:

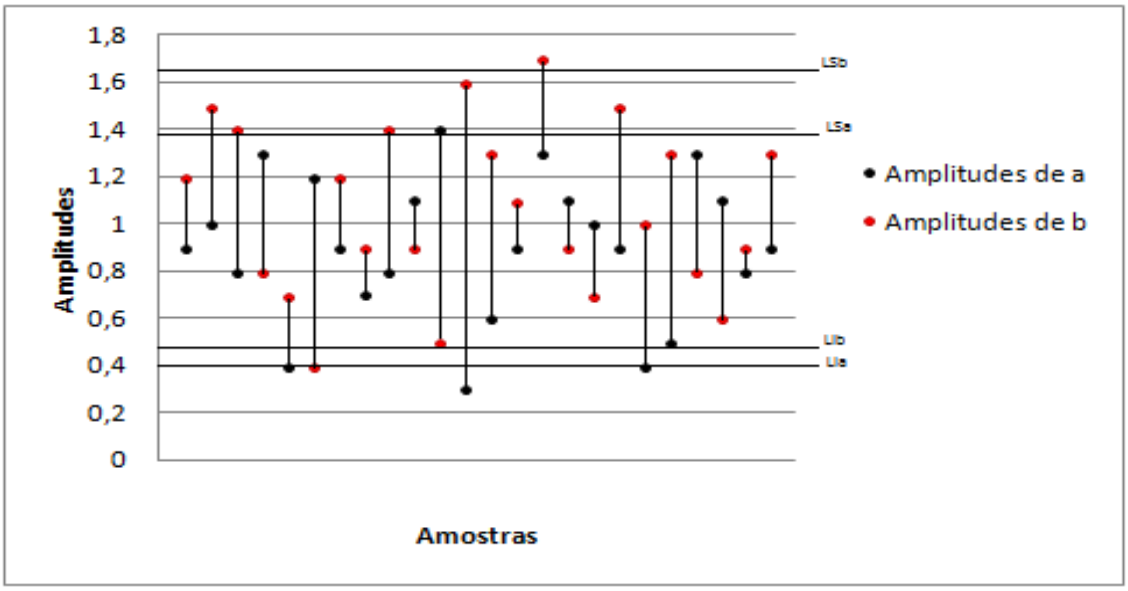
$$J = [\min\{LIa_R, LIb_R\}, \max\{LIa_R, LIb_R\}] \tag{2.66}$$

Desse intervalo tem-se o limite inferior de $\tilde{i}_R$, representado por $(\tilde{i}_R)^I$ e o limite superior de $\tilde{i}_R$, representado por $(\tilde{i}_R)^S$. Logo,

$$(\tilde{i}_R)^I = \min\{LIa_R, LIb_R\} \text{ e } (\tilde{i}_R)^S = \max\{LIa_R, LIb_R\}. \tag{2.67}$$

A figura 10 apresenta um gráfico de controle $R$ *fuzzy*.

Figura 10 - Exemplo de Gráfico de Controle Fuzzy para a Amplitude




Fonte: Dados fictícios

Esse gráfico é baseado em dados fictícios. A leitura e interpretação do gráfico *fuzzy* serão apresentadas na próxima seção.

## 2.8 Dominância Fuzzy

A classificação dos números *fuzzy* constitui a base no processo da tomada de decisão com lógica *fuzzy* (LEE & YOU, 2003), sendo a relação de preferência *fuzzy* amplamente utilizada neste processo de classificação (DELGADO et. al, 1988; LEE, 2000; MODARRES & SADI-NEZHAD, 2001). Outros métodos incluem a aplicação de conceitos específicos como funções de pertinência triangular (CHANG, 1981) e maximização e minimização dos conjuntos (CHEN, 1985). Foram também desenvolvidos vários métodos, incluindo a aplicação de classificação *fuzzy* para multi-critérios de tomada de decisão (BAAS & KWAKERNAAK, 1977; CHEN & KLEIN,1994). Lee e You (2003) apresentaram um método de classificação *fuzzy* para números *fuzzy* que considera várias funções interessantes e índices, tais como a função de satisfação *fuzzy*, o valor de avaliação *fuzzy*, grau de defuzificação, grau de avaliação e o índice relativo de defuzzificação. Um novo método incorporando as preferências difusas e técnicas de redução foi proposto por Ma e Li (2008). Yuan (1991) apresentou quatro critérios para avaliar métodos de classificação *fuzzy*, sugerindo um método de classificação baseado em representação de preferências *fuzzy*, na racionalidade da ordenação *fuzzy*, na distinguibilidade e na robustez. Um outro método de ordenação, método de Asmus-Dimuro (2013), pode ser usado para a ordenação de números *fuzzy* triangulares simétricos.

A seguir tem-se uma breve descrição do método proposto por Yuan (1991) e que foi expandido por Shu e Wu (2011), além de já ter sido utilizado na interpretação de gráficos de controle *fuzzy*.

### 2.8.1 Dominância *Fuzzy* Proposta por Yuan

O método servirá basicamente para inferir se um número *fuzzy* $\tilde{\bar{x}}_i$ (ou $\tilde{r}_i$ para a amplitude) está entre o limite de controle superior $\tilde{s}_{\bar{X}}$ (ou $\tilde{s}_R$ para a amplitude) e o limite de controle inferior $\tilde{i}_{\bar{X}}$ (ou $\tilde{i}_R$ para a amplitude). Primeiramente, o método de Yuan será reescrito em uma notação adequada ao trabalho.

Sejam $\tilde{N}$ e $\tilde{M}$ dois números *fuzzy*, então a dominância *fuzzy* (*DF*) entre $\tilde{N}$ e $\tilde{M}$ pode ser definida como:

$$DF(\tilde{N},\tilde{M}) = \frac{\Delta_{\tilde{N},\tilde{M}}}{\Delta_{\tilde{N},\tilde{M}} + \Delta_{\tilde{M},\tilde{N}}} \tag{2.68}$$

onde

$$\Delta_{\tilde{N},\tilde{M}} = \int_{\{\alpha:\tilde{N}_\alpha^S > \tilde{M}_\alpha^I\}} (\tilde{N}_\alpha^S - \tilde{M}_\alpha^I)d\alpha + \int_{\{\alpha:\tilde{N}_\alpha^I > \tilde{M}_\alpha^S\}} (\tilde{N}_\alpha^I - \tilde{M}_\alpha^S)d\alpha \tag{2.69}$$

$$\Delta_{\tilde{M},\tilde{N}} = \int_{\{\alpha:\tilde{M}_\alpha^S > \tilde{N}_\alpha^I\}} (\tilde{M}_\alpha^S - \tilde{N}_\alpha^I)d\alpha + \int_{\{\alpha:\tilde{M}_\alpha^I > \tilde{N}_\alpha^S\}} (\tilde{M}_\alpha^I - \tilde{N}_\alpha^S)d\alpha \tag{2.70}$$

Na equação (2.69), tem-se que a integral apresentada na primeira parcela da soma significa a região onde $\tilde{N}^S$ domina $\tilde{M}^I$ e ainda nessa equação, a integral apresentada na segunda parcela desta soma é a região onde $\tilde{N}^I$ domina $\tilde{M}^S$. Logo, $\Delta_{\tilde{N},\tilde{M}}$ significa o somatório das regiões onde $\tilde{N}$ domina $\tilde{M}$. Por outro lado, na equação (2.70), tem-se o somatório das regiões onde $\tilde{M}$ domina $\tilde{N}$.

Note que fica evidenciado, pela equação (2.68), que se $DF(\tilde{N},\tilde{M}) > 0{,}5$ então $\tilde{N}$ domina $\tilde{M}$, pois a região onde $\tilde{N}$ domina $\tilde{M}$ é maior do que a região onde $\tilde{M}$ domina $\tilde{N}$.

O Lema 1 e a Proposição 1 definidos a seguir irão ajudar e entender a utilidade do índice $\alpha$ utilizado nas expressões (2.69) e (2.70) e permitirá tirar algumas conclusões quando dois números *fuzzy* forem comparados. As provas do Lema 1 e da Proposição 1 podem ser encontradas em Shu e Wu (2011).

***Lema 1.*** Dados quaisquer dois números *fuzzy* $\tilde{N}$ e $\tilde{M}$, se existir $\alpha^* \in [0,1]$ tal que $\tilde{N}_{\alpha^*}^S = \tilde{M}_{\alpha^*}^I$, então as seguintes sentenças são verdadeiras:

*(a)* $\tilde{N}_\alpha^S \geq \tilde{M}_\alpha^I$ *para todo* $\alpha \in [0, \alpha^*]$ *e* $\tilde{N}_\alpha^S \leq \tilde{M}_\alpha^I$ *para todo* $\alpha \in [\alpha^*, 1]$.

*(b)* $\tilde{N}_\alpha^I \leq \tilde{M}_\alpha^S$ para todo $\alpha \in [0,1]$.

***Proposição 1***. Dados quaisquer dois números *fuzzy* $\tilde{N}$ e $\tilde{M}$, as seguintes sentenças são verdadeiras:

*(a) Se* $\tilde{M}_{\alpha}^{I} \geq \tilde{N}_{\alpha}^{S}$ *para todo* $\alpha \in [0,1]$ *, então* $DF(\tilde{M}, \tilde{N}) = 1$.

*(b)* Se existe $\alpha^{*} \in [0,1]$ tal que $\tilde{N}_{\alpha^{*}}^{S} = \tilde{M}_{\alpha^{*}}^{I}$, e $\tilde{M}_{\alpha}^{I} + \tilde{M}_{\alpha}^{S} \geq \tilde{N}_{\alpha}^{I} + \tilde{N}_{\alpha}^{S}$ para todo $\alpha \in [0,1]$, então $DF(\tilde{M}, \tilde{N}) \geq 0{,}5$.

Ainda, na relação de dominância é possível obter uma relação de dominância entre os limites de controle superior e inferir do gráfico *fuzzy* para média, quando esses limites forem calculados conforme método descrito em 2.7. A Proposição 2 define essa relação.

***Proposição 2***. Sejam $\tilde{s}_{\overline{X}}$ e $\tilde{i}_{\overline{X}}$ os limites de controle *fuzzy* superior e inferior, respectivamente. Então $DF(\tilde{s}_{\overline{X}}, \tilde{i}_{\overline{X}}) \geq 0{,}5$.

***Resultado 1:*** Outro resultado, o qual parece ser evidente devido a forma do cálculo da dominância entre quaisquer dois números *fuzzy* $\tilde{N}$ e $\tilde{M}$, é que:

$$DF(\tilde{N}, \tilde{M}) = 1 - DF(\tilde{M}, \tilde{N}) \tag{2.71}$$

Shu e Wu (2011) apresentam uma proposta para leitura do gráfico de controle usando a forma de dominância proposta por Yuan que é descrita a seguir.

Seja $\gamma$ um grau de dominância pertencente ao intervalo $[0{,}5;1{,}0]$. Pode-se perceber que $\gamma$ admite vários valores e a escolha de um determinado valor depende do rigor desejado para o controle do processo. Determinado o valor para $\gamma$, é possível avaliar se a relação de dominância entre quaisquer dois números *fuzzy* $\tilde{N}$ e $\tilde{M}$ atende os requisitos. Essas regras de avaliação são:

*(a)* se $DF(\tilde{M}, \tilde{N}) > \gamma$, então se escreve $\tilde{M} \succ_{\gamma} \tilde{N}$. De forma equivalente, se $DF(\tilde{N}, \tilde{M}) < 1 - \gamma$ então $\tilde{N} \succ_{\gamma} \tilde{M}$. Nesse caso tem-se que $\tilde{M}$ é maior do que $\tilde{N}$ com $\gamma$ graus de dominância, ou $\tilde{N}$ é menor do que $\tilde{M}$ com $\gamma$ graus de dominância;

*(b)* se $DF(\tilde{M},\tilde{N})<1-\gamma$, conforme (a), tem-se que $DF(\tilde{N},\tilde{M})>\gamma$, *ou seja,* $\tilde{N}\succ_{\gamma}\tilde{M}$, o que significa que $\tilde{N}$ é maior do que $\tilde{M}$ com $\gamma$ graus de dominância;

(c) se $0{,}5\leq DF(\tilde{M},\tilde{N})\leq\gamma$, então se escreve $\tilde{M}\approx_{\gamma}\tilde{N}$, que é equivalente a $1-\gamma\leq DF(\tilde{N},\tilde{M})\leq 0{,}5$ de acordo com (a). Nesse caso tem-se que $\tilde{M}$ é fortemente indiferente de $\tilde{N}$ com $\gamma$ graus de dominância, indicando que $\tilde{M}$ não domina $\tilde{N}$ de forma significativa;

(d) se $1-\gamma\leq DF(\tilde{M},\tilde{N})\leq 0{,}5$, então se escreve que $\tilde{M}\doteq_{\gamma}\tilde{N}$. De forma equivalente, conforme (a), $0{,}5\leq DF(\tilde{N},\tilde{M})\leq\gamma$. Nesse caso, tem-se que $\tilde{M}$ é fracamente indiferente de $\tilde{N}$ com $\gamma$ graus de dominância. Essa diferença indica que $\tilde{M}$ é fracamente dominado por $\tilde{N}$.

Com essas regras de avaliação é usual categorizar o processo de produção considerando $\gamma=0{,}5$ e $\gamma>0{,}5$ separadamente. Isso será feito pelo fato de $\tilde{M}\approx_{0,5}\tilde{N}$ ser equivalente a $\tilde{M}\doteq_{0,5}\tilde{N}$, devido as regras anteriores.

Para $\gamma>0{,}5$, o processo de produção pode ser categorizado conforme regras apresentadas abaixo. Será assumido que $\tilde{s}_{\overline{X}}\succ_{\gamma}\tilde{i}_{\overline{X}}$ .

(a) O processo estará *em controle* se $\tilde{s}_{\overline{X}}\succ_{\gamma}\tilde{\overline{x}}_i$ e $\tilde{\overline{x}}_i\succ_{\gamma}\tilde{i}_{\overline{X}}$. Nesse caso, pode-se dizer que o valor médio *fuzzy* $\tilde{\overline{x}}_i$ está entre os limites de controle *fuzzy* superior e inferior com $\gamma$ graus de dominância;

(b) o processo estará *fora de controle* se $\tilde{\overline{x}}_i\succ_{\gamma}\tilde{s}_{\overline{X}}$ ou $\tilde{i}_{\overline{X}}\succ_{\gamma}\tilde{\overline{x}}_i$. No caso em que $\tilde{\overline{x}}_i\succ_{\gamma}\tilde{s}_{\overline{X}}$, tem-se que a média *fuzzy* $\tilde{\overline{x}}_i$ está acima do limite superior de controle *fuzzy* com $\gamma$ graus de dominância. Para o caso $\tilde{i}_{\overline{X}}\succ_{\gamma}\tilde{\overline{x}}_i$, tem-se que a média *fuzzy* $\tilde{\overline{x}}_i$ está abaixo do limite inferior de controle *fuzzy* com $\gamma$ graus de dominância;

(c) o processo estará um *pouco fora de controle* se $\tilde{s}_{\overline{X}} \doteq_{\gamma} \tilde{\overline{x}}_i$ ou $\tilde{\overline{x}}_i \doteq_{\gamma} \tilde{i}_{\overline{X}}$. No caso em que $\tilde{s}_{\overline{X}} \doteq_{\gamma} \tilde{\overline{x}}_i$, tem-se que $\tilde{s}_{\overline{X}}$ domina muito pouco $\tilde{\overline{x}}_i$, portanto a média *fuzzy* $\tilde{\overline{x}}_i$ estará acima do limite superior de controle *fuzzy* com $\gamma$ graus de dominância. Para o caso em que $\tilde{\overline{x}}_i \doteq_{\gamma} \tilde{i}_{\overline{X}}$, tem-se que $\tilde{\overline{x}}_i$ domina muito pouco $\tilde{s}_{\overline{X}}$, portanto $\tilde{\overline{x}}_i$ estará abaixo do limite inferior de controle *fuzzy*. Em outras palavras, embora $\tilde{\overline{x}}_i$ esteja fora dos limites de controle *fuzzy* ela não estará muito longe destes limites;

(d) o processo estará um *pouco dentro de controle* se ocorrer uma das situações abaixo:

d.1) se $\tilde{s}_{\overline{X}} \approx_{\gamma} \tilde{\overline{x}}_i$ e $\tilde{\overline{x}}_i \succ_{\gamma} \tilde{i}_{\overline{X}}$, tem-se que a média *fuzzy* $\tilde{\overline{x}}_i$ é menor do que $\tilde{s}_{\overline{X}}$. Nesse caso a média $\tilde{\overline{x}}_i$ estará entre os limites de controle, mas $\tilde{\overline{x}}_i$ será quase o mesmo que $\tilde{s}_{\overline{X}}$ com $\gamma$ graus de dominância;

d.2) se $\tilde{s}_{\overline{X}} \succ_{\gamma} \tilde{\overline{x}}_i$ e $\tilde{\overline{x}}_i \approx_{\gamma} \tilde{i}_{\overline{X}}$, tem-se que a média *fuzzy* $\tilde{\overline{x}}_i$ é maior do que $\tilde{i}_{\overline{X}}$. Nesse caso a média $\tilde{\overline{x}}_i$ estará entre os limites de controle, mas $\tilde{\overline{x}}_i$ será quase o mesmo que $\tilde{i}_{\overline{X}}$ com $\gamma$ graus de dominância;

d.3) se $\tilde{s}_{\overline{X}} \approx_{\gamma} \tilde{\overline{x}}_i$ e $\tilde{\overline{x}}_i \approx_{\gamma} \tilde{i}_{\overline{X}}$. Nesse caso a média *fuzzy* estará entre os limites de controle. No entanto $\tilde{\overline{x}}_i$ será quase o mesmo que $\tilde{i}_{\overline{X}}$ e da mesma forma, $\tilde{\overline{x}}_i$ será quase o mesmo que $\tilde{s}_{\overline{X}}$.

Quando ocorrer (c) e (d), deve-se investigar uma possível causa especial, um problema na produção, e a busca de uma correção dependerá basicamente se o custo dessa avaliação é tolerável.

Para exemplificar, será feito a seguir duas categorizações do processo usando dois valores de $\gamma$.

**Exemplo 14** - Supor que $\gamma = 0{,}7$. O processo de produção pode ser categorizado como segue abaixo.

(a) Se $DF(\tilde{s}_{\overline{X}}, \tilde{\overline{x}}_i) > 0{,}7$ e $DF(\tilde{\overline{x}}_i, \tilde{i}_{\overline{X}}) > 0{,}7$, o processo estará em controle.

(b) Se $DF(\tilde{s}_{\overline{X}}, \tilde{\overline{x}}_i) < 0{,}3$ e $DF(\tilde{\overline{x}}_i, \tilde{i}_{\overline{X}}) < 0{,}3$, o processo estará fora de controle.

(c) Se $0{,}3 < DF(\tilde{s}_{\overline{X}}, \tilde{\overline{x}}_i) < 0{,}5$ ou $0{,}3 < DF(\tilde{\overline{x}}_i, \tilde{i}_{\overline{X}}) < 0{,}5$, então o processo estará um pouco fora de controle.

(d) O processo estará um pouco em controle se ocorrer uma das situações abaixo:

1) $DF(\tilde{\overline{x}}_i, \tilde{i}_{\overline{X}}) > 0{,}7$ e $0{,}5 \leq DF(\tilde{s}_{\overline{X}}, \tilde{\overline{x}}_i) \leq 0{,}7$

2) $DF(\tilde{s}_{\overline{X}}, \tilde{\overline{x}}_i) > 0{,}7$ e $0{,}5 \leq DF(\tilde{\overline{x}}_i, \tilde{i}_{\overline{X}}) \leq 0{,}7$

3) $0{,}5 \leq DF(\tilde{s}_{\overline{X}}, \tilde{\overline{x}}_i) \leq 0{,}7$ e $0{,}5 \leq DF(\tilde{\overline{x}}_i, \tilde{i}_{\overline{X}}) \leq 0{,}7$

Antes de desenvolver a situação 2, salienta-se que se $DF(\tilde{s}_{\overline{X}}, \tilde{i}_{\overline{X}}) = 0{,}5$, os limites de controle são indiferentes um do outro, ou seja, tem-se uma variação muito pequena. Então será considerado que $DF(\tilde{s}_{\overline{X}}, \tilde{i}_{\overline{X}}) > 0{,}5$.

**Exemplo 15** - Supor que $\gamma = 0{,}5$. O processo de produção pode ser categorizado conforme abaixo.

(a) Se $DF(\tilde{s}_{\overline{X}}, \tilde{\overline{x}}_i) > 0{,}5$ e $DF(\tilde{\overline{x}}_i, \tilde{i}_{\overline{X}}) > 0{,}5$, o processo estará em controle.

(b) Se $DF(\tilde{s}_{\overline{X}}, \tilde{\overline{x}}_i) < 0{,}5$ ou $DF(\tilde{\overline{x}}_i, \tilde{i}_{\overline{X}}) < 0{,}5$, o processo estará fora de controle.

(c) Estará um pouco em controle se uma das situações abaixo ocorrer:

1) $DF(\tilde{s}_{\overline{X}}, \tilde{\overline{x}}_i) = 0{,}5$ e $DF(\tilde{\overline{x}}_i, \tilde{i}_{\overline{X}}) > 0{,}5$.

2) $DF(\tilde{s}_{\overline{X}}, \tilde{\overline{x}}_i) > 0{,}5$ e $DF(\tilde{\overline{x}}_i, \tilde{i}_{\overline{X}}) = 0{,}5$.

## 2.9 Construção e interpretação dos gráficos fuzzy

Nessa seção serão feitos dois exemplos. No exemplo 16, será construído um gráfico *fuzzy* de média e sua interpretação, utilizando a ordenação de números *fuzzy* conforme proposto na seção anterior. De forma semelhante será feito no exemplo 17, para o gráfico fuzzy da amplitude.

**Exemplo 16** - Considere as observações apresentadas na tabela AP3.1 no Apêndice 3, representadas na forma de número *fuzzy* triangular, $\tilde{x}_{ij} = (a_{ij}, m_{ij}, b_{ij})$. São 19 amostras com quatro observações *fuzzy* cada.

Para a construção do gráfico de controle *fuzzy* para a média, inicialmente é calculada a média das observações em cada amostra, tanto para valores de $a$ como para valores de $b$, onde $\bar{a}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ e $\bar{b}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i$, para $k = 1, ..., 19$, $n = 4$. Os 19 valores encontrados estão na tabela 3.

Tabela 3 - Valores médios de $a$ e $b$ em cada amostra

| | Valores | |
|---|---|---|
| Amostras | $\bar{a}_k$ | $\bar{b}_k$ |
| 1 | -0,114346 | 2,192093 |
| 2 | -0,665095 | 2,357246 |
| 3 | -0,611255 | 5,433645 |
| 4 | -0,298653 | 3,583431 |
| 5 | -0,065997 | 2,071198 |
| 6 | 0,028490 | 1,560810 |
| 7 | 0,187966 | 1,421908 |
| 8 | -0,256075 | 2,245007 |
| 9 | -0,165545 | 2,065128 |
| 10 | -0,355993 | 1,653197 |
| 11 | -0,325303 | 2,592213 |
| 12 | -0,119490 | 1,616950 |
| 13 | -0,359725 | 4,803963 |
| 14 | -0,416290 | 3,839445 |
| 15 | -0,330054 | 3,679289 |
| 16 | -0,161269 | 2,526140 |
| 17 | -0,394130 | 6,369225 |
| 18 | -1,441543 | 3,184973 |
| 19 | -0,296762 | 2,087782 |

Fonte: análise de dados feita pelo autor

Após é preciso calcular a média entre os 19 valores de $a$ e a média entre os 19 valores de $b$. Foram encontrados os seguintes valores:

$$\bar{a} = -0{,}32427 \text{ e } \bar{b} = 2{,}909665$$

Na tabela 4, constam as amplitudes das 19 amostras dos valores de $a$ e $b$ que são consideradas no cálculo da amplitude média dos valores de a e dos valores de b. Consequentemente, estes valores para $a$ e $b$ são:

$$\bar{R}_a = 0{,}684149 \text{ e } \bar{R}_b = 1{,}268239$$

Tabela 4 - Amplitudes dos valores de $a$ e de $b$ em cada amostra

| | Valores | |
|---|---|---|
| Amostras | $R_a$ | $R_b$ |
| 1 | 1,222156 | 1,020157 |
| 2 | 0,717830 | 1,415505 |
| 3 | 0,296070 | 1,522806 |
| 4 | 0,474490 | 1,681373 |
| 5 | 0,673251 | 1,157543 |
| 6 | 0,351431 | 0,667969 |
| 7 | 0,444808 | 1,170019 |
| 8 | 0,996841 | 0,618512 |
| 9 | 0,516230 | 0,728671 |
| 10 | 0,759959 | 0,631563 |
| 11 | 0,507390 | 2,083412 |
| 12 | 1,013097 | 0,210406 |
| 13 | 0,328930 | 1,207370 |
| 14 | 0,456020 | 1,743688 |
| 15 | 0,967952 | 2,964032 |
| 16 | 1,676712 | 1,146467 |
| 17 | 0,389375 | 1,563632 |
| 18 | 0,669256 | 0,750574 |
| 19 | 0,537041 | 1,812818 |

Fonte: análise de dados feita pela autor

Sendo $d_2 = 2{,}059$ (Anexo 1), o valor da constante relacionado a $n = 4$ e usando os valores até então calculados juntamente com a Eq. (2.51) os limites de controle $LSa_{\bar{X}}$ e $LIa_{\bar{X}}$, relacionados ao valor *a* dos números *fuzzy*, são:

$$\begin{cases} LIa_{\overline{X}} = -0{,}32427 - \dfrac{3}{2{,}059\sqrt{4}}0{,}684149 = -0{,}82268 \\ e \\ LSa_{\overline{X}} = -0{,}32427 + \dfrac{3}{2{,}059\sqrt{4}}0{,}684149 = 0{,}174142 \end{cases}$$

Da mesma forma, usando a Eq. (2.54) foram encontrados os limites de controle $LSb_{\overline{X}}$ e $LIb_{\overline{X}}$, conforme valores seguintes:

$$\begin{cases} LIb_{\overline{X}} = 2{,}909665 - \dfrac{3}{2{,}059\sqrt{4}}1{,}268239 = 1{,}985743 \\ e \\ LSb_{\overline{X}} = 2{,}909665 + \dfrac{3}{2{,}059\sqrt{4}}1{,}268239 = 3{,}833588 \end{cases}$$

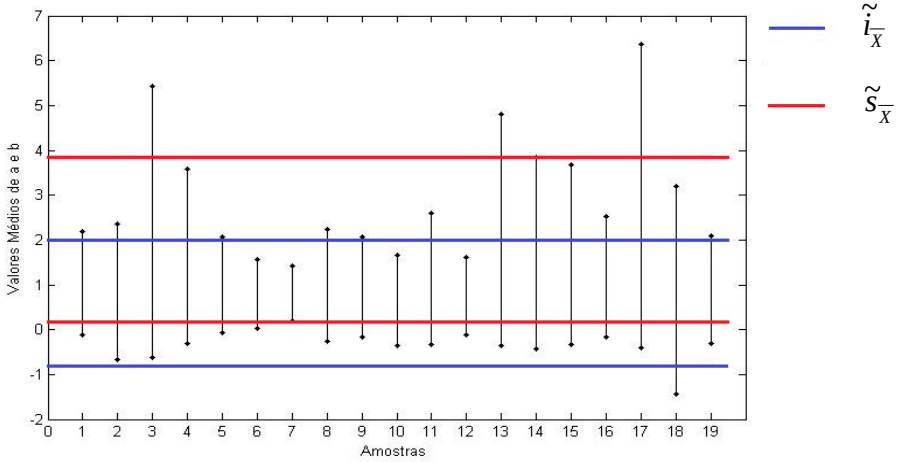
Conforme descrito anteriormente, os limites de controle *fuzzy* inferior e superior para os valores médios, $\tilde{i}_{\overline{X}}$ e $\tilde{s}_{\overline{X}}$, respectivamente serão:

$$\tilde{i}_{\overline{X}} = \{LIa_{\overline{X}}, LIb_{\overline{X}}\} \text{ e } \tilde{s}_{\overline{X}} = \{LSa_{\overline{X}}, LSb_{\overline{X}}\} \text{ e}$$

Ou seja: $\tilde{i}_{\overline{X}} = \{-0{,}82268; 1{,}985743\}$ e $\tilde{s}_{\overline{X}} = \{0{,}174142; 3{,}833588\}$

A figura 10 apresenta o gráfico de controle *fuzzy* para a média com os limites de controle e os valores médios de $a$ e de $b$ para as 19 amostras.

Figura 11 - Gráfico de controle *fuzzy* $\overline{X}$




Fonte: análise de dados feita pelo autor

Em um primeiro momento parecem ser detectados 4 evidências (amostras 3, 13, 17 e 18) de que o processo não está sob controle estatístico. Para a avaliação desse gráfico *fuzzy* de média, utilizamos a ordenção de números *fuzzy*, conforme apresentado na seção anterior. Para o cálculo das relações de dominâncias, foi utilizado o algoritmo exposto em AP4.3 (Apêndice 4.3).

As dominâncias calculadas pelas Eqs. (2.68), (2.69) e (2.70) são apresentadas na tabela 5, bem como a interpretação dos resultados encontrados para $\gamma = 0{,}5$ e $\gamma = 0{,}7$.

Tabela 5 - Avaliação do gráfico de controle *fuzzy* para a Cor com $\gamma = 0{,}5$ e $\gamma = 0{,}7$

| Amostras $i$ | $DF(\tilde{s}_{\bar{X}}, \tilde{\bar{x}}_i)$ | $DF(\tilde{\bar{x}}_i, \tilde{i}_{\bar{X}})$ | Processo para $\gamma = 0{,}5$ | Processo para $\gamma = 0{,}7$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,6960 | 0,6081 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 2 | 0,7204 | 0,5226 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 3 | 0,4507 | 0,7074 | Fora de Controle | Pouco Fora de Controle |
| 4 | 0,5602 | 0,6414 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 5 | 0,7181 | 0,5788 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 6 | 0,8035 | 0,5543 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 7 | 0,8243 | 0,5638 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 8 | 0,7047 | 0,5734 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 9 | 0,7395 | 0,5110 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 10 | 0,8131 | 0,5161 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 11 | 0,6761 | 0,5434 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 12 | 0,8075 | 0,5428 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 13 | 0,4713 | 0,7180 | Fora de Controle | Pouco Fora de Controle |
| 14 | 0,5474 | 0,6253 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 15 | 0,5482 | 0,6951 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 16 | 0,6514 | 0,6420 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 17 | 0,4016 | 0,7941 | Fora de Controle | Pouco Fora de Controle |
| 18 | 0,6554 | 0,5533 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 19 | 0,7338 | 0,5407 | Em Controle | Pouco em Controle |

Fonte: Análise de dados feita pelo autor

Para $\gamma = 0{,}5$ as amostras 3, 13 e 17 são avaliadas como fora de controle e para $\gamma = 0{,}7$ são consideradas pouco fora de controle. Isso acontece porque a

dominância do limite superior em relação a amostra ($DF(\tilde{s}_{\overline{X}}, \tilde{\overline{x}}_i)$) é menor do que 0,5, o que indica que existe um leve deslocamento da amostra, deixando-as um pouco acima do limite superior, conforme pode-se perceber ao visualizar o gráfico.

No caso $\gamma = 0{,}5$, o processo não é tão rigoroso quanto ao caso $\gamma = 0{,}7$, mas diminuem os níveis de aceitação. Ou está em controle ou fora de controle. No entanto, quando $\gamma = 0{,}7$, a análise do processo é mais rigorosa, sendo mais difícil ter resultados que apontem para a total estabilidade do processo, pois $DF(\tilde{s}_{\overline{X}}, \tilde{\overline{x}}_i) > 0{,}7$ e $DF(\tilde{\overline{x}}_i, \tilde{i}_{\overline{X}}) > 0{,}7$, mas apresenta zonas de aceitação, zonas de alerta, onde o processo é considerado em controle, pouco em controle ou pouco fora de controle, e a investigação das causas dessa provável instabilidade dependerá do nível de dominância entre as variáveis e dos custos necessários para as analises.

Vale destacar que as mesmas amostras que estavam fora de controle para $\gamma = 0{,}5$ estão sendo consideradas, quando $\gamma = 0{,}7$**,** pouco fora de controle.

**Exemplo 17** - Considere as mesmas observações utilizadas no exemplo 16, representadas na forma de número *fuzzy* triangular, $\tilde{x}_{ij} = (a_{ij}, m_{ij}, b_{ij})$. São 19 amostras com quatro observações *fuzzy* cada. Considere ainda que $\overline{R}_a = 0{,}684149$ e $\overline{R}_b = 1{,}268239$.

Utilizando as constantes $D_4 = 2{,}282$ e $D_3 = 0$ (Anexo 1) juntamente com as Eqs. (2.62) e (2.63) tem-se os seguintes limites de controle para o gráfico de controle *fuzzy* para a amplitude:

$$\begin{cases} LSa_R = 2{,}282.(0{,}684149) = 1{,}561229 \\ LIa_R = 0.(0{,}684149) = 0 \end{cases}$$

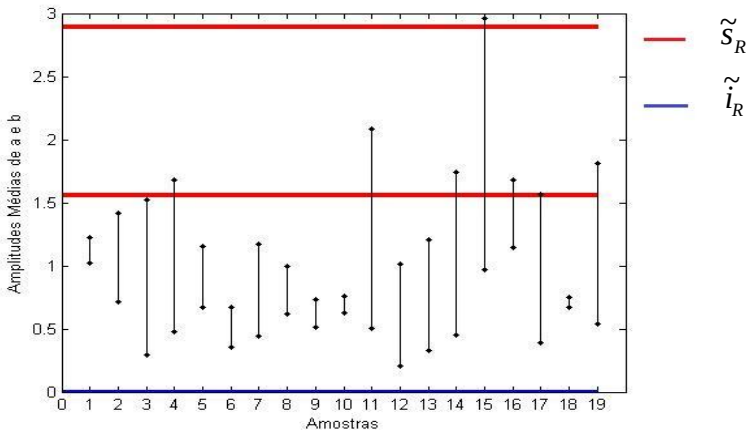
$$\begin{cases} LSb_R = 2{,}282.(1{,}268239) = 2{,}894119 \\ LIb_R = 0.(1{,}268239) = 0 \end{cases}$$

De onde se tem os limites $\tilde{s}_R$ e $\tilde{i}_R$, respectivamente o superior e inferior do gráfico de controle *fuzzy* para a amplitude.

$$\tilde{s}_R = \{LSa_R, LSb_R\} \text{ e } \tilde{i}_R = \{LIa_R, LIb_R\}$$

Nesse caso: $\tilde{s}_R = \{1{,}561229;\ 2{,}894119\}$ e $\tilde{i}_R = \{0;\ 0\}$. Na figura 12 tem-se um gráfico de controle *fuzzy* $R$.

Figura 12 - Gráfico de controle *fuzzy* $R$




Fonte: Análise de dados feita pelo autor

Em um primeiro momento, parece ser detectada apenas uma evidência (amostra 15) de que o processo não está sob controle estatístico.

As dominâncias calculadas pelas Eqs. (2.68), (2.69) e (2.70) são apresentadas na tabela 6, bem como a interpretação dos resultados encontrados para $\gamma = 0{,}5$ e $\gamma = 0{,}7$.

No gráfico *fuzzy* para amplitude, tanto para $\gamma = 0{,}5$ e $\gamma = 0{,}7$ as amostras estão sob controle, com exceção da amostra 15 onde, para $\gamma = 0{,}7$ o processo é considerado pouco em controle. Pode-se observar no gráfico que a amostra 15 encontra-se um pouco acima do limite superior de controle. Esta interpretação diferenciada, para $\gamma = 0{,}7$, acontece devido ao maior rigor na interpretação do processo, sugerindo um estado de alerta. Mas é preciso avaliar os custos para decidir se é válido uma investigação da possível causa de essa amostra estar pouco fora de controle.

Tabela 6 - Avaliação do Gráfico de controle *fuzzy* para $\gamma = 0{,}5$ e $\gamma = 0{,}7$

| Amostras $i$ | $DF(\tilde{s}_{\bar{X}}, \tilde{\bar{x}}_i)$ | $DF(\tilde{\bar{x}}_i, \tilde{i}_{\bar{X}})$ | Processo para $\gamma = 0{,}5$ | Processo para $\gamma = 0{,}7$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 2 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 3 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 4 | 0,9951 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 5 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 6 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 7 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 8 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 9 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 10 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 11 | 0,9163 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 12 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 13 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 14 | 0,9890 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 15 | 0,5906 | 1,0000 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 16 | 0,9914 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 17 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 18 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 19 | 0,9780 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |

Fonte: Análise de dados feita pelo autor

## 2.10 Iogurte: Produção e Normas de Qualidade

Iogurte é o produto resultante da fermentação do leite pasteurizado ou esterilizado, por fermentos lácticos próprios, cuja fermentação se realiza com cultivos protosimbióticos de *Streptococcus salivarius subsp. thermophilus e Lactobacillus delbrueckii subsp. Bulgaricus*, que podem ser acompanhadas, por outras bactérias ácido-lácticas que, por sua atividade contribuem para a

determinação das características do produto final. (Resolução nº 5, de 13 de novembro de 2000, do Ministério da Agricultura, Pecuária e do Abastecimento).

O consumo de iogurte está ligeiramente associado as suas vantagens nutricionais, além de outros fatores, como: digestibilidade cerca de seis vezes maior que o leite *in natura*, Lactose e Proteína (componentes com significativa concentração no leite) são no processo, parcialmente hidrolisadas, Vitaminas (principalmente complexo B), auxiliam no crescimento das culturas que consequentemente produzem maior teor e colonização favorável na flora intestinal, importante para a proteção contra aumento de patógenos.

### 2.10.1 O Processo de Produção do Iogurte

A primeira e talvez mais importante etapa é a seleção de matéria-prima, que deve ser de alta qualidade, e do leite, que deve ter suas características controladas. O leite deve conter uma baixa contagem de bactérias, não deve conter enzimas e nem substâncias que atrasem o desenvolvimento da cultura de iogurte, assim como microrganismos patogênicos e antibióticos.

A primeira fase, propriamente dita, consiste na adição de ingredientes, como açúcar e leite em pó, sendo no leite previamente analisados o pH e teor de gordura, entre outros (SILVA *et al*., 2010). Ainda nessa etapa se adicionam os aditivos: adoçantes e estabilizadores, aumentando o teor de açucares e a viscosidade, respectivamente. A quantidade de cada aditivo depende do tipo de iogurte que se pretende obter (magro, meio gordo, integral, etc.).

Com o objetivo de diminuir a formação de glóbulos de sólidos durante a incubação é preciso realizar um processo de homogeneização. Esse processo irá garantir que a matéria gorda seja distribuída uniformemente. Com a redução no tamanho dos glóbulos de gordura, a substância torna-se mais lisa.

Num segundo momento deve ser feita a pasteurização. Esse procedimento consiste em elevar a mistura a temperaturas elevadas de forma a eliminar substâncias patogênicas e bactérias desnecessárias ou indesejáveis. O tipo de pasteurização utilizado é HTST (*High Temperature and Short Time*) que se dá a uma temperatura aproximada de 90ºC, durante cerca de 5 minutos. Não é usado o

método UHT (*Ultra High Temperature*) uma vez que não tem a mesma influência na viscosidade, apesar de ser muito mais rápido (Silva *et al*., 2010).

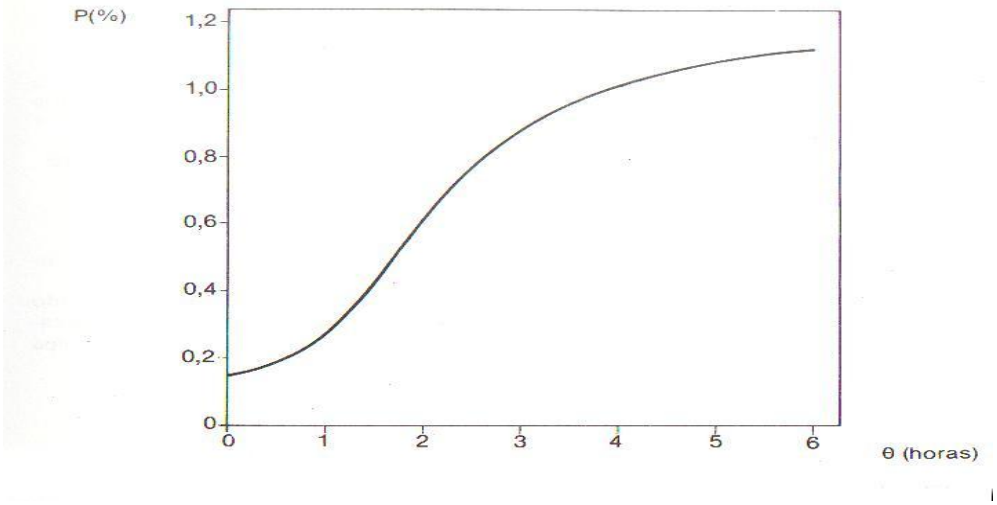
Além dos benefícios já citados, a pasteurização evita a transmissão de doenças e aumenta o tempo de prateleira do leite e seus derivados. É um processo obrigatório para posterior utilização do leite na fabricação, em escala industrial, de seus derivados. Em contrapartida, esse processo elimina ou diminui a quantidade de bactérias lácticas benéficas e altera o sabor do leite, mas de qualquer forma, as vantagens superam as desvantagens.

Após a pasteurização, o restante do processo deve ser feito em recipientes herméticos, de forma a inibir a contaminação da mistura por agentes externos.

A próxima fase é a fermentação. Ela é feita com a utilização de bactérias (*lactobacillus bulgaricus* e *streptococcus thermophilus*) que transformam a lactose, presente no leite, em ácido láctico. Esta etapa é fundamental no processo de produção de iogurte, uma vez que o ácido láctico é o responsável pela coagulação da mistura (Silva *et al*., 2010).

Segundo Pereira (2005), durante a fermentação, as bactérias do iogurte, *S. termophilus* e *L. bulgaricus*, crescem simbioticamente, produzindo acido lático e compostos aromáticos, além de formar o coágulo. No inicio da fermentação, a acidez do leite, menor que 20º D (Dornic), favorece o crescimento do *S. termophilus*, estimulado por alguns aminoácidos livres *(*especialmente a valina) produzidos pelo *L. bulgaricus*, o que provoca um aumento de acidez. A figura 13 mostra esse procedimento em função do tempo.

Figura 13 - Porcentagem de ácido lático em função do tempo de fermentação




Fonte: Pereira (2005).

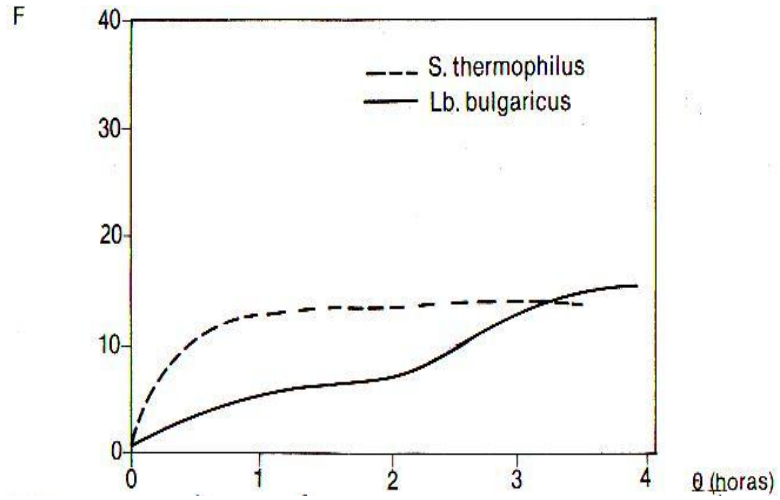
Ainda, segundo Pereira (2005), ao se atingir aproximadamente 46º, o meio se torna pouco propício ao *S.termophilus*, favorecendo o rápido desenvolvimento do *L. bulgaricus*, com produção de acetaldeído, o principal responsável pelo aroma característico do iogurte. Com o aumento de acidez, o pH se aproxima de 4,6, ponto isoelétrico da proteína do leite, e tem-se a coagulação.

O tempo de fermentação varia de 6h à 8h, e é onde a lactose (açúcar do leite) é transformada em ácido láctico. A cultura do iogurte deve conter um percentual igual dos dois germes. Do contrário, a consistência e a característica desejável do odor no produto final, poderão estar comprometidas.

Segundo, Pereira (2005), uma forma de monitorar a força de desenvolvimento dos germes, é controlando os seguintes fatores: porcentagem de cultura bacteriana empregada, temperatura mantida no decorrer de fermentação e tempo decorrido ou permanência na estufa.

Ao final do processo de fermentação é esperado que o número de germes das duas espécies seja similar. No gráfico apresentado na figura 14 há uma curva típica do crescimento microbiano.

Figura 14 - Curva de desenvolvimento simbiótico da cultura lática durante a fermentação do Iogurte




F= fator de multiplicação dos microrganismos.
Fonte: Pereira (2005).

Após a fermentação, quando é atingida a acidez desejada, a mistura sofre um resfriamento, processo de arrefecimento, de forma a ficar com a temperatura

entre 15ºC e 22ºC. Com a temperatura nessa faixa ocorre pouca variação do pH (Silva *et al.*, 2010).

Chegando ao final do processo, é a fase de adição dos sabores, aromas ou mesmo polpas, dependendo o tipo de iogurte que se esta produzindo. É importante que qualquer aditivo colocado na mistura seja vigorosamente mexido, para que a distribuição do mesmo fique uniforme.

O processo de envasamento vai depender das formas dos recipientes a serem utilizados. O importante é que após embalado, o iogurte seja conservado em temperatura variando entre 2ºC e 10ºC. Uma das principais características de qualidade que deve ser controlada durante todo o processo é a viscosidade.

Na figura 15 é apresentado um diagrama que mostra de forma sucinta todos os procedimentos descritos.

Figura 15 - Fases da produção de Iogurte

Fonte: Projecto FEUP – Produção de iogurte

### 2.10.2 Resoluções e classificação das bebidas lácticas fermentadas

Segundo Resolução nº 5, de 13 de novembro de 2000, do Ministério da Agricultura, Pecuária e do Abastecimento (MAPA), os leites fermentados de acordo com o conteúdo de matéria gorda, podem ser classificados em:

- com creme - aqueles cuja base láctea tenha um conteúdo de matéria gorda mínima de 6,0g/100g;
- integrais - aqueles cuja base láctea tenha um conteúdo de matéria gorda mínimo de 3,0g/100g;
- parcialmente desnatados - aqueles cuja base láctea tenha um conteúdo de matéria gorda máximo de 2,9g/100g;
- desnatados - aqueles cuja base láctea tenha um conteúdo de matéria gorda máximo de 0,5g/100g.

Segundo a Resolução nº 5, de 13 de novembro de 2000, do Ministério da Agricultura, Pecuária e do Abastecimento, para a produção de iogurte são usados dois tipos de ingredientes:

- ingredientes obrigatórios: leite e/ou leite reconstituído padronizado em seu conteúdo de gordura. Cultivos de bactérias lácticas e/ou cultivos de bactérias lácticas específicas;

- ingredientes opcionais: leite concentrado, creme, manteiga, gordura anidra de leite ou *butter oil*, leite em pó, caseínatos alimentícios, proteínas lácteas, outros sólidos de origem láctea, soros lácteos, concentrados de soros lácteos.

Além desses, podem ser usadas frutas em forma de pedaços, polpa(s), suco(s) e outros preparados à base de frutas, Maltodextrinas, mel, coco, cereais, vegetais, frutas secas, chocolate, especiarias, café, outras, sós ou combinadas, açúcares e/ou glicídios (exceto polialcoóis e polissacarídeos), cultivos de bactérias lácticas subsidiárias, amidos ou amidos modificados em uma proporção máxima de 1% (m/m) do produto final.

Os ingredientes opcionais não lácteos, sós ou combinados deverão estar presentes em uma proporção máxima de 30% (m/m) do produto final.

### 2.10.3 Características definidoras da qualidade do Iogurte

Segundo a Resolução nº 5, de 13 de novembro de 2000, do Ministério da Agricultura, Pecuária e do Abastecimento (MAPA), as principais características de qualidades do produto final podem ser consideradas em quatro grupos:

a - características sensoriais: o aspecto deve ser de consistência firme, pastosa, semissólida ou líquida. A cor deve ser branca ou de acordo com a(s) substância(s) alimentícia(s) e/ou corante(s) adicionada(s). Por fim, o odor e sabor deve ser característico ou de acordo com a(s) substância (s) alimentícia(s) e/ou substância(s) aromatizante(s)/saborizante(s) adicionada(s);

b - requisitos físico-químicos: os leites fermentados definidos em 2.10.2 deverão cumprir com os requisitos físico-químicos indicados na tabela 7. Em particular, a acidez do Iogurte, em g de ácido láctico/100g, deve estar de 0,6 a 1,5, segundo a Norma FIL 150:1991;

Tabela 7 - Requisitos físico-químicos dos leites fermentados

| Matéria gorda láctea (g/100g) (*) Norma FIL 116 A:1987 | | | | Acidez (g de ácido lático/100g) Norma FIL 150:1991 | Proteínas lácteas (g/100g) |
|---|---|---|---|---|---|
| Com creme | Integral | Parcialmente desnatado | Desnatado | | |
| Min. 6,0 | 3,0 a 5,9 | 0,6 a 2,9 | Máx. 0,5 | 0,6 a 1,5 | Min. 2,9 |

Fonte: MAPA

c - contagem de microrganismos específicos: o Iogurte quanto a contagem de bactérias láticas totais (ufc/g), deverá ter no min. $10^7$ [2];

d - tratamento térmico: os leites fermentados não deverão ter sido submetidos a qualquer tratamento térmico após a fermentação.

Em relação ao acondicionamento dos leites fermentados, estes deverão ser envasados com materiais adequados para as condições de armazenamento previstas de forma a conferir ao produto uma proteção adequada. Quanto às

[2] Durante o seu período de validade, segundo Norma FIL 117A: 1988. No caso em que se mencione o uso de bifidobactérias, a contagem será de no mínimo $10^6$ UFC de bifidobactérias/g.

condições de conservação e comercialização, os leites fermentados deverão ser conservados e comercializados à temperatura não superior a 10$^{o}$C.

O iogurte pode conter alguns aditivos como: aromatizantes/saborizantes, corante (concentração máxima no produto final de 80 mg/kg) e espessantes/estabilizantes (concentração máxima no produto final de 5g/kg). Admite-se também a presença de ácido sórbico e seus sais de sódio, potássio e cálcio em uma concentração máxima de 300 miligramas por quilograma (expressos em ácido sórbico) no produto final.

Em critérios de higiene, o produto deve ser submetido a pasteurização, ou tratamentos térmicos equivalentes, e ainda combinado ou não com outros processos físicos ou biológicos que garantam a inocuidade do produto.

Segundo a Resolução nº 5, de 13 de novembro de 2000, do Ministério da Agricultura, Pecuária e do Abastecimento (MAPA), os critérios microbiológicos deverão cumprir os requisitos contidos na tabela 8.

Tabela 8 - Critérios microbiológicos, concentrações no produto final

| Microrganismos | critério de aceitação | Situação | norma |
|---|---|---|---|
| Coliformes/g (30$^{o}$C) | n=5; c=2; m=10; M=100 | 4 | FIL73A:1985 |
| Coliformes/g (45$^{o}$C) | n=5; c=2; m<3; M=10 | 4 | APHA 1992c.24 |
| Bolores e leveduras/g | n=5; c=2; m=50; M=200 | 2 | FIL94B:1990 |

Fonte: MAPA

### 2.10.4 Características Sensoriais

A avaliação sensorial está ligada com a resposta humana a estímulos físicos e pretende quantificar a resposta de indivíduos frente a um estímulo. CIVILLE e OFTEDAL (2012) fazem uma síntese da evolução das técnicas de análise sensorial, considerando que elas se concentram tanto na medida objetiva de propriedades sensoriais dos produtos (compreender produto) e nas respostas subjetivas dos

indivíduos (compreensão dos consumidores), bem como na interpretação da resposta do consumidor através da compreensão da resposta ao produto (ligando produto e entendimento do consumidor).

Vários trabalhos, alguns dos quais citados a seguir, tem sido desenvolvidos para melhorar a qualidade dos processos produtivos de alimentos fazendo uso de avaliação de suas características sensoriais.

OSÓRIO *et al*. (2009) desenvolveram estudo sobre as características sensoriais que propiciam a satisfação com a carne ovina, entre as quais, suculência, cor, textura, odor e sabor. Concluíram que o aperfeiçoamento dos processos de produção, industrialização e comercialização para obter um produto de qualidade serão consolidados se existirem técnicas claras e práticas para descrever os caracteres relacionados com a qualidade da carne que possam ser medidos na carcaça e que tenham relação biológica com uma avaliação *in vivo*.

BORGES *et. al*. (2010), visando garantir a qualidade nutricional e sensorial de refeições, apresentaram uma classificação de vegetais utilizados no processo produtivo de refeições comerciais e coletivas, correlacionando as características nutricionais, sensoriais e técnicas de processamento. A classificação considerada adequada definiu sete grupos originando-se da utilização de classificações já existentes com uma abordagem de lógica clássica: o vegetal pertence ou não pertence a um dos grupos. Chegaram à conclusão de que o controle da interação entre aspectos nutricionais, sensoriais e de técnicas de processamento desde a aquisição até a distribuição do alimento pronto poderá, potencialmente, resultar em alimentos mais saudáveis e que o controle da qualidade sensorial dos alimentos pode influenciar a escolha e consumo dos alimentos preparados. Entretanto, uma das dificuldades encontrada no desenvolvimento do estudo foi a definição dos critérios de qualidade nutricional e sensorial.

PANACHUKI *et al.* (2011) avaliaram o efeito de diferentes níveis de salinidade no solo provocados pelo uso da fertirrigação, nas características sensoriais de frutos do tomateiro. Foi realizado um experimento, onde para a análise sensorial dos frutos foi realizado o teste hedônico com 39 provadores. Foi solicitado que fossem atribuídas notas de 1 a 7, onde nota 1 representava desgostei muito e nota 7, gostei muito e que se descrevessem quais os atributos que caracterizavam

essas notas. O estudo permitiu verificar que os índices de salinidade utilizados não interferiram na aceitação do produto.

IOANNOU *et al*. (2002) propõe uma abordagem baseada na teoria dos conjuntos *fuzzy* para avaliar a ocorrência de um defeito em salsichas (formação de crostas), cuja avaliação depende da percepção do avaliador. O modelo proposto levou em consideração a percepção de dois avaliadores e um banco de dados com 76 imagens. Os autores consideraram que os conceitos matemáticos utilizados no trabalho parecem promissores, mas aconselham o desenvolvimento de outros trabalhos comparando mensurações que dependam da percepção com mensurações que dependam de instrumentos.

KUPONGSAK e TAN (2006) também usaram conjuntos *fuzzy, além d*e redes neurais, para alcançar a qualidade desejada para atributos sensoriais de alimento oriundo de um processo industrial (produção de bolo de arroz). Os primeiros foram utilizados para interpretar respostas sensoriais, enquanto as redes neurais foram aplicadas na modelagem das relações entre estas variáveis e as do processo produtivo. O estudo desenvolvido demonstrou o grande potencial da teoria dos conjuntos *fuzzy* para quantificar as avaliações sensoriais, salientando, entretanto, que mais pesquisas são necessárias para determinar a eficácia geral da abordagem para outros processos e produtos.

Na indústria de alimentos uma prática bastante frequente na avaliação de características definidoras da qualidade consiste na atribuição de notas a estas características por um grupo de juízes. Diante do que foi exposto, parece ser muito pertinente utilizar estas notas para gerar um valor *fuzzy* que represente o resultado final da característica avaliada se forem consideradas todas as notas atribuídas pelos juízes à determinada característica ou até mesmo para representar a qualidade final de um produto se forem consideradas todas as notas atribuídas a todas as características de qualidade de determinado produto. Para tal, entretanto, é necessário transformar um conjunto de valores discreto em um conjunto *fuzzy*. A seguir apresenta-se um método que pode ser utilizado com esta finalidade.

## 2.11 Fechamento do Capítulo

Nesse capítulo foi feito a revisão bibliográfica do trabalho. Foram tratados tópicos de qualidade, de matemática *fuzzy*, gráficos de controle, gráficos de controle *fuzzy*, dominância *fuzzy*, a aplicação da junção dessas teorias e por fim, uma breve ambientalização na teoria de produção de iogurte e análise sensorial.

# 3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este capítulo tem por finalidade descrever o cenário do estudo e o método de trabalho escolhido para esta pesquisa. Dividiu-se em duas seções principais: definição da estratégia e estudo de caso.

## 3.1 Definição da Estratégia

No primeiro momento foi definido o interesse pela área de controle de qualidade, por acreditar ser um tema de grande relevância para um país que busca atingir padrões de desenvolvimento tecnológico diferenciados. Além disso, controlar processos produtivos reduz custos e melhora a qualidade do produto final, incentivando o mercado consumidor e, consequentemente, aquecendo a economia.

Após a definição da área de interesse, iniciou-se um processo de estudo e aprofundamento de alguns tópicos da área de estatística, mais especificamente controle estatístico de processos (CEP) e, ao mesmo tempo, o estudo de tópicos de lógica f*uzzy,* para enfim definir uma estratégia que facilitasse a construção de gráficos de controle f*uzzy*. A próxima seção descreve de forma mais clara esse momento.

### 3.1.1 CEP e Lógica *Fuzzy*

Inicialmente buscou-se aprofundar o conhecimento sobre alguns tópicos de estatística básica em contextos de aplicabilidade. Com esse estudo, buscou-se melhorar o conhecimento em conceitos mais aprofundados de estatística.

Ainda nesse contexto, o próximo momento foi a leitura sobre qualidade. O entendimento dos principais tópicos sobre controle de qualidade até o aprofundamento da leitura sobre CEP, um tópico já consolidado na literatura, de grande relevância para processos que buscam padrão de excelência em seus produtos. Dentre as ferramentas estatísticas usadas em CEP, destacam-se os gráficos de controle.

Estes gráficos se destacam pelo fato de serem de fácil leitura e possibilitarem o monitoramento *online* do processo, identificando possíveis problemas em processos produtivos em tempo real. Foram estudados alguns tipos de gráfico de controle, dentre eles o gráfico de média e amplitude.

No contexto da lógica *fuzzy*, aprofundou-se o estudo com a busca por um método de transformação de valores *crisp* em valores *fuzzy*. Em continuidade buscou-se um método para a construção de gráficos de controle para avaliar a tendência central e variabilidade de um processo que pudessem ser construídos com os valores *fuzzy*.

Após definição de uma estratégia para construção de gráficos de controle *fuzzy*, uma avaliação preliminar do seu desempenho é feita pela comparação destes gráficos *fuzzy* com os gráficos convencionais de Shewhart em um estudo de caso onde as características definidoras da qualidade são dados nebulosos, que não são representações exatas ou não podem ser medidas com precisão. É nesse contexto que o gráfico *fuzzy* é de fundamental importância, pois se acredita que ao trabalhar com dados imprecisos, valores *fuzzy* poderão captar melhor a realidade do processo produtivo.

## 3.2 Estudo de Caso

Inicialmente foi feita uma busca exploratória por um processo produtivo onde fosse possível e importante a aplicação de ferramentas de controle de qualidade para a melhoria do processo de produção e que possuísse características de qualidade difíceis de serem mensuradas, justificando a utilização dos gráficos *fuzzy*

Na região de Alegrete existe uma instituição de ensino, identificada por “A”, que possui uma UEP (Unidade de Ensino e Produção) de agroindústria onde é produzido iogurte. Viu-se nessa agroindústria uma boa possibilidade de aplicação, pois entre as principais características definidoras da qualidade do iogurte estão algumas características sensoriais, difíceis de serem mensuradas.

Essa agroindústria é de pequeno porte e necessita de melhorias na produção para obter um iogurte com boa qualidade. Iniciou-se então o processo de ambientalização, onde foi possível conhecer e entender o funcionamento de uma agroindústria onde é produzido iogurte.

### 3.2.1 Objeto de Estudo

Após a definição do objeto de estudo, o iogurte, foi feita a caracterização de seu processo produtivo por meio de entrevistas com os envolvidos na produção, bem como observações *in loco*. Após conhecer e entender este processo de produção iniciou-se um estudo voltado para as características definidoras da qualidade do produto final.

Então surgiram as seguintes questões: Quais características de qualidade do iogurte considerar? De que forma estudá-las? Como avaliar os resultados?

Dentre as características definidoras do produto final foram elencadas algumas que são consideradas importantes e difíceis de serem mensuradas por dependerem da percepção dos indivíduos. São elas, cor, aroma, consistência, sabor e acidez, depois de identificadas, foi preciso buscar uma forma de mensurá-las.

### 3.2.2 Instrumento

Foi elaborada uma ficha de avaliação, apresentada no Apêndice 1, para ser preenchida por juízes. Nela, além dos dados de identificação, para cada característica analisada, cada juiz assinala um ponto em um segmento de reta sem marcações de escala, que posteriormente é transformado em uma nota, variando de 0 a 10. Esta avaliação toma como padrão um iogurte industrial produzido dentro dos padrões desejáveis e com a mesma classificação do produto produzido na agroindústria “A”.

### 3.2.3 Coleta de Dados

Foram feitas duas coletas por semana, o que é considerado ideal pelos autores da área de alimentos para evitar insensibilidade nos avaliadores. Fazer mais do que duas análises por semana pode tornar o grupo viciado, não identificando possíveis variações nas características estudadas.

Inicialmente a coleta foi feita com um grupo treinado de 13 alunos do quinto semestre do curso de Tecnologia em Alimentos da instituição “A”. O grupo é considerado treinado por ser composto por alunos que cursaram a disciplina de Análise Sensorial. Entretanto, a análise final considerou as avaliações feitas por cinco avaliadores, escolhidos entre os treze, por seu comportamento na condução das avaliações e por estarem presentes em todos os dias de coleta.

As coletas acontecerem durante 19 dias e em cada um deles foram avaliadas quatro amostras de iogurte.

### 3.2.4 Análise de Dados

Os resultados obtidos (notas atribuídas por cada um dos cinco juízes) sob a forma de valores *crisps* foram organizados em um banco de dados (Apêndice 2)

para que se construíssem gráficos de controle obtidos de acordo com a estratégia proposta. Paralelamente foram construídos gráficos de controle de *Shewhart* para que fossem comparados aos obtidos pela estratégia proposta.

Para executar estas análises e realizar todos os cálculos necessários, foram utilizados softwares de matemática, onde também foi possível implementar alguns algoritmos utilizados em algumas das etapas desta análise (Apêndice 4).

De acordo com Gil (2010), a pesquisa é considerada aplicada, isso se justifica pelo fato de gerar conhecimentos para aplicação prática e dirigidos à solução de problemas específicos. Na abordage do problema, pode-se classificar a pesquisa como quantitativa, pois usa de expressões estatísticas para a análise dos resultados. No que diz respeito ao procedimento utilizado, classifica-se como bibliográfica e documental, pois é baseada em livros, artigos, leis, sítios eletrônicos e trabalhos monográficos. Mas ainda poderia ser classificada como estudo de caso, pois os dados são coletados por meio de observações. Outra classificação aceitável é a exploratória, pois um dos objetivos é ter maior familiaridade com o problema e a partir de então orientar a formulação de hipóteses.

# 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção será feita a apresentação e uma breve discussão da estratégia proposta nesse trabalho e os resultados alcançados com sua aplicação em um processo de produtivo.

## 4.1 A Estratégia Proposta

A estratégia, que tem como objetivo viabilizar a utilização de gráficos de controle para caracterizar e monitorar processos a partir de informações imprecisas consiste na combinação de dois métodos: um para transformação de valores *crisp* em valores *fuzzy* proposto em Cheng (2005) e outro para construção de gráficos de controle *fuzzy*, adaptado de Shu e Wu (2011).

De acordo com vários autores da área, tais como Montgomery (2012) e Samohyl (2009), o planejamento da implantação dos gráficos de controle para avaliação e monitoramento de processos ocorre através das seguintes etapas:

a) análise detalhada de todo o processo;

b) seleção das características de qualidade a serem monitoradas;

c) identificação dos parâmetros do processo relacionados a estas características de qualidade;

d) identificação dos parâmetros do processo a serem monitorados;

e) definição do modelo de gráfico a ser utilizado e determinação de seus parâmetros;

f) coleta das informações para a operacionalização do modelo selecionado;

g) implementação dos ajustes necessários.

Quando o modelo de gráfico a ser construído for *fuzzy,* propõe-se que as etapas (e) e (f) sejam desdobradas em:

a) para cada unidade de amostragem realizar cinco mensurações *crisp*;

b) transformar os valores *crisps* em um valor *fuzzy* pelo método proposto em Cheng (2005), descrito e exemplificado na seção 2.2.3;

c) construir gráficos de controle para média e para amplitude pelo método descrito e exemplificado na seção 2.2.4, adaptado de Shu e Wu (2011), considerando o método de Yuan para ordenação de valores, descrito e exemplificado na seção 2.2.5.

Na estratégia proposta a definição de utilização de cinco valores *crisp* para construir os valores *fuzzy* se embasou em estudo desenvolvido por Bartlett e Kendall (1946) que mostrou a necessidade de utilização de pelo menos cinco replicações em experimentos para obtenção de estimação eficiente da variabilidade, mais especificamente, a variância. Na estratégia proposta, a medida usada para representar a variabilidade é a amplitude total que, de acordo com Mattos (2014), não deve ser usada em amostras grandes por depender apenas dos extremos: o menor e o maior valor.

Na próxima seção será apresentada uma aplicação desta estratégia em um processo de produção do iogurte.

## 4.2 Aplicação

Antes de realizar a aplicação efetiva da estratégia será feita uma breve descrição do processo de produção do iogurte, de forma a compreender os motivos que levaram a escolha das características cor, aroma, consistência, sabor e acidez para a aplicação da estratégia.

### 4.2.1 Descrição do Processo Produtivo Analisado

Nesse item será feito uma breve descrição de como é produzido o iogurte na instituição A, como o produto é classificado e suas características de qualidade.

#### 4.2.1.1 Coleta e transporte do leite

As características definidoras da qualidade do iogurte estão diretamente relacionadas com o leite (matéria prima) e o processo de produção.

A coleta do leite é feita na UEP de Zootecnia III de uma Instituição de Ensino Superior (IES), a qual tem um professor responsável, além de técnicos que atuam diariamente em atividades específicas do setor, como: manejo, ordenha, sanidade e alimentação do rebanho. É nesse momento onde os estudantes, num processo de complementação da sua formação, realizam monitorias. Além de outras atribuições, essas pessoas são responsáveis pela etapa de coleta e armazenamento inicial do leite.

O leite é coletado através de um processo de ordenha mecanizado e armazenado em tambor alumínio refrigerado. Nesse recipiente, o leite é resfriado até atingir a temperatura de 4º Celsius, pois assim, o leite mantém suas propriedades naturais e evita a criação de um ambiente que proporcione a proliferação de bactérias. Este processo de coleta do leite é feito duas vezes ao dia, uma pela manhã em torno das 05h30min horas e a outra pela tarde, a partir das 17h30min horas. Esse processo de ordenha é realizado pelos alunos plantonistas da UEP, supervisionado por um técnico administrativo em educação.

Após ser resfriado, o leite é colocado em tarros de alumínio de 50 l para ser transportado até a UEP de Agroindústria, localizada cerca de 1500 m distante da UEP de Zootecnia III. O transporte é feito por um trator equipado com uma caçamba, local onde os tarros são acomodados para o deslocamento. Ao chegar na agroindústria são retiradas duas amostras para o teste de alizarol (teste realizado para medir a acidez do leite), o qual é feito no laboratório e irá informar o nível de acidez da matéria prima.

#### 4.2.1.2 Processo de produção do iogurte

A quantidade de iogurte produzido na agroindústria depende da quantidade de leite recebido da UEP de Zootecnia III. Atualmente são feitos cerca de 500 l de iogurte por semana, em três dias: segunda-feira, quarta-feira e sexta-feira. Na terça-feira e quinta-feira, o leite é destinado para a produção de queijos.

Na parte inicial do processo de produção do iogurte o leite é filtrado e colocado na iogurteira, onde é realizado um processo de pasteurização com agitação constante e aquecimento de 80ºC.

Ainda na temperatura de 80ºC, são adicionados 10% de açúcar, calculados a partir da quantidade de leite. A temperatura fica mantida constante por mais 30min. O açúcar tem por finalidade tornar o iogurte mais consistente e melhorar o sabor.

Após esse tempo, o leite é resfriado até atingir a temperatura de 40ºC e então adicionado a cultura láctea na quantidade de 1,4 g para cada 100 l.

O período de fermentação varia de 6h a 8h. É onde a lactose (açúcar do leite) é transformada em ácido láctico, que será o agente da coagulação do leite.

Terminado o repouso, retira-se a camada imediatamente superficial e realiza-se um processo de agitação. Em seguida, adiciona-se 50 g de sorbato de potássio para cada 100 l de leite, inicialmente colocados na iogurteira.

Na sequencia, o Iogurte é retirado da iogurteira, passado num coador, e em seguida colocado em baldes onde é colocado o sabor artificial (250g/20L de Iogurte).

O iogurte pronto é então colocado em garrafas plásticas de 1000 ml e mantido sob refrigeração de 4ºC.

#### 4.2.1.3 Descrição do produto – iogurte

Na produção de iogurte na Agroindústria são utilizados os seguintes ingredientes que compõem a formulação do iogurte: leite pasteurizado, açúcar, bactérias lácticas, além do uso do conservante sorbato de potássio e, coloração e

aromatização característico de cada sabor (morango, pêssego, coco, ameixa, entre outros que são produzidos eventualmente).

O iogurte está registrado na Secretaria de Agricultura e Pecuária SMAP/SIM sob nº 001/005, secretaria da cidade de Alegrete – RS, possuindo as informações nutricionais apresentadas na tabela 4. Tem validade de 30 dias após a data de fabricação e deverá ser mantido sob refrigeração variando entre 0ºC e 10ºC, e ainda ser consumido, após aberto, num prazo máximo de 5 dias.

Tabela 9 - Informações nutricionais do iogurte produzido na Agroindústria da Instituição A

| INFORMAÇÃO NUTRICIONAL<br>Porção de 200 ml (1 copo) | | |
|---|---|---|
| Quantidade por Porção | | %VD[1] |
| Valor energético | 176 Kcal/739 KJ | 9% |
| Carboidratos | 26 g | 9% |
| Proteínas | 5,8 g | 9% |
| Gorduras totais | 5,2 g | 9% |
| Gorduras Saturadas | 3,6 g | 17% |
| Cálcio | 208 mg | 21% |
| Ferro | 0,26 mg | 2% |
| Sódio | 85 mg | 4% |

Fonte: Secretaria de Agricultura e Pecuária SMAP/SIM
OBS: Não contém quantidades significativas de gorduras trans e fibra alimentar.

### 4.2.2 Seleção das Características de Qualidade a Serem Monitoradas e Observações

A aplicação do método em estudo é realizada na análise de um processo produtivo de uma bebida fermentada: o iogurte, descrito na seção 4.2.1. Na identificação das características definidoras de sua qualidade são elencadas algumas difíceis de serem mensuradas por depender da percepção dos indivíduos. São elas: cor, aroma, consistência, sabor e acidez.

Para avaliá-las são feitas observações na linha de produção de iogurte sabor pêssego. As informações são colhidas em dois dias da semana, sendo analisadas

quatro unidades de um mesmo lote. As observações estão nas tabelas AP2.1, AP2.2, AP2.3, AP2.4 e AP2.5 no Apêndice 2.

### 4.2.3 Resultados obtidos com a aplicação da estratégia proposta

Inicialmente as observações são transformadas em valores *fuzzy* pelo método de Cheng. Os resultados obtidos estão nas tabelas AP3.1, AP3.2, AP3.3, AP3.4 e AP3.5 no Apêndice 3 e são usados para a construção dos gráficos de controle *fuzzy*, o que é feito para cada uma das características sensoriais. Os resultados obtidos sobre o processo com a análise destes gráficos são comparados com os obtidos pela análise dos gráficos de controle de Shewhart, construídos a partir dos dados brutos (tabelas AP2.1, AP2.2, AP2.3, AP2.4 e AP2.5 no Apêndice 2).

Para a avaliação do processo nos gráficos *fuzzy* serão utilizados dois valores de $\gamma$ ($\gamma = 0{,}7$ e $\gamma = 0{,}5$). Para $\gamma = 0{,}7$, de acordo com a seção 2.8, o processo terá as seguintes classificações:

a) Se $DF(\tilde{s}_{\overline{X}}, \tilde{\overline{x}}_i) > 0{,}7$ e $DF(\tilde{\overline{x}}_i, \tilde{i}_{\overline{X}}) > 0{,}7$, o processo estará em controle.

b) Se $DF(\tilde{s}_{\overline{X}}, \tilde{\overline{x}}_i) < 0{,}3$ e $DF(\tilde{\overline{x}}_i, \tilde{i}_{\overline{X}}) < 0{,}3$, o processo estará fora de controle.

c) Se $0{,}3 < DF(\tilde{s}_{\overline{X}}, \tilde{\overline{x}}_i) < 0{,}5$ ou $0{,}3 < DF(\tilde{\overline{x}}_i, \tilde{i}_{\overline{X}}) < 0{,}5$, então o processo estará um pouco fora de controle.

d) O processo estará um pouco em controle se ocorrer uma das situações abaixo:

d.1) $DF(\tilde{\overline{x}}_i, \tilde{i}_{\overline{X}}) > 0{,}7$ e $0{,}5 \leq DF(\tilde{s}_{\overline{X}}, \tilde{\overline{x}}_i) \leq 0{,}7$

d.2) $DF(\tilde{s}_{\overline{X}}, \tilde{\overline{x}}_i) > 0{,}7$ e $0{,}5 \leq DF(\tilde{\overline{x}}_i, \tilde{i}_{\overline{X}}) \leq 0{,}7$

d.3) $0{,}5 \leq DF(\tilde{s}_{\overline{X}}, \tilde{\overline{x}}_i) \leq 0{,}7$ e $0{,}5 \leq DF(\tilde{\overline{x}}_i, \tilde{i}_{\overline{X}}) \leq 0{,}7$

Para $\gamma = 0{,}5$, o processo de produção pode ser categorizado conforme segue.

a) Se $DF(\tilde{s}_{\overline{X}}, \tilde{\overline{x}}_i) > 0{,}5$ e $DF(\tilde{\overline{x}}_i, \tilde{i}_{\overline{X}}) > 0{,}5$, o processo estará em controle.

b) Se $DF(\tilde{s}_{\overline{X}}, \tilde{\overline{x}}_i) < 0{,}5$ ou $DF(\tilde{\overline{x}}_i, \tilde{i}_{\overline{X}}) < 0{,}5$, o processo estará fora de controle.

c) Estará um pouco em controle se uma das situações abaixo ocorrer:

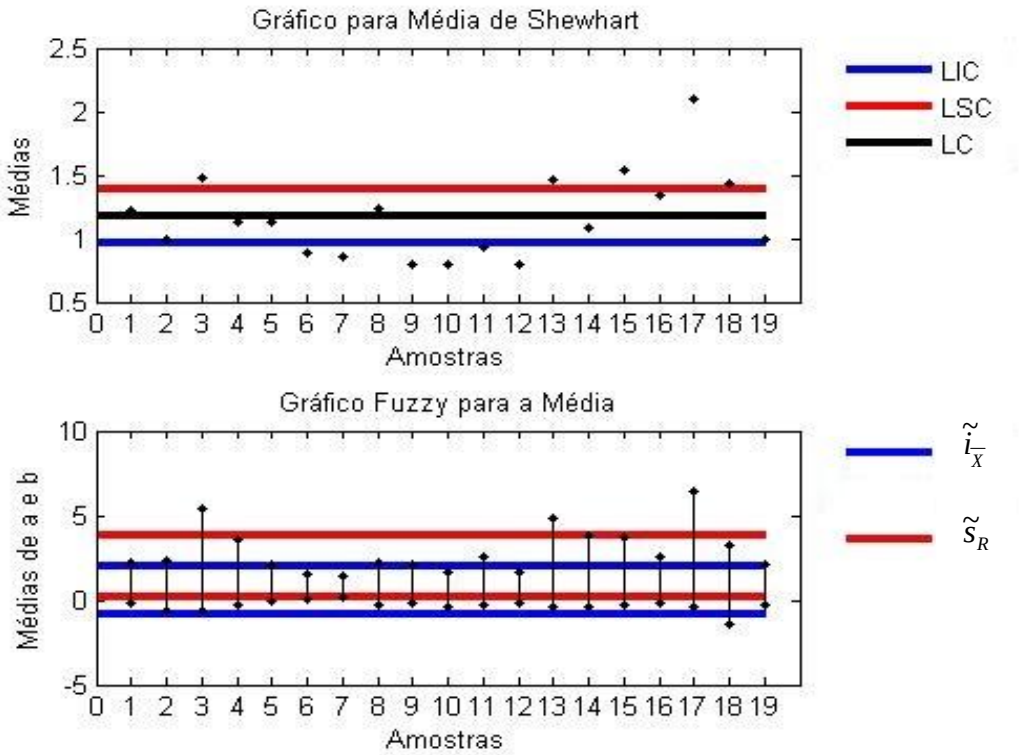
$DF(\tilde{s}_{\overline{X}}, \tilde{\overline{x}}_i) = 0{,}5$ e $DF(\tilde{\overline{x}}_i, \tilde{i}_{\overline{X}}) > 0{,}5$ ou $DF(\tilde{s}_{\overline{X}}, \tilde{\overline{x}}_i) > 0{,}5$ e $DF(\tilde{\overline{x}}_i, \tilde{i}_{\overline{X}}) = 0{,}5$.

4.2.3.1 Característica cor

a) Gráfico de controle para a Média

Na figura 16 tem-se o gráfico de controle de Shewhart para a média e o respectivo gráfico de controle *fuzzy* para a média, ambos da característica cor do iogurte.

Figura 16 - Gráfico de controle de Shewhart e gráfico de controle *fuzzy* de média para a cor do iogurte



São feitas duas avaliações: uma para o gráfico tradicional e outra para o gráfico *fuzzy*.

Avaliação 1: Gráfico Tradicional para a Média da Cor

O gráfico de média para a cor aponta evidências de instabilidade no processo, pois conforme é possível observar no gráfico, muitos pontos estão fora das linhas de controle o que, de acordo com os padrões destacados em 2.1.3, são fortes indícios de instabilidade. Os demais padrões destacados em 2.1.3 não foram identificados. Salienta-se que, entre a extração da amostra 14 e a extração da amostra 15, houve uma causa especial cujo efeito foi detectado pelo gráfico: aumento dos resultados médios.

Avaliação 2: Gráfico *fuzzy* da média para a Cor

O gráfico *fuzzy* de média para a cor aponta evidencias de instabilidade, pois as amostras 3, 13 e 17 parecem dominar o limite de controle superior. Essas evidências são comprovadas pela tabela de analises de dominâncias (Tabela 10). Então, quando $\gamma = 0{,}5$, o processo é considerado instável. As mesmas amostras quando $\gamma = 0{,}7$ são consideradas pouco fora de controle, o indicado é ficar atento, pois são três amostras que estão em uma zona de alerta que exige cuidado. Quando é usado $\gamma = 0{,}7$, aumenta-se a rigorosidade de avaliação do processo, criando zonas de alertas. A investigação, a busca por causas especiais, irá depender dos custos desse trabalho.

Na sequência, a tabela 10 mostra a avaliação do gráfico *fuzzy* de média para a característica cor do iogurte.

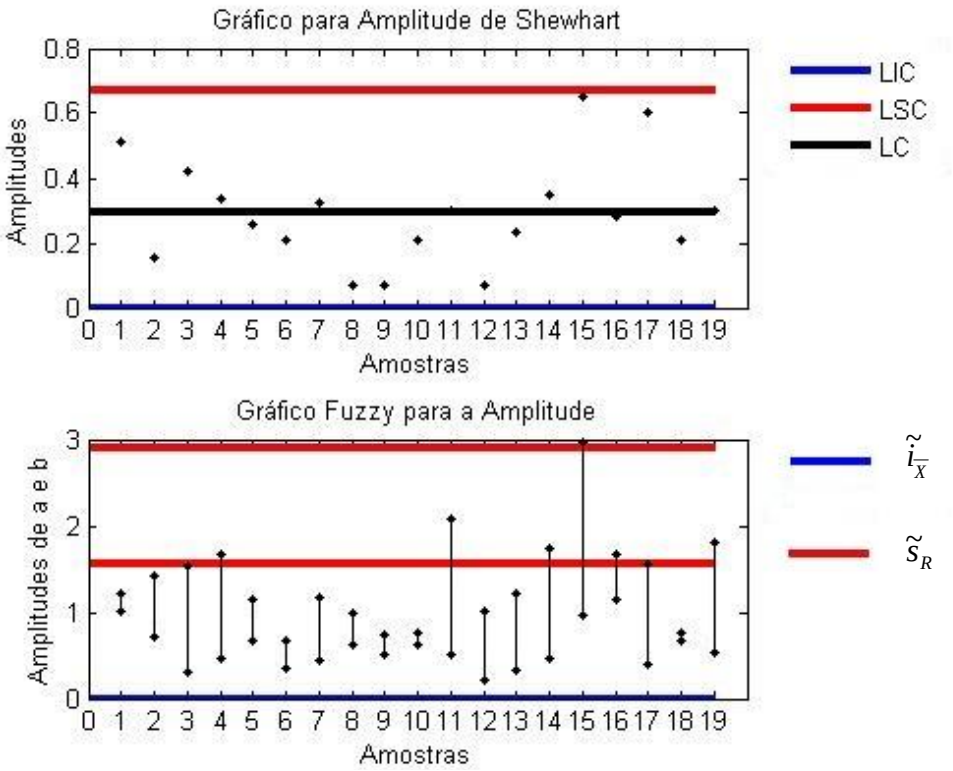
Tabela 10 – Cor do iogurte: avaliação do gráfico de controle *fuzzy* $(\overline{X})$ para $\gamma = 0{,}5$ e $\gamma = 0{,}7$

| Amostras *i* | $DF(\tilde{s}_{\overline{X}}, \tilde{\overline{x}}_i)$ | $DF(\tilde{\overline{x}}_i, \tilde{i}_{\overline{X}})$ | Processo para $\gamma = 0{,}5$ | Processo para $\gamma = 0{,}7$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,6960 | 0,6081 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 2 | 0,7204 | 0,5226 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 3 | 0,4507 | 0,7074 | Fora de Controle | Pouco Fora de Controle |
| 4 | 0,5602 | 0,6414 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 5 | 0,7181 | 0,5788 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 6 | 0,8035 | 0,5543 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 7 | 0,8243 | 0,5638 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 8 | 0,7047 | 0,5734 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 9 | 0,7395 | 0,5110 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 10 | 0,8131 | 0,5161 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 11 | 0,6761 | 0,5434 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 12 | 0,8075 | 0,5428 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 13 | 0,4713 | 0,7180 | Fora de Controle | Pouco Fora de Controle |
| 14 | 0,5474 | 0,6253 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 15 | 0,5482 | 0,6951 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 16 | 0,6514 | 0,6420 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 17 | 0,4016 | 0,7941 | Fora de Controle | Pouco Fora de Controle |
| 18 | 0,6554 | 0,5533 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 19 | 0,7338 | 0,5407 | Em Controle | Pouco em Controle |

b) Gráfico de controle para a Amplitude

Na figura 17 tem-se o gráfico de controle de Shewhart para a amplitude e o respectivo gráfico de controle *fuzzy* para a amplitude, ambos da característica cor do iogurte.

Figura 17 - Gráfico de controle de Shewhart e gráfico de controle *fuzzy* ( $R$ ) para a cor do iogurte




São feitas duas avaliações: uma para o gráfico tradicional e outra para o gráfico *fuzzy*.

Avaliação 1: Gráfico Tradicional para a Amplitude da Cor

O gráfico de amplitude para a cor não mostra nenhuma evidência aparente de instabilidade, conforme padrões destacados em 2.1.3. Portanto, o processo é estável quanto a cor do iogurte. Observa-se, entretanto, que a partir da amostra 14 parece ter havido um aumento na amplitude amostral.

Avaliação 2: Gráfico *fuzzy* da Amplitude para a Cor

O gráfico *fuzzy* da amplitude para a cor, quando $\gamma = 0{,}5$ não apresentou nenhuma evidência de instabilidade. Quando o grau de dominância exigido é $\gamma = 0{,}7$ a amostra 15 é considerada pouco em controle (Tabela 11), o que sugere atenção.

Na sequência a tabela 11 mostra a avaliação do gráfico *fuzzy* de amplitude para a característica cor do iogurte.

Tabela 11 – Cor do iogurte: avaliação do gráfico de controle *fuzzy* $(R)$ para $\gamma = 0{,}5$ e $\gamma = 0{,}7$

| Amostras $i$ | $DF(\tilde{s}_{\bar{X}}, \tilde{\bar{x}}_i)$ | $DF(\tilde{\bar{x}}_i, \tilde{i}_{\bar{X}})$ | Processo para $\gamma = 0{,}5$ | Processo para $\gamma = 0{,}7$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 2 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 3 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 4 | 0,9951 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 5 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 6 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 7 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 8 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 9 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 10 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 11 | 0,9163 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 12 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 13 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 14 | 0,9890 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 15 | 0,5906 | 1,0000 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 16 | 0,9914 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 17 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 18 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 19 | 0,9780 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |

Considerações: Para esta característica de qualidade, o gráfico de média convencional aponta evidências de instabilidade para a tendência central, Já o gráfico de amplitude convencional não aponta nenhuma evidência. O gráfico *fuzzy* de média para a cor, no nível de dominância $\gamma = 0{,}5$ captou instabilidade no processo, considerando as amostras 3, 13 e 17 fora de controle. As mesmas amostras quando $\gamma = 0{,}7$ são consideradas pouco fora de controle. No gráfico *fuzzy* de amplitude para o grau de dominância $\gamma = 0{,}7$ a amostra 15 foi considerada pouco

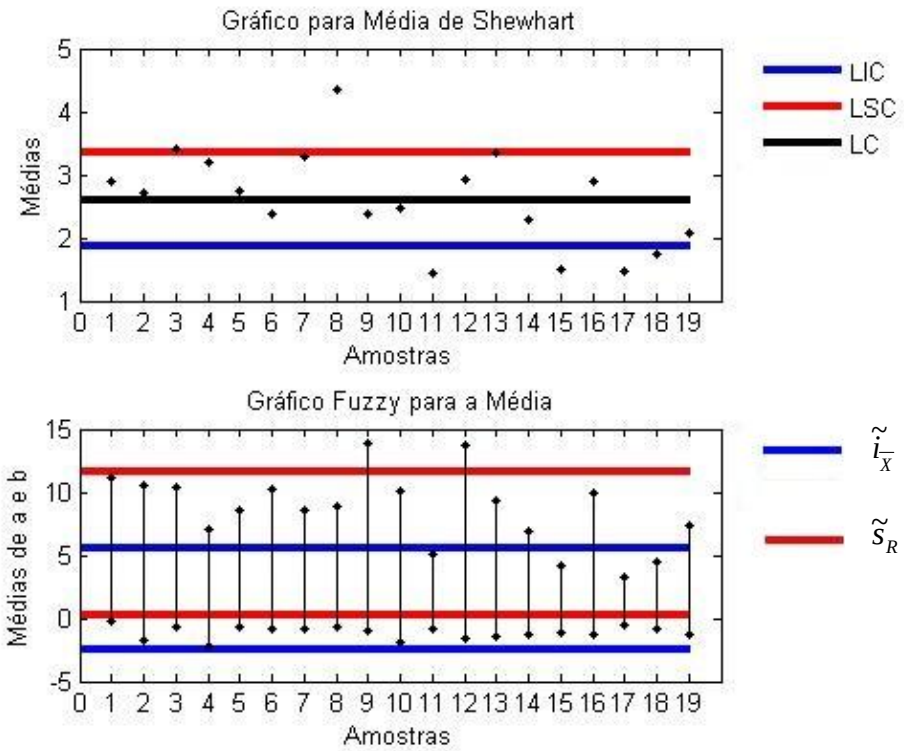
em controle. O gráfico de controle tradicional para a média consegue identificar a ocorrência de causa especial, o que não ficou tão evidente no gráfico de controle *fuzzy*. Para a amplitude, entretanto, o gráfico *fuzzy* apresentou maior sensibilidade. Os gráficos *fuzzy* apresentaram sensibilidade, pois captam instabilidade no processo assim como os gráficos tradicionais, no entanto podem criar zonas de alerta, onde a busca por causas especiais irá depender dos custos dessas investigações.

4.2.3.2 Característica aroma

a) Gráfico de controle para a Média

Na figura 18, tem-se o gráfico de controle de Shewhart para a média e o respectivo gráfico de controle *fuzzy* para a média, ambos da característica aroma do iogurte.

Figura 18 - Gráfico de controle de Shewhart e gráfico de controle *fuzzy* de média para o aroma do iogurte



Serão feitas duas avaliações: uma para o gráfico tradicional e outra para o gráfico *fuzzy*.

Avaliação 1: Gráfico Tradicional para a Média para o Aroma

O gráfico de média para o aroma aponta evidências de instabilidade no processo, pois conforme é possível observar no gráfico, muitos pontos estão fora das linhas de controle o que, de acordo com os padrões destacados em 2.1.3, são fortes indícios de instabilidade. Os demais padrões destacados em 2.1.3 não foram identificados. Observe que a causa especial que ocorre entre a amostra 14 e a amostra 15 também tem efeito detectado, parecendo influenciar a média negativamente. Três dos quatro pontos inferiores que indicam processo fora de controle ocorrem depois da amostra 14.

Avaliação 2: Gráfico *fuzzy* da média para o Aroma

O gráfico *fuzzy* de média para o aroma aponta evidencias de instabilidade, pois as amostras 9 e 12 parecem dominar o limite de controle superior e ainda a amostra 17 parece não dominar o limite inferior de controle. Essas evidências são comprovadas pela tabela 12 de analises de dominâncias. Quando $\gamma = 0{,}5$, o processo é considerado instável pelas considerações já feitas. As mesmas amostras quando $\gamma = 0{,}7$ são consideradas pouco fora de controlo, o indicado é ficar atento, pois são três amostras que estão em uma zona de alerta que exige cuidado.

Na sequência a tabela 12 mostra a avaliação do gráfico *fuzzy* de média para a característica aroma do iogurte.

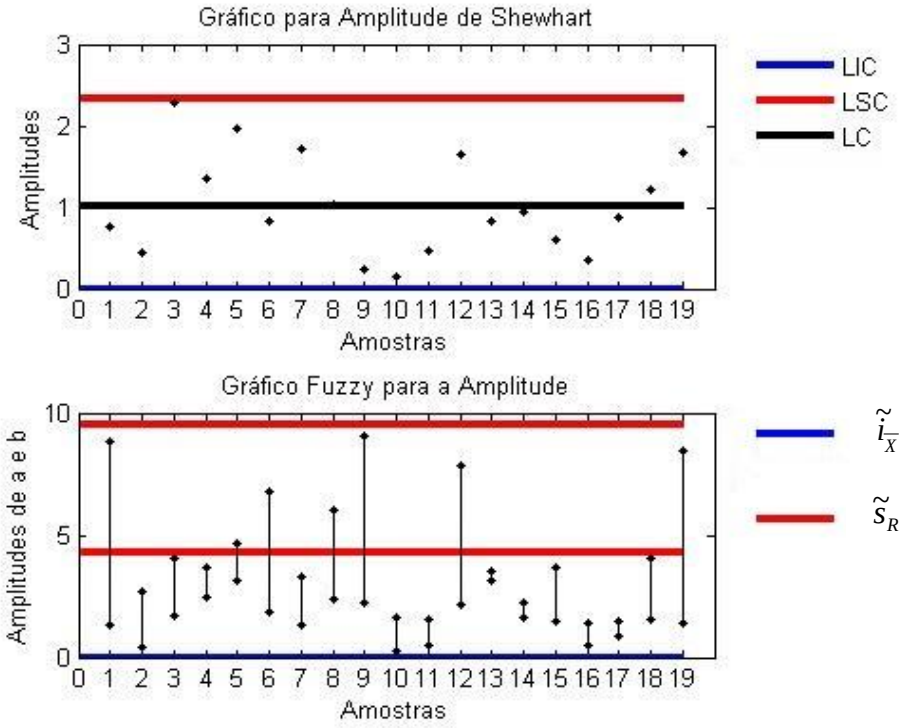
Tabela 12 – Aroma do iogurte: avaliação do gráfico de controle *fuzzy* $(\overline{X})$ para $\gamma = 0{,}5$ e $\gamma = 0{,}7$

| Amostras *i* | $DF(\tilde{s}_{\overline{X}}, \tilde{\overline{x}}_i)$ | $DF(\tilde{\overline{x}}_i, \tilde{i}_{\overline{X}})$ | Processo para $\gamma = 0{,}5$ | Processo para $\gamma = 0{,}7$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,5320 | 0,7294 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 2 | 0,5856 | 0,6601 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 3 | 0,5598 | 0,7289 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 4 | 0,7129 | 0,5968 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 5 | 0,6295 | 0,6689 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 6 | 0,5725 | 0,6811 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 7 | 0,6315 | 0,6754 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 8 | 0,6053 | 0,7298 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 9 | 0,4750 | 0,7095 | Fora de Controle | Pouco Fora de Controle |
| 10 | 0,6107 | 0,6276 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 11 | 0,8085 | 0,5442 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 12 | 0,4925 | 0,7126 | Fora de Controle | Pouco Fora de Controle |
| 13 | 0,6184 | 0,6643 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 14 | 0,7133 | 0,6001 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 15 | 0,8550 | 0,5004 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 16 | 0,5924 | 0,6720 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 17 | 0,8955 | 0,4880 | Fora de Controle | Pouco Fora de Controle |
| 18 | 0,8318 | 0,5277 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 19 | 0,7047 | 0,5862 | Em Controle | Pouco em Controle |

b) Gráfico de controle para a Amplitude

Na figura 19, tem-se o gráfico de controle de Shewhart para a amplitude e o respectivo gráfico de controle *fuzzy* para a amplitude, ambos da característica aroma do iogurte.

Figura 19 - Gráfico de controle de Shewhart e gráfico de controle *fuzzy* ( $R$ ) para o aroma do iogurte




Serão feitas duas avaliações: uma para o gráfico tradicional e outra para o gráfico *fuzzy*.

Avaliação 1: Gráfico Tradicional para a Amplitude do Aroma

O gráfico de amplitude para o aroma não mostra nenhuma evidência aparente de instabilidade, conforme padrões destacados em 2.1.3. Portanto, o processo é estável quanto ao aroma do iogurte.

Avaliação 2: Gráfico *fuzzy* da Amplitude para o Aroma

O gráfico *fuzzy* da Amplitude para o aroma, quando $\gamma = 0{,}5$ não apresentou nenhuma evidência de instabilidade. Quando o grau de confiança for $\gamma = 0{,}7$ as amostras 1 e 9, são consideradas pouco em controle, o que sugere atenção. No entanto, estão em uma zona de alerta não muito forte, bastante próximo de estarem em controle (Tabela 13).

Na sequência a tabela 13 mostra a avaliação do gráfico *fuzzy* de amplitude para a característica aroma do iogurte.

Tabela 13 – Aroma do iogurte: avaliação do gráfico de controle *fuzzy* $(R)$ para $\gamma = 0{,}5$ e $\gamma = 0{,}7$

| Amostras *i* | $DF(\tilde{s}_{\overline{X}}, \tilde{\overline{x}}_i)$ | $DF(\tilde{\overline{x}}_i, \tilde{i}_{\overline{X}})$ | Processo para $\gamma = 0{,}5$ | Processo para $\gamma = 0{,}7$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,6832 | 1,0000 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 2 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 3 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 4 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 5 | 0,9929 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 6 | 0,8442 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 7 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 8 | 0,8999 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 9 | 0,6244 | 1,0000 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 10 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 11 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 12 | 0,7270 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 13 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 14 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 15 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 16 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 17 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 18 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 19 | 0,7087 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |

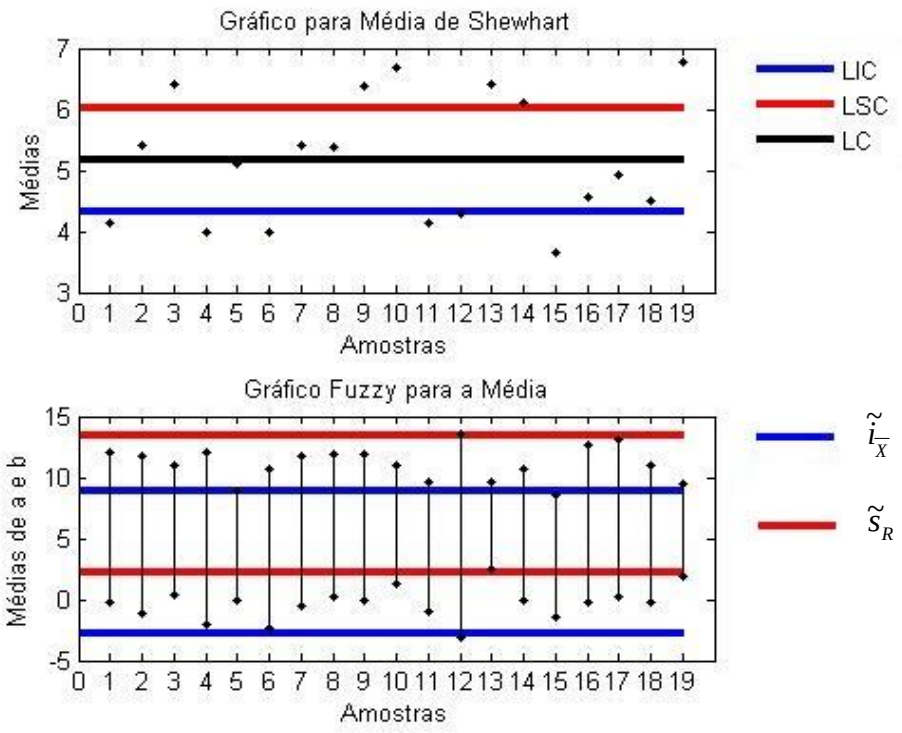
Considerações: Para esta característica de qualidade, o gráfico de média convencional aponta evidências de instabilidade, já o gráfico de amplitude convencional não aponta nenhuma evidência. O gráfico *fuzzy* de média, no nível de dominância $\gamma = 0{,}5$ captou instabilidade no processo, considerando as amostras 9, 12 e 17 fora de controle. As mesmas amostras quando $\gamma = 0{,}7$ são consideradas pouco fora de controle. No gráfico *fuzzy* de amplitude para o grau de confiança $\gamma = 0{,}7$ duas amostras, 1 e 9, foram consideradas pouco em controle.

4.2.3.3 Característica consistência

a) Gráfico de controle para a Média

Na figura 20 tem-se o gráfico de controle de Shewhart para a média e o respectivo gráfico de controle *fuzzy* para a média, ambos da característica consistência do iogurte.

Figura 20 - Gráfico de controle de Shewhart e gráfico de controle *fuzzy* ( $\overline{X}$ ) para a consistência do iogurte




Serão feitas duas avaliações: uma para o gráfico tradicional e outra para o gráfico *fuzzy*.

Avaliação 1: Gráfico Tradicional para a Média da Consistência

O gráfico de média para a consistência mostra evidência de instabilidade, pois, grande parte dos pontos estão fora dos limites de controle, o que compromete a estabilidade do processo. Entretanto, ele não detecta nenhuma evidência da causa especial que ocorreu entre a amostra 14 e amostra 15.

Avaliação 2: Gráfico *fuzzy* da média para a consistência

O gráfico *fuzzy* de média para a consistência, quando $\gamma = 0{,}5$ não mostrou nenhuma evidência de instabilidade. Quando $\gamma = 0{,}7$, o grau de exigência é maior e, no entanto não coloca nenhuma amostra em controle, considera todas as amostras como estando pouco em controle. E novamente, a busca por causas especiais no processo de produção irá depender dos custos com essas buscas.

Na sequência a tabela 14 mostra a avaliação do gráfico *fuzzy* de média para a característica consistência do iogurte.

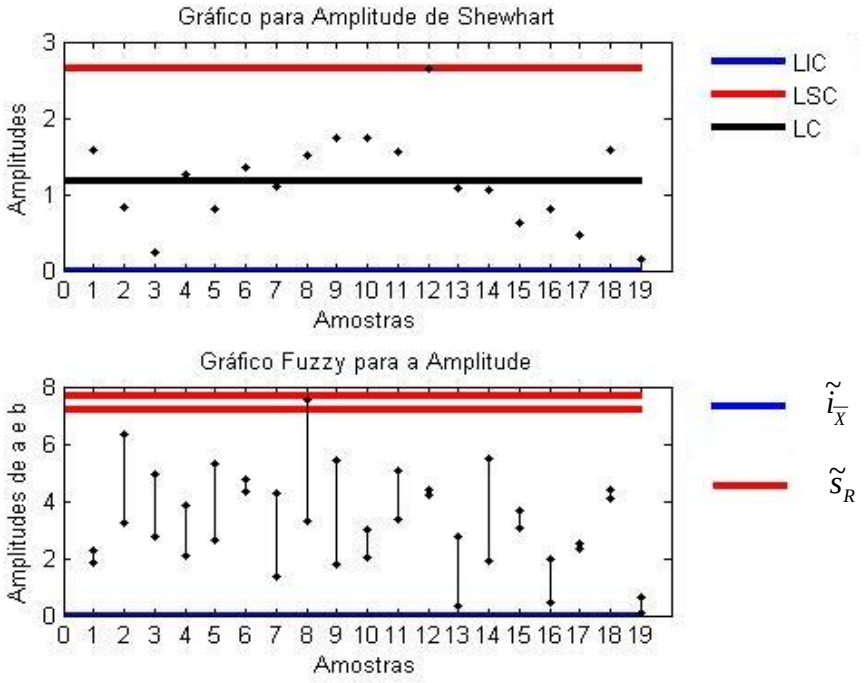
Tabela 14 – Consistência do iogurte: avaliação do gráfico de controle *fuzzy* $(\overline{X})$ para $\gamma = 0{,}5$ e $\gamma = 0{,}7$

| Amostras *i* | $DF(\tilde{s}_{\overline{X}}, \tilde{\overline{x}}_i)$ | $DF(\tilde{\overline{x}}_i, \tilde{i}_{\overline{X}})$ | Processo para $\gamma = 0{,}5$ | Processo para $\gamma = 0{,}7$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,6058 | 0,6440 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 2 | 0,6216 | 0,6495 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 3 | 0,6079 | 0,7107 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 4 | 0,6391 | 0,5957 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 5 | 0,7047 | 0,6277 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 6 | 0,6934 | 0,5617 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 7 | 0,6100 | 0,6695 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 8 | 0,5881 | 0,6985 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 9 | 0,5917 | 0,7026 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 10 | 0,5848 | 0,7537 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 11 | 0,7008 | 0,5892 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 12 | 0,6110 | 0,6005 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 13 | 0,6051 | 0,7742 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 14 | 0,6269 | 0,6857 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 15 | 0,7605 | 0,5362 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 16 | 0,5801 | 0,6731 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 17 | 0,5553 | 0,7049 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 18 | 0,6370 | 0,6448 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 19 | 0,6203 | 0,7565 | Em Controle | Pouco em Controle |

b) Gráfico de controle para a Amplitude

Na figura 21, tem-se o gráfico de controle de Shewhart para a amplitude e o respectivo gráfico de controle *fuzzy* para a amplitude, ambos da característica consistência do iogurte.

Figura 21 - Gráfico de controle de Shewhart e gráfico de controle *fuzzy* $R$ para a consistência do iogurte




Serão feitas duas avaliações: uma para o gráfico tradicional e outra para o gráfico *fuzzy*.

Avaliação 1: Gráfico Tradicional para a Amplitude da Consistência

O gráfico de amplitude para a consistência não mostra nenhuma evidência aparente de instabilidade, conforme padrões destacados em 2.1.3. Portanto, o processo é estável quanto à variabilidade da consistência do iogurte.

Avaliação 2: Gráfico *fuzzy* da Amplitude para a consistência

O gráfico *fuzzy* da Amplitude para a consistência, tanto para o grau de confiança $\gamma = 0{,}5$ como para $\gamma = 0{,}7$ não mostrou nenhuma evidência de instabilidade. O que sugere que o processo em relação à variabilidade da consistência é estável.

Na sequência a tabela 15 mostra a avaliação do gráfico *fuzzy* de amplitude para a característica consistência do iogurte.

Tabela 15 – Consistência do iogurte: avaliação do gráfico de controle *fuzzy* $(R)$ para $\gamma = 0{,}5$ e $\gamma = 0{,}7$

| Amostras *i* | $DF(\tilde{s}_{\bar{X}}, \tilde{\bar{x}}_i)$ | $DF(\tilde{\bar{x}}_i, \tilde{i}_{\bar{X}})$ | Processo para $\gamma = 0{,}5$ | Processo para $\gamma = 0{,}7$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 2 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 3 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 4 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 5 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 6 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 7 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 8 | 0,9860 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 9 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 10 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 11 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 12 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 13 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 14 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 15 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 16 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 17 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 18 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 19 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |

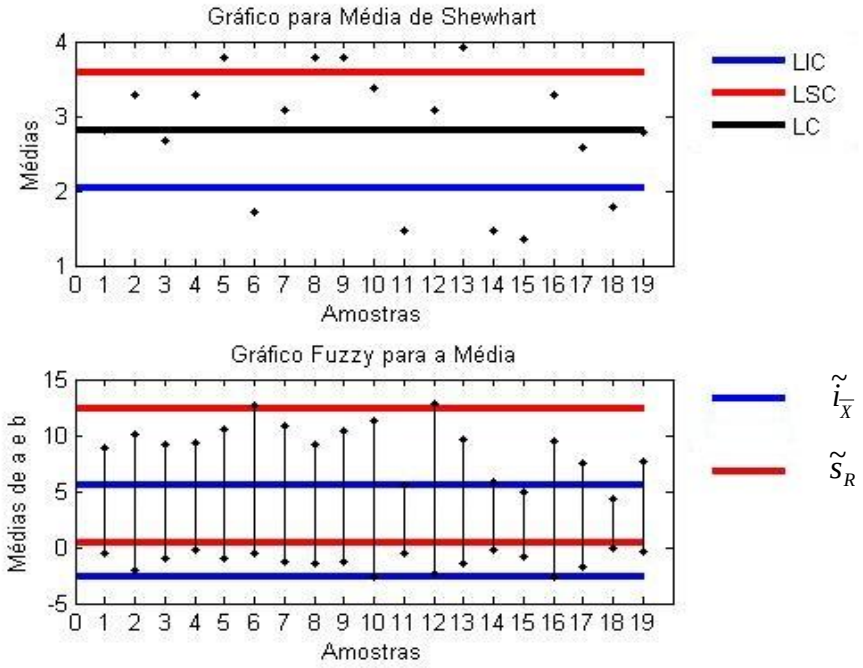
Considerações: Para esta característica de qualidade, o gráfico de média convencional aponta instabilidade no processo para a tendência central, enquanto que o gráfico da amplitude convencional mostra estabilidade no processo para a variabilidade. O gráfico *fuzzy* de média para a consistência, no nível de dominância $\gamma = 0{,}5$ não mostrou nenhuma evidência de instabilidade em relação à tendência central. Quando $\gamma = 0{,}7$ todas as amostras foram consideradas como estando pouco em controle, isso devido ao fato de aumentar a exigência de dominância. No gráfico *fuzzy* de amplitude, tanto para o grau de confiança $\gamma = 0{,}5$ como para $\gamma = 0{,}7$, o processo é considerado em controle. Visualmente pode-se identificar a estabilidade no processo quanto à variabilidade, pois é possível perceber a dominância exercida pelo limite superior de controle em relação às amplitudes médias amostrais.

4.2.3.4 Característica sabor

a) Gráfico de controle para a Média

Na figura 22 tem-se o gráfico de controle de Shewhart para a média e o respectivo gráfico de controle *fuzzy* para a média.

Figura 22 - Gráfico de controle de Shewhart e gráfico de controle *fuzzy* ( $\overline{X}$ ) para o sabor do iogurte



Serão feitas duas avaliações: uma para o gráfico tradicional e outra para o gráfico *fuzzy*.

Avaliação 1: Gráfico Tradicional para a Média do Sabor

O gráfico convencional de média para o sabor mostra evidência de instabilidade, pois se pode ver no gráfico que muitos pontos estão fora dos limites de controle. Portanto, o processo é instável quanto à característica sabor do iogurte. Não detecta causa especial ocorrida entre amostra 14 e amostra 15.

Avaliação 2: Gráfico *fuzzy* da média para o Sabor

O gráfico *fuzzy* de média para o sabor, quando $\gamma = 0{,}5$ aponta que duas amostras estão fora de controle, as amostras 11 e 14. Essas mesmas amostras quando $\gamma = 0{,}7$, o grau de dominância é maior, foram consideradas como pouco fora de controle, enquanto que as demais amostras ficaram na zona de alerta pouco em controle. A busca por causas especiais irá depender dos custos com essa investigação.

Na sequência a tabela 16 mostra a avaliação do gráfico *fuzzy* para a característica sabor do iogurte.

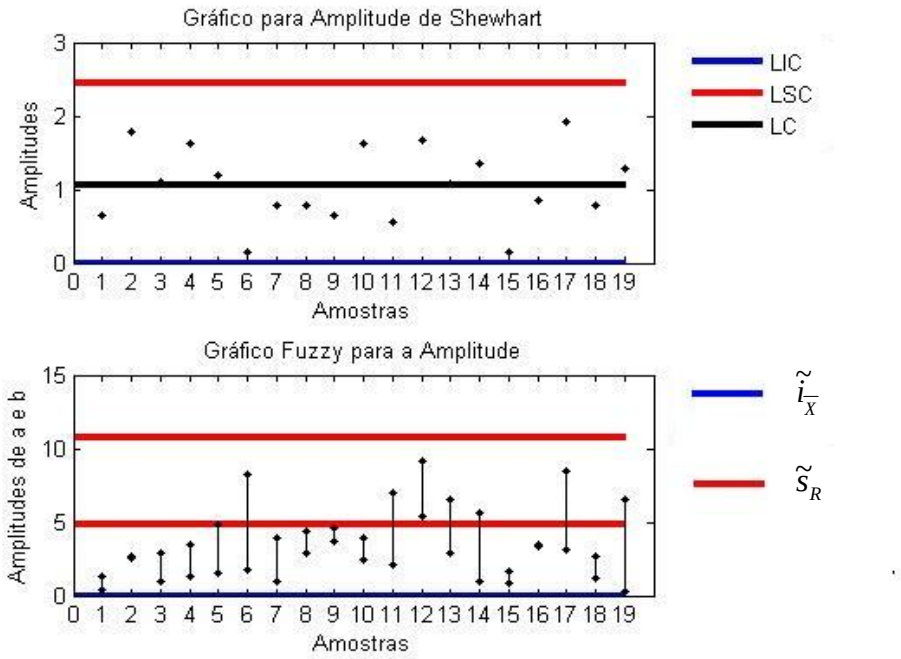
Tabela 16 – Sabor do iogurte: avaliação do gráfico de controle *fuzzy* $(\overline{X})$ para $\gamma = 0{,}5$ e $\gamma = 0{,}7$

| Amostras *i* | $DF(\tilde{s}_{\overline{X}}, \tilde{\overline{x}}_i)$ | $DF(\tilde{\overline{x}}_i, \tilde{i}_{\overline{X}})$ | Processo para $\gamma = 0{,}5$ | Processo para $\gamma = 0{,}7$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,6397 | 0,6401 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 2 | 0,6240 | 0,6334 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 3 | 0,6400 | 0,6240 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 4 | 0,6122 | 0,6837 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 5 | 0,5866 | 0,6980 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 6 | 0,5160 | 0,6250 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 7 | 0,5853 | 0,6546 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 8 | 0,6370 | 0,6560 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 9 | 0,5938 | 0,6854 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 10 | 0,6024 | 0,6326 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 11 | 0,8000 | 0,4710 | Fora de Controle | Pouco Fora de Controle |
| 12 | 0,5522 | 0,6579 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 13 | 0,6221 | 0,6667 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 14 | 0,7824 | 0,4847 | Fora de Controle | Pouco Fora de Controle |
| 15 | 0,8400 | 0,5599 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 16 | 0,6539 | 0,6034 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 17 | 0,7217 | 0,5590 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 18 | 0,8483 | 0,5716 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 19 | 0,6861 | 0,6126 | Em Controle | Pouco em Controle |

b) Gráfico de controle para a Amplitude

Na figura 23 tem-se o gráfico de controle de Shewhart para a amplitude e o respectivo gráfico de controle *fuzzy* para a amplitude, ambos da característica sabor do iogurte.

Figura 23 - Gráfico de controle de Shewhart e gráfico de controle *fuzzy* $R$ para o sabor do iogurte




Serão feitas duas avaliações: uma para o gráfico tradicional e outra para o gráfico *fuzzy*.

Avaliação 1: Gráfico Tradicional para a Amplitude do Sabor

O gráfico de amplitude para o sabor não mostra nenhuma evidência aparente de instabilidade, conforme padrões destacados em 2.1.3. Portanto, o processo é estável quanto ao sabor do iogurte.

Avaliação 2: Gráfico *fuzzy* da Amplitude para o Sabor

O gráfico *fuzzy* da Amplitude para o sabor, para $\gamma = 0{,}5$ todas as amostras foram consideradas em controle. Para $\gamma = 0{,}7$, a amostra 12 ficou na zona pouco em controle, isso porque a dominância do limite superior em relação a amplitude média da amostra número 12 não foi maior do que 0,7.

Na sequência a tabela 17 mostra a avaliação do gráfico *fuzzy* de amplitude para a característica sabor do iogurte.

Tabela 17 – Sabor do iogurte: avaliação do gráfico de controle *fuzzy* $(R)$ para $\gamma = 0{,}5$ e $\gamma = 0{,}7$

| Amostras *i* | $DF(\tilde{s}_{\bar{X}}, \tilde{\bar{x}}_i)$ | $DF(\tilde{\bar{x}}_i, \tilde{i}_{\bar{X}})$ | Processo para $\gamma = 0{,}5$ | Processo para $\gamma = 0{,}7$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 2 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 3 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 4 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 5 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 6 | 0,8035 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 7 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 8 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 9 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 10 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 11 | 0,8963 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 12 | 0,5628 | 1,0000 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 13 | 0,9191 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 14 | 0,9873 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 15 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 16 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 17 | 0,7303 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 18 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 19 | 0,9498 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |

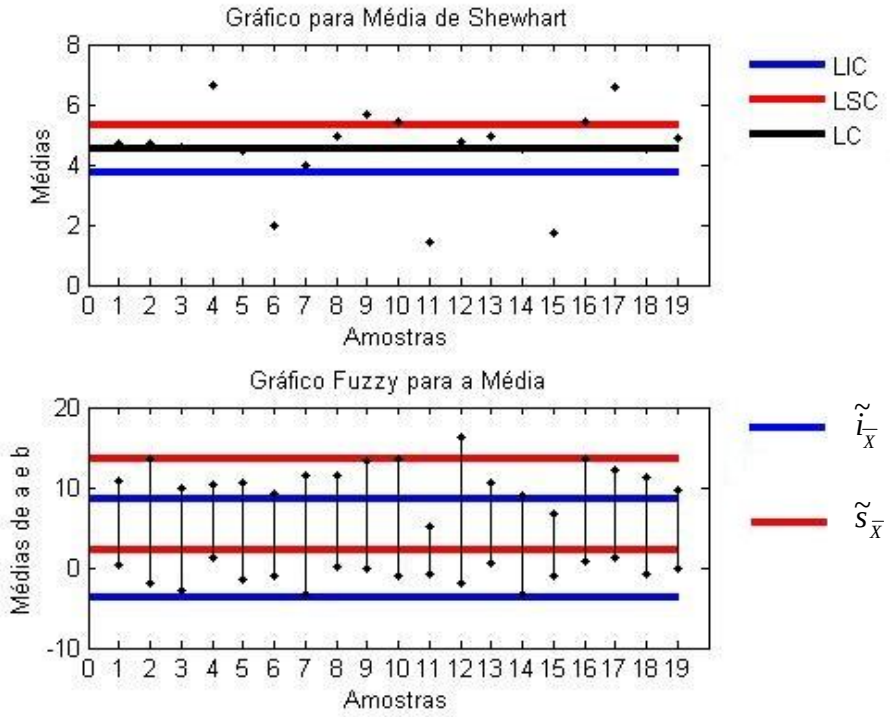
Considerações: Para esta característica de qualidade, o gráfico de média convencional aponta instabilidade do processo para a tendência central, enquanto que o gráfico da amplitude aponta estabilidade para a variabilidade. O gráfico *fuzzy* de média para o sabor, quando $\gamma = 0{,}5$ coloca as amostras 11 e 14 fora de controle, as mesmas amostras quando $\gamma = 0{,}7$ estão na zona pouco fora de controle, enquanto que as demais estão na zona pouco em controle. No gráfico *fuzzy* de amplitude, apenas a amostra 12 ficou na zona pouco em controle.

4.2.3.5 Característica acidez

a) Gráfico de controle para a Média

Na figura 24 tem-se o gráfico de controle de Shewhart para a média e o respectivo gráfico de controle *fuzzy* para a média, ambos da característica acidez do iogurte.

Figura 24 - Gráfico de controle de Shewhart e gráfico de controle *fuzzy* ( $\overline{X}$ ) para a acidez do iogurte




São feitas duas avaliações: uma para o gráfico tradicional e outra para o gráfico *fuzzy*.

Avaliação 1: Gráfico Tradicional para a Média da Acidez

O gráfico de média para a acidez mostra evidências de que o processo é instável, pois vários pontos estão fora dos limites de controle. Portanto, o processo é instável em relação a tendência central da característica sabor do iogurte.

Avaliação 2: Gráfico *fuzzy* da média para a Acidez

O gráfico *fuzzy* de média para a acidez, quando $\gamma = 0{,}5$, aponta que apenas a amostra 11 esta fora de controle. Nessa mesma amostra, quando $\gamma = 0{,}7$, a exigência do processo é maior e a amostra 11 fica na zona de alerta pouco fora de controle. Para este grau de exigência ($\gamma = 0{,}7$), as demais amostras ficaram na zona de alerta pouco em controle.

Na sequência, a tabela 18 mostra a avaliação do gráfico *fuzzy* para a característica acidez do iogurte.

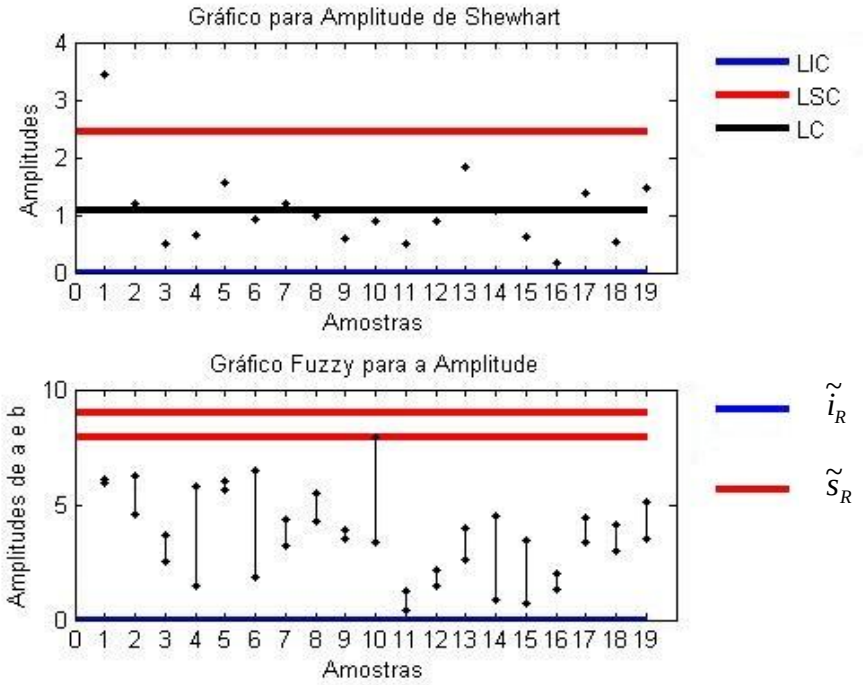
Tabela 18 – Acidez do iogurte: avaliação do gráfico de controle *fuzzy* $(\overline{X})$ para $\gamma = 0{,}5$ e $\gamma = 0{,}7$

| Amostras *i* | $DF(\tilde{s}_{\overline{X}}, \tilde{\overline{x}}_i)$ | $DF(\tilde{\overline{x}}_i, \tilde{i}_{\overline{X}})$ | Processo para $\gamma = 0{,}5$ | Processo para $\gamma = 0{,}7$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,6286 | 0,7030 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 2 | 0,5949 | 0,6658 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 3 | 0,7164 | 0,5903 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 4 | 0,6074 | 0,7780 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 5 | 0,6739 | 0,6366 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 6 | 0,7471 | 0,5455 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 7 | 0,6829 | 0,5886 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 8 | 0,6071 | 0,7121 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 9 | 0,5558 | 0,7379 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 10 | 0,5662 | 0,7164 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 11 | 0,9281 | 0,4834 | Fora de Controle | Pouco Fora de Controle |
| 12 | 0,5240 | 0,7025 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 13 | 0,6263 | 0,7234 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 14 | 0,7565 | 0,5597 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 15 | 0,8561 | 0,5255 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 16 | 0,5290 | 0,7717 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 17 | 0,5543 | 0,7931 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 18 | 0,6359 | 0,6642 | Em Controle | Pouco em Controle |
| 19 | 0,6757 | 0,6835 | Em Controle | Pouco em Controle |

b) Gráfico de controle para a Amplitude

Na figura 25 tem-se o gráfico de controle de Shewhart para a amplitude e o respectivo gráfico de controle *fuzzy* para a amplitude, ambos da característica acidez do iogurte.

Figura 25 - Gráfico de controle de Shewhart e gráfico de controle *fuzzy* $R$ para a acidez do iogurte




Serão feitas duas avaliações: uma para o gráfico tradicional e outra para o gráfico *fuzzy*.

Avaliação 1: Gráfico Tradicional para a Amplitude da Acidez

O gráfico de amplitude para a acidez mostra evidência de instabilidade no processo, além da primeira amostra estar fora dos limites de controle, o gráfico parece apresentar periodicidade, o que, de acordo com padrões destacados em 2.1.3, é um indicio de instabilidade no processo de produção.

Avaliação 2: Gráfico *fuzzy* da Amplitude para a Acidez

O gráfico *fuzzy* da amplitude para a acidez, tanto para $\gamma = 0{,}5$ como para $\gamma = 0{,}7$, coloca todas as amostras em controle. Portanto, quanto a variabilidade, pode-se dizer que o processo é estável.

Na sequência a tabela 19 mostra a avaliação do gráfico *fuzzy* de amplitude para a característica acidez do iogurte.

Tabela 19 – Acidez do iogurte: avaliação do gráfico de controle *fuzzy* $(R)$ para $\gamma = 0{,}5$ e $\gamma = 0{,}7$

| Amostras *i* | $DF(\tilde{s}_{\bar{X}}, \tilde{\bar{x}}_i)$ | $DF(\tilde{\bar{x}}_i, \tilde{i}_{\bar{X}})$ | Processo para $\gamma = 0{,}5$ | Processo para $\gamma = 0{,}7$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 2 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 3 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 4 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 5 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 6 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 7 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 8 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 9 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 10 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 11 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 12 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 13 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 14 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 15 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 16 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 17 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 18 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |
| 19 | 1,0000 | 1,0000 | Em Controle | Em Controle |

Considerações: Ambos os gráficos tradicionais, média e amplitude, apontam instabilidade no processo de produção: o processo pode ser considerado instável

em relação à tendência central e em relação à variabilidade. O gráfico *fuzzy* de média, quando $\gamma = 0{,}5$, coloca a amostra 12 como estando fora de controle. A mesma amostra, quando $\gamma = 0{,}7$, está na zona pouco fora de controle, enquanto que as demais estão na zona pouco em controle. O gráfico *fuzzy* de amplitude mostra estabilidade no processo. Pelos gráficos *fuzzy*, existem evidências de que o processo precisa de ajustes em relação a tendência central, o mesmo não acontecendo em relação a variabilidade.

### 4.2.4 Considerações Finais

O quadro 1 apresenta um resumo das interpretações dos gráficos construídos para avaliar a tendência central das características de qualidade do processo.

Quadro 1 – Resumo da interpretação dos resultados dos gráficos para média

| Característica | Shewhart | *Fuzzy* | |
|---|---|---|---|
| | | $\gamma = 0{,}5$ | $\gamma = 0{,}7$ |
| Cor | 11 pontos fora dos limites de controle | 3 pontos fora dos limites de controle | 3 pontos pouco fora de controle<br>16 pontos pouco em controle |
| Aroma | 5 pontos fora dos limites de controle | 3 pontos fora dos limites de controle | 3 pontos pouco fora de controle<br>16 pontos pouco em controle |
| Consistência | 12 pontos fora dos limites de controle | Em controle | 19 pontos pouco em controle |
| Sabor | 9 pontos fora dos limites de controle | 2 pontos fora dos limites de controle | 2 pontos pouco fora de controle<br>17 pontos pouco em controle |
| Acidez | 6 pontos fora dos limites de controle | 1 ponto fora dos limites de controle | 1 ponto pouco fora de controle<br>18 pontos pouco em controle |

Fonte: análise de dados

É possível constatar que o gráfico tradicional de Shewhart é mais rigoroso que os gráficos *fuzzy* na análise das informações identificando uma quantidade maior de pontos fora dos limites de controle. Nos gráficos *fuzzy* a utilização de $\gamma = 0{,}5$ identifica menos evidências de pontos fora dos limites de controle, mas com a utilização de $\gamma = 0{,}7$ são identificados mais pontos pouco em controle.

O quadro 2 apresenta um resumo das interpretações dos gráficos construídos para avaliar a variabilidade das características de qualidade do processo. O gráfico tradicional de Shewhart identifica apenas um ponto fora dos limites de controle para uma das características, enquanto que o gráfico *fuzzy* com a utilização de $\gamma = 0{,}5$ considera todas as características sob controle estatístico. Já o gráfico *fuzzy* com a utilização de $\gamma = 0{,}7$ parece ser o mais sensível, identificando um ponto pouco em controle para três características.

Quadro 2 – Resumo da interpretação dos resultados dos gráficos para amplitude

| Característica | Shewhart | *Fuzzy* | |
|---|---|---|---|
| | | $\gamma = 0{,}5$ | $\gamma = 0{,}7$ |
| Cor | Sob controle | Sob controle | 1 ponto pouco em controle |
| Aroma | Sob controle | Sob controle | 1 ponto pouco em controle |
| Consistência | Sob controle | Sob controle | Sob controle |
| Sabor | Sob controle | Sob controle | 1 ponto pouco em controle |
| Acidez | 1 ponto fora dos limites de controle | Sob controle | Sob controle |

Fonte: análise de dados

## 4.3 Fechamento do Capítulo

Nesse caítulo foi feito a discussão do resultados, desde conceitos relevantes da produção do iogurte até os resultados mostrados nos gráficos de controle *fuzzy*, que foram construídos de acordo com a estratégia proposta no inicio do capítulo.

Para finalizar foram construídos dois quadros que comparam os resultados mostrados em ambos os gráficos de controle, *fuzzy* e convencional.

# 5 CONCLUSÃO

Este estudo abordou conceitos de diversas áreas do conhecimento, caracterizando-se como um trabalho interdisciplinar. Utilizou conceitos teóricos e práticos para justificar os resultados encontrados. Inicialmente tratou-se de aspectos voltados para a aplicação, ou seja, o processo de produção de iogurte e suas principais características de qualidade. A partir de então, identificou-se as características definidoras da qualidade e iniciou-se a coleta de dados relativa às características sensoriais.

Por outro lado, foi realizado um estudo teórico sobre qualidade, mais especificamente sobre o uso de gráficos de controle utilizados no controle estatístico de processos e, juntamente, buscou-se melhorar o conhecimento sobre uma nova teoria matemática, a lógica *fuzzy*. Buscou-se uma estratégia de trabalho que pudesse ser eficiente, do ponto de vista teórico, para adentrar no controle de processos que dependam de dados nebulosos, dados imprecisos. Dessa forma, foi possível fazer uma combinação entre duas técnicas: construção de números *fuzzy* a partir de notas atribuídas por juízes e construção de gráficos de controle *fuzzy*, que originaram uma estratégia para utilização dos gráficos de controle em processo cujo monitoramento das características de qualidade geram informações imprecisas. Após, os resultados encontrados foram comparados aos resultados mostrados pelos gráficos tradicionais de Shewhart que permitiram fazer uma avaliação do seu desempenho .

Com o desenvolvimento do trabalho também foi possível identificar alguns problemas no processo produtivo analisado, fornecendo subsídios para a implementação de ações que melhorassem a qualidade do produto final.

## 5.1 Principais Contribuições

- Utilização de algumas técnicas de controle de qualidade no processo produtivo do iogurte, descrito na seção 4.2.1;

- construção de um instrumento para a coleta de dados na forma sensorial;

- proposição de uma estratégia para a utilização de gráficos *fuzzy* em contextos adequados, onde os dados coletados são informações imprecisas. Dessa forma, aponta um método para transformação de valores *crisp* em valores *fuzzy* e posterior adaptação do método de construção dos gráficos *fuzzy* de Média e Amplitude descrito por Shu e Wu (2011), com a apresentação de um novo design para o gráfico *fuzzy*, que faz um enlace entre a teoria proposta por Shu e Wu (2011) e os já consolidados gráficos tradicionais;

- divulgação do uso de ferramentas estatísticas na gestão de processos produtivos, o que foi feito de forma indireta, ao desenvolver este trabalho relacionado ao controle estatístico de processos;

- desenvolvimento de uma análise de forma a justificar o uso de lógica *fuzzy* na construção de gráficos de controle, para processos cujas características de qualidade sejam avaliadas por dados imprecisos;

- identificação de alguns fatores que influenciam diretamente na qualidade do produto final do iogurte. Por exemplo, o tempo de fermentação, que influencia diretamente na variação da acidez do produto final;

- reflexão sobre aos achados sob a ótica da lógica formal e da lógica *fuzzy*, comparando os resultados de forma a tirar conclusões iniciais a respeito da eficiência dos gráficos de controle *fuzzy* em processos onde as informações são dados imprecisos.

Os gráficos *fuzzy* criam zonas de alertas, onde a busca por causas especiais dependerá dos custos relacionados a essa investigação. No cálculo utilizado para a construção do número *fuzzy*, outros fatores são levados em consideração, além centralidade das notas atribuídas pelos juízes: o grau de importância de cada nota e a variabilidade, o que não acontece na construção dos gráficos tradicionais de Shewhart, onde as notas atribuídas pelos juízes são substituídas por um único valor, a média das notas. Então, a leitura feita pelo gráfico *fuzzy* parece expressar melhor a realidade do processo de produção quando avaliado pelos juízes e, portanto,

parece ser bastante adequado para ser usado em processos onde os dados são imprecisos, onde não é possível medir com exatidão o comportamento de algumas características.

Com relação aos gráficos de Shewhart, embora não tenha sido considerado neste estudo, convém salientar que existe a possibilidade de avaliar a variabilidade relativa aos juízes construindo outros gráficos de tendência central e variabilidade a partir da variabilidade das notas atribuídas pelos juízes, da mesma forma como foi feita com a nota média. Se isto fosse feito, entretanto, seriam necessários quatro gráficos de Shewhart para avaliar a mesma quantidade de informação que dois gráficos *fuzzy*.

Finalizando, a desenvolvimento deste estudo propiciou a consolidação de um grupo de pesquisa nesta instituição para estudar o efeito da aplicação da matemática *fuzzy* em técnicas estatísticas utilizadas em dados *crisp*.

## 5.2 Trabalhos Futuros

Para trabalhos futuros, será interessante estudar a aplicação e implementação de gráficos de controle *fuzzy* na caracterização e monitoramento de outros processos de produção, de forma a validar e aperfeiçoar os gráficos de *fuzzy*.

Outro ponto importante será analisar outras formas de encontrar a amplitude de números *fuzzy* triangulares, como por exemplo: fazendo a diferença entre o maior e o menor número *fuzzy* de uma amostra. Esse estudo considera-se importante visto que, muito da lógica *fuzzy* ainda precisa ser mais estudado e teorizado.

Avaliar a possibilidade de construir gráficos usando as operações algébricas com números *fuzzy* e não operações aritméticas tradicionais com seus limites, conforme feito neste estudo; investigar outras técnicas que possam ser utilizadas na interpretação e avaliação dos gráficos de controle, tais como: análise da capacidade do processo e determinação do comprimento médio de sequência; utilizar técnicas de análise de sistemas de medição para comparar mensurações *crisp* com mensurações *fuzzy e a*valiar a influência de outros métodos de ordenação de valores *fuzzy* na interpretação dos gráficos de controle também podem contribuir para o desenvolvimento desta área da ciência.

Avaliar o desempenho do método de Cheng em outros contextos , fazer simulações para analisar o desempenho dos gráficos de controle *fuzzy* de dados imprecisos com diferentes propriedades e aprofundar os conhecimentos relativos a parte computacional de lógica *fuzzy*, e até mesmo implementar algoritmos que realizem a construção de gráficos de controle *fuzzy*, conforme proposto nesse trabalho também seriam estudos extremamente pertinentes.

REFERÊNCIAS


ALCANTARA, Vera Nice. Exposição de pinturas. Casa da Cultura. Disponível em: <http://www.casadacultura.org/arte/pint/vera_nice_alcantara/potesdebarro__gde.jpg>. Acesso em: 24 jun. 2013.

ALMAS, F. **Implementação de Controle Estatístico de Processos em uma empresa Têxtil.** 122p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de produção). Universidade Federal de Itajubá, Itajubá 2003.

ANTUNES, J. **Modelo de avaliação de risco de controle utilizando a lógica nebulosa**, Tese de Doutorado, Programa em Pós-Graduação em Contabilidade e Controladoria, Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

BAAS, S. M. & KWAKERNAAK, H. **Rating and ranking of multiple-aspect alternatives using fuzzy sets**, Automatica, 13, 47-58, 1977.

BARTLET, M. S.; KENDALL, D.G. The statistical analysis of Variance-Heterogeneity and the Logarithmic Transformation. **Journal of the Royal Statistics Society**, Ser. B, 8, p.128-138, 2001.

BESTERFILD, Dale H. **Control de Calidad**. 2ª ed. México: Prentice Hall, Inc., 1994.

BORGES, L. C.; CAVALLI, S. B.; PROENÇA, R. P. **Proposta de classificação de vegetais considerando características nutricionais, sensoriais e de técnicas de preparação**, Revista Nutrição. vol.23 n.4 Campinas July/Aug., 2010.

BRASIL. Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento. **Padrões de Identidade e Qualidade de Leites Fermentados**. Resolução nº5, de 13 de novembro de 2000. Publicada no Diário Oficial da União de 27 de novembro de 2000, Anexo, 2000b.

CAMPOS, Vicente Falconi. **TQC Controle da Qualidade Total**. Desenvolvimento Gerencial Ltda, 1999.

CARLSSON, C. & FULLÉR, R. **On possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers**. Fuzzy Sets and Syst. 122: 315–326, 2001.

CIVILLE, G. V.; OFTEDAL, K. N. **Sensory evaluation techniques - Make "good for you" taste "good"**. *Physiol. Behav*., 107 (4), 598-605, 2012.

CHANG, W. **Ranking of fuzzy utilities with triangular membership functions**, Proc. International Conference on Policy Analysis and Information Systems, 263-272, 1981.

CHENG, Chi-Bin. Fuzzy process control: construction of control charts with fuzzy numbers. **Journal Elsevier – Fuzzy Sets and Systems**, v.154, n.2, p.287-303, 2005.

CHEN, C. B. & KLEIN C. M. **Fuzzy Ranking Methods for Multi-Attribute Decision Making**. IEEE Conf. on SMC, San Antonio, USA, 475-480, 1994.

CHEN, S. **Ranking fuzzy numbers with maximizing set and minimizing set**, Fuzzy Sets and Systems,17, 113-129,1985.

DELGADO, M.; VERDEGAY, J. L.; VILA, M. A. A procedure for ranking fuzzy numbers using fuzzy relations, **Fuzzy Sets and Systems**, 26, 49-62, 1988.

DEMING, W. E. **As chaves da excelência**. São Paulo: Makron, McGraw-Hill, 1992.

Disciplina de Biologia I – **Célula/Ordem funcional/Glicólise e Fermentação**. Disponível em: <http://www.dbio.uevora.pt/jaraujo/biocel/glicolise.htm>. Acesso em: 20 jul. 2013.

FALCÃO, A. S. G. **Diagnóstico de perdas e aplicação de ferramentas para o controle da qualidade e melhoria do processo de produção de uma etapa construtiva de edificações habitacionais** – Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Porto Alegre: UFRGS, 2001.

FARIAS, J. C. **A ISO 9000:2000 e o CEP**. Revista controle da Qualidade. São Paulo: Banas, Agosto/2001.

FILEV, D. P. An adaptive approach to defuzzificaton based on level sets, **Fuzzy Sets and Systems 54**, 355-360, 1993.

FULLÉR, R.; MAJLENDER, P. On weighted possibilistic mean and variance of fuzzy numbers. **Fuzzy Sets and Systems 136**: 363–374, 2003.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2010. 184p.

IOANNOU, I.; PERROT, N.; HOSSENLOPP, J.; MAURIS, G.; TRYSTRAM, G. The fuzzy set theory: a helpful tool for the estimation of sensory properties of crusting sausage appearance by a single expert, **Food Quality and Preference** vol.13 pp. 589–595, 2002.

ISHIKAWA, K. **Introduction to Quality Control**. Tokyo: Asian Production Organization, 1989.

KLIR, G. J., YUAN, B. **Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications**, Prentice Hall, New Jersey, 1995.

KUME, Hitoshi – **Métodos Estatísticos para Melhoria da Qualidade.** São Paulo, Editora Gente, 1993.

KUPONGSAK, S. & TAN J. **Fuzzy Sets and Systems**. 157:1169-1178, 2006.

LEE, H. S. A new fuzzy ranking method based on fuzzy preference Relation, **IEEE International Conference on Systems, 5**, 3416-3420, 2000.

LEE, J. H. & YOU, K. H. **A fuzzy Ranking Method for Fuzzy Numbers**, IEICE Trans, Fundamentals, E86-A, 2650-2658, 2003.

MABUCHI, S. A proposal for defuzzification strategy by the concept of sensitivity, **Fuzzy Sets and Systems 55**, 1-14, 1993.

MA, L. Ch. & Li, H. L. A fuzzy ranking method with range reduction techniques, **European Journal of Operational Research**, 184, 1032-1043, 2008.

MATTOS, V.L.D. **Apostila da disciplina de probabilidade e Estatística aplicada à Engenharia**. FURG, 2014.

MELO, G. J. A. **Princípio de Extensão de Zadeh Aplicado a Funções não Monótonas com dois Parâmetros *Fuzzy***. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Sistemas, Universidade Federal de Lavras, Minas Gerais, 2009.

Metal Concept. Disponível em: <http://a8.ind.br/?attachment_id=28>. Acesso em: 17 de jun. 2013.

MODARRES, M. & SADI-NEZHAD, S. Ranking fuzzy numbers by preference ratio, **Fuzzy sets and Systems, 118**, 429-436, 2001.

MONTGOMERY, D. C. **Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade**. 4º ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

MONTGOMERY, D. C. **Introduction to Statistical Controlo de Qualidade** . 2º Ed. Nova Iorque : John Wiley & Sons, 1991.

OLIVEIRA, Maricê Nogueira de. **Tecnologia de Produtos Lácteos Funcionais**. São Paulo: Editora Atheneu, 2009.

OLIVEIRA, J. V. A set-theoretical defuzzification method, **Fuzzy Sets and Systems 76**, 63-71, 1995.

OSÓRIO, J. C. S.; OSÓRIO, M. T. M.; SAÑUDO, C. **Características sensoriais da carne ovina**. Revista Brasileira de Zootecnia. vol.38 n.spe, 2009.

PALADINI, E. P. – **Controle de Qualidade: uma Abordagem Abrangente**. São Paulo: Editora Atlas, 1990.

PANACHUKI, ELÓI et al. Perdas de solo e de água e infiltração de água em latossolo vermelho sob sistemas de manejo. **R. Bras. Ci. Solo**, 35:1777-1785, 2011.

PARANTHAMAN, D. – **Controle da Qualidade.** Technical Teacher's Training Institute, Madras. São Paulo, Editora McGraw-Hill Ltda, 1990.

PEREIRA, Camila Mura.; et al. **Fermentação Láctica e a Produção do Iogurte**. Disponível em: <http://www.cca.ufscar.br/espacobiotec/temas2.htm>. Acesso em: 03 jun. 2013.

PIRES, V. T. **Implantação do Controle Estatístico de Processos em uma empresa de manufatura de Óleo de arroz.** 115p. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Engenharia). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre 2000.

Portal Action. **Software de Estatística Online**. Disponível em: <http://www.portalaction.com.br>. Acesso em: 04 jun. 2013.

ROSA, S. E. **Modelo *fuzzy* de avaliação de risco para o reconhecimento de Cursos de Graduação**, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2012.

ROSÁRIO, M. B. d. **Controle Estatístico de Processo: Um estudo de caso em uma empresa da área de eletrodomésticos.** . 112p. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Engenharia). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2004.

SAATY, T. L. & CHO, Y. The Decision by the US Congress on China's Trade Status: A Multicriteria Analysis. **Socio-Economic Planning Sciences, 35(6)**:243-252, 2001.

SAMOHYL, R. W. **Controle Estatístico da Qualidade**. Rio de Janeiro: Campus, 2009.

SANTOS, Valfredo Messias dos. **Academia Penedense de Letras, Artes, Cultura e Ciências**. Disponível em: <http://www.aplacc.com/valfredo.html>. Acesso em: 24 jun. 2013.

Saúde e Qualidade de vida. **Informações Técnicas sobre o iogurte**. Disponível em: <http://www.matilat.com.br/noticia/?id=2215>. Acesso em: 17 jun. 2013.

SHU, Ming-Hung; WU, Hsien-Chung. Fuzzy $\overline{X}$ and R control charts: Fuzzy dominance approach. **Journal Elsevier – Computers and Industrial Engineering**, v. 61, n.3, p.676-685, 2011.

SILVA, Ana Inês Dias da; at al. **Projecto FEUP – Produção de Iogurte**. Disponível em: <http://paginas.fe.up.pt/~projfeup/cd_2010_11/files/QUI608_relatorio.pdf>. Acesso em: 21 jul. 2013.

SIQUEIRA, L. G. P. – **Controle Estatístico de Processos —** Equipe Grifo. São Paulo, Editora Pioneira, 1997.

SONG, Q., BORTOLAN, G. Some properties of defuzzification neural networks, **Fuzzy Sets and Systems 61**, 83-89, 1994.

SOUZA, R. A. d. **Análise da Qualidade do Processo de Envase de Azeitonas verdes** através **de algumas ferramentas do Controle Estatístico de Processo.** 104p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

TELLES, M. S. **Sistema Especialista Fuzzy para Diagnóstico de Transformadores de Potência.** Dissertação de Mestrado em Ciência da Computação, UFSC, Florianópolis, 2005.

WESTERN ELECTRIC COMPANY, – **Inc. Statistical Quality Control Handbook.** New York: Mac Printing Company, 1956.

YAGER R. R., FILEV, D. On general class of fuzzy connectives, **Fuzzy Sets and Systems 55**, 255-271, 1993.

YUAN, Y. Criteria for evaluating fuzzy ranking methods, **Fuzzy Sets and Systems, 44**, 139-157, 1991.

ZADEH, L. A. Fuzzy sets, **Information and Control 8**, 338-353, 1965.

## Anexo 1 – Fatores Constantes

Tabela AN1.1 - Fatores para a construção de gráficos de controle para variáveis

| | Para Médias | | Para desvios padrões | | Para amplitudes | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tamanho da amostra | $A_2$ | $A_3$ | $B_3$ | $B_4$ | $D_3$ | $D_4$ | d2 |
| 2 | 1,880 | 2,659 | 0 | 3,267 | 0 | 3,267 | 1,128 |
| 3 | 1,023 | 1,954 | 0 | 2,568 | 0 | 2,575 | 1,693 |
| 4 | 0,729 | 1,628 | 0 | 2,266 | 0 | 2,282 | 2,059 |
| 5 | 0,577 | 1,427 | 0 | 2,089 | 0 | 2,115 | 2,326 |
| 6 | 0,483 | 1,287 | 0,030 | 1,970 | 0 | 2,004 | 2,534 |
| 7 | 0,419 | 1,182 | 0,118 | 1,882 | 0,076 | 1,924 | 2,704 |
| 8 | 0,373 | 1,099 | 0,185 | 1,815 | 0,136 | 1,864 | 2,847 |
| 9 | 0,337 | 1,032 | 0,239 | 1,761 | 0,184 | 1,816 | 2,970 |
| 10 | 0,308 | 0,975 | 0,284 | 1,716 | 0,223 | 1,777 | 3,078 |
| 11 | 0,285 | 0,927 | 0,321 | 1,679 | 0,256 | 1,744 | 3,173 |
| 12 | 0,266 | 0,886 | 0,354 | 1,646 | 0,283 | 1,717 | 3,258 |
| 13 | 0,249 | 0,850 | 0,382 | 1,618 | 0,307 | 1,693 | 3,336 |
| 14 | 0,235 | 0,817 | 0,406 | 1,594 | 0,328 | 1,672 | 3,407 |
| 15 | 0,223 | 0,789 | 0,428 | 1,572 | 0,347 | 1,653 | 3,472 |
| 16 | 0,212 | 0,763 | 0,448 | 1,552 | 0,363 | 1,637 | 3,532 |
| 17 | 0,203 | 0,739 | 0,466 | 1,534 | 0,378 | 1,622 | 3,588 |
| 18 | 0,194 | 0,718 | 0,482 | 1,518 | 0,391 | 1,608 | 3,640 |
| 19 | 0,187 | 0,698 | 0,497 | 1,503 | 0,403 | 1,597 | 3,689 |
| 20 | 0,180 | 0,680 | 0,510 | 1,490 | 0,415 | 1,585 | 3,735 |
| 21 | 0,173 | 0,663 | 0,523 | 1,477 | 0,425 | 1,575 | 3,778 |
| 22 | 0,167 | 0,647 | 0,534 | 1,466 | 0,434 | 1,566 | 3,819 |
| 23 | 0,162 | 0,633 | 0,545 | 1.455 | 0,443 | 1,557 | 3,858 |
| 24 | 0,157 | 0,619 | 0,555 | 1,445 | 0,451 | 1,548 | 3,895 |
| 25 | 0,153 | 0,606 | 0,565 | 1,435 | 0,459 | 1,541 | 3,931 |

Fonte: Montgomery, 1991.

## Apêndice 1 – Instrumento utilizado na coleta de dados

Avaliador: Data:

**Amostra 223**

| | |
|---|---|
| **Cor** – O quanto a cor se aproxima do ideal.<br>Não Característico Característico | ( ) Satisfatório<br>( ) Não Satisfatório |
| **Aroma** – O quanto o aroma se aproxima do ideal.<br>Não Característico Característico | ( ) Satisfatório<br>( ) Não Satisfatório |
| **Consistência** – O quanto a consistência se aproxima da ideal.<br>Não Característico Característico | ( ) Satisfatório<br>( ) Não Satisfatório |
| **Sabor** – O quanto o sabor se aproxima do ideal.<br>Não Característico Característico | ( ) Satisfatório<br>( ) Não Satisfatório |
| **Acidez** – O quanto a acidez se aproxima do ideal.<br>Não Característico Característico | ( ) Satisfatório<br>( ) Não Satisfatório |

**Amostra 325**

| | |
|---|---|
| **Cor** – O quanto a cor se aproxima do ideal.<br>Não Característico Característico | ( ) Satisfatório<br>( ) Não Satisfatório |
| **Aroma** – O quanto o aroma se aproxima do ideal.<br>Não Característico Característico | ( ) Satisfatório<br>( ) Não Satisfatório |
| **Consistência** – O quanto a consistência se aproxima da ideal.<br>Não Característico Característico | ( ) Satisfatório<br>( ) Não Satisfatório |
| **Sabor** – O quanto o sabor se aproxima do ideal.<br>Não Característico Característico | ( ) Satisfatório<br>( ) Não Satisfatório |
| **Acidez** – O quanto a acidez se aproxima do ideal.<br>Não Característico Característico | ( ) Satisfatório<br>( ) Não Satisfatório |

**Amostra 671**

| | |
|---|---|
| **Cor** – O quanto a cor se aproxima do ideal.<br>Não Característico Característico | ( ) Satisfatório<br>( ) Não Satisfatório |
| **Aroma** – O quanto o aroma se aproxima do ideal.<br>Não Característico Característico | ( ) Satisfatório<br>( ) Não Satisfatório |
| **Consistência** – O quanto a consistência se aproxima da ideal.<br>Não Característico Característico | ( ) Satisfatório<br>( ) Não Satisfatório |
| **Sabor** – O quanto o sabor se aproxima do ideal.<br>Não Característico Característico | ( ) Satisfatório<br>( ) Não Satisfatório |
| **Acidez** – O quanto a acidez se aproxima do ideal.<br>Não Característico Característico | ( ) Satisfatório<br>( ) Não Satisfatório |

**Amostra 453**

| | |
|---|---|
| **Cor** – O quanto a cor se aproxima do ideal.<br>Não Característico Característico | ( ) Satisfatório<br>( ) Não Satisfatório |
| **Aroma** – O quanto o aroma se aproxima do ideal.<br>Não Característico Característico | ( ) Satisfatório<br>( ) Não Satisfatório |
| **Consistência** – O quanto a consistência se aproxima da ideal.<br>Não Característico Característico | ( ) Satisfatório<br>( ) Não Satisfatório |
| **Sabor** – O quanto o sabor se aproxima do ideal.<br>Não Característico Característico | ( ) Satisfatório<br>( ) Não Satisfatório |
| **Acidez** – O quanto a acidez se aproxima do ideal.<br>Não Característico Característico | ( ) Satisfatório<br>( ) Não Satisfatório |

# Apêndice 2 – Dados coletados

Tabela AP2.1 – Valores *Crisp* Atribuídos pelos Juízes para a Cor

| Produto | Notas Atribuídas por Cada Juiz | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| cor1.1 | 0,555556 | 1,111111 | 1,222222 | 1,666667 | 1,888889 |
| cor1.2 | 0,333333 | 1,33333 | 1,555556 | 1,77778 | 2 |
| cor1.3 | 0,11111 | 0,77778 | 1,11111 | 1,11111 | 1,33333 |
| cor1.4 | 0,333333 | 0,777778 | 1,666667 | 1,777778 | 1,888889 |
| cor2.1 | 0,22222 | 0,33333 | 1 | 1,44444 | 2,11111 |
| cor2.2 | 0,11111 | 0,44444 | 0,88889 | 1,33333 | 1,66667 |
| cor2.3 | 0,33333 | 0,33333 | 0,77778 | 1,77778 | 2 |
| cor2.4 | 0,33333 | 0,33333 | 1 | 1,33333 | 2,11111 |
| cor3.1 | 0,44444 | 0,66667 | 0,66667 | 2,22222 | 4,22222 |
| cor3.2 | 0,44444 | 0,44444 | 0,55556 | 2,55556 | 3,66667 |
| cor3.3 | 0,33333 | 0,44444 | 0,55556 | 2,55556 | 3,66667 |
| cor3.4 | 0,33333 | 0,44444 | 0,55556 | 1,77778 | 3 |
| cor4.1 | 0,22222 | 0,44444 | 0,88889 | 1,66667 | 2,11111 |
| cor4.2 | 0,22222 | 0,33333 | 0,88889 | 1,77778 | 3,55556 |
| cor4.3 | 0,22222 | 0,33333 | 0,88889 | 1,66667 | 2 |
| cor4.4 | 0,33333 | 0,33333 | 0,88889 | 1,66667 | 2 |
| cor5.1 | 0,465116 | 0,813953 | 1,27907 | 1,511628 | 2,325581 |
| cor5.2 | 0,465116 | 0,930233 | 1,046512 | 1,162791 | 1,511628 |
| cor5.3 | 0,348837 | 0,813953 | 1,046512 | 1,162791 | 1,976744 |
| cor5.4 | 0,348837 | 0,813953 | 1,162791 | 1,627907 | 1,860465 |
| cor6.1 | 0,348837 | 0,930233 | 1,162791 | 1,27907 | 1,395349 |
| cor6.2 | 0,348837 | 0,581395 | 0,813953 | 1,27907 | 1,27907 |
| cor6.3 | 0,232558 | 0,697674 | 0,930233 | 1,162791 | 1,162791 |
| cor6.4 | 0,232558 | 0,813953 | 0,930233 | 0,930233 | 1,162791 |
| cor7.1 | 0,465116 | 0,697674 | 0,813953 | 0,813953 | 1,046512 |
| cor7.2 | 0,465116 | 0,930233 | 1,046512 | 1,162791 | 1,860465 |
| cor7.3 | 0,348837 | 0,697674 | 0,813953 | 0,930233 | 1,162791 |
| cor7.4 | 0,348837 | 0,581395 | 0,813953 | 0,930233 | 1,162791 |
| cor8.1 | 0,465116 | 0,813953 | 1,162791 | 1,162791 | 2,674419 |
| cor8.2 | 0,465116 | 0,697674 | 1,162791 | 1,27907 | 2,674419 |
| cor8.3 | 0,348837 | 0,930233 | 1,162791 | 1,162791 | 2,325581 |
| cor8.4 | 0,465116 | 1,046512 | 1,162791 | 1,27907 | 2,209302 |
| cor9.1 | 0,232558 | 0,348837 | 0,930233 | 1,046512 | 1,511628 |
| cor9.2 | 0,232558 | 0,348837 | 0,813953 | 1,27907 | 1,511628 |
| cor9.3 | 0,232558 | 0,348837 | 0,697674 | 1,046512 | 1,511628 |
| cor9.4 | 0,232558 | 0,348837 | 0,697674 | 1,162791 | 1,511628 |
| cor10.1 | 0,232558 | 0,348837 | 1,162791 | 1,162791 | 1,627907 |
| cor10.2 | 0,232558 | 0,348837 | 0,930233 | 1,162791 | 1,511628 |
| cor10.3 | 0,348837 | 0,348837 | 0,581395 | 1,046512 | 1,27907 |
| cor10.4 | 0,348837 | 0,348837 | 0,697674 | 0,930233 | 1,162791 |
| cor11.1 | 0,232558 | 0,348837 | 0,813953 | 0,813953 | 1,744186 |
| cor11.2 | 0,232558 | 0,348837 | 0,813953 | 1,046512 | 3,023256 |
| cor11.3 | 0,232558 | 0,465116 | 0,581395 | 0,813953 | 2,325581 |
| cor11.4 | 0,348837 | 0,465116 | 0,813953 | 1,046512 | 2,093023 |
| cor12.1 | 0,116279 | 0,348837 | 0,930233 | 1,162791 | 1,395349 |
| cor12.2 | 0,232558 | 0,465116 | 0,813953 | 1,162791 | 1,27907 |
| cor12.3 | 0,348837 | 0,581395 | 0,697674 | 0,813953 | 1,395349 |
| cor12.4 | 0,348837 | 0,697674 | 0,813953 | 1,046512 | 1,27907 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| cor13.1 | 0,348837 | 0,697674 | 0,813953 | 2,44186 | 3,72093 |
| cor13.2 | 0,232558 | 0,581395 | 0,813953 | 2,55814 | 2,674419 |
| cor13.3 | 0,348837 | 0,813953 | 0,813953 | 2,209302 | 2,790698 |
| cor13.4 | 0,465116 | 0,697674 | 0,813953 | 2,55814 | 2,906977 |
| cor14.1 | 0,348837 | 0,348837 | 0,465116 | 1,395349 | 2,093023 |
| cor14.2 | 0,348837 | 0,348837 | 0,465116 | 1,511628 | 3,72093 |
| cor14.3 | 0,232558 | 0,348837 | 0,697674 | 1,395349 | 2,209302 |
| cor14.4 | 0,232558 | 0,465116 | 0,465116 | 1,511628 | 3,139535 |
| cor15.1 | 0,465116 | 0,813953 | 1,395349 | 1,511628 | 2,093023 |
| cor15.2 | 0,348837 | 1,395349 | 1,511628 | 2,790698 | 3,488372 |
| cor15.3 | 0,348837 | 0,813953 | 1,511628 | 2,209302 | 2,325581 |
| cor15.4 | 0,232558 | 0,697674 | 1,395349 | 2,325581 | 3,139535 |
| cor16.1 | 0,232558 | 1,162791 | 1,511628 | 1,627907 | 1,744186 |
| cor16.2 | 0,232558 | 1,511628 | 1,627907 | 1,627907 | 1,860465 |
| cor16.3 | 0,232558 | 1,511628 | 1,511628 | 1,976744 | 2,325581 |
| cor16.4 | 0,232558 | 0,465116 | 1,395349 | 1,511628 | 2,55814 |
| cor17.1 | 0,348837 | 1,395349 | 1,511628 | 2,44186 | 5,116279 |
| cor17.2 | 0,348837 | 1,395349 | 1,511628 | 2,55814 | 5,348837 |
| cor17.3 | 0,348837 | 1,511628 | 1,511628 | 3,255814 | 4,883721 |
| cor17.4 | 0,348837 | 0,930233 | 1,046512 | 1,395349 | 4,767442 |
| cor18.1 | 0,232558 | 0,348837 | 1,511628 | 2,325581 | 3,139535 |
| cor18.2 | 0,232558 | 0,232558 | 1,511628 | 2,325581 | 2,906977 |
| cor18.3 | 0,348837 | 0,465116 | 1,511628 | 2,209302 | 2,906977 |
| cor18.4 | 0,348837 | 0,465116 | 1,395349 | 1,976744 | 2,325581 |
| cor19.1 | 0,348837 | 0,697674 | 0,813953 | 1,511628 | 2,44186 |
| cor19.2 | 0,348837 | 0,697674 | 1,162791 | 1,27907 | 1,395349 |
| cor19.3 | 0,232558 | 0,581395 | 1,046512 | 1,511628 | 1,627907 |
| cor19.4 | 0,232558 | 0,581395 | 1,162791 | 1,162791 | 1,162791 |

Tabela AP2.2 – Valores *Crisp* Atribuídos pelos Juízes para o Aroma

| Produto | Notas Atribuídas por Cada Juiz | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| aro1.1 | 1 | 1,444444 | 2,111111 | 2,888889 | 8 |
| aro1.2 | 1 | 1,888889 | 2,444444 | 5,111111 | 6,222222 |
| aro1.3 | 0,777778 | 1 | 1,666667 | 3,222222 | 6,333333 |
| aro1.4 | 0,888889 | 1 | 1,444444 | 1,555556 | 8 |
| aro2.1 | 0,333333 | 0,444444 | 1,888889 | 4,111111 | 7,555556 |
| aro2.2 | 0,333333 | 0,444444 | 1 | 5,333333 | 7,222222 |
| aro2.3 | 0,333333 | 0,444444 | 1,444444 | 3,666667 | 7,333333 |
| aro2.4 | 0,333333 | 0,444444 | 1,333333 | 2,777778 | 7,222222 |
| aro3.1 | 0,444444 | 1,444444 | 2 | 5 | 5,333333 |
| aro3.2 | 0,333333 | 0,555556 | 2,222222 | 4,777778 | 6,111111 |
| aro3.3 | 1,444444 | 3,222222 | 4,666667 | 6,444444 | 9,666667 |
| aro3.4 | 0,333333 | 0,666667 | 2,111111 | 4,666667 | 6,555556 |
| aro4.1 | 0,333333 | 0,333333 | 3 | 3,111111 | 7,333333 |
| aro4.2 | 0,33333 | 2,333333 | 2,888889 | 3,333333 | 6,888889 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| aro4.3 | 0,444444 | 3,222222 | 4,666667 | 4,888889 | 7,222222 |
| aro4.4 | 0,33333 | 0,88889 | 2,666667 | 3,333333 | 6,444444 |
| aro5.1 | 0,697674 | 1,27907 | 1,627907 | 2,906977 | 6,27907 |
| aro5.2 | 0,581395 | 1,511628 | 1,627907 | 1,744186 | 5,813953 |
| aro5.3 | 0,232558 | 0,813953 | 1,511628 | 1,744186 | 6,162791 |
| aro5.4 | 1,627907 | 1,627907 | 4,767442 | 5,348837 | 6,976744 |
| aro6.1 | 0,465116 | 1,046512 | 1,27907 | 2,209302 | 5,813953 |
| aro6.2 | 0,232558 | 0,930233 | 1,162791 | 1,162791 | 6,395349 |
| aro6.3 | 0,348837 | 0,930233 | 1,162791 | 4,534884 | 5,930233 |
| aro6.4 | 0,348837 | 0,930233 | 1,162791 | 5,581395 | 6,046512 |
| aro7.1 | 0,930233 | 1,162791 | 1,627907 | 2,093023 | 6,395349 |
| aro7.2 | 1,511628 | 2,209302 | 5,116279 | 5,465116 | 6,511628 |
| aro7.3 | 1,511628 | 1,627907 | 1,860465 | 3,604651 | 8,604651 |
| aro7.4 | 1,27907 | 1,627907 | 2,093023 | 2,44186 | 8,139535 |
| aro8.1 | 0,697674 | 1,511628 | 3,837209 | 5,232558 | 8,372093 |
| aro8.2 | 0,465116 | 3,72093 | 4,418605 | 4,651163 | 8,488372 |
| aro8.3 | 0,581395 | 3,604651 | 3,72093 | 3,953488 | 8,72093 |
| aro8.4 | 3,139535 | 4,302326 | 4,418605 | 4,883721 | 8,023256 |
| aro9.1 | 0,232558 | 0,232558 | 1,27907 | 1,744186 | 8,488372 |
| aro9.2 | 0,232558 | 0,465116 | 1,162791 | 1,27907 | 8,139535 |
| aro9.3 | 0,232558 | 0,813953 | 1,162791 | 1,744186 | 8,488372 |
| aro9.4 | 0,348837 | 0,465116 | 1,162791 | 1,27907 | 8,372093 |
| aro10.1 | 0,348837 | 0,348837 | 0,697674 | 3,023256 | 8,023256 |
| aro10.2 | 0,232558 | 0,348837 | 1,162791 | 2,906977 | 7,674419 |
| aro10.3 | 0,348837 | 0,465116 | 1,511628 | 1,627907 | 8,139535 |
| aro10.4 | 0,348837 | 0,348837 | 0,930233 | 2,55814 | 8,604651 |
| aro11.1 | 0,348837 | 0,348837 | 0,930233 | 1,162791 | 4,767442 |
| aro11.2 | 0,232558 | 0,348837 | 0,813953 | 1,046512 | 4,767442 |
| aro11.3 | 0,232558 | 0,697674 | 1,046512 | 1,627907 | 4,651163 |
| aro11.4 | 0,232558 | 0,232558 | 0,930233 | 1,27907 | 3,255814 |
| aro12.1 | 0,348837 | 0,930233 | 2,44186 | 7,55814 | 8,604651 |
| aro12.2 | 0,348837 | 0,581395 | 1,046512 | 1,27907 | 8,372093 |
| aro12.3 | 0,348837 | 0,697674 | 0,930233 | 2,55814 | 8,837209 |
| aro12.4 | 0,348837 | 0,697674 | 0,813953 | 2,790698 | 8,837209 |
| aro13.1 | 1,511628 | 2,44186 | 3,023256 | 3,837209 | 8,72093 |
| aro13.2 | 0,581395 | 1,511628 | 2,906977 | 3,139535 | 8,488372 |
| aro13.3 | 0,232558 | 1,511628 | 2,325581 | 3,023256 | 8,604651 |
| aro13.4 | 0,348837 | 1,511628 | 2,093023 | 2,55814 | 8,837209 |
| aro14.1 | 0,465116 | 0,581395 | 1,27907 | 2,674419 | 4,651163 |
| aro14.2 | 0,581395 | 0,813953 | 1,860465 | 4,418605 | 4,651163 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| aro14.3 | 0,465116 | 0,581395 | 0,813953 | 3,372093 | 4,302326 |
| aro14.4 | 0,465116 | 0,813953 | 3,255814 | 4,418605 | 5,348837 |
| aro15.1 | 0,232558 | 0,813953 | 0,930233 | 3,023256 | 4,186047 |
| aro15.2 | 0,232558 | 0,813953 | 1,27907 | 1,744186 | 3,837209 |
| aro15.3 | 0,232558 | 0,348837 | 1,046512 | 1,162791 | 3,837209 |
| aro15.4 | 0,116279 | 0,232558 | 0,930233 | 0,930233 | 3,953488 |
| aro16.1 | 0,232558 | 1,511628 | 1,627907 | 5 | 7,093023 |
| aro16.2 | 0,348837 | 1,27907 | 1,976744 | 2,55814 | 8,372093 |
| aro16.3 | 0,348837 | 0,581395 | 1,860465 | 3,372093 | 7,55814 |
| aro16.4 | 0,465116 | 1,511628 | 1,511628 | 3,023256 | 7,674419 |
| aro17.1 | 0,348837 | 0,465116 | 1,046512 | 1,744186 | 2,906977 |
| aro17.2 | 0,348837 | 0,813953 | 1,162791 | 1,162791 | 3,372093 |
| aro17.3 | 0,465116 | 1,627907 | 1,976744 | 2,209302 | 3,837209 |
| aro17.4 | 0,348837 | 0,465116 | 1,046512 | 1,511628 | 2,325581 |
| aro18.1 | 0,232558 | 0,348837 | 1,511628 | 2,093023 | 2,674419 |
| aro18.2 | 0,348837 | 1,511628 | 2,44186 | 3,488372 | 5,116279 |
| aro18.3 | 0,232558 | 0,348837 | 1,627907 | 2,44186 | 2,790698 |
| aro18.4 | 0,348837 | 0,581395 | 1,395349 | 2,325581 | 2,906977 |
| aro19.1 | 0,232558 | 0,697674 | 0,813953 | 1,046512 | 3,488372 |
| aro19.2 | 0,232558 | 1,046512 | 1,162791 | 4,069767 | 8,139535 |
| aro19.3 | 0,232558 | 0,581395 | 1,395349 | 1,395349 | 3,604651 |
| aro19.4 | 0,348837 | 0,581395 | 0,930233 | 3,372093 | 8,255814 |

Tabela AP2.3 – Valores *Crisp* Atribuídos pelos Juízes para a Consistência

| Produto | Notas Atribuídas por Cada Juiz | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| cons1.1 | 1,333333 | 1,666667 | 2,111111 | 6,444444 | 7,111111 |
| cons1.2 | 1,555556 | 1,666667 | 2,111111 | 7 | 8 |
| cons1.3 | 0,444444 | 1,777778 | 2,444444 | 5,888889 | 7,222222 |
| cons1.4 | 1,555556 | 4 | 5 | 7 | 8,111111 |
| cons2.1 | 0,444444 | 2,555556 | 5,222222 | 7,222222 | 9,666667 |
| cons2.2 | 1,666667 | 5,222222 | 5,222222 | 7,111111 | 9,444444 |
| cons2.3 | 0,555556 | 5,333333 | 5,888889 | 7,777778 | 9,666667 |
| cons2.4 | 0,555556 | 2,555556 | 5,333333 | 7,111111 | 9,555556 |
| cons3.1 | 1,777778 | 4,666667 | 7 | 8,333333 | 9,555556 |
| cons3.2 | 2,333333 | 6,222222 | 6,333333 | 7,888889 | 9,666667 |
| cons3.3 | 2,666667 | 4,666667 | 7 | 7,666667 | 9,666667 |
| cons3.4 | 3,777778 | 4,777778 | 6,777778 | 7,555556 | 9,666667 |
| cons4.1 | 0,444444 | 0,444444 | 2,777778 | 6,888889 | 7,666667 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| cons4.2 | 0,333333 | 1,111111 | 3,111111 | 6,555556 | 7,666667 |
| cons4.3 | 0,333333 | 3,111111 | 6,555556 | 6,888889 | 7,555556 |
| cons4.4 | 0,444444 | 1,111111 | 2 | 6,111111 | 8,444444 |
| cons5.1 | 3,837209 | 4,418605 | 4,534884 | 6,976744 | 7,906977 |
| cons5.2 | 2,906977 | 3,488372 | 5 | 5,697674 | 8,255814 |
| cons5.3 | 0,930233 | 3,023256 | 5,232558 | 6,627907 | 7,790698 |
| cons5.4 | 2,325581 | 3,604651 | 5 | 5,930233 | 8,372093 |
| cons6.1 | 0,348837 | 3,953488 | 4,302326 | 7,55814 | 7,790698 |
| cons6.2 | 0,348837 | 1,162791 | 3,837209 | 5,930233 | 7,790698 |
| cons6.3 | 0,348837 | 1,27907 | 1,511628 | 5,697674 | 8,372093 |
| cons6.4 | 0,465116 | 1,046512 | 3,953488 | 5,581395 | 8,139535 |
| cons7.1 | 2,209302 | 4,767442 | 6,976744 | 7,44186 | 8,488372 |
| cons7.2 | 2,209302 | 3,837209 | 5,813953 | 7,906977 | 8,372093 |
| cons7.3 | 1,27907 | 2,790698 | 3,953488 | 7,906977 | 8,488372 |
| cons7.4 | 1,744186 | 2,906977 | 3,953488 | 8,255814 | 8,72093 |
| cons8.1 | 0,348837 | 2,55814 | 5,116279 | 7,906977 | 8,023256 |
| cons8.2 | 0,581395 | 4,418605 | 4,534884 | 7,55814 | 8,604651 |
| cons8.3 | 0,581395 | 4,418605 | 4,883721 | 8,139535 | 8,604651 |
| cons8.4 | 4,534884 | 5,116279 | 5,348837 | 8,139535 | 8,372093 |
| cons9.1 | 4,418605 | 5 | 7,790698 | 8,372093 | 9,651163 |
| cons9.2 | 2,790698 | 5,232558 | 7,674419 | 7,790698 | 9,651163 |
| cons9.3 | 1,744186 | 2,906977 | 3,255814 | 8,837209 | 9,767442 |
| cons9.4 | 3,139535 | 4,302326 | 7,55814 | 8,023256 | 9,651163 |
| cons10.1 | 4,767442 | 5,465116 | 7,906977 | 8,72093 | 9,651163 |
| cons10.2 | 3,488372 | 5,116279 | 7,55814 | 8,604651 | 9,767442 |
| cons10.3 | 4,767442 | 5,465116 | 7,325581 | 7,55814 | 9,767442 |
| cons10.4 | 0,465116 | 5,116279 | 5,813953 | 7,906977 | 8,488372 |
| cons11.1 | 0,232558 | 1,511628 | 1,976744 | 4,767442 | 8,488372 |
| cons11.2 | 0,348837 | 4,651163 | 4,883721 | 5,116279 | 7,790698 |
| cons11.3 | 0,232558 | 4,302326 | 5 | 7,55814 | 7,674419 |
| cons11.4 | 0,348837 | 2,44186 | 3,837209 | 3,837209 | 7,790698 |
| cons12.1 | 0,348837 | 1,744186 | 7,209302 | 8,72093 | 9,186047 |
| cons12.2 | 0,232558 | 1,511628 | 2,790698 | 8,604651 | 8,837209 |
| cons12.3 | 0,232558 | 0,930233 | 3,837209 | 8,372093 | 9,186047 |
| cons12.4 | 0,348837 | 0,697674 | 0,930233 | 3,488372 | 8,488372 |
| cons13.1 | 3,837209 | 4,534884 | 4,651163 | 8,023256 | 8,023256 |
| cons13.2 | 4,883721 | 5,116279 | 6,627907 | 7,674419 | 8,255814 |
| cons13.3 | 4,534884 | 5,116279 | 6,627907 | 7,674419 | 8,023256 |
| cons13.4 | 4,651163 | 5,697674 | 7,325581 | 8,255814 | 8,488372 |
| cons14.1 | 2,790698 | 4,651163 | 6,27907 | 8,023256 | 9,069767 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| cons14.2 | 1,162791 | 5,116279 | 6,511628 | 8,488372 | 8,953488 |
| cons14.3 | 4,767442 | 4,767442 | 6,395349 | 8,139535 | 9,069767 |
| cons14.4 | 0,465116 | 5 | 6,27907 | 7,325581 | 8,837209 |
| cons15.1 | 0,465116 | 1,976744 | 3,023256 | 3,488372 | 8,372093 |
| cons15.2 | 0,697674 | 1,627907 | 3,023256 | 3,953488 | 7,44186 |
| cons15.3 | 1,27907 | 2,325581 | 3,372093 | 5,465116 | 7,44186 |
| cons15.4 | 1,046512 | 1,744186 | 4,302326 | 4,767442 | 7,44186 |
| cons16.1 | 0,348837 | 2,325581 | 4,069767 | 7,209302 | 7,906977 |
| cons16.2 | 0,348837 | 2,325581 | 4,302326 | 7,55814 | 7,55814 |
| cons16.3 | 0,348837 | 4,534884 | 4,767442 | 7,790698 | 8,139535 |
| cons16.4 | 0,232558 | 1,744186 | 4,302326 | 7,44186 | 7,790698 |
| cons17.1 | 0,348837 | 4,302326 | 4,651163 | 7,906977 | 8,72093 |
| cons17.2 | 0,581395 | 4,651163 | 4,883721 | 6,976744 | 8,255814 |
| cons17.3 | 0,465116 | 2,209302 | 4,069767 | 7,906977 | 8,953488 |
| cons17.4 | 0,232558 | 3,139535 | 4,883721 | 7,55814 | 8,023256 |
| cons18.1 | 0,348837 | 4,767442 | 5,348837 | 7,325581 | 8,139535 |
| cons18.2 | 0,348837 | 2,906977 | 4,534884 | 5,116279 | 8,255814 |
| cons18.3 | 0,348837 | 2,325581 | 2,44186 | 5 | 7,906977 |
| cons18.4 | 0,348837 | 3,953488 | 5,116279 | 7,44186 | 8,255814 |
| cons19.1 | 4,767442 | 5 | 7,093023 | 7,906977 | 8,837209 |
| cons19.2 | 4,418605 | 5,232558 | 8,023256 | 8,023256 | 8,255814 |
| cons19.3 | 4,651163 | 5,465116 | 7,325581 | 7,906977 | 8,837209 |
| cons19.4 | 4,302326 | 5,232558 | 7,44186 | 7,674419 | 8,837209 |

Tabela AP2.4 – Valores *Crisp* Atribuídos pelos Juízes para o Sabor

| Produto | Notas Atribuídas por Cada Juiz | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| sab1.1 | 0,555556 | 1,333333 | 1,333333 | 3 | 6,333333 |
| sab1.2 | 1 | 1,222222 | 1,888889 | 4,555556 | 6,333333 |
| sab1.3 | 0,555556 | 0,888889 | 2 | 3,333333 | 6,111111 |
| sab1.4 | 1 | 1,555556 | 2,111111 | 5,111111 | 6 |
| sab2.1 | 0,333333 | 1,333333 | 1,777778 | 3,333333 | 8 |
| sab2.2 | 0,444444 | 2 | 5,222222 | 6,444444 | 7,666667 |
| sab2.3 | 0,444444 | 1,222222 | 1,666667 | 4,777778 | 8,111111 |
| sab2.4 | 0,444444 | 0,444444 | 1,666667 | 2,666667 | 7,666667 |
| sab3.1 | 0,444444 | 1,555556 | 2,777778 | 4,666667 | 5,888889 |
| sab3.2 | 0,333333 | 0,666667 | 0,888889 | 2,333333 | 6,555556 |
| sab3.3 | 0,333333 | 0,444444 | 1,222222 | 3 | 6,111111 |
| sab3.4 | 0,444444 | 0,777778 | 2,666667 | 4,777778 | 7,666667 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| sab4.1 | 0,333333 | 1 | 1,666667 | 2 | 6,555556 |
| sab4.2 | 0,888889 | 2,666667 | 2,777778 | 3,111111 | 7,222222 |
| sab4.3 | 0,333333 | 2,555556 | 3,555556 | 5,666667 | 7,555556 |
| sab4.4 | 0,444444 | 2,444444 | 2,555556 | 4,777778 | 7,666667 |
| sab5.1 | 1,511628 | 2,209302 | 4,186047 | 6,046512 | 6,744186 |
| sab5.2 | 0,348837 | 2,325581 | 4,302326 | 6,860465 | 7,325581 |
| sab5.3 | 0,930233 | 1,27907 | 1,860465 | 4,767442 | 6,395349 |
| sab5.4 | 0,813953 | 1,046512 | 2,325581 | 6,860465 | 7,325581 |
| sab6.1 | 0,116279 | 0,348837 | 0,930233 | 0,930233 | 6,395349 |
| sab6.2 | 0,116279 | 0,348837 | 0,348837 | 0,930233 | 6,511628 |
| sab6.3 | 0,232558 | 0,348837 | 0,581395 | 0,930233 | 6,860465 |
| sab6.4 | 0,232558 | 0,581395 | 0,581395 | 0,697674 | 6,162791 |
| sab7.1 | 0,813953 | 1,162791 | 1,395349 | 4,534884 | 6,395349 |
| sab7.2 | 0,813953 | 0,813953 | 1,27907 | 2,674419 | 7,55814 |
| sab7.3 | 0,930233 | 1,27907 | 2,093023 | 3,72093 | 9,069767 |
| sab7.4 | 0,581395 | 0,813953 | 1,511628 | 5,465116 | 8,72093 |
| sab8.1 | 0,348837 | 1,511628 | 2,674419 | 4,534884 | 8,488372 |
| sab8.2 | 0,348837 | 1,511628 | 3,255814 | 3,953488 | 8,023256 |
| sab8.3 | 1,511628 | 1,627907 | 3,372093 | 4,534884 | 8,837209 |
| sab8.4 | 1,511628 | 3,255814 | 4,069767 | 4,534884 | 7,674419 |
| sab9.1 | 0,232558 | 1,744186 | 3,139535 | 3,953488 | 8,72093 |
| sab9.2 | 0,348837 | 3,023256 | 4,069767 | 5,465116 | 8,139535 |
| sab9.3 | 0,348837 | 1,511628 | 3,139535 | 4,651163 | 8,139535 |
| sab9.4 | 0,348837 | 1,744186 | 3,023256 | 5,930233 | 8,023256 |
| sab10.1 | 0,232558 | 1,162791 | 1,511628 | 4,767442 | 7,906977 |
| sab10.2 | 0,348837 | 0,697674 | 4,767442 | 6,162791 | 9,302326 |
| sab10.3 | 0,232558 | 0,465116 | 0,930233 | 2,790698 | 8,72093 |
| sab10.4 | 0,348837 | 0,697674 | 2,790698 | 5 | 8,72093 |
| sab11.1 | 0,348837 | 0,930233 | 0,930233 | 1,27907 | 4,883721 |
| sab11.2 | 0,348837 | 0,930233 | 0,930233 | 1,162791 | 4,767442 |
| sab11.3 | 0,232558 | 0,348837 | 0,697674 | 1,395349 | 2,906977 |
| sab11.4 | 0,232558 | 0,465116 | 1,162791 | 1,27907 | 3,953488 |
| sab12.1 | 0,232558 | 0,348837 | 0,930233 | 1,162791 | 8,139535 |
| sab12.2 | 0,116279 | 0,348837 | 5,232558 | 5,232558 | 8,255814 |
| sab12.3 | 0,232558 | 1,046512 | 1,511628 | 3,837209 | 8,604651 |
| sab12.4 | 0,348837 | 0,813953 | 1,511628 | 4,767442 | 8,837209 |
| sab13.1 | 0,465116 | 1,511628 | 2,906977 | 2,906977 | 8,488372 |
| sab13.2 | 0,813953 | 2,906977 | 4,418605 | 4,418605 | 8,372093 |
| sab13.3 | 1,511628 | 2,325581 | 2,55814 | 6,395349 | 8,837209 |
| sab13.4 | 0,465116 | 2,674419 | 2,906977 | 6,162791 | 7,44186 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| sab14.1 | 0,348837 | 0,465116 | 0,697674 | 0,697674 | 3,604651 |
| sab14.2 | 0,581395 | 0,581395 | 0,813953 | 2,093023 | 4,651163 |
| sab14.3 | 0,348837 | 0,465116 | 0,581395 | 0,697674 | 1,860465 |
| sab14.4 | 0,465116 | 0,813953 | 1,162791 | 3,488372 | 4,767442 |
| sab15.1 | 0,465116 | 0,465116 | 0,813953 | 1,27907 | 3,372093 |
| sab15.2 | 0,116279 | 0,348837 | 0,813953 | 1,511628 | 4,069767 |
| sab15.3 | 0,116279 | 0,581395 | 0,813953 | 1,27907 | 3,837209 |
| sab15.4 | 0,232558 | 0,232558 | 0,581395 | 1,046512 | 5 |
| sab16.1 | 0,232558 | 1,511628 | 2 | 4,534884 | 7,790698 |
| sab16.2 | 0,465116 | 0,581395 | 1,511628 | 4,534884 | 7,674419 |
| sab16.3 | 0,232558 | 0,348837 | 2,906977 | 4,883721 | 7,55814 |
| sab16.4 | 0,581395 | 1,511628 | 3,837209 | 4,767442 | 8,372093 |
| sab17.1 | 0,465116 | 1,162791 | 1,27907 | 4,069767 | 7,906977 |
| sab17.2 | 0,465116 | 0,930233 | 1,395349 | 1,395349 | 2,906977 |
| sab17.3 | 0,348837 | 1,162791 | 1,395349 | 2,093023 | 8,023256 |
| sab17.4 | 0,232558 | 1,162791 | 3,488372 | 4,186047 | 7,674419 |
| sab18.1 | 0,465116 | 0,465116 | 1,395349 | 1,860465 | 2,325581 |
| sab18.2 | 0,581395 | 1,046512 | 1,511628 | 2,209302 | 3,255814 |
| sab18.3 | 0,348837 | 1,744186 | 1,744186 | 2,906977 | 3,72093 |
| sab18.4 | 0,465116 | 1,395349 | 1,976744 | 2,55814 | 3,837209 |
| sab19.1 | 1,046512 | 1,627907 | 1,860465 | 2,906977 | 7,44186 |
| sab19.2 | 1,162791 | 1,511628 | 1,976744 | 3,372093 | 7,790698 |
| sab19.3 | 0,930233 | 1,27907 | 1,860465 | 1,860465 | 3,488372 |
| sab19.4 | 1,162791 | 1,27907 | 2,093023 | 3,953488 | 6,860465 |

Tabela AP2.5 – Valores *Crisp* Atribuídos pelos Juízes para a Acidez

| Produto | Notas Atribuídas por Cada Juiz | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| aci1.1 | 2,444444 | 2,555556 | 5,222222 | 5,444444 | 8 |
| aci1.2 | 5,222222 | 5,888889 | 6,333333 | 7,555556 | 8,444444 |
| aci1.3 | 0,555556 | 1,777778 | 2,777778 | 7,666667 | 8,222222 |
| aci1.4 | 0,555556 | 1,555556 | 1,555556 | 5,666667 | 6,888889 |
| aci2.1 | 0,444444 | 1,111111 | 3,111111 | 7,444444 | 9,555556 |
| aci2.2 | 0,333333 | 1,222222 | 2,666667 | 7,111111 | 9,444444 |
| aci2.3 | 1,333333 | 3,888889 | 5,222222 | 6,666667 | 9,666667 |
| aci2.4 | 0,444444 | 1,555556 | 6 | 7,111111 | 9,444444 |
| aci3.1 | 0,888889 | 2,555556 | 4,777778 | 6 | 9,555556 |
| aci3.2 | 0,444444 | 2,888889 | 3,777778 | 4,666667 | 9,555556 |
| aci3.3 | 0,555556 | 2 | 4,777778 | 5,555556 | 9,666667 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| aci3.4 | 0,555556 | 2,777778 | 4,777778 | 5,888889 | 9,555556 |
| aci4.1 | 4,555556 | 4,777778 | 7,111111 | 7,222222 | 9,555556 |
| aci4.2 | 3,222222 | 5,333333 | 7,666667 | 7,777778 | 9,555556 |
| aci4.3 | 4,666667 | 6,222222 | 6,666667 | 7,333333 | 9,555556 |
| aci4.4 | 1,777778 | 4,888889 | 7,222222 | 7,777778 | 9,555556 |
| aci5.1 | 2,55814 | 4,069767 | 4,302326 | 7,55814 | 7,906977 |
| aci5.2 | 1,627907 | 2,44186 | 4,302326 | 4,767442 | 8,372093 |
| aci5.3 | 0,930233 | 1,395349 | 1,627907 | 6,860465 | 7,790698 |
| aci5.4 | 0,813953 | 1,511628 | 4,883721 | 7,44186 | 7,906977 |
| aci6.1 | 0,116279 | 0,465116 | 0,813953 | 1,162791 | 5,581395 |
| aci6.2 | 0,232558 | 0,348837 | 1,27907 | 5,348837 | 5,581395 |
| aci6.3 | 0,232558 | 0,348837 | 1,046512 | 3,023256 | 5,116279 |
| aci6.4 | 0,232558 | 0,581395 | 0,930233 | 0,930233 | 5,813953 |
| aci7.1 | 1,395349 | 1,627907 | 2,209302 | 7,209302 | 7,209302 |
| aci7.2 | 0,697674 | 0,813953 | 5,465116 | 7,093023 | 8,139535 |
| aci7.3 | 0,465116 | 0,581395 | 1,27907 | 5,116279 | 8,72093 |
| aci7.4 | 0,581395 | 0,697674 | 5,348837 | 6,046512 | 8,953488 |
| aci8.1 | 3,604651 | 4,651163 | 4,767442 | 6,744186 | 8,023256 |
| aci8.2 | 1,511628 | 1,627907 | 3,604651 | 7,55814 | 8,488372 |
| aci8.3 | 0,813953 | 2,209302 | 4,186047 | 8,139535 | 8,372093 |
| aci8.4 | 0,813953 | 4,069767 | 5,581395 | 6,046512 | 7,44186 |
| aci9.1 | 2,209302 | 3,139535 | 4,186047 | 7,325581 | 9,651163 |
| aci9.2 | 1,744186 | 3,023256 | 5,581395 | 8,255814 | 9,767442 |
| aci9.3 | 3,139535 | 3,139535 | 4,883721 | 8,488372 | 9,767442 |
| aci9.4 | 2,093023 | 2,906977 | 6,046512 | 8,255814 | 9,767442 |
| aci10.1 | 0,465116 | 0,813953 | 4,767442 | 8,488372 | 9,767442 |
| aci10.2 | 0,581395 | 3,953488 | 5,581395 | 8,837209 | 9,767442 |
| aci10.3 | 0,581395 | 3,953488 | 5 | 8,139535 | 9,651163 |
| aci10.4 | 0,813953 | 5,232558 | 5,465116 | 7,325581 | 9,767442 |
| aci11.1 | 0,232558 | 0,930233 | 0,930233 | 1,27907 | 5,232558 |
| aci11.2 | 0,348837 | 0,348837 | 0,930233 | 1,046512 | 4,883721 |
| aci11.3 | 0,232558 | 0,581395 | 0,581395 | 1,395349 | 3,72093 |
| aci11.4 | 0,116279 | 0,232558 | 0,813953 | 1,162791 | 3,837209 |
| aci12.1 | 0,116279 | 0,930233 | 3,488372 | 8,72093 | 9,534884 |
| aci12.2 | 0,116279 | 0,930233 | 3,372093 | 9,069767 | 9,651163 |
| aci12.3 | 0,232558 | 3,488372 | 4,767442 | 8,837209 | 9,767442 |
| aci12.4 | 0,116279 | 0,813953 | 3,488372 | 8,604651 | 9,534884 |
| aci13.1 | 4,069767 | 4,767442 | 5,232558 | 7,209302 | 7,906977 |
| aci13.2 | 1,976744 | 4,534884 | 6,744186 | 7,093023 | 7,906977 |
| aci13.3 | 0,232558 | 2,674419 | 3,72093 | 5 | 8,372093 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| aci13.4 | 0,116279 | 3,023256 | 4,418605 | 6,046512 | 8,255814 |
| aci14.1 | 0,116279 | 2,55814 | 4,767442 | 5,348837 | 9,069767 |
| aci14.2 | 1,046512 | 4,767442 | 5,116279 | 5,348837 | 9,186047 |
| aci14.3 | 0,348837 | 0,348837 | 4,883721 | 5,348837 | 9,186047 |
| aci14.4 | 0,813953 | 2,55814 | 4,883721 | 5,813953 | 9,186047 |
| aci15.1 | 0,116279 | 0,465116 | 0,697674 | 3,953488 | 5 |
| aci15.2 | 0,232558 | 0,348837 | 1,395349 | 3,023256 | 3,372093 |
| aci15.3 | 0,116279 | 0,581395 | 0,813953 | 1,511628 | 4,069767 |
| aci15.4 | 0,116279 | 0,465116 | 0,581395 | 3,604651 | 4,534884 |
| aci16.1 | 3,139535 | 3,488372 | 4,534884 | 6,627907 | 9,651163 |
| aci16.2 | 0,581395 | 5,116279 | 5,232558 | 6,976744 | 9,534884 |
| aci16.3 | 0,348837 | 4,302326 | 4,418605 | 8,139535 | 9,534884 |
| aci16.4 | 1,511628 | 3,139535 | 4,534884 | 7,790698 | 9,651163 |
| aci17.1 | 4,186047 | 5,232558 | 8,023256 | 8,255814 | 9,651163 |
| aci17.2 | 1,976744 | 3,139535 | 4,883721 | 8,837209 | 9,651163 |
| aci17.3 | 3,953488 | 4,534884 | 7,55814 | 8,488372 | 9,651163 |
| aci17.4 | 4,767442 | 4,767442 | 6,627907 | 8,372093 | 9,534884 |
| aci18.1 | 1,395349 | 2,093023 | 2,44186 | 5,232558 | 9,651163 |
| aci18.2 | 1,511628 | 3,372093 | 4,186047 | 4,651163 | 9,767442 |
| aci18.3 | 1,395349 | 2,674419 | 4,418605 | 5,116279 | 9,883721 |
| aci18.4 | 1,046512 | 2,906977 | 3,255814 | 5,465116 | 9,651163 |
| aci19.1 | 1,27907 | 1,395349 | 4,302326 | 4,534884 | 8,023256 |
| aci19.2 | 1,627907 | 2,674419 | 5,697674 | 5,813953 | 8,372093 |
| aci19.3 | 0,930233 | 5,348837 | 5,697674 | 6,976744 | 7,790698 |
| aci19.4 | 1,046512 | 5,116279 | 5,697674 | 6,860465 | 8,139535 |

# Apêndice 3 – Números *fuzzy*

Tabela AP3.1 - Números *fuzzy* da característica Cor

| Amostras | Produto | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | (0,5683; 1,3072; 2,5700) | (-0,0907; 1,5118; 2,3108) | (-0,2811; 0,9788; 1,5498) | (-0,6539; 1,4032; 2,3378) |
| 2 | (-0,9340; 0,9676; 2,1988) | (-0,7306; 0,8889; 1,8540) | (-0,2162; 0,9641; 3,2695) | (-0,7796; 0,9475; 2,1068) |
| 3 | (-0,6072; 1,2745; 5,8502) | (-0,6631; 1,2226; 5,7692) | (-0,7354; 1,2124; 5,7878) | (-0,4394; 0,9782; 4,3274) |
| 4 | (-0,1799; 1,0062; 3,2257) | (-0,6322; 1,1000; 4,8140) | (-0,2248; 0,9724; 3,1615) | (-0,1577; 0,9808; 3,1326) |
| 5 | (-0,4183; 1,2326; 2,2447) | (0,1561; 1,0405; 1,5388) | (-0,2567; 1,0268; 1,8050) | (0,2549; 1,1842; 2,6964) |
| 6 | (0,0156; 1,0983; 1,6131) | (0,2029; 0,8690; 1,9445) | (-0,1485; 0,8998; 1,4091) | (0,0440; 0,8742; 1,2765) |
| 7 | (0,2744; 0,7761; 1,0408) | (0,4197; 1,0580; 2,2108) | (0,0828; 0,8077; 1,2121) | (-0,0251; 0,7776; 1,2240) |
| 8 | (-0,4883; 1,1079; 2,1405) | (-0,5976; 1,1156; 2,2534) | (-0,3377; 1,1133; 1,9838) | (0,3992; 1,1796; 2,6023) |
| 9 | (-0,5433; 0,8080; 1,5898) | (-0,0451; 0,8219; 2,3185) | (-0,0271; 0,7200; 2,1204) | (-0,0467; 0,7489; 2,2318) |
| 10 | (-0,6944; 0,9329; 1,7961) | (-0,5830; 0,8382; 1,6697) | (0,0656; 0,6694; 1,8893) | (-0,2122; 0,6780; 1,2577) |
| 11 | (-0,5482; 0,7116; 1,5035) | (-0,4734; 0,8477; 3,5869) | (-0,2387; 0,6902; 2,6972) | (-0,0408; 0,8322; 2,5813) |
| 12 | (-0,6668; 0,8229; 1,6293) | (-0,3809; 0,8062; 1,4857) | (0,2234; 0,7161; 1,6567) | (0,3463; 0,8439; 1,6961) |
| 13 | (-0,5073; 1,3463; 5,5136) | (-0,4584; 1,2607; 4,6183) | (-0,1784; 1,2545; 4,3063) | (-0,2947; 1,3231; 4,7776) |
| 14 | (-0,2170; 0,7677; 3,1054) | (-0,6730; 0,9085; 4,8490) | (-0,2546; 0,8516; 3,1516) | (-0,5206; 0,8857; 4,2518) |
| 15 | (-0,3535; 1,2634; 2,1585) | (0,1248; 1,8546; 5,1225) | (-0,8431; 1,4878; 2,7879) | (-0,2484; 1,4894; 4,6483) |
| 16 | (-0,2151; 1,3882; 2,1079) | (0,0373; 1,5344; 2,2204) | (0,6047; 1,6132; 3,2544) | (-1,0720; 1,1896; 2,5218) |
| 17 | (-0,3157; 1,8628; 6,4106) | (-0,3920; 1,9072; 6,7540) | (-0,2397; 2,0888; 6,9380) | (-0,6291; 1,2719; 5,3744) |
| 18 | (-1,6854; 1,4517; 3,4578) | (-1,7052; 1,4103; 3,3715) | (-1,3396; 1,4438; 3,2033) | (-1,0359; 1,3048; 2,7073) |
| 19 | (-0,0360; 1,0320; 3,2983) | (-0,2157; 1,0394; 1,6395) | (-0,5730; 1,0309; 1,9278) | (-0,3624; 0,9564; 1,4855) |

Fonte:análise de dados.

Tabela AP3.2 - Números *fuzzy* da característica Aroma

| Amostras | Produto | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | | | 2 | | | 3 | | | 4 | | |
| 1 | (-0,7610; | 2,4168; | 9,3179) | (-0,0857; | 3,1104; | 9,4382) | (-0,6695; | 2,1308; | 8,3467) | (0,5579; | 1,6965; | 17,1523) |
| 2 | (-1,5940; | 2,3508; | 10,7054) | (-1,9651; | 2,2949; | 11,9573) | (-1,5972; | 2,0611; | 10,1940) | (-1,5476; | 1,7829; | 9,2370) |
| 3 | (-0,6031; | 2,7046; | 8,8743) | (-1,2111; | 2,5723; | 9,7798) | (0,4934; | 4,8554; | 12,8922) | (-1,2478; | 2,5588; | 10,1009) |
| 4 | (-3,7331; | 2,4486; | 6,4589) | (-0,0481; | 2,9290; | 8,3724) | (-1,8484; | 4,2500; | 7,4464) | (-2,9019; | 2,4694; | 5,9343) |
| 5 | (-0,5489; | 2,0906; | 7,9143) | (0,9372; | 1,7817; | 11,7096) | (-1,1257; | 1,5664; | 7,0259) | (-2,2146; | 4,0909; | 7,7450) |
| 6 | (-0,7387; | 1,6783; | 7,0406) | (0,3389; | 1,3153; | 13,7889) | (-1,2009; | 2,1891; | 9,5994) | (-1,5041; | 2,4403; | 10,7274) |
| 7 | (-0,5615; | 1,8639; | 7,2302) | (-1,8456; | 4,3512; | 7,5221) | (-0,5572; | 2,6590; | 10,5363) | (-0,6248; | 2,3560; | 8,9179) |
| 8 | (-3,5337; | 3,6913; | 8,3062) | (-1,8221; | 4,2914; | 7,8184) | (0,3952; | 3,8384; | 10,1672) | (2,5073; | 4,6330; | 8,9285) |
| 9 | (-2,2174; | 1,4910; | 9,6526) | (0,0333; | 1,3433; | 18,0256) | (-1,9663; | 1,5843; | 9,4955) | (0,0506; | 1,3695; | 18,5514) |
| 10 | (-1,9605; | 1,6584; | 10,5799) | (-1,8317; | 1,7543; | 9,9414) | (-1,9289; | 1,5723; | 9,0060) | (-2,0939; | 1,6520; | 10,6021) |
| 11 | (-0,9597; | 1,0306; | 5,3883) | (-1,0649; | 0,9462; | 5,3470) | (-0,7474; | 1,2663; | 5,5749) | (-0,5714; | 0,9413; | 4,0573) |
| 12 | (-2,0980; | 3,5794; | 14,7440) | (0,0561; | 1,3598; | 18,5595) | (-2,0078; | 1,7457; | 10,7172) | (-2,0203; | 1,7697; | 10,9955) |
| 13 | (0,0401; | 3,3161; | 10,1595) | (-3,0704; | 2,7678; | 6,6687) | (-1,3044; | 2,5173; | 10,1972) | (-1,4241; | 2,3229; | 10,0361) |
| 14 | (-0,6486; | 1,6190; | 6,5047) | (-0,6699; | 2,3222; | 7,8749) | (-0,8226; | 1,5905; | 7,0520) | (-2,9185; | 2,9041; | 6,2801) |
| 15 | (-0,6917; | 1,5821; | 6,5000) | (-0,3630; | 1,3626; | 4,7628) | (-1,6150; | 1,0051; | 2,8886) | (-1,8342; | 0,8659; | 2,8090) |
| 16 | (-1,1370; | 2,6938; | 10,8648) | (-1,3990; | 2,2030; | 9,6722) | (-1,4722; | 2,1810; | 9,9235) | (-1,0156; | 2,2059; | 9,4712) |
| 17 | (-0,2636; | 1,1500; | 4,0033) | (-0,9430; | 1,1352; | 2,5271) | (-0,6433; | 1,9618; | 3,5228) | (-0,0828; | 1,0551; | 3,2072) |
| 18 | (-1,4380; | 1,3651; | 3,0523) | (-0,0929; | 2,5055; | 7,1212) | (-1,6409; | 1,5024; | 3,3710) | (-0,2058; | 1,4546; | 4,4329) |
| 19 | (-0,4533; | 0,9562; | 3,9412) | (-1,6745; | 2,2490; | 11,3309) | (-1,3911; | 1,2342; | 2,9163) | (-1,8850; | 1,8964; | 10,9766) |

Fonte:análise de dados.

Tabela AP3.3 - Números *fuzzy* da característica Consistência

| Amostras | Produto | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | (-0,6428; 3,3300; 11,7858) | (-0,8043; 3,5449; 13,2113) | (-0,8424; 3,3019; 11,3915) | (1,4566; 5,2317; 11,5018) |
| 2 | (-4,2558; 5,0359; 10,4696) | (2,0856; 5,7673; 12,4809; | (1,6097; 6,1605; 13,5924) | (-4,0834; 5,0505; 10,3381) |
| 3 | (-1,7174; 6,5859; 10,8809) | (3,2009; 6,6906; 12,6442) | (-0,6335; 6,4785; 10,2798) | (0,6670; 6,4643; 9,8639) |
| 4 | (-1,8811; 3,3784; 13,2137) | (-1,3799; 3,5765; 12,5582) | (-3,4929; 5,4468; 9,4264) | (-1,6797; 3,1086; 13,2616) |
| 5 | (2,8088; 5,2775; 10,5678) | (0,1009; 4,8625; 7,9154) | (-2,4815; 4,9220; 8,9002) | (-0,4865; 4,9209; 8,2338) |
| 6 | (0,5485; 5,0014; 12,2815) | (-4,2355; 3,7276; 8,6487) | (-1,6834; 2,8562; 12,9507) | (-4,2211; 3,6868; 8,6313) |
| 7 | (-0,5469; 6,3378; 9,6395) | (-1,2906; 5,7718; 9,7108) | (-0,1013; 4,7466; 13,4857) | (0,0784; 4,9024; 13,8821) |
| 8 | (-4,0994; 5,0439; 9,9896) | (0,9271; 5,2891; 12,8462) | (0,8423; 5,5503; 13,2658) | (3,4537; 6,1093; 11,4129) |
| 9 | (0,9758; 7,1564; 10,5115) | (-0,2225; 6,9069; 10,4159) | (-0,4728; 4,8489; 15,8156) | (-0,7994; 6,7244; 10,6439) |
| 10 | (1,6059; 7,4222; 10,5770) | (0,0935; 7,0970; 10,8109) | (2,1127; 6,9037; 9,6783) | (1,5862; 6,0172; 12,6642) |
| 11 | (-1,3617; 2,8569; 11,8823) | (-1,0247; 4,8098; 8,0039) | (0,9189; 5,3392; 11,9752) | (-2,4454; 3,4754; 6,8880) |
| 12 | (-6,1242; 5,9301; 11,8936) | (-2,0756; 4,1039; 15,6274) | (-2,1100; 4,3428; 15,7101) | (-1,9021; 1,9686; 11,2869) |
| 13 | (2,5897; 5,6001; 11,5831) | (2,5531; 6,5098; 8,8955) | (2,2652; 6,4694; 8,8183) | (2,3806; 7,0556; 9,4543) |
| 14 | (-0,3055; 6,2640; 10,0003) | (-1,6519; 6,4786; 10,6596) | (3,5628; 6,4970; 11,8842) | (-1,9041; 6,0369; 10,0920) |
| 15 | (-2,8275; 3,0099; 6,8266) | (-0,4333; 3,0236; 9,5549) | (0,2469; 3,7551; 10,4657) | (-2,5614; 3,7695; 7,4875) |
| 16 | (-0,5671; 4,4142; 12,6880) | (-0,5839; 4,5580; 12,5842) | (0,9680; 5,4147; 12,5804) | (-1,0258; 4,3994; 13,0107) |
| 17 | (0,6387; 5,3758; 13,3584) | (1,4035; 5,3230; 11,8511) | (-0,9498; 4,6302; 14,3959) | (-0,0004; 5,0137; 12,7201) |
| 18 | (1,4016; 5,5852; 12,0348) | (-2,6607; 4,2316; 8,1227) | (-0,5339; 3,2678; 11,0679) | (0,6999; 5,3110; 12,5029) |
| 19 | (1,9564; 6,7483; 9,5307) | (1,5358; 7,1191; 9,5458) | (2,1980; 6,9381; 9,4846) | (1,6601; 6,8432; 9,4982) |

Fonte:análise de dados.

Tabela AP3.4 - Números *fuzzy* da característica Sabor

| Amostras | Produto | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | | | 2 | | | 3 | | | 4 | | |
| 1 | (-0,6846; | 2,0181; | 8,2034) | (-0,5350; | 2,6146; | 9,4676) | (-0,7251; | 2,2227; | 8,2292) | (-0,3424; | 2,8858; | 9,4600) |
| 2 | (-1,2310; | 2,3453; | 10,0841) | (-3,8360; | 4,5840; | 9,0368) | (-1,3973; | 2,6649; | 11,6880) | (-1,5608; | 1,9056; | 9,4363) |
| 3 | (-0,3247; | 2,9907; | 8,8693) | (-1,3215; | 1,5211; | 8,2237) | (-1,2500; | 1,7321; | 8,3900) | (-1,2676; | 2,9023; | 11,0808) |
| 4 | (-1,0495; | 1,7677; | 7,5182) | (0,2566; | 2,9627; | 8,2397) | (-0,1013; | 3,8832; | 10,9536) | (-0,2816; | 3,2763; | 10,5061) |
| 5 | (-1,8921; | 4,1505; | 7,7654) | (-0,3311; | 4,3803; | 11,7564) | (-0,6113; | 2,6670; | 9,7470) | (-1,3885; | 3,3389; | 12,6436) |
| 6 | (-0,0064; | 1,0263; | 14,2061) | (-1,7934; | 0,8573; | 7,2292) | (-0,1076; | 0,9614; | 15,4255) | (-0,0001; | 0,9015; | 13,7956) |
| 7 | (-0,8309; | 2,4015; | 9,7886) | (-1,1814; | 1,8902; | 9,2483) | (-1,1895; | 2,6599; | 11,2790) | (-1,8375; | 2,7317; | 13,1799) |
| 8 | (-1,1015; | 3,0594; | 11,3815) | (-3,2763; | 3,0870; | 7,1383) | (-0,3367; | 3,4497; | 11,1560) | (-0,7733; | 4,0282; | 6,9713) |
| 9 | (-3,5006; | 3,1305; | 7,4536) | (0,2143; | 4,1805; | 11,0820) | (-0,9017; | 3,2409; | 11,0377) | (-0,9288; | 3,5713; | 12,0904) |
| 10 | (-1,5382; | 2,5616; | 11,6112) | (-5,4130; | 4,1247; | 9,9551) | (-2,1466; | 1,7354; | 10,9304) | (-1,6450; | 3,0442; | 12,3644) |
| 11 | (-0,7032; | 1,2071; | 5,4313) | (0,4530; | 1,1655; | 10,0146) | (-0,4500; | 0,8957; | 3,8451) | (-1,6084; | 1,1113; | 3,0132) |
| 12 | (-0,0887; | 1,2114; | 18,2081) | (-5,4846; | 3,9004; | 9,0732) | (-1,7048; | 2,3433; | 11,4107) | (-1,9080; | 2,5486; | 12,6349) |
| 13 | (-3,1469; | 2,6883; | 6,5108) | (-2,0751; | 4,0212; | 7,5163) | (-0,3685; | 3,7866; | 13,0365) | (-0,2202; | 3,7909; | 11,4141) |
| 14 | (0,2518; | 0,7745; | 7,7165) | (-0,6375; | 1,3161; | 6,0796) | (-0,0300; | 0,6399; | 2,0857) | (-0,7184; | 1,8377; | 7,3963) |
| 15 | (-0,3695; | 0,9822; | 4,0545) | (-0,8547; | 1,0280; | 5,1115) | (-0,6685; | 1,0054; | 4,5763) | (-1,2160; | 0,8607; | 5,7085) |
| 16 | (-1,1334; | 2,7627; | 10,9461) | (-1,6224; | 2,3684; | 11,3027) | (-4,4462; | 2,8984; | 7,8742) | (-3,4981; | 3,5588; | 7,9845) |
| 17 | (-1,3826; | 2,3224; | 10,9541) | (-0,5650; | 1,2976; | 2,4443) | (-1,4831; | 1,8290; | 9,1232) | (-3,6380; | 3,1279; | 7,2908) |
| 18 | (-0,8658; | 1,2852; | 2,6175) | (0,1729; | 1,6193; | 4,3757) | (0,3542; | 2,0802; | 5,2947) | (0,2431; | 1,9963; | 5,0926) |
| 19 | (-0,4946; | 2,3534; | 8,7901) | (-0,5581; | 2,5235; | 9,5554) | (-0,2481; | 1,7407; | 2,9902) | (-0,3963; | 2,6041; | 9,2471) |

Fonte:análise de dados.

Tabela AP3.5 - Números *fuzzy* da característica Acidez

| Amostras | Produto | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | (-1,0445; 4,6147; 8,0171) | (4,7357; 6,5885; 10,1158) | (-1,3568; 3,9233; 13,9484) | (-1,0719; 2,8413; 11,2602) |
| 2 | (-1,8915; 3,9272; 15,2886) | (-1,9184; 3,6886; 14,9853) | (0,9747; 5,2821; 12,8034) | (-5,2494; 5,0521; 10,7325) |
| 3 | (-3,2773; 4,5737; 9,3612) | (-0,3264; 3,9030; 11,7976) | (-4,0041; 4,3034; 9,2895) | (-3,3687; 4,5779; 9,3181) |
| 4 | (1,5132; 6,5474; 9,5197) | (0,3425; 6,9473; 10,2264) | (4,4601; 6,7730; 11,0065) | (-1,3710; 6,5843; 10,5641) |
| 5 | (1,6890; 5,1575; 11,6428) | (-1,7408; 4,0203; 7,6449) | (-1,4071; 3,2005; 13,2943) | (-4,3104; 4,6185; 9,7596) |
| 6 | (-1,3399; 1,0422; 6,2710) | (-1,7198; 2,2486; 10,1934) | (-1,1394; 1,5775; 7,5516) | (0,1613; 1,0571; 12,7291) |
| 7 | (-0,8470; 3,5453; 12,5522) | (-5,1154; 4,6080; 10,0662) | (-2,0349; 2,4978; 13,0381) | (-5,1701; 4,3135; 9,8285) |
| 8 | (2,9284; 5,3624; 10,3400) | (-0,6620; 4,2685; 13,6785) | (-0,7195; 4,7090; 13,8652) | (-1,3627; 5,1434; 8,3574) |
| 9 | (0,5969; 4,9247; 13,6620) | (0,4053; 5,6325; 14,5084) | (1,0539; 5,5465; 14,4503) | (-2,8785; 5,8085; 11,0119) |
| 10 | (-6,2852; 4,7629; 11,7274) | (0,2795; 5,9324; 15,0628) | (0,3482; 5,5408; 14,4351) | (1,6222; 5,8878; 13,2807) |
| 11 | (-0,8881; 1,2171; 5,8202) | (-1,0218; 1,0022; 5,4001) | (-0,6039; 0,9615; 4,6300) | (-0,8588; 0,8903; 4,5888) |
| 12 | (-2,4215; 4,3057; 16,5083) | (-2,5761; 4,3500; 16,9795) | (-0,4244; 5,4832; 15,5109) | (-2,4558; 4,2513; 16,4518) |
| 13 | (3,3002; 5,6982; 10,3311) | (-0,6470; 6,0524; 9,1525) | (-0,1870; 3,8453; 11,1005) | (0,0664; 4,4521; 11,7641) |
| 14 | (-3,6389; 4,3199; 8,8417) | (-0,9585; 5,0823; 8,5872) | (-5,4478; 3,8675; 9,4724) | (-3,1602; 4,5390; 9,0832) |
| 15 | (-1,4100; 1,6796; 8,4986) | (-0,6715; 1,5898; 5,6830) | (-0,7313; 1,0836; 5,0313) | (-1,2690; 1,5198; 7,7349) |
| 16 | (1,5232; 5,0341; 12,4737) | (1,4889; 5,6603; 12,9238) | (0,3535; 5,4007; 14,4572) | (0,2255; 5,1244; 14,2002) |
| 17 | (0,9078; 7,2523; 10,4868) | (0,3009; 5,5363; 14,9472) | (0,0969; 6,9548; 10,7317) | (3,4745; 6,6740; 12,5196) |
| 18 | (-0,6439; 3,4475; 12,8282) | (0,4765; 4,2360; 11,3608) | (-2,5353; 4,2781; 8,6761) | (-0,1646; 3,9802; 12,5718) |
| 19 | (-2,7792; 3,6729; 7,6771) | (-2,1594; 4,8804; 8,6985) | (2,3330; 5,8000; 10,9967) | (2,1715; 5,7341; 11,2263) |

Fonte:análise de dados.

# Apêndice 4 – Implementações Utilizadas

## AP4.1 – Transformação de valores *crisp* em valores *fuzzy* (método Cheng)

```
%entrada (dados do produto 1 da primeira amostra)
g = [0.55556,1.11111,1.22222,1.66667,1.88889]

%calcula tamanho da entrada
tam=length(g);

%cria matriz gxg com coluna subtraindo linha e já coloca os valores em
%módulo
for i=1:1:tam
    for j=1:1:tam
        D(j,i)=abs(g(i)-g(j));
    end
end

%calculamos as 5 médias de cada linha da matriz anterior
%os valores ficam dispostos em um vetor
for i=1:1:tam
    di(i)=0;
    for j=1:1:tam
        di(i)=D(i,j)+di(i);
    end
    di(i)=di(i)/(tam-1);
end

%cria matriz P a partir do vetor encontrado
for i=1:1:tam
    for j=1:1:tam
        P(i,j)=di(j)/di(i);
    end
end

%encontrar os pesos wi
for i=1:1:tam
    n=0;
    for j=1:1:tam
        n=n+P(j,i);
    end
    w(i)=1/n;
end

%encontrar valor central m do numero fuzzy
m=0;
for i=1:1:tam
    m=w(i)*g(i)+m;
end

%estimar variância das possibilidades
%dividir o vetor g em 2 trechos: maior e menor que m.

%primeiro calcula quantos elementos temos abaixo
for i=1:1:tam
    teste=i;
    if(g(i)>m)
        teste=teste-1;
```

```
        break
    end
end

%agora fazemos o somatorio dos elementos menores
menores=0; wme=0;
for i=1:1:teste
    menores =menores+ (w(i)*(m-g(i))^2);
    wme=wme+w(i);
end
menores=menores/wme;
%e agora o somatorio dos maiores
maiores=0; wma=0;
for i=(teste+1):1:tam
    maiores = maiores+(w(i)*(m-g(i))^2);
    wma=wma+ w(i);
end
maiores=maiores/wma;
%por fim fazemos a média dos somatorios
S=(menores+maiores)/2;


%agora encontramos os valores gl e gy
gl=0; wl=0;
for i=1:1:teste
    gl = gl+(w(i)*g(i));
    wl=wl+w(i);
end
gl=gl/wl;

gy=0; wy=0;
for i=(teste+1):1:tam
    gy =gy+(w(i)*g(i));
    wy=wy+w(i);
end
gy=gy/wy;

%agora encontramos o valor de p
p=(m-gl)/(gy-m);

%agora encontramos os extremos do fuzzy

xa=(12*(p^2)*(S)) / (1+(p^2));
a= m - sqrt(xa);
xb=(12*(S)) / (1+(p^2));
b= m + sqrt(xb);
```

AP4.2 – Construção parcial das figuras: gráfico tradicional e gráfico *fuzzy*

```
%% carregando dados constantes
 dado1=load('graf-nor-am.txt');

  pt5=dado1(:,1);

% carregando os dados
dado=load('cor_a.txt');

 pt=dado(:,1:2:3);

%cria as linhas, ou seja, os limites de controle
for i=1:20

    lsc(i)=0.667996;
    lc(i)=0.292724;
    lic(i)=0;
end

% plota o gráfico tradicional
x=0:19;
close
figure(1)
  subplot(2,1,1);p2=plot(x,lic,'b',x,lsc,'r',x,lc,'k')
  set(p2,'LineWidth',3)
  legend('LIC', 'LSC','LC','Location','NorthEastOutside')
  xlabel('Amostras')
  set(gca,'XTick',0:1:19)
  ylabel('Amplitudes')
  title('Gráfico para Amplitude de Shewhart')
 hold on
plot(pt5(:,1),'.k');
hold on

pt1=[pt(:,1);pt(:,2)];

% Emparelha os dados de a e b
cont=1;
for i=1:19

    for j=1:2
        pt1(cont,1)=pt(i,j);
        cont=cont+1;
    end
end

pt_2coluna=[-0.114346000000000,1;2.19209250000000,1;
-0.665095000000000,2;2.35724575000000,2;
-0.611255000000000,3;5.43364500000000,3;
-0.298652500000000,4;3.58343050000000,4;
-0.0659972500000000,5;2.07119750000000,5;
0.0284902500000000,6;1.56081000000000,6;
0.187966250000000,7;1.42190775000000,7;
-0.256074750000000,8;2.24500650000000,8;
-0.165545000000000,9;2.06512800000000,9;
```

```
-0.355992750000000,10;1.65319675000000,10;
-0.325302500000000,11;2.59221325000000,11;
-0.119490250000000,12;1.61694950000000,12;
-0.359725000000000,13;4.80396325000000,13;
-0.416290000000000,14;3.83944475000000,14;
-0.330054208000000,15;3.67928932700000,15;
-0.161269144000000,16;2.52613977600000,16;
-0.394129760000000,17;6.36922518100000,17;
-1.44154347700000,18;3.18497279300000,18;
-0.296761712000000,19;2.08778237300000,19;];

pt1(:,2)=pt_2coluna(:,2);

%plota, na mesma figura do gráfico anterior, o gráfico fuzzy
for i=1:20

    lia(i)=0;
    lsa(i)=1.561229;
    lsb(i)=2.89449;
    lib(i)=0;

end

x=0:19;

  subplot(2,1,2); p=plot(x,lia,'b',x,lsa,'r',x,lsb,'r',x,lib,'b');
  set(p,'LineWidth',3)
  title('Gráfico Fuzzy para a Amplitude')
  legend('LIC', 'LSC','Location','NorthEastOutside')
  xlabel('Amostras')
  set(gca,'XTick',0:1:19)
  ylabel('Amplitudes de a e b')
  hold on
plot(pt1(:,2),pt1(:,1),'.k');
```

## AP4.3 – Cálculo de dominâncias

```
%% Calculando a DF(limite superior de controle fuzzy, número fuzzy)

dado=load('cor.txt');
as=0.174142;%1
ms=2.003865;%2 1,2 e 3 são valores constantes: é o limite superior de
controle fuzzy
bs=3.833588;%3

b=dado(:,3);% são os valores médios fuzzy de b
m=dado(:,2);% são os valores médios fuzzy de m
a=dado(:,1);% são os valores médios fuzzy de a
for i=1:19
    if bs>b(i,1)& as>a(i,1)& as<b(i,1) %  caso 1
        alphas(i)=(b(i,1)-as)/(ms-m(i,1)-as+b(i,1));
        Rxs=(b(i,1)-as)*alphas(i);
        Rsx=(bs-a(i,1))+(as-b(i,1))-(as-b(i,1))*alphas(i);
        DFsx(i)=Rsx/(Rxs+Rsx);

    elseif bs<b(i,1)& as<a(i,1)& a(i,1)<bs % caso 2
        alphas(i)=(bs-a(i,1))/(m(i,1)-ms+bs-a(i,1));
        Rsx=(bs-a(i,1))*alphas(i);
        Rxs=(b(i,1)-as)+(a(i,1)-as)-(a(i,1)-as)*alphas(i);
        DFsx(i)=Rsx/(Rxs+Rsx);

    elseif b(i,1)>bs & as>a(i,1)& m(i,1)==ms % caso 3
        alphas(i)=1;
        Rsx=(bs-a(i,1));
        Rxs=(b(i,1)-as);
        DFsx(i)=Rsx/(Rxs+Rsx);

    elseif b(i,1)>bs & as>a(i,1)& ms>m(i,1) % caso 4
        alphas(i)=(b(i,1)-as)/(ms-m(i,1)-as+b(i,1));
        Rxs=(b(i,1)-as)*alphas(i);
        Rsx=(bs-a(i,1))+(as-b(i,1))-(as-b(i,1))*alphas(i);
        DFsx(i)=Rsx/(Rxs+Rsx);

    elseif b(i,1)>bs & as>a(i,1)& ms<m(i,1) % caso 5
        alphas(i)=(bs-a(i,1))/(m(i,1)-ms+bs-a(i,1));
        Rsx=(bs-a(i,1))*alphas(i);
        Rxs=(b(i,1)-as)+(a(i,1)-as)-(a(i,1)-as)*alphas(i);
        DFsx(i)=Rsx/(Rxs+Rsx);

    elseif b(i,1)<bs & as<a(i,1)& m(i,1)==ms % caso 6
        alphas(i)=1;
        Rsx=(bs-a(i,1));
        Rxs=(b(i,1)-as);
        DFsx(i)=Rsx/(Rxs+Rsx);

    elseif b(i,1)<bs & as<a(i,1)& m(i,1)<ms % caso 7
        alphas(i)=(b(i,1)-as)/(ms-m(i,1)-as+b(i,1));
        Rxs=(b(i,1)-as)*alphas(i);
        Rsx=(bs-a(i,1))+(as-b(i,1))-(as-b(i,1))*alphas(i);
        DFsx(i)=Rsx/(Rxs+Rsx);

    elseif b(i,1)<bs & as<a(i,1)& ms<m(i,1) % caso 8
        alphas(i)=(bs-a(i,1))/(m(i,1)-ms+bs-a(i,1));
        Rsx=(bs-a(i,1))*alphas(i);
        Rxs=(b(i,1)-as)+(a(i,1)-as)-(a(i,1)-as)*alphas(i);
        DFsx(i)=Rsx/(Rxs+Rsx);
```

```
    elseif b(i,1)>bs & a(i,1)>bs % caso 9
        DFsx(i)=0;

    else
        DFsx(i)=1; % caso 10
    end
end
vDFsx=[DFsx]';
```