

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO - MEC
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE - FURG
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL - PPGMC

DANIELA NAHUYS THORMANN

APLICAÇÃO DO *CONSTRUCTAL DESIGN* NA OTIMIZAÇÃO DA CAPACIDADE
RESISTENTE DE COLUNAS DE AÇO COM FUROS ELÍPTICOS

RIO GRANDE - RS

2015

Daniela Nahuys Thormann

Aplicação do *Constructal Design* na otimização da capacidade resistente de colunas de aço
com furos elípticos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional (PPGMC) da Universidade Federal do Rio Grande (FURG) como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Modelagem Computacional. Área de concentração: Mecânica Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Mauro de Vasconcellos Real

Coorientador: Prof. Dr. Liércio André Isoldi

Rio Grande - RS

2015

Daniela Nahuys Thormann

Aplicação do *Constructal Design* na otimização da capacidade resistente de colunas de aço
com furos elípticos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional (PPGMC) da Universidade Federal do Rio Grande - FURG como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Modelagem Computacional, aprovada pela comissão de avaliação abaixo assinada:

Prof. Dr. Mauro de Vasconcellos Real
(Orientador - FURG)

Prof. Dr. Liércio André Isoldi
(Coorientador - FURG)

Prof. Dr. Elizaldo Domingues do Santos (FURG)

Prof. Dr. Eduardo Costa Couto (UFPEL)

Rio Grande, 02 de outubro de 2015.

Dedico este trabalho à minha família, em especial à minha mãe Candida Maria Nahuys Thormann e ao meu pai Carlos Henrique Thormann, os quais sempre me apoiaram e me ensinaram o verdadeiro sentido da palavra amor.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço aos meus queridos pais, Candida Maria Nahuys Thormann e Carlos Henrique Thormann, por todo apoio e incentivo durante a realização deste trabalho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Mauro de Vasconcellos Real, por ter me proporcionado a oportunidade de realizar este trabalho, através de seus valiosos ensinamentos, paciência, dedicação como grande profissional que é.

Ao meu coorientador, Prof. Dr. Liércio André Isoldi, que sempre teve disponibilidade de ajudar quando necessário e fazer sugestões para a elaboração deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Elizaldo Domingues do Santos pelas importantes considerações feitas no decorrer do curso, que foram de suma importância para a execução do presente trabalho.

Às minhas colegas Rafaella Colares da Silva, Renata Costa de Almeida Alonso e Maria Elenice Shroeder Sena, que estiveram sempre presentes durante todo o tempo de realização do trabalho, me incentivando, apoiando, ajudando através da amizade e convivência.

À CAPES pelo financiamento dos estudos.

À Universidade Federal do Rio Grande – FURG por ofertar o Curso de Mestrado em Modelagem Computacional de qualidade.

RESUMO

Colunas de aço suportam grandes esforços, apesar da área de sua seção transversal ser relativamente pequena quando comparada ao seu comprimento, devido ao fato de apresentarem alta resistência mecânica nos diversos estados de tensão. Apesar disto, quando estes elementos estruturais estão sujeitos à carga axial de compressão podem desenvolver um fenômeno chamado de flambagem, podendo ser elástica ou elasto-plástica. Em muitos projetos de engenharia é necessário que sejam feitas perfurações na alma das colunas. No entanto, estas perfurações podem influenciar, significativamente, tanto no valor da carga crítica de flambagem quanto no valor da carga última. Em vista disto, foi realizado um estudo numérico da capacidade de carga de colunas de aço do tipo U com perfurações elípticas, através do Método de Elementos Finitos (MEF) pelo software ANSYS[®]. Inicialmente, foi feita a verificação do modelo numérico para a carga crítica elástica com resultados de outros autores, e, após, a validação para a carga última elasto-plástica com resultados experimentais encontrados na literatura. Testes para perfurações elípticas foram feitos, levando em conta a retirada de frações do volume das perfurações (ϕ), que é a relação entre o volume dos furos e o volume total da coluna, de $\phi = 0,05$; $0,10$ e $0,15$. Para cada fração de volume foi variada a relação entre as dimensões características das perfurações, ou seja, uma relação entre os eixos da elipse (H_0/L_0). Em cada fração de volume, ϕ , foi possível determinar, através do método de *Constructal Design*, um valor ótimo para as dimensões características das perfurações (H_0/L_0)_o que conduz a um comportamento mecânico superior da coluna. As colunas apresentaram melhoria com relação às suas cargas de até 31,66% na análise linear e 74,55% na análise não linear, considerando a retirada de 15% do volume total do material, após a aplicação do método de *Constructal Design*.

Palavras-chave: Flambagem linear de colunas, Flambagem não linear de colunas, Método de Elementos Finitos, Modelagem Computacional, *Constructal Design*.

ABSTRACT

Steel columns support high efforts, despite the area of their cross section being relatively small compared to its length, due to the fact that they have high mechanical strength in various states of tension. Despite this, when these structural elements are subject to compressive axial load they can develop a phenomenon called buckling, that can be elastic or elastoplastic. In many engineering projects it is necessary that drilling are made in the columns soul. However, these drillings may significantly influence both the value of the critical and last loads buckling. Because of this, we performed a numerical study of the steel column loading capacity of U type with elliptical drillings through the Finite Element Method (FEM) by ANSYS® software. Initially, it was made a verification of the numerical model for the elastic critical load with results of other authors, and after the validation for the elastoplastic last load with experimental results found in the literature. Tests for elliptical perforations were made, taking into account the withdrawal volume fractions of drillings (ϕ), which is the ratio between the holes volume and the column total volume, $\phi = 0,05; 0,10$ and $0,15$. For each volume fraction it was varied the ratio between the characteristic dimensions of the drillings, in other words, an aspect ratio of the ellipse (H_0/L_0). In each volume fraction, it was possible to determined by the method of Constructal Design, a optimum value for the characteristic dimensions of the perforations (H_0/L_0) which leads to a higher mechanical behavior of the column. The columns had improvement with respect to their loads up to 31,66% in the linear analysis and 74,55% in the non-linear analysis, considering the removal of 15% of the total volume of the material, after applying the method of Constructal Design.

Keywords: linear buckling columns, nonlinear buckling columns, Finite Element Method, Computational Modeling, Constructal Design.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. 1 - Tipos de perfil de aço.	18
Figura 2. 1 - Método hipotético dedutivo aplicado ao estudo de caso.	27
Figura 2. 2 - Modelagem numérica esquematizada para o problema de flambagem de colunas de aço.	28
Figura 3. 1 - Tipos de equilíbrio.	30
Figura 3. 2 - Coluna sob a ação de um carregamento	31
Figura 3. 3 - Colunas axialmente carregadas.	32
Figura 3. 4 - Coluna ideal.	33
Figura 3. 5 - Coluna ideal sob a ação de uma força lateral F e a carga crítica.	34
Figura 3. 6 - Colunas, sob flambagem, com extremidades apoiadas por pinos.	35
Figura 3. 7 - Gráfico da coluna ideal.	37
Figura 3. 8 - Colunas com fatores de comprimento específicos	40
Figura 3. 9 - Modos de flambagem local para seções do tipo U enrijecida.	42
Figura 3. 10 - Modos de flambagem distorcional para seções do tipo U enrijecida	42
Figura 3. 11 - Modos de flambagem global para seções do tipo U enrijecida	43
Figura 3. 12 - Diagrama de corpo livre de uma coluna com imperfeições.	44
Figura 3. 13 - Representação gráfica da equação da deflexão máxima	46
Figura 3. 14 - Tensão máxima na coluna sob compressão	47
Figura 3. 15 - Diagrama tensão-deformação convencional e real para um o aço (fora de escala).....	49
Figura 3. 16 - Diagrama da tensão de compressão média P/A versus a razão de esbeltez L/r	52
Figura 3. 17 - Diagrama tensão-deformação e representação gráfica da hipérbole de Euler ...	53
Figura 3. 18 - Formato de árvore com suas ramificações.	56
Figura 4. 1 - Elementos conectados por pontos nodais.	58
Figura 4. 2 - Diferentes tipos de elementos finitos	58
Figura 4. 3 - Malha de elementos finitos para um problema plano fonte.	59
Figura 4. 4 - Elemento SHELL 93	60
Figura 4. 5 - Método de Newton-Raphson	63
Figura 5. 1 - Seção transversal da coluna do tipo U enrijecido	66
Figura 5. 2 - Geometria, nomenclatura e localização das perfurações	67
Figura 5. 3 - Criação de área para definir a geometria da seção transversal.	68
Figura 5. 4 - Geração de um volume a partir do comando <i>Extrude</i>	68
Figura 5. 5 - Coluna finalizada, após serem removidos o volume e as áreas adicionais	69
Figura 5. 6 - Coluna perfurada criada a partir de três faixas	69
Figura 5. 7 - Malha triangular e quadrangular com refinamento no entorno da perfuração	70

Figura 5. 8 - Flambagem Local da coluna 362NH.....	71
Figura 5. 9 - Flambagem Local da coluna 600NH.....	72
Figura 5. 10 - Flambagem Local da coluna 600H.....	72
Figura 5. 11 - Flambagem não linear da coluna 362NH.....	73
Figura 5. 12 - Flambagem não linear da coluna 600NH.....	74
Figura 5. 13 - Flambagem não linear da coluna 600H.....	74
Figura 6. 1 - Seção transversal da coluna estudada.....	75
Figura 6. 2 - Seção transversal com a distribuição de <i>Keypoints</i>	76
Figura 6. 3 - Geometria da coluna no ANSYS	77
Figura 6. 4 - Geometria da coluna discretizada	78
Figura 6. 5 - Coluna discretizada com as condições de contorno	78
Figura 6. 6 - Coluna discretizada com as condições de contorno e carregamentos	79
Figura 6. 7 - Alma da coluna com cinco perfurações elípticas e a nomenclatura de suas dimensões	81
Figura 6. 8 - Discretização de colunas com perfurações com elementos triangulares na alma e elementos quadrangulares nas abas.....	83
Figura 6. 9 - Coluna com cinco perfurações elípticas após a análise linear e o modo de flambagem global para $H_0 / L_0 = 0,50$ e $\phi = 0,05$	85
Figura 6. 10 - Coluna com cinco perfurações elípticas após a análise linear e o modo de flambagem global para $H_0 / L_0 = 0,75$ e $\phi = 0,05$	85
Figura 6. 11 - Coluna com cinco perfurações elípticas após a análise linear e o modo de flambagem global para $H_0 / L_0 = 1,00$ e $\phi = 0,05$	86
Figura 6. 12 - Coluna com cinco perfurações elípticas após a análise linear e o modo de flambagem global para $H_0 / L_0 = 1,25$ e $\phi = 0,05$	86
Figura 6. 13 - Coluna com cinco perfurações elípticas após a análise linear e o modo de flambagem global para $H_0 / L_0 = 1,50$ e $\phi = 0,05$	87
Figura 6. 14 - Carga crítica normalizada <i>PNE</i> para as colunas perfuradas considerando $\phi = 0,05$	88
Figura 6. 15 - Distribuição de tensões de von Mises (em MPa) para as colunas com $\phi = 5\%$, onde (A) $H_0 / L_0 = 0,50$; (B) $H_0 / L_0 = 0,75$; (C) $H_0 / L_0 = 1,00$; (D) $H_0 / L_0 = 1,25$ e (E) $H_0 / L_0 = 1,50$	89
Figura 6. 16 - Carga última normalizada <i>PNU</i> para as colunas perfuradas considerando $\phi = 0,05$	90
Figura 6. 17 - Coluna com cinco perfurações elípticas após a análise linear e o modo de flambagem global para $H_0 / L_0 = 0,50$ e $\phi = 0,10$	91
Figura 6. 18 - Coluna com cinco perfurações elípticas após a análise linear e o modo de flambagem global para $H_0 / L_0 = 0,75$ e $\phi = 0,10$	91
Figura 6. 19 - Coluna com cinco perfurações elípticas após a análise linear e o modo de flambagem global para $H_0 / L_0 = 1,00$ e $\phi = 0,10$	92

Figura 6. 20 - Coluna com cinco perfurações elípticas após a análise linear e o modo de flambagem global para $H_0 / L_0 = 1,25$ e $\phi = 0,10$	92
Figura 6. 21 - Coluna com cinco perfurações elípticas após a análise linear e o modo de flambagem global para $H_0 / L_0 = 1,50$ e $\phi = 0,10$	93
Figura 6. 22 - Carga crítica normalizada <i>PNE</i> para as colunas perfuradas considerando $\phi = 0,10$	94
Figura 6. 23 - Distribuição de tensões de von Mises (em MPa) para as colunas com $\phi = 10\%$, onde (A) $H_0 / L_0 = 0,50$; (B) $H_0 / L_0 = 0,75$; (C) $H_0 / L_0 = 1,00$; (D) $H_0 / L_0 = 1,25$ e (E) $H_0 / L_0 = 1,50$	95
Figura 6. 24 - Carga última normalizada <i>PNU</i> para as colunas perfuradas considerando $\phi = 0,10$	96
Figura 6. 25 - Coluna com cinco perfurações elípticas após a análise linear e o modo de flambagem global para $H_0 / L_0 = 0,50$ e $\phi = 0,15$	97
Figura 6. 26 - Coluna com cinco perfurações elípticas após a análise linear e o modo de flambagem global para $H_0 / L_0 = 0,75$ e $\phi = 0,15$	97
Figura 6. 27 - Coluna com cinco perfurações elípticas após a análise linear e o modo de flambagem global para $H_0 / L_0 = 1,00$ e $\phi = 0,15$	98
Figura 6. 28 - Coluna com cinco perfurações elípticas após a análise linear e o modo de flambagem global para $H_0 / L_0 = 1,25$ e $\phi = 0,15$	98
Figura 6. 29 - Carga crítica normalizada <i>PNE</i> para as colunas perfuradas considerando $\phi = 0,15$	99
Figura 6. 30 - Distribuição de tensões de von Mises (em MPa) para as colunas com $\phi = 15\%$, onde (A) $H_0 / L_0 = 0,50$; (B) $H_0 / L_0 = 0,75$; (C) $H_0 / L_0 = 1,00$; (D) $H_0 / L_0 = 1,25$ e (E) $H_0 / L_0 = 1,50$	100
Figura 6. 31 - Carga última normalizada <i>PNU</i> para as colunas perfuradas considerando $\phi = 0,15$	100
Figura 6. 32 - Carga crítica normalizada <i>PNE</i> para os três valores de ϕ	101
Figura 6. 33 - Carga última normalizada <i>PNU</i> para os três valores de ϕ	102
Figura 6. 34 - Gráficos Carga última-Deslocamento para o melhor e o pior valor da carga última para $\phi = 0,05$	104
Figura 6. 35 - Gráficos Carga última-Deslocamento para o melhor e o pior valor da carga última para $\phi = 0,10$	104
Figura 6. 36 - Gráficos Carga última-Deslocamento para o melhor e o pior valor da carga última para $\phi = 0,15$	105

LISTA DE TABELAS

Tabela 3. 1 - Carregamentos críticos, comprimentos efetivos e fatores de comprimento efetivos para colunas ideais.....	41
Tabela 5. 1 - Dimensões de cada elemento da seção transversal e tensão de escoamento	66
Tabela 5. 2 - Dimensões e localização das perfurações	67
Tabela 5. 3 - Cargas críticas das colunas analisadas.....	71
Tabela 5. 4 - Carga última das colunas analisadas.....	73
Tabela 6. 1 - Características do perfil de aço para o estudo de caso	76
Tabela 6. 2 - Coordenadas dos <i>Keypoints</i> da seção transversal da coluna tipo U.....	77
Tabela 6. 3 - Resultados das cargas últimas considerando $\phi = 0,05$ e o MRD	102
Tabela 6. 4 - Resultados das cargas últimas considerando $\phi = 0,10$ e o MRD.....	103
Tabela 6. 5 - Resultados das cargas últimas considerando $\phi = 0,15$ e o MRD.....	103

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Eq.	Equação
Eqs.	Equações
Fig.	Figura
Figs.	Figuras
FURG	Universidade Federal do Rio Grande
GBT	<i>Generalized Beam Theory</i>
MEF	Método de Elementos Finitos
MRD	Método da Resistência Direta
PLN	Carga Limite Normalizada
PNE	Carga Crítica Normalizada
PNU	Carga Última Normalizada
PPGMC	Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional
SAE	<i>Society of Automotive Engineers- EUA</i>
UFPEL	Universidade Federal de Pelotas
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Romanas:

A_f	Área do furo na seção transversal [mm ²]
A_{liq}	Área da seção transversal perfurada [mm ²]
A_t	Área total da seção transversal [mm ²]
A_0	Área da perfuração elíptica [mm ²]
B_1	Medida da aba oeste [mm]
B_2	Medida da aba leste [mm]
D_1	Medida da aba oeste menor [mm]
D_2	Medida da aba leste menor [mm]
e	Distância excêntrica [mm]
E	Módulo de elasticidade [GPa]
E_t	Módulo tangente [GPa]
F	Força lateral [N]
F_1	Ângulo da seção transversal oeste [rad]
F_2	Ângulo da seção transversal leste [rad]
H	Largura da seção transversal [mm]
H_{furo}	Largura do furo oblongo [mm]
H_0	Medida da perfuração ao longo da largura da alma [mm]
I	Momento de inércia [mm ⁴]
I_{xx}	Momento de inércia na direção de x [mm ⁴]
I_{yy}	Momento de inércia na direção de y [mm ⁴]
k	Rigidez da mola [N/m]
K	Coeficiente adimensional
$[K]$	Matriz de rigidez total
$[K_E]$	Matriz de rigidez convencional para pequenas deformações
$[K_G]$	Matriz de rigidez geométrica

L	Comprimento da coluna [mm]
L_e	Comprimento efetivo da coluna [mm]
L_{furo}	Comprimento do furo oblongo [mm]
L_0	Medida da perfuração ao longo do comprimento da coluna [mm]
M	Momento fletor interno [Nm]
N	Número de perfurações
n	Número de semi-ondas na forma fletida da coluna
P	Força axial [N]
P_{cr}	Carga crítica de flambagem [kN]
P_{MRD}	Carga última pelo Método da Resistência Direta [kN]
P_u	Carga última de flambagem [kN]
P_y	Carga de esmagamento [kN]
$\{P_0\}$	Carga interna
r	Raio de giração da seção transversal
r_i	Raio de curvatura interno
S_1	Ângulo interno da seção transversal [rad]
S_2	Ângulo interno da seção transversal [rad]
t	Espessura da seção transversal [mm]
$\{U\}$	Vetor de deslocamento total
V	Volume da coluna [mm ³]
V_0	Volume da perfuração [mm ³]
X_1	Comprimento da borda da coluna até o centro da perfuração [mm]
X_2	Comprimento da borda da coluna até o centro da perfuração [mm]

Letras Gregas:

Δ	Variação do componente em relação ao espaço
θ	Ângulo [°] ou [rad]
η	Fator de modificação de flambagem adimensional
υ	Deflexão [mm]

$v_{m\acute{a}x}$	Deflexão máxima [mm]
π	Constante matemática
λ	Escalar
λ_1	Autovalor
λ_0	Índice de esbeltez reduzido
σ_{cr}	Tensão crítica [N/m ²]
σ_{lp}	Tensão limite de proporcionalidade [N/m ²]
σ_r	Tensão limite de resistência [N/m ²]
σ_{rup}	Tensão de ruptura [N/m ²]
σ_y	Tensão de escoamento do material [N/m ²]
ν	Coefficiente de Poisson
ϕ	Fração volumétrica

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	18
1.1 Estado da arte	20
1.2 Objetivos da dissertação	24
1.3 Estrutura da dissertação	24
2 METODOLOGIA	26
3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	29
3.1 Flambagem	29
3.1.1 Estabilidade estrutural.....	29
3.1.2. Carga Crítica.....	30
3.1.3. Flambagem de colunas.....	33
3.1.4 Tensão Crítica.....	37
3.1.5 Colunas com outras condições de apoio	38
3.1.6 Comprimento efetivo	39
3.1.6 Modos de flambagem em perfis de aço formados à frio.....	41
3.1.7 A fórmula da secante.....	43
3.1.8 Flambagem inelástica.....	49
3.1.9 Método da Resistência Direta (MRD)	54
3.2. <i>Constructal Design</i>	55
4 MODELAGEM COMPUTACIONAL	57
4.1 Método de Elementos Finitos (MEF)	57
4.2. Análise linear da flambagem	60
4.3 Análise não linear da flambagem	61
5 VERIFICAÇÃO E VALIDAÇÃO DOS MODELOS.....	65
5.1. Verificação do modelo de flambagem elástica	65
5.2. Validação do modelo de flambagem elasto-plástica.....	72
6 RESULTADOS E DISCUSSÕES	75
6.1 Descrição do problema	75
6.2 Aplicação do <i>Constructal Design</i>	80
6.3 Avaliação geométrica com <i>Constructal Design</i>	84
6.3.1 Fração volumétrica de 0,05	84
6.3.2 Fração volumétrica de 0,10	90

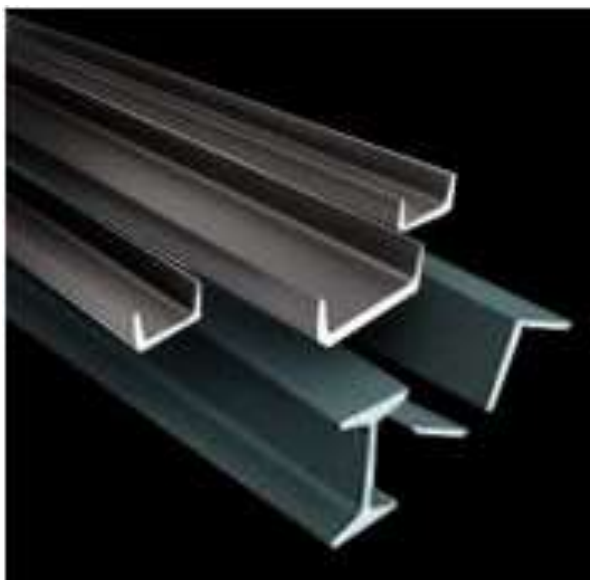
6.3.3 Fração volumétrica de 0,15	96
6.3.4 Comparação entre as diferentes frações volumétricas	101
6.3.5 Análise dos resultados pelo Método da Resistência Direta (MRD).....	102
6.3.6 Diagramas Carga última-Deslocamento	103
7 CONCLUSÕES	106
REFERÊNCIAS	108
Apêndice 01 – Arquivo com o código de análise não linear do Ansys® em formato lgw para a coluna com perfuração elíptica com $\phi = 0,10$ e $H_0/L_0 = 0,50$.....	112

1 INTRODUÇÃO

O uso de estruturas metálicas pode ser visto em grandes projetos de engenharia desde o século XVIII. Estas estruturas, inicialmente, eram comuns em pontes com a utilização do ferro fundido trabalhando em compressão, o qual foi substituído pelo ferro forjado e posteriormente, com a aceleração do desenvolvimento da siderurgia, começou-se a produção de aço em escala industrial. A introdução deste material deve-se ao desenvolvimento da ciência das construções e da metalúrgica, favorecendo formas funcionais e arrojadas às estruturas metálicas (PFEIL; PFEIL, 2009).

Com as estruturas metálicas é possível dispor de uma ampla diversidade de configurações de peças. Os perfis de aço encontrados podem ser classificados de acordo com o processo de fabricação em laminados, soldados, eletro-soldados, conformados a frio, tubulares com costura e tubulares sem costura. A geometria também varia de acordo com o tipo de seção transversal, sendo que as comumente usadas tem a forma de I, H, U, T, L (também chamadas de cantoneiras) e tubulares. Exemplos de perfis metálicos são apresentados na Fig. 1. 1 (DIAS, 2008).

Figura 1. 1 - Tipos de perfil de aço.



Fonte: <http://parana.all.biz/ferro-cantoneira-g30656>

De acordo com Bellei (1998), as principais vantagens das estruturas metálicas são: alta resistência do material nos diversos estados de tensão, permitindo aos elementos estruturais suportarem grandes esforços apesar da área relativamente pequena das suas seções

transversais; os elementos de aço oferecem uma grande margem de segurança no trabalho, o que se deve ao fato de o material ser único e homogêneo, com limite de escoamento, ruptura e módulo de elasticidade bem definidos. Os elementos de aço são fabricados em indústrias, seriados, proporcionando a mecanização de sua montagem e permitindo diminuir o prazo final da construção; podem ser desmontados e substituídos com facilidade e ainda tem a possibilidade de reaproveitamento.

Apesar de todas as vantagens que estas peças apresentam, é preciso levar em consideração que elementos estruturais esbeltos (relação largura/espessura do elemento) e compridos sujeitos à compressão podem apresentar o desenvolvimento de um fenômeno de instabilidade conhecido como flambagem. A flambagem ocorre pela deflexão lateral e falha por flexão. À medida que for aumentada a carga axial de compressão, as deflexões laterais aumentam também, ocasionando o rompimento total da coluna (Gere, 2003).

A deflexão lateral é chamada de flambagem, caracterizada por um comportamento elástico, enquanto a fase seguinte é chamada de pós-flambagem, apresentando um comportamento elasto-plástico (Trahair et al., 2008). Enquanto alguns autores consideram a carga crítica elástica como a carga limite que a coluna pode suportar, chamada de carga crítica (Gere, 2003; Hibbeler, 2010), outros dedicam-se ao estudo do comportamento pós-flambagem de colunas, buscando estabelecer sua carga última de ruptura (Moen e Schafer, 2011).

Além disso, sabe-se que em muitas situações práticas é necessária a realização de perfurações em elementos estruturais. Segundo Sweedan e El- Sawy (2011) as perfurações minimizam os custos do material utilizado na fabricação dos perfis, uma vez que estas são essenciais para proporcionar acessibilidade para as tubagens, condutos, e outros sistema de serviço, bem como para a redução do peso próprio da estrutura. Entretanto, a presença dessas perfurações tem influência direta no comportamento mecânico desses componentes, justificando o desenvolvimento de estudos que possibilitem o emprego dessas perfurações de maneira otimizada.

Não havendo solução analítica para o cálculo das cargas limites (carga crítica e carga última) em colunas perfuradas, neste trabalho, serão empregados a modelagem computacional e o método *Constructal Design*, para avaliar a influência de perfurações elípticas em perfis de aço formados a frio, do tipo U, submetidos à flambagem, visando maximizar a carga crítica e a carga última. Para o presente estudo foi considerada a fração de volume das perfurações (ϕ), que é definida pela relação entre o volume de material retirado e o volume total da coluna, com valores de 5%, 10% e 15%, além de variar a razão de H_0/L_0 de 0,50; 0,75; 1,00; 1,25 e 1,50.

O método *Constructal Design* é baseado na Lei *Constructal*, a qual determina que para os sistemas de fluxos evoluam ao longo do tempo, as configurações geométricas e estruturais devem evoluir de forma a maximizar as correntes internas. A Lei *Constructal* é um fenômeno físico observado em várias partes da natureza. Em outro nível, pode ser expressa através de linguagens matemáticas, físicas e de engenharia (BEJAN, 2000).

A análise do comportamento mecânico dos perfis perfurados sujeitos à flambagem será desenvolvida através da modelagem computacional pelo software ANSYS®. A modelagem computacional possibilita simular numericamente o fenômeno físico em estudo, sob condições muito próximas ao real, permitindo avaliar qual a influência de uma determinada variável. Ao usar a simulação numérica, os custos do estudo ficam mais baixos em relação à montagem de um experimento, além de poder variá-lo apenas alterando os dados de entrada.

O software ANSYS® é baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF). Segundo Moaveni (1999), o MEF é um procedimento numérico que pode ser usado para obter soluções de problemas em diferentes áreas da engenharia, como por exemplo: análise estrutural, transferência de calor, eletromagnetismo e escoamento de fluidos.

1.1 Estado da arte

Pesquisas de caráter experimental, numérico e analítico têm sido desenvolvidas com intuito de analisar o comportamento de perfis de aço submetidos à compressão uniaxial. Em vista disto, foi realizada uma revisão da literatura sobre trabalhos desenvolvidos recentemente na análise do comportamento de flambagem elástica e elasto-plástica. Em seguida é apresentada uma síntese de trabalhos de mecânica dos materiais que utilizam o método *Constructal Design*.

Shanmugam e Dhanalakshmi (2001) desenvolveram uma equação para determinar a capacidade de carga máxima de colunas curtas de aço com canal perfurado contendo aberturas únicas ou múltiplas de formatos retangular, circular. Esta equação é baseada em estudos paramétricos que foram realizados utilizando o MEF em seções de canal simples contendo abertura. Foi considerada, neste estudo, uma vasta gama de parâmetros, como o índice de esbeltez, formas e tamanhos. Para estabelecer um nível de precisão da equação proposta, foi feita uma comparação com uma série de resultados experimentais e resultados numéricos obtidos por outros pesquisadores.

Schafer e Asce (2002) propuseram um novo método para projetos que incorpora explicitamente flambagem local, distorcional e de Euler, o qual não requer cálculos de largura efetiva ou propriedades efetivas. Este método fornece previsões confiáveis desprovidas de erros sistemáticos, além de prover um meio para introduzir uma análise racional para a previsão de flambagem elástica para o projeto de colunas de aço formados a frio de paredes finas e seção transversal aberta.

Moen e Schafer (2006) apresentaram uma pesquisa desenvolvendo uma extensão para o Método de Resistência Direta (MRD) para prever a rigidez e analisar o comportamento da flambagem elástica de componentes de aço com furos. São apresentados dois estudos paramétricos de flambagem elástica. O primeiro avalia o efeito de um furo sobre o comportamento da flambagem elástica nos elementos estruturais. O modelo numérico foi desenvolvido no ambiente ABAQUS através do MEF e foi observada uma correlação entre o aumento da carga de flambagem elástica e a mudança do comprimento de onda de flambagem. O segundo avalia o efeito do diâmetro do orifício com a carga de flambagem e modos de flambagem elástica de uma viga estrutural SSMA 362S162-33. Vários modos de flambagem local, distorcional e global são criados pela adição de furos, alguns dos quais apresentam carga elástica de flambagem significativamente mais baixa do que um membro sem perfuração.

Moen e Schafer (2008) realizaram um estudo para verificar a relação entre a flambagem elástica e a resposta a experimentos com colunas de aço perfuradas. Foram utilizadas vinte e quatro colunas que variaram a geometria com relação ao seu comprimento e com relação à presença ou ausência de furos para os testes de compressão. Para cada amostra, foi feita a análise numérica da carga de flambagem, através do MEF, de tal forma que a influência das condições de contorno e da perfuração na resposta da flambagem elástica local, distorcional e global também poderiam ser capturadas. Os resultados da flambagem elástica foram usados para proporcionar meios de entender a variação da deformação sob a carga. Experimentalmente, foi analisado o comportamento de pós-flambagem e concluiu-se que as perfurações mostraram que tem influência na carga última de flambagem, diminuindo sua resistência.

Moen e Schafer (2009) desenvolveram um estudo de métodos simplificados para aproximar as cargas críticas da flambagem elástica global, local e distorcional em colunas de aço e vigas com furos, de maneira a fornecer aproximações adequadas aos projetos de engenharia. Através de aproximações pela média ponderada da seção transversal de colunas e vigas de aço formado a frio, incluindo a influência de furos, a flambagem global pode ser

prevista. Já para a flambagem distorcional e local em membros de aço formado a frio foram feitas modificações apropriadas para a espessura do elemento usando o método de faixas finitas. Os métodos propostos foram verificados com estudos de flambagem por elementos finitos de casca. Além disto, o Método de Resistência Direta (MRD) foi utilizado para determinar o valor da carga última.

El-Sawy et al. (2009) investigou através do MEF o principal eixo de flambagem característico e a capacidade de flambagem associada em colunas de aço em forma de I axialmente carregadas. Devido à deformação por cisalhamento e flexão foi realizada análise numérica para avaliar a redução da capacidade de flambagem das colunas. Os resultados obtidos são usados para identificar um fator de modificação de flambagem adimensional, η , e as propriedades de seções equivalentes associados que podem ser implementados para avaliar a carga crítica das colunas consideradas. O estudo considera uma ampla gama de dimensões geométricas práticas e condições finais diferentes de colunas. Um procedimento simplificado é sugerido para avaliar a capacidade de flambagem de colunas e são desenvolvidos gráficos para permitir que os profissionais possam estimar rapidamente a carga de flambagem para determinadas colunas com maior precisão.

Santos (2010) apresentou em sua dissertação de mestrado uma análise da interação entre os modos de flambagem local, global e distorcional em colunas constituídas de perfis de aço de seção do tipo U enrijecidos. Tal análise compreende a obtenção de evidências experimentais, verificação das consequências da interação entre os modos de flambagem no comportamento pós-flambagem e a caracterização do colapso das colunas além de apresentar um estudo de proposições para cálculo da resistência das colunas testadas, baseado no método de resistência direta. Um programa computacional baseado no MEF e na Teoria Generalizada de Vigas (*Generalized Beam Theory* - GBT) foi desenvolvido para a captação do desenvolvimento do modo de flambagem das barras sobre compressão centrada.

Silva (2011) realizou um estudo teórico-experimental para avaliar a influência no modo de flambagem local na seção tipo rack com e sem presença de perfurações. Utilizou a modelagem computacional como técnica de análise estrutural através dos MEF, pelo *software* ANSYS®, versão 11.0, e a GBT, com o emprego do *software* GBTul 1.0β. O experimento foi realizado utilizando corpos de prova de colunas curtas, perfuradas, com carregamento centrado, com diferentes espessuras da chapa, com e sem perfurações, a fim de determinar a carga crítica da flambagem. Com os resultados obtidos as cargas críticas dos modelos experimentais e numéricos deste trabalho foram muito próximas. A presença de furos fez com que o valor da carga crítica de flambagem fosse menor em ambos os modelos.

Recentemente, o *Constructal Design* tem sido empregado em pesquisas de projetos de engenharia. Assim como neste trabalho, alguns pesquisadores baseiam-se nesta teoria para maximizar a carga crítica de flambagem, porém não foi encontrado na literatura pesquisas que abordem o uso do *Constructal Design* aplicado em colunas, no entanto são elencados os seguintes trabalhos relacionados à flambagem de placas.

Rocha et al. (2012) analisou placas perfuradas finas, simplesmente apoiadas, com três diferentes formas de furos centrados: elíptica, retangular e losangular. Este estudo empregou a Teoria *Constructal* para otimizar estas geometrias, tendo como função objetivo maximizar a carga crítica de flambagem. Para tal análise, uma relação entre as dimensões características dos furos foi variada para diferentes frações do volume do furo pelo volume da placa (ϕ) e esta proporção foi utilizada para correlação entre as diferentes formas de geometrias.

Correia et al. (2013) utilizou o *Constructal Design* para avaliar geometricamente placas finas com perfurações elípticas, submetidas a compressão uniaxial, tendo como objetivo obter a dimensão ótima do furo que maximize a carga crítica de flambagem. Realizou diversas simulações numéricas, utilizando um modelo computacional baseado no MEF. Foi observado que para todos os valores de ϕ (relação entre o volume do furo e o volume da placa) analisados, a placa que apresenta melhor desempenho sob compressão uniaxial é a que possui a maior relação H/L (relação entre a altura e o comprimento da placa).

Correia (2013) apresentou um estudo através da Teoria *Constructal* para otimizar o comportamento mecânico de placas retangulares simplesmente apoiadas, com perfurações centradas de formatos retangular, losangular e elíptico submetidas à compressão uniaxial, de forma a maximizar a carga crítica de flambagem. Para este estudo, o autor fez três tipos de investigação, variando tanto as dimensões da placa quanto as dos furos. Para este estudo foram estabelecidas relações entre o volume do furo e o volume da placa (ϕ), a relação entre a altura e o comprimento da placa (H/L) e a relação entre as dimensões características de cada tipo de perfuração (H_0/L_0). Utilizaram um modelo computacional baseado no MEF para realizar as simulações numéricas.

E em Helbig et al. (2014) foi investigada numericamente, através do MEF, a influência de diferentes formatos de perfuração centradas, em placas de aço, simplesmente apoiadas nas quatro bordas, submetidos à flambagem. Além da análise da flambagem elástica foi considerada, neste estudo, uma análise elasto-plástica. Foi avaliada uma fração de volume de 20% enquanto o grau de liberdade (H_0/L_0) foi variado. Para a obtenção dos melhores

resultados comparando os três tipos de perfurações (retangular, elíptico e losangular) foi aplicado o Método de *Constructal Design*.

1.2 Objetivos da dissertação

O objetivo geral deste trabalho é buscar, através do método Constructal Design aliado à Modelagem Computacional, a melhoria do comportamento mecânico de perfis de aço do tipo U, variando a geometria das perfurações elípticas, submetidos à flambagem elástica e elasto-plástica.

Para atingir o objetivo geral, são necessários os seguintes objetivos específicos:

- Verificar e validar os modelos numéricos;
- Desenvolver um modelo numérico para a análise elástica (linear) da flambagem em colunas;
- Desenvolver um modelo numérico para a análise elasto-plástica (não linear) da flambagem de colunas;
- Através do método *Constructal Design*, determinar qual a melhor configuração geométrica das perfurações, considerando a variação da fração volumétrica, ϕ ;
- Considerar diferentes valores para a fração de volume das perfurações: $\phi = 0,05, 0,10$ e $0,15$;
- Identificar, dentre as colunas estudadas, qual geometria proporciona a melhor distribuição de tensões, através do princípio da ótima distribuição das imperfeições.

1.3 Estrutura da dissertação

No presente capítulo é apresentada uma introdução acerca do problema de colunas de aço perfuradas sob flambagem, expondo uma justificativa para tal análise. Também é feito um levantamento do estado da arte a respeito de trabalhos com objetivos semelhantes a este estudo. Além disso, foram traçados os objetivos que se pretende atingir e por fim apresentada a estrutura da dissertação.

O capítulo 2 apresenta a metodologia empregada no presente estudo, mostrando os meios para se alcançar os objetivos propostos. Há uma breve explanação sobre o método numérico empregado para estudo da flambagem linear e não linear de colunas de aço. Além

disto, são feitas algumas considerações sobre o método de *Constructal Design* utilizado para a inferência dos resultados.

No capítulo 3, é apresentada a teoria que envolve o estudo de flambagem linear e a flambagem não linear de colunas de aço, além de considerações teóricas sobre o método de *Constructal Design*.

Já no capítulo 4, é exposto o tipo de modelagem computacional, através do método numérico utilizado, o método de elementos finitos. É feita uma breve explicação sobre a análise elástica linear e não linear de flambagem sobre o ponto de vista numérico utilizado pelo software ANSYS®.

O capítulo 5 apresenta a verificação do modelo para análise de flambagem elástica e a validação do modelo numérico para a análise de flambagem elasto-plástica. Para tanto foram feitas simulações numéricas de colunas de aço do tipo U, enrijecidas, e os resultados comparados aos apresentados no artigo de Moen e Schafer (2008).

No capítulo 6, é exposta a aplicação da Teoria *Constructal* através do estudo de caso de colunas de aço do tipo U, de chapa dobrada, com a variação na configuração da geometria elíptica de cinco perfurações da alma. Primeiramente é apresentado o domínio computacional, que compreende as etapas desenvolvidas no software ANSYS®. Em seguida são expostos os resultados e discussões, através de imagens da forma flambada das colunas, imagens com a distribuição de tensões de von Mises e gráficos que apresentam os resultados para as cargas críticas e últimas.

Por fim, o capítulo 7 expõe as conclusões acerca das contribuições da presente pesquisa além de sugestões para propostas de trabalhos futuros sobre flambagem de colunas de aço.

Além disto, são elencadas as referências bibliográficas utilizadas ao longo da dissertação. Como informações complementares é disposto em apêndice o código gerado no software ANSYS® em formato .lgw, para análise não linear de uma coluna com perfuração elíptica.

2 METODOLOGIA

Segundo Lakatos e Marconi (2003), método consiste em um conjunto de atividades sistemáticas e racionais que, com maior segurança, permite alcançar o objetivo, traçando um caminho a ser seguido, detectando erros e auxiliando nas decisões. E ainda sobre método científico, de acordo com Trujillo (1974, *apud* PRODANOV, 2013), consiste em um traço característico da ciência, constituindo-se em um instrumento básico que ordena, inicialmente, o pensamento em sistemas e traça os procedimentos do cientista ao longo do caminho até atingir o objetivo científico preestabelecido.

Diante disto, neste trabalho foram utilizados dois meios metodológicos para alcançar os objetivos traçados inicialmente. Primeiramente, foi utilizado o método numérico. O método numérico consiste em simulações computacionais, neste caso, realizadas através do software ANSYS®, com intuito de promover previsões dos valores de cargas críticas e cargas últimas na análise do comportamento de colunas de aço sob a ação de cargas compressivas. O outro método utilizado foi o método de *Constructal Design*. Tal método proporcionou suporte para avaliar a influência da geometria das perfurações, realizadas na alma das colunas de aço, em seu comportamento mecânico sob flambagem, permitindo avaliar a distribuição de tensões e a variação das cargas críticas e últimas, visando maximizar essas cargas, conforme será descrito posteriormente.

Os métodos podem ser classificados como: dedutivo, intuitivo, hipotético-dedutivo, dialético e fenomenológico. Cada um deles, segundo Prodanov (2013), se vincula a uma das correntes filosóficas que se propõe a explicar como se processa o conhecimento da realidade. Correlacionando com o método científico empregado na presente pesquisa, este está alicerçado no método hipotético-dedutivo.

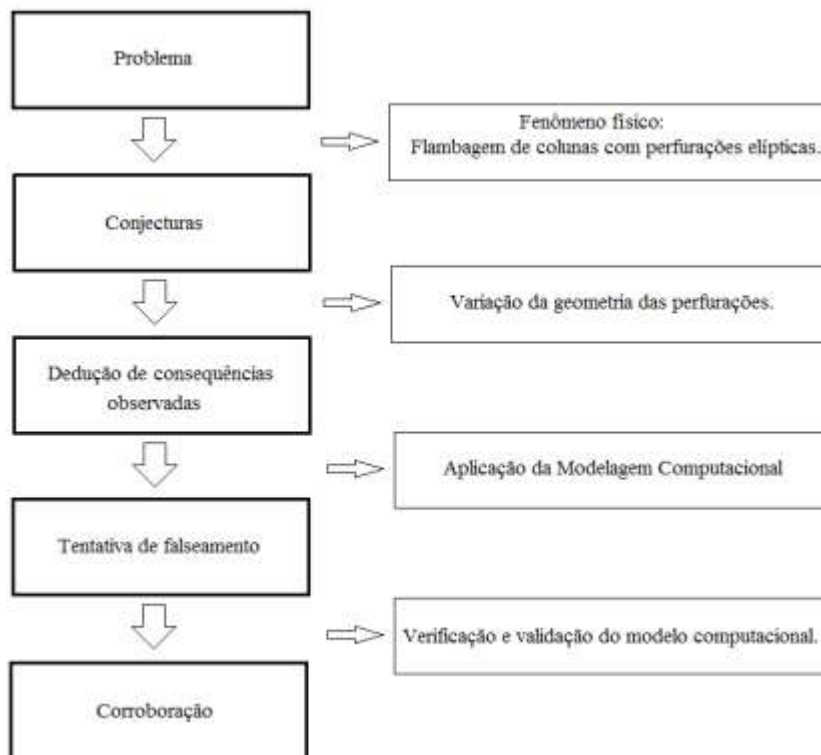
Segundo Gil (2008), Karl Popper por acreditar e criticar o método indutivo, cujo processo toma como comprobatório um fenômeno a partir da observação de alguns casos, definiu, em 1935, o método hipotético-dedutivo. Este método consiste na seguinte linha de raciocínio:

Quando os conhecimentos disponíveis sobre um determinado assunto são insuficientes para a explicação de um fenômeno, surge um problema. Para tentar explicar a dificuldade expressa no problema, são formuladas conjecturas ou hipóteses. Das hipóteses formuladas, deduzem-se consequências que deverão ser testadas ou falseadas. Falsear significa tentar tornar falsas as consequências deduzidas das hipóteses. Enquanto no método dedutivo procura-se a todo custo confirmar a hipótese, no método hipotético-

dedutivo, ao contrário, procura-se evidências empíricas para derrubá-la (GIL, 2008).

O método hipotético-dedutivo pode ser esquematizado da seguinte forma, conforme Fig. 2. 1, (Gil, 2008) e aplicado ao estudo de caso.

Figura 2. 1 - Método hipotético dedutivo aplicado ao estudo de caso.



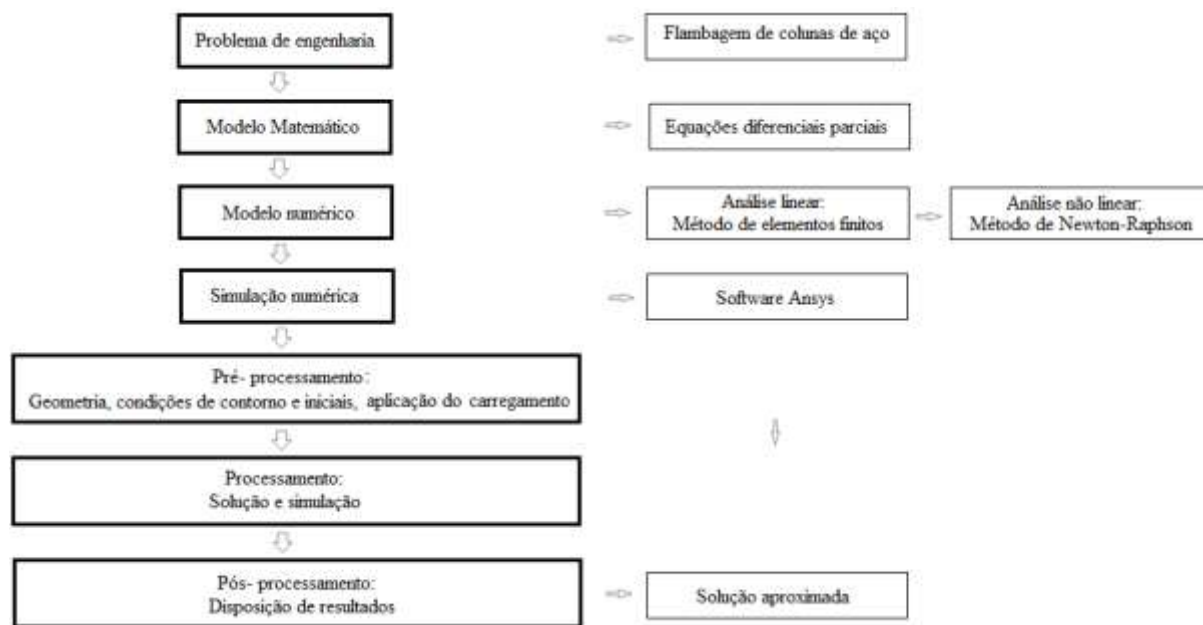
Fonte: produzido pelo autor.

Segundo Moaveni (1999), o que define um problema de engenharia são os modelos matemáticos de situações físicas. Modelos matemáticos são equações diferenciais com um conjunto de condições de contorno e iniciais correspondentes. A solução para tais equações podem ser obtidas analiticamente ou numericamente. No entanto, devido a complexidade de alguns problemas e de seus sistemas de equações há a necessidade de aplicação de aproximações numéricas, através da discretização do domínio. E, por fim, os resultados são obtidos, através da resolução destas equações.

O software ANSYS® utiliza como método de discretização o Método de Elementos Finitos (MEF), o qual será explicado posteriormente neste trabalho. A modelagem numérica através deste software é dividida em três etapas fundamentais: pré-processamento,

processamento ou solução e o pós-processamento. A Fig. 2. 2 mostra as etapas da abordagem numérica para o estudo de flambagem de colunas de aço.

Figura 2. 2 - Modelagem numérica esquematizada para o problema de flambagem de colunas de aço.



Fonte: produzido pelo autor.

As decisões tomadas para a resolução deste problema de engenharia, tanto relacionados aos tipos de métodos quanto ao software computacional mais adequado, baseou-se em estudos consolidados na literatura. No entanto, no que tange o método *Constructal Design* há uma inovação no estudo de flambagem de colunas. Este método foi estudado para outros problemas de engenharia, porém totalmente adaptável ao presente estudo.

A Lei *Constructal* não se restringe à problemas de engenharia, pois é um fenômeno físico e natural, que prediz como as estruturas naturais devem se portar e adquirir novas configurações para permanecer (sobreviver) no tempo. Este princípio pode ser aplicado em sistemas de escalas microscópicas à macroscópicas, facilitando o desenvolvimento de estruturas complexas de escoamento tanto na natureza quanto na engenharia (BEJAN, 2000).

Desta forma, o método *Constructal Design* foi empregado visando melhorar a distribuição de tensões ao longo da alma da coluna e como consequência avaliar a melhor geometria das perfurações, aumentando o valor de suas cargas até o momento da ruptura do material. Conforme Bejan e Lorente (2008), em projetos de engenharia, baseado na ótima distribuição das imperfeições, as configurações variam com intuito de melhorar o desempenho dos sistemas.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo será feita uma breve explicação sobre a teoria que envolve o entendimento tanto da flambagem elástica quanto da flambagem inelástica de colunas de aço esbeltas. Estes assuntos servem como fundamento para o entendimento dos métodos numéricos apresentados na seção subsequente. Aliado a isto será realizada uma explanação a respeito da Teoria *Constructal*.

3.1 Flambagem

Estruturas que suportam carregamentos podem falhar de várias formas, dependendo do tipo da estrutura, das condições de apoio, dos tipos de carregamentos e dos materiais usados. Esses tipos de falhas são prevenidos dimensionando-se as estruturas de forma que as tensões máximas e os deslocamentos máximos permaneçam dentro dos limites toleráveis. Dessa forma, a resistência e a rigidez são fatores importantes no dimensionamento. Outro tipo de falha é a flambagem. A flambagem é uma das maiores causas de falhas em estruturas, e por isso a possibilidade de flambagem deve ser considerada no dimensionamento (GERE, 2003).

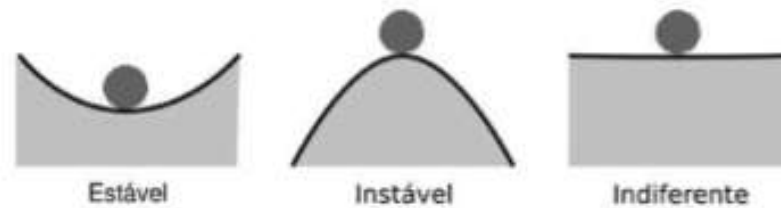
A seleção de colunas é, muitas vezes, uma parte crucial do projeto de uma estrutura, porque qualquer falha, usualmente, ocasiona efeitos catastróficos (TIMOSHENKO, 1984). Em vista disto, neste capítulo apresentam-se alguns conceitos básicos sobre flambagem.

3.1.1 Estabilidade estrutural

O estudo da flambagem requer alguns conhecimentos básicos sobre a estabilidade das estruturas, já que todos os projetos de engenharia envolvem equilíbrio. A estabilidade de uma estrutura é a capacidade que ela possui de estabelecer uma posição de equilíbrio após uma perturbação externa (força ou deslocamento) (CASTELANI, 2012). Após cessar esta perturbação, a estrutura pode comportar-se de três maneiras, conforme descrito a seguir e ilustrado na Fig. 3. 1.

- Equilíbrio Estável: retorna à configuração inicial.
- Equilíbrio Instável: não retorna à configuração inicial.
- Equilíbrio Neutro ou Indiferente: não apresenta tendência de retornar para um equilíbrio estável tanto quanto para um equilíbrio instável.

Figura 3. 1 - Tipos de equilíbrio.



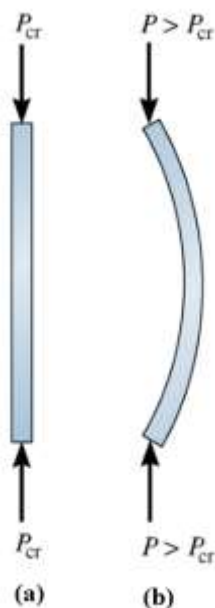
Fonte: produzido pelo autor

As três situações de equilíbrio, apresentados na Fig. 3.1, representam uma estrutura com carregamento compressivo. A instabilidade de uma estrutura qualquer submetida a carregamentos compressivos está relacionada com a magnitude da carga empregada. À medida que a carga vai aumentando, a estrutura passa de um equilíbrio estável, onde ela retorna à configuração inicial, para instável, não retornando para a configuração inicial. No ponto máximo da parábola, encontra-se o ponto de transição para o equilíbrio neutro ou indiferente. Ao ser carregada, a estrutura vai, inicialmente, evoluir ao longo de uma trajetória de equilíbrio, chegando ao ponto onde se encontra em equilíbrio neutro. Neste ponto encontra-se a carga crítica de flambagem (HIBBELER, 2010).

3.1.2. Carga Crítica

De acordo com Hibbeler (2010), a carga axial máxima que uma coluna pode suportar quando está na iminência de sofrer flambagem é denominada de carga crítica, P_{cr} . Portanto para que a flambagem ocorra, é necessário que a força axial P seja superior à carga crítica de flambagem P_{cr} , como pode-se observar na Fig. 3. 2.

Figura 3. 2 - Coluna sob a ação de um carregamento



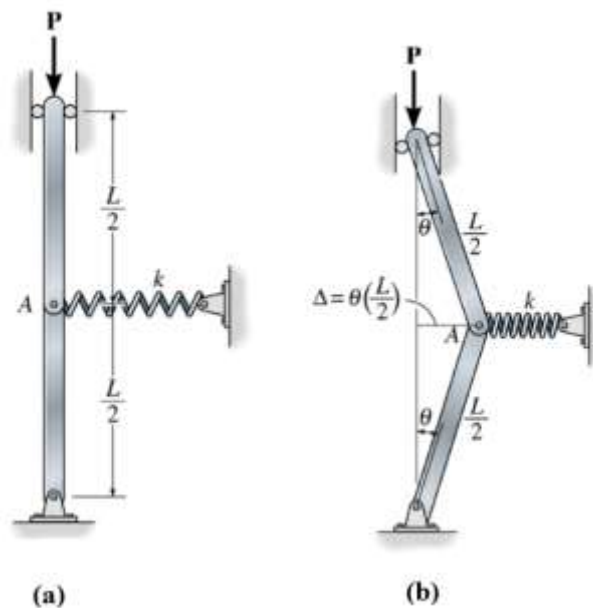
Fonte: Hibbeler (2010)

A Fig. 3. 2 apresenta dois membros longos e esbeltos, carregados axialmente em compressão. Se um membro em compressão for relativamente esbelto, ele pode defletir lateralmente e falhar por flexão, como mostra a Fig. 5 (b), em vez de falhar por compressão direta do material (GERE, 2003).

Análoga à estrutura da Fig. 3. 2, considera-se um mecanismo composto por duas barras sem peso, rígidas, com apoios simples nas duas extremidades e comprimidas por um carregamento axial P . Na estrutura idealizada as duas barras estão perfeitamente alinhadas e o carregamento axial P tem sua linha de ação ao longo do eixo longitudinal. O sistema encontra-se em equilíbrio enquanto não for perturbado, conforme Fig. 3. 3a.

Ao perturbar o sistema, aplicando uma pequena força de compressão vertical P ao topo da barra, a mola, de rigidez k , sofre um encurtamento e o ponto A desloca-se a uma distância Δ , conforme Fig. 3. 3b. A mola exerce uma força restauradora de equilíbrio, $k\theta L/2$, e a força perturbadora do sistema $2P\theta$ (HIBBELER, 2010).

Figura 3. 3 - Colunas axialmente carregadas.



Fonte: Hibbeler (2010)

Segundo Hibbeler (2010), para os três casos de estabilidade do sistema, é possível observar que se a força restauradora for maior que a força perturbadora, $k\theta L/2 > 2P\theta$, então a carga axial aplicada ao sistema torna-se menor que a carga crítica. A estrutura, neste caso, encontra-se em equilíbrio estável, podendo retornar à sua configuração original.

$$P < \frac{kL}{4} \quad (1)$$

No entanto, se a carga restauradora for menor que a força perturbadora, $k\theta L/2 < 2P\theta$, a carga axial P será maior que a carga crítica, ficando o sistema em equilíbrio instável, ocorrendo a flambagem. Em outras palavras, se esta carga P for aplicada e ocorrer um leve deslocamento do ponto A, o mecanismo tenderá a sair do equilíbrio e não retornará à sua posição inicial.

$$P > \frac{kL}{4} \quad (2)$$

Observando estas duas configurações no sistema, é possível dizer que a carga crítica de flambagem P_{cr} é definida pela igualdade entre a força restauradora do sistema e a força perturbadora. Neste caso tem-se o equilíbrio neutro, em iminência de sofrer flambagem.

$$\frac{k\theta L}{2} = 2\theta P \quad (3)$$

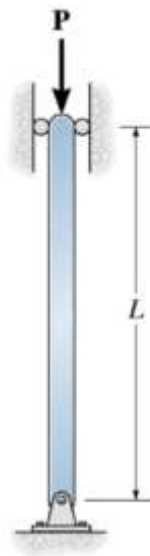
Logo,

$$P_{cr} = \frac{kL}{4} \quad (4)$$

3.1.3. Flambagem de colunas

Aqui será considerada a coluna ideal que, segundo Hibbeler (2010), significa uma coluna perfeitamente reta antes da aplicação da carga, feita de material homogêneo e na qual a carga é aplicada no centroide da seção transversal. De acordo com Gere (2003), a coluna não apresenta imperfeições e segue a Lei de Hooke, como é mostrado na Fig. 3. 4.

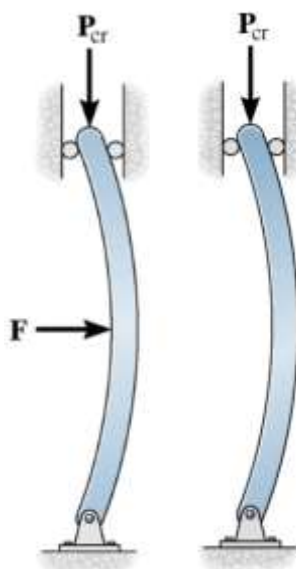
Figura 3. 4 - Coluna ideal.



Fonte: Hibbeler (2010)

Teoricamente pode-se aumentar a carga axial P , pelo fato desta coluna ideal ser reta, até ocorrer falha por ruptura ou escoamento do material. No entanto, quando atingida a carga crítica P_{cr} , a coluna está em iminência de se tornar instável, de modo que uma pequena força lateral F , fará com que ela permaneça na posição defletida quando F for removida, conforme ilustrado na Fig. 3. 5. Qualquer ligeira redução na carga axial P em relação à carga crítica P_{cr} fará com que a coluna endireite-se, e qualquer ligeiro aumento em P , que ultrapasse P_{cr} , provocará aumentos adicionais na deflexão lateral (HIBBELER, 2010).

Figura 3. 5 - Coluna ideal sob a ação de uma força lateral F e a carga crítica.

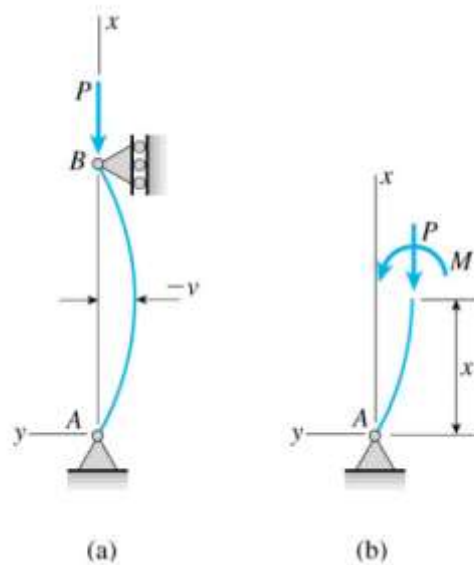


Fonte: Hibbeler (2010)

Naturalmente, uma coluna ideal não se comporta dessa maneira idealizada porque imperfeições estão sempre presentes. Por exemplo, a coluna não é perfeitamente reta, e o carregamento não está exatamente no centroide. Todavia, o estudo inicial é feito em colunas ideais porque elas fornecem introspecção no comportamento de colunas reais (GERE, 2003).

O fato de a coluna continuar estável dependerá de sua capacidade restauradora, que é baseada na sua resistência à flexão. Por consequência, para determinar a carga crítica e a forma da coluna quando flambada, considera-se o diagrama apresentado na Fig. 3. 6.

Figura 3. 6 - Colunas, sob flambagem, com extremidades apoiadas por pinos.



Fonte: Gere (2003)

De acordo com o diagrama, pode-se perceber que o momento fletor M a uma distância x a partir da extremidade A da coluna flambada é ilustrado agindo na sua direção positiva. A força axial $-P$ está agindo na seção transversal. Não havendo forças horizontais agindo nos apoios, não há força de cisalhamento. A deflexão da seção transversal está representada por $-v$. Por isso, da equação de momento em relação a A , obtém-se (GERE, 2003):

$$M - P(-v) = 0 \quad (5)$$

logo,

$$M = -Pv \quad (6)$$

Entendendo a equação do momento fletor, é possível relacionar o momento interno na coluna com sua forma defletida, obtendo a seguinte equação (HIBBELER, 2010):

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = M \quad (7)$$

Ao relacionar as Eqs. (6) e (7), é obtida a equação diferencial linear homogênea de segunda ordem:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left(\frac{P}{EI}\right)v = 0 \quad (8)$$

A Eq. (8) é uma equação diferencial homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes. Logo a solução geral é:

$$v = C_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) \quad (9)$$

As duas constantes de integração são determinadas pelas condições de contorno nas extremidades da coluna. Visto que $v=0$ em $x=0$, então $C_2=0$. E, considerando $v=0$ em $x=L$,

$$C_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0 \quad (10)$$

é satisfeita se:

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}L = n\pi \quad \text{ou} \quad P = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2} \quad (11)$$

onde n representa o número de semi-ondas na forma fletida da coluna. O menor valor de P é obtido quando $n=1$, definindo a carga crítica da coluna:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (12)$$

Essa carga é conhecida como a carga de Euler, nome do primeiro matemático que conseguiu resolver esse problema em 1757, o suíço Leonhard Euler (HIBBELER, 2010).

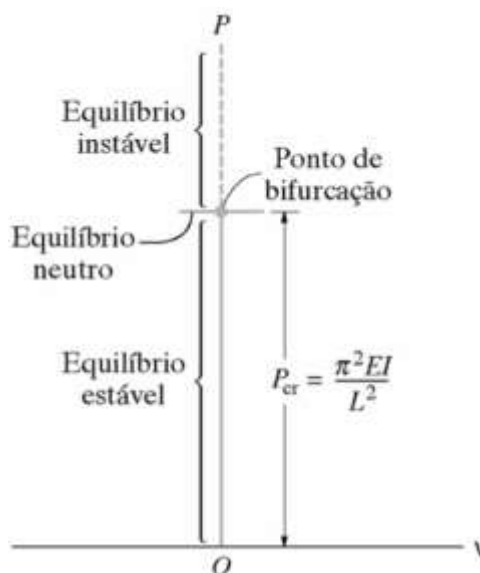
Da Eq. (12) nota-se que o carregamento crítico de uma coluna é proporcional à rigidez de flexão EI e inversamente proporcional ao quadrado do comprimento. A rigidez de flexão pode ser aumentada usando material mais rígido, ou seja, com maior módulo de elasticidade

E , ou distribuindo o material de maneira a aumentar o momento de inércia I da seção transversal, da mesma forma que uma viga pode ser feita aumentando o momento de inércia. O momento de inércia é aumentado distribuindo o material mais distante do centroide da seção transversal (GERE, 2003).

Em outras palavras, a carga crítica é independente da resistência do material, dependendo somente das dimensões da coluna (I e L) e da rigidez ou módulo de elasticidade do material. Por essa razão, no que diz respeito à flambagem elástica do material, colunas feitas, por exemplo, de aço de alta resistência, não oferecem nenhuma vantagem em relação às feitas de aço de mais baixa resistência, uma vez que o módulo de elasticidade para ambos os materiais é aproximadamente o mesmo. A capacidade de carga de uma aumentará à medida que o momento de inércia da seção transversal aumentar (HIBBELER, 2010).

As características da deflexão provocada por uma carga na coluna ideal podem ser representadas de acordo com o gráfico mostrado na Fig. 3. 7. O ponto de bifurcação representa o equilíbrio neutro, ponto em que a carga crítica age sobre a coluna. Aqui, a coluna está em iminência de flambagem (HIBBELER, 2010).

Figura 3. 7 - Gráfico da coluna ideal.



Fonte: Hibbeler (2010)

3.1.4 Tensão Crítica

Ao saber a carga crítica para uma coluna, pode-se calcular a tensão crítica correspondente dividindo esse carregamento pela área da seção transversal:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{AL^2} \quad (13)$$

O momento de inércia I para o eixo principal onde a flambagem ocorre, pode ser encontrado usando a equação da inércia ($I = Ar^2$), sendo r o raio de giração da seção transversal no plano de flexão. Encontra-se a razão adimensional L/r denominada índice de esbeltez, que mede a flexibilidade da coluna e também serve para classificar colunas como compridas, intermediárias ou curtas. Assim, a Eq. (13) pode ser reescrita como (HIBBELER, 2010):

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \quad (14)$$

3.1.5 Colunas com outras condições de apoio

A dedução da carga de Euler, Eq. (12), foi feita para uma coluna com extremidades acopladas por pinos ou livres para girar, sendo geralmente considerada como o caso mais básico de flambagem. No entanto, é possível encontrar colunas com outros tipos de vinculações, como extremidades engastadas, extremidades livres e apoios elásticos. Os carregamentos críticos para colunas com vários tipos de condições de apoio podem ser determinados a partir da equação diferencial da curva de deflexão através do mesmo procedimento matemático utilizado por Euler (GERE, 2003).

Considerando o caso de uma coluna engastada na base e livre no topo e seguindo o mesmo procedimento usado para a coluna presa por pinos para determinar a carga de flambagem, o momento interno da seção arbitrária é $M = P(\delta - v)$. Por consequência, a equação diferencial para a curva de deflexão é dada por (HIBBELER, 2010):

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \left(\frac{P}{EI} \right) v = \left(\frac{P}{EI} \right) \delta \quad (15)$$

Desta forma, ao utilizar as condições de contorno adequadas para resolver esta equação diferencial de segunda ordem não homogênea, chega-se na equação da carga crítica para este tipo de vinculação:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (16)$$

Ao analisar a Eq. (16), esta suportará apenas um quarto da carga crítica que pode ser aplicada a uma coluna apoiada por pinos em ambas as extremidades (HIBBELER, 2010).

3.1.6 Comprimento efetivo

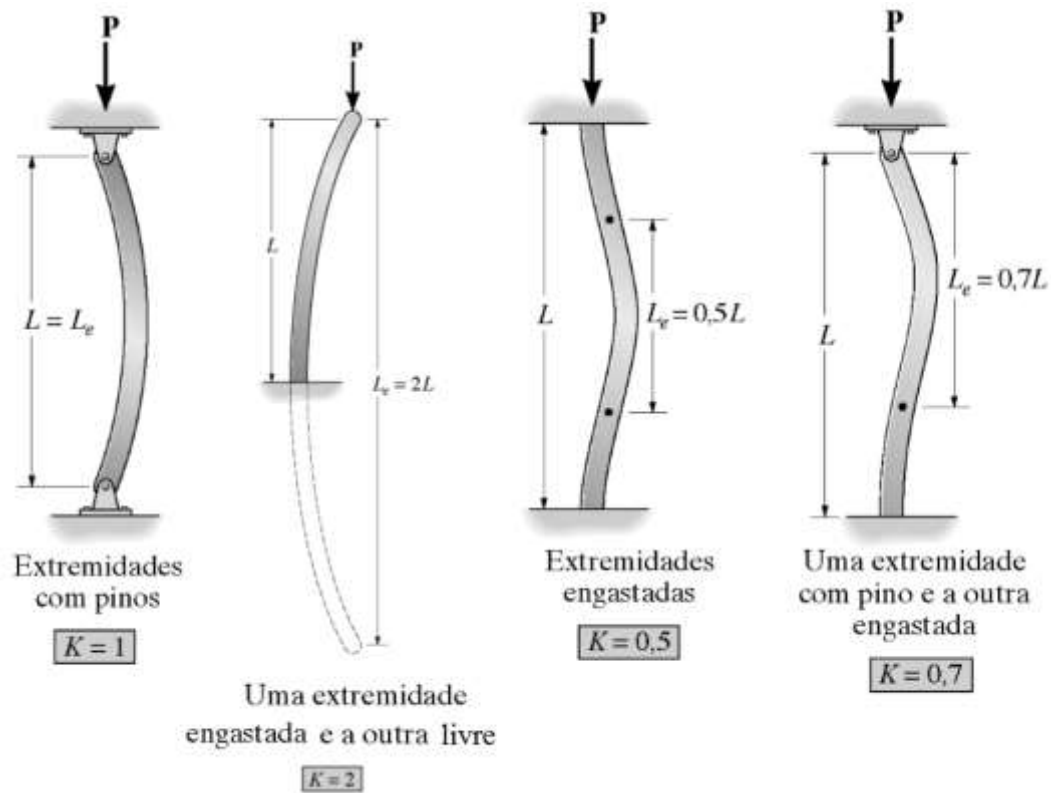
A Eq. (12) foi desenvolvida para o caso de uma coluna com extremidades presas por pinos ou livres para girar, sendo L a distância sem apoio entre os pontos de momento nulo. Se a coluna for apoiada de outros modos, então a fórmula de Euler poderá ser usada para determinar a carga crítica, desde que L represente a distância entre pontos de momento nulo. Essa distância é definida como comprimento efetivo da coluna, L_e (HIBBELER, 2010).

O comprimento efetivo pode ser substituído pelo coeficiente adimensional K , denominado fator de comprimento efetivo, multiplicado pelo comprimento L , da seguinte forma:

$$L_e = KL \quad (17)$$

A Fig. 3. 8 apresenta valores específicos de K , de acordo com as condições de vinculação das extremidades da coluna.

Figura 3. 8 - Colunas com fatores de comprimento específicos



Fonte: Hibbeler (2010)

Com base na Eq. (17), pode-se encontrar as equações gerais da carga crítica e da tensão crítica, respectivamente, como:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \quad (18)$$

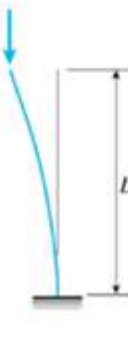
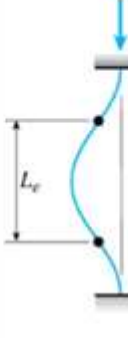
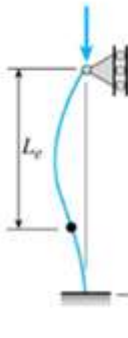
e

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2} \quad (19)$$

onde (KL/r) é o índice de esbeltez efetivo.

A Tabela 3. 1 apresenta as equações correspondentes às colunas conforme o tipo de apoios de suas extremidades e a variação do fator de comprimento efetivo K .

Tabela 3. 1 - Carregamentos críticos, comprimentos efetivos e fatores de comprimento efetivos para colunas ideais

Coluna birrotulada	Coluna engastada-livre	Coluna biengastada	Coluna engastada-rotulada
$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$	$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$	$P_{cr} = \frac{2,046 \pi^2 EI}{L^2}$
			
$L_e = L$	$L_e = 2L$	$L_e = 0,5L$	$L_e = 0,7L$
$K = 1$	$K = 2$	$K = 0,5$	$K = 0,7$

Fonte: Gere (2003)

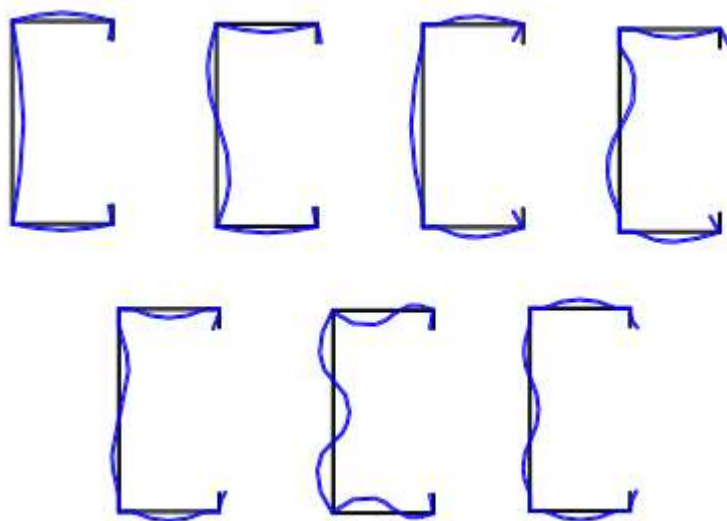
3.1.6 Modos de flambagem em perfis de aço formados à frio

Os perfis de aço de paredes esbeltas quando submetidos à compressão apresentam fenômenos de instabilidade que são caracterizados por deslocamento dos elementos constituintes da seção transversal. Estes deslocamentos determinam os três modos de flambagem: local, distorcional e global.

O modo de flambagem local caracteriza-se pela instabilidade das chapas constituintes do elemento estrutural resultando em ondulações ao longo de seu comprimento. Quando ocorre este tipo de deformação da seção transversal não há deslocamento ou mudança nos ângulos formados pelas arestas entre os elementos da seção transversal, conforme Fig. 3. 9 (LEAL, 2011).

O desenvolvimento deste modo de flambagem predomina em perfis curtos e com chapas muito finas, possuindo um comprimento de meia onda menos alongado, comparado aos outros modos de flambagem (ALMEIDA, 2007).

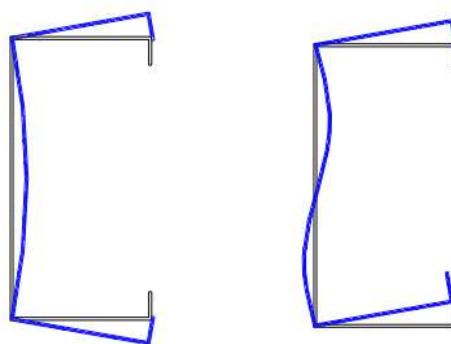
Figura 3. 9 - Modos de flambagem local para seções do tipo U enrijecida



Fonte: Alves (2008)

No entanto, segundo Souza (2006), o modo de flambagem distorcional caracteriza-se pela flexão de um ou mais elementos acompanhada pelo deslocamento das arestas comuns a estes elementos, como mostra a Fig. 3. 10.

Figura 3. 10 - Modos de flambagem distorcional para seções do tipo U enrijecida

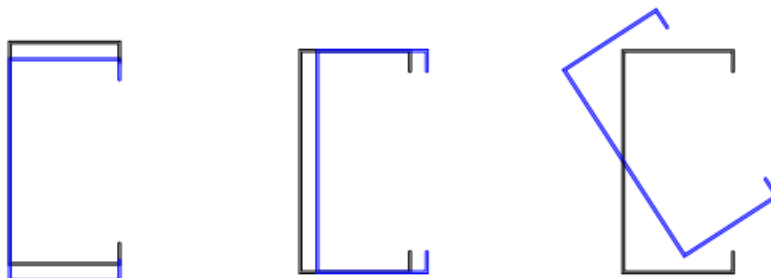


Fonte: Alves (2008)

No modo de flambagem global, mostrados na Fig. 3. 11, ocorre deslocamento de translação ou de rotação do corpo rígido da seção transversal do perfil (SANTOS, 2010). A flambagem global é um fenômeno característico de elementos com elevado índice de esbeltez

global e ainda pode se apresentar de três formas: flambagem por flexão, flambagem por torção e flambagem por flexo-torção (ALMEIDA, 2007).

Figura 3. 11 - Modos de flambagem global para seções do tipo U enrijecida



Fonte: Alves (2008)

3.1.7 A fórmula da secante

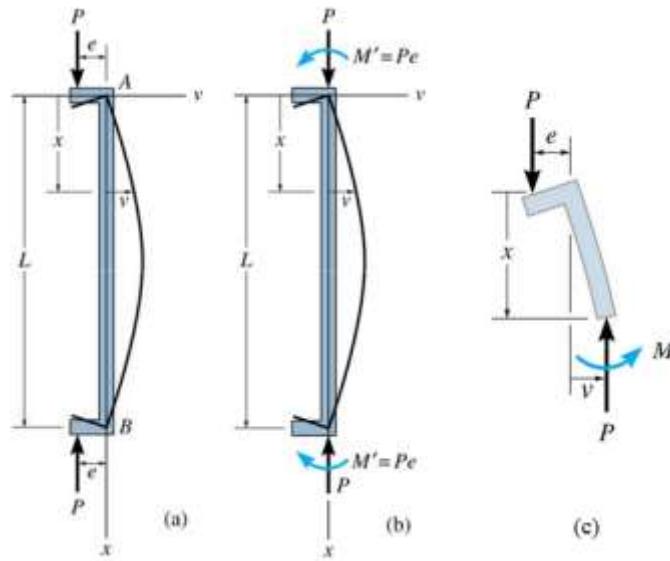
Em virtude de colunas fabricadas não serem perfeitamente retas e não se saber com exatidão onde as cargas são aplicadas, as colunas normalmente não sofrem flambagem de forma repentina, em vez disso, elas começam a sofrer flexão, embora bem pequena, imediatamente após a aplicação da carga. Resultando que o próprio critério de aplicação da carga ficará limitado a uma deflexão específica da coluna ou a não permitir que a tensão máxima na coluna ultrapasse uma tensão admissível (HIBBELER, 2010).

A fim de estudar este efeito, aplica-se a carga P à coluna a uma curta distância excêntrica e em relação ao centroide da seção transversal, conforme é mostrado na Fig. 3. 12a. Essa carga na coluna é estaticamente equivalente à carga axial P e ao momento fletor $M' = Pe$ mostrados na Fig. 3. 12b. Em ambos os casos, as extremidades A e B são suportadas de modo tal que ficam livres para girar. Considera-se somente pequenas inclinações e deflexões e o comportamento linear elástico do material, sendo que o plano $x-v$ é um plano de simetria para a área da seção transversal (HIBBELER, 2010).

Pelo diagrama de corpo livre da seção arbitrária, mostrado na Fig. 3. 12c, o momento interno da figura é:

$$M = -P(e + v) \quad (20)$$

Figura 3. 12 - Diagrama de corpo livre de uma coluna com imperfeições



Fonte: Hibbeler (2010)

A equação diferencial para a curva de deflexão é, portanto:

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = -P(e + v) \quad (21)$$

ou

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P}{EI}v = -\frac{P}{EI}e \quad (22)$$

A solução geral consiste nas soluções complementar e particular:

$$v = C_1 \sin \sqrt{\frac{P}{EI}}x + C_2 \cos \sqrt{\frac{P}{EI}}x - e \quad (23)$$

Para avaliar as constantes, temos de aplicar as condições de contorno. Em $x = 0$, $v = 0$, portanto $C_2 = e$. Em $x = L$, $v = 0$, resulta:

$$C_1 = \frac{e \left[1 - \cos(\sqrt{P/EI} L) \right]}{\text{sen}(\sqrt{P/EI} L)} \quad (24)$$

Visto que $1 - \cos(\sqrt{P/EI} L) = 2 \text{sen}^2(\sqrt{P/EI} L / 2)$ e $\text{sen}(\sqrt{P/EI} L) = 2 \text{sen}(\sqrt{P/EI} L / 2) \cos(\sqrt{P/EI} L / 2)$, tem-se:

$$C_1 = e \text{tg} \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) \quad (25)$$

Por consequência, a curva de deflexão, Eq. (23), pode ser escrita como:

$$v = e \left[\text{tg} \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) \text{sen} \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right) + \cos \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right) - 1 \right] \quad (26)$$

Devido à simetria da carga, a deflexão máxima e a tensão máxima ocorrem no ponto médio da coluna. Portanto, quando $x = L/2$, $v = v_{\text{máx}}$ e, por isso:

$$v_{\text{máx}} = e \left[\sec \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) - 1 \right] \quad (27)$$

Se e tende a zero, então $v_{\text{máx}}$ tende a zero. Entretanto, se os termos entre colchetes tenderem a infinito quando e tender a zero, então $v_{\text{máx}}$ terá um valor não nulo. Em termos matemáticos, isso representaria o comportamento de uma coluna com carga axial máxima no momento da falha quando sujeita à carga crítica P_{cr} . Portanto, para determinar P_{cr} , é preciso que (HIBBELER, 2010):

$$\sec \left(\sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}} \frac{L}{2} \right) = \infty \quad (28)$$

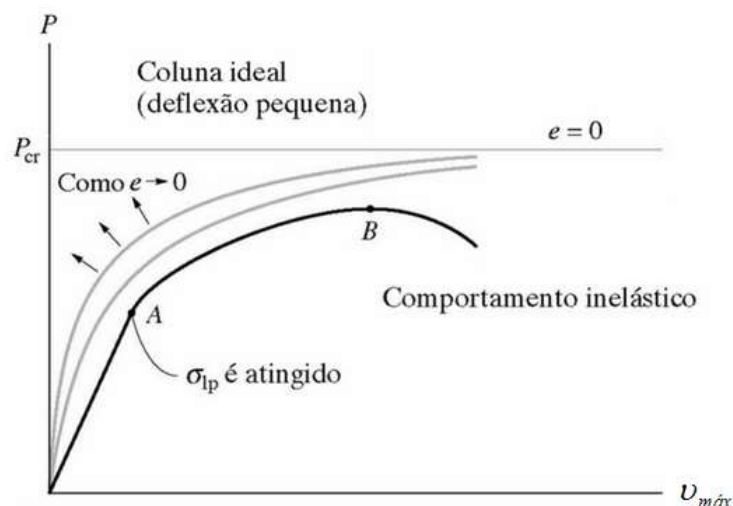
$$\sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}} \frac{L}{2} = \frac{\pi}{2} \quad (29)$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (30)$$

que é o mesmo resultado obtido com a fórmula de Euler, Eq. (12).

Fazendo a representação gráfica da Eq. (27) como a carga P em relação à deflexão $v_{máx}$ para vários valores da excentricidade e , o resultado será o conjunto de curvas, na cor cinza, mostradas na Fig. 3. 13. Neste gráfico a carga crítica torna-se uma assíntota às curvas e, é claro, representa o caso irreal de uma coluna ideal ($e=0$). Como e nunca é igual a zero devido às imperfeições na retidão inicial da coluna e na aplicação da carga, então à medida que $e \rightarrow 0$, as curvas tendem a aproximar-se do caso ideal. Além disso, essas são adequadas para pequenas deflexões, visto que a curvatura foi aproximada por d^2v/dx^2 , quando se desenvolve a Eq. (27). Se a análise fosse realizada de forma mais exata, todas essas curvas tenderiam a curvar-se para cima interceptando e, em seguida, ultrapassando a reta $P = P_{cr}$. Isso indica que é necessária uma carga P maior para criar deflexões maiores na coluna. Porém, esta análise não foi considerada aqui, visto que na maioria das vezes o próprio projeto de engenharia restringe a deflexão de colunas a pequenos valores (HIBBELER, 2010).

Figura 3. 13 - Representação gráfica da equação da deflexão máxima



Fonte: Hibbeler (2010)

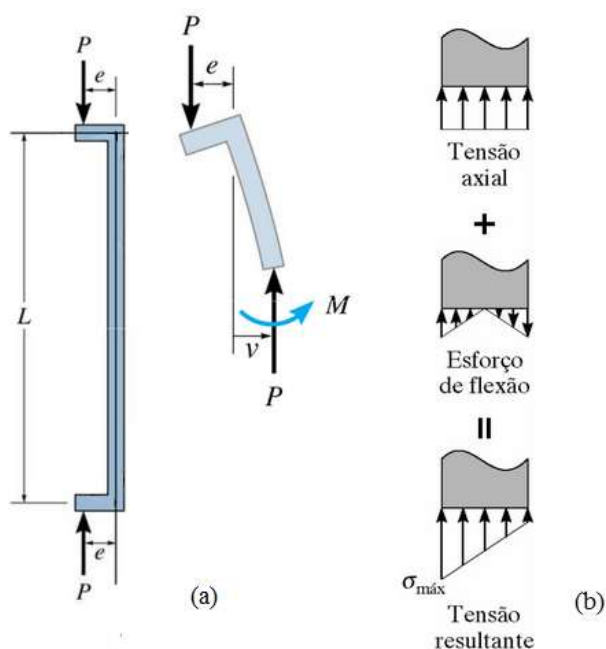
As curvas em cinza da Fig. 3. 13 aplicam-se somente ao material de comportamento linear elástico, se a coluna for comprida e esbelta. Porém, se considerar uma coluna robusta

curta ou de comprimento intermediário, um aumento da carga aplicada poderá provocar o escoamento do material e a coluna começará a comportar-se de maneira inelástica. Isso ocorre no ponto *A* da curva em preto na Fig. 3. 13, ainda que a carga continue a aumentar, a curva nunca atingirá a carga crítica, em vez disso, a carga atingirá um valor máximo em *B*. Depois desse ponto, ocorrerá uma redução repentina na capacidade da carga à medida que a coluna continuar a sofrer deflexões cada vez maiores (HIBBELER, 2010).

As curvas em cinza da Fig. 3. 13 também mostram que ocorre uma relação não linear entre a carga P e a deflexão ν . Resultando que o princípio da superposição não pode ser usado para determinar a deflexão total de uma coluna provocada pela aplicação de cargas sucessivas. Ao contrário disso, deve-se somar as carga e depois determinar a deflexão correspondente à carga resultante. Em termos físicos, a razão pela qual as cargas e as deflexões sucessivas não podem ser sobrepostas é que o momento interno da coluna depende da carga P , bem como da deflexão ν , de acordo com a Eq. (20), ou seja, qualquer deflexão provocada por uma componente de carga aumenta o momento (HIBBELER, 2010).

Pode-se observar na Fig. 3. 14 que a tensão máxima na coluna pode ser determinada, entendendo que ela é provocada tanto pela carga axial quanto pelo momento fletor.

Figura 3. 14 - Tensão máxima na coluna sob compressão



Fonte: Hibbeler (2010)

Conforme a Fig. 3. 14a, a tensão máxima na coluna pode ser determinada se for entendido que ela é provocada pela carga axial e também pelo momento. O momento máximo ocorre no ponto médio da coluna e, pelas Eq. (20) e Eq. (27), seu valor é (HIBBELER, 2010):

$$M = |P(e + \nu_{m\acute{a}x})| \text{ e } M = Pe \sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2}\right) \quad (31)$$

A tensão máxima na coluna é de compressão, conforme mostra a Fig. 3. 14b, e seu valor é determinado por:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \quad (32)$$

Então, considerando a Eq. (31), a Eq. (32) pode ser reescrita como:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{P}{A} + \frac{Pec}{I} \sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2}\right) \quad (33)$$

Levando em conta que o raio de giração é definido como $r^2 = I / A$, a Eq. (33) pode ser escrita em uma forma denominada fórmula da secante:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec\left(\frac{L}{2r} \sqrt{\frac{P}{EA}}\right) \right] \quad (34)$$

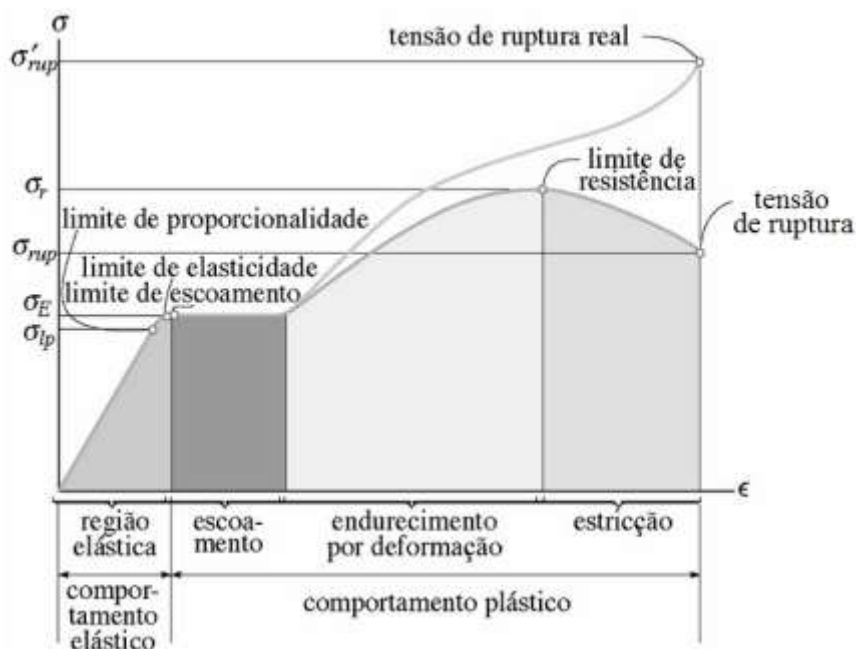
onde $\sigma_{m\acute{a}x}$ é a tensão elástica máxima de compressão na coluna, que ocorre no interior do lado côncavo no ponto médio da coluna; P é a carga vertical aplicada à coluna. $P < P_{cr}$ a menos que $e=0$, então $P = P_{cr}$; e é a excentricidade da carga P , medida do eixo neutro da área da seção transversal da coluna até a linha de ação de P ; c é a distância do eixo neutro até a fibra externa da coluna onde ocorre a tensão de compressão máxima $\sigma_{m\acute{a}x}$; A é a área da seção transversal da coluna; L é comprimento não apoiado da coluna no plano de flexão; E é o módulo de elasticidade para o material; e r é o raio de giração, $r = \sqrt{I / A}$, onde I é calculado em torno do eixo neutro ou de flexão (HIBBELER, 2010).

Da mesma forma que a Eq. (27), a Eq. (34) indica que há uma relação não linear entre a carga e a tensão. Por consequência, o princípio da superposição não é aplicável e, portanto, deve-se somar as cargas antes de determinar a tensão. Além disso, em razão dessa relação não linear, qualquer fator de segurança usado para a finalidade de projeto aplica-se à carga e não a tensão (HIBBELER, 2010).

3.1.8 Flambagem inelástica

Para entender o conceito de flambagem inelástica é importante entender o diagrama tensão-deformação. De acordo com dados obtidos em ensaios de tração ou compressão, é possível calcular vários valores da tensão e da deformação ocorridas em um corpo de prova de aço. A curva resultante da representação gráfica, no qual a ordenada é a tensão e a abscissa é a deformação, é denominada de diagrama tenso-deformação, como mostrado na Fig. 3. 15 (HIBBELER, 2010).

Figura 3. 15 - Diagrama tensão-deformação convencional e real para um o aço (fora de escala)



Fonte: Hibbeler (2010)

Esse diagrama é de suma importância na engenharia, pois proporciona meios para se obterem dados sobre a resistência à tração (ou compressão) de um material sem considerar o tamanho ou a forma física do material. No entanto, diagramas para um mesmo material nunca

serão exatamente iguais, já que os resultados dependem de algumas variáveis, dentre elas a composição e as imperfeições do material (HIBBELER, 2010).

A Fig. 3. 15 mostra o diagrama tensão-deformação característico para um corpo de prova de aço. Por esta curva pode-se identificar quatro modos diferentes de comportamento do material, dependendo do grau de deformação nele induzido. Segundo Hibbeler (2010) esses modos de comportamento são descritos como:

- Comportamento elástico: ocorre quando as deformações no corpo de prova estão dentro da primeira região do gráfico. A curva é uma linha reta em grande parte da região, de modo que a tensão é proporcional à deformação, ou seja, o material é linearmente elástico. O limite superior da tensão para essa relação linear é denominado limite de proporcionalidade, σ_{lp} . Se a tensão ultrapassar ligeiramente este limite, o material ainda pode responder de maneira elástica, contudo, a reta tende a encurvar-se e achatar-se. Isso continua até a tensão atingir o limite de elasticidade. Ao atingir esse ponto, se a carga for removida, o corpo de prova ainda voltará a sua forma original. Porém, no caso do aço, o limite de elasticidade está muito próximo do limite de proporcionalidade, sendo muito difícil detectá-lo.
- Escoamento: aumentando minimamente a tensão acima do limite de elasticidade resultará no colapso do material e fará com que ele se deforme permanentemente. É representado pela segunda região da curva e esse comportamento denomina-se de escoamento. A tensão que causa o escoamento é denominada deformação de escoamento ou ponto de escoamento, σ_E , e a deformação que ocorre é a deformação plástica. Uma vez alcançado o ponto de escoamento, o corpo de prova continuará a alongar-se sem qualquer aumento na carga. Quando o material está nesse estado, costuma ser denominado perfeitamente plástico.
- Endurecimento por deformação: quando o escoamento tiver terminado, pode-se aplicar uma carga adicional ao corpo de prova, o que resulta em uma curva que cresce continuamente, mas torna-se mais achatada até atingir uma tensão máxima denominada limite de resistência, σ_r . O crescimento da curva dessa maneira é denominado endurecimento por deformação e é identificado na terceira região abaixo da curva do diagrama tensão-deformação.
- Estricção: nesse estágio a área da seção transversal começa a diminuir numa determinada região do corpo de prova, no limite da resistência. Tende a formar-se uma constrição, ou estricção, gradativa nessa região, à medida que o corpo de prova

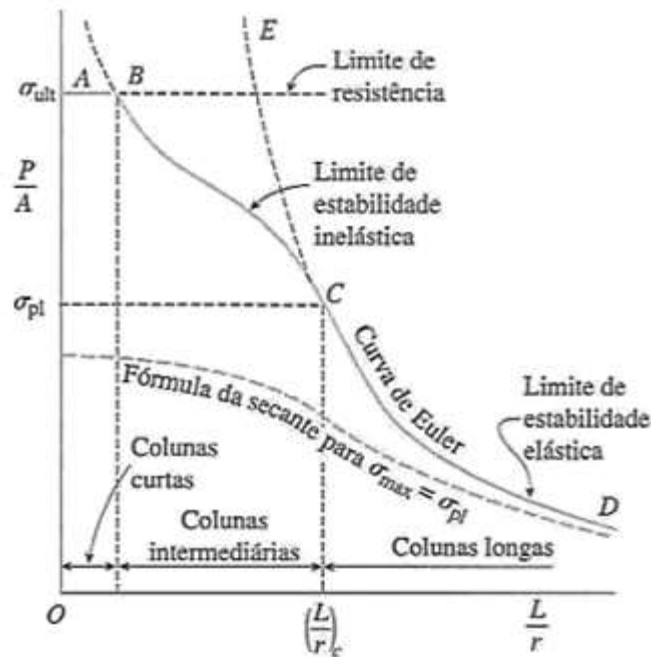
se alonga cada vez mais. Por consequência, o diagrama tensão-deformação tende a curvar-se para baixo até o corpo de prova romper, quando é atingida a tensão de ruptura, σ_{rup} . Demonstrada na quarta região abaixo da curva do diagrama.

Segundo Hibbeler (2010), na prática da engenharia, em geral, as colunas são classificadas de acordo com o tipo de tensão desenvolvida em seu interior no momento da falha. Isso se deve ao fato de que seu comprimento interfere no fenômeno de instabilidade.

Colunas compridas e esbeltas se tornarão instáveis quando a tensão de compressão permanecer elástica, ocorrendo falha por flambagem elástica. As colunas curtas em compressão falham por escoamento ou sofrem ruptura do material, e nenhuma consideração sobre flambagem ou estabilidade está envolvida. No entanto, as colunas intermediárias falham por flambagem inelástica o que significa que as tensões máximas de compressão na falha estão acima do limite de proporcionalidade do material (HIBBELER, 2010; GERE, 2003).

As linhas divisórias entre as colunas curtas, intermediárias e longas não são precisas. Contudo, é necessário fazer essas distinções, pois a capacidade máxima de suportar carregamentos em cada categoria é baseada em tipos bem diferentes de comportamento. A capacidade máxima de suportar carregamentos de uma coluna em particular (em função de seu comprimento) é representada pela curva *ABCD* na Fig. 3. 16. Se o comprimento for bem pequeno (região *AB*), a coluna falha por compressão direta; se a coluna for mais comprida (região *BC*), ela falha por flambagem inelástica; e se ela for ainda mais comprida (região *CD*), ela falha por flambagem elástica (ou flambagem de Euler). A curva *ABCD* aplica-se a colunas com várias condições de apoio se o comprimento L na razão de esbeltez (L/r) for substituído pelo comprimento efetivo L_e (GERE, 2003).

Figura 3. 16 - Diagrama da tensão de compressão média P/A versus a razão de esbeltez L/r

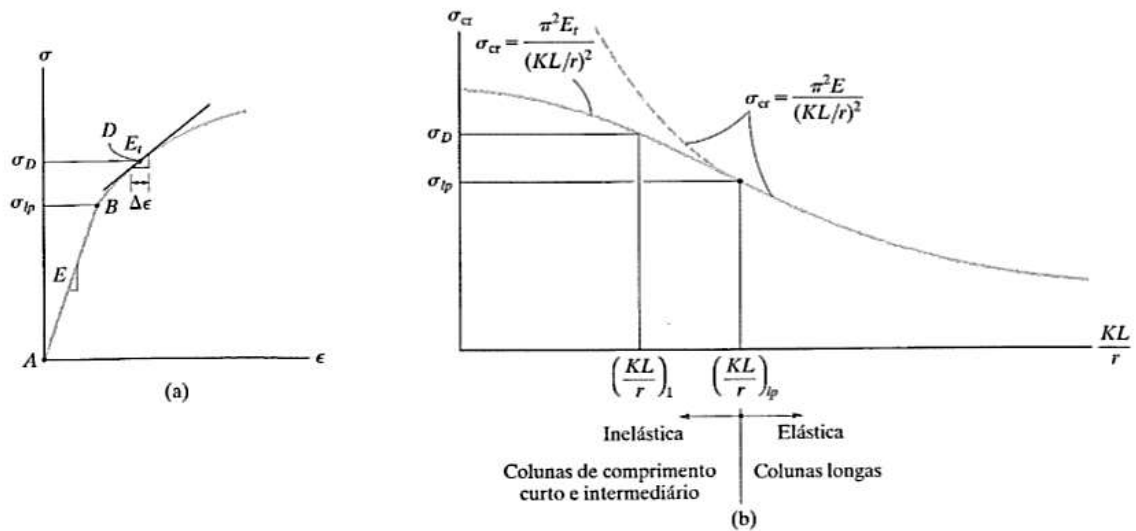


Fonte: Gere (2003)

A aplicação da equação de Euler exige que a tensão na coluna permaneça abaixo do limite de escoamento do material (na verdade, o limite de proporcionalidade) quando a coluna sofre flambagem e, por isso, a equação aplica-se somente às colunas compridas. No entanto, na prática, a maioria das colunas selecionadas tem o comprimento intermediário, cujo comportamento pode ser estudado modificando-se a equação de Euler de modo que ela possa ser aplicada à flambagem inelástica (HIBBELER, 2010).

Para mostrar como isso pode ser feito, considerar que o material tem diagrama tensão-deformação como mostrado na Fig. 3. 17a. Neste caso, o limite de proporcionalidade é σ_{lp} e o módulo de elasticidade, ou inclinação da reta AB, é E . Na Fig. 3. 17b é mostrada uma representação gráfica da hipérbole de Euler. Essa equação é válida para uma coluna que tenha um índice de esbeltez tão pequeno quanto $(KL/r)_{lp}$, visto que, nesse ponto, a tensão axial na coluna torna-se $\sigma_{cr} = \sigma_{lp}$ (HIBBELER, 2010).

Figura 3. 17 - Diagrama tensão-deformação e representação gráfica da hipérbole de Euler



Fonte: Hibbeler (2010)

Se a coluna tiver um índice de esbeltez menor que $(KL/r)_{lp}$, a tensão crítica na coluna deve ser maior do que σ_{lp} . Para ficar mais claro, supondo que uma coluna tenha um índice de esbeltez $(KL/r)_1 < (KL/r)_{lp}$, com tensão crítica correspondente $\sigma_D > \sigma_{lp}$ necessária para causar instabilidade. Quando a coluna está na iminência de flambar, a mudança na deformação que ocorre nela está dentro de uma pequena faixa $\Delta\epsilon$, e, por isso, o módulo de elasticidade ou a rigidez do material pode ser considerado como o módulo tangente, E_t , definido como a inclinação do diagrama σ - ϵ no ponto D da Fig. 3. 17a. Ou seja, no momento da falha, a coluna comporta-se como se fosse feita de um material que tivesse rigidez menor que quando comporta-se elasticamente, $E_t < E$ (HIBBELER, 2010).

Em geral, à medida que o índice de esbeltez diminui, a tensão crítica de uma coluna continua a aumentar e, pelo diagrama σ - ϵ , o módulo tangente para o material diminui. Com base nisso, pode-se modificar a equação de Euler para incluir esses casos de flambagem inelástica substituindo o módulo tangente do material E_t em vez de E , de modo que (HIBBELER, 2010):

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{(KL/r)^2} \quad (35)$$

Para casos reais, onde as colunas não são perfeitamente retas e nem carregadas ao longo de seu eixo centroide, é difícil desenvolver uma expressão que dê uma análise completa desse fenômeno de flambagem inelástica. No entanto, alguns métodos já foram desenvolvidos para determinar valores para a carga última. Neste trabalho, será abordado o Método da Resistência Direta.

3.1.9 Método da Resistência Direta (MRD)

O MRD proporciona uma abordagem sistemática para obter estimativas da resistência última de membros estruturais de aço formados a frio com qualquer tipo de seção transversal. Tal método emprega as propriedades da flambagem elástica de uma seção transversal de aço formada a frio para prever a carga última, levando em conta os três modos de flambagem: local, distorcional e global.

De acordo com Moen e Shafer (2011), as equações para determinar a capacidade de flambagem global por tal método consistem, primeiramente, em determinar o índice de esbelteza reduzido, λ_0 ,

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{P_y}{P_{cr}}} \quad (36)$$

onde, P_{cr} é a carga crítica de flambagem e P_y é a carga de esmagamento, dada por:

$$P_y = A_t \sigma_y \quad (37)$$

sendo A_t a área total da seção transversal e σ_y a tensão de escoamento do material. Para colunas com perfuração, é necessário usar a área líquida:

$$A_{liq} = A_t - A_f \quad (38)$$

onde A_f é a área do furo na seção transversal.

Então, a partir da Eq. (36), se $\lambda_0 \leq 1,5$, então:

$$P_{MRD} = \left(0,658^{\lambda_0^2}\right) P_y \quad (39)$$

e se $\lambda_0 \geq 1,5$, então:

$$P_{MRD} = \left(\frac{0,877}{\lambda_0^2}\right) P_y \quad (40)$$

O primeiro termo das Eqs. (39) e (40) determina um fator de resistência à compressão.

3.2. *Constructal Design*

A Teoria *Constructal* proposta por Adrian Bejan, na década de 90, baseia-se em uma lei física de design e evolução: a Lei *Constructal*. A Lei *Constructal* faz do design um conceito na ciência, um fenômeno que surge espontaneamente e evolui na natureza o tempo todo e em todo lugar. As configurações adquiridas na natureza não são como resultado de um mecanismo, mas como a expressão de uma lei física e previsível. Esses fenômenos compreendem sistemas de fluxo animados ou inanimados, os quais adquirem formas e estruturas para facilitar seu fluxo e persistir (sobreviver) no tempo (BEJAN e ZANE, 2012).

A Lei *Constructal* emerge na natureza apresentando padrões em formato de árvores, como na Fig. 3. 18, cujo design facilita o fluxo de ponto-a-área e área-a-ponto. Na natureza é possível encontrar esses padrões em sistemas de bacias hidrográficas, vasos sanguíneos, redes neurais no cérebro, sistemas pulmonares, entre outros (BEJAN e ZANE, 2012).

Baseado nessas configurações é apresentado o método *Constructal Design*, que são observados em exemplos básicos de nosso cotidiano como o movimento de água de um reservatório (ponto) distribuído a vários locais na comunidade (área), a fim de tornar o fluxo mais rápido e de maneira eficiente, outro exemplo é a otimização do tráfego no sistema de transporte, compreendendo vias de fluxo rápido e vias secundárias, para evitar congestionamentos (BEJAN e ZANE, 2012).

Figura 3. 18 - Formato de árvore com suas ramificações



Fonte: Bejan e Zane (2012)

A Lei *Constructal* estipula que os sistemas de fluxo evoluam no sentido de distribuir suas imperfeições, admitindo configurações que facilitem esse processo sem que esta evolução cesse. O fenômeno natural não visa a eliminação, mas a distribuição das imperfeições gerando a geometria do sistema (CORREIA, 2013).

Em projetos de engenharia, a maior parte das aplicações envolvendo a Teoria *Constructal* são dedicadas ao desenvolvimento de geometrias ótimas em problemas de mecânicas dos fluidos e transferência de calor. No entanto, é possível considerar as estruturas sólidas como sistemas de fluxo que são configurados e transformados de modo a facilitar o fluxo de tensões (LORENTE, LEE e BEJAN, 2010).

Alguns trabalhos, elencados na seção 1.1 desta dissertação, definem como foi aplicado o *Constructal Design* para avaliação geométrica, estipulando objetivos e restrições. Rocha et al. (2012) analisou placas perfuradas finas cuja função objetivo foi maximizar a carga crítica de flambagem, impondo como restrição a variação de diferentes frações volumétricas, ϕ . Correia (2013) como mesmo intuito de maximizar a cargas crítica de flambagem de placas retangulares com perfurações centradas. Este autor utilizou a Teoria *Constructal*, e como restrições foram estipuladas diferentes frações volumétricas ϕ , relação entre a altura e o comprimento da placa (H/L) e a relação entre as dimensões características de cada tipo de perfuração (H_0/L_0).

4 MODELAGEM COMPUTACIONAL

Com exceção de alguns casos, não é possível obter solução analítica exata para problemas de engenharia descritos através de equações com derivadas parciais. Um exemplo disso é a determinação da carga crítica de colunas. Se a coluna não possuir perfurações, é possível obter analiticamente o valor da carga crítica, conforme explicado anteriormente. Entretanto, para colunas com perfurações não existe uma solução analítica, restando a realização de ensaios experimentais ou de simulações numéricas. No presente trabalho a abordagem adotada é que usa a modelagem computacional para o estudo da flambagem elástica, bem como para o estudo da flambagem elasto-plástica. Para isso, o método numérico empregado para as colunas com e sem perfurações foi o Método dos Elementos Finitos (MEF) através do software ANSYS®.

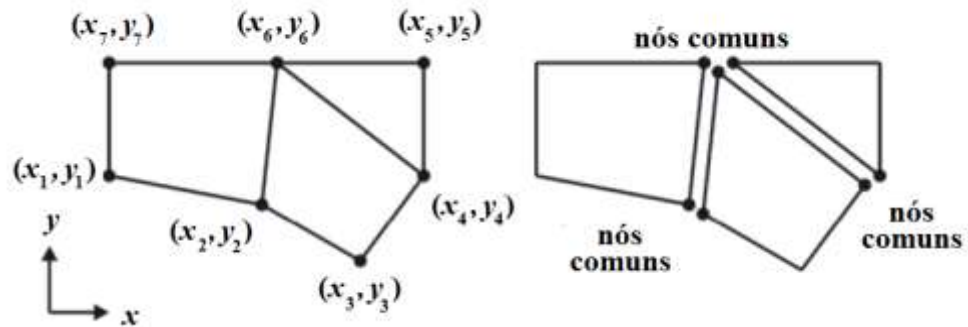
4.1 Método de Elementos Finitos (MEF)

Para o estudo do comportamento de sistemas físicos são utilizados modelos físicos e/ou modelos matemáticos. O desenvolvimento dos modelos matemáticos tem sido motivado pelo avanço da ciência e a comparação entre esses modelos (físicos e matemáticos), propiciando modelagens realísticas, confiáveis e de aplicação prática na engenharia, muito mais econômicas do que os modelos físicos. Embora o modelo matemático guarde aproximações em relação ao sistema físico original, a solução é dita exata. A análise desses modelos matemáticos habitualmente requer o uso de métodos numéricos, entre os quais se inclui o de elementos finitos (SORIANO, 2003).

O MEF é uma poderosa técnica computacional para a obtenção de soluções de problemas de engenharia do “mundo real”, possuindo domínios complexos submetidos a condições de contorno. A base do MEF depende da decomposição do domínio em um número finito de subdomínios (elementos) para os quais a solução sistemática aproximada é constituída pela aplicação dos métodos residual variacional ou ponderado (MADENCI e GUVEN, 2006).

Cada elemento se conecta ao elemento vizinho através dos pontos nodais (nós), conforme Fig. 4. 1. Segundo Madenci e Guven (2006) um nó especifica a localização da coordenada no espaço onde os graus de liberdade e as ações de problemas físicos existem. Os graus de liberdade são ditados pela natureza física do problema e pelo tipo de elemento.

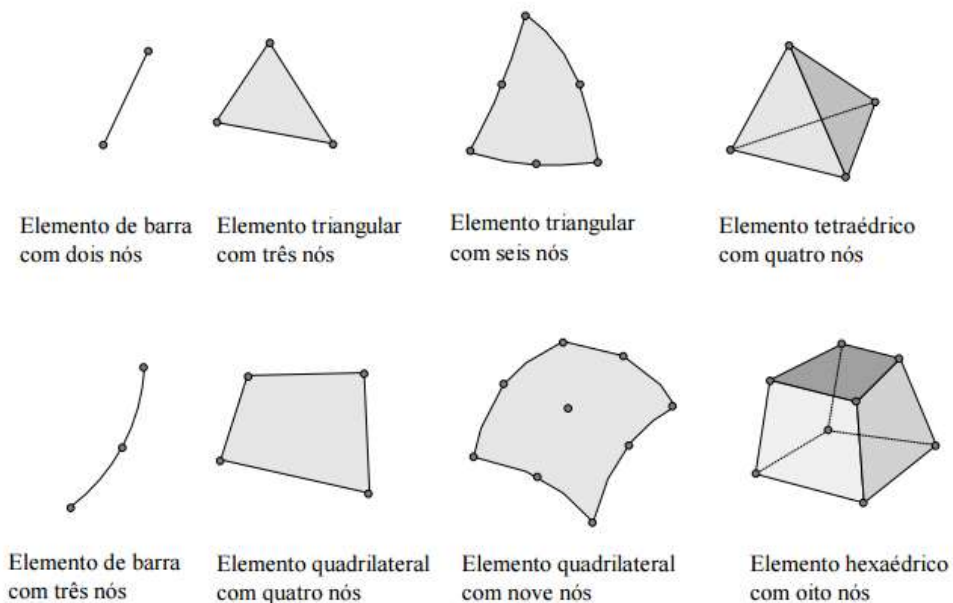
Figura 4. 1 - Elementos conectados por pontos nodais



Fonte: Madenci e Guven (2006)

Os elementos apresentam formas geométricas diversas em função do tipo e da dimensão do problema. A Fig. 4. 2 apresenta a geometria de vários tipos de elementos finitos.

Figura 4. 2 - Diferentes tipos de elementos finitos



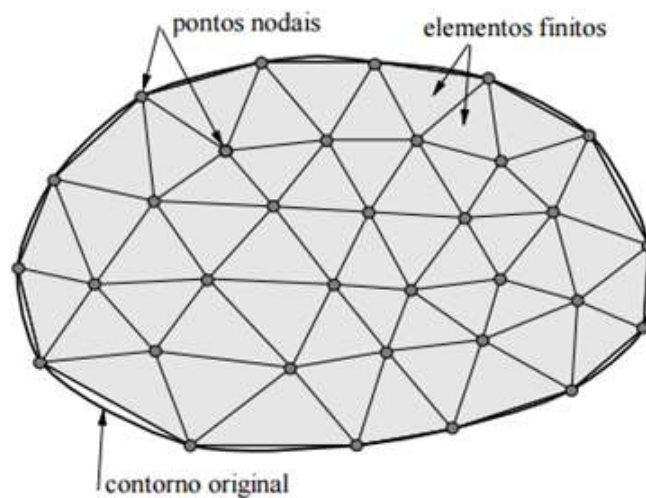
Fonte: Souza (2003)

De acordo com Madenci e Guven (2006), a análise pelo MEF requer que os seguintes passos sejam seguidos:

- Discretização do domínio em um número finito de subdomínios (elementos), conforme Fig. 4. 3;

- Seleção da função de interpolação;
- Desenvolvimento da matriz elemento para o subdomínio;
- Montagem de matrizes de elementos para cada subdomínio para obter a matriz global de todo domínio;
- Imposição de condições de contorno e iniciais;
- Solução de equações.

Figura 4. 3 - Malha de elementos finitos para um problema plano fonte.

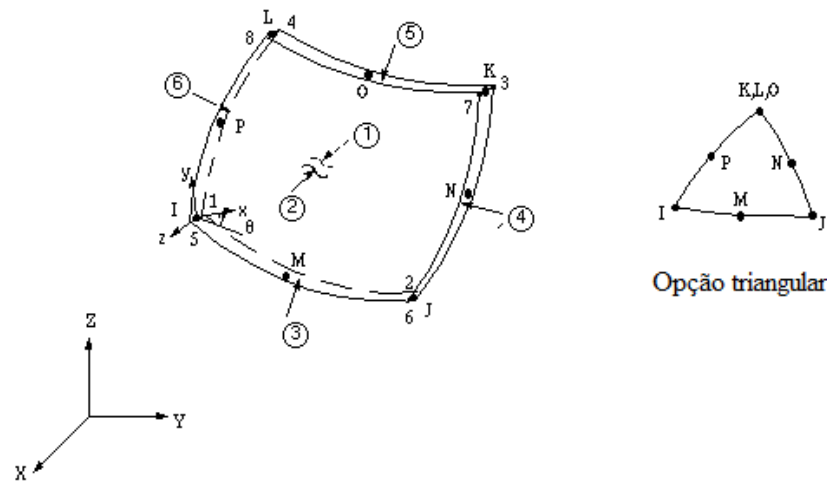


Fonte: Souza (2003)

O MEF é utilizado numa grande variedade de diferentes áreas da engenharia para resolver um problema complexo, subdividindo-o em uma série de problemas mais simples. Tal método torna possível simular cenários diferentes durante o processo de desenvolvimento de um produto e, portanto, ajudando as empresas economizar muito tempo e dinheiro ao reduzir os testes experimentais.

O software ANSYS® possui vários tipos de elementos que são indicados para diferentes análises. Para a geração da malha foi utilizado o elemento SHELL 93 o qual é adequado para modelar elementos de casca fina. Este elemento é definido por oito nós, quatro espessuras e seis graus de liberdade em cada nó, tendo translações e rotações nodais nas direções x , y e z , conforme apresentado na Fig. 4. 4. O elemento apresenta plasticidade, grande deflexão e ampla capacidade de deformação.

Figura 4. 4 - Elemento SHELL 93



Fonte: ANSYS (2005)

4.2. Análise linear da flambagem

No software ANSYS® é empregada a análise elástica de autovalores para o estudo numérico do fenômeno da flambagem. As equações de equilíbrio por elementos finitos para este tipo de análise envolvem a solução de equações algébricas homogêneas cujo menor autovalor corresponde à carga crítica de flambagem e o autovetor associado representa o primeiro modo de flambagem (MADENCI e GUVEN, 2006).

Tal análise numérica inclui tanto termos lineares quanto não lineares em sua formulação. Desta forma, a matriz de rigidez total $[K]$, é obtida pela soma da matriz de rigidez convencional para pequenas deformações, $[K_E]$, com a matriz de rigidez geométrica, $[K_G]$. A matriz $[K_G]$ depende não só da geometria, mas também do esforço interno existente no início do carregamento, $\{P_0\}$. Então, a matriz de rigidez total da coluna para um nível de carga $\{P_0\}$ pode ser escrita como (PRZEMIENIECKI, 1985):

$$[K] = [K_E] + [K_G] \quad (41)$$

Quando a carga atinge o nível de $\{P\} = \lambda \{P_0\}$, onde λ é um escalar, a matriz rigidez pode ser definida como:

$$[K] = [K_E] + \lambda [K_G] \quad (42)$$

As equações de equilíbrio governantes para a coluna podem ser escritas, usando o vetor de deslocamento total $\{U\}$, como:

$$[[K_E] + \lambda[K_G]]\{U\} = \lambda\{P_0\} \quad (43)$$

Desta forma, o vetor de deslocamento total pode ser determinado pela seguinte matriz:

$$\{U\} = [[K_E] + \lambda[K_G]]^{-1} \lambda\{P_0\} \quad (44)$$

Na flambagem, o componente estrutural apresenta um grande crescimento nos deslocamentos sem crescimento de carga. Por definição matemática é possível determinar a matriz inversa como a matriz adjunta dividida pelo determinante dos coeficientes, então os deslocamentos $\{U\}$ tendem a infinito quando:

$$\det[[K_E] + \lambda[K_G]] = 0 \quad (45)$$

Na Eq. (45), $\det$ é a função determinante, a qual representa um problema de autovalores, que ao ser resolvido gera o menor autovalor, λ_1 , que corresponde à carga crítica $\{P_{cr}\} = \lambda_1\{P_0\}$ em que ocorre a flambagem. Além disso, o vetor deslocamento associado $\{U\}$ define a forma do modo de flambagem. No software ANSYS® o problema de autovalores é resolvido usando o método numérico de Lanczos (ANSYS, 2005).

4.3 Análise não linear da flambagem

A resolução de problemas lineares de mecânica estrutural tem sido amplamente estudada e realizada sem grandes dificuldades. No entanto, problemas de mudança na geometria devido a grandes deformações, com comportamento estrutural irreversível após a remoção das cargas externas e que visam a determinação da carga última de flambagem requerem uma análise não linear estrutural. A não linearidade pode ser classificada como não

linearidade geométrica, não linearidade do material (ou física) e não linearidade de contorno (MADENCI e GUVEN, 2015).

A não linearidade física decorre do fato do material não apresentar uma relação tensão-deformação linear, ou seja, não segue a Lei de Hooke. O comportamento do material não é linear elástico. Enquanto a não linearidade geométrica, uma estrutura pode ter um comportamento não linear, ainda que constituída de um material que obedeça a Lei de Hooke. Neste caso, a estrutura sofre grandes deslocamentos, a deflexão lateral de um membro pode trazer como consequência o aparecimento de momentos fletores adicionais, e virtude da presença de um esforço normal (PEREIRA, 2002).

A análise não linear, pelo fato de ser mais complexa, requer métodos numéricos iterativos para estudar a falha do componente após a ocorrência do escoamento. O software ANSYS® utiliza o método de Newton-Raphson cujo processo é incremental e iterativo a fim de reduzir ao máximo a diferença entre as forças internas e externas nos elementos para que fiquem dentro de intervalos aceitáveis. Quando isso ocorre uma próxima etapa de incremento de carga é realizada (ROSAS, 2006).

A solução das equações não lineares pode ser alcançada através de uma abordagem incremental, escritas como:

$$[K(U)]\{\Delta U\} = \{\Delta P\} \quad (46)$$

onde $[K(U)]$ é matriz de rigidez que depende do vetor de deslocamentos, $\{\Delta u\}$ e $\{\Delta P\}$ representam o vetor deslocamento e o vetor de cargas aplicadas, respectivamente (MADENCI e GUVEN, 2015).

A solução é construída por uma série de passos lineares na direção apropriada a fim de aproximar a solução exata. Dependendo da natureza da não linearidade, a magnitude de cada passo e direções pode envolver várias iterações, podendo a solução não linear não ser única (MADENCI e GUVEN, 2015).

Por tal método, o software ANSYS®, supõe uma solução inicial $u = u_i$ para determinar a magnitude do próximo passo (incremento):

$$\{\Delta u\}_i = [K(U_i)]^{-1} \{\Delta P\} \quad (47)$$

$$\{\Delta R\}_i = \{\Delta P\} - [K(U_i)]\{\Delta u\}_i \quad (48)$$

onde $\{\Delta R\}_i$ corresponde ao vetor de carga fora de equilíbrio, representado pela diferença entre as cargas aplicadas $\{\Delta P\}$ e a carga avaliada com base na solução inicial assumida $[K(U_i)]\{\Delta u\}_i$ (MADENCI e GUVEN, 2015).

A fim de satisfazer as condições de equilíbrio, o vetor ΔR_i tem que ser nulo. As condições de equilíbrio não linear são resolvidas por aproximação, em cada iteração, o método de Newton-Raphson calcula o vetor $\{\Delta R\}_i$ e checa a convergência baseado numa tolerância estipulada (MADENCI e GUVEN, 2015).

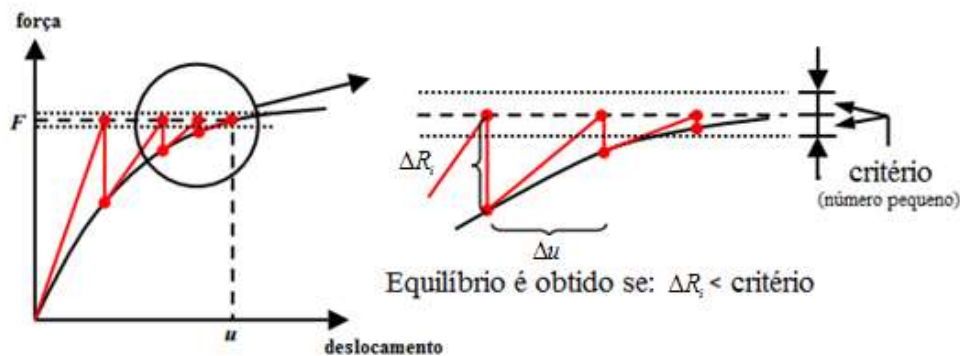
Se o critério de convergência não for satisfeito, conforme a Fig. 4. 5, a solução inicial é atualizada como $u_{i+1} = u_i + \Delta u_i$, baseado no cálculo incremental de deslocamentos, determinando o próximo vetor de solução incremental:

$$\{\Delta u\}_{i+1} = [K(U_{i+1})]^{-1} \{\Delta P\} \quad (49)$$

$$\{\Delta R\}_{i+1} = \{\Delta P\} - [K(U_{i+1})]\{\Delta u\}_{i+1} \quad (50)$$

onde $\{\Delta R\}_{i+1}$ é o vetor de cargas fora do equilíbrio atualizado, sendo este processo repetido sucessivamente até que a convergência seja alcançada (MADENCI e GUVEN, 2015).

Figura 4. 5 - Método de Newton-Raphson



Fonte: Adaptado do site ANSYS (2015)

Em outras palavras, Rosas (2006) explica que para as aproximações por tal método, a carga é subdividida em incrementos que podem ser aplicados sobre vários passos de carga. Antes de cada solução, o método de Newton-Raphson compara a diferença do vetor de carga, que é a diferença entre as forças internas e a carga aplicada. O programa realiza uma solução linear, usando a diferença de cargas, e comprova a sua convergência. Se a convergência não for alcançada, o vetor de diferença de carga é novamente avaliado, a matriz de rigidez é atualizada, e a nova solução é obtida, este processo de iterações ocorre até se obter a convergência.

5 VERIFICAÇÃO E VALIDAÇÃO DOS MODELOS

Para a solução de problemas de engenharia pode-se empregar métodos numéricos, analíticos e experimentais. Resultados obtidos através de simulações numéricas devem ser analisados de acordo com o problema físico em questão. Tais simulações podem apresentar resultados plausíveis, mesmo contendo alguns erros de programação ou até nas condições de contorno do problema, porém fisicamente incompatíveis com a realidade (FONTOURA, 2000).

Uma das etapas mais árduas da modelagem computacional consiste na verificação e validação do modelo computacional, pois estas tem a finalidade de garantir que os resultados obtidos numericamente retratem fielmente os sistemas investigados. Segundo Oberkampf e Barone (2006), a verificação aborda a precisão da solução numérica produzida pelo código do computador em comparação com a solução exata conceitual do modelo. Enquanto que a validação aborda a precisão do modelo conceitual em relação ao “mundo real”, ou seja, medidas experimentais.

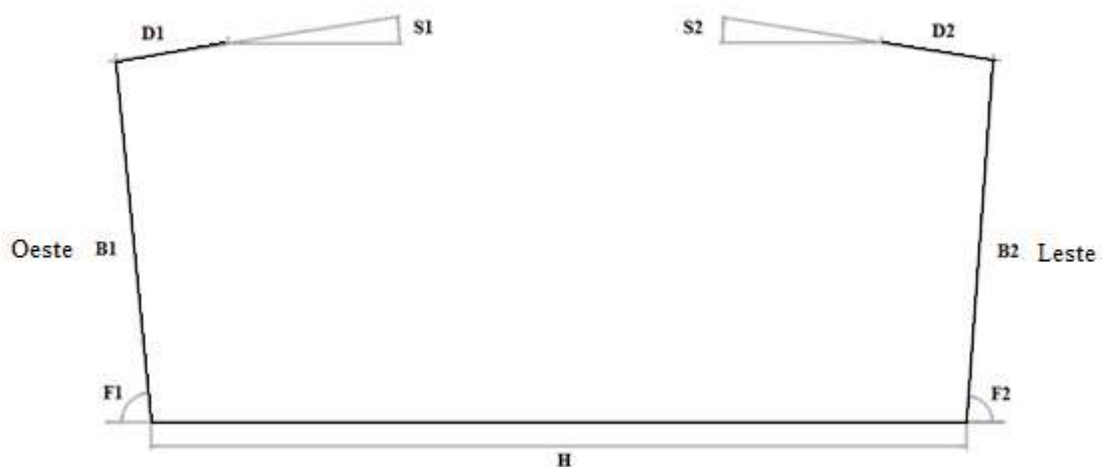
5.1. Verificação do modelo de flambagem elástica

Com o intuito de verificar o modelo computacional utilizado no presente trabalho, é apresentada a metodologia empregada para obtenção da carga crítica de flambagem da análise linear de perfis de aço do tipo U enrijecidos através do software ANSYS® 12.1. Os resultados obtidos foram comparados com os resultados numéricos de Moen e Schafer (2008).

Os perfis de aço utilizados pelos autores foram do tipo U enrijecidos, 362S162-33 e 600S162-33, os quais se diferenciam pela largura da alma (H) de sua seção transversal. O perfil 362S162-33 possui medida nominal de 92 mm enquanto o 600S162-33 possui a largura da alma de 152 mm. Foram feitas simulações numéricas com três colunas similares, usando as nomenclaturas 362 e 600 e ainda as letras H indicando a presença de perfurações e NH referentes à ausência de perfurações.

A seção transversal das colunas estudadas está representada na Fig. 5. 1, bem como a nomenclatura de seus elementos e ângulos.

Figura 5. 1 - Seção transversal da coluna do tipo U enrijecido



Fonte: produzido pelo autor

As dimensões de cada elemento estrutural especificado na Fig. 5. 1, o comprimento L , a espessura t e a tensão de escoamento, σ_y , estão listadas na Tabela 5. 1.

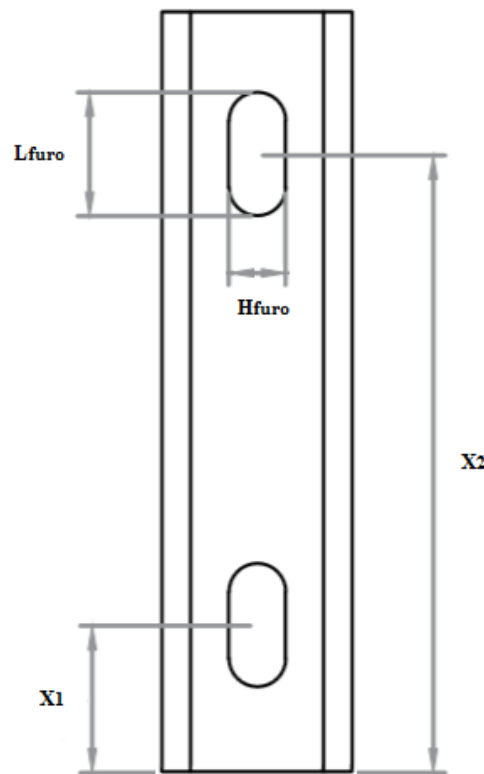
Tabela 5. 1 - Dimensões de cada elemento da seção transversal e tensão de escoamento

Tipo de coluna	362NH	600NH	600H
σ_y (MPa)	412	415	423
t (mm)	1,00	1,10	1,09
L (mm)	1225	1221	1221
H (mm)	92	152,9	152,9
B_1 (mm)	41	41,2	40,6
B_2 (mm)	41	40,9	41,3
D_1 (mm)	10,5	12,3	12,2
D_2 (mm)	10,5	9,5	9,9
S_1 (rad)	0,1361	0,0034	0,0436
S_2 (rad)	0,1763	0,0244	0,0366
F_1 (rad)	1,4835	1,5812	1,5707
F_2 (rad)	1,4940	1,6196	1,6196

Fonte: produzido pelo autor

As colunas perfuradas apresentam duas perfurações com formato oblongo fora do centro da alma da coluna, com relação ao comprimento da mesma. As notações utilizadas para descrever as perfurações estão referidas na Fig. 5. 2.

Figura 5. 2 - Geometria, nomenclatura e localização das perfurações



Fonte: produzido pelo autor

As dimensões e a localização dos furos estão listadas na Tabela 5. 2.

Tabela 5. 2 - Dimensões e localização das perfurações

Tipo de coluna	X1 (mm)	L_{furo} (mm)	H_{furo} (mm)	X2 (mm)	L_{furo} (mm)	H_{furo} (mm)
600H	$(L-610)/2$	101,7	37,9	$(L+610)/2$	101,5	38,0

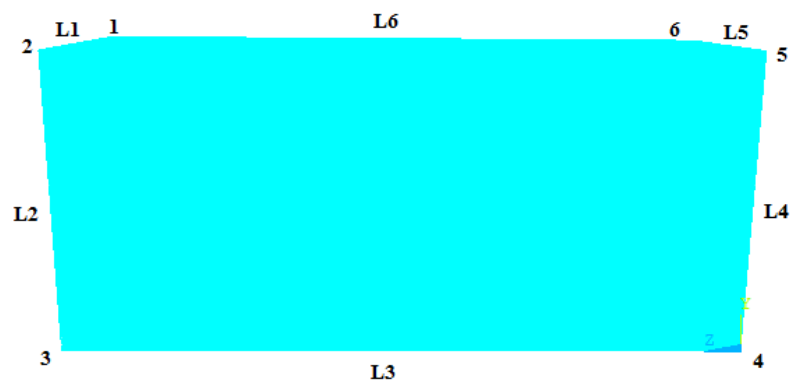
Fonte: produzido pelo autor

Primeiramente, para a simulação numérica das colunas, o material é considerado elástico assumindo como propriedades do material o módulo de elasticidade $E = 203,4 \text{ GPa}$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. O tipo de elemento finito utilizado no ANSYS® foi o SHELL 93, conforme já foi dito.

Posteriormente, ainda na etapa de pré-processamento, é necessária a criação de *keypoints* para definir a geometria da seção transversal. Tais *keypoints* são unidos por linhas

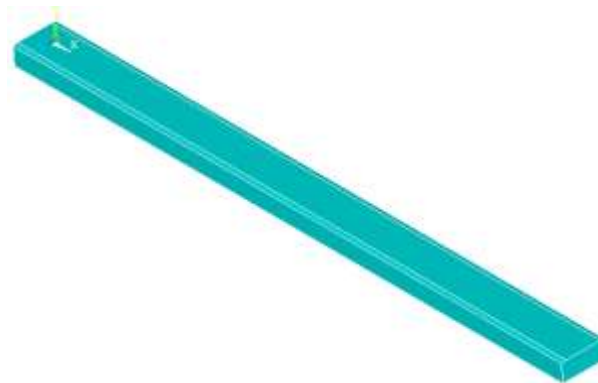
que formarão a área da seção. Com o comando *Extrude* é possível copiar esta área ao longo do comprimento L da coluna. No entanto, este comando gera um bloco maciço o qual precisa ser retirado seu volume, além de áreas adicionais do topo e das extremidades da coluna. As etapas podem ser acompanhadas nas Figs. 5. 3, 5. 4 e 5. 5.

Figura 5. 3 - Criação de área para definir a geometria da seção transversal.



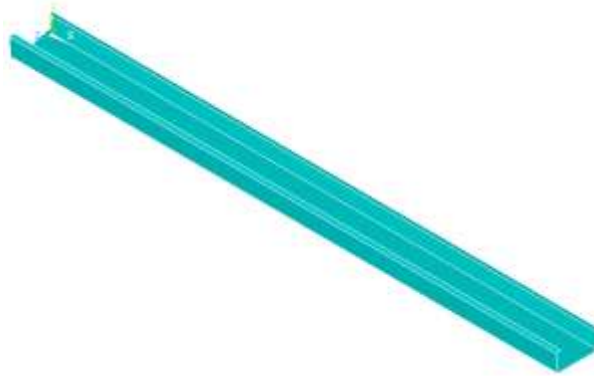
Fonte: produzido pelo autor

Figura 5. 4 - Geração de um volume a partir do comando *Extrude*



Fonte: produzido pelo autor

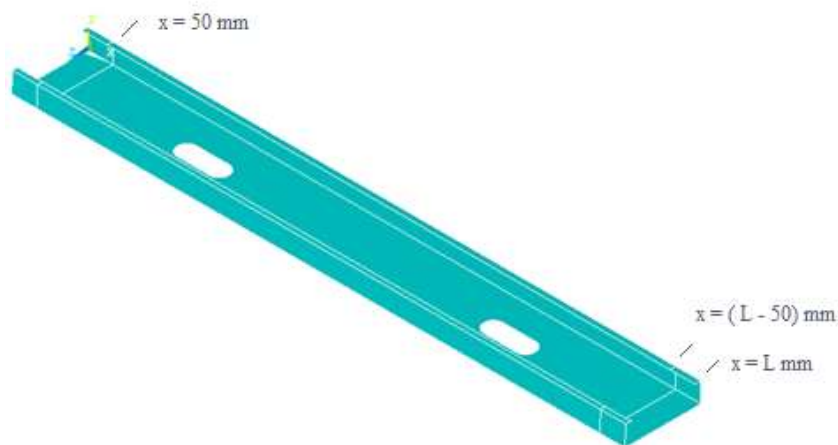
Figura 5. 5 - Coluna finalizada, após serem removidos o volume e as áreas adicionais



Fonte: produzido pelo autor

Para evitar o esmagamento das bordas da coluna perfurada (600H), houve a necessidade de criar três volumes com o uso do comando *Extrude*. A coluna ficou dividida em três faixas ao longo de seu comprimento, localizados em $x = 50 \text{ mm}$, $x = (L - 50) \text{ mm}$ e $x = L \text{ mm}$, de acordo com a Fig. 5. 6.

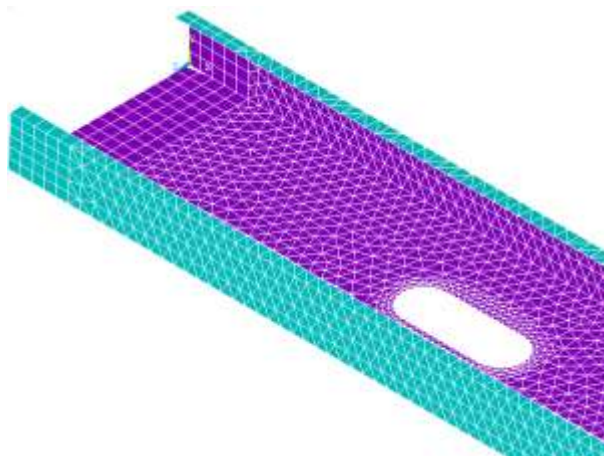
Figura 5. 6 - Coluna perfurada criada a partir de três faixas



Fonte: produzido pelo autor

As colunas sem perfuração foram discretizadas adotando elementos quadrangulares enquanto que para as colunas com perfurações, os elementos da faixa central da coluna foram triangulares, conforme mostra a Fig. 5. 7. Foi feito um refinamento da malha no entorno do corte, para evitar o acúmulo de tensões. Tanto para as colunas sem perfuração 362NH e 600NH quanto para a coluna 600H foi adotado o tamanho do elemento finito foi de 10 mm, gerando malhas de 2460, 3444 e 6762 elementos, respectivamente.

Figura 5. 7 - Malha triangular e quadrangular com refinamento no entorno da perfuração



Fonte: produzido pelo autor

Na etapa de solução são estabelecidas as condições de contorno de acordo com o tipo de vinculação à qual a coluna foi submetida. As condições de contorno foram definidas pelo tipo de vinculação e o tipo de carregamento ao qual a coluna está sendo submetida. Neste caso, os nós situados em $x=0$ do sistema de coordenadas teve dois de seus graus de liberdade impedidos, ou seja, as translações em y e z . Enquanto que em $x=L$ foram três graus de liberdade impedidos, as translações nas coordenadas x , y e z . As rotações permaneceram livres em ambas as extremidades em todos os eixos.

As colunas foram submetidas a uma carga de compressão unitária distribuídas nos nós localizados com coordenadas $x=0$, garantindo que todos os nós da face carregada da coluna translaquem juntos enquanto que os graus de liberdade rotacionais permaneçam independentes. Porém, para evitar o esmagamento das bordas da coluna 600H, foi necessário distribuir esta carga unitária em duas faixas localizadas em $x=0$ e $x=20$ mm.

Com o intuito de obter resultados para a carga crítica de flambagem são feitas duas análises: estática e de flambagem. A análise estática tem por objetivo quantificar a magnitude dos esforços internos e dos deslocamentos de elementos estruturais submetidos a carregamentos, enquanto a análise de flambagem determina o valor da carga crítica, bem como os modos de flambagem. As cargas críticas P_{cr} obtidas através deste modelo computacional foram comparadas com as cargas numéricas P_{crl} obtidas por Moen e Schafer (2008), conforme mostra a Tabela 5. 3. Os resultados encontrados não ultrapassam uma

diferença de 2%, verificando os modelos computacionais para as três colunas nas análises lineares.

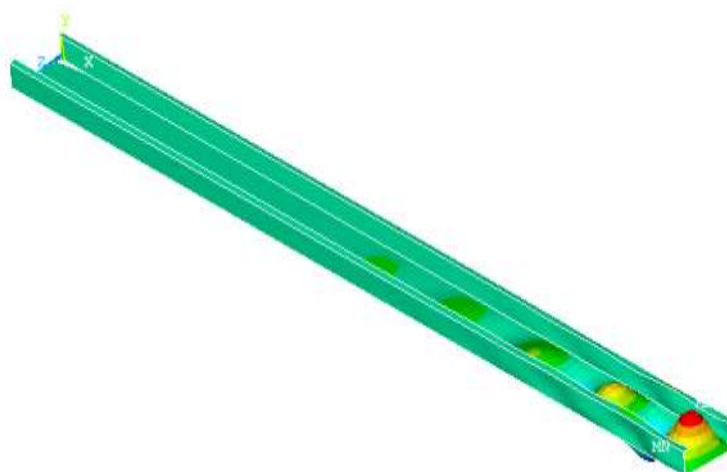
Tabela 5. 3 - Cargas críticas das colunas analisadas

Tipo de coluna	P_{cr} (kN)	P_{crl}^* (kN)	Diferença (%)
362NH	22,79	22,90	0,48
600NH	15,53	15,40	-0,87
600H	14,87	15,10	1,52

Fonte: produzido pelo autor. P_{crl}^* Moen e Schafer (2008)

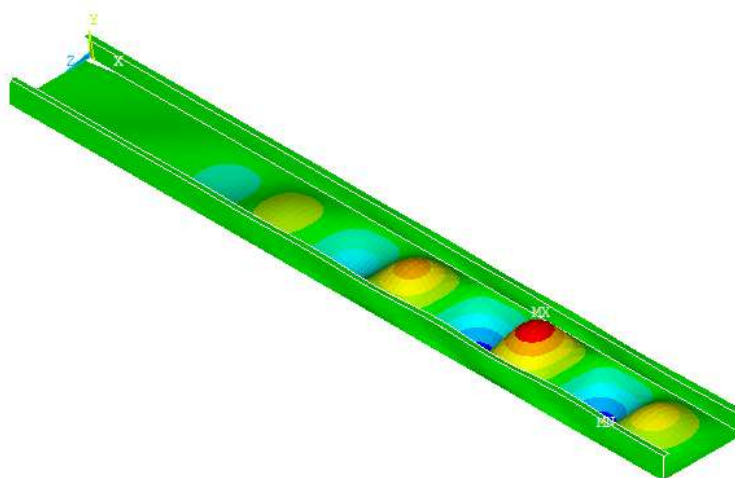
As Figs. 5. 8, 5. 9 e 5. 10 representam os deslocamentos ao longo do eixo y para a análise da flambagem linear. Tanto para as colunas sem perfuração quanto para a coluna perfurada a flambagem predominante é a flambagem local com o aparecimento de semi-ondas próximas à extremidade oposta à extremidade carregada.

Figura 5. 8 - Flambagem Local da coluna 362NH



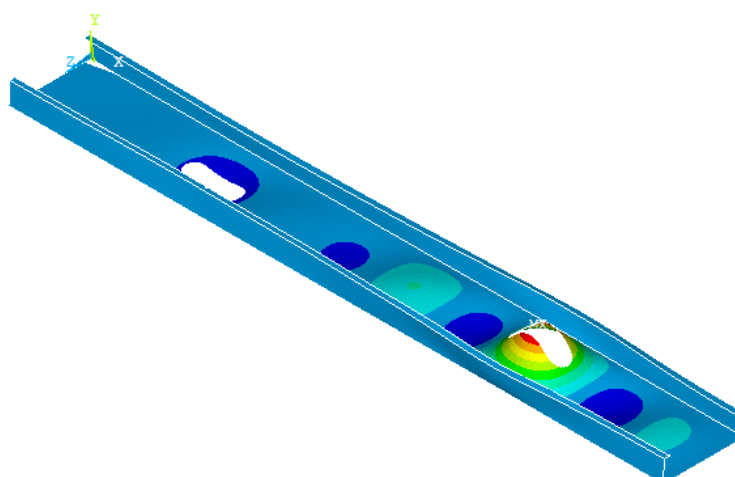
Fonte: produzido pelo autor

Figura 5. 9 - Flambagem Local da coluna 600NH



Fonte: produzido pelo autor

Figura 5. 10 - Flambagem Local da coluna 600H



Fonte: produzido pelo autor

5.2. Validação do modelo de flambagem elasto-plástica

A análise não linear das colunas de aço foi realizada com intuito de validar o modelo computacional. Os resultados das cargas últimas foram comparados com os dados experimentais encontrados no trabalho de Moen e Schafer (2008).

Após a solução para a análise de flambagem linear, é necessário definir o material como sendo não linear inelástico. Nesta etapa é assumida a tensão de escoamento, σ_y , encontradas na Tabela 2 da seção 5.1 e o módulo tangencial adotado como 10% do valor do

módulo de elasticidade, E . Adotando uma imperfeição geométrica inicial como sendo o primeiro modo de flambagem obtido na solução elástica. O valor máximo da imperfeição é escolhido como $H / 2000$ (EL-SAWY et. al, 2004), onde H é a largura da alma da coluna.

Nesta análise, admite-se uma carga de 1000 kN e as condições de contorno permanecem as mesmas da análise linear. Como o software ANSYS® utiliza o método de Newton-Raphson, é necessário que os passos de carga sejam definidos sobre um intervalo de tempo. Para este estudo de caso foi definido um passo de carga de 100, o número de subpassos também de 100 variando entre o máximo subpasso, 200, e o mínimo subpasso, 50.

Após este processo é possível obter as cargas últimas, P_u , conforme é mostrado na Tabela 5. 4.

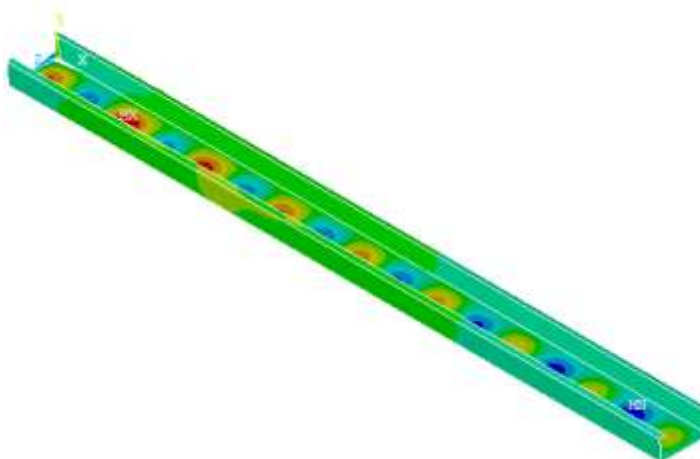
Tabela 5. 4 - Carga última das colunas analisadas

Tipo de coluna	P_u (kN)	P_{uteste}^* (kN)	Diferença (%)
362NH	40,05	40,40	0,87
600NH	49,75	49,60	-0,30
600H	45,50	49,60	8,27

Fonte: produzido pelo autor. P_{uteste}^* Moen e Schafer (2008)

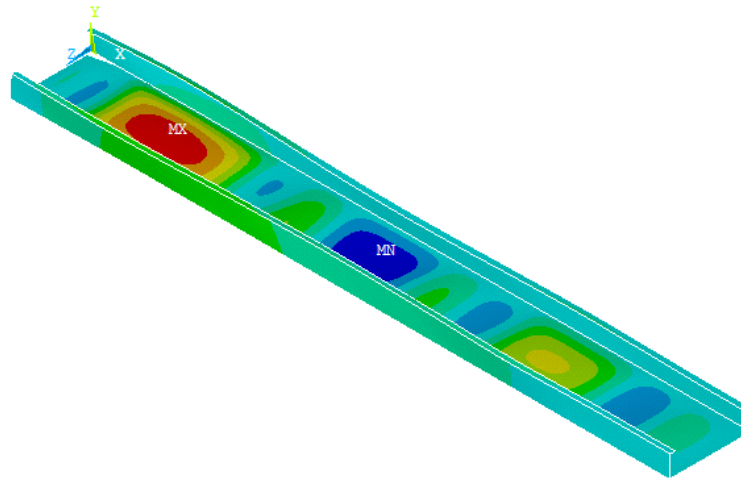
É possível observar que o modo de flambagem predominante é a flambagem local, devido ao grau esbeltez das colunas (colunas intermediárias), conforme se pode observar nas Figs. 5. 11, 5. 12 e 5. 13.

Figura 5. 11 - Flambagem não linear da coluna 362NH



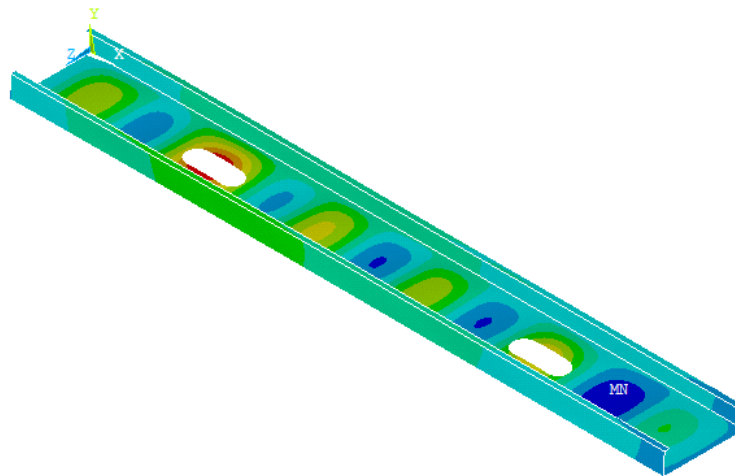
Fonte: produzido pelo autor.

Figura 5. 12 - Flambagem não linear da coluna 600NH



Fonte: produzido pelo autor.

Figura 5. 13 - Flambagem não linear da coluna 600H



Fonte: produzido pelo autor.

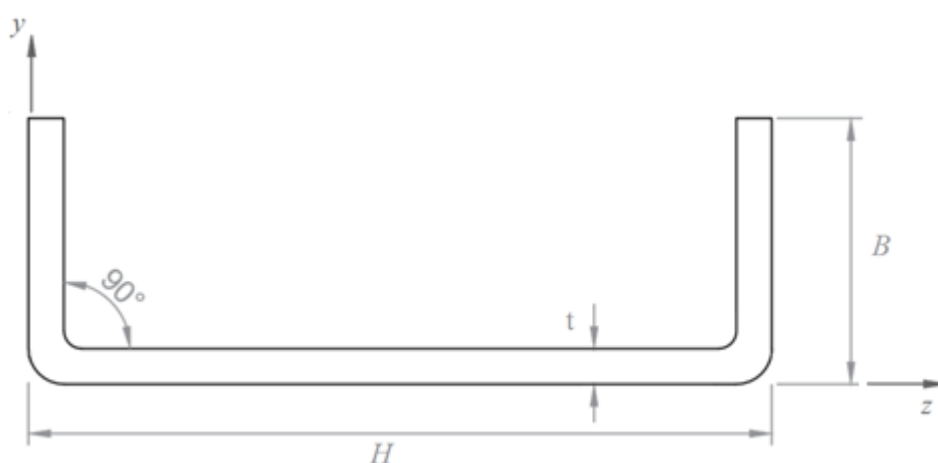
6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção será abordado o método do *Constructal Design* aliado aos modelos numéricos desenvolvidos para o estudo da influência da geometria no comportamento das colunas sob flambagem.

6.1 Descrição do problema

Em geral, para estudos que visam a otimização geométrica de estruturas a Teoria *Constructal* também pode ser aplicada. Neste trabalho, os estudos paramétricos consistem em simulações numéricas de colunas, cujas medidas foram pesquisadas através do *site* Portal Metálica (2015). Este site é de referência em estudos técnicos nas áreas de Construção Civil Industrializada, Engenharia e Arquitetura no Brasil. Tais colunas de aço apresentam a seção transversal do tipo U com cantos arredondados e chapa dobrada, sua seção transversal é apresentada na Fig. 6. 1, onde $H = 300\text{ mm}$ representa a altura da alma ou largura da seção transversal, $B = 90\text{ mm}$ a largura das abas, e $t = 8\text{ mm}$ a espessura da chapa e $r_i = t\text{ mm}$ o raio de curvatura interno.

Figura 6. 1 - Seção transversal da coluna estudada.



Fonte: produzido pelo autor

A Tabela 6. 1 mostra as propriedades do material e as características da seção transversal da coluna para este estudo de caso.

Tabela 6. 1 - Características do perfil de aço para o estudo de caso

Característica	Perfil
E (GPa)	200
ν	0,3
A_t (mm ²)	3589
I_{xx} (mm ⁴)	$4334,6 \times 10^4$
I_{yy} (mm ⁴)	$243,15 \times 10^4$

Na Tabela 6. 1, A_t a área total da seção transversal do perfil U, I_{xx} e I_{yy} são os momentos de inércia de área, nas direções x e y , respectivamente.

Primeiramente, foi realizado um estudo de caso para a coluna sem perfuração para que os resultados das cargas crítica e última fossem comparados com os resultados analíticos. Na etapa de pré-processamento é definido o tipo de elemento, SHELL 93, e toda a geometria da coluna conforme descrito na validação do modelo computacional. A geometria é feita a partir da criação de *keypoints* dispostos na seção transversal conforme a Fig. 6. 2, cujas medidas nas coordenadas x , y e z estão apresentadas na Tabela 6. 2.

Figura 6. 2 - Seção transversal com a distribuição de *Keypoints*



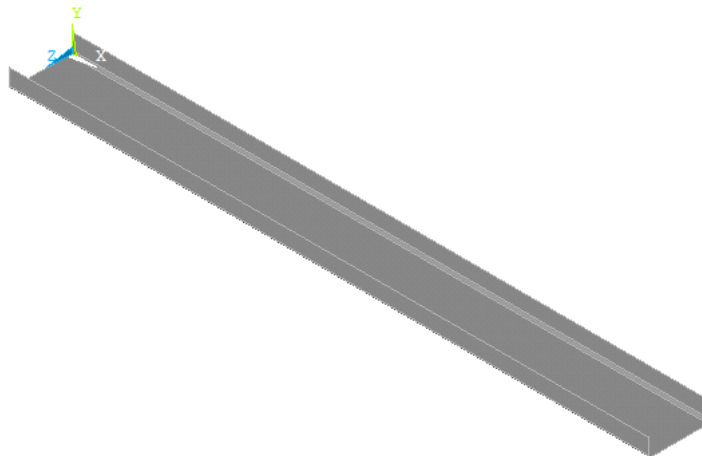
Fonte: produzido pelo autor.

Tabela 6. 2 - Coordenadas dos *Keypoints* da seção transversal da coluna tipo U

<i>Keypoint</i>	<i>x</i> (mm)	<i>y</i> (mm)	<i>z</i> (mm)
1	0	41	292
2	0	12	292
3	0	0	280
4	0	0	12
5	0	12	0
6	0	41	0
7	0	12	280
8	0	12	12

Posterior a este processo, foram criadas linhas e a área da seção transversal. Com o comando *Extrude* a área da seção transversal coluna foi copiada ao longo do comprimento $L = 3000$ mm, formando um bloco maciço cujo procedimento de exclusão do volume e das áreas adicionais foi o mesmo realizado na verificação do modelo. A Fig. 6.3 mostra a coluna após a realização destes procedimentos.

Figura 6. 3 - Geometria da coluna no ANSYS

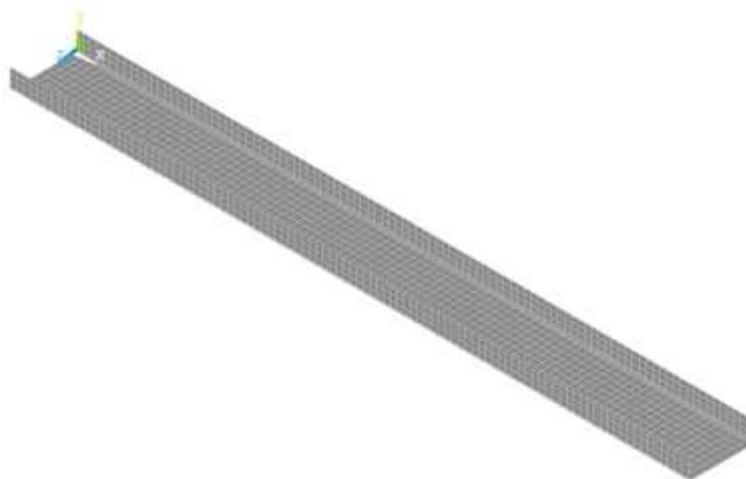


Fonte: produzido pelo autor

Ainda na etapa de pré-processamento, a geometria da coluna foi discretizada através do comando *Mesh tool*, gerando uma malha com tamanho de elementos quadrangulares de 10

mm para as áreas dos cantos e 30 mm para as áreas da alma e das abas da coluna, conforme Fig. 6. 4. A malha foi gerada com 1900 elementos finitos.

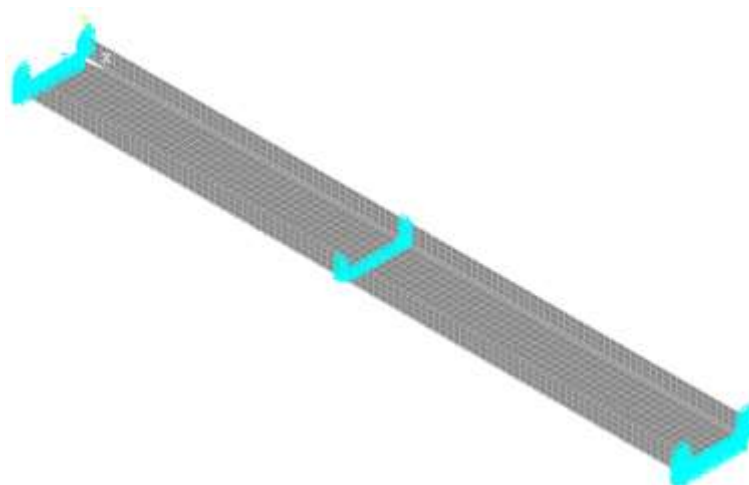
Figura 6. 4 - Geometria da coluna discretizada



Fonte: produzido pelo autor

Já na etapa de processamento, como a coluna foi considerada bi-apoiada, as condições de contorno aplicadas nos nós situados em ambas às extremidades ($x = 0$ e $x = L$) impõe que as translações nas direções y e z sejam nulas. Também foi considerado que na posição $x = l/2$ a translação fosse nula na direção x , a fim de impedir o movimento de corpo rígido, conforme mostra a Fig. 6. 5. As rotações permaneceram livres em todos os eixos.

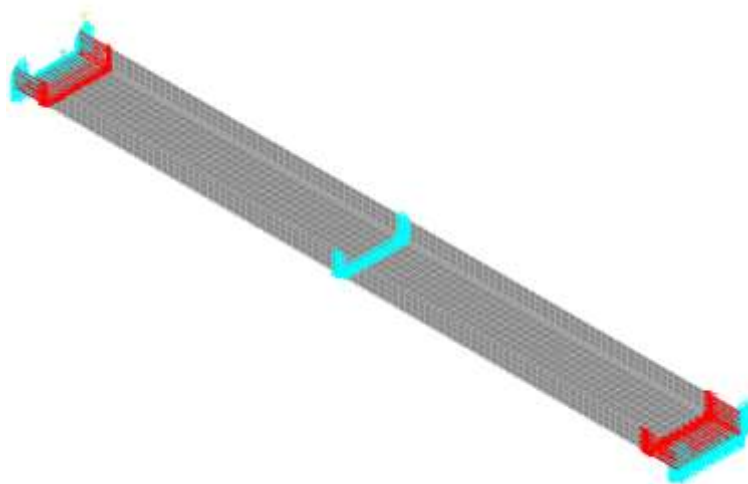
Figura 6. 5 - Coluna discretizada com as condições de contorno



Fonte: produzido pelo autor

Em ambas as extremidades foram aplicadas cargas compressivas unitárias (1 N) para a solução numérica por autovalores, de acordo com Fig. 6. 6. Logo após, a etapa de solução resolve o sistema de equações a partir dos dados introduzidos anteriormente.

Figura 6. 6 - Coluna discretizada com as condições de contorno e carregamentos



Fonte: produzido pelo autor

Nesta primeira etapa de solução, para a análise linear são realizadas a solução estática e a solução de flambagem e apresentado o resultado para a carga crítica, conforme anteriormente explicado. O resultado numérico obtido para a carga crítica foi $P_{cr} = 527,023$ kN e comparado com o resultado analítico para uma coluna birrotulada, cuja equação se encontra na Tabela 1 da seção 3.1.6, foi $P_{Anal.} = 533,287$ kN, apresentando uma diferença de 1,17%.

Para a análise não linear, é necessário retornar à solução estática e especificar os passos de carga. Segundo Madenci e Guven (2015), na solução linear do ANSYS®, há três níveis distintos: passos de carga, subpassos e iterações de equilíbrio. Os passos de carga são definidos pelo usuário, podendo ser diferentes se o carregamento na estrutura mudar abruptamente. A solução dentro de cada passo de carga é obtida aplicando cargas incrementais em subpassos. Dentro de cada subpasso, várias iterações de equilíbrio são realizadas até a convergência ser atingida, após o ANSYS® realiza o processo para o próximo subpasso. Como o número de subpassos usados aumenta, a exatidão da solução melhora. Contudo, este processo exige um maior tempo computacional. Neste trabalho, foi utilizado

um passo de carga de 1000, o número de subpassos também 1000 variando entre o máximo subpasso 2000 e o mínimo subpasso 500.

O material é considerado não linear inelástico, com tensão de escoamento $\sigma_y = 340$ MPa e o módulo tangencial assumido como 10% do módulo de elasticidade, E . Foi adotada uma imperfeição geométrica inicial de $H/2000$ (EL-SAWY et. al, 2004), onde H é a largura da alma. Esta imperfeição é o primeiro modo de flambagem obtido na solução elástica.

As condições de contorno continuam as mesmas adotadas para análise linear, no entanto as cargas foram aumentadas para 1000 kN. O resultado numérico obtido para a carga última foi $P_u = 465,500$ kN e comparada com o valor obtido pelas equações do MRD, $P_{MRD} = 462,112$ kN apresentou uma diferença de -0,73%.

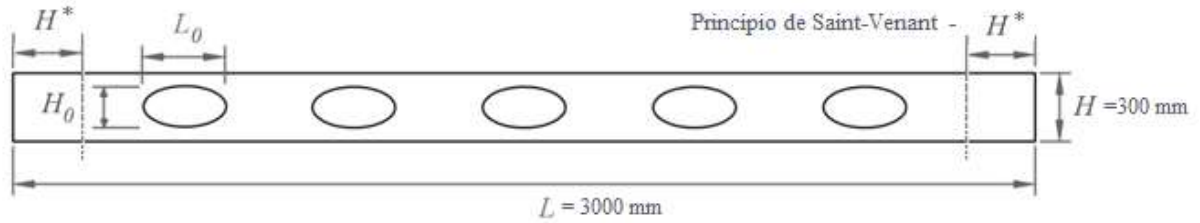
6.2 Aplicação do *Constructal Design*

A Teoria *Constructal*, como mencionada na seção 3.2 do capítulo 3 desta dissertação, deduz de forma determinística uma configuração ótima para o escoamento de sistemas de fluxo de uma área para um ponto, ou de um ponto para uma área, baseado em processos da natureza com a finalidade de persistirem no tempo. Tal teoria governa o fenômeno do design, dando soluções geométricas fundamentadas no princípio da ótima distribuição das imperfeições (BEJAN, 2000).

As configurações da natureza não são resultado do acaso, mas sim expressões de leis físicas, previsíveis, para que os sistemas de fluxos possam persistir no tempo, adquirindo geometrias que permitem facilitar o acesso das correntes que fluem através dele (BEJAN e ZANE, 2012).

A aplicação do método de *Constructal Design* exige a aplicação de um ou mais graus de liberdade e de restrições para alcançar a função objetivo. Para isto, foi considerada uma coluna cujas características foram descritas na seção anterior, com a presença de cinco perfurações elípticas, mostradas na Fig. 6. 7, com o grau de liberdade H_0 / L_0 assumindo os valores 0,50; 0,75; 1,00; 1,25 e 1,50, previamente definidos. Neste estudo, H_0 e L_0 representam as medidas da perfuração nos eixos z e x , respectivamente.

Figura 6. 7 - Alma da coluna com cinco perfurações elípticas e a nomenclatura de suas dimensões



Fonte: produzido pelo autor

As equações utilizadas para determinar os valores de H_0 e L_0 foram desenvolvidas a partir da área da perfuração elíptica, A_0 , da seguinte forma:

$$A_0 = \pi \frac{H_0}{2} \frac{L_0}{2} \quad (51)$$

definindo,

$$x = \frac{H_0}{L_0} \rightarrow H_0 = xL_0 \quad (52)$$

Substituindo a Eq. (52) na Eq. (51) temos o valor de L_0 :

$$L_0 = \sqrt{\frac{4A_0}{\pi x}} \quad (53)$$

A restrição denominada de fração volume do furo, ϕ , interfere diretamente na variação das dimensões do furo, pois é dada pela razão entre o volume do furo V_0 e o volume total da coluna V . A análise considera três diferentes valores de fração de volume ϕ para as cinco perfurações elípticas, de 0,05; 0,10 e 0,15. O ϕ é determinado pela seguinte equação:

$$\phi = \frac{V_0}{V} = \frac{N(\pi H_0 L_0 t) / 4}{A_t L} = \frac{N \pi H_0 L_0 t}{4 A_t L} \quad (54)$$

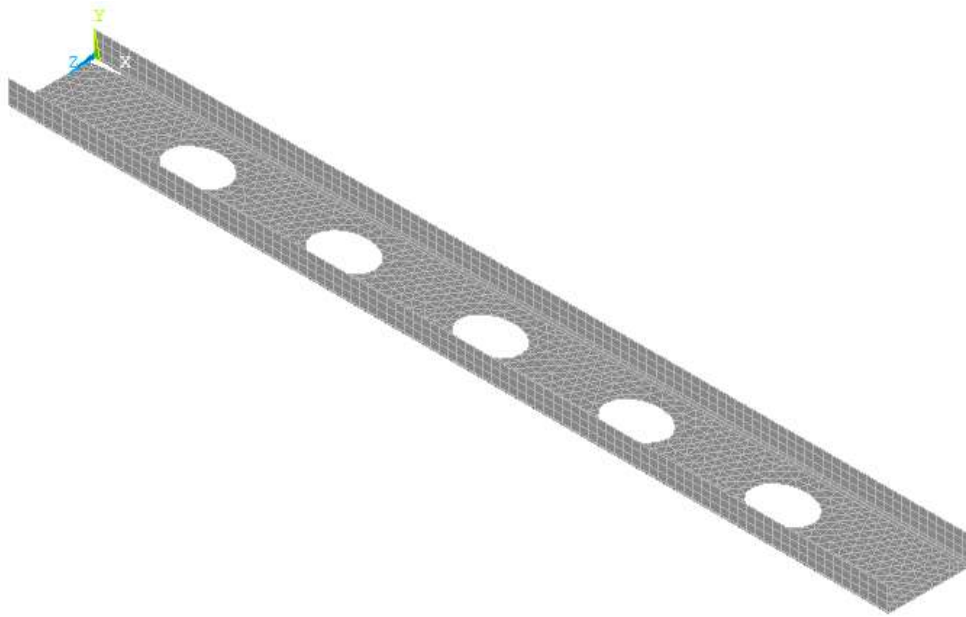
onde π é uma constante matemática; H_0 e L_0 são características dimensionais do furo nas direções z e x , respectivamente; A_t , L , t e N são a área total da seção transversal, o comprimento e a espessura da coluna, respectivamente e N o número de perfurações.

É importante destacar que foi respeitado o limite de $H - H_0 = 60$ mm, ou seja, um limite de 30 mm entre a perfuração e o lado da coluna. Além disto, para a distribuição das perfurações ao longo da alma, o centro destas foi posicionado a cada 500 mm. Pelo princípio de Saint-Venant, segundo Hibbeler (2010), as tensões e deformações que ocorrem nas regiões de aplicação de cargas ou de condições de apoios das estruturas, tendem a ajustar-se a uma distância suficientemente grande dessas regiões. Esta distância fica estabelecida como sendo pelo menos igual a maior dimensão da seção transversal. Em vista disto, a primeira e a última perfuração ficaram a uma distância maior que H (largura da alma da coluna) em relação às extremidades da alma da coluna.

Para a simulação numérica das colunas com perfuração foi necessário criar *keypoints* com as coordenadas do furo na alma da coluna. Para que as perfurações ficassem equidistantes e iguais foram usados os comandos *copy*, fazendo quatro cópias das áreas da perfuração, o comando *subtract* que permite subtrair as áreas das perfurações da área da alma da coluna e ainda o comando *scale* que permite variar as medidas de H_0 e L_0 referentes aos eixos das perfurações elípticas respeitando sua área.

As colunas foram discretizadas usando elementos triangulares de 30 mm de tamanho na alma da coluna e elementos retangulares de 10 mm nos cantos da coluna e 30 mm nas abas, conforme a Fig. 6. 8. O número de elementos gerados variou de 2780 elementos para ϕ de 5% para o $H_0 / L_0 = 0,50$ a 2487 elementos para ϕ de 15% para o $H_0 / L_0 = 1,25$.

Figura 6. 8 - Discretização de colunas com perfurações com elementos triangulares na alma e elementos quadrangulares nas abas



Fonte: produzido pelo autor

No Apêndice 01 é disponibilizado um código, para análise não linear, gerado pelo software ANSYS® de uma coluna com perfuração elíptica considerando ϕ de 10% e $H_0 / L_0 = 0,50$.

A função objetivo consiste em maximizar tanto a carga crítica quanto a carga última da coluna, de maneira que se possa definir a geometria ótima do furo $(H_0 / L_0)_o$ para cada ϕ estudado. Com o intuito de normalizar os resultados obtidos para a carga crítica e carga última, essas foram definidas como:

$$PNE = \frac{P_{cr}}{P_y} \quad (55)$$

onde PNE é a carga crítica normalizada, e

$$PNU = \frac{P_u}{P_y} \quad (56)$$

onde PNU é a carga última normalizada, sendo P_y o produto da tensão de escoamento ($\sigma_y = 340$, para o aço SAE 1008/1012 adotado neste trabalho) pela área da seção transversal bruta da coluna, conforme Eq. (37).

6.3 Avaliação geométrica com *Constructal Design*

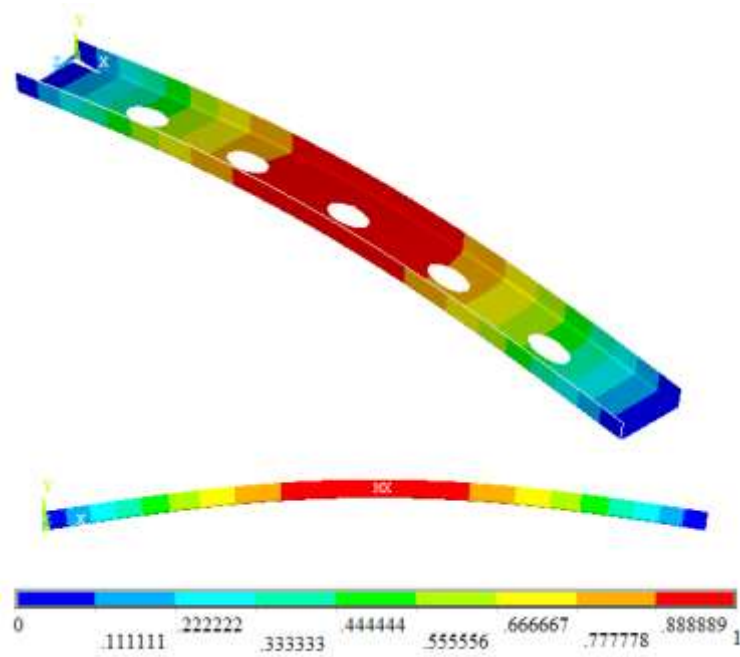
Com o propósito de avaliar os resultados obtidos a partir das simulações numéricas e tendo em vista a melhoria do comportamento mecânico das colunas de aço do tipo U, de chapa dobrada, esta seção vai ser dividida de acordo com os diferentes valores de fração volumétrica, ϕ . Como foi dito anteriormente, a geometria da coluna estudada foi sempre a mesma, porém foi feita uma variação na fração de volumétrica e, para cada ϕ , ainda foi considerado uma variação do grau de liberdade H_0 / L_0 (0,50; 0,75; 1,00; 1,25 e 1,50). Cabe destacar que para $\phi = 0,15$ o grau de liberdade $H_0 / L_0 = 1,50$ não pode ser analisado, pois o maior eixo da elipse ultrapassa o valor de H (largura da alma ou altura da seção transversal).

Nesta seção, há também a comparação entre os resultados de diferentes valores de ϕ , os resultados das cargas últimas comparadas com os resultados obtidos pelo MRD e a análise dos diagramas de carga última-deformação.

6.3.1 Fração volumétrica de 0,05

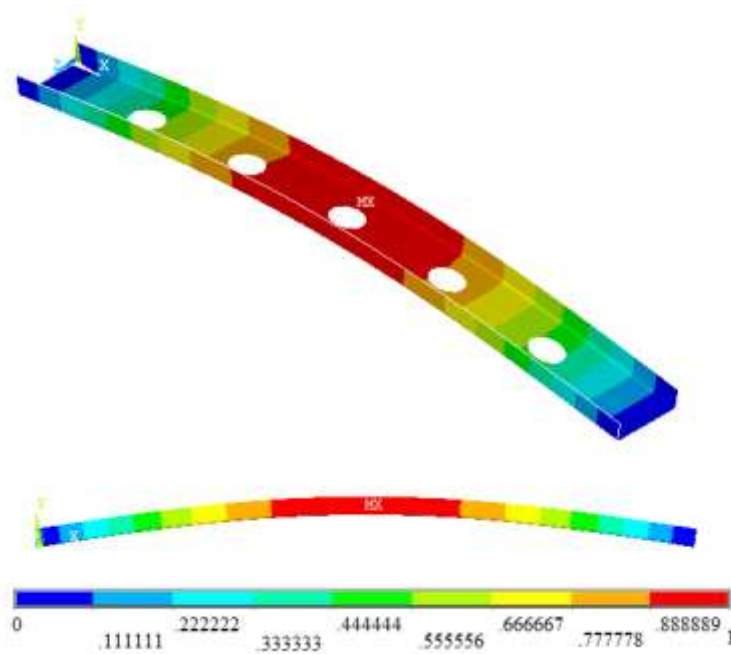
A coluna do tipo U de chapa dobrada cujas dimensões já foram mencionadas na seção 6.1, para $\phi = 0,05$ sofreu uma variação para cinco valores de H_0 / L_0 . As Figs. 6. 9, 6. 10, 6. 11, 6. 12 e 6. 13 mostram que para a análise linear o modo de flambagem predominante foi o modo de flambagem global para toda variação de H_0 / L_0 . Este modo de flambagem se justifica devido ao índice de esbeltez da coluna. Pode-se perceber que em todos estes casos o maior deslocamento aparece concentrado no centro da alma da coluna devido ao tipo de vinculação a qual esta foi submetida.

Figura 6. 9 - Coluna com cinco perfurações elípticas após a análise linear e o modo de flambagem global para $H_0 / L_0 = 0,50$ e $\phi = 0,05$



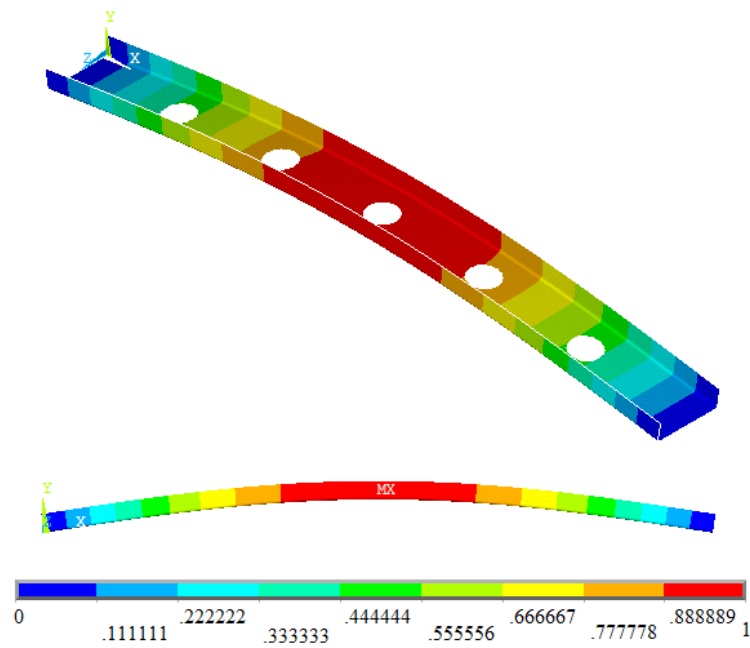
Fonte: produzido pelo autor

Figura 6. 10 - Coluna com cinco perfurações elípticas após a análise linear e o modo de flambagem global para $H_0 / L_0 = 0,75$ e $\phi = 0,05$



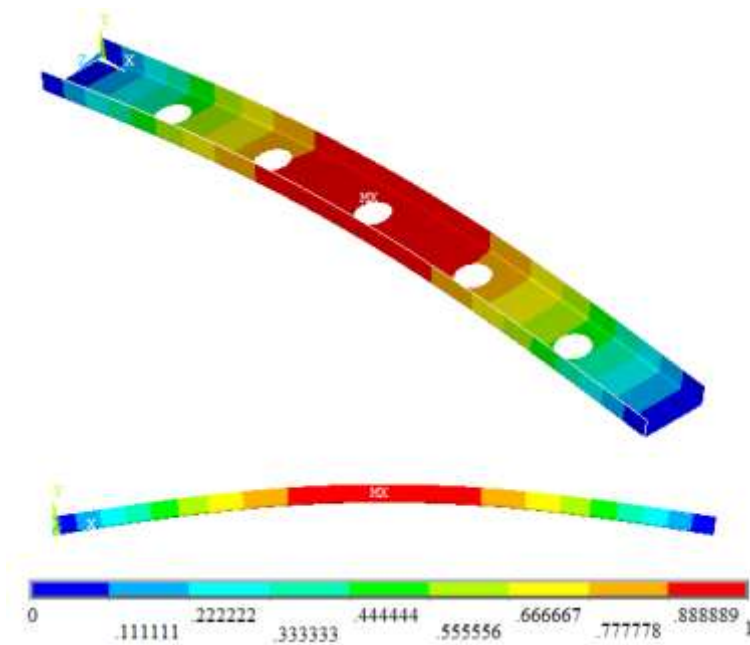
Fonte: produzido pelo autor

Figura 6. 11 - Coluna com cinco perfurações elípticas após a análise linear e o modo de flambagem global para $H_0 / L_0 = 1,00$ e $\phi = 0,05$



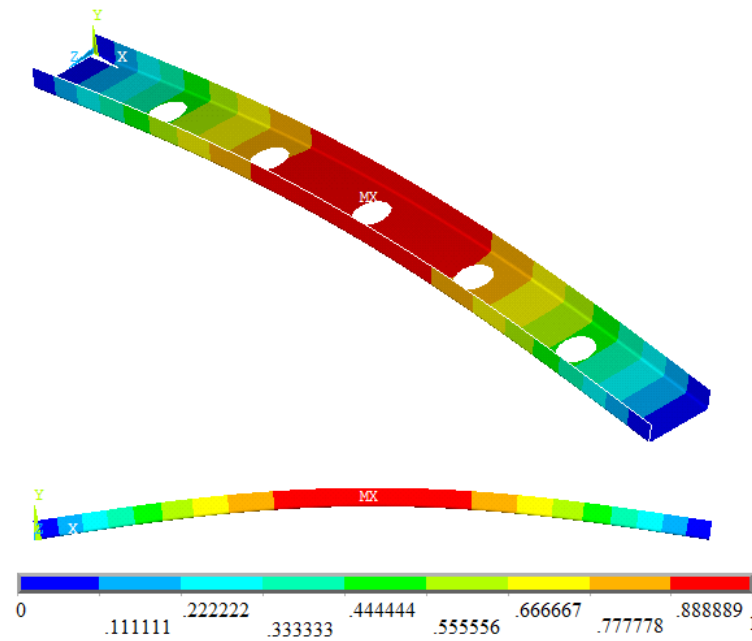
Fonte: produzido pelo autor

Figura 6. 12 - Coluna com cinco perfurações elípticas após a análise linear e o modo de flambagem global para $H_0 / L_0 = 1,25$ e $\phi = 0,05$



Fonte: produzido pelo autor

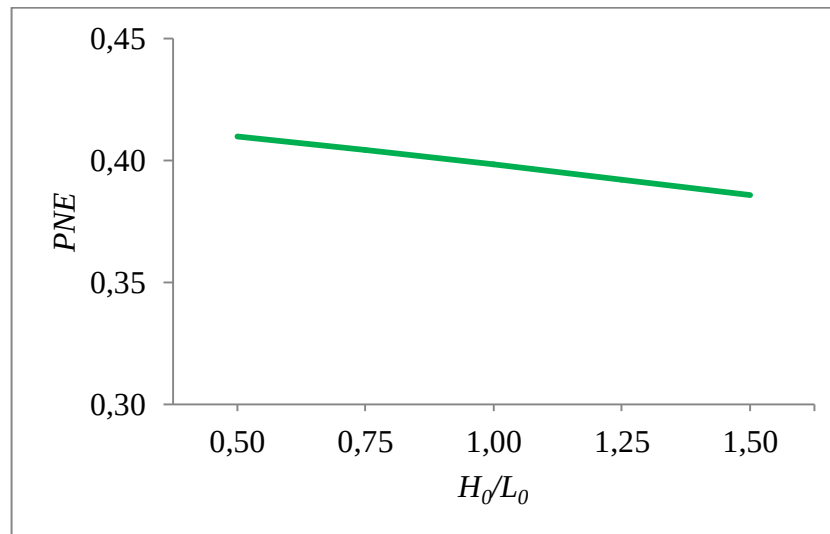
Figura 6. 13 - Coluna com cinco perfurações elípticas após a análise linear e o modo de flambagem global para $H_0 / L_0 = 1,50$ e $\phi = 0,05$



Fonte: produzido pelo autor

Os resultados das cargas críticas da análise linear para $\phi = 0,05$, referentes às colunas expostas nas Figs. 6. 9, 6. 10, 6. 11, 6. 12 e 6. 13, são apresentados no gráfico da Fig. 6. 14. Pode-se observar que quanto maior a razão de H_0 / L_0 há uma diminuição no valor da carga crítica normalizada PNE , isso se deve ao fato de que com o aumento de H_0 / L_0 os lados das perfurações ficam mais próximos das bordas da coluna, havendo um acúmulo de tensões nesta região. Quando comparados o pior e o melhor resultados há uma melhoria de 17,68% no valor da carga crítica.

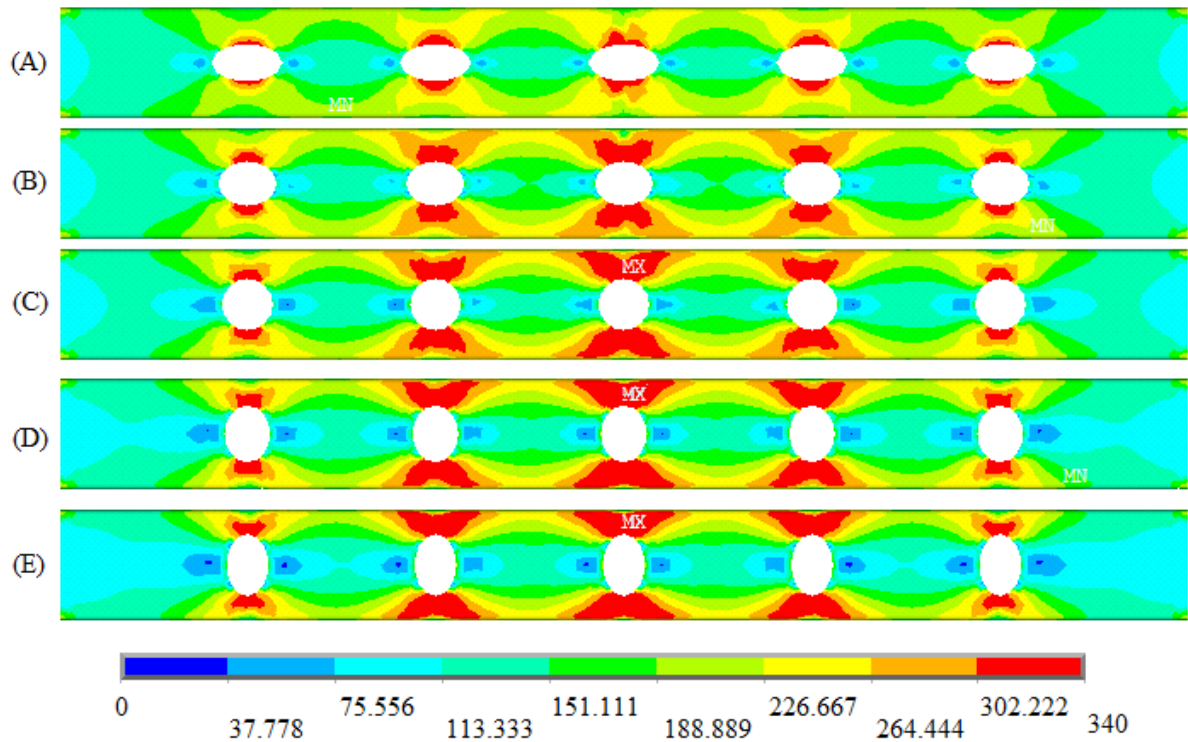
Figura 6. 14 - Carga crítica normalizada PNE para as colunas perfuradas considerando $\phi = 0,05$



Fonte: produzido pelo autor

Na análise não linear foram consideradas as tensões de von Mises. Lembrando que pela aplicação do Método de *Constructal Design*, é possível encontrar a geometria $(H_0/L_0)_o$ ótima que conduz a uma melhor distribuição de tensões na forma flambada da coluna, o que, conseqüentemente, permite a maximização da carga última. A Fig. 6. 15 apresenta a coluna após a análise não linear de acordo com a variação de H_0/L_0 . Pela imagem é possível notar que (A) representa $H_0/L_0 = 0,50$, (B) $H_0/L_0 = 0,75$, (C) $H_0/L_0 = 1,00$, (D) $H_0/L_0 = 1,25$ e (E) $H_0/L_0 = 1,50$. Pode-se perceber que houve uma variação na distribuição de tensões nas colunas (A) para (E), no entanto conforme o valor de H_0/L_0 aumenta, as maiores tensões ficaram concentradas entre os lados das perfurações e as bordas da coluna. A diferença na distribuição de tensões fica evidente entre os maiores e os menores valores de H_0/L_0 ao longo da coluna. No entanto, para o grau de liberdade $H_0/L_0 = 0,50$, coluna (A), as tensões aparecem distribuídas mais uniformemente, embora tenha um acúmulo de tensão nas bordas da perfuração, estas não se estendem até a borda da coluna. Ainda para este H_0/L_0 as tensões variam entre os valores medianos da escala, havendo também uma assimetria na distribuição de tensões no furo central.

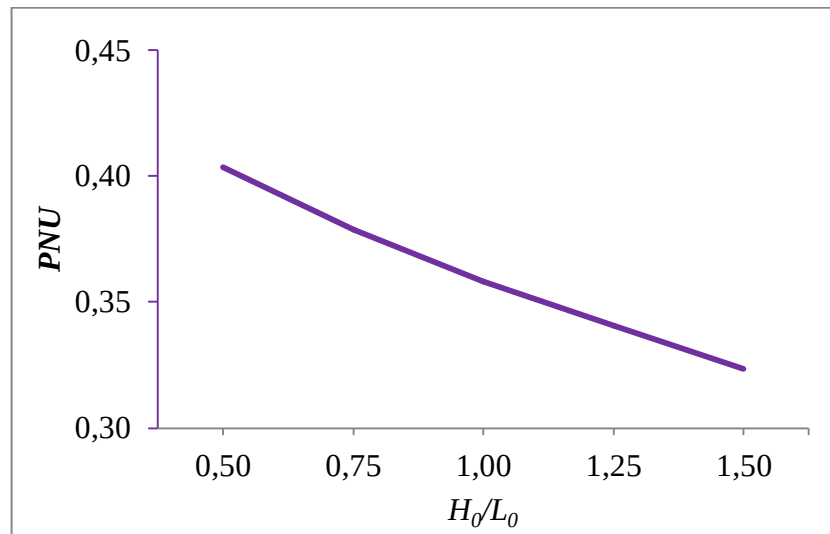
Figura 6. 15 - Distribuição de tensões de von Mises (em MPa) para as colunas com $\phi = 5\%$, onde (A) $H_0 / L_0 = 0,50$; (B) $H_0 / L_0 = 0,75$; (C) $H_0 / L_0 = 1,00$; (D) $H_0 / L_0 = 1,25$ e (E) $H_0 / L_0 = 1,50$



Fonte: produzido pelo autor

A análise não linear para as colunas com $\phi = 0,05$, seguiram o mesmo padrão da análise linear. O aumento no valor de H_0 / L_0 é inversamente proporcional ao valor da carga última normalizada, conforme pode ser visto no gráfico da Fig. 6. 16. É possível concluir com estas análises que o valor ótimo para H_0 / L_0 é $(H_0 / L_0)_o = 0,50$, pois além de apresentar a melhor distribuição de tensões dentre as colunas estudadas, é o que apresenta o maior valor de carga crítica e carga última.

Figura 6. 16 - Carga última normalizada PNU para as colunas perfuradas considerando $\phi = 0,05$

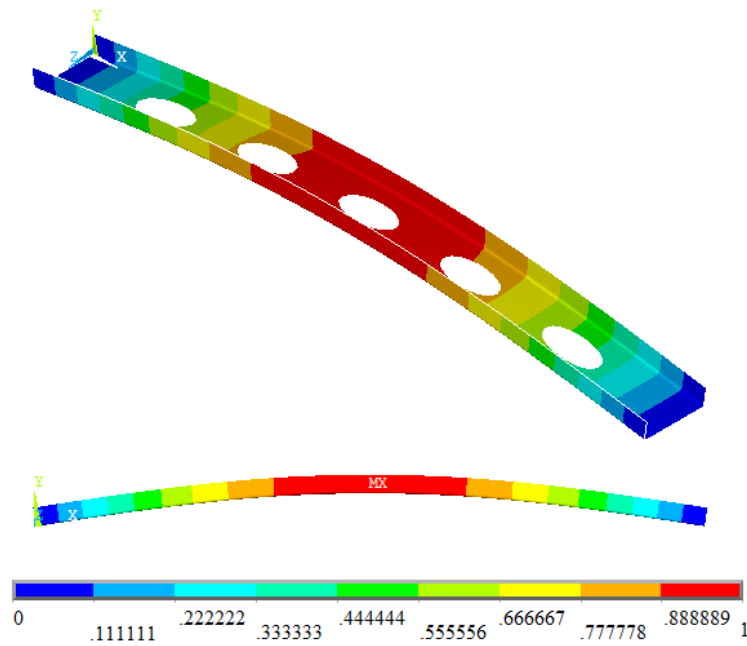


Fonte: produzido pelo autor

6.3.2 Fração volumétrica de 0,10

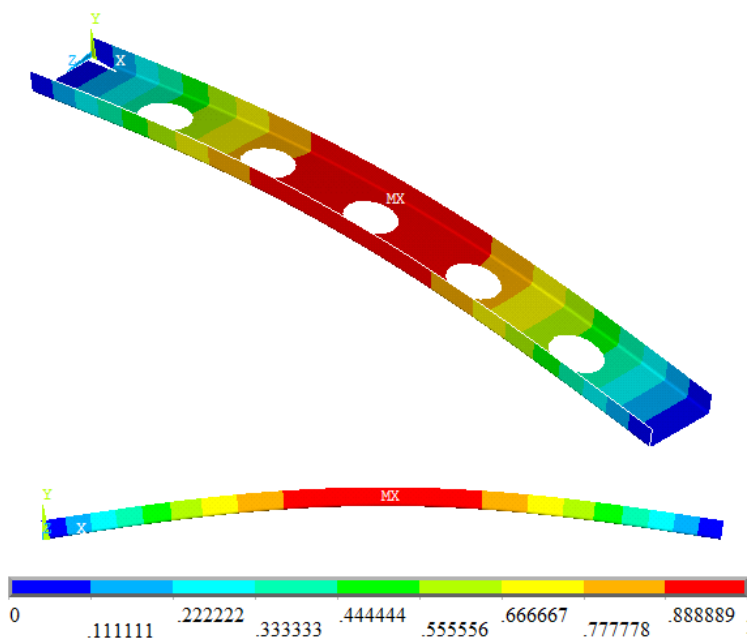
As colunas que consideraram $\phi = 0,10$ apresentam o mesmo modo de flambagem predominante das colunas que consideram $\phi = 0,05$. Para todas as variações de H_0/L_0 , o modo de flambagem global ocorreu, conforme pode ser observado nas Figs. 6. 17, 6. 18, 6. 19, 6. 20 e 6. 21. O maior deslocamento está concentrado no centro das colunas, comportamento esperado para uma coluna birrotulada sob flambagem.

Figura 6. 17 - Coluna com cinco perfurações elípticas após a análise linear e o modo de flambagem global para $H_0 / L_0 = 0,50$ e $\phi = 0,10$



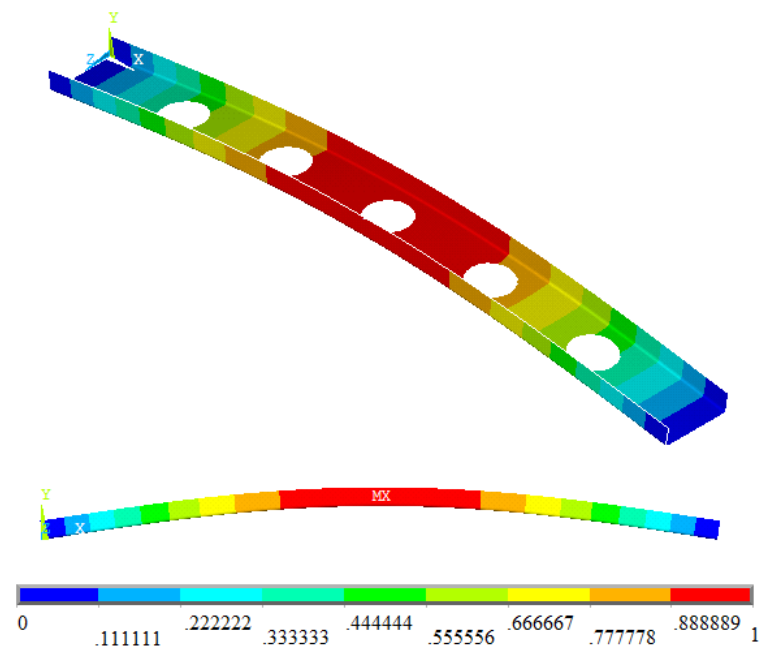
Fonte: produzido pelo autor

Figura 6. 18 - Coluna com cinco perfurações elípticas após a análise linear e o modo de flambagem global para $H_0 / L_0 = 0,75$ e $\phi = 0,10$



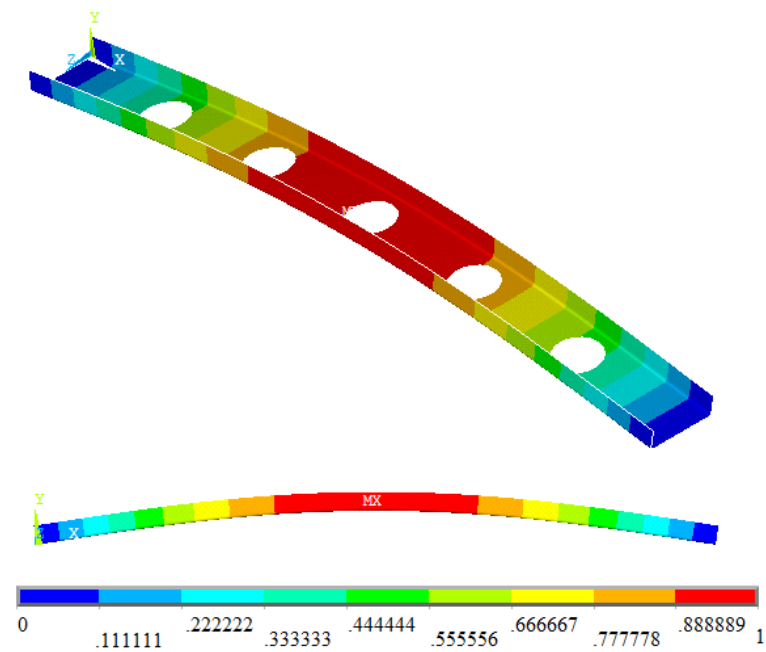
Fonte: produzido pelo autor

Figura 6. 19 - Coluna com cinco perfurações elípticas após a análise linear e o modo de flambagem global para $H_0 / L_0 = 1,00$ e $\phi = 0,10$



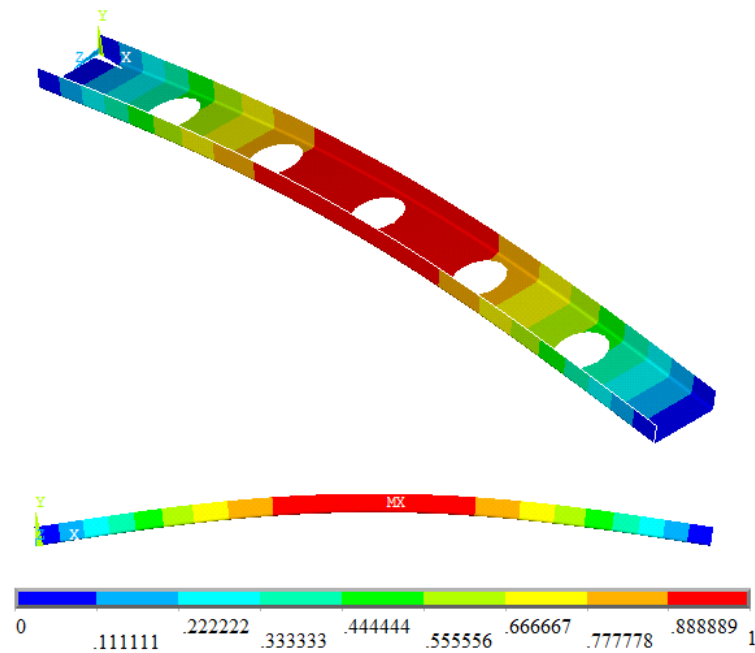
Fonte: produzido pelo autor

Figura 6. 20 - Coluna com cinco perfurações elípticas após a análise linear e o modo de flambagem global para $H_0 / L_0 = 1,25$ e $\phi = 0,10$



Fonte: produzido pelo autor

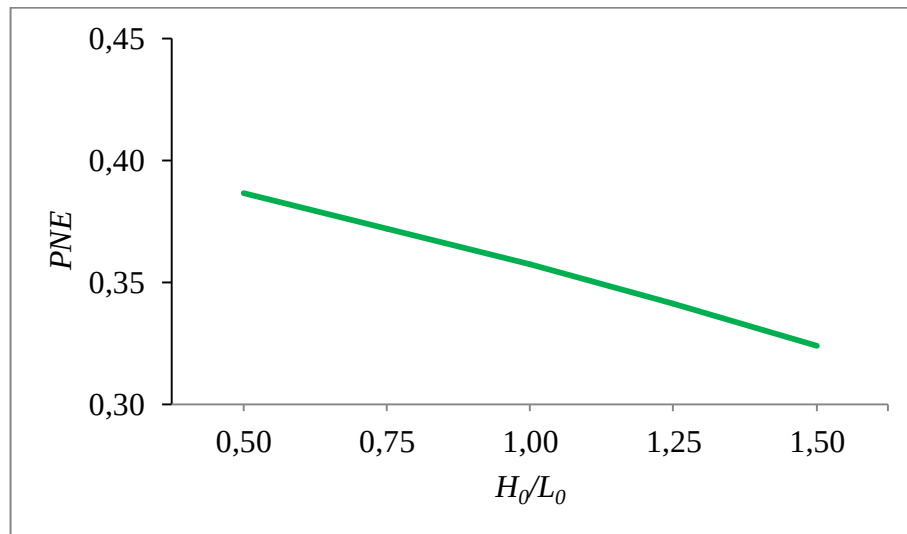
Figura 6. 21 - Coluna com cinco perfurações elípticas após a análise linear e o modo de flambagem global para $H_0 / L_0 = 1,50$ e $\phi = 0,10$



Fonte: produzido pelo autor

Os resultados das cargas críticas da análise linear para $\phi = 0,10$, referentes às colunas mostradas nas Figs. 6. 17, 6. 18, 6. 19, 6. 20 e 6. 21, aparecem no gráfico da Fig. 6. 22. Pode-se observar que, assim como para $\phi = 0,05$, quanto maior a razão de H_0 / L_0 há uma diminuição no valor da carga crítica normalizada PNE , isso se deve ao fato de que com o aumento de H_0 / L_0 os lados das perfurações ficam mais próximos das bordas da coluna, conforme comentado anteriormente, havendo um acúmulo de tensões nesta região. Ao comparar o valor da carga crítica do pior para o melhor resultado há uma melhoria de 19,37% no valor desta.

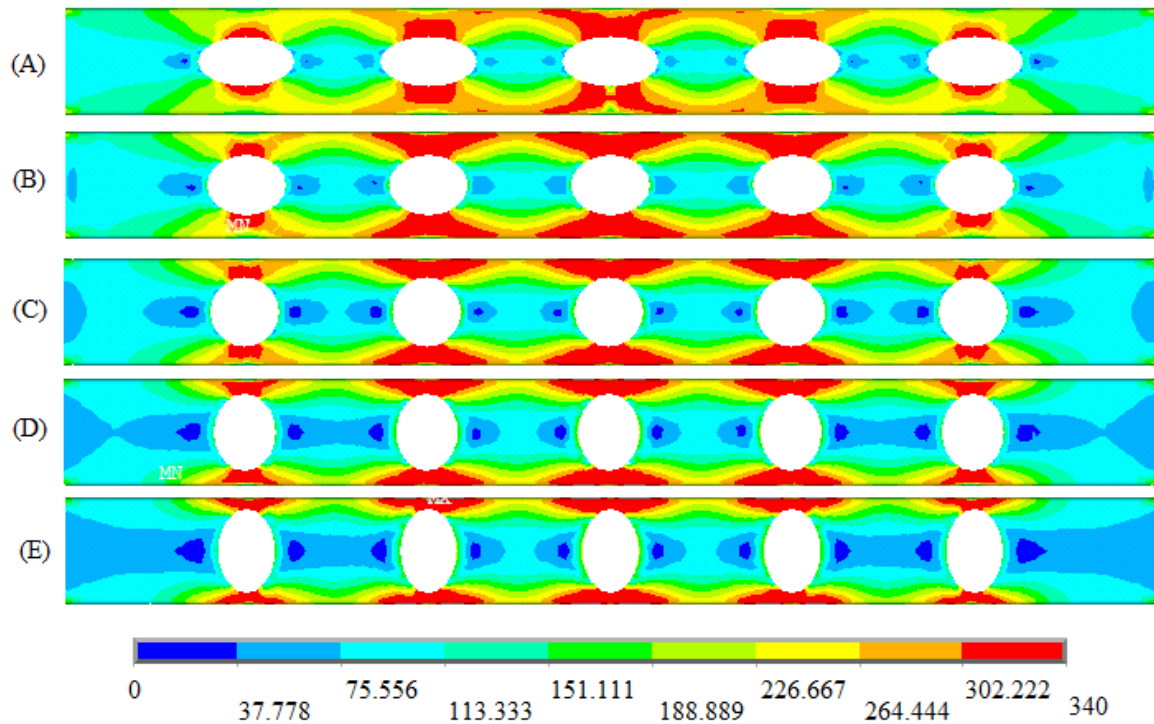
Figura 6. 22 - Carga crítica normalizada PNE para as colunas perfuradas considerando $\phi = 0,10$



Fonte: produzido pelo autor

A Fig. 6. 23 apresenta a coluna considerando $\phi = 0,10$ após a análise não linear de acordo com a variação de H_0 / L_0 , onde (A) representa $H_0 / L_0 = 0,50$, (B) $H_0 / L_0 = 0,75$, (C) $H_0 / L_0 = 1,00$, (D) $H_0 / L_0 = 1,25$ e (E) $H_0 / L_0 = 1,50$. É possível observar que com o aumento da razão H_0 / L_0 as maiores tensões aparecem concentradas entre os lados das perfurações e os lados da alma da coluna, ocasionando uma diminuição na carga última. Pelo princípio *Constructal*, é possível inferir que a configuração geométrica ótima é $(H_0 / L_0)_o = 0,50$, pois apresenta a variação entre o maior e o menor valor de tensão distribuído uniformemente ao longo da alma da coluna, porém apresenta uma distribuição de tensão assimétrica na perfuração central.

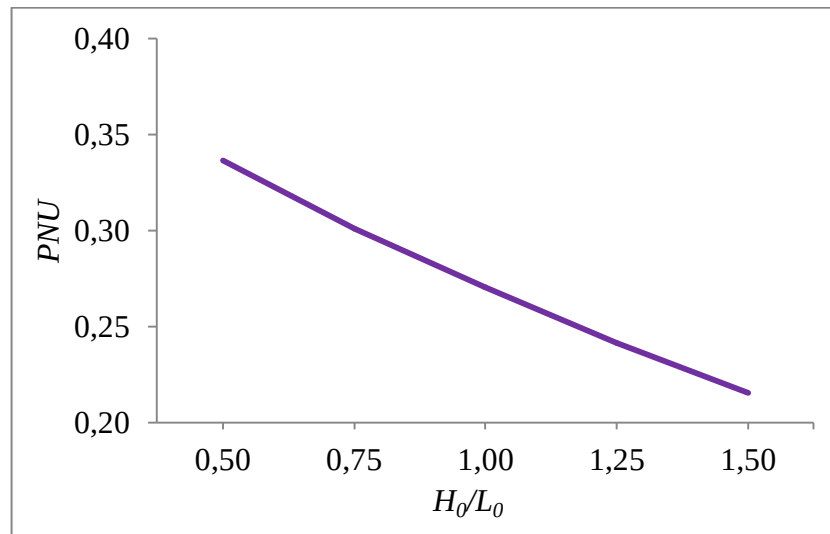
Figura 6. 23 - Distribuição de tensões de von Mises (em MPa) para as colunas com $\phi = 10\%$, onde (A) $H_0 / L_0 = 0,50$; (B) $H_0 / L_0 = 0,75$; (C) $H_0 / L_0 = 1,00$; (D) $H_0 / L_0 = 1,25$ e (E) $H_0 / L_0 = 1,50$



Fonte: produzido pelo autor

O valor das cargas últimas para a análise não linear das colunas com $\phi = 0,10$, seguiram o mesmo padrão da análise linear. Com o aumento no valor de H_0 / L_0 o valor da carga última normalizada diminui, conforme pode ser visto na Fig. 6. 24.

Figura 6. 24 - Carga última normalizada PNU para as colunas perfuradas considerando $\phi = 0,10$

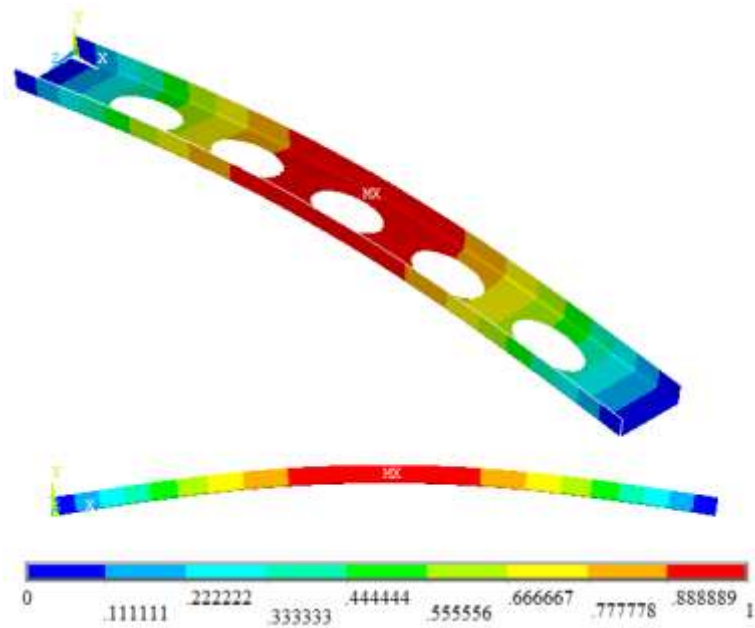


Fonte: produzido pelo autor

6.3.3 Fração volumétrica de 0,15

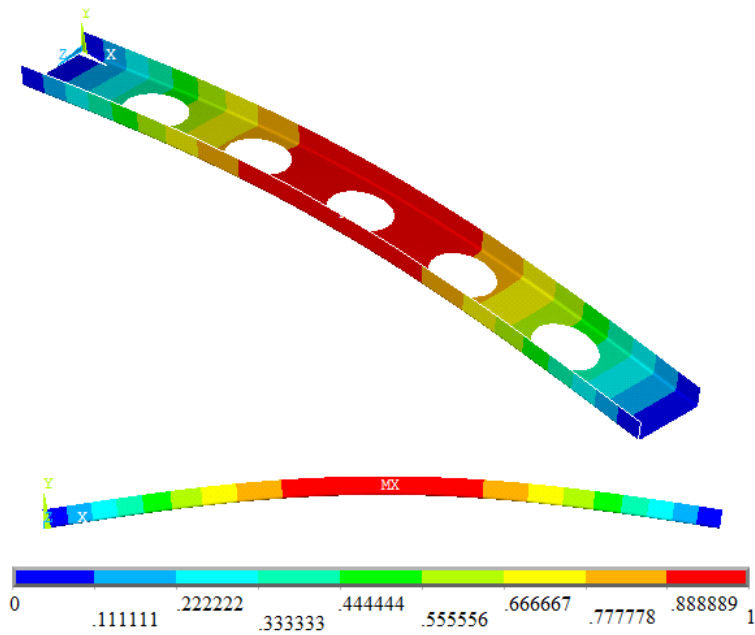
Quando foi considerada uma fração volumétrica $\phi = 0,15$, é considerada a retirada de 15% do material da coluna. Pelo mesmo motivo das demais frações volumétricas estimadas anteriormente, após a análise linear o modo de flambagem predominante é o modo de flambagem global. Sendo o maior deslocamento encontrado no centro do comprimento da coluna, como pode ser observado nas Figs. 6. 25, 6. 26, 6. 27 e 6. 28. A razão H_0 / L_0 pôde ser variada para os quatro menores valores, pois quando $H_0 / L_0 = 1,50$ o maior eixo da elipse ultrapassa o valor de H .

Figura 6. 25 - Coluna com cinco perfurações elípticas após a análise linear e o modo de flambagem global para $H_0 / L_0 = 0,50$ e $\phi = 0,15$



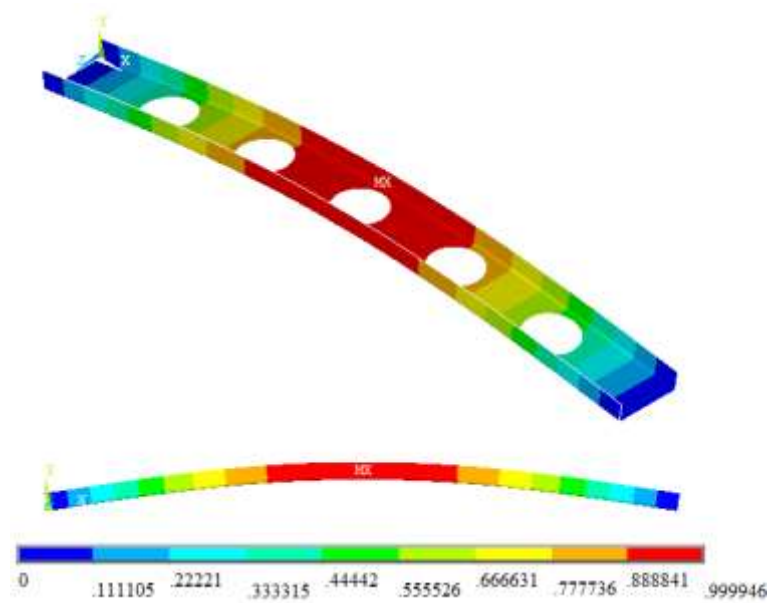
Fonte: produzido pelo autor

Figura 6. 26 - Coluna com cinco perfurações elípticas após a análise linear e o modo de flambagem global para $H_0 / L_0 = 0,75$ e $\phi = 0,15$



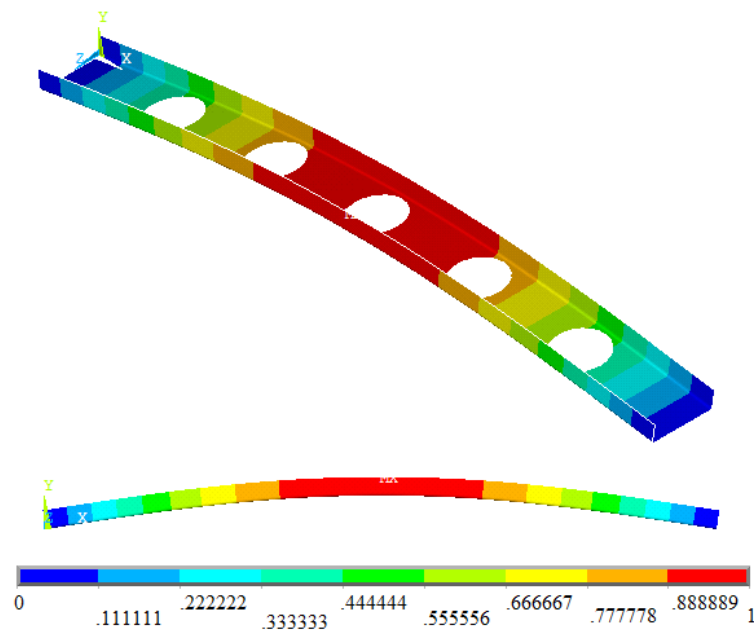
Fonte: produzido pelo autor

Figura 6. 27 - Coluna com cinco perfurações elípticas após a análise linear e o modo de flambagem global para $H_0 / L_0 = 1,00$ e $\phi = 0,15$



Fonte: produzido pelo autor

Figura 6. 28 - Coluna com cinco perfurações elípticas após a análise linear e o modo de flambagem global para $H_0 / L_0 = 1,25$ e $\phi = 0,15$

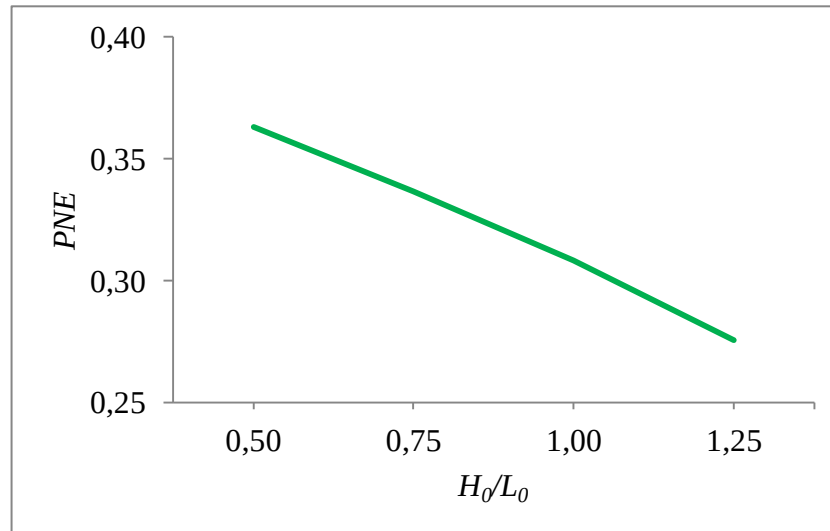


Fonte: produzido pelo autor

Os valores encontrados para as cargas críticas normalizadas, PNE , podem ser observados na Fig. 6. 29, seguindo o mesmo padrão para a os demais casos considerados.

Aqui a carga crítica aumentou 31,66% quando comparado com o valor da carga da pior geometria.

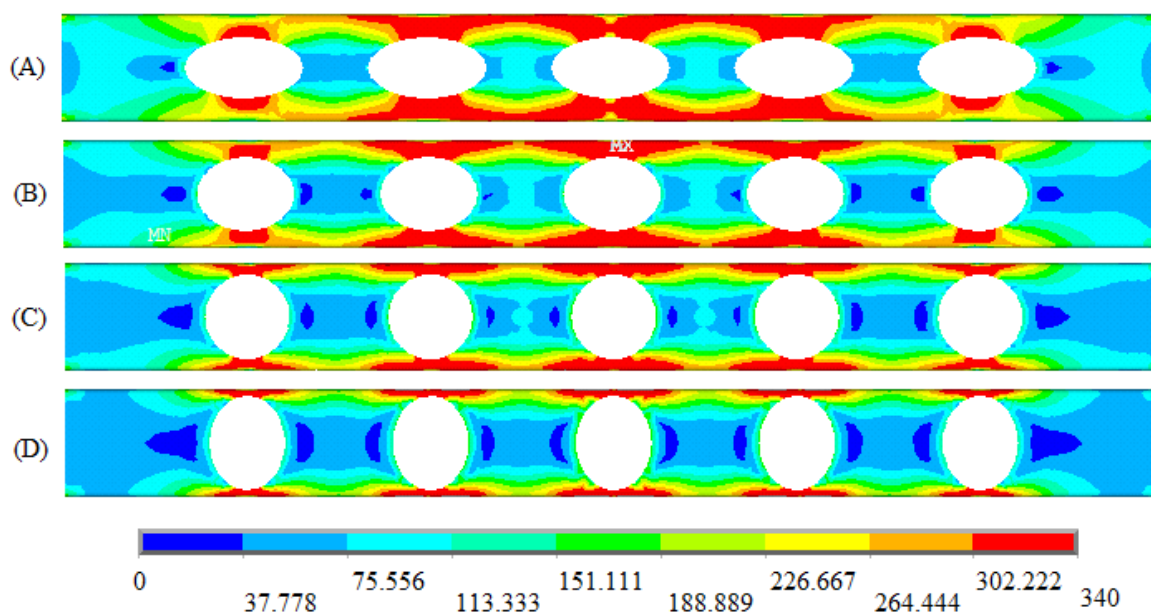
Figura 6. 29 - Carga crítica normalizada PNE para as colunas perfuradas considerando $\phi = 0,15$



Fonte: produzido pelo autor

A distribuição de tensões de von Mises, conforme Fig. 6. 30, da maior fração volumétrica considerada neste trabalho torna evidente que quanto maior a perfuração e quanto maior H_0 / L_0 as tensões mais elevadas ficam concentradas em pontos específicos, entre o lado da perfuração e a borda da coluna, diminuindo o valor da carga última e, como consequência, tornando o elemento estrutural menos resistente. Baseando-se no Método *Constructal Design* é possível concluir que para este caso de fração volumétrica a geometria ótima considerada é $(H_0 / L_0)_o = 0,50$, entre os casos simulados.

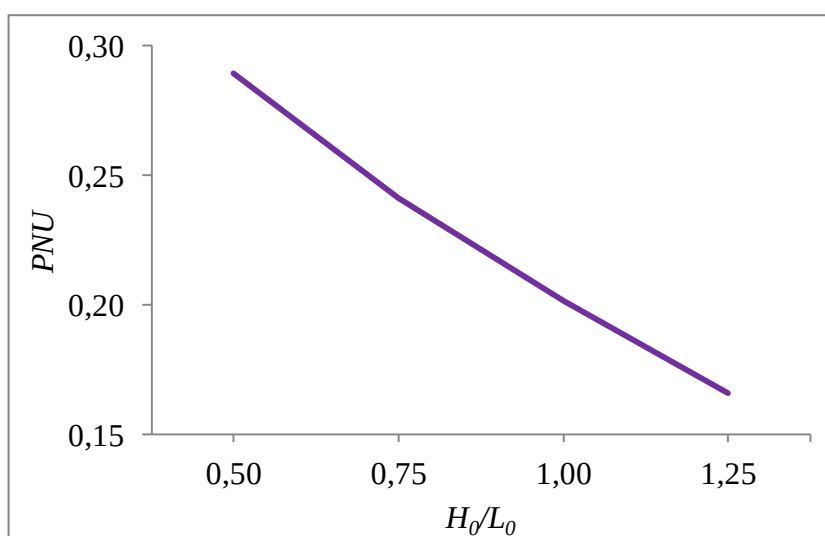
Figura 6. 30 - Distribuição de tensões de von Mises (em MPa) para as colunas com $\phi = 15\%$, onde (A) $H_0 / L_0 = 0,50$; (B) $H_0 / L_0 = 0,75$; (C) $H_0 / L_0 = 1,00$; (D) $H_0 / L_0 = 1,25$ e (E) $H_0 / L_0 = 1,50$



Fonte: produzido pelo autor

A Fig. 6. 31 mostra o gráfico que representa a diminuição da carga última normalizada, PNU , de acordo com o aumento de H_0 / L_0 . Esse comportamento foi também observado para as outras frações de volume adotadas nessa pesquisa.

Figura 6. 31 - Carga última normalizada PNU para as colunas perfuradas considerando $\phi = 0,15$

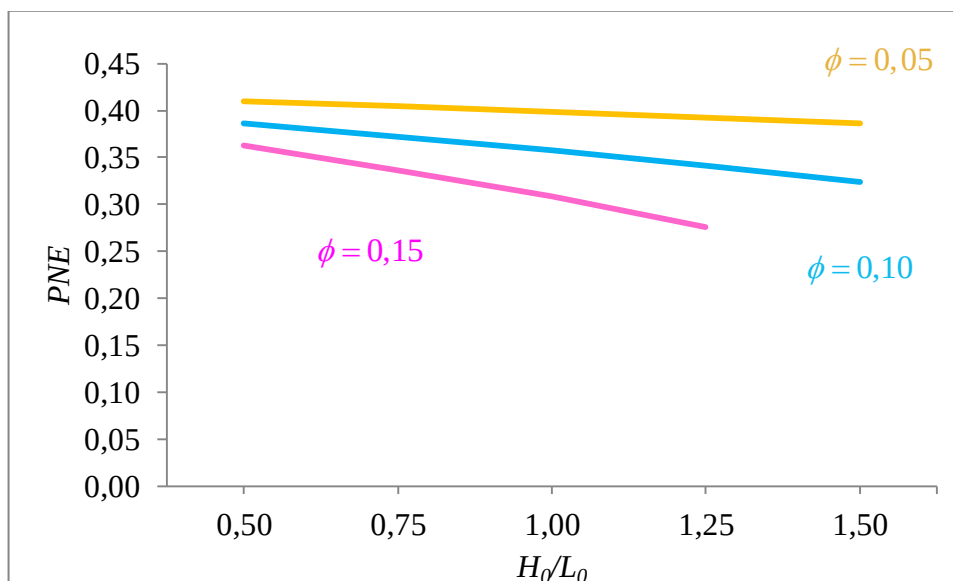


Fonte: produzido pelo autor

6.3.4 Comparação entre as diferentes frações volumétricas

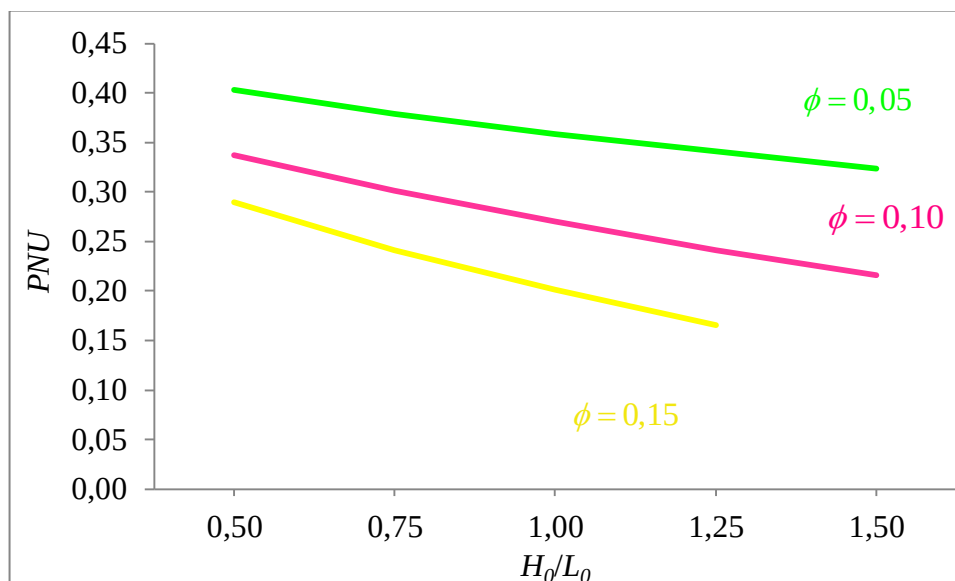
Com base na Fig. 6. 32 pode-se observar que, ao comparar as diferentes frações volumétricas, os maiores resultados para as cargas críticas de flambagem linear aparecem nos menores valores de ϕ . Este resultado já era esperado, pois quanto menor a retirada de material mais resistente se torna a coluna. Todos os valores de ϕ se comportam da mesma forma, quando são analisados os valores da razão H_0 / L_0 , ou seja, quanto maiores os valores de H_0 / L_0 menores são os valores das cargas críticas. Como mencionado anteriormente, este fato acontece, pois quanto maior H_0 / L_0 , os lados das perfurações se aproximam das bordas da coluna, fazendo com que haja um acúmulo de tensões e interferindo diretamente na resistência da estrutura analisada.

Figura 6. 32 - Carga crítica normalizada PNE para os três valores de ϕ



Fonte: produzido pelo autor

Na interpretação do gráfico que mostra a variação de PNU em função da variação de H_0 / L_0 para as três frações de volume estudadas, na Fig. 6. 33, pode-se entender que estes se comportam da mesma forma que na análise linear. Ou seja, quanto maiores os valores de ϕ menor os valores de PNU . E para todos os valores de ϕ , quanto maior a razão de H_0 / L_0 menores são os valores de PNU . No entanto, os valores de PNU são menores que valores de PNE (ver Fig. 6. 32), comparando os mesmos ϕ e H_0 / L_0 .

Figura 6. 33 - Carga última normalizada PNU para os três valores de ϕ 

Fonte: produzido pelo autor

6.3.5 Análise dos resultados pelo Método da Resistência Direta (MRD)

Através do MRD é possível realizar cálculos aproximados da carga última de elementos estruturais. No entanto, tal método leva em consideração apenas o valor da área da seção transversal, seja ela com ou sem o valor da perfuração. Dessa forma, os resultados numéricos são mais precisos que o MRD, uma vez que estes consideram outros fatores que influenciam no valor da carga última. Dentre estes fatores pode-se citar as propriedades do material e imperfeição inicial da estrutura.

A Tabela 6.3 apresenta os resultados, do $\phi = 0,05$, sendo a carga última numérica, P_u , e a carga última pelo MRD, P_{MRD} . Como consequência do que foi dito anteriormente, as diferenças entre estas cargas, para alguns valores de H_0 / L_0 (0,50 e 0,75) apresentaram resultados superiores ao fator de segurança de 10%, considerado em outros casos analíticos.

Tabela 6. 3 - Resultados das cargas últimas considerando $\phi = 0,05$ e o MRD

H_0 / L_0	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50
P_u (kN)	492,27	481,80	436,90	415,80	394,90
P_{MRD} (kN)	430,79	420,83	410,67	400,63	390,66
Diferença (%)	14,27	14,49	6,39	3,79	1,09

Fonte: produzido pelo autor

Contrariando os resultados obtidos pelas diferenças de $\phi = 0,05$, as Tabelas 6. 4 e 6. 5 para valores de $\phi = 0,10$ e $\phi = 0,15$, respectivamente, apresentam maiores diferenças para as maiores razões de H_0 / L_0 .

Tabela 6. 4 - Resultados das cargas últimas considerando $\phi = 0,10$ e o MRD

H_0 / L_0	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50
P_u (kN)	410,90	367,30	330,00	294,40	262,90
P_{MRD} (kN)	400,81	380,63	360,45	339,68	318,50
Diferença (%)	2,52	3,50	8,45	13,33	17,46

Fonte: produzido pelo autor

Tabela 6. 5 - Resultados das cargas últimas considerando $\phi = 0,15$ e o MRD

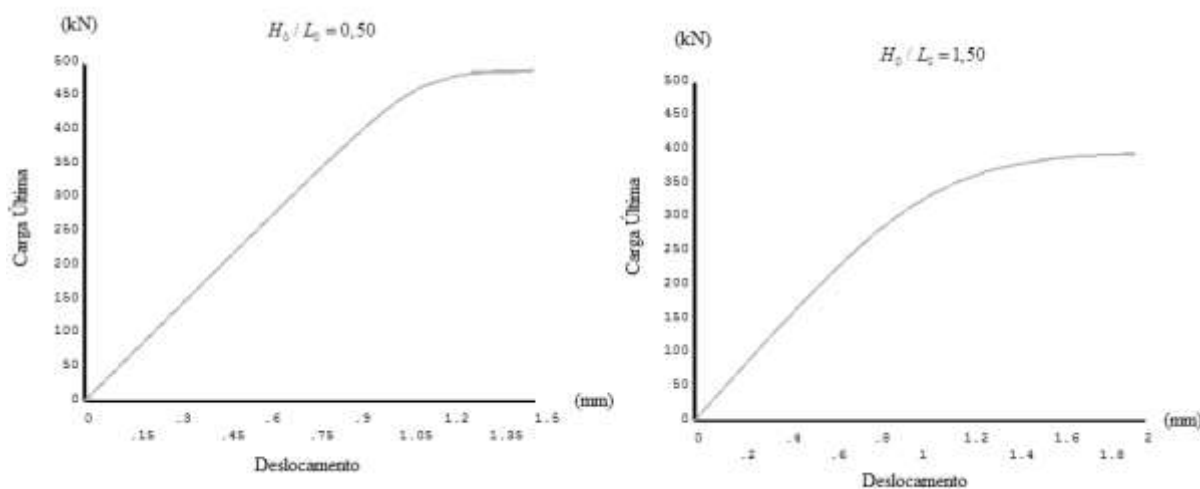
H_0 / L_0	0,50	0,75	1,00	1,25
P_u (kN)	353,30	294,40	246,00	202,40
P_{MRD} (kN)	373,73	341,02	308,40	274,23
Diferença (%)	5,47	13,67	20,23	26,19

Fonte: produzido pelo autor.

6.3.6 Diagramas Carga última-Deslocamento

Através da Fig. 6. 34, a qual mostra gráficos de carga última-deslocamento para $\phi = 0,05$, é notório que o gráfico cuja razão $H_0 / L_0 = 0,50$ apresenta uma carga última maior com um deslocamento menor do que o gráfico de $H_0 / L_0 = 1,50$. Para esta maior razão, o comportamento é inversamente proporcional, pois ele apresenta um deslocamento maior enquanto sua carga última possui menor valor. Quando comparados este pior resultado com o melhor resultado houve uma melhoria de 24,65% no valor da carga última.

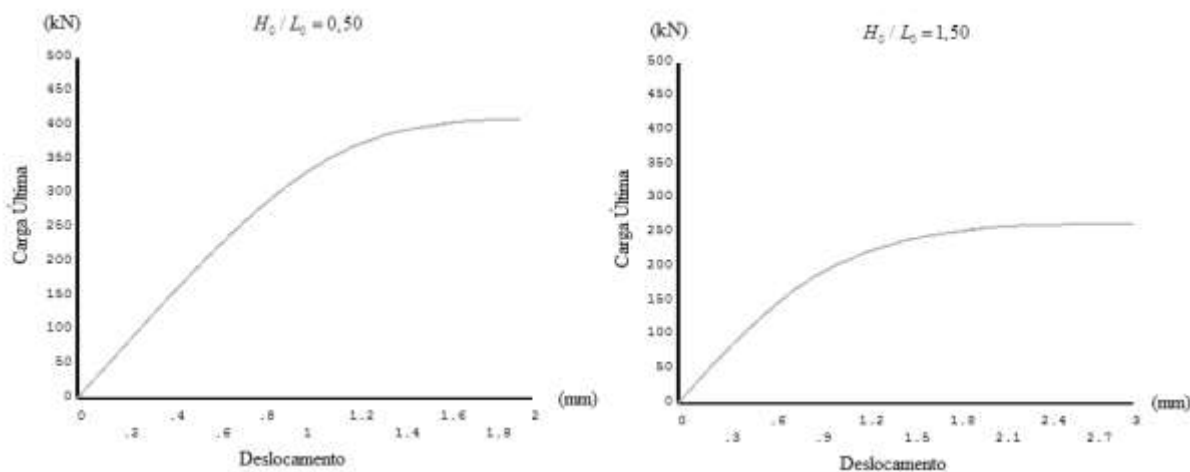
Figura 6. 34 - Gráficos Carga última-Deslocamento para o melhor e o pior valor da carga última para $\phi = 0,05$



Fonte: produzido pelo autor

Análogo ao raciocínio anterior, a Fig. 6. 35, mostra dois gráficos de carga última-deslocamento para $\phi = 0,10$, considerando o melhor e o pior resultado da carga última, com uma melhoria de 56,29%.

Figura 6. 35 - Gráficos Carga última-Deslocamento para o melhor e o pior valor da carga última para $\phi = 0,10$

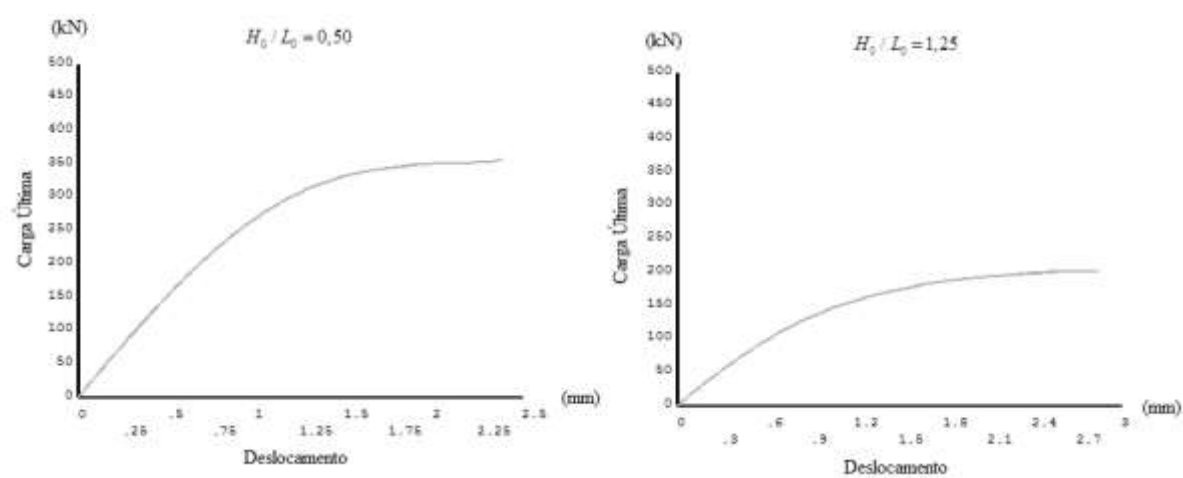


Fonte: produzido pelo autor

a

Os gráficos de carga última-deslocamento para $\phi = 0,15$, apresentados na Fig. 6. 36 consideram a razão $H_0 / L_0 = 0,50$ e $H_0 / L_0 = 1,25$. Comparando estes dois gráficos, pode-se inferir que houve uma melhoria de 74,55% quando comparados o pior e o melhor resultados.

Figura 6. 36 - Gráficos Carga última-Deslocamento para o melhor e o pior valor da carga última para $\phi = 0,15$



Fonte: produzido pelo autor

7 CONCLUSÕES

A busca pela melhoria do comportamento mecânico de elementos estruturais é uma constante na engenharia. Sabe-se que em colunas de aço há a necessidade de fazer perfurações ao longo de sua alma, seja para proporcionar acessibilidade a sistemas de serviços ou até mesmo para diminuir o peso da estrutura. Neste trabalho foi proposta a variação geométrica de cinco perfurações, com formato elíptico, em colunas de aço do tipo U bi-apoiadas, com o intuito de encontrar a geometria ótima que maximize o valor da carga crítica e da carga última, além de proporcionar uma melhor distribuição de tensões.

A etapa que envolve a verificação e a validação dos modelos computacionais adotados neste trabalho foi fator determinante para dar continuidade no posterior estudo de caso. Os resultados obtidos e comparados com os dados numéricos (verificação) e com os dados experimentais (validação) do artigo de Moen e Schafer (2008) apresentaram diferenças menores que 9%. Além disto, o modo de flambagem predominante tanto na análise linear quanto na análise não linear foi a flambagem local, conforme os resultados de tal artigo.

Dos objetivos traçados neste trabalho o método *Constructal Design* foi decisivo para inferir as geometrias ótimas das colunas de aço estudadas, indicando que é possível o emprego de tal método para problemas de mecânica dos sólidos. Diante dos resultados da análise linear e não linear, dentre as diferentes frações volumétricas, a que apresentou os melhores resultados para as cargas crítica e última foi o $\phi = 0,05$, ou seja, maiores valores de carga crítica e carga última. Este fato já era esperado, pois quanto menor a porcentagem do volume de material retirado mais resistente se torna o elemento estrutural.

Diante das análises feitas através de simulações numéricas, quando os resultados das cargas últimas são comparados aos resultados analíticos pelo MRD, nem todos mostraram diferenças dentro de limites percentuais aceitáveis, de 10%. Para $\phi = 0,05$ foi possível conferir maiores diferenças para os menores valores de H_0 / L_0 , no entanto, para $\phi = 0,10$ e $\phi = 0,15$ as maiores diferenças apareceram para os maiores valores das frações de H_0 / L_0 . Estas diferenças se devem ao fato de que o MRD não leva em consideração todas as variáveis necessárias para a resolução de tal análise.

As análises lineares de todas as colunas mostraram que o modo de flambagem predominante foi o modo de flambagem global, sendo que o maior deslocamento da coluna acontece no centro da mesma. Além disto, para todos os valores de ϕ o resultado ótimo para

o valor da carga crítica foi $H_0 / L_0 = 0,50$, sendo que conforme diminui o grau de liberdade H_0 / L_0 pode-se observar uma melhoria de 17,68%, 19,37% e 31,66%, respectivamente, para os valores de $\phi = 0,05$; 0,10 e 0,15, entre o melhor e o pior resultado.

Através das análises não lineares pode-se observar os resultados das distribuições das tensões de von Mises. Para todos os valores de ϕ , a melhor distribuição de tensões aparece nos menores valores de H_0 / L_0 , pois quanto maior for a variação deste grau de liberdade, haverá uma concentração máxima de tensões entre o lado da perfuração e a borda da coluna. Através desta análise, também se obteve melhorias nos resultados das cargas últimas, para os valores de $\phi = 0,05$; 0,10 e 0,15, de 24,65%, 56,29% e 74,55%, respectivamente, variando também a razão H_0 / L_0 . Em vista disto, corroborando o uso do Método *Constructal Design*, foi possível concluir que a configuração geométrica ótima para todos os valores de ϕ é $(H_0 / L_0)_o = 0,50$.

Como sugestão para trabalhos futuros que visam estudar a resistência mecânica de colunas de aço através do *Constructal Design*, recomenda-se fazer uma variação na geometria das perfurações através do grau de liberdade H_0 / L_0 , e considerar outros valores de frações volumétricas, ϕ . Além disto, é possível também uma investigação em diferentes formatos geométricos e uma variação no número das perfurações.

REFERÊNCIAS

- ANSYS, User's Manual (version 10.0), 2005. Houston. Swanson Analysis System Inc.
- ALMEIDA, S. J. C. **Análise numérica de perfis de aço formados a frio comprimidos considerando imperfeições geométricas iniciais**. 2007. 206 p. (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2007.
- ALVES, V. R. **Análise de perfis enrijecidos em hastes de paredes delgadas de aços formados a frio**. 2008. 343 f. (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2008.
- BEJAN, A. **Shape and structure, from Engineering to nature**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 325 p.
- BEJAN, A.; LORENTE, S. **Design with Constructal Theory**. Hoboken: Wiley, 2008. 552 p.
- BEJAN, A.; ZANE, J. P. **Design in nature: how the constructal law governs evolution in biology, physics, technology, and social organization**. 1^a. ed. New York: Doubleday, v. III, 2012.
- BELLEI, I. H. **Edifícios Industriais em aço: projeto e cálculo**. 2. ed. São Paulo: Pini, 1998. 489 p.
- CASTELANI, T. **Otimização e dimensionamento de perfis formados a frio pelo Método da Resistência Direta**. 2012. 98 f. (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.
- CORREIA, A. L. G. **Simulação numérica e Constructal Design aplicados à análise do comportamento mecânico de placas de aço submetidas à flambagem elástica usadas em estruturas oceânicas**. 2013. 123 f. (Mestrado em Engenharia Oceânica) – Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2013.
- CORREIA, A. L. G. et. al. Constructal Design Aplicado a placas com furos elípticos sob flambagem. **Vetor**, v. 23, p. 18-31, 2013.
- DIAS, L. A. M. **Estruturas de aço: conceitos, técnicas e linguagem**. 6. ed. São Paulo: Ziguarte, 2008. 297 p.
- DZIEKANIAK, C. V. **Manual para elaboração de trabalhos acadêmicos segundo as normas da ABNT** [recurso eletrônico]. Rio Grande : FURG, 2014. Disponível em: <<http://www.educacaoambiental.furg.br/>> Acesso em: 15/08/2015.
- EL-SAWY, K. M.; MAZMY, A. S.; MARTINI, M. I. Elasto-plastic buckling of perforated plates under uniaxial compression. **Thin –Walled Structures**, v. 42, p. 1083-1101, Ago. 2004.

EL-SAWY, K. M.; SWEEDAN, A. M. I.; MARTINI, M. I. Major-Axis Elastic Buckling of axially loaded castellated steel columns. **Thin –Walled Structures**, v. 47, p. 1295-1304, Abr. 2009.

FONTOURA, A. O. **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2000. 435 p.

GERE, J. M. **Mecânica dos Materiais**. Tradução: Luiz Fernando de Castro Paiva; revisão técnica: Marco Lucio Bittencourt. 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003. 689 p.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

HELBIG, D. et al. Numerical simulation and constructal design method applied to the study of the cutout shape influence in the mechanical behavior of perforated plates subjected to buckling. **Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE**, Fortaleza, 2014.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. 7. ed. São Paulo: Pearson Pretice Hall, 2010. 670 p.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. **Fundamentos de Metodologia Científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003. 211 p.

LEAL, D. F. **Sobre perfis de aço formados a frio compostos por dupla cantoneira com seção “T” submetidos à compressão**. 2011. 331 f. (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

LORENTE, S.; LEE, J.; BEJAN, A. The “flow of stresses” concept: The analogy between mechanical strength and heat convection. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 53, p. 2963-2968, Abr. 2010.

MADENCI, E.; GUVEN, I. **The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS®**. New York: Springer, 2006. 401 p.

MADENCI, E.; GUVEN, I. **The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS®**. New York: Springer, 2015. 657 p.

MOAVENI, S. **Finity Element Analysis: Theory and Application with ANSYS**. New Jersey: Prentice Hall, 1999. 527 p.

MOEN, C. D.; SCHAFER, B. W. Impact of Holes on the Elastic Buckling of Cold-Formed Steel Columns with Application to the Direct Strength Method. **Eighteenth International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures**, Orlando, p. 269-283, out. 2006.

MOEN, C. D.; SCHAFER, B. W. Experiments on cold-formed steel columns with holes. **Thin –Walled Structures**, v. 46, p. 1164-1182, Mar. 2008.

MOEN, C. D.; SHAFER, B. W. Elastic Buckling of cold-formed steel columns and beams with holes. **Engineering Structures**, v. 31, p. 2812-2824, Jul. 2009.

MOEN, C. D.; SHAFER, B. W. Direct Strength Method for Design of Cold-Formed Steel Columns with Holes. **Journal of Structural Engineering**, v. 137, n. 5, p. 559 – 570, Maio 2011.

OBERKAMPF, W. L.; BARONE, M. F. Measures of agreement between computation and experiment: Validation metrics. **Journal of Computational Physics**, v. 217, p. 5 -36, set. 2006.

PFEIL, W.; PFEIL, M. **Estruturas de aço: dimensionamento prático**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. 357 p.

PEREIRA, A. **Projeto ótimo de pórticos planos com restrição à flambagem**. 2002. 99 f. (Mestrado em Engenharia Civil) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2002.

PRZEMIENIECKI, J. S. **Theory of Matrix Structural Analysis**. New York: Dover Publications, 1985. 469 p.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013. 276 p.

SANTOS, E. S. D. **Análise da Estabilidade e da Resistência de Perfis de Aço Formados a Frio Sujeitos a Interação entre os Modos de Flambagem Local, Distorcional e Global**. 2010. 243 f. (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

SCHAFER, B. W.; ASCE, M. Local, distortional, and euler buckling of thin-walled. **Journal of Structural Engineering**, v. 128, n. 3, p. 289-299, Mar. 2002.

SHANMUGAM, N. E.; DHANALAKSHMI, M. Design for openings in cold-formed steel channel stub columns, **Thin –Walled Structures**, Singapore, p. 961 – 981, Jul. 2001.

SILVA, G. G. D. **Análise teórico-experimental de colunas curtas perfuradas**. 2011. 114 f. (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Ouro Preto – Escola de Minas, Ouro Preto, 2011.

SORIANO, H. L. **Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. Colaboração: Silvio de Souza Lima São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2003. 589 p.

SOUZA, R. M. **O Método dos Elementos Finitos Aplicado ao Problema de Condução de Calor**. (Apostila de Elementos Finitos NICAÉ) – Universidade do Pará, Belém, 2003. 40 p.

SOUZA, D. A.; FREITAS, M. S. R.; FREITAS, A. M. S. Estabilidade de colunas com seções enrijecidas em perfis de aço formados a frio. **Revista Escola de Minas**, v. 59, n. 2, 2006.

SWEEDAN, A. M. I.; EL- SAWY, K. M. Elastic local buckling of perforated webs of steel cellular beam-column elements. **Journal of Constructional Steel Research**, Al-Ain, p. 1115-1127, fev. 2011.

ROCHA, L. A. O. et al. Geometric optimization based on the constructal design of perforated thin plates subject to buckling. **Computational Thermal Sciences: An International Journal**, v. IV, p. 119-129, 2012.

ROSAS, M. A. P. **Análise de Dutos com Perda de Espessura Reparados com Multicamadas Metálicas Coladas**. 2006. 159 f. (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2006.

TRAHAIR, N. S.; BRADFORD, M. A.; NETHERCOT, D. A.; GARDNER, L. **The Behavior and Design of Steel Structures to EC3**. Nova York: Taylor & Francis, 2008.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. E. **Mecânica dos sólidos**. Rio de Janeiro: LTC, v. II, 1984.

Apêndice 01 – Arquivo com o código de análise não linear do Ansys® em formato lgw para a coluna com perfuração elíptica com $\phi = 0,10$ e $H_0/L_0 = 0,50$.

```

/BATCH
!/COM,ANSYS RELEASE 12.1  UP20091102    19:19:25  07/03/2015
/input,menust,tmp,",,,,,,,,,,,,,1
!/GRA,POWER
!/GST,ON
!/PLO,INFO,3
!/GRO,CURL,ON
!/CPLANE,1
!/REPLOT,RESIZE
WPSTYLE,,,,,,,,0
!*
/NOPR
/PMETH,OFF,0
KEYW,PR_SET,1
KEYW,PR_STRUC,1
KEYW,PR_THERM,0
KEYW,PR_FLUID,0
KEYW,PR_ELMAG,0
KEYW,MAGNOD,0
KEYW,MAGEDG,0
KEYW,MAGHFE,0
KEYW,MAGELC,0
KEYW,PR_MULT,0
KEYW,PR_CFD,0
/GO
!*
!/COM,
!/COM,Preferences for GUI filtering have been set to display:
!/COM, Structural
!*
*SET,rc,12
*SET,t,8
*SET,b,90
*SET,h,300
*SET,l,3000
*SET,ex,200e3
*SET,esize1,10
*SET,esize2,30
*SET,fy,340
*SET,mt,20000
*SET,upgeom,h/2000
*SET,v,0.3
*SET,rf,92.56
*SET,i,500
*SET,x,500
/PREP7
!*
ET,1,SHELL93
!*
R,1,t, , , , ,
!*
!*
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,ex
MPDATA,PRXY,1,,v
K,1,,b-t/2,h-t,
K,2,,rc,h-t,
K,3,,h-(rc+t),
K,4,,rc,
K,5,,rc,,
K,6,,b-t/2,,
K,7,,rc,h-(rc+t),
K,8,,rc,rc,
K,10,x-rf,,(h-t)/2,
K,11,x,,(h-t)/2,
K,12,x+rf,,(h-t)/2,

```

```

K,13,x,,(h-t)/2+rf,
K,14,x,,(h-t)/2-rf,
l,1,2
l,3,4
l,5,6
l,6,1
!*
LARC,2,3,7,rc,
!*
LARC,4,5,8,rc,
!*
LARC,10,14,11,rf,
!*
LARC,12,14,11,rf,
!*
LARC,13,12,11,rf,
!*
LARC,10,13,11,rf,
FLST,2,6,4
FITEM,2,1
FITEM,2,3
FITEM,2,5
FITEM,2,6
FITEM,2,2
FITEM,2,4
AL,P51X
FLST,2,4,4
FITEM,2,7
FITEM,2,10
FITEM,2,8
FITEM,2,9
AL,P51X
!*
!*
VOFFST,1,l, ,
VDELE,    1
! APLOT
! /VIEW,1,1,1,1
! /ANG,1
! /REP,FAST
! /PNUM,KP,0
! /PNUM,LINE,0
! /PNUM,AREA,1
! /PNUM,VOLU,0
! /PNUM,NODE,0
! /PNUM,TABN,0
! /PNUM,SVAL,0
! /NUMBER,0
!*
! /PNUM,ELEM,0
! /REPLOT
!*
FLST,2,3,5,ORDE,3
FITEM,2,1
FITEM,2,3
FITEM,2,9
ADELE,P51X
! LPLOT
FLST,2,2,4,ORDE,2
FITEM,2,4
FITEM,2,16
LDELE,P51X
FLST,3,1,5,ORDE,1
FITEM,3,2
!*
! /VIEW,1,1,1,1
! /ANG,1

```

[illegible]

[illegible]

```

!/DIST,1,1.37174211248,1
!/REP,FAST
!/DIST,1,1.37174211248,1
!/REP,FAST
FLST,2,2,5,ORDE,2
FITEM,2,4
FITEM,2,8
ACLEAR,P51X
! APLOT
FLST,2,2,5,ORDE,2
FITEM,2,4
FITEM,2,8
AESIZE,P51X,esize2,
FLST,5,2,5,ORDE,2
FITEM,5,4
FITEM,5,8
CM,_Y,AREA
ASEL,, , ,P51X
CM,_Y1,AREA
CHKMSH,'AREA'
CMSEL,S,_Y
!*
AMESH,_Y1
!*
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
CMDELE,_Y2
!*
!/FOC, 1, 1502.65136431 , 39.2017994326 , 148.333283263
!/REPLO
!/FOC, 1, 1483.95046478 , 5.76335146308 , 322.672100254
!/REPLO
!/VIEW,1,1,1,1
!/ANG,1
!/REP,FAST
! APLOT
FLST,2,2,5,ORDE,2
FITEM,2,5
FITEM,2,7
AESIZE,P51X,esize1,
FLST,5,2,5,ORDE,2
FITEM,5,5
FITEM,5,7
CM,_Y,AREA
ASEL,, , ,P51X
CM,_Y1,AREA
CHKMSH,'AREA'
CMSEL,S,_Y
!*
AMESH,_Y1
!*
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
CMDELE,_Y2
!*
! APLOT
FLST,2,1,5,ORDE,1
FITEM,2,1
AESIZE,P51X,esize2,
MSHAPE,1,2D
MSHKEY,0
!*
CM,_Y,AREA
ASEL,, , , 1
CM,_Y1,AREA
CHKMSH,'AREA'
CMSEL,S,_Y

```

```

!*
AMESH,_Y1
!*
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
CMDELE,_Y2
!*
/UI,MESH,OFF
NUMMRG,NODE, , ,LOW
FINISH
/SOL
!*
ANTYPE,0
PSTRES,1
NSSEL,S,LOC,X,0
FLST,2,39,1,ORDE,10
FITEM,2,1
FITEM,2,-7
FITEM,2,1108
FITEM,2,-1114
FITEM,2,2215
FITEM,2,-2218
FITEM,2,2819
FITEM,2,-2822
FITEM,2,3423
FITEM,2,-3439
!*
/GO
D,P51X, , , ,UY,UZ, , ,
FLST,2,39,1,ORDE,10
FITEM,2,1
FITEM,2,-7
FITEM,2,1108
FITEM,2,-1114
FITEM,2,2215
FITEM,2,-2218
FITEM,2,2819
FITEM,2,-2822
FITEM,2,3423
FITEM,2,-3439
!*
/GO
F,P51X,FX,1/39
ALLSEL,ALL
NSSEL,S,LOC,X,1/2
FLST,2,32,1,ORDE,32
FITEM,2,108
FITEM,2,313
FITEM,2,462
FITEM,2,611
FITEM,2,760
FITEM,2,909
FITEM,2,1058
FITEM,2,1215
FITEM,2,1420
FITEM,2,1569
FITEM,2,1718
FITEM,2,1867
FITEM,2,2016
FITEM,2,2165
FITEM,2,2319
FITEM,2,2471
FITEM,2,2620
FITEM,2,2769
FITEM,2,2926
FITEM,2,3075
FITEM,2,3224

```

```

FITEM,2,3373
FITEM,2,3554
FITEM,2,3578
FITEM,2,5191
FITEM,2,5202
FITEM,2,5395
FITEM,2,5592
FITEM,2,-5593
FITEM,2,5773
FITEM,2,5786
FITEM,2,5810
!*
/GO
D,P51X, , , , ,UX, , , ,
ALLSEL,ALL
NSSEL,S,LOC,X,l-0.01,l+0.01
FLST,2,39,1,ORDE,13
FITEM,2,8
FITEM,2,208
FITEM,2,-213
FITEM,2,1115
FITEM,2,1315
FITEM,2,-1320
FITEM,2,2219
FITEM,2,2419
FITEM,2,-2421
FITEM,2,2823
FITEM,2,-2826
FITEM,2,3440
FITEM,2,-3456
!*
/GO
D,P51X, , , , ,UY,UZ, , , ,
FLST,2,39,1,ORDE,13
FITEM,2,8
FITEM,2,208
FITEM,2,-213
FITEM,2,1115
FITEM,2,1315
FITEM,2,-1320
FITEM,2,2219
FITEM,2,2419
FITEM,2,-2421
FITEM,2,2823
FITEM,2,-2826
FITEM,2,3440
FITEM,2,-3456
!*
/GO
F,P51X,FX,-1/39
ALLSEL,ALL
! /STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
/SOLU
!*
ANTYPE,1
!*
BUCOPT,LANB,1,0,0,
MXPAND,1,0,0,1,0.001,
! /STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
/POST1
SET,LIST,999
SET,,, , , ,1
FINISH

```

```

/SOLU
!*
ANTYPE,0
ANTYPE,0
NLGEOM,1
NSUBST,1000,2000,500
OUTRES,ERASE
OUTRES,ALL,1
TIME,1000
FINISH
/PREP7
!*
TB,BISO,1,1,2,
TBTEMP,0
TBDATA,,fy,mt,,
NSEL,S,LOC,X,0
FLST,2,39,1,ORDE,10
FITEM,2,1
FITEM,2,-7
FITEM,2,1108
FITEM,2,-1114
FITEM,2,2215
FITEM,2,-2218
FITEM,2,2819
FITEM,2,-2822
FITEM,2,3423
FITEM,2,-3439
!*
/GO
F,P51X,FX,1000000/39
ALLSEL,ALL
NSEL,S,LOC,X,l-0.01,l+0.01
FLST,2,39,1,ORDE,13
FITEM,2,8
FITEM,2,208
FITEM,2,-213
FITEM,2,1115
FITEM,2,1315
FITEM,2,-1320
FITEM,2,2219
FITEM,2,2419
FITEM,2,-2421
FITEM,2,2823
FITEM,2,-2826
FITEM,2,3440
FITEM,2,-3456
!*
/GO
F,P51X,FX,-1000000/39
ALLSEL,ALL
UPGEOM,upgeom,LAST,LAST,'col-ca-10%-5f-x0.5','rst',' '
!*
FINISH
/SOL
!/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
/POST1
SET,LIST,999
SET,,, ,208
!*
!/EFACET,1
! PLNSOL, U,Y, 0,1.0
!*
!/EFACET,1
! PLNSOL, S,EQV, 0,1.0
! LGWRITE,'col-ca-10%-5f-x0.5-nl','lgw','C:\Users\Daniela\Documents\estudoparametrico5-7\','COMMENT'

```