

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

**ALGORITMOS GENÉRICOS PARA A GERAÇÃO DE MODELOS DINÂMICOS DE
CABOS UMBILICAIS E VEÍCULOS SUBAQUÁTICOS**

VANESSA SOUSA DE OLIVEIRA

Dissertação apresentada à Comissão do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Sebastião Cícero Pinheiro Gomes

Rio Grande, novembro de 2015

*Dedico este trabalho aos meus pais por todo amor e
dedicação. Sem eles nenhum sonho valeria à pena.*

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me concedido a vida, sem ELE nada sou.

A Nossa Senhora Aparecida, por sempre interceder nos momentos mais difíceis.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Sebastião Cícero Pinheiro Gomes, pelo excelente trabalho. Agradeço pela dedicação, amizade, compreensão, colaboração e apoio.

Ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, pela oportunidade de realizar esta Dissertação.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela concessão de recursos ao longo do desenvolvimento deste trabalho

Aos meus pais José Antônio e Maria Aparecida, pelo amor, apoio e por tudo que fizeram e fazem por mim, vocês são exemplos de vida.

À minha irmã Thainá, pela atenção, carinho, amor e apoio ao longo da minha vida.

Ao meu namorado Edioner pelo amor, companheirismo, carinho, apoio, atenção e principalmente pela compreensão.

À Glauciléia pela amizade, por estar presente em todos os momentos, bons e ruins.

Aos meus colegas da CEU/FURG, Natália, Leidiane, Lainide, Lucas, Cleiton e Jonatas pela motivação a cada dia.

Aos colegas do Núcleo de Matemática Aplicada (NuMA) Thiago, Roberto e Jéssica, pela convivência, pelas experiências trocadas, pelos momentos descontraídos e principalmente pelo incentivo ao longo da etapa que se encerra.

Aos colegas da matemática/UFVJM, Nardélia, Kamilla, Gleyber, Núbia, Larisse e Priscila, pelas trocas de experiências.

A todos os colegas do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional que tive o prazer de conviver, pela parceria ao longo da realização do meu Mestrado.

Aos meus familiares, pelas orações, apoio e compreensão.

À Pastoral Universitária da FURG, por me acolher com tanto amor.

Aos membros da Banca Examinadora, avaliadores desta Dissertação, pela honra de cada contribuição no aperfeiçoamento deste trabalho.

Enfim, agradeço a todos que acreditaram no meu potencial, contribuindo assim por mais essa conquista.

RESUMO

A modelagem dinâmica de cabos umbilicais incluindo a dinâmica de veículos subaquáticos não tripulados do tipo ROV (*Remotely Operated Vehicle*) apresenta dificuldades em razão das não linearidades e da complexidade do equacionamento no espaço 3D, sendo este o principal motivo para a quase inexistência de trabalhos sobre o acoplamento das dinâmicas do cabo e do veículo. O presente trabalho tem como principal objetivo conceber os meios para se acoplar as duas dinâmicas, de forma a possibilitar análises sobre a influência de uma carga terminal com dinâmica própria, sobre a dinâmica do cabo. A modelagem dinâmica de estruturas do tipo cabo é feita a partir da formulação de Euler-Lagrange. O modelo dinâmico consiste em dividir o cabo em pequenos elos conectados por articulações fictícias flexíveis, permitindo movimentos em elevação, azimute e torção. O cabo está articulado a uma estrutura fixa em uma extremidade e com uma massa m_c na outra extremidade (ROV), onde estão sendo aplicadas forças externas. As forças externas atuantes na carga terminal são conhecidas no referencial do corpo. Há então a necessidade de se efetuar transformações para o referencial inercial. Estas forças podem provocar tanto deslocamentos do centro de massa da carga terminal, quanto rotações em torno deste, ou seja, além de um vetor força resultante há um vetor torque resultante atuante na carga terminal, já que esta não é considerada puntual e sim, um corpo rígido se deslocando no espaço 3D. Um estudo sobre a influência dessas forças na dinâmica do cabo foi realizado considerando-se um modelo com até cinco elos e, posteriormente, foi identificado um padrão de crescimento das equações à medida que se aumenta o número de elos para representar de forma discreta a flexibilidade contínua do cabo. Este padrão identificado permitiu o desenvolvimento de algoritmos genéricos, geradores do modelo global (cabo e carga terminal com dinâmica própria) para um número qualquer de elos escolhidos para a dinâmica do cabo, sendo esta a principal contribuição da presente dissertação. Não foi encontrada na literatura nenhuma solução analítica para este problema e nem mesmo a modelagem dinâmica do mesmo no espaço 3D. Como não se dispõe de um aparato experimental, as simulações foram analisadas apenas de forma qualitativa e, em todos os casos analisados, os resultados foram conforme o esperado fisicamente. Um software que permite uma animação 3D foi desenvolvido para facilitar a visualização e a análise das simulações. As animações 3D permitiram concluir que a movimentação do cabo confere uma boa sensação de realidade física, principalmente quando se trabalha com um grande número de elos na representação da flexibilidade do cabo.

Palavras-chave: Estruturas flexíveis, cabos umbilicais, veículos subaquáticos ROVs, modelagem dinâmica.

ABSTRACT

Dynamic modeling of umbilical cables including the unmanned underwater vehicles dynamics of the ROV (Remotely Operated Vehicle) type shows difficulties due to non linearities and the complex equating in the 3D space, being this the main reason to the close inexistence of papers about coupling the cable and vehicle dynamics. The present work has as its main goal conceive the ways to couple these two dynamics, in order to enable the analysis about the influence of one terminal loading with its own dynamics, in the cable dynamics. The dynamic modeling of cable type structures is done from the Euler-Lagrange formalism. The dynamic model consists in dividing the cable in little links connected by flexible fictitious joints, allowing motions in elevation, azimuth and torsion. The cable is articulated to a fixed structure on one of its extremities and has a mass m_c on the other one (ROV), where external forces are being applied. The external forces acting on the terminal loading are known in the body referential. So, it is needed to make transformations to the inertial referential. These forces can cause both displacements of the mass center of the terminal loading, and rotations around it, so, besides the resultant forces vector, there is a resultant torque vector acting on the terminal loading, since it is not considered punctual, being considered as a rigid body moving in the 3D space. A study about the influence of these forces on the cable dynamics was performed, considering a model up to five links and, after, identifying a growth pattern for the equations, as the number of links to represent discreetly the cable's continuous flexibility was raised. This identified pattern enabled the development of generic algorithms, generators of the global model (cable and terminal loading with its own dynamics) for any number of links chosen for the cable dynamics, being the main contribution of the present dissertation. It was not found on the literature any analytical solutions for this problem, not even its dynamic modeling on the 3D space. As an experimental setup is not available, the simulations were analyzed only qualitatively and, in all the analyzed cases, the results were found according to the physical expected. A software that enables an 3D animation was developed to facilitate the analysis and visualization of the simulations. The 3D animations allowed conclude that the cable motion gives a good sense of physical reality, especially adopting a great number of links to represent the cable's flexibility.

Key-words: Flexible structures, umbilical cables, ROV's underwater vehicles, dynamic modeling.

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS	1
LISTA DE SÍMBOLOS ESPECIAIS.....	4
LISTA DE ABREVIATURAS.....	5
LISTA DE FIGURAS	6
LISTA DE TABELAS.....	10
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO.....	11
1.1. MOTIVAÇÃO PARA A REALIZAÇÃO DO TRABALHO.....	12
1.2. OBJETIVOS	15
1.2.1. Objetivos Gerais.....	15
1.2.2. Objetivos Específicos	15
1.3. REVISÃO BILIOGRÁFICA	16
1.4. ROTEIRO DO TRABALHO	23
CAPÍTULO 2 - MODELAGEM DINÂMICA DO CABO UMBILICAL.....	24
2.1. MODELAGEM DO CABO.....	25
2.2. MODELAGEM DINÂMICA PARA O CABO DIVIDIDO EM TRÊS ELOS	38
2.3. ALGORITMOS GENÉRICOS	42
2.3.1. Algoritmo Genérico Para a Matriz de Inércia	43
2.3.2. Algoritmo Genérico Para a Matriz de Constantes Elásticas e Para a Matriz de Coeficientes de Atrito	47
2.3.3. Algoritmo Genérico para o Vetor de Coriolis-Centrífugos	48
2.3.4. Algoritmo Genérico para o Vetor de Esforços Gravitacionais.....	53
2.4. SIMULAÇÃO PARA O CABO EM QUEDA LIVRE.....	53
CAPÍTULO 3 - MODELAGEM DINÂMICA DE VEÍCULOS SUBAQUÁTICOS	57
3.1. DINÂMICA DO CORPO RÍGIDO.....	58
3.2. FORÇA DE MASSA ADICIONAL	60
3.3. FORÇA DE ARRASTRO E SUSTENTAÇÃO.....	62
3.4. FORÇAS RESTAURADORAS.....	63
3.5. MODELO DINÂMICO DOS VEÍCULOS SUBAQUÁTICOS	65
3.6. MODELAGEM DINÂMICA DOS PROPULSORES	66
CAPÍTULO 4 - FORÇAS NA CARGA TERMINAL	68
4.1. EQUACIONAMENTO PARA O CABO DIVIDIDO EM CINCO ELOS	70
4.2. ALGORITMOS GENÉRICOS	81

4.3.	SIMULAÇÕES PARA FORÇAS APLICADAS NA CARGA TERMINAL	83
4.4.	CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE AS SIMULAÇÕES PARA FORÇAS APLICADAS NA CARGA TERMINAL.....	109
CAPÍTULO 5 - FORÇAS E TORQUES NA CARGA TERMINAL.....		111
5.1.	EQUACIONAMENTO PARA O CABO COM UM ELO	113
5.2.	EQUACIONAMENTO PARA O CABO DIVIDIDO EM TRÊS ELOS.....	119
5.3.	ALGORITMO GENÉRICO	123
5.4.	SIMULAÇÕES PARA FORÇAS E TOQUES NA CARGA TERMINAL.....	126
5.4.1.	Simulações para Forças Aplicadas na Carga Terminal	126
5.4.2.	Simulações para Forças e Torques Aplicados na Carga Terminal.....	148
CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES		160
CAPÍTULO 7 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS		164
APÊNDICE A - ELEMENTOS DAS MATRIZES E VETORES PARA O CABO DIVIDIDO EM TRÊS ELOS		169
APÊNDICE B - CABO DIVIDIDO EM UM, TRÊS E CINCO ELOS PARA FORÇAS E TORQUES NA CARGA TERMINAL		177
APÊNDICE B.1 - CABO DIVIDIDO CINCO ELOS PARA FORÇAS NA CARGA TERMINAL.....		178
APÊNDICE B.2 - CABO DIVIDIDO EM UM E TRÊS ELOS PARA FORÇAS E TORQUES NA CARGA TERMINAL		179

LISTA DE SÍMBOLOS

$a_i, 1, \dots, n$	Alturas de referência para a definição da energia potencial de cada elo
C	Matriz de coeficientes de atrito da dinâmica do cabo
C_e, C_a, C_t	Submatrizes da matriz C , em relação aos movimentos de elevação, azimute e torção
c_{ia}, c_{ie} e c_{iT}	Coeficientes de atrito devido aos ângulos de azimute, elevação e torção
c_v	Coeficiente de arrasto hidrodinâmico
$C_{RB}(v)$	Matriz de Coriolis-centrípetas da dinâmica do veículo
$C_A(v)$	Matriz de Coriolis-centrípetas de massa adicional
$C_L(R_n, \alpha)$	Coeficiente de sustentação.
C_p, C_q e C_r	Coeficientes de amortecimento ao movimento de rotação do veículo
C_x, C_y e C_z	Coeficientes das forças de arrasto e sustentação
C_k, C_m e C_n	Coeficientes dos momentos produzidos pelas forças de arrasto e sustentação
D_S	Coeficiente de arrasto linear
D_Q	Coeficiente de arrasto quadrático
$D(v)$	Matriz de arrasto e sustentação
E_C	Energia Cinética
E_{C_R}	Energia Cinética devida ao movimento de rotação
E_{C_T}	Energia Cinética devida ao movimento de translação
E_P	Energia Potencial
E_y	Módulo de Young
$\vec{f}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}}), \vec{F}$	Vetor Coriolis-centrífuos
$\vec{F}_{0i}$	Força em cada elo
$\vec{F}_{c0}$	Forças externas no referencial inercial aplicadas à carga terminal
$\vec{F}_c$	Forças externas no referencial do corpo aplicadas à carga terminal

$\vec{F}_0$	Forças externas transformadas para o referencial inercial aplicadas à carga terminal
$\vec{F}_j$	Vetor força no referencial da última articulação
F_D	Força de arrasto do veículo
F_L	Força de sustentação do veículo
f_W	Força Peso do veículo
f_B	Força de empuxo do veículo
g	Aceleração gravitacional
$\vec{G}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}}), \vec{G}$	Vetor de esforços gravitacionais
$h_i, i = 1, \dots, n$	Alturas
H_{01}, H_{02}, H_{12}	Matrizes de transformações homogêneas
I_{Rie}	Momentos de inércia relativos ao movimento de elevação dos elos
I_{Ria}	Momentos de inércia relativos ao movimento de azimute dos elos
I_{Ti}	Momentos de inércia devido ao movimento de torção dos elos
$I(\vec{\theta}), I$	Matriz de inércia completa
I_e, I_a, I_t	Submatrizes da matriz de inércia completa
I_{sec}	Momento de inércia da seção da reta
K	Matriz de constantes elásticas das articulações do cabo
K_e, K_a, K_t	Submatrizes da matriz K , em relação aos movimentos de elevação, azimute e torção
k_{ia}, k_{ie} e k_{iT}	Constantes elásticas devidas aos ângulos de azimute, elevação e torção
L	Lagrangeano do sistema físico
l, l_{comp}	Comprimento do cabo
$l_i, i = 1 \dots, n$	Comprimento de cada elo
m_c	Massa da carga terminal
$m_i, i = 1, \dots, n$	Massas dos elos
m_e	Massa específica do cabo
m_{ea}	Massa específica da água
M_{1n}	Produto de matrizes de rotação
M_{RB}	Matriz de inércia da dinâmica do veículo
M_A	Matriz de inércia de massa adicional

n	Número de elos
N_e, N_a, N_t	Submatrizes da matriz de inércia completa do cabo
$\dot{n}$	Vetor com as acelerações angulares dos hélices
P	Matriz diagonal contendo os momentos de inércia dos propulsores
r_i	Raio de cada elo
$\vec{r}_{i,i-1}, i = n, \dots, 1$	Vetor braço de alavanca
v	Vetor velocidades do veículo no referencial do corpo
t	Tempo
$\vec{T}_m, \vec{T}$	Vetor de torques externos
T_e, T_a, T_t	Submatrizes da matriz de inércia completa do cabo
$\tau_i, i = n - 1, \dots, 1$	Torque em cada articulação
$\vec{\tau}_c$	Torque produzido pelas forças sobre o a carga terminal
$\vec{\tau}_{cr}$	Torque produzido pela carga terminal na última articulação escrito no referencial do corpo
$\vec{\tau}_{ca}$	Torque produzido pela carga terminal na última articulação escrito no referencial da articulação
$\tau_{ia}, \tau_{ie}, \tau_{it}, i = 1, \dots, n$	Torques em azimuth, elevação e torção nas articulações
τ_{ac}, τ_{ec}	Torques em azimuth e elevação na última articulação provocados pela carga terminal
τ_{au}, τ_{eu}	Torques de azimuth e elevação na última articulação
τ_{RB}	Vetor resultante de todas as forças e momentos aplicados no veículo
τ_a	Vetor de forças e momentos de massa adicional
τ	Forças e momentos de propulsão
τ_m	Vetor de torques motores
τ_r	Vetor de toques resistentes
X_{DL}, Y_{DL}, Z_{DL}	Forças resultantes de arrasto e sustentação
K_{DL}, M_{DL}, N_{DL}	Momentos produzidos pelas forças resultantes de arrasto e sustentação

LISTA DE SÍMBOLOS ESPECIAIS

α	Ângulo de ataque do veículo
α_i	Ângulo entre o vetor unitário e o vetor de Força em cada elo
β	Ângulo de deriva do veículo
γ	Ângulo de ataque lateral do veículo
$\vec{\mu}_{i-1,i}, i = n, \dots, 1$	Vetor unitário na direção do elo que une as articulações $i-1$ e i
$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right)$	Derivada total em relação ao tempo
$\frac{\partial L}{\partial \theta_{ie}}, \frac{\partial L}{\partial \theta_{ia}}, \frac{\partial L}{\partial \theta_{it}}$	Derivadas parciais do Lagrangeano
$\theta_{ia}, \theta_{ie}, \theta_{iT}$	Ângulos de azimuth, elevação e torção de cada elo
$\dot{\theta}_{ia}, \dot{\theta}_{ie}, \dot{\theta}_{iT}$	Derivadas em relação ao tempo das posições em azimuth, elevação e torção
$\vec{\theta}$	Vetor de estado com todas as posições angulares dos elos
$\dot{\vec{\theta}}$	Derivada primeira do vetor $\vec{\theta}$ em relação à t
$\ddot{\vec{\theta}}$	Derivada segunda do vetor $\vec{\theta}$ em relação à t
ρ	Massa específica do fluido
∇	Volume do veículo
U	Módulo da velocidade linear do veículo
$X_0 Y_0 Z_0$	Sistema no referencial inercial
$X_i Y_i Z_i$	Sistema de referência com origem na articulação i
(x_c, y_c, z_c)	Coordenadas do centro de massa da carga terminal
(x_i, y_i, z_i)	Coordenadas do centro de massa do i -ésimo elo

LISTA DE ABREVIATURAS

ROV	Remotely Operated Vehicle
SPF	Sistemas de Produção Flutuantes

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Plataformas Petrolíferas (Fonte: http://diariodopresal.wordpress.com/petroleo-e-gas/)	12
Figura 1.2 - Missão típica do ROV (Fonte: http://macaepetroleo.blogspot.com.br/).....	13
Figura 2.1 - Representação esquemática do cabo umbilical	26
Figura 2.2 - Sistema Subaquático (BANERJEE e DO [1]).....	26
Figura 2.3 - Cabo Umbilical dividido em cinco elos	27
Figura 2.4 - Ângulos de azimute, elevação e torção na i-ésima articulação (ROCHA [21])	27
Figura 2.5 - Representação do posicionamento dos eixos coordenados (PEREIRA [18]).....	28
Figura 2.6 - Cabo com quatro partes rígidas (PEREIRA [18])	31
Figura 2.7 - Representação geométrica dos dois primeiros sistemas de referência (PEREIRA [18])	32
Figura 2.8 - Representação esquemática do cabo com três articulações fictícias	38
Figura 2.9 - Primeira simulação, cabo 10 elos; cabo dentro da água; situação de queda livre (frames a cada 1 s).....	55
Figura 4.1 - Representação geral para o cabo dividido em cinco elos	70
Figura 4.2 - Representação dos vetores o qual seus módulos definem a distância entre a carga terminal e a quinta articulação	71
Figura 4.3 - Representação do vetor força $\vec{F}_{05}$ e vetor unitário $\vec{\mu}_{4,5}$	73
Figura 4.4 – Representação dos torques em elevação e azimute.....	80
Figura 4.5 - Primeira simulação, posições x, y e z da carga terminal, 22 elos, força positiva na direção Y até 10 s, entre 10 s e 50 s força positiva na direção X e força positiva na direção Z, após 50 s queda livre, tempo total de simulação 80 s	86
Figura 4.6 - Primeira simulação, trajetória espacial da carga terminal, 22 elos, força positiva na direção Y até 10 s, entre 10 s e 50 s força positiva na direção X e força positiva na direção Z, após 50 s queda livre, tempo total de simulação 80 s	86
Figura 4.7 - Primeira simulação, 22 elos, força positiva na direção Y até 10 s, entre 10 s e 50 s força positiva na direção X e força positiva na direção Z, após 50 s queda livre (frames a cada 1,25 s)	88
Figura 4.8 - Segunda simulação, posições x, y e z da carga terminal, 22 elos, força positiva na direção Y até 10 s, entre 10 s e 70 s força negativa na direção Z, após 70 s queda livre, tempo total de simulação 110 s	89
Figura 4.9 - Segunda simulação, trajetória espacial da carga terminal, 22 elos, força positiva na direção Y até 10 s, entre 10 s e 70 s força negativa na direção Z, após 70 s queda livre, tempo total de simulação 110 s	89
Figura 4.10 - Segunda simulação, 22 elos, força positiva na direção Y até 10 s, entre 10 s e 70 s força negativa na direção Z, após 70 s queda livre (frames a cada 1,715 s)	91

Figura 4.11 - Terceira simulação, posições x, y e z da carga terminal, 26 elos, forças positivas nas direções X e Y até 30 s, após 30 s queda livre, tempo total de simulação 50 s.....	93
Figura 4.12 - Terceira simulação, trajetória espacial da carga terminal, 26 elos, forças positivas nas direções X e Y até 30 s, após 30 s queda livre, tempo total de simulação 50 s	93
Figura 4.13 - Terceira simulação, 26 elos, forças positivas nas direções X e Y até 30 s, após 30 s queda livre (frames a cada 0,78 s)	95
Figura 4.14 - Quarta simulação, posições x, y e z da carga terminal, 26 elos, força positiva na direção X até 10 s, entre 10 s e 60 s força negativa na direção Z, após 60 s força positiva na direção Z, tempo total de simulação 110 s	96
Figura 4.15 - Quarta simulação, trajetória espacial da carga terminal, 26 elos, força positiva na direção X até 10 s, entre 10 s e 60 s força negativa na direção Z, após 60 s força positiva na direção Z, tempo total de simulação 110 s	96
Figura 4.16 - Quarta simulação, 26 elos, força positiva na direção X até 10 s, entre 10 s e 60 s força negativa na direção Z, após 60 s força positiva na direção Z(frames a cada 1,715 s)	98
Figura 4.17- Quinta simulação, posições x, y e z da carga terminal, 26 elos, força positiva na direção Y até 10 s, entre 10 s e 70 s força negativa na direção Z, após 70 s queda livre, tempo total de simulação 110 s	100
Figura 4.18 - Quinta simulação, trajetória espacial da carga terminal, 26 elos, força positiva na direção Y até 10 s, entre 10 s e 70 s força negativa na direção Z, após 70 s queda livre, tempo total de simulação 110 s	100
Figura 4.19- Quinta simulação, 26 elos, força positiva na direção Y até 10 s, entre 10 s e 70 s força negativa na direção Z, após 70 s queda livre (frames a cada 1,715 s).....	102
Figura 4.20 - Sexta simulação, posições x, y e z da carga terminal, 26 elos, força positiva na direção Y até 10 s, entre 10 s e 70 s força positiva na direção Y e força negativa na direção Z, após 70 s queda livre, tempo total de simulação 120 s	103
Figura 4.21 - Sexta simulação, trajetória espacial da carga terminal, 26 elos, força positiva na direção Y até 10 s, entre 10 s e 70 s força positiva na direção Y e força negativa na direção Z, após 70 s queda livre, tempo total de simulação 120 s	103
Figura 4.22 - Sexta Simulação, 26 elos, força positiva na direção Y até 10 s, entre 10 s e 70 s força positiva na direção Y e força negativa na direção Z, após 70 s queda livre (frames a cada 1,875 s).....	105
Figura 4.23 - Sétima simulação, posições x, y e z da carga terminal, 36 elos, força positiva na direção Y até 10 s, entre 10 s e 60 s força negativa na direção Z, após 60 s força positiva na direção Z, tempo total de simulação 110 s	106
Figura 4.24 - Sétima simulação, trajetória espacial da carga terminal, 36 elos, força positiva na direção Y até 10 s, entre 10 s e 60 s força negativa na direção Z, após 60 s força positiva na direção Z, tempo total de simulação 110 s	106
Figura 4.25 - Sétima Simulação, 36 elos, força positiva na direção Y até 10 s, entre 10 s e 60 s força negativa na direção Z, após 60 s força positiva na direção Z frames a cada 1,715 s	108
Figura 5.1 – Representação dos referenciais do corpo e inercial	113
Figura 5.2 – Representação dos atuadores (Adapatado de TAVARES [27]).....	114
Figure 5.3 - Representação da primeira rotação.....	115
Figura 5.4 – Representação geral para o cabo dividido em três elos	119

Figure 5.5 – Representação dos sistemas ao longo da cadeia, para o cabo com três elos.....	120
Figura 5.6- Primeira simulação, posições x, y e z da carga terminal, 16 elos, forças positivas na direção $\vec{F}_{cx}$ e $\vec{F}_{cy}$, após 30 s força negativa na direção $\vec{F}_{cy}$, tempo total de simulação 110 s.....	128
Figura 5.7- Primeira simulação, trajetória espacial da carga terminal, 16 elos, forças positivas na direção $\vec{F}_{cx}$ e $\vec{F}_{cy}$, após 30 s força negativa na direção $\vec{F}_{cy}$, tempo total de simulação 110 s.....	128
Figure 5.8- Primeira simulação, cabo com 16 elos, forças positivas na direção $\vec{F}_{cx}$ e $\vec{F}_{cy}$, após 30 s força negativa na direção $\vec{F}_{cy}$, todas as forças no referencial do corpo (frames a cada 1,715 s).....	130
Figura 5.9 - Segunda simulação, posições x, y e z da carga terminal, 22 elos, força positiva na direção $\vec{F}_{cy}$ até 40 s, entre 40 s e 80 s força positiva na direção $\vec{F}_{cz}$, após 80 s queda livre, tempo total de simulação 110 s.....	132
Figura 5.10 – Segunda simulação, trajetória espacial da carga terminal, 22 elos, força positiva na direção $\vec{F}_{cy}$ até 40 s, entre 40 s e 80 s força positiva na direção $\vec{F}_{cz}$, após 80 s queda livre, tempo total de simulação 110 s.....	132
Figura 5.11 – Segunda simulação, cabo com 22 elos, força positiva na direção $\vec{F}_{cy}$ até 40 s, entre 40 s e 80 s força positiva na direção $\vec{F}_{cz}$, após 80 s queda livre, forças no referencial do corpo (frames a cada 1,715 s).....	134
Figura 5.12 - Terceira simulação, posições x, y e z da carga terminal, 22 elos, força positiva na direção $\vec{F}_{cy}$ até 60 s, entre 60 s e 100 s força negativa na direção $\vec{F}_{cz}$, após 100 s queda livre, tempo total de simulação de 140 s.....	135
Figura 5.13 - Terceira simulação, trajetória espacial da carga terminal, 22 elos, força positiva na direção $\vec{F}_{cy}$ até 60 s, entre 60 s e 100 s força negativa na direção $\vec{F}_{cz}$, após 100 s queda livre, tempo total de simulação de 140 s.....	135
Figura 5.14 - Terceira simulação, cabo com 22 elos, força positiva na direção $\vec{F}_{cy}$ até 60 s, entre 60 s e 100 s força negativa na direção $\vec{F}_{cz}$, após 100 s queda livre, forças no referencial do corpo (frames a cada 2,185 s).....	137
Figura 5.15 - Quarta simulação, posições x, y e z da carga terminal, 22 elos, força positiva na direção $\vec{F}_{cy}$ até 60 s, entre 60 s e 100 s força positiva na direção $\vec{F}_{cz}$, após 100 s queda livre, tempo total de simulação de 140 s.....	139
Figura 5.16 - Quarta simulação, trajetória espacial da carga terminal, 22 elos, força positiva na direção $\vec{F}_{cy}$ até 60 s, entre 60 s e 100 s força positiva na direção $\vec{F}_{cz}$, após 100 s queda livre, tempo total de simulação de 140 s.....	139
Figura 5.17 - Quarta simulação, cabo com 22 elos, força positiva na direção $\vec{F}_{cy}$ até 60 s, entre 60 s e 100 s força positiva na direção $\vec{F}_{cz}$ após 100 s queda livre, forças no referencial do corpo (frames a cada 2,185 s).....	141
Figura 5.18 - Quinta simulação, posições x, y e z da carga terminal, 22 elos, forças positivas na direção $\vec{F}_{cx}$ e $\vec{F}_{cy}$ até 30 s, entre 30 s e 70 s força positiva na direção $\vec{F}_{cz}$, após 70 s queda livre, tempo total de simulação de 110 s.....	142

Figura 5.19 - Quinta simulação, trajetória espacial da carga terminal, 22 elos, forças positivas na direção $\vec{F}_{cx}$ e $\vec{F}_{cy}$ até 30 s, entre 30 s e 70 s força positiva na direção $\vec{F}_{cz}$, após 70 s queda livre, tempo total de simulação de 110 s	142
Figura 5.20 - Quinta simulação, cabo com 22 elos, forças positivas na direção $\vec{F}_{cx}$ e $\vec{F}_{cy}$ até 30 s, entre 30 s e 70 s força positiva na direção $\vec{F}_{cz}$, após 70 s queda livre, forças no referencial do corpo (frames a cada 1,715 s)	144
Figura 5.21 - Sexta simulação, posições x, y e z da carga terminal, 26 elos, forças positivas na direção $\vec{F}_{cy}$ e $\vec{F}_{cz}$ até 70 s, entre 70 s e 130 s força positiva na direção $\vec{F}_{cy}$ e força negativa na direção $\vec{F}_{cz}$, após 130 s queda livre, tempo total de simulação de 170 s	145
Figura 5.22 - Sexta simulação, trajetória espacial da carga terminal, 26 elos, forças positivas na direção $\vec{F}_{cy}$ e $\vec{F}_{cz}$ até 70 s, entre 70 s e 130 s força positiva na direção $\vec{F}_{cy}$ e força negativa na direção $\vec{F}_{cz}$, após 130 s queda livre, tempo total de simulação de 170 s	145
Figura 5.23 - Sexta simulação, cabo com 26 elos, forças positivas na direção $\vec{F}_{cy}$ e $\vec{F}_{cz}$ até 70 s, entre 70 s e 130 s força positiva na direção $\vec{F}_{cy}$ e força negativa na direção $\vec{F}_{cz}$, após 130 s queda livre, forças no referencial do corpo (frames a cada 2,655 s).	147
Figura 5.24 - Primeira simulação, ângulos de torção negativos, cabo com 6 elos, tempo total de simulação 16 s.	150
Figura 5.25 - Primeira simulação, posições x, y e z da carga terminal, cabo com 6 elos, tempo total de simulação 16 s.	151
Figura 5.26 - Primeira simulação, trajetória espacial da carga terminal, 6 elos, tempo total de simulação 16 s	151
Figura 5.27 - Primeira simulação, cabo com 6 elos, forças no referencial do corpo aplicadas por 16 s de simulação (frames a cada 0,5 s).	152
Figura 5.28 - Segunda simulação, ângulos de torção negativos, cabo com 8 elos, tempo total de simulação 12 s.	153
Figura 5.29 - Segunda simulação, posições x, y e z da carga terminal, cabo com 8 elos, tempo total de simulação 12 s.	154
Figura 5.30- Segunda simulação, trajetória espacial da carga terminal, 8 elos, tempo total de simulação 12 s	154
Figura 5.31 - Segunda simulação, cabo com 8 elos, forças no referencial do corpo, tempo total de simulação 12 s (frames a cada 0,375 s)	155
Figura 5.32 - Terceira simulação, ângulos de torção positivos, cabo com 8 elos, tempo total de simulação 14s.	156
Figura 5.33 - Terceira simulação, posições x, y e z da carga terminal, cabo com 8 elos, tempo total de simulação 14 s.	157
Figura 5.34 - Terceira simulação, trajetória espacial da carga terminal, 8 elos, tempo total de simulação 14 s	157
Figura 5.35 - Terceira simulação, cabo com 8 elos, forças no referencial do corpo, tempo total de simulação 14 s (frames a cada 0,435 s)	158

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Parâmetros físicos adotados	54
Tabela 4.1 - Parâmetros físicos adotados para forças no referencial inercial aplicadas na carga terminal.....	84
Tabela 4.2 – Tempos computacionais gastos para simulações com forças aplicadas no referencial inercial	110
Tabela 5.1 - Parâmetros físicos adotados para forças no referencial do corpo aplicadas na carga terminal.....	127
Tabela 5.2 - Tempos computacionais gastos para simulações com forças aplicadas no referencial do corpo	148
Tabela 5.3 - Parâmetros adotados para forças e torques na carga terminal.....	149
Tabela 5.4 - Tempos computacionais gastos para simulações com forças e torques na carga terminal.....	159

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1. MOTIVAÇÃO PARA A REALIZAÇÃO DO TRABALHO

Existem na literatura muitos estudos que tratam a modelagem dinâmica de estrutura flexíveis do tipo cabo e diversas aplicações, como por exemplo, Sistemas de Produção Flutuantes (SPF), como mostra a Figura 1.1, e existem estudos que tratam da modelagem dinâmica de veículos subaquáticos, como por exemplo, veículos submersíveis operado remotamente (ROV – Remotely Operated Vehicle), os quais permitem observações remotas do fundo do mar e de estruturas submarinas. Apesar de vários trabalhos sobre a modelagem dinâmica do tipo cabo e modelagem dinâmica de veículos subaquáticos, não há muito na literatura trabalhos sobre o acoplamento destas duas dinâmicas.

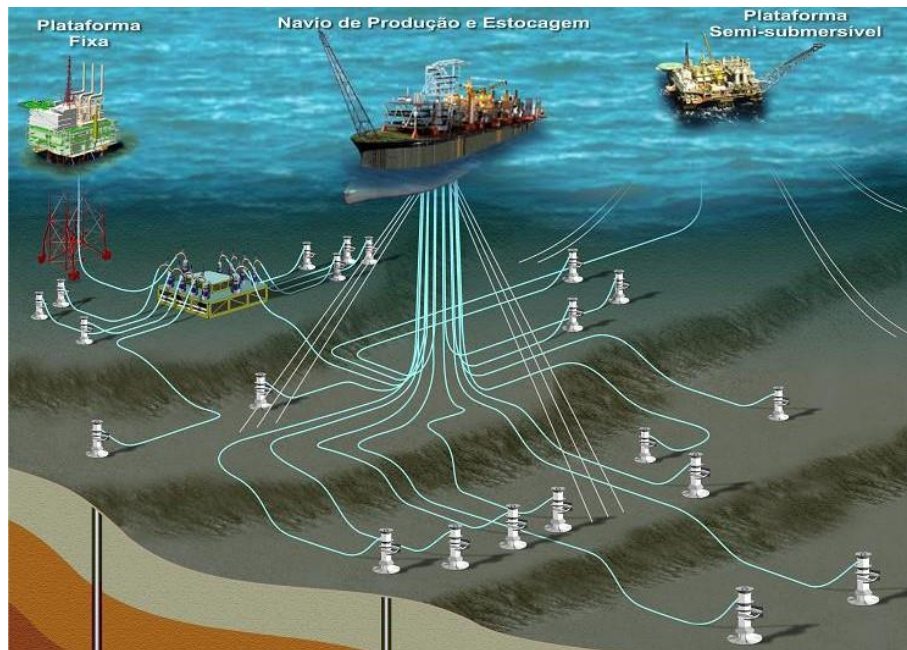


Figura 1.1 - Plataformas Petrolíferas (Fonte: <http://diariodopresal.wordpress.com/petroleo-e-gas/>)

O ROV é conectado à superfície a partir de um cabo umbilical e este cabo é o responsável por fornecer energia ao ROV e interligar os sinais de comando e de controle, transmitindo, por exemplo, imagens das câmeras de vídeo embarcadas, informações dos sensores presentes no ROV, etc, como mostra a Figura 1.2.

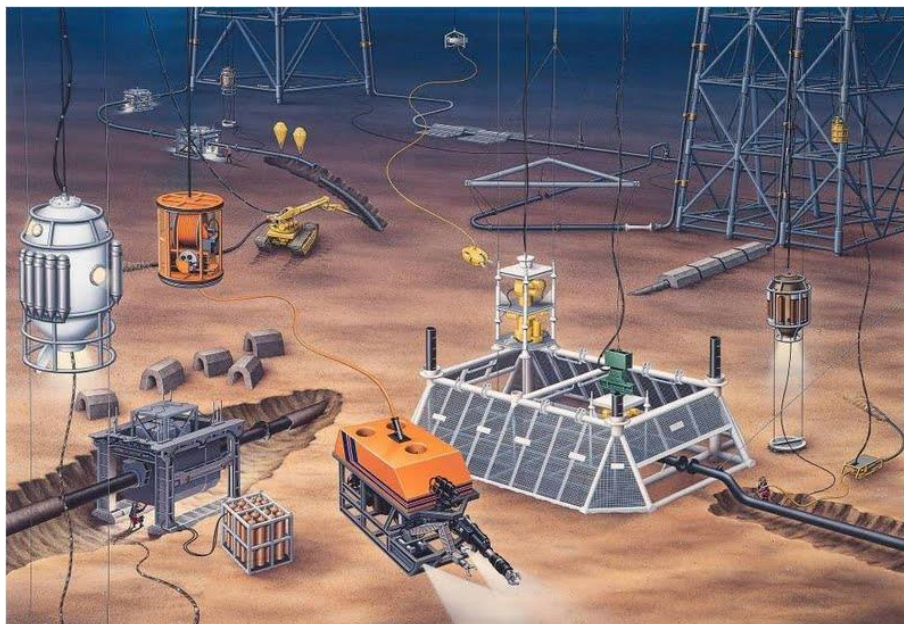


Figura 1.2 - Missão típica do ROV (Fonte: <http://macaepetroleo.blogspot.com.br/>)

As modelagens dinâmicas do Cabo Umbilical e do Veículo Subaquático não tripulado do tipo ROV apresentam grandes dificuldades em razão das não linearidades e da complexidade destes sistemas físicos e isto justifica os poucos trabalhos existentes na literatura sobre o acoplamento destas duas dinâmicas. Neste trabalho considera-se que o cabo é formado por pequenas partes rígidas (elos) conectadas por articulações fictícias flexíveis permitindo assim movimentos de elevação, azimute e torção no espaço tridimensional, movimentos estes relativos ao elo anterior da cadeia articulada. Ao considerar-se o ROV fixo a uma das extremidades do cabo, a dinâmica acoplada torna-se mais complexa, pois o veículo subaquático do tipo ROV tem dinâmica própria influenciada principalmente por seus atuadores.

Ao desenvolver-se o modelo dinâmico do cabo, observa-se que existem limitações, pois há um grande crescimento das equações à medida que se aumenta o número de elos rígidos, inviabilizando assim o desenvolvimento manual das equações do modelo dinâmico para além de quatro elos. ZANELA [30], observando esse fato, desenvolveu algoritmos genéricos que permitem gerar de forma automática os modelos dinâmicos independentemente da quantidade de elos considerados para representar a flexibilidade contínua.

Em (ROCHA [21]) apresenta-se um modelo para o acoplamento da dinâmica do veículo subaquático do tipo ROV com a dinâmica do cabo umbilical, considerando-se o modelo do cabo desenvolvido via formalismo discreto por (PEREIRA [18]). Esse acoplamento foi feito utilizando um cabo com no máximo cinco elos e ainda, sem a

transmissão de torques do ROV para o cabo, ou seja, apenas considerando-se as forças exercidas pelos atuadores do ROV, como se este fosse uma carga puntual.

A presente dissertação propõe desenvolver um acoplamento da modelagem dinâmica de veículos do tipo ROV com a modelagem dinâmica de estruturas flexíveis do tipo cabo, a partir de um desenvolvimento matemático modelando forças e torques que o ROV causará em todas as articulações fictícias do cabo, relativo a uma dinâmica com n elos para representar a flexibilidade contínua do cabo. No entanto, devido à complexidade e extensão das equações obtidas desta forma, torna-se muito difícil o desenvolvimento manual deste modelo, sendo, portanto, fundamental o desenvolvimento de algoritmos genéricos, que possibilitem a obtenção das equações para torques e forças presentes no cabo e no veículo para qualquer número de elos rígidos considerados para representar a flexibilidade contínua do cabo.

A principal contribuição deste trabalho consiste em desenvolver algoritmos genéricos, capazes de gerar um modelo dinâmico de estruturas flexíveis do tipo cabo, acoplado a uma carga terminal (ROV) de forma automática, para um número qualquer de graus de liberdade, ou seja, considerando-se qualquer número de elos. Para isto, conforme será visto posteriormente, considera-se um cabo fixo em uma de suas extremidades a uma plataforma ou embarcação e, em sua outra extremidade, considera-se um ROV como carga terminal, na qual são aplicadas forças e torques, sendo que estas geram forças e torques no cabo inserido no meio subaquático.

Foi feito um estudo detalhado de como ocorre o crescimento das matrizes e vetores oriundos das equações geradas na modelagem do cabo, estas desenvolvidas por (ZANELA[30]) e análises do crescimento das equações para forças e torques, presentes no cabo umbilical e na própria carga terminal, a partir da ideia de que o comportamento da natureza segue padrões lógicos de crescimento. Para tal, foram obtidas equações para forças e torques com o cabo dividido em um, três e cinco elos, conforme será explicado nos próximos Capítulos.

Uma vez estudado o crescimento das equações associadas ao acoplamento dinâmico, foi possível obter equações gerais, permitindo assim o desenvolvimento de algoritmos genéricos para a determinação automática do modelo, para qualquer n elos considerados. A partir dos algoritmos genéricos, não há problemas relacionados com o desempenho do sistema computacional quanto a geração automática do modelo dinâmico. Porém, as simulações têm um tempo de processamento crescente com o aumento do número de elos, conforme ficará claro nos Capítulos seguintes.

1.2. OBJETIVOS

1.2.1. Objetivos Gerais

O objetivo geral do presente trabalho é desenvolver uma proposta de acoplamento das dinâmicas de cabos umbilicais e veículos subaquáticos do tipo ROV a partir de algoritmos genéricos capazes de gerar modelos dinâmicos para cabos contendo n números de elos e assim efetuar simulações, analisando-se o comportamento da carga terminal e do cabo umbilical sob a influência de forças e torques aplicados à carga.

1.2.2. Objetivos Específicos

Primeiramente realizar pesquisas na literatura sobre trabalhos relacionados com a modelagem dinâmica de estruturas flexíveis do tipo cabo e ainda com a modelagem dinâmica de veículos subaquáticos do tipo ROV.

Realizar uma análise do comportamento do crescimento das equações para forças e torques presentes no cabo umbilical e na própria carga terminal para os casos onde o cabo é dividido em um, três e cinco elos, a fim de se obter equações gerais que permitam o desenvolvimento de algoritmos genéricos capazes de gerar automaticamente o modelo dinâmico para n elos considerados.

Uma vez findo o desenvolvimento das equações e dos algoritmos genéricos, os algoritmos serão implementados utilizando-se o *software* MATLAB[®] para a realização de diversas simulações, cujos resultados são analisados qualitativamente a fim de avaliar a consistência física das respostas dinâmicas do modelo acoplado.

1.3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta seção é apresentado um resumo sobre estudos teóricos realizados durante a elaboração desta dissertação, explicitando-se trabalhos que de alguma forma contribuíram para o desenvolvimento da mesma.

A seguir, são apresentados alguns comentários sobre algumas referências estudadas, abrangendo modelagem dinâmica de cabos umbilicais e modelagem dinâmica de veículos subaquáticos.

F.A. Rochinha; R. Sampaio; P. Le Tallec (1990)

O Método do Lagrangeano Aumentado no Estudo para Cabos Umbilicais

O trabalho apresenta um modelo numérico para cabos umbilicais hiperelásticos que experimentam grandes deslocamentos, onde surgem efeitos complexos como o acoplamento flexão-torção. O modelo mecânico é um sistema não-linear e para a solução é proposta uma formulação variacional que permite uma decomposição via Lagrangeano Aumentado. Ao final são apresentados alguns resultados numéricos que evidenciam a capacidade e a eficácia do método proposto.

J.P.V.S da Cunha (1992)

Projeto e Estudo de Simulações de um Sistema de Controle a Estrutura Variável de um Veículo Submarino de Operação Remota

Este trabalho propõe um sistema de controle robusto para o rastreamento preciso de trajetórias em um veículo submarino de operação remota (VOR). São adequadas e aplicadas algumas técnicas de controle já existentes e aparentemente apropriadas ao controle automático da posição de um VOR. As técnicas selecionadas foram comparadas em diversos aspectos, tal como a simplicidade de implementação e controle. Essas técnicas foram analisadas através de resultados de simulação.

T.I. Fossen (1994)*Guidance and Control of Ocean Vehicles*

Este livro abrange a concepção do sistema de controle para todos os tipos de veículos marinhos, incluindo-se submarinos não tripulados. O livro é dividido em sete Capítulos, sendo que o Capítulo 1 é a introdução e fala de maneira geral do livro. O Capítulo 2 apresenta um estudo sobre as modelagens cinemática e dinâmica de veículos subaquáticos. O Capítulo 3 trata da modelagem das perturbações ambientais, em termos de vento, ondas e correntes marinhas. O Capítulo 4 trata da estabilidade e projeto de sistemas de controle de veículos subaquáticos. Os Capítulos 5, 6 e 7 apresentam o estudo da dinâmica, estabilidade, manobras e projetos de controle de navios e outras embarcações de superfície.

A.K. Banerjee; V.N. Do (1995)*Deployment Control of a Cable Connecting a Ship to an Underwater Vehicle*

Este artigo descreve o desenvolvimento de um modelo dinâmico de cabo subaquático e um sistema de controle que permite a implantação, regulamentação e recuperação de veículo submarino não tripulado ligado a um navio. Um algoritmo para um cabo de massa variável sujeito a forças hidrodinâmicas e restrições de movimento é usado para simular a dinâmica do sistema. A dinâmica do veículo subaquático é considerada separada do cabo, mas com a tensão do cabo afetando não linearmente a velocidade do veículo e criando assim uma restrição sobre o movimento deste.

A.E.L. Pereira (1999)*Um Estudo Sobre Modelagem Matemática de Estruturas Flexíveis*

Nessa dissertação foi desenvolvida e validada a técnica do Formalismo Discreto. Estudou-se a modelagem dinâmica de uma estrutura flexível no plano, sendo a mesma articulada em uma extremidade e livre na outra. Neste formalismo a estrutura foi dividida em duas, três e quatro partes rígidas conectadas por articulações elásticas, permitindo movimento de elevação no espaço bidimensional.

M.A. Vaz; M.H. Patel (2000)

Three-Dimensional Behaviour of Elastic Marine Cables in Sheared Currents

Este artigo apresenta a formulação e solução de equações que podem ser usadas para analisar o comportamento tridimensional de qualquer cabo subaquático. A formulação descreve a geometria elástica do cabo em termos de dois ângulos, elevação e azimute, que estão relacionados com coordenadas cartesianas pela compatibilidade das relações geométricas. Estas relações são combinadas com as equações de equilíbrio do cabo para obter um sistema de equações diferenciais não-lineares, que são integradas numericamente pelo método de Runge-Kutta de quarta e quinta ordem. São apresentados resultados para tensão, ângulos, geometria e alongamento do cabo e para isso tem-se três exemplos: Instalação de um cabo de fibra óptica marinha, análise estatística de uma linha de amarração em águas profundas e a resposta de um cabo de telecomunicações para um perfil de corrente multidirecional.

C.C. Machado; A.E.L. Pereira; S.C.P. Gomes; A.L. de Bortoli (2002)

Um Algoritmo para Modelagem Dinâmica de Manipuladores Flexíveis

Nesse artigo foi proposto um novo algoritmo capaz de determinar de forma simplificada as equações diferenciais da dinâmica de uma estrutura do tipo manipulador com um único elo flexível. Ainda, foram desenvolvidas funções de transferência analíticas para este problema específico, as quais são importantes para validar o modelo discreto proposto na forma de algoritmo. O algoritmo foi desenvolvido de modo que simplifique totalmente a obtenção do modelo para qualquer número de modos flexíveis considerados, além de introduzir modificações, em relação ao formalismo discreto original, que aumentam a precisão do modelo discreto. Também é apresentado um estudo analítico, o qual foi de fundamental importância à validação do modelo discreto estudado.

L.A. Isoldi; M.A.V. dos Santos (2003)*Análise Numérica da Dinâmica de Cabos Altamente Extensíveis*

Neste artigo foi implementado computacionalmente a solução de um sistema de equações capaz de descrever o movimento de cabos extensíveis em ruptura, já que a mecânica de cabos altamente extensíveis deve ser estudada numericamente. Empregaram-se os parâmetros de Euler para representar a rotação relativa entre os sistemas de coordenadas local e global adotados, evitando assim a singularidade associada aos ângulos de Euler. Foi utilizado um esquema implícito de diferenças finitas, a fim de obter a solução numérica para as equações globais utilizadas devida a possibilidade do esforço axial em algum ponto do cabo atingir valor nulo ou negativo. Este modelo numérico foi usado para analisar o comportamento dinâmico de um cabo sintético durante e após sofrer uma ruptura.

A.M. Tavares (2003)*Um Estudo sobre a Modelagem e Controle de Veículos Subaquáticos Não Tripulados*

Esta dissertação trata das modelagens cinemática e dinâmica e controle de veículos subaquáticos não tripulados. São comparadas vantagens e desvantagens da modelagem cinemática descrita por ângulos de Euler, parâmetros de Euler e parâmetros de Rodrigues. A modelagem dinâmica inclui a interação da estrutura mecânica do veículo com o meio subaquático e a ação dos propulsores sobre o veículo.

E.C. Souza (2003)*Modelagem e Controle de Veículos Submarinos Não Tripulados*

Esta dissertação discute questões de técnicas de controle aplicadas aos veículos submarinos e apresenta uma formulação matemática dos propulsores levando em consideração os efeitos eletromecânicos do propulsor. Apresenta ainda um estudo teórico sobre a modelagem cinemática e a modelagem dinâmica de veículos submarinos não tripulados. Além disso, apresenta um modelo com cabo umbilical, para o caso particular do veículo ser operado remotamente, com o objetivo de reproduzir os efeitos de distúrbios

presentes quando operado sob condições reais. Porém, este modelo é restrito ao caso em que o cabo e o veículo estão contidos em um único plano.

A.M. Tavares, S.C.P. Gomes e M.A.B. Cunha (2004)

Modelagem Dinâmica e Controle Robusto de um Veículo Subaquático

Este artigo desenvolve um estudo sobre a modelagem de veículos subaquáticos não tripulados, incluindo cinemática, dinâmica do corpo rígido, forças e torques atuantes no veículo. É implementado um controlador automático de posição com linearização por realimentação. São apresentados resultados de simulações do comportamento do veículo sob a ação do controlador projetado.

M.C. Fang; C.S. Hou; J.H. Luo (2007)

On The Motions of the Underwater Remotely Operated Vehicle With the Umbilical Cable Effect

Neste artigo desenvolveu-se um modelo hidrodinâmico de simulação para um veículo ROV incluindo o efeito do cabo umbilical, e este efeito é considerado através do método do Lagrangeano Aumentado. Foram feitas simulações com e sem o efeito do cabo umbilical, sendo que os resultados mostraram que o cabo interfere significativamente no movimento do ROV e não deve ser negligenciado nas simulações.

D.C.S. Cordovés (2008)

Análise de Confiabilidade Estrutural de Cabos Umbilicais

A presente dissertação propôs um modelo para avaliar a confiabilidade estrutural do cabo umbilical, levando em consideração os mecanismos de falha por escoamento e por fadiga mecânica. Foram consideradas tensões originadas pelos carregamentos das ondas do mar atuantes no cabo umbilical durante sua vida em serviço, assim como a geometria e as propriedades mecânicas das armaduras de tração utilizadas nos umbilicais da plataforma. O modelo do cabo umbilical foi feito pelo método dos Elementos Finitos, e através dessa

formulação, determinou-se o histórico de tensões atuantes na estrutura, estimou-se as funções de densidade de probabilidade das tensões estática e alternada corrigidas para curto e longo prazo, as quais caracterizam o carregamento atuante provocado pelas ondas.

G.R. Marzo (2010)*Aplicação do Método dos Elementos Finitos na Análise de Tensões Induzidas em Cabos Umbilicais*

Nessa presente dissertação visa a aplicação de metodologias de análise de tensões induzidas em cabos de sinal de cabos umbilicais a partir da utilização do Método dos Elementos Finitos. O objetivo da aplicação é avaliar as tensões induzidas nos condutores de sinal a partir do acoplamento mútuo de fluxo magnético originados das correntes dos circuitos de potência do cabo umbilical. Foram apresentados modelos de condutores elétricos com ênfase no detalhamento geométrico, simplificações consideradas, adoção de parâmetros de suporte e condições de contorno. A avaliação das tensões induzidas nos condutores de sinal foi realizada tanto para simulações bidimensionais como para simulações tridimensionais.

A.E.L. Pereira (2010)*O Método da Decomposição de Adomian Aplicado à Interação Fluido-Estrutura de um Cabo*

Nessa tese investigou-se a interação fluido-estrutura de um cabo submerso em um fluido, feita a partir do acoplamento entre a modelagem da dinâmica do cabo com o movimento do fluido. Na modelagem dinâmica do cabo criou-se um formalismo discreto, que tem como base o formalismo de Euler-Lagrange. O formalismo discreto é criado para a obtenção das equações de movimento de cabos umbilicais, divididos em elos rígidos conectados por articulações elásticas fictícias e permitindo movimentos tridimensionais. Para o movimento de fluido propõe-se o escoamento sobre o cilindro circular, obtendo-se as soluções analíticas das equações de Navier-Stokes através do Método da decomposição de Adomian.

I.R.P. Rocha (2013)*Modelagem Matemática de Cabos Umbilicais e Veículos Subaquáticos Não Tripulados*

Essa dissertação apresenta um formalismo acoplando a modelagem dinâmica do cabo umbilical e a do veículo ROV (Remotely Operated Vehicle). Para desenvolver o modelo dinâmico do veículo considerou-se a interação do veículo com o meio aquático e a ação dos propulsores. Foi modelada a perturbação provocada pelo cabo a partir do formalismo discreto. Foram feitas simulações em que o ROV é conectado a extremidade livre do cabo, sendo, portanto a sua carga terminal e possuindo dinâmica própria, influenciada principalmente pelos seus atuadores. Estas simulações forneceram resultados fisicamente esperados. Porém, o acoplamento não foi generalizado, ou seja, o mesmo foi conseguido apenas para casos particulares de modelos de cabo com no máximo cinco elos rígidos na cadeia poliarticulada.

E.B. Zanela (2013)*Modelagem Analítica de Estruturas do Tipo Cabo para Aplicações Subaquáticas*

A presente dissertação considera o método do Formalismo Discreto para a modelagem dinâmica tridimensional de estruturas flexíveis do tipo cabo a partir do Formalismo de Euler-Lagrange. A estrutura flexível contínua é aproximada por uma equivalente discreta, formada por elos rígidos conectados por articulações fictícias elásticas. Cada articulação contém três graus de liberdade, permitindo movimentos de elevação, azimute e torção. Verificou-se que o tamanho das equações cresce muito com o aumento do número de graus de liberdade considerados, tornando-se assim inviável a obtenção analítica das equações do modelo dinâmico. Nesta dissertação, a autora propôs o uso de algoritmos genéricos que permitem gerar de forma automática os modelos dinâmicos, independentemente do número de elos considerados. Foram realizadas simulações com os modelos dinâmicos considerando-se diversos casos em relação ao número de elos e os resultados obtidos foram fisicamente consistentes.

1.4. ROTEIRO DO TRABALHO

Esta dissertação está dividida em sete Capítulos. O presente Capítulo trata de uma introdução geral, contendo explicações básicas sobre o tema de pesquisa, bibliografias existentes nas áreas, contribuições e objetivos a serem alcançados.

No Capítulo 2 são apresentados os fundamentos teóricos para o desenvolvimento do modelo dinâmico de estruturas flexíveis do tipo cabo, exemplificando-se o modelo dinâmico para o caso de três elos. Além disso, são mostrados os algoritmos genéricos para a geração automática do modelo dinâmico com n graus de liberdade desenvolvidos por (ZANELA[30]) e é realizada a simulação em malha aberta do cabo em queda livre dentro da água.

O Capítulo 3 aborda a modelagem dinâmica de veículos subaquáticos, considerando-se aspectos hidrodinâmicos, corrente marinha e ação dos propulsores.

No Capítulo 4 são obtidos torques originados em cada articulação fictícia e as forças originadas em cada elo, devidas às forças externas no referencial inercial atuantes na carga terminal, para o caso do cabo dividido em cinco elos. Foram desenvolvidas equações gerais para forças e torques no cabo para a formulação do algoritmo capaz de gerar automaticamente o modelo dinâmico com um número n qualquer de elos. Após a apresentação do modelo, são realizadas simulações para análise do comportamento do cabo e da carga terminal.

O Capítulo 5 aborda as forças e torques provocados no cabo e torques sobre a própria carga terminal, oriundos das forças no referencial do corpo aplicadas à carga terminal, para o caso do cabo dividido em um e três elos. Foram detalhadas as transformações efetuadas entre os sistemas de referência utilizados. Desenvolveram-se equações gerais para a obtenção de um algoritmo genérico capaz de gerar automaticamente o modelo dinâmico para um número n qualquer de elos. Após a apresentação do modelo, são realizadas simulações com e sem troques na carga terminal, para análise do comportamento do cabo e da carga terminal.

No Capítulo 6 são apresentadas as conclusões e considerações finais. Após, no Capítulo 7, são apresentadas as referências bibliográficas.

No Apêndice A apresentam-se as equações dos elementos das matrizes e vetores para o cabo dividido em três elos.

No Apêndice B, em suas subdivisões B.1 e B.2, apresentam-se as equações adicionais dos elementos do vetor de esforços externos, a partir da determinação dos torques nas articulações, para os casos desenvolvidos nos Capítulos 4 e 5.

CAPÍTULO 2

MODELAGEM DINÂMICA DO CABO UMBILICAL

No presente Capítulo será apresentada, a partir da formulação de Euler-Lagrange, a modelagem matemática para a dinâmica de estruturas do tipo cabo, fixa em sua extremidade superior e livre na outra, na qual é colocada uma carga de massa m_c . Serão apresentados ainda algoritmos genéricos para a geração automática do modelo dinâmico para qualquer número de elos considerados, com objetivo de representar de forma discreta a flexibilidade contínua do cabo.

Existem diversas aplicações envolvendo estruturas flexíveis do tipo cabo, que ocorrem principalmente em sistemas subaquáticos, como por exemplo, cabos umbilicais de ROVs, cabos de ancoragem de navios, de amarraduras de plataforma de petróleo, cabos para reboque de embarcações, *risers*, etc. Estas aplicações constituem a principal motivação para o desenvolvimento de estudos envolvendo a modelagem dinâmica de cabos.

A determinação do modelo dinâmico do cabo é importante para o desenvolvimento de um sistema de controle confiável dos veículos ROVs. A determinação do modelo dinâmico é um tanto complexa, devido às não linearidades presentes no sistema, à flexibilidade estrutural do cabo no espaço tridimensional e à identificação de interações do cabo com o meio no qual ele está submerso.

O presente Capítulo apresenta inicialmente as equações da dinâmica obtidas a partir da formulação de Lagrange, formalismo desenvolvido originalmente por (PEREIRA [18]), cujo fundamento principal é dividir o cabo (estrutura contínua) em diversas partes rígidas (elos) conectados por articulações elásticas fictícias. Posteriormente são mostrados algoritmos genéricos para a geração automática do modelo dinâmico com n graus de liberdade desenvolvidos por (ZANELA [30]) e mostrada uma simulação em malha aberta com o cabo em queda livre dentro da água.

2.1. MODELAGEM DO CABO

O modelo desenvolvido no presente trabalho consiste em dividir o cabo em pequenos elos conectados por articulações fictícias flexíveis que permitem três movimentos livres independentes, intitulados azimuth, elevação e torção (ZANELA [30]). Estes movimentos são relativos ao elo anterior da cadeia articulada (PEREIRA [18]). Cada articulação fictícia possui

natureza elástica e, portanto, três constantes elásticas com seus respectivos amortecimentos constituem parâmetros que definem a natureza física da articulação. Em resumo, o modelo consiste em uma formulação de um método que permite determinar o Lagrangeano do sistema de forma algorítmica, independentemente do número de elos utilizados para dividir a estrutura flexível.

Considera-se um cabo com a extremidade superior articulada a uma base e a extremidade inferior conectada a uma massa m_c , conforme indicado na Figura 2.1. Essa massa pode ser substituída por um veículo subaquático do tipo ROV (Remotely Operated Vehicle), ver Figura 2.2.

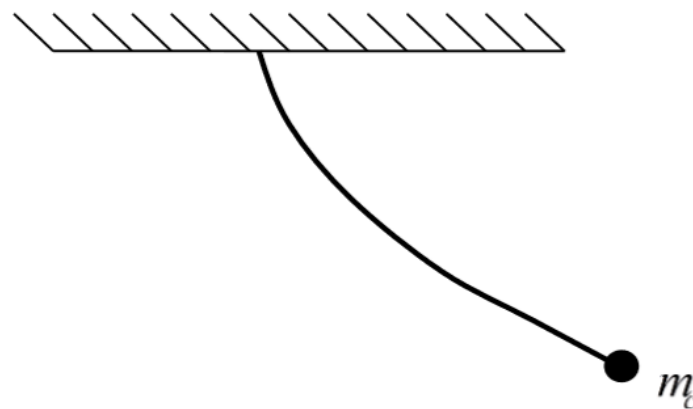


Figura 2.1 - Representação esquemática do cabo umbilical

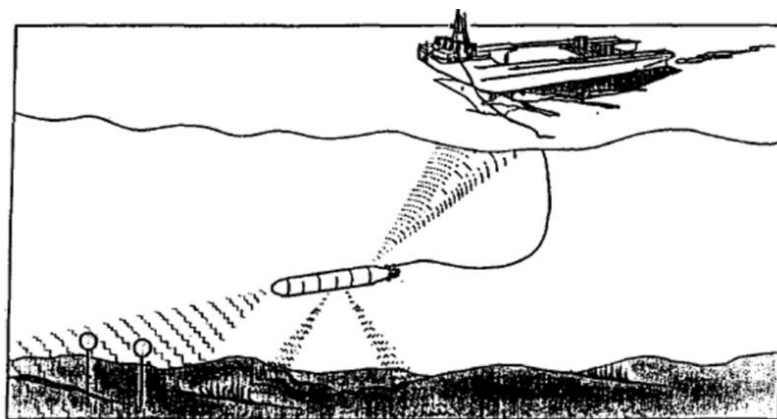


Figura 2.2 - Sistema Subaquático (BANERJEE e DO [1])

Neste caso, o cabo é articulado na sua extremidade superior e livre na outra, podendo conter um ROV e, portanto, é necessário que a orientação e a posição da extremidade livre deste cabo sejam conhecidas. A orientação da extremidade livre desse cabo é definida por intermédio de rotações puras e a posição por translações.

O cabo é dividido em pequenos elos de comprimentos $l_1, l_2, \dots, l_n$, conectados por articulações fictícias, como mostra a Figura 2.3.

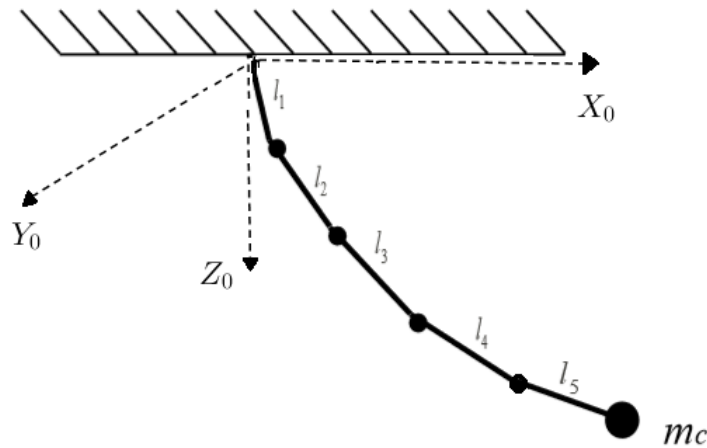


Figura 2.3 - Cabo Umbilical dividido em cinco elos

Para a determinação da posição de cada elo e da carga terminal, é associado um sistema de referência na extremidade fixa do cabo (superior), denominado sistema $X_0Y_0Z_0$, e um sistema de eixos coordenados $X_iY_iZ_i$ para cada articulação, com $i \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i \leq n - 1$. Em cada articulação são considerados os ângulos de azimuth, elevação e torção do cabo, ou seja, na i -ésima articulação tem-se que, θ_{ia} é o ângulo de azimuth, correspondente ao ângulo formado pela projeção do elo no plano horizontal X_iY_i com sentido positivo do eixo Y_i , θ_{ie} é o ângulo de elevação, corresponde ao ângulo formado entre a reta suporte do elo e o eixo vertical Z_i e o θ_{ir} é o ângulo de torção, corresponde à rotação em torno do próprio eixo do elo, conforme mostra a Figura 2.4.

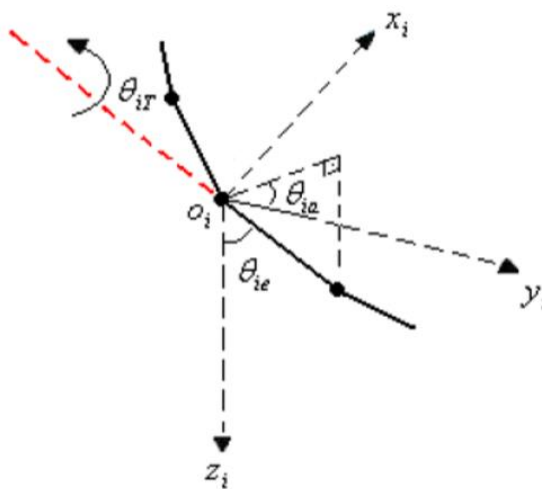


Figura 2.4 - Ângulos de azimuth, elevação e torção na i -ésima articulação (ROCHA [21])

Ao desenvolver-se o modelo dinâmico do cabo, deve-se primeiramente definir o sistema inicial $X_0Y_0Z_0$, que coincide com a extremidade fixa do cabo e, posteriormente, determinar um referencial para cada articulação $X_iY_iZ_i$ da seguinte forma: o eixo O_iZ_i é paralelo ao eixo OZ_0 (sempre na direção vertical), o eixo O_iY_i é paralelo à projeção horizontal do elo anterior à i -ésima articulação (projeção no plano horizontal) e o eixo O_iX_i é ortogonal ao eixo O_iY_i , conforme Figura 2.5.

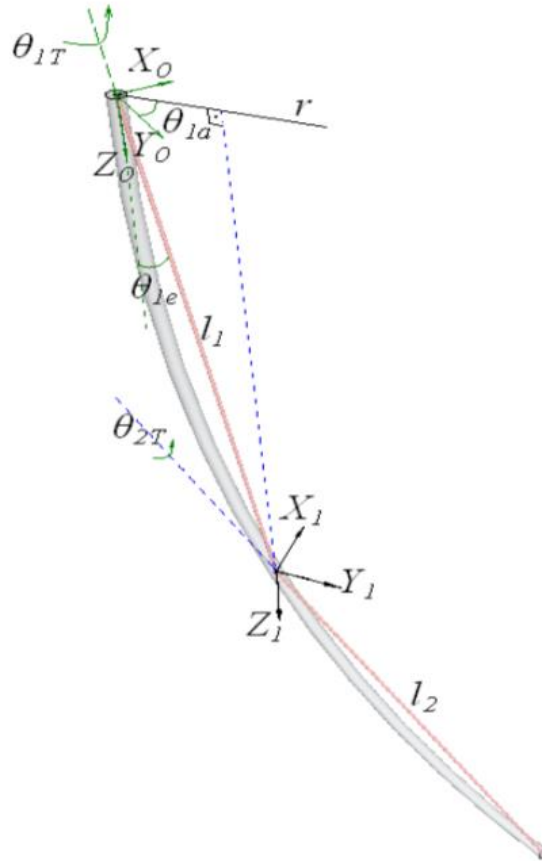


Figura 2.5 - Representação do posicionamento dos eixos coordenados (PEREIRA [18])

Os elos têm massas concentradas nos centros de massas, com coordenadas $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), \dots, (x_n, y_n, z_n)$ e possuem as respectivas massas $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$, enquanto (x_c, y_c, z_c) são coordenadas do centro de massa da carga terminal de massa m_c . Na i -ésima articulação são considerados três constantes elásticas k_{ia}, k_{ie}, k_{iT} , devido aos ângulos de azimute, elevação e torção respectivamente.

O Lagrangeano do sistema físico é definido por:

$$L = E_C - E_P \quad (2.1)$$

e

$$E_C = E_{C_R} + E_{C_T} \quad (2.2)$$

Onde:

$L \Rightarrow$ Lagrangeano do sistema físico

$E_C \Rightarrow$ Energia Cinética

$E_{C_R} \Rightarrow$ Energia Cinética devido ao movimento de rotação

$E_{C_T} \Rightarrow$ Energia Cinética devido ao movimento de translação

$E_P \Rightarrow$ Energia Potencial

A energia cinética devido ao movimento de rotação do cabo é definida por:

$$\begin{aligned} E_{C_R} = & \frac{1}{2} I_{R_{1e}} \dot{\theta}_{1e}^2 + \frac{1}{2} I_{R_{2e}} \dot{\theta}_{2e}^2 + \frac{1}{2} I_{R_{3e}} \dot{\theta}_{3e}^2 + \dots + \frac{1}{2} I_{R_{ne}} \dot{\theta}_{ne}^2 + \frac{1}{2} I_{R_{1a}} \dot{\theta}_{1a}^2 + \\ & + \frac{1}{2} I_{R_{2a}} \dot{\theta}_{2a}^2 + \frac{1}{2} I_{R_{3a}} \dot{\theta}_{3a}^2 + \dots + \frac{1}{2} I_{R_{na}} \dot{\theta}_{na}^2 + \frac{1}{2} I_{T_1} \dot{\theta}_{1T}^2 + \frac{1}{2} I_{T_2} \dot{\theta}_{2T}^2 + \\ & + \frac{1}{2} I_{T_3} \dot{\theta}_{3T}^2 + \dots + \frac{1}{2} (I_{T_n} + I_{T_c}) \dot{\theta}_{nT}^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde $I_{R_{1e}}, I_{R_{2e}}, I_{R_{3e}}, \dots, I_{R_{ne}}$ são momentos de inércia relativos ao movimento de elevação, $\theta_{1e}, \theta_{2e}, \theta_{3e}, \dots, \theta_{ne}$ são os ângulos em elevação, $I_{R_{1a}}, I_{R_{2a}}, I_{R_{3a}}, \dots, I_{R_{na}}$ são os momentos de inércia relativos ao movimento de azimute, $\theta_{1a}, \theta_{2a}, \theta_{3a}, \dots, \theta_{na}$ são os ângulos em de azimute, $I_{T_1}, I_{T_2}, I_{T_3}, \dots, I_{T_n}, I_{T_c}$ são momentos de inércia devidos ao movimento de torção e $\theta_{1T}, \theta_{2T}, \theta_{3T}, \dots, \theta_{nT}$ são os ângulos de torção. Vale ressaltar que a energia cinética de translação é mais relevante que a de rotação e, portanto, é dada ênfase à energia cinética de translação neste formalismo de modelagem.

A energia cinética devido ao movimento de translação do cabo é definida por:

$$\begin{aligned} E_{C_T} = & \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) + \\ & + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2) + \dots + \frac{1}{2} m_n (\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2 + \dot{z}_n^2) + \\ & + \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde, $\frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2)$, $\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2)$, $\frac{1}{2}m_3(\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2)$, ..., $\frac{1}{2}m_n(\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2 + \dot{z}_n^2)$ e $\frac{1}{2}m_c(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2)$ são energias cinéticas devidas aos movimentos das massas $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ dos elos e m_c da carga terminal, respectivamente.

A energia potencial é definida por:

$$\begin{aligned}
 E_p = & \frac{1}{2}k_{1e}\theta_{1e}^2 + \frac{1}{2}k_{2e}(\theta_{2e} - \theta_{1e})^2 + \frac{1}{2}k_{3e}(\theta_{3e} - \theta_{2e})^2 + \dots + \\
 & + \frac{1}{2}k_{ne}(\theta_{ne} - \theta_{(n-1)e})^2 + \frac{1}{2}k_{1a}\theta_{1a}^2 + \frac{1}{2}k_{2a}(\theta_{2a} - \theta_{1a})^2 + \\
 & + \frac{1}{2}k_{3a}(\theta_{3a} - \theta_{2a})^2 + \dots + \frac{1}{2}k_{na}(\theta_{na} - \theta_{(n-1)a})^2 + \\
 & + \frac{1}{2}k_{1T}\theta_{1T}^2 + \frac{1}{2}k_{2T}(\theta_{2T} - \theta_{1T})^2 + \frac{1}{2}k_{3T}(\theta_{3T} - \theta_{2T})^2 + \dots + \\
 & + \frac{1}{2}k_{nT}(\theta_{nT} - \theta_{(n-1)T})^2 + m_1g h_1 + \\
 & + m_2g h_2 + m_3g h_3 + \dots + m_ng h_n
 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$k_{1e}, k_{2e}, k_{3e}, \dots, k_{ne}$ são constantes elásticas nas articulações relativas aos ângulos de elevação $k_{1a}, k_{2a}, k_{3a}, \dots, k_{na}$ são constantes elásticas nas articulações relativas aos ângulos de azimute, $k_{1T}, k_{2T}, k_{3T}, \dots, k_{nT}$ são constantes elásticas nas articulações relativas aos ângulos de torção e $m_1g h_1 + m_2g h_2 + m_3g h_3 + \dots + m_ng h_n$ é a energia potencial gravitacional, sendo $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$ definidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 h_1 &= \frac{a_1}{2} \Rightarrow h_1 = \frac{l_1}{2}(1 - \cos\theta_{1e}), \\
 h_2 &= a_1 + \frac{a_2}{2} \Rightarrow h_2 = a_1 + \frac{l_2}{2}(1 - \cos\theta_{2e}), \\
 h_3 &= a_1 + a_2 + \frac{a_3}{2} \Rightarrow h_3 = a_1 + a_2 + \frac{l_3}{2}(1 - \cos\theta_{3e}), \\
 &\vdots \\
 h_n &= \sum_{i=1}^{n-1} a_i + \frac{a_n}{2} \Rightarrow h_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + \frac{l_n}{2}(1 - \cos\theta_{ne})
 \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde $a_0 = 0$, $a_1 = l_1(1 - \cos\theta_{1e})$, $a_2 = l_2(1 - \cos\theta_{2e})$, $a_3 = l_3(1 - \cos\theta_{3e})$, ..., $a_n = l_n(1 - \cos\theta_{ne})$, conforme mostra a Figura 2.6, representando as alturas em função dos ângulos de elevação.

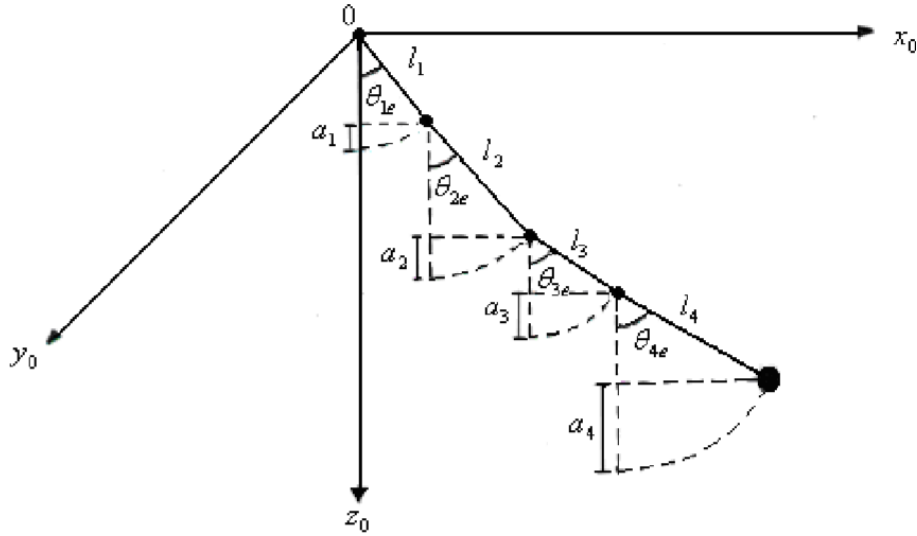


Figura 2.6 - Cabo com quatro partes rígidas (PEREIRA [18])

Pela Equação (2.1) tem-se a definição do Lagrangeano do sistema como sendo:

$$L = E_C - E_P$$

Portanto, substituindo-se as equações (2.2), (2.3), (2.4) e (2.5) em (2.1), obtem-se:

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{1}{2}I_{R1}\dot{\theta}_{1e}^2 + \frac{1}{2}I_{R2}\dot{\theta}_{2e}^2 + \frac{1}{2}I_{R3}\dot{\theta}_{3e}^2 + \dots + \frac{1}{2}I_{Rn}\dot{\theta}_{ne}^2 + \frac{1}{2}I_{R1a}\dot{\theta}_{1a}^2 + \\
 & + \frac{1}{2}I_{R2a}\dot{\theta}_{2a}^2 + \frac{1}{2}I_{R3a}\dot{\theta}_{3a}^2 + \dots + \frac{1}{2}I_{Rna}\dot{\theta}_{na}^2 + \frac{1}{2}I_{T1}\dot{\theta}_{1T}^2 + \\
 & + \frac{1}{2}I_{T2}\dot{\theta}_{2T}^2 + \frac{1}{2}I_{T3}\dot{\theta}_{3T}^2 + \dots + \frac{1}{2}(I_{Tn} + I_{Tc})\dot{\theta}_{nT}^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \\
 & + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) + \frac{1}{2}m_3(\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2) + \dots + \frac{1}{2}m_n(\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2 + \dot{z}_n^2) + \\
 & + \frac{1}{2}m_c(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2) - \frac{1}{2}k_{1e}\theta_{1e}^2 - \frac{1}{2}k_{2e}(\theta_{2e} - \theta_{1e})^2 + \\
 & - \frac{1}{2}k_{3e}(\theta_{3e} - \theta_{2e})^2 - \dots - \frac{1}{2}k_{ne}(\theta_{ne} - \theta_{(n-1)e})^2 - \frac{1}{2}k_{1a}\theta_{1a}^2 + \\
 & - \frac{1}{2}k_{2a}(\theta_{2a} - \theta_{1a})^2 - \frac{1}{2}k_{3a}(\theta_{3a} - \theta_{2a})^2 + \\
 & - \dots - \frac{1}{2}k_{na}(\theta_{na} - \theta_{(n-1)a})^2 - \frac{1}{2}k_{1T}\theta_{1T}^2 - \frac{1}{2}k_{2T}(\theta_{2T} - \theta_{1T})^2 + \\
 & - \frac{1}{2}k_{3T}(\theta_{3T} - \theta_{2T})^2 - \dots - \frac{1}{2}k_{nT}(\theta_{nT} - \theta_{(n-1)T})^2 + \\
 & - m_1g\left[\frac{l_1}{2}(1 - \cos \theta_{1e})\right] - m_2g\left[l_1(1 - \cos \theta_{1e}) + \frac{l_2}{2}(1 - \cos \theta_{2e})\right] + \\
 & - m_3g\left[l_1(1 - \cos \theta_{1e}) + l_2(1 - \cos \theta_{2e}) + \frac{l_3}{2}(1 - \cos \theta_{3e})\right] + \\
 & - \dots - m_ng\left[\sum_{i=1}^{n-1} l_i(1 - \cos \theta_{ie}) + \frac{l_n}{2}(1 - \cos \theta_{ne})\right]
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

De (2.7) e considerando-se $\theta_0 = 0$ e $\sum_{i=1}^{b-1} a_i = 0$, quando $b = 1$, tem-se:

$$L = \sum_{b=1}^n \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} I_{R_{be}} \dot{\theta}_{be}^2 + \frac{1}{2} I_{R_{ba}} \dot{\theta}_{ba}^2 + \frac{1}{2} I_{T_b} \dot{\theta}_{bT}^2 + \frac{1}{2} m_b (\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2 + \dot{z}_b^2) + \\ & -\frac{1}{2} k_{be} (\theta_{be} - \theta_{(b-1)e})^2 - \frac{1}{2} k_{ba} (\theta_{ba} - \theta_{(b-1)a})^2 + \\ & -\frac{1}{2} k_{bT} (\theta_{bT} - \theta_{(b-1)T})^2 - m_b g \left[\sum_{i=1}^{b-1} a_i + \frac{l_b}{2} (1 - \cos \theta_{be}) \right] \end{aligned} \right\} + \quad (2.8)$$

$$+ \frac{1}{2} I_{T_c} \dot{\theta}_{nT}^2 + \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2)$$

As coordenadas dos centros de massa das partes rígidas e da carga terminal são determinadas a partir de transformações homogêneas. Maiores detalhes sobre transformações homogêneas podem ser encontrados em PEREIRA[18]. A primeira articulação fictícia é colocada na origem do sistema de referência $X_0 Y_0 Z_0$ e os ângulos de azimuth θ_{1a} e elevação θ_{1e} são considerados de acordo com as Figuras (2.6) e (2.7).

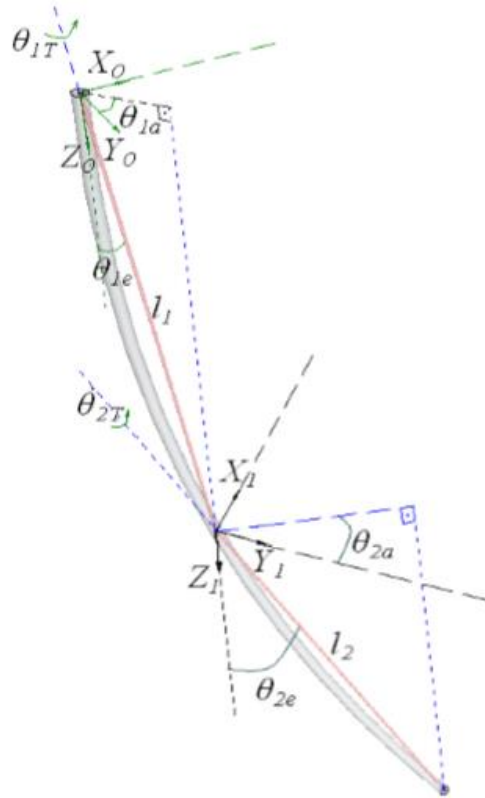


Figura 2.7 - Representação geométrica dos dois primeiros sistemas de referência (PEREIRA [18])

A partir desta figura, obtêm-se as coordenadas da segunda articulação fictícia $(x_{0_1}, y_{0_1}, z_{0_1})$ em relação ao sistema de referência $X_0 Y_0 Z_0$:

$$\begin{cases} x_{0_1} = l_1 \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} \\ y_{0_1} = l_1 \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} \\ z_{0_1} = l_1 \cos \theta_{1e} \end{cases} \quad (2.9)$$

As coordenadas do centro de massa do primeiro elo no referencial $X_0Y_0Z_0$ são:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{l_1}{2} \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} \\ y_1 = \frac{l_1}{2} \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} \\ z_1 = \frac{l_1}{2} \cos \theta_{1e} \end{cases} \quad (2.10)$$

A segunda articulação fictícia é colocada no novo sistema de referência $X_1Y_1Z_1$, conforme Figura 2.7. Considera-se a matriz homogênea envolvendo a rotação de um ângulo θ_{1a} em torno do eixo OZ_0 em relação ao referencial $X_0Y_0Z_0$, dada por:

$$H_{0_1} = \begin{bmatrix} [R_{Z,\theta_{1a}}]_{3 \times 3} & \begin{pmatrix} x_{0_1} \\ y_{0_1} \\ z_{0_1} \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

A matriz de rotação de um ângulo θ em torno do eixo OZ é definida por:

$$R_{Z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Considerando-se as equações (2.10), (2.11) e (2.12) obtêm-se a matriz de transformação homogênea que relaciona os sistemas $X_0Y_0Z_0$ e $X_1Y_1Z_1$:

$$H_{0_1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{1a} & \sin \theta_{1a} & 0 & l_1 \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} \\ -\sin \theta_{1a} & \cos \theta_{1a} & 0 & l_1 \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \cos \theta_{1e} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Considera-se agora o próximo elo (l_2) e coloca-se um novo sistema de referência $X_2Y_2Z_2$ na terceira articulação fictícia. Portanto, as coordenadas da terceira articulação fictícia em relação ao referencial $X_1Y_1Z_1$ são:

$$\begin{cases} x_{1_2} = l_2 \sin \theta_{2e} \sin \theta_{2a} \\ y_{1_2} = l_2 \sin \theta_{2e} \cos \theta_{2a} \\ z_{1_2} = l_2 \cos \theta_{2e} \end{cases} \quad (2.14)$$

Desta forma, a matriz homogênea envolvendo a rotação de um ângulo θ_{2a} em torno do eixo O_1Z_1 em relação ao referencial $X_1Y_1Z_1$ possui a forma:

$$H_{1_2} = \begin{bmatrix} [R_{Z,\theta_{2a}}]_{3 \times 3} & \begin{pmatrix} x_{1_2} \\ y_{1_2} \\ z_{1_2} \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Considerando-se (2.12), (2.14) e (2.15), a matriz de transformação homogênea que relaciona os sistemas $X_1Y_1Z_1$ e $X_2Y_2Z_2$ tem a forma:

$$H_{1_2} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{2a} & \sin \theta_{2a} & 0 & l_2 \sin \theta_{2e} \sin \theta_{2a} \\ -\sin \theta_{2a} & \cos \theta_{2a} & 0 & l_2 \sin \theta_{2e} \cos \theta_{2a} \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \cos \theta_{2e} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Para a determinação da posição da terceira articulação fictícia e das coordenadas da segunda parte rígida em relação ao referencial $X_0Y_0Z_0$, efetua-se o produto das matrizes H_{0_1} e H_{1_2} , obtendo-se H_{0_2} , ou seja, $H_{0_2} = H_{0_1} \cdot H_{1_2}$:

$$H_{0_2} = \begin{bmatrix} [R_{Z,\theta_{1a}}]_{3 \times 3} & \begin{pmatrix} x_{0_1} \\ y_{0_1} \\ z_{0_1} \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [R_{Z,\theta_{2a}}]_{3 \times 3} & \begin{pmatrix} x_{1_2} \\ y_{1_2} \\ z_{1_2} \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Portanto a matriz H_{0_2} tem a forma:

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) & \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) & 0 & l_2 \sin \theta_{2e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + l_1 \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} \\ -\sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) & \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) & 0 & l_2 \sin \theta_{2e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + l_1 \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \cos \theta_{2e} + l_1 \cos \theta_{1e} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

As coordenadas do centro de massa da segunda parte rígida do cabo, em relação ao referencial $X_0Y_0Z_0$, são dadas por:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{l_2}{2} \sin \theta_{2e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + l_1 \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} \\ y_2 = \frac{l_2}{2} \sin \theta_{2e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + l_1 \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} \\ z_2 = \frac{l_2}{2} \cos \theta_{2e} + l_1 \cos \theta_{1e} \end{cases} \quad (2.19)$$

À medida que se adiciona elos na modelagem, a matriz homogênea, as coordenadas do centro de massa da k -ésima parte rígida e as coordenadas da carga terminal seguem um padrão de crescimento. Logo, é possível generalizar respectivamente as equações como sendo:

$$H_{0_k} = \begin{bmatrix} \cos\left(\sum_{i=1}^k \theta_{ai}\right) & \sin\left(\sum_{i=1}^k \theta_{ai}\right) & 0 & l_k \sin \theta_{ke} \sin\left(\sum_{i=1}^k \theta_{ai}\right) + \sum_{j=1}^{k-1} \left[l_j \sin \theta_{je} \sin\left(\sum_{i=1}^j \theta_{ai}\right) \right] \\ -\sin\left(\sum_{i=1}^k \theta_{ai}\right) & \cos\left(\sum_{i=1}^k \theta_{ai}\right) & 0 & l_k \sin \theta_{ke} \cos\left(\sum_{i=1}^k \theta_{ai}\right) + \sum_{j=1}^{k-1} \left[l_j \sin \theta_{je} \cos\left(\sum_{i=1}^j \theta_{ai}\right) \right] \\ 0 & 0 & 1 & l_k \cos \theta_{ke} + \sum_{j=1}^{k-1} l_j \cos \theta_{je} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$\begin{cases} x_k = \frac{l_k}{2} \sin \theta_{ke} \sin\left(\sum_{i=1}^k \theta_{ai}\right) + \sum_{j=1}^{k-1} \left[l_j \sin \theta_{je} \sin\left(\sum_{i=1}^j \theta_{ai}\right) \right] \\ y_k = \frac{l_k}{2} \sin \theta_{ke} \cos\left(\sum_{i=1}^k \theta_{ai}\right) + \sum_{j=1}^{k-1} \left[l_j \sin \theta_{je} \cos\left(\sum_{i=1}^j \theta_{ai}\right) \right] \\ z_k = \frac{l_k}{2} \cos \theta_{ke} + \sum_{j=1}^{k-1} l_j \cos \theta_{je} \end{cases} \quad (2.21)$$

com $k = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{cases} x_c = \sum_{j=1}^n \left[l_j \sin \theta_{je} \sin\left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia}\right) \right] \\ y_c = \sum_{j=1}^n \left[l_j \sin \theta_{je} \cos\left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia}\right) \right] \\ z_c = \sum_{j=1}^n l_j \cos \theta_{je} \end{cases} \quad (2.22)$$

Definidas as equações gerais (2.21) e (2.22), obtém-se as derivadas das coordenadas em relação ao tempo, dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_k = \frac{l_k}{2} \left[\sin \theta_{ke} \cos \left(\sum_{i=1}^k \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^k \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{ke} \sin \left(\sum_{i=1}^k \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{ke} \right] + \\ \quad + \sum_{j=1}^{k-1} l_j \left[\sin \theta_{je} \cos \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{je} \sin \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{je} \right] \\ \dot{y}_k = \frac{l_k}{2} \left[-\sin \theta_{ke} \sin \left(\sum_{i=1}^k \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^k \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{ke} \cos \left(\sum_{i=1}^k \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{ke} \right] + \\ \quad + \sum_{j=1}^{k-1} l_j \left[-\sin \theta_{je} \sin \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{je} \cos \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{je} \right] \\ \dot{z}_k = -\frac{l_k}{2} \sin \theta_{ke} \dot{\theta}_{ke} - \sum_{j=1}^{k-1} l_j \sin \theta_{je} \dot{\theta}_{je} \end{array} \right. \quad (2.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_c = \sum_{j=1}^n l_j \left[\sin \theta_{je} \cos \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{je} \sin \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{je} \right] \\ \dot{y}_c = \sum_{j=1}^n l_j \left[-\sin \theta_{je} \sin \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{je} \cos \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{je} \right] \\ \dot{z}_c = -\sum_{j=1}^n l_j \sin \theta_{je} \dot{\theta}_{je} \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Portanto, de (2.8), (2.23) e (2.24), obtém-se a expressão geral do Lagrangeano

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 \quad (2.25)$$

onde:

$$L_1 = \sum_{b=1}^n \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} I_{R_{be}} \dot{\theta}_{be}^2 + \frac{1}{2} I_{R_{ba}} \dot{\theta}_{ba}^2 + \frac{1}{2} I_{T_b} \dot{\theta}_{bT}^2 - \frac{1}{2} k_{be} (\theta_{be} - \theta_{(b-1)e})^2 + \\ \quad - \frac{1}{2} k_{ba} (\theta_{ba} - \theta_{(b-1)a})^2 - \frac{1}{2} k_{bT} (\theta_{bT} - \theta_{(b-1)T})^2 + \\ \quad - m_b g \left[\sum_{i=1}^{b-1} a_i + \frac{l_b}{2} (1 - \cos \theta_{be}) \right] \end{array} \right\}$$

$$L_2 = \sum_{b=1}^n \frac{1}{2} m_b \left\{ \frac{l_b}{2} \left[\sin \theta_{be} \cos \left(\sum_{i=1}^b \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^b \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{be} \sin \left(\sum_{i=1}^b \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{be} \right] + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{b-1} l_j \left[\sin \theta_{je} \cos \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{je} \sin \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{je} \right] \right\}^2$$

$$L_3 = \sum_{b=1}^n \frac{1}{2} m_b \left\{ \frac{l_b}{2} \left[-\sin \theta_{be} \sin \left(\sum_{i=1}^b \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^b \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{be} \cos \left(\sum_{i=1}^b \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{be} \right] + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{b-1} l_j \left[-\sin \theta_{je} \sin \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{je} \cos \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{je} \right] \right\}^2$$

$$L_4 = \sum_{b=1}^n \frac{1}{2} m_b \left[\frac{l_b}{2} \sin \theta_{be} b - \sum_{j=1}^{b-1} l_j \sin \theta_{je} \dot{\theta}_{je} \right]^2 + \frac{1}{2} I_{T_c} \dot{\theta}_{nT}^2$$

$$L_5 = \frac{1}{2} m_c \left\{ \sum_{b=1}^n l_b \left[\sin \theta_{be} \cos \left(\sum_{i=1}^b \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^b \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{be} \sin \left(\sum_{i=1}^b \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{be} \right] \right\}^2 + \\ + \frac{1}{2} m_c \left\{ \sum_{j=1}^n l_b \left[-\sin \theta_{be} \sin \left(\sum_{i=1}^b \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^b \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{be} \cos \left(\sum_{i=1}^b \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{be} \right] \right\}^2 + \\ + \frac{1}{2} m_c \left[- \sum_{b=1}^n l_b \sin \theta_{be} \dot{\theta}_{be} \right]^2$$

onde $\theta_0 = 0$ e $\sum_{i=1}^{b-1} a_i = 0$, quando $b = 1$.

2.2. MODELAGEM DINÂMICA PARA O CABO DIVIDIDO EM TRÊS ELOS

Considera-se um cabo de comprimento l , articulado a uma estrutura fixa em uma extremidade e com uma massa m_c na outra extremidade (podendo a massa m_c ser substituída por um ROV). O cabo é dividido em três partes rígidas de comprimentos l_1, l_2 e l_3 conectadas por três articulações, sendo a primeira considerada na junção do cabo com a estrutura fixa, conforme Figura 2.8.

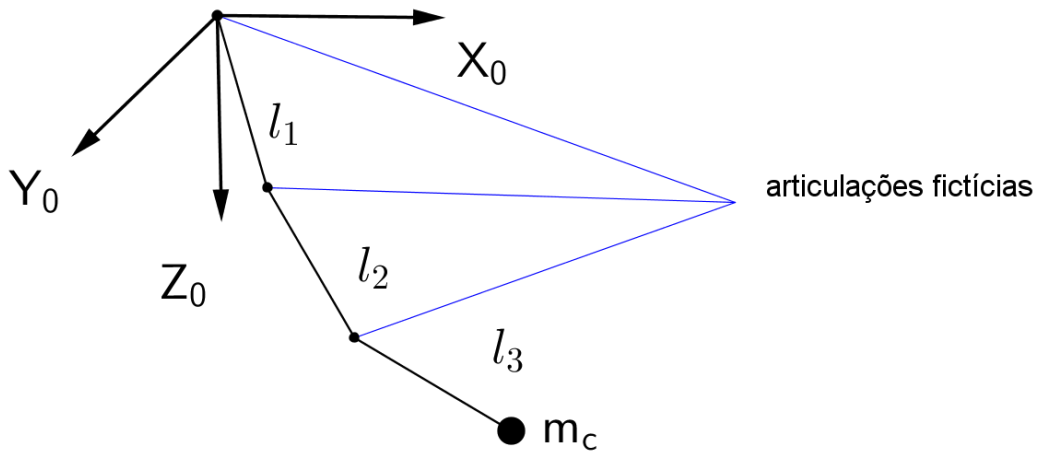


Figura 2.8 - Representação esquemática do cabo com três articulações fictícias

Da Equação (2.25), considerando-se $n = 3$ (número de elos), obtém-se o Lagrangeano do sistema, na forma:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5$$

onde

$$\begin{aligned}
L_1 &= \sum_{b=1}^3 \left\{ \frac{1}{2} I_{R_{be}} \dot{\theta}_{be}^2 + \frac{1}{2} I_{R_{ba}} \dot{\theta}_{ba}^2 + \frac{1}{2} I_{T_b} \dot{\theta}_{bT}^2 - \frac{1}{2} k_{be} (\theta_{be} - \theta_{(b-1)e})^2 + \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} k_{ba} (\theta_{ba} - \theta_{(b-1)a})^2 - \frac{1}{2} k_{bT} (\theta_{bT} - \theta_{(b-1)T})^2 + \right. \\
&\quad \left. - m_b g \left[\sum_{i=1}^{b-1} a_i + \frac{l_b}{2} (1 - \cos \theta_{be}) \right] \right\} \\
L_2 &= \sum_{b=1}^3 \frac{1}{2} m_b \left\{ \frac{l_b}{2} \left[\sin \theta_{be} \cos \left(\sum_{i=1}^b \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^b \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{be} \sin \left(\sum_{i=1}^b \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{be} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{b-1} l_j \left[\sin \theta_{je} \cos \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{je} \sin \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{je} \right] \right\}^2 \\
L_3 &= \sum_{b=1}^3 \frac{1}{2} m_b \left\{ \frac{l_b}{2} \left[-\sin \theta_{be} \sin \left(\sum_{i=1}^b \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^b \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{be} \cos \left(\sum_{i=1}^b \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{be} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{b-1} l_j \left[-\sin \theta_{je} \sin \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{je} \cos \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{je} \right] \right\}^2 \quad (2.26) \\
L_4 &= \sum_{b=1}^3 \frac{1}{2} m_b \left[\frac{l_b}{2} \sin \theta_{be} b - \sum_{j=1}^{b-1} l_j \sin \theta_{je} \dot{\theta}_{je} \right]^2 + \frac{1}{2} I_{T_c} \dot{\theta}_{3T}^2 \\
L_5 &= \frac{1}{2} m_c \left\{ \sum_{b=1}^3 l_b \left[\sin \theta_{be} \cos \left(\sum_{i=1}^b \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^b \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{be} \sin \left(\sum_{i=1}^b \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{be} \right] \right\}^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2} m_c \left\{ \sum_{j=1}^3 l_b \left[-\sin \theta_{be} \sin \left(\sum_{i=1}^b \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^b \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{be} \cos \left(\sum_{i=1}^b \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{be} \right] \right\}^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2} m_c \left[-\sum_{b=1}^3 l_b \sin \theta_{be} \dot{\theta}_{be} \right]^2
\end{aligned}$$

onde $\theta_0 = 0$ e $\sum_{i=1}^{b-1} a_i = 0$, quando $b = 1$.

Aplicando-se Euler-Lagrange a cada uma das coordenadas do sistemas a partir de (2.26) tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{1e}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{1e}} = T_{\theta_{1e}} - c_{1e} \dot{\theta}_{1e} - c_{2e} (\dot{\theta}_{1e} - \dot{\theta}_{2e}) \quad (2.27)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{2e}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{2e}} = T_{\theta_{2e}} - c_{2e}(\dot{\theta}_{2e} - \dot{\theta}_{1e}) - c_{3e}(\dot{\theta}_{2e} - \dot{\theta}_{3e}) \quad (2.28)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{3e}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{3e}} = T_{\theta_{3e}} - c_{3e}(\dot{\theta}_{3e} - \dot{\theta}_{2e}) \quad (2.29)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{1a}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{1a}} = T_{\theta_{1a}} - c_{1a} \dot{\theta}_{1a} - c_{2a}(\dot{\theta}_{1a} - \dot{\theta}_{2a}) \quad (2.30)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{2a}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{2a}} = T_{\theta_{2a}} - c_{2a}(\dot{\theta}_{2a} - \dot{\theta}_{1a}) - c_{3a}(\dot{\theta}_{2a} - \dot{\theta}_{3a}) \quad (2.31)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{3a}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{3a}} = T_{\theta_{3a}} - c_{3a}(\dot{\theta}_{3a} - \dot{\theta}_{2a}) \quad (2.32)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{1T}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{1T}} = T_{\theta_{1T}} - c_{1T} \dot{\theta}_{1T} - c_{2T}(\dot{\theta}_{1T} - \dot{\theta}_{2T}) \quad (2.33)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{2T}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{2T}} = T_{\theta_{2T}} - c_{2T}(\dot{\theta}_{2T} - \dot{\theta}_{1T}) - c_{3T}(\dot{\theta}_{2T} - \dot{\theta}_{3T}) \quad (2.34)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{3T}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{3T}} = T_{\theta_{3T}} - c_{3T}(\dot{\theta}_{3T} - \dot{\theta}_{2T}) \quad (2.35)$$

onde $c_{1e}, c_{2e}, c_{3e}, c_{1a}, c_{2a}, c_{3a}$ e c_{1T}, c_{2T}, c_{3T} são coeficientes de atrito devido aos movimentos angulares de elevação, azimute e torção, respectivamente, $T_{\theta_{ia}}, T_{\theta_{ie}}$ e $T_{\theta_{iT}}$, com $i = 1, 2, 3$, são torques externos em azimute, elevação e torção, atuantes em cada articulação fictícia e surgem em razão de diversas causas, tais como forças de empuxo, correntes subaquáticas, movimento independente da carga terminal (neste caso podendo ser um ROV), arrasto hidrodinâmico (cabo considerado dentro da água), etc.

Ao desenvolverem-se as equações (2.27) a (2.35), obtêm-se o sistema de equações diferenciais de segunda ordem:

$$I(\vec{\theta})\ddot{\vec{\theta}} + C \dot{\vec{\theta}} + K \vec{\theta} + \vec{f}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}}) + \vec{G}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}}) = \vec{T}_m \quad (2.36)$$

A matriz de constantes elásticas K é dada por:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{44} & K_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{54} & K_{55} & K_{56} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{65} & K_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{77} & K_{78} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{87} & K_{88} & K_{89} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{98} & K_{99} \end{bmatrix}$$

O vetor de Coriolis-centrífgos $\vec{F}$ é dado por:

$$\vec{F} = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

O vetor gravitacional $\vec{G}$ é dado por:

$$\vec{G} = [g_1 \quad g_2 \quad g_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

O vetor de torques externos $\vec{T}$ é dado por:

$$\vec{T} = [T_{\theta_{1e}} \quad T_{\theta_{2e}} \quad T_{\theta_{3e}} \quad T_{\theta_{1a}} \quad T_{\theta_{2a}} \quad T_{\theta_{3a}} \quad T_{\theta_{1T}} \quad T_{\theta_{2T}} \quad T_{\theta_{3T}}]^T$$

2.3. ALGORITMOS GENÉRICOS

As equações analíticas do modelo dinâmico foram desenvolvidas também para quatro e cinco elos em (ZANELA [30]). Estes desenvolvimentos possibilitaram a identificação de um padrão de crescimento genérico para a matriz de inércia, para a matriz de coeficientes de atrito, para a matriz de constantes elásticas, para o vetor de Coriolis-centrífgos e para o vetor gravitacional. Esses algoritmos possibilitam gerar automaticamente o modelo dinâmico para

um número qualquer de elos considerados para a representação discreta da flexibilidade estrutural.

2.3.1. Algoritmo Genérico Para a Matriz de Inércia

Em (ZANELA [30]) apresentam-se formulações das equações gerais para a formação dos elementos dos vetores e matrizes do modelo dinâmico do cabo, a partir da criação de algoritmos genéricos que preveem o crescimento dos vetores e matrizes do modelo dinâmico, para um número n qualquer de elos.

A matriz de inércia presente no modelo dinâmico possui um padrão de crescimento genérico, considerando-se n elos. Essa matriz completa possui a seguinte forma:

$$I = \begin{bmatrix} I_e & N_e & T_e \\ I_a & N_a & T_a \\ I_t & N_t & T_t \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

onde os índices e, a e t indicam elevação, azimuth e torção, respectivamente. I, N e T são submatrizes quadradas de ordem n , onde n é o número de elos. Como a matriz de inércia é simétrica, tem-se:

$$I_a = N_e^T; I_t = T_e^T; N_t = T_a^T \quad (2.39)$$

Desta forma, basta que se identifiquem os algoritmos genéricos das submatrizes I_e, N_e, N_a, T_t, T_e e T_a .

Em (PEREIRA [18]) propõe-se um formalismo de modelagem que considera os movimentos de torção desacoplados com relação aos movimentos de azimuth e elevação.

Desta forma, as submatrizes T_e e T_a (e, conseqüentemente, I_t e N_t) são nulas e a submatriz T_t é diagonal. Portanto, tem-se que:

$$T_t(i, i) = J_{ti} \quad (2.40)$$

onde J_{ti} é o momento de inércia de torção sobre o eixo longitudinal do elo i , com $i = 1, \dots, n$ e ainda:

$$T_t(n, n) = J_{tn} + J_{tc} \quad (2.41)$$

com J_{tc} equivalente ao momento de inércia sobre o eixo longitudinal de torção da carga terminal conectada à extremidade livre do cabo.

Os elementos da submatriz I_e são obtidos a partir do seguinte algoritmo genérico:

para $i = 1:n$,

para $j = i + 1:n$,

$$I_e(i, j) = l_i l_j \left(\frac{m_j}{2} + m_c + \sum_{k=j+1}^n m_k \right) \left[\cos \theta_{ie} \cos \theta_{je} \cos \left(\sum_{k=i+1}^j \theta_{ka} \right) + \sin \theta_{ie} \sin \theta_{je} \right]; \quad (2.42)$$

fim para,

$$I_e(i, i) = l_i^2 \left[\frac{m_i}{4} + m_c + \sum_{k=i+1}^n (m_k) \right];$$

fim para,

onde os elementos da diagonal principal da submatriz I_e coincidem com os elementos da diagonal principal da matriz completa I , ou seja, $I_e = (i, i) = I(i, i)$ para $i = 1, \dots, n$. A submatriz de inércia I_e é simétrica e, portanto, o algoritmo descrito na Equação (2.42) determina apenas os elementos da sua diagonal principal e os acima desta diagonal.

No caso de se considerar a parcela de energia cinética rotacional do movimento de elevação, aos elementos da diagonal principal da submatriz I_e serão acrescidos os momentos de inércia rotacionais de elevação relativo ao elo i (I_{Rei}) sobre os eixos transversais aos elos e passando pelos seus respectivos centros de massa, na forma:

$$I_e(i, i) = I_e(i, i) + I_{Rei} \quad (2.43)$$

A submatriz N_e apresenta duplicação de alguns termos, de forma que o algoritmo genérico para os elementos da submatriz N_e é dado por:

$$\begin{aligned}
& \text{para } i = 1:n, \\
& \quad \text{para } j = 1:n, \\
& \quad \quad \text{se } i \neq j, \\
& \quad \quad \quad S = 0; \\
& \quad \quad \text{para } k = j:n, \\
& \quad \quad \quad \text{se } k \neq i, \\
& \quad \quad \quad \quad \text{se } i > k, \quad \gamma = 1; \text{ senão } \gamma = -1; \text{ fim se,} \\
& \quad \quad \quad \quad v = [i \ k]; \\
& \quad \quad \quad \quad s_1 = 0; \\
& \quad \quad \quad \quad \text{para } g = \max(v) + 1:n, \\
& \quad \quad \quad \quad \quad s_1 = s_1 + m(g); \\
& \quad \quad \quad \quad \text{fim para,} \\
& \quad \quad \quad \quad s_2 = 0; \\
& \quad \quad \quad \quad \text{para } g = \min(v) + 1:\max(v), \\
& \quad \quad \quad \quad \quad s_2 = s_2 + \theta_{ga} \\
& \quad \quad \quad \quad \text{fim para,} \\
& \quad \quad \quad \quad S = S + \\
& \quad \quad \quad \quad \quad + \gamma l_k \left[\frac{m_k}{2} + m_c + \right]_{+s_1} \cos(\theta_{ie}) \sin(\theta_{ke}) \sin(s_2); \\
& \quad \quad \quad \text{fim se,} \\
& \quad \quad \text{fim para,} \\
& \quad N_e(i,j) = l_i S; \\
& \quad \text{fim se,} \\
& \text{fim para,} \\
& \text{fim para,} \\
& \text{para } i = 1:n-1, \\
& \quad N_e(i,i) = N_e(i,i+1); \\
& \text{fim para,} \\
& N_e(n,n) = 0;
\end{aligned} \tag{2.44}$$

onde o elemento $N_e(n,n) = I(n,2n) = 0$.

O algoritmo genérico para os elementos da submatriz N_a possui a forma:

```

para  $i = 1:n$ ,
  para  $j = i:n$ ,
     $S1 = 0$ ;
    para  $k = j:n$ ,
      
$$S1 = S1 + l_k^2 \left[ \frac{m_k}{4} + m_c + \sum_{h=k+1}^n m_h \right] \sin^2(\theta_{ke});$$

    fim para,
     $S2 = 0$ ;
     $v = [i \ j]$ ;
    para  $k = \min(v) : n - 1$ ,
       $S3 = 0$ ;
      para  $g = j:n$ ,
        se  $g > k$ ,
           $\beta = \text{calcbeta}(i, j, k)$ ;
          
$$S3 = S3 + \beta l_g \left[ \frac{m_g}{2} + m_c + \sum_{h=g+1}^n m_h \right] \sin(\theta_{ke}) \sin(\theta_{ge}) \cos \left( \sum_{h=k+1}^g \theta_{ha} \right); \quad (2.45)$$

        fim se,
      fim para,
       $S2 = S2 + l_k S3$ ;
    fim para,
    se  $(i = n) \text{ and } (j = n)$ ,
       $S2 = 0$ ;
    fim se,
     $N_a(i, j) = S1 + S2$ ;
     $N_a(j, i) = N_a(i, j)$ ;
  fim para,
fim para,

```

A função que determina o parâmetro β na Equação (2.45) possui a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned}
 &\text{função } \beta = \text{calcbeta}(i, j, k) \\
 &\quad \text{se } (i = 1) \text{ e } (j = 1) \text{ ou } k \geq j, \\
 &\quad \quad \beta = 2; \\
 &\quad \text{senão} \\
 &\quad \quad \beta = 1; \\
 &\quad \text{fim se,}
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

A submatriz de inércia N_a é simétrica. Portanto, o algoritmo descrito na Equação (2.45) determina os elementos da sua diagonal principal e os acima desta diagonal. Os elementos abaixo da diagonal principal são determinados a partir da declaração $N_a(j, i) = N_a(i, j)$. No caso de se considerar a parcela de energia cinética rotacional em azimuth, aos elementos da diagonal principal da submatriz N_a serão acrescentados os momentos de inércia rotacionais de azimuth relativo ao elo i ($I_{R_{ai}}$), considerados constantes no formalismo:

$$N_a(i, i) = N_a(i, i) + I_{R_{ai}} \tag{2.47}$$

2.3.2. Algoritmo Genérico Para a Matriz de Constantes Elásticas e Para a Matriz de Coeficientes de Atrito

A matriz de constantes elásticas obedece à mesma regra de formação da matriz de coeficientes de atrito. Essas matrizes são diagonais por bloco e em cada bloco há uma submatriz $n \times n$, onde n é o número de elos. As matrizes de constantes elásticas e de coeficientes de atrito podem ser escritas da seguinte forma:

$$K = \begin{bmatrix} K_e & 0 & 0 \\ 0 & K_a & 0 \\ 0 & 0 & K_t \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} C_e & 0 & 0 \\ 0 & C_a & 0 \\ 0 & 0 & C_t \end{bmatrix} \tag{2.48}$$

onde K_e, K_a, K_t são respectivamente submatrizes de constantes elásticas relativas aos movimentos de elevação, azimute e torção, e C_e, C_a, C_t são respectivamente submatrizes de coeficientes de atrito relativos aos movimentos de elevação, azimute e torção.

O algoritmo a seguir determina os elementos da submatriz K_e :

```

para  $i = 1:n$ ,
  para  $j = 1:n$ ,
     $K_e(i, j) = 0$ ;
    se  $(i = j)$  e  $(i < n)$ ,
       $K_e(i, j) = k_{ei} + k_{ei+1}$ ;
    fim se,
    se  $(i = j)$  e  $(i = n)$ ,
       $K_e(i, j) = k_{ei}$ ;
    fim se.
    se  $j = i + 1$ ,
       $K_e(i, j) = k_{ej}$ ;
    fim se,
     $K_e(i, j) = K_e(j, i)$ ;
  fim para,
fim para,

```

(2.49)

O Algoritmo descrito na Equação (2.49) é aplicado tanto às submatrizes de constantes elásticas quanto às submatrizes de coeficientes de atrito, já que possuem a mesma regra de formação.

2.3.3. Algoritmo Genérico para o Vetor de Coriolis-Centrífugos

O vetor de esforços do tipo Coriolis-centrífugos possui um padrão de crescimento genérico e tem $3n$ componentes, onde n é o número de elos. As primeiras n componentes são relativas aos movimentos de elevação, as n componentes intermediárias são relativas aos

movimentos de azimute e as n últimas componentes são relativas aos movimentos de torção (essas últimas n componentes são nulas).

Inicialmente o vetor de esforços do tipo Coriolis-centrífugos é escrito da seguinte forma:

$$\vec{F}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}}) = [f_1 \ f_2 \ \cdots \ f_n \ f_{n+1} \ f_{n+2} \ \cdots \ f_{2n} \ f_{2n+1} \ f_{2n+2} \ \cdots \ f_{3n}]^T \quad (2.50)$$

As componentes $[f_1 \ f_2 \ \cdots \ f_n]^T$ correspondem aos movimentos de elevação, sendo que cada componente $f_i (i = 1, \dots, n)$ é composta por dois termos, na forma:

$$f_i = v_1 + v_2 \quad (2.51)$$

O termo v_1 possui a seguinte equação geral:

$$v_1 = \alpha l_i^2 \left[\frac{m_i}{4} + m_c + \sum_{g=i+1}^n m_g \right] \sin(\theta_{ie}) \cos(\theta_{ie}) \left\{ \left(\sum_{g=1}^{i-1} \dot{\theta}_{ga} \sum_{h=g+1}^i \dot{\theta}_{ha} \right) + \right. \quad (2.52)$$

$$\left. + \frac{1}{|\alpha|} \left(\sum_{g=1}^i \dot{\theta}_{ga}^2 \right) \right\}$$

Na Equação (2.52), α é um parâmetro que depende dos valores de $i = 1, \dots, n$, na forma:

$$\begin{aligned} & \text{se } i = 1, \\ & \alpha = -1; \\ & \text{senão se } i \neq 1, \\ & \alpha = -2; \\ & \text{fim se,} \end{aligned} \quad (2.53)$$

O termo v_2 possui produtos $l_i l_j$, para $j \neq i$. Este termo pode ser determinado a partir da seguinte equação geral:

$$v_2 = l_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left\{ \begin{aligned} & \beta l_j \left(\frac{m_{\max(i,j)}}{2} + m_c + \right. \\ & + \sum_{g=\max(i,j)+1}^n m_g \left[\cos(\theta_{ie}) \left[\cos(\theta_{je}) \sin \left(\sum_{g=\min(i,j)+1}^{\max(i,j)} \theta_{ga} \right) \dot{\theta}_{je} \left(\sum_{g=1}^j \dot{\theta}_{ga} \right) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sin(\beta) \left(\sin(\theta_{je}) \cos \left(\sum_{g=\min(i,j)+1}^{\max(i,j)} \theta_{ga} \right) \left(\sum_{g=1}^{j-1} \dot{\theta}_{ga} \sum_{h=g+1}^j \dot{\theta}_{ha} + \right. \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + \frac{1}{2} \left(\dot{\theta}_{je}^2 + \sum_{g=1}^j \dot{\theta}_{ga}^2 \right) \right) \right] + \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{\beta} (\theta_{ie}) \cos(\theta_{je}) \dot{\theta}_{je}^2 \right] \right\} \quad (2.54) \end{aligned} \right.$$

Na Equação (2.54), β é um parâmetro que depende dos valores de i e j , na forma:

$$\begin{aligned} & \text{se } i > j, \\ & \quad \beta = 2; \\ & \text{senão se } i \leq j, \\ & \quad \alpha = -2; \\ & \text{fim se,} \end{aligned} \quad (2.55)$$

As componentes $[f_{n+1} \ f_{n+2} \ \cdots \ f_{2n}]^T$ correspondem aos movimentos de azimute. Como essas componentes possuem um maior nível de complexidade, elas são apresentadas na forma modular. Para isso, inicialmente é feita uma mudança de variável, para uma melhor apresentação dos resultados. Define-se:

$$z_i = f_{n+i} \quad (2.56)$$

($i = 1, \dots, n$). Desta forma, os elementos do vetor $[f_{n+1} \ f_{n+2} \ \cdots \ f_{2n}]^T$ serão equivalentes aos elementos do vetor $[z_1 \ z_2 \ \cdots \ z_n]^T$. O vetor das componente em azimute $\vec{z} = [z_1 \ z_2 \ \cdots \ z_n]^T$ é definido a partir da equação:

$$\vec{z} = \vec{R} + W\vec{P} \quad (2.57)$$

onde $\vec{R}$ é um vetor $n \times 1$ que contém termos funções dos l_i^2 , W é uma matriz $n \times q$ cujos elementos são funções dos ângulos e das velocidades angulares de azimute e elevação e $\vec{P}$ é

um vetor $q \times 1$ que contém produtos do tipo $l_i l_j$, para $j > i$. Vale ressaltar que n é o número de elos e q é obtido em função de n , como apresentado no algoritmo a seguir:

$$\begin{aligned}
 &q = 0; \\
 &\text{para } i = 1:n, \\
 &\quad \text{para } j = i + 1:n, \\
 &\quad \quad q = q + 1; \\
 &\quad \text{fim para}, \\
 &\text{fim para},
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

O vetor $\vec{R}$ tem seus elementos R_i ($i = 1, \dots, n$) definidos na forma:

$$R_i = 2 \sum_{k=1}^n \left\{ l_k^2 \left(\frac{m_k}{4} + m_c + \sum_{g=k+1}^n m_g \right) \sin(\theta_{ke}) \cos(\theta_{ke}) \left(\sum_{g=1}^k \dot{\theta}_{ga} \right) \dot{\theta}_{ka} \right\} \tag{2.59}$$

O vetor $\vec{P}$ tem seus elementos P_u ($u = 1, \dots, q$) definidos na forma:

$$\begin{aligned}
 &u = 0; \\
 &\text{para } i = 1:n, \\
 &\quad \text{para } j = i + 1:n, \\
 &\quad \quad u = u + 1; \\
 &\quad \quad P_u = 2l_i l_j \left[\frac{m_j}{2} + m_c + \sum_{g=j+1}^n m_g \right]; \\
 &\quad \text{fim para}, \\
 &\text{fim para},
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

A matriz W possui a seguinte forma:

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & \cdots & w_{nq} \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

onde cada elemento da matriz W na Equação (2.61) é formado a partir da soma de outros três elementos:

$$w_{k,u} = a_{k,u} + b_{k,u} + c_{k,u} \tag{2.62}$$

Os elementos $a_{k,u}$, $b_{k,u}$ e $c_{k,u}$, são determinados a partir do algoritmo:

```

para  $k = 1:n$ ,
   $u = 0$ ;
  para  $i = 1:n - 1$ ,
    para  $j = i + 1:n$ ,
       $u = u + 1$ ;
      se  $j \geq k$ ,
        se  $i < k$ ,
          
$$c_{k,u} = \sin(\theta_{ie}) \sin(\theta_{je}) \sin\left(\sum_{g=i+1}^j \theta_{ga}\right) \vartheta_1\left(\dot{\theta}_e, \dot{\theta}_a, i, j\right);$$

        senão,
          
$$c_{k,u} = \sin(\theta_{ie}) \sin(\theta_{je}) \sin\left(\sum_{g=i+1}^j \theta_{ga}\right) \vartheta_2\left(\dot{\theta}_e, \dot{\theta}_a, i, j\right);$$

      fim se,
    senão,
       $c_{k,u} = 0$ ;
    fim se,
    se  $(k = 1)$  ou  $(k \geq 2)$  e  $(k < n)$  e  $(i \geq k)$ ,
      
$$b_{k,u} = \sin(\theta_{ie}) \cos(\theta_{je}) \cos\left(\sum_{g=i+1}^j \theta_{ga}\right) \left[ \left( \sum_{g=1}^j \dot{\theta}_{ga} \right) \dot{\theta}_{je} \right];$$

    senão
       $b_{k,u} = 0$ ;
    fim se,
    se  $j > k$ ,
      
$$a_{k,u} = \cos(\theta_{ie}) \sin(\theta_{je}) \cos\left(\sum_{g=i+1}^j \theta_{ga}\right) \left[ \left( \sum_{g=1}^i \dot{\theta}_{ga} \right) \dot{\theta}_{ie} \right];$$

    senão
       $a_{k,u} = 0$ ;
    fim se,
     $w_{k,u} = a_{k,u} + b_{k,u} + c_{k,u}$ ;
  fim para,
fim para,
fim para,

```

(2.63)

Existem duas diferentes formas para os elementos $c_{k,u}$, dependentes das funções

$\vartheta_1\left(\dot{\theta}_e, \dot{\theta}_a, i, j\right)$ e $\vartheta_2\left(\dot{\theta}_e, \dot{\theta}_a, i, j\right)$, descritas nas formas:

$$\vartheta_1 = - \left\{ \left(\sum_{g=1}^{j-1} \dot{\theta}_{ha} \right) \left(\sum_{h=g+1}^j \dot{\theta}_{ha} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{g=i+1}^j \dot{\theta}_{ga}^2 \right) + \dot{\theta}_{je}^2 - \dot{\theta}_{ie}^2 \right] \right\} \quad (2.64)$$

$$\vartheta_2 = - \left\{ \left(\sum_{g=1}^{i-1} \dot{\theta}_{ga} \right) \left(\sum_{h=g+1}^i \dot{\theta}_{ha} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{g=1}^i \dot{\theta}_{ga}^2 \right) + \dot{\theta}_{ie}^2 \right] \right\} \quad (2.65)$$

2.3.4. Algoritmo Genérico para o Vetor de Esforços Gravitacionais

O vetor gravitacional só tem as n primeiras componentes diferentes de zero, pois o mesmo é influenciado apenas pelos deslocamentos em elevação. Desta forma, o vetor gravitacional é escrito como:

$$\vec{G}(\vec{\theta}) = [g_1 \ g_2 \ \cdots \ g_n \ g_{n+1} = 0 \ \cdots \ g_{2n} = 0 \ g_{2n+1} = 0 \ \cdots \ g_{3n} = 0]^T \quad (2.66)$$

As n primeiras componentes do vetor gravitacional são determinadas a partir do algoritmo:

$$\begin{aligned} &\text{para } i = 1:n, \\ &\quad g_i = l_i \left(\frac{m_i}{2} \sum_{k=i+1}^n m_k \right) g \sin \theta_{ie}; \\ &\text{fim para,} \end{aligned} \quad (2.67)$$

2.4. SIMULAÇÃO PARA O CABO EM QUEDA LIVRE

Nesta seção será mostrada uma simulação realizada com os algoritmos genéricos descritos por (ZANELA [30]), mostrados neste Capítulo. O objetivo é verificar se o modelo dinâmico permite reproduzir em simulação resultados fisicamente esperados.

A simulação consiste em um cabo articulado a estrutura fixa em uma de suas extremidades, enquanto na outra extremidade há uma carga terminal livre. A simulação está sob ação do arrasto hidrodinâmico (cabo submerso), partindo do repouso e de uma determinada configuração inicial espacial, possibilitando assim uma situação de queda livre para a carga terminal do mesmo.

A simulação foi realizada com o cabo dividido em 32 elos, sendo que o tempo de simulação foi de 31 s. A Figura 2.9 ilustra a movimentação do cabo para esta simulação,

sendo que a mesma é mostrada em forma de *frames* visualizados a cada 1 s e com escala X e Y de $-200(m):200(m)$ e Z de $-1200(m):0(m)$.

Para a simulação os parâmetros físicos adotados estão na Tabela 2.1

Tabela 2.1 - Parâmetros físicos adotados

Parâmetros	Valor numérico (unidade)	Significado físico
l_{comp}	1200 m	Comprimento do Cabo
n	32	Número de elos
r_i	$\frac{0,01}{2} (m)$	Raio de cada elo (constante)
l_i	$\frac{l_{comp}}{n} (m)$	Comprimento de cada elo
m_e	7850 (kg/m^3)	Massa específica do cabo
m_c	600 kg	Massa da carga terminal
m_{ea}	1000 (kg/m^3)	Massa Específica da água
m_i	$\pi r_i^2 l_i m_e (kg)$	Massa de cada elo
I_{Re}	$\frac{m_i}{12} l_i^2 (kgm^2)$	Momento de inércia rotacional de elevação
I_{Ra}	$I_{Re}[(0,9 \sin(\theta_{ei})) + 0,1] (kgm^2)$	Momento de inércia rotacional de azimute
I_{Rt}	$\left(\frac{m_i}{2}\right) r_i^2 (kgm^2)$	Momento de inércia rotacional de torção
E_y	$8,10^{10} (N/m^2)$	Módulo de Young (Elasticidade do cabo)
I_{sec}	$\frac{1}{4} \pi r_i^4 (m^4)$	Momento de inércia de área da seção transversal
k_e	$\frac{5}{6} n E_y \frac{I_{sec}}{l_{comp}} \left(\frac{Nm}{rd}\right)$	Constante elástica de elevação
k_a	Zero $\left(\frac{Nm}{rd}\right)$	Constante elástica de azimute
k_t	$50 k_e \left(\frac{Nm}{rd}\right)$	Constante elástica de torção
c_e	$33,33n \left(\frac{Nms}{rd}\right)$	Coeficiente de atrito elevação
c_a	$1666,67n \left(\frac{Nms}{rd}\right)$	Coeficiente de atrito azimute
c_t	$0,833n \left(\frac{Nms}{rd}\right)$	Coeficiente de atrito torção
c_v	$200 \left(\frac{Ns^2}{rd}\right)$	Coeficiente de arrasto hidrodinâmico
g	9,81 (m/s^2)	Aceleração gravitacional

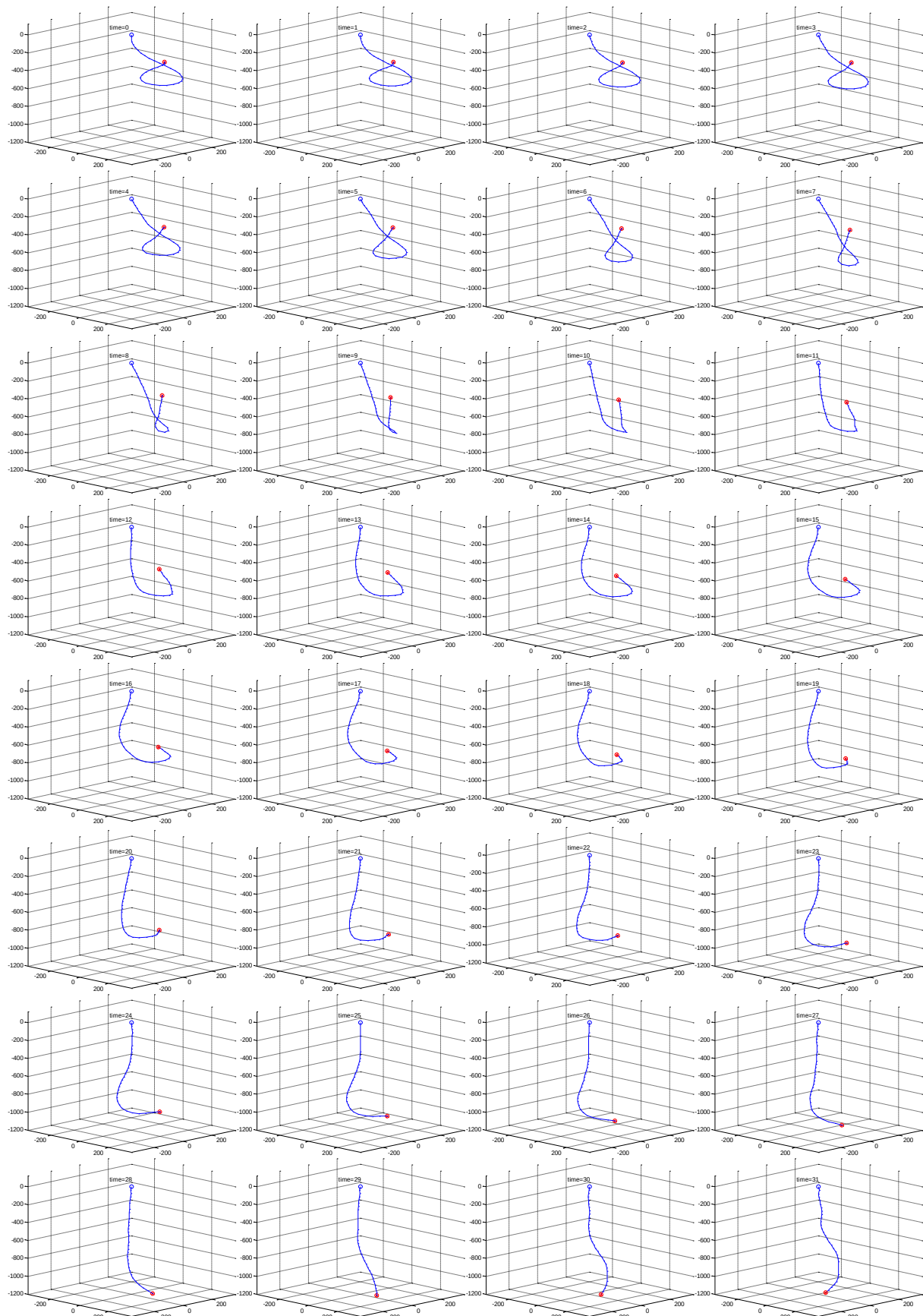


Figura 2.9 - Primeira simulação, cabo 10 elos; cabo dentro da água; situação de queda livre (frames a cada 1 s)

Na simulação realizada, o cabo descreve um movimento em queda livre no espaço de acordo com o que é fisicamente esperado. Os *frames* mostrados na Figura 2.9 foram obtidos por meio de um *software* de animação tridimensional desenvolvido com o *software* MATLAB, programa computacional este que permitiu a percepção de realidade física.

O tempo de simulação cresce muito para a solução numérica, à medida que se aumenta o número de elos. Foram 8 horas e 31 s de processamento para o cabo com 32 elos, trabalhando-se em um microcomputador modelo Dell Inspiron 14 3442-A40, com processador Intel Core i5 e memória RAM de 8 GB DDR3 1700 MHz. O acréscimo no tempo de processamento deve-se ao crescimento do número de equações e, conseqüentemente, de operações realizadas, quando se aumenta o número de elos. Deve-se ainda e principalmente, ao mau condicionamento numérico em razão do determinante da matriz de inércia se aproximar de zero, pois esta matriz necessita ser invertida no processo de solução numérica das equações diferenciais ordinárias do modelo dinâmico. Utilizou-se a rotina ODE45 do MATLAB, cujo integrador é um Runge-Kutta de quarta e quinta ordem com ajuste automático do passo de integração e, para manter o erro local no valor mínimo especificado, a rotina diminui o passo, acarretando no grande acréscimo do tempo total de processamento.

CAPÍTULO 3

MODELAGEM DINÂMICA DE VEÍCULOS SUBAQUÁTICOS

A modelagem dinâmica de um veículo subaquático inclui a interação da sua estrutura com o meio subaquático, ação dos propulsores sobre o veículo, efeito das ondas, efeito das correntes oceânicas e ação de outros esforços, tais como: massa adicional, peso, empuxo, arrasto, sustentação e propulsão. No caso de um veículo do tipo ROV, deve-se considerar a ação da força de tração do cabo umbilical, mais significativa quando existe a ação de correntes oceânicas.

3.1. DINÂMICA DO CORPO RÍGIDO

Um corpo material pode ser interpretado como corpo rígido, dependendo de suas dimensões e da sua distribuição de massa. Segundo (SOUZA [26]), um veículo subaquático possui dimensões não desprezíveis e, portanto, deve ser tratado como corpo rígido.

Existem termos adicionais na dinâmica do corpo rígido em relação à dinâmica do ponto material e estes termos constituem as equações da dinâmica para um corpo rígido com seis graus de liberdade, definidos em relação ao sistema referencial do corpo. Segundo (FOSSEN[6]; SOUZA[26]; YUH[32]), podem ser escritos como:

$$\mathbf{m} \left(\dot{\mathbf{v}}_0 + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r}_G + \boldsymbol{\omega} r_G \wedge (\dot{\mathbf{v}}_0 + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_0) \right) = \mathbf{f}_0 \quad (3.1)$$

para o movimento de translação e

$$\mathbf{I}_0 \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{I}_0 \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{m} \mathbf{r}_G \wedge (\dot{\mathbf{v}}_0 + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_0) = \mathbf{m}_0 \quad (3.2)$$

para o movimento de rotação, onde $\mathbf{r}_G = [X_G, Y_G, Z_G]^T$ é a posição do centro de gravidade do corpo em relação ao sistema de coordenadas móvel, $\mathbf{v}_0 = [u, v, w]^T$ e $\boldsymbol{\omega} = [p, q, r]^T$ são as velocidades linear e angular respectivamente, $\mathbf{I}_0$ é o tensor de Inércia do corpo rígido (contém os momentos e produtos de inércia do veículo em relação ao centro do sistema de coordenadas móvel), $\mathbf{f}_0 = [X, Y, Z]^T$ e $\mathbf{m}_0 = [K, M, N]^T$ são vetores de forças externas e momentos de forças externas, respectivamente.

Manipulando-se as equações (3.1) e (3.2) para cada um dos seis graus de liberdade, tem-se a equação do movimento do corpo rígido com seis graus de liberdade em formato matricial:

$$\mathbf{M}_{RB} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}_{RB}(\mathbf{v})\mathbf{v} = \boldsymbol{\tau}_{RB} \quad (3.3)$$

Na Equação (3.3), $\mathbf{M}_{RB}$ é a matriz de inércia, $\mathbf{C}_{RB}(\mathbf{v})$ é a matriz de coriolis-centrípetas, $\mathbf{v} = [u, v, w, p, q, r]^T$ é o vetor velocidade ($[u, v, w]^T$ velocidade linear e $[p, q, r]^T$ velocidade angular) e $\boldsymbol{\tau}_{RB} = [X_{RB}, Y_{RB}, Z_{RB}, K_{RB}, M_{RB}, N_{RB}]^T$ é o vetor resultante de todas as forças e momentos aplicados no veículo, sendo que todas as grandezas estão no referencial do corpo.

A matriz $\mathbf{M}_{RB}$ é constituída pela massa (m), momentos de inércia (I_X, I_Y, I_Z) no referencial do corpo, produtos de inércia (I_{XY}, I_{YZ}, I_{XZ}) – onde $I_{XY} = I_{YX}$, $I_{XZ} = I_{ZX}$ e $I_{YZ} = I_{ZY}$ – e coordenadas do centro de gravidade no referencial do corpo ($\mathbf{r}_G = [X_G, Y_G, Z_G]^T$). A matriz $\mathbf{M}_{RB}$ é positiva definida e possui uma única parametrização possível (FJELLSTAD[5], FOSSEN[6]):

$$\mathbf{M}_{RB} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mZ_G & -mY_G \\ 0 & m & 0 & -mZ_G & 0 & mX_G \\ 0 & 0 & m & mY_G & -mX_G & 0 \\ 0 & -mZ_G & mY_G & I_X & -I_{XY} & -I_{XZ} \\ mZ_G & 0 & -mX_G & -I_{YX} & I_Y & -I_{YZ} \\ -mY_G & mX_G & 0 & -I_{ZX} & -I_{ZY} & I_Z \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

A matriz de esforços Coriolis-centrípetas do corpo rígido pode ter várias parametrizações. Uma parametrização possível possui a forma (SOUZA[26]):

$$\mathbf{C}_{RB}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{C}_1 \\ -\mathbf{C}_1^T & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

onde

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} m(Y_G q + Z_G r) & -m(X_G q - w) & -m(X_G r + v) \\ -m(Y_G p + w) & m(Z_G r + X_G p) & -m(Y_G p - u) \\ -m(Z_G p - v) & -m(Z_G q + u) & m(X_G p + Y_G q) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

e

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -I_{YZ}q - I_{XZ}p - I_Zr & I_{YZ}r + I_{XY}p - I_Yq \\ I_{YZ}q + I_{XZ}p - I_Zr & 0 & -I_{XZ}r - I_{XY}q + I_Xp \\ I_{YZ}r - I_{XY}p + I_Yq & I_{XZ}r + I_{XY}q - I_Xp & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Com essa parametrização, pode-se concluir que a matriz Coriolis-centrípetas é antissimétrica, ou seja:

$$\mathbf{C}_{RB}(\mathbf{v}) = -\mathbf{C}_{RB}(\mathbf{v})^T \quad (3.8)$$

3.2. FORÇA DE MASSA ADICIONAL

Quando o corpo está submerso, este passa a ter massas adicionais a seu comportamento de corpo rígido. Esta força de massa adicional deve-se à inércia do volume de fluido que envolve o veículo. Para que o veículo se desloque em relação ao fluido, ele deve vencer a inércia do fluido além da sua própria inércia, fazendo com que o veículo aparente ter massa superior à sua massa real.

Segundo (FOSSEN[6]), a expressão da força devido a massa adicional $\boldsymbol{\tau}_a$ em função das matrizes de inércia $\mathbf{M}_A$ e de Coriolis-centrípetas $\mathbf{C}_A(\mathbf{v})$ pode ser obtida na seguinte forma matricial-vetorial:

$$\boldsymbol{\tau}_a = -\mathbf{M}_A \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{C}_A(\mathbf{v})\mathbf{v} \quad (3.9)$$

onde $\mathbf{v} = [u, v, w, p, q, r]^T$ é o vetor velocidade e $\boldsymbol{\tau}_a = [X_A, Y_A, Z_A, K_A, M_A, N_A]^T$ é o vetor de forças e momentos de massa adicional. Os coeficientes da matriz de inércia de massa adicional $\mathbf{M}_A$ representam derivadas hidrodinâmicas com relação à aceleração do veículo. Devida a complexidade para a obtenção dos coeficientes para todos os estados de operação possíveis, adota-se coeficientes constantes (FOSSEN[6]; SOUZA[26]).

Para o caso de veículos com simetria nos planos xz , yz e xy , ou seja, com três planos de simetria, considera-se a matriz de inércia de massa adicional $\mathbf{M}_A$ como diagonal.

A matriz de inércia de massa adicional é da seguinte forma:

$$\mathbf{M}_A = -diag[X_{\dot{u}}, Y_{\dot{v}}, Z_{\dot{w}}, K_{\dot{p}}, M_{\dot{q}}, N_{\dot{r}}] \quad (3.10)$$

$X_{\dot{u}}$, $Y_{\dot{v}}$, $Z_{\dot{w}}$, $K_{\dot{p}}$, $M_{\dot{q}}$ e $N_{\dot{r}}$ correspondem aos coeficientes de massa adicional, onde:

$$\begin{aligned} X_{\dot{u}} &= \frac{\partial X}{\partial \dot{u}} & Y_{\dot{v}} &= \frac{\partial Y}{\partial \dot{v}} & Z_{\dot{w}} &= \frac{\partial Z}{\partial \dot{w}} \\ K_{\dot{p}} &= \frac{\partial K}{\partial \dot{p}} & M_{\dot{q}} &= \frac{\partial M}{\partial \dot{q}} & N_{\dot{r}} &= \frac{\partial N}{\partial \dot{r}} \end{aligned}$$

A notação (SNAME[25]; FOSSEN[6]) para coeficientes de massa adicional possui a seguinte forma:

$$\begin{aligned} -X_{\dot{u}} &= A_{11} & -Y_{\dot{v}} &= A_{22} & -Z_{\dot{w}} &= A_{33} \\ -K_{\dot{p}} &= A_{44} & -M_{\dot{q}} &= A_{55} & -N_{\dot{r}} &= A_{66} \end{aligned}$$

Essa nomenclatura será a utilizada de agora em diante, ou seja, a matriz de inércia de massa adicional é escrita com a parametrização:

$$\mathbf{M}_A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

A matriz Coriolis-centrípetra de massa adicionada $\mathbf{C}_A(\mathbf{v})$, assim como a matriz Coriolis-centrípetra de corpo rígido $\mathbf{C}_{RB}(\mathbf{v})$, possuem termos dependentes das componentes do vetor velocidade do veículo ($\mathbf{v}$) e podem apresentar diversas parametrizações. Uma possível parametrização é:

$$\mathbf{C}_A(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & A_{33}w & -A_{22}v \\ 0 & 0 & 0 & -A_{33}v & 0 & A_{11}u \\ 0 & 0 & 0 & A_{22}v & -A_{11}u & 0 \\ 0 & A_{33}w & -A_{22}v & 0 & A_{66}r & -A_{55}q \\ -A_{33}w & 0 & A_{11}u & -A_{66}r & 0 & A_{44}p \\ A_{22}v & -A_{11}u & 0 & A_{55}q & -A_{44}p & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

3.3. FORÇA DE ARRASTO E SUSTENTAÇÃO

As forças de arrasto e sustentação dependem do formato, das dimensões, rugosidade e velocidade de operação do veículo. A força de arrasto é paralela à velocidade do veículo em relação ao fluido e a força de sustentação é ortogonal à velocidade em relação ao fluido.

A força de arrasto $\mathbf{F}_D$ pode ser escrita na forma (FOSSEN[6], TAVARES[27]):

$$\mathbf{F}_D = \mathbf{D}_S \mathbf{v} + \mathbf{D}_Q |\mathbf{v}| \mathbf{v} \quad (3.13)$$

onde $\mathbf{D}_S$ e $\mathbf{D}_Q$ são, respectivamente, coeficiente de arrasto linear e coeficiente de arrasto quadrático e $\mathbf{v}$ é a velocidade do veículo em relação ao fluido.

A força de sustentação $\mathbf{F}_L$ é expressa por:

$$\mathbf{F}_L = \frac{1}{2} \rho \mathbf{C}_L(\mathbf{R}_n, \alpha) \mathbf{A}(\alpha) |\mathbf{v}| \mathbf{v} \quad (3.14)$$

onde $\mathbf{C}_L(\mathbf{R}_n, \alpha)$ é o coeficiente de sustentação, ρ é amassa específica do fluido, $\mathbf{A}(\alpha)$ é a área frontal projetada pelo veículo.

As equações das forças e momentos obtidos em função do arrasto e sustentação podem ser escritas em formato matricial-vetorial:

$$\boldsymbol{\tau}_{DL} = -\mathbf{D}(\mathbf{v}) \mathbf{v} \quad (3.15)$$

Na Equação (3.15), $\boldsymbol{\tau}_{DL} = [X_{DL}, Y_{DL}, Z_{DL}, K_{DL}, M_{DL}, N_{DL}]^T$, $\mathbf{D}(\mathbf{v})$ é a matriz de arrasto e sustentação e $\mathbf{v} = [u, v, w, p, q, r]^T$ é o vetor velocidade no referencial do corpo.

A matriz $\mathbf{D}(\mathbf{v})$ de arrasto e sustentação possui o seguinte formato:

$$\mathbf{D}(\mathbf{v}) = -\frac{\rho}{2} \begin{bmatrix} \nabla^{\frac{2}{3}} u C_x(\alpha, \beta) & \nabla^{\frac{2}{3}} v C_x(\alpha, \beta) & \nabla^{\frac{2}{3}} w C_x(\alpha, \beta) & 0 & 0 & 0 \\ \nabla^{\frac{2}{3}} u C_y(\beta, \gamma) & \nabla^{\frac{2}{3}} v C_y(\beta, \gamma) & \nabla^{\frac{2}{3}} w C_y(\beta, \gamma) & 0 & 0 & 0 \\ \nabla^{\frac{2}{3}} u C_z(\alpha, \gamma) & \nabla^{\frac{2}{3}} v C_z(\alpha, \gamma) & \nabla^{\frac{2}{3}} w C_z(\alpha, \gamma) & 0 & 0 & 0 \\ \nabla u C_k(\gamma) & \nabla v C_k(\gamma) & \nabla w C_k(\gamma) & \nabla^{\frac{5}{3}} C_p |p| & 0 & 0 \\ \nabla u C_m(\alpha) & \nabla v C_m(\alpha) & \nabla w C_m(\alpha) & 0 & \nabla^{\frac{5}{3}} C_q |q| & 0 \\ \nabla u C_n(\beta) & \nabla v C_n(\beta) & \nabla w C_n(\beta) & 0 & 0 & \nabla^{\frac{5}{3}} C_r |r| \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

As equações (3.15) e (3.16) apresentam as seguintes notações:

- $X_{DL} = \frac{1}{2}\rho U^2 \nabla^{2/3} C_x(\alpha, \beta)$, $Y_{DL} = \frac{1}{2}\rho U^2 \nabla^{2/3} C_y(\beta, \gamma)$ e $Z_{DL} = \frac{1}{2}\rho U^2 \nabla^{2/3} C_z(\alpha, \gamma)$ são as forças resultantes de arrasto e sustentação nas direções X_0 , Y_0 e Z_0 , respectivamente;
- $K_{DL} = \frac{1}{2}\rho U^2 \nabla C_k(\gamma) + \frac{1}{2}\rho \nabla^{5/3} C_p p |p|$, $M_{DL} = \frac{1}{2}\rho U^2 \nabla C_m(\alpha) + \frac{1}{2}\rho \nabla^{5/3} C_q q |q|$ e $N_{DL} = \frac{1}{2}\rho U^2 \nabla C_n(\beta) + \frac{1}{2}\rho \nabla^{5/3} C_r r |r|$, são os momentos produzidos pelas forças resultantes de arrasto e sustentação nas direções X_0 , Y_0 e Z_0 , respectivamente;
- ρ é massa específica do fluido;
- ∇ é volume do veículo;
- U é o módulo da velocidade linear do veículo, ou seja, $U = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$;
- C_p , C_q e C_r são os coeficientes de amortecimento ao movimento de rotação do veículo;
- C_x , C_y e C_z são os coeficientes das forças de arrasto e sustentação;
- C_k , C_m e C_n são os coeficientes dos momentos produzidos pelas forças de arrasto e sustentação;
- α é o ângulo de ataque, β é o ângulo de deriva e γ é o ângulo de ataque lateral.

3.4. FORÇAS RESTAURADORAS

As forças restauradoras são oriundas da ação das forças peso ($\mathbf{W}$) e empuxo ($\mathbf{B}$). Essas forças atuam na direção vertical inercial e possuem sentidos contrários, sendo que o eixo Z do referencial inercial é direcionado na vertical, ou seja, apontando para o centro da Terra.

Os vetores da força peso ($\mathbf{f}_W$) e da força de empuxo ($\mathbf{f}_B$) podem ser escritos no referencial do veículo como:

$$\mathbf{f}_W = \mathbf{J}_1^{-1}[0,0,W]^T \quad (3.17)$$

$$\mathbf{f}_B = \mathbf{J}_1^{-1}[0,0,B]^T \quad (3.18)$$

onde J_1^{-1} é a matriz inversa de transformação (J_1) e é dada por:

$$J_1 = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & s\psi c\theta & -s\theta \\ -s\psi c\phi + c\psi s\theta s\phi & c\psi c\phi + s\phi s\theta s\psi & c\theta s\phi \\ s\psi s\phi + c\psi c\phi s\theta & -c\psi s\phi + s\theta s\psi c\phi & c\theta s\phi \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

onde $s * = \sin(*)$, $c * = \cos(*)$, ψ , θ e ϕ são ângulos em relação aos eixos do referencial inercial (ângulos de Euler).

A componente $\mathbf{W}$ corresponde ao módulo da força peso, definida pela Equação (3.17) e a componente $\mathbf{B}$ corresponde ao módulo da força de empuxo, definida pela Equação (3.18). Desta forma, as componentes $\mathbf{W}$ e $\mathbf{B}$ são respectivamente:

$$W = mg \quad (3.20)$$

$$B = \rho g \nabla \quad (3.21)$$

sendo que m é a massa do veículo, ∇ representa o volume do veículo, ρ é a massa específica do fluido e g é a aceleração da gravidade.

A força peso atua no centro de gravidade do veículo, cujo o vetor posição é $\mathbf{r}_G = [x_G, y_G, z_G]^T$, e a força de empuxo atua no centro de empuxo (centro de volume), cujo vetor posição é $\mathbf{r}_B = [x_B, y_B, z_B]^T$. Ambos os vetores estão no referencial do corpo. Desta forma, o momento do peso ($\mathbf{M}_W$) e o momento do empuxo ($\mathbf{M}_B$) em relação à origem do referencial do corpo são dados respectivamente por:

$$\mathbf{M}_W = \mathbf{r}_G \wedge \mathbf{f}_W \quad (3.22)$$

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_B \wedge \mathbf{f}_B \quad (3.23)$$

A expressão geral das forças e momentos restauradores no referencial do corpo é dada por:

$$\boldsymbol{\tau}_{WB} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_W + \mathbf{f}_B \\ \mathbf{M}_W + \mathbf{M}_B \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} (W - B)s\theta \\ -(W - B)c\theta s\phi \\ -(W - B)c\theta c\phi \\ -(y_G W - y_B B)c\theta c\phi + (z_G W - z_B B)c\theta s\phi \\ (z_G W - z_B B)s\theta + (x_G W - x_B B)c\theta c\phi \\ -(x_G W - x_B B)c\theta s\phi - (y_G W - y_B B)s\theta \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

3.5. MODELO DINÂMICO DOS VEÍCULOS SUBAQUÁTICOS

A modelagem dinâmica de veículos subaquáticos pode considerar ou não os efeitos dinâmicos de Correntes Oceânicas. Conhecendo-se as forças e momentos que atuam sobre os veículos subaquáticos, expressas no referencial do corpo, pode-se definir o modelo dinâmico do veículo sem corrente oceânica nesse mesmo referencial como sendo:

$$\mathbf{M}_{RB}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}_{RB}(\mathbf{v})\mathbf{v} = \boldsymbol{\tau}_A + \boldsymbol{\tau}_{DL} + \boldsymbol{\tau}_{WB} + \boldsymbol{\tau} \quad (3.25)$$

Substituindo-se $\boldsymbol{\tau}_A$ e $\boldsymbol{\tau}_{DL}$ pelas equações (3.9) e (3.15) respectivamente e considerando-se $\boldsymbol{\tau}_{WB} = -\mathbf{G}$, tem-se uma nova expressão para o modelo dinâmico:

$$(\mathbf{M}_{RB} + \mathbf{M}_A)\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{C}_{RB}(\mathbf{v}) + \mathbf{C}_A(\mathbf{v}))\mathbf{v} + \mathbf{D}(\mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{G} = \boldsymbol{\tau} \quad (3.26)$$

Considerando-se $(\mathbf{M}_{RB} + \mathbf{M}_A)$ e $\mathbf{C}(\mathbf{v}) = (\mathbf{C}_{RB}(\mathbf{v}) + \mathbf{C}_A(\mathbf{v}))$, pode-se reescrever o modelo dinâmico sem corrente oceânica no referencial do corpo (3.26) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}(\mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{D}(\mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{G}(\boldsymbol{\eta}) &= \boldsymbol{\tau} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{J}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v} \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde:

- $\mathbf{M}$ é a matriz de inércia;
- $\mathbf{C}(\mathbf{v})$ é a matriz Coriolis-centrípetas;
- $\mathbf{D}(\mathbf{v})$ é a matriz de arrasto e sustentação;
- $\mathbf{G}(\boldsymbol{\eta})$ é o vetor de forças e momentos restauradores;
- $\boldsymbol{\tau}$ é o vetor de forças e momentos dos propulsores;
- $\mathbf{v}$ é o vetor velocidade do referencial do corpo;
- $\boldsymbol{\eta}$ é o vetor posição e orientação no referencial inercial;
- $\mathbf{J}(\boldsymbol{\eta})$ é a matriz de transformação por ângulos de Euler;
- $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ é o vetor velocidade no referencial inercial.

Ao descrever o modelo dinâmico com corrente oceânica, define-se a velocidade da corrente ($\mathbf{v}_c$) no referencial corpo pelo vetor $\mathbf{v}_c = [u_c, v_c, w_c, 0, 0, 0]^T$. A velocidade relativa

à corrente ($\mathbf{v}_r$) é a diferença entre a velocidade do veículo ($\mathbf{v}$) e a velocidade da corrente ($\mathbf{v}_c$), e é definida como:

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v} - \mathbf{v}_c \quad (3.28)$$

Substituindo-se a velocidade do veículo pela velocidade relativa à corrente no modelo dinâmico (3.27), tem-se o modelo dinâmico com corrente oceânica:

$$\begin{aligned} M\dot{\mathbf{v}}_r + C(\mathbf{v}_r)\mathbf{v}_r + D(\mathbf{v}_r)\mathbf{v}_r + \mathbf{G} &= \boldsymbol{\tau} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{J}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v}_r + \mathbf{v}_c^E \end{aligned} \quad (3.29)$$

3.6. MODELAGEM DINÂMICA DOS PROPULSORES

As forças e momentos de propulsão são decorrentes da ação de cada propulsor e são expressos como funções da velocidade dos propulsores, com a seguinte forma matricial:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3.30)$$

onde $\mathbf{u}$ é um vetor de dimensão $p \times 1$ com elementos $u_i = |n_i|n_i$, $\mathbf{B}$ é uma matriz de dimensão $6 \times p$, cuja a distribuição de seus elementos depende da localização dos propulsores, e p é o número de propulsores

A equação diferencial matricial para a dinâmica dos propulsores pode ser expressa na forma:

$$\mathbf{P}\dot{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\tau}_m - \boldsymbol{\tau}_r \quad (3.31)$$

onde $\mathbf{P}$ é uma matriz diagonal contendo os momentos de inércia dos propulsores, $\dot{\mathbf{n}}$ é o vetor de aceleração angular dos hélices, $\boldsymbol{\tau}_m$ é o vetor de torques motores e $\boldsymbol{\tau}_r$ é o vetor de toques resistentes.

A integração da Equação (3.29) permite obter o vetor velocidade do veículo no referencial do corpo. Entretanto, há a necessidade de se conhecer as posições lineares

(relativas ao deslocamento do centro de massa) e as posições angulares (relativas a deslocamentos angulares em torno do centro de massa) no referencial inercial. Define-se

$$\boldsymbol{\eta}_1 = [x, y, z]^T, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = [\phi, \theta, \psi]^T \text{ e } \boldsymbol{\eta} = [\boldsymbol{\eta}_1^T, \boldsymbol{\eta}_2^T]^T$$

onde $[x, y, z]^T$ e $[\phi, \theta, \psi]^T$ são as posições lineares e angulares (ângulos de Euler) do veículo, no referencial inercial. Determina-se uma matriz $J(\boldsymbol{\eta}_2)$ responsável pela transformação cinemática entre os referenciais do corpo e inercial, de forma que se pode escrever:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\mathbf{v}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{v}_r)\mathbf{v}_r + \mathbf{D}(\mathbf{v}_r)\mathbf{v}_r + \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) &= \boldsymbol{\tau} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{J}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v}_r + \mathbf{v}_c^E \\ \mathbf{P}\dot{\mathbf{n}} &= \boldsymbol{\tau}_m - \boldsymbol{\tau}_r \end{aligned} \tag{3.32}$$

onde $\mathbf{v}_c^E$ é a velocidade da corrente oceânica, no referencial inercial. A integração conjunta das três Equações (3.32) permite a obtenção das posições lineares e angulares $\boldsymbol{\eta}$, no referencial inercial. Maiores detalhes sobre a modelagem de veículos subaquáticos podem ser encontrados em TAVARES [27].

Nos Capítulos seguintes serão desenvolvidos modelos dinâmicos de cabos considerando-se forças e torques atuantes na carga terminal, esforços estes que poderiam ser originários da dinâmica do veículo do tipo ROV. Neste caso, o ROV seria a carga terminal do cabo.

CAPÍTULO 4

FORÇAS NA CARGA TERMINAL

O principal objetivo do presente Capítulo é o desenvolvimento do equacionamento relativo à interação dinâmica entre a carga terminal e o cabo, ou seja, ao serem aplicadas forças externas à carga terminal, quais seriam os efeitos dinâmicos que esta provoca no cabo. Esta situação assemelha-se ao caso de um ROV conectado à extremidade livre do cabo.

Considera-se um cabo de comprimento l , articulado a uma estrutura fixa em uma de suas extremidades e livre em sua outra extremidade, na qual existe uma carga terminal de massa m_c (ver Figura 2.1, Capítulo 2). O equacionamento do modelo dinâmico do cabo é idêntico ao que foi desenvolvido no capítulo 2.

No presente Capítulo, considera-se uma força $\vec{F}_{c0}$ externa ao sistema, atuando na carga terminal. Essa força externa está no referencial inercial $X_0Y_0Z_0$ e origina forças nos elos e torques nas articulações fictícias, ou seja, forças e torques são transmitidos ao longo da cadeia articulada de elos, quando se considera o cabo formado por elos rígidos conectados por articulações fictícias, conforme representado na Figura 4.1.

O presente Capítulo procura explicitar as equações para as forças e torques transmitidos ao longo do cabo. Apresenta-se, inicialmente, o desenvolvimento de equações gerais para forças e torques, considerando-se o cabo formado por cinco elos, conforme mostra a Figura 4.1. Posteriormente apresenta-se o desenvolvimento de um algoritmo genérico que possibilita a obtenção das forças e torques para um número qualquer de elos, ou seja, generaliza-se o procedimento para qualquer número de graus de liberdade escolhido para representar a dinâmica contínua do cabo no espaço tridimensional. Este algoritmo genérico foi incorporado aos algoritmos que geram o modelo do cabo, apresentados no Capítulo 2, sendo capaz de gerar os torques em cada uma das n articulações do cabo, necessitando apenas do conhecimento da força externa que é aplicada na carga terminal. Em síntese, a carga terminal do cabo recebe uma força externa, já conhecida no referencial inercial $X_0Y_0Z_0$. É importante ressaltar que, por enquanto, a carga terminal é considerada como puntual, com massa concentrada em seu centro de massa, ou seja, a força externa não gera torque em torno do centro de massa da carga. Ao final do Capítulo apresentam-se simulações que testam qualitativamente o modelo considerando-se uma força externa na carga terminal.

4.1. EQUACIONAMENTO PARA O CABO DIVIDIDO EM CINCO ELOS

O cabo está articulado a um ponto fixo (origem do referencial inercial) em uma de suas extremidades e possui uma carga terminal na outra extremidade, com uma força $\vec{F}_{c0}$, escrita no referencial inercial, atuante nessa carga. Para o desenvolvimento das equações, o cabo foi dividido em cinco partes rígidas (elos), de comprimentos l_1, l_2, l_3, l_4 e l_5 , conectados por articulações fictícias, conforme mostra a Figura 4.1.

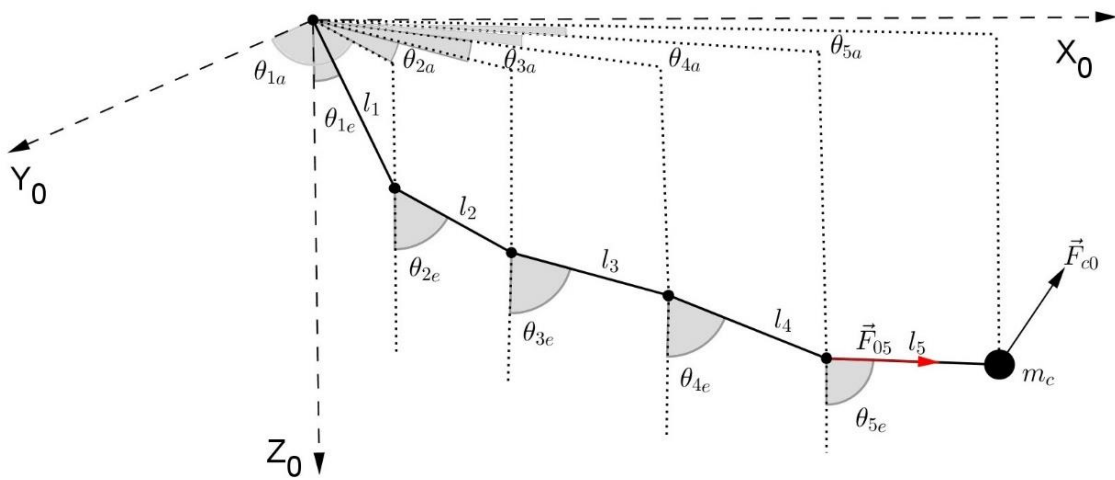


Figura 4.1 - Representação geral para o cabo dividido em cinco elos

Para a obtenção das forças em cada elo e dos torques em cada articulação, originados pela força na carga terminal, foi feita uma análise vetorial desse esforço. Pelo contexto físico, tem-se que o torque ($\vec{\tau}$) é o produto vetorial entre a força aplicada em um corpo $\vec{F}$, e o braço de alavanca desse corpo, $\vec{r}$, ou seja:

$$\vec{\tau} = \vec{F} \wedge \vec{r} \quad (4.1)$$

Como exemplificado na Figura 4.1, o cabo é dividido em cinco elos, de forma que a força externa $\vec{F}_{c0}$ produz cinco torques, um para cada uma das cinco articulações. Os torques são calculados a partir da carga terminal, ou seja, serão calculados $\vec{\tau}_4$ (última articulação), $\vec{\tau}_3$, $\vec{\tau}_2$, $\vec{\tau}_1$ e $\vec{\tau}_0$ (articulação da base), nesta sequência. Sabe-se que a força externa $\vec{F}_{c0}$ pode ser expressa da seguinte forma (escrita no referencial inercial da base):

$$\vec{F}_{c0} = F_{c0x}\vec{i} + F_{c0y}\vec{j} + F_{c0z}\vec{k} \quad (4.2)$$

Para a definição do vetor braço de alavanca que expressa a distância entre a carga terminal na qual é aplicada a força externa e a quinta articulação, deve-se conhecer o vetor que expressa a distância entre a origem do sistema inercial e a carga terminal ($\vec{r}_{0,5}$) e o vetor que expressa a distância entre a origem do sistema inercial e a quinta articulação ($\vec{r}_{0,4}$), conforme mostrado na Figura 4.2.

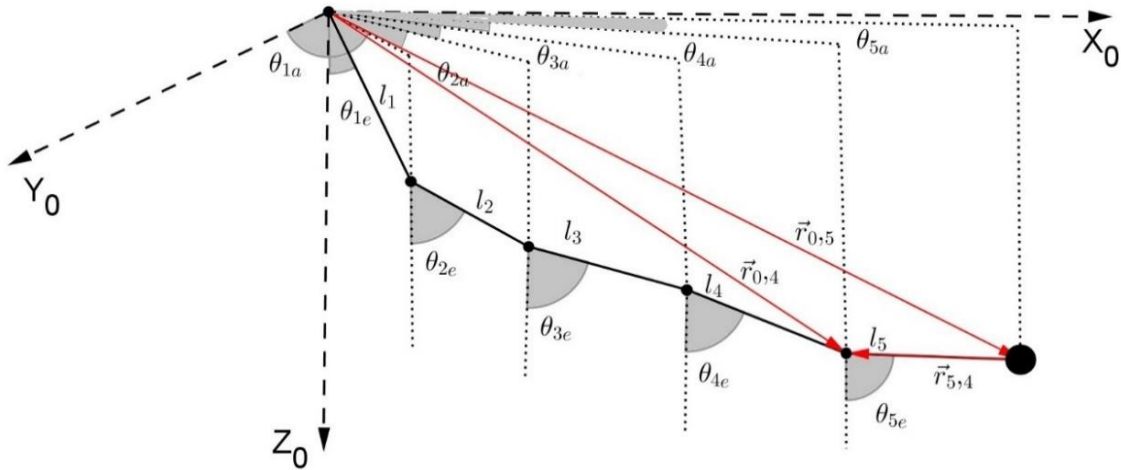


Figura 4.2 - Representação dos vetores o qual seus módulos definem a distância entre a carga terminal e a quinta articulação

De acordo com a Figura 4.2, as componentes destes vetores podem ser expressas como:

$$\vec{r}_{0,5} = \begin{cases} r_{0,5x} = l_1 \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} + l_2 \sin \theta_{2e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + \\ \quad + l_3 \sin \theta_{3e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) + \\ \quad + l_4 \sin \theta_{4e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a}) + \\ \quad + l_5 \sin \theta_{5e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a} + \theta_{5a}) \\ r_{0,5y} = l_1 \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} + l_2 \sin \theta_{2e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + \\ \quad + l_3 \sin \theta_{3e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) + \\ \quad + l_4 \sin \theta_{4e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a}) + \\ \quad + l_5 \sin \theta_{5e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a} + \theta_{5a}) \\ r_{0,5z} = l_1 \cos \theta_{1e} + l_2 \cos \theta_{2e} + l_3 \cos \theta_{3e} + l_4 \cos \theta_{4e} + l_5 \cos \theta_{5e} \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\vec{r}_{0,4} = \begin{cases} r_{0,4x} = l_1 \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} + l_2 \sin \theta_{2e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + \\ \quad + l_3 \sin \theta_{3e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) + \\ \quad + l_4 \sin \theta_{4e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a}) \\ r_{0,4y} = l_1 \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} + l_2 \sin \theta_{2e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + \\ \quad + l_3 \sin \theta_{3e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) + \\ \quad + l_4 \sin \theta_{4e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a}) \\ r_{0,4z} = l_1 \cos \theta_{1e} + l_2 \cos \theta_{2e} + l_3 \cos \theta_{3e} + l_4 \cos \theta_{4e} \end{cases} \quad (4.4)$$

Desta forma, $\vec{r}_{5,4}$ é dado por:

$$\vec{r}_{5,4} = \vec{r}_{0,4} - \vec{r}_{0,5} \quad (4.5)$$

Portanto, as componentes do vetor $\vec{r}_{5,4}$ são:

$$\vec{r}_{5,4} = \begin{cases} r_{5,4x} = -l_5 \sin \theta_{5e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a} + \theta_{5a}) \\ r_{5,4y} = -l_5 \sin \theta_{5e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a} + \theta_{5a}) \\ r_{5,4z} = -l_5 \cos \theta_{5e} \end{cases} \quad (4.6)$$

O torque originado na quinta articulação fictícia é obtido a partir da Equação (4.1), possuindo a forma:

$$\vec{\tau}_4 = \vec{F}_{c0} \wedge \vec{r}_{5,4} \quad (4.7)$$

Assim, o torque na quinta articulação é expresso como:

$$\vec{\tau}_4 = \left[\begin{aligned} &(F_{c0z} \sin \theta_{5e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a} + \theta_{5a}) - F_{c0y} \cos \theta_{5e})\vec{i} + \\ &+(F_{c0x} \cos \theta_{5e} - F_{c0z} \sin \theta_{5e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a} + \theta_{5a}))\vec{j} + \\ &+ \left(F_{c0y} \sin \theta_{5e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a} + \theta_{5a}) + \right. \\ &\quad \left. - F_{c0x} \sin \theta_{5e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a} + \theta_{5a}) \right) \vec{k} \end{aligned} \right] l_5 \quad (4.8)$$

Para a obtenção da força $\vec{F}_{05}$ (ver Figura 4.3), determina-se inicialmente um vetor unitário na direção do vetor $\vec{r}_{4,5}$, que une a última articulação à carga terminal. Este vetor unitário é expresso como:

$$\begin{aligned} \vec{\mu}_{4,5} = \frac{r_{4,5x}}{|\vec{r}_{4,5}|} \vec{i} + \frac{r_{4,5y}}{|\vec{r}_{4,5}|} \vec{j} + \frac{r_{4,5z}}{|\vec{r}_{4,5}|} \vec{k} = \sin \theta_{5e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a} + \theta_{5a}) \vec{i} + \\ + \sin \theta_{5e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a} + \theta_{5a}) \vec{j} + \cos \theta_{5e} \vec{k} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Portanto, a força $\vec{F}_{05}$ no quinto elo é a projeção da $\vec{F}_{c0}$ na direção $\vec{\mu}_{4,5}$:

$$\vec{F}_{05} = \vec{F}_{c0} \cos \alpha_5 \quad (4.10)$$

onde α_5 é o ângulo entre a força resultante $\vec{F}_{c0}$ e o vetor unitário $\vec{\mu}_{4,5}$, conforme representado na Figura 4.3.

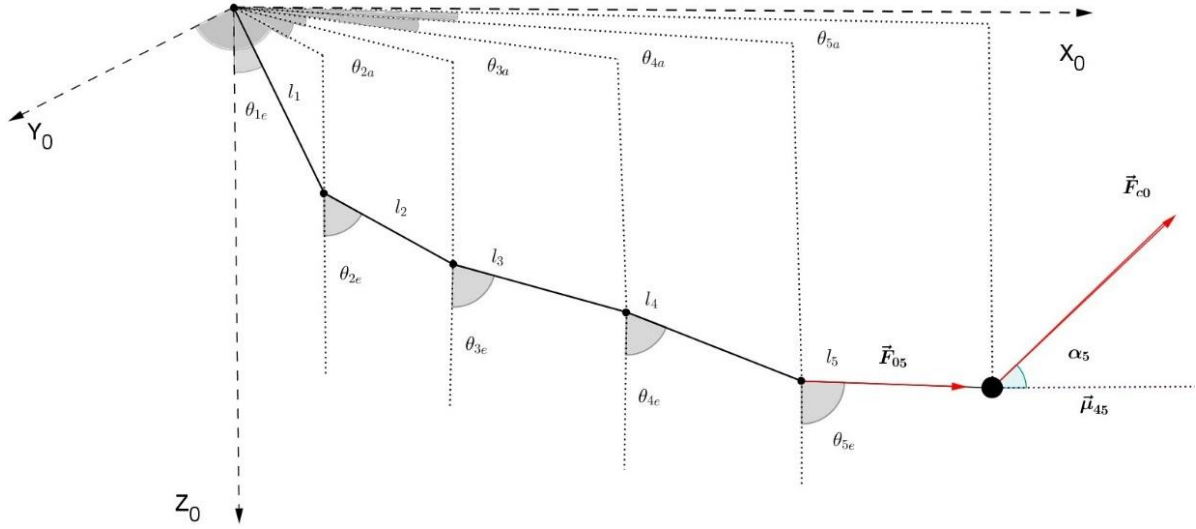


Figura 4.3 - Representação do vetor força $\vec{F}_{05}$ e vetor unitário $\vec{\mu}_{4,5}$

Ao realizar-se o produto escalar entre a força resultante $\vec{F}_{c0}$ e o vetor unitário $\vec{\mu}_{4,5}$, tem-se o $\cos \alpha_5$:

$$\cos \alpha_5 = \frac{\vec{F}_{c0} \vec{\mu}_{4,5}}{|\vec{F}_{c0}|} \quad (4.11)$$

Analogamente às equações (4.5) e (4.6), o vetor braço de alavanca $\vec{r}_{4,3}$ (expressa a distância entre a quinta e quarta articulação) possui a forma:

$$\vec{r}_{4,3} = \vec{r}_{0,3} - \vec{r}_{0,4} \quad (4.12)$$

onde $\vec{r}_{0,4}$ é expresso conforme a Equação (4.4) e

$$\vec{r}_{0,3} = \begin{cases} r_{0,3x} = l_1 \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} + l_2 \sin \theta_{2e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + \\ \quad + l_3 \sin \theta_{3e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) \\ r_{0,3y} = l_1 \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} + l_2 \sin \theta_{2e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + \\ \quad + l_3 \sin \theta_{3e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) \\ r_{0,3z} = l_1 \cos \theta_{1e} + l_2 \cos \theta_{2e} + l_3 \cos \theta_{3e} \end{cases} \quad (4.13)$$

Portanto

$$\vec{r}_{4,3} = \begin{cases} \vec{r}_{4,3x} = -l_4 \sin \theta_{4e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a}) \\ \vec{r}_{4,3y} = -l_4 \sin \theta_{4e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a}) \\ \vec{r}_{4,3z} = -l_4 \cos \theta_{4e} \end{cases} \quad (4.14)$$

Logo, de forma análoga às equações (4.7) e (4.8), tem-se o produto vetorial para a obtenção do torque $\vec{\tau}_3$ na quarta articulação, dado como:

$$\vec{\tau}_3 = \vec{F}_{05} \wedge \vec{r}_{4,3} \quad (4.15)$$

$$\vec{\tau}_3 = \cos \alpha_5 \left[\begin{aligned} & \left(F_{c0z} \sin \theta_{4e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a}) + \right. \\ & \quad \left. - F_{c0y} \cos \theta_{4e} \right) \vec{i} + \\ & + \left(F_{c0x} \cos \theta_{4e} + \right. \\ & \quad \left. - F_{0cz} \sin \theta_{4e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a}) \right) \vec{j} + l_4 \\ & + \left(F_{c0y} \sin \theta_{4e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a}) + \right. \\ & \quad \left. - F_{c0x} \sin \theta_{4e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a}) \right) \vec{k} \end{aligned} \right] \quad (4.16)$$

A força $\vec{F}_{04}$ é a projeção da $\vec{F}_{05}$ na direção do elo 4, ou seja, na direção de $\vec{r}_{3,4}$, cujo vetor unitário é expresso como:

$$\begin{aligned} \vec{\mu}_{3,4} = \frac{r_{3,4x}}{|\vec{r}_{3,4}|} \vec{i} + \frac{r_{3,4y}}{|\vec{r}_{3,4}|} \vec{j} + \frac{r_{3,4z}}{|\vec{r}_{3,4}|} \vec{k} = \sin \theta_{4e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a}) \vec{i} + \\ + \sin \theta_{4e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a}) \vec{j} + \cos \theta_{4e} \vec{k} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Portanto, a força $\vec{F}_{04}$ no quarto elo é dada por:

$$\vec{F}_{04} = \vec{F}_{05} \cos \alpha_4 \quad (4.18)$$

onde

$$\cos \alpha_4 = \frac{\vec{F}_{05} \vec{\mu}_{3,4}}{|\vec{F}_{05}|} \quad (4.19)$$

Substituindo-se a Equação (4.10) em (4.18), tem-se a força $\vec{F}_{04}$ na forma:

$$\vec{F}_{04} = \vec{F}_{c0} \cos \alpha_5 \cos \alpha_4 \quad (4.20)$$

Analogamente às equações (4.12) e (4.13), o vetor braço de alavanca $\vec{r}_{3,2}$ que expressa a distância entre a quarta e terceira articulação possui a forma:

$$\vec{r}_{3,2} = \vec{r}_{0,2} - \vec{r}_{0,3} \quad (4.21)$$

onde as componentes do vetor $\vec{r}_{0,3}$ é conforme Equação (4.13), e

$$\vec{r}_{0,2} = \begin{cases} r_{0,2x} = l_1 \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} + l_2 \sin \theta_{2e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) \\ r_{0,2y} = l_1 \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} + l_2 \sin \theta_{2e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) \\ r_{0,2z} = l_1 \cos \theta_{1e} + l_2 \cos \theta_{2e} \end{cases} \quad (4.22)$$

Portanto,

$$\vec{r}_{3,2} = \begin{cases} r_{3,2x} = -l_3 \sin \theta_{3e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) \\ r_{3,2y} = -l_3 \sin \theta_{3e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) \\ r_{3,2z} = -l_3 \cos \theta_{3e} \end{cases} \quad (4.23)$$

Logo, de forma análoga às equações (4.15) e (4.16), tem-se o produto vetorial para a obtenção do torque $\vec{\tau}_2$ na terceira articulação, como:

$$\vec{\tau}_2 = \vec{F}_{04} \wedge \vec{r}_{3,2} \quad (4.24)$$

$$\vec{\tau}_2 = \cos \alpha_5 \cos \alpha_4 \left[\begin{aligned} &\left(\begin{aligned} &F_{c0z} \sin \theta_{3e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) + \\ &-F_{c0y} \cos \theta_{3e} \end{aligned} \right) \vec{i} + \\ &\left(\begin{aligned} &F_{c0x} \cos \theta_{3e} + \\ &-F_{c0z} \sin \theta_{3e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) \end{aligned} \right) \vec{j} + \\ &\left(\begin{aligned} &F_{c0z} \sin \theta_{3e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) + \\ &-F_{c0x} \sin \theta_{3e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) \end{aligned} \right) \vec{k} \end{aligned} \right] l_3 \quad (4.25)$$

Para a obtenção da força $\vec{F}_{03}$, age-se de forma análoga aos casos anteriores:

$$\begin{aligned} \vec{\mu}_{2,3} &= \frac{r_{2,3x}}{|\vec{r}_{2,3}|} \vec{i} + \frac{r_{2,3y}}{|\vec{r}_{2,3}|} \vec{j} + \frac{r_{2,3z}}{|\vec{r}_{2,3}|} \vec{k} = \\ &= \sin \theta_{3e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) \vec{i} + \sin \theta_{3e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) \vec{j} + \cos \theta_{3e} \vec{k} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Portanto, a força $\vec{F}_{03}$ no terceiro elo é dada por:

$$\vec{F}_{03} = \vec{F}_{04} \cos \alpha_3 \quad (4.27)$$

onde

$$\cos \alpha_3 = \frac{\vec{F}_{04} \vec{\mu}_{2,3}}{|\vec{F}_{04}|} \quad (4.28)$$

Substituindo-se a Equação (4.20) em (4.27) tem-se:

$$\vec{F}_{03} = \vec{F}_{c0} \cos \alpha_5 \cos \alpha_4 \cos \alpha_3 \quad (4.29)$$

Analogamente às equações (4.21) e (4.23), o vetor braço de alavanca $\vec{r}_{2,1}$ expressa a distância entre a terceira e a segunda articulação:

$$\vec{r}_{2,1} = \vec{r}_{0,1} - \vec{r}_{0,2} \quad (4.30)$$

onde as componentes de $\vec{r}_{0,2}$ é conforme Equação (4.22) e

$$\vec{r}_{0,1} = \begin{cases} r_{0,1x} = l_1 \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} \\ r_{0,1y} = l_1 \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} \\ r_{0,1z} = l_1 \cos \theta_{1e} \end{cases} \quad (4.31)$$

Portanto,

$$\vec{r}_{2,1} = \begin{cases} r_{2,1x} = -l_2 \sin \theta_{2e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) \\ r_{2,1y} = -l_2 \sin \theta_{2e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) \\ r_{2,1z} = -l_2 \cos \theta_{2e} \end{cases} \quad (4.32)$$

Logo, de forma análoga às equações (4.24) e (4.25), tem-se o produto vetorial para a obtenção do torque $\vec{\tau}_1$ na segunda articulação sob a forma:

$$\vec{\tau}_1 = \vec{F}_{03} \wedge \vec{r}_{2,1} \quad (4.33)$$

$$\vec{\tau}_1 = \cos \alpha_5 \cos \alpha_4 \cos \alpha_3 \cdot \left[\begin{aligned} &\left(F_{c0z} \sin \theta_{2e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + \right. \\ &\quad \left. - F_{c0y} \cos \theta_{2e} \right) \vec{i} + \\ &\left(F_{c0x} \cos \theta_{2e} + \right. \\ &\quad \left. - F_{c0z} \sin \theta_{2e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) \right) \vec{j} + \\ &\left(F_{c0y} \sin \theta_{2e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + \right. \\ &\quad \left. - F_{c0x} \sin \theta_{2e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) \right) \vec{k} \end{aligned} \right] l_2 \quad (4.34)$$

A força no elo 2 ($\vec{F}_{02}$) corresponde à projeção da $\vec{F}_{03}$ na direção do elo 2, ou seja, na direção do vetor $\vec{r}_{1,2}$, cujo vetor unitário é expresso como:

$$\begin{aligned} \vec{\mu}_{1,2} &= \frac{r_{1,2x}}{|\vec{r}_{1,2}|} \vec{i} + \frac{r_{1,2y}}{|\vec{r}_{1,2}|} \vec{j} + \frac{r_{1,2z}}{|\vec{r}_{1,2}|} \vec{k} = \\ &= \sin \theta_{2e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) \vec{i} + \sin \theta_{2e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) \vec{j} + \cos \theta_{2e} \vec{k} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Portanto, a força $\vec{F}_{02}$ no segundo elo é dada por:

$$\vec{F}_{02} = \vec{F}_{03} \cos \alpha_2 \quad (4.36)$$

onde

$$\cos \alpha_2 = \frac{\vec{F}_{03} \vec{\mu}_{1,2}}{|\vec{F}_{03}|} \quad (4.37)$$

Substituindo-se a Equação (4.29) em (4.36), tem-se $\vec{F}_{02}$ na forma:

$$\vec{F}_{02} = \vec{F}_{c0} \cos \alpha_5 \cos \alpha_4 \cos \alpha_3 \cos \alpha_2 \quad (4.38)$$

As componentes do vetor braço de alavanca $\vec{r}_{1,0}$ são:

$$\vec{r}_{1,0} = \begin{cases} r_{1,0x} = -l_1 \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} \\ r_{1,0y} = -l_1 \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} \\ r_{1,0z} = -l_1 \cos \theta_{1e} \end{cases} \quad (4.39)$$

Então, de forma análoga às equações (4.33) e (4.34), tem-se o produto vetorial para a obtenção do torque $\vec{\tau}_0$ na primeira articulação, na forma:

$$\vec{\tau}_0 = \vec{F}_{02} \wedge \vec{r}_{1,0} \quad (4.40)$$

$$\vec{\tau}_0 = \cos \alpha_5 \cos \alpha_4 \cos \alpha_3 \cos \alpha_2 \left[\begin{aligned} & \left(\begin{aligned} & F_{c0z} \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} + \\ & -F_{c0y} \cos \theta_{1e} \end{aligned} \right) \vec{i} + \\ & + \left(\begin{aligned} & F_{c0x} \cos \theta_{1e} + \\ & -F_{c0z} \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} \end{aligned} \right) \vec{j} + \\ & + \left(\begin{aligned} & F_{c0y} \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} + \\ & -F_{c0x} \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} \end{aligned} \right) \vec{k} \end{aligned} \right] l_1 \quad (4.41)$$

Os torques $\vec{\tau}_4$, $\vec{\tau}_3$, $\vec{\tau}_2$, $\vec{\tau}_1$ e $\vec{\tau}_0$ obtidos nas equações (4.8), (4.16), (4.25), (4.34) e (4.41) respectivamente, possuem suas coordenadas no referencial inercial e precisam ser transferidos (projetados) para os respectivos referenciais das articulações. A representação no sistema da articulação pode ser obtida por meio de n rotações negativas de azimute em torno dos eixos Z_i (lembra-se que todos os referenciais possuem eixos Z são paralelos entre si).

$$R_{n-1} = \begin{bmatrix} \cos \left(\sum_{i=1}^n \theta_{ia} \right) & \sin \left(\sum_{i=1}^n \theta_{ia} \right) & 0 \\ -\sin \left(\sum_{i=1}^n \theta_{ia} \right) & \cos \left(\sum_{i=1}^n \theta_{ia} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Portanto, o vetor de toques $\vec{\tau}_4 = (\tau_{4x}, \tau_{4y}, \tau_{4z})$ no sistema da articulação é denotado por $\vec{\tau}_{c4} = (\tau_{c4x}, \tau_{c4y}, \tau_{c4z})$ e dado por:

$$\vec{\tau}_{c4} = R_4^T \vec{\tau}_4 \quad (4.43)$$

onde

$$R_4 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a} + \theta_{5a}) & \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a} + \theta_{5a}) & 0 \\ -\sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a} + \theta_{5a}) & \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a} + \theta_{5a}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

O vetor de torques $\vec{\tau}_3 = (\tau_{3x}, \tau_{3y}, \tau_{3z})$ no sistema da articulação é denotado por $\vec{\tau}_{c3} = (\tau_{c3x}, \tau_{c3y}, \tau_{c3z})$ e dado por:

$$\vec{\tau}_{c3} = R_3^T \vec{\tau}_3 \quad (4.45)$$

onde

$$R_3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a}) & \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a}) & 0 \\ -\sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a}) & \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

O vetor de torques $\vec{\tau}_2 = (\tau_{2x}, \tau_{2y}, \tau_{2z})$ no sistema da articulação é denotado por $\vec{\tau}_{c2} = (\tau_{c2x}, \tau_{c2y}, \tau_{c2z})$ e dado por:

$$\vec{\tau}_{c2} = R_2^T \vec{\tau}_2 \quad (4.47)$$

onde

$$R_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) & \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) & 0 \\ -\sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) & \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

O vetor de torques $\vec{\tau}_1 = (\tau_{1x}, \tau_{1y}, \tau_{1z})$ no sistema da articulação é denotado por $\vec{\tau}_{c1} = (\tau_{c1x}, \tau_{c1y}, \tau_{c1z})$ é dado por:

$$\vec{\tau}_{c1} = R_1^T \vec{\tau}_1 \quad (4.49)$$

onde

$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) & \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) & 0 \\ -\sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) & \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

No vetor de torques $\vec{\tau}_0$ não é necessário aplicar-se a transformação, pois o sistema inercial coincide com o sistema da articulação.

A partir dos torques expressos no sistema da articulação é possível identificar os torques em elevação e azimute que atuam sobre esta articulação, como ilustrado na Figura 4.4. O torque em elevação é realizado sobre o eixo perpendicular à projeção do elo no plano horizontal e o torque em azimute é igual ao torque sobre o eixo Z_i .

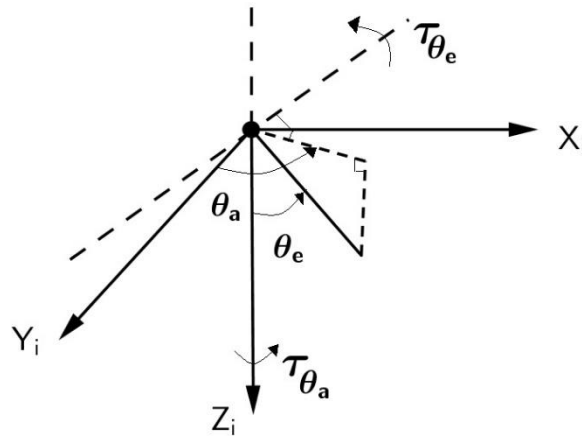


Figura 4.4 – Representação dos torques em elevação e azimute

Portanto, os torques em elevação e azimute na primeira, segunda, terceira, quarta e quinta articulação, respectivamente, são dados por:

$$\tau_{1e} = -\tau_{0x} \cos \theta_{1a} + \tau_{0y} \sin \theta_{1a} \quad (4.51)$$

$$\tau_{1a} = \tau_{0z} \quad (4.52)$$

$$\tau_{2e} = -\tau_{c1x} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + \tau_{c1y} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) \quad (4.53)$$

$$\tau_{2a} = \tau_{c1z} \quad (4.54)$$

$$\tau_{3e} = -\tau_{c2x} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) + \tau_{c2y} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) \quad (4.55)$$

$$\tau_{3a} = \tau_{c2z} \quad (4.56)$$

$$\tau_{4e} = -\tau_{c3x} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a}) + \tau_{c3y} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a}) \quad (4.57)$$

$$\tau_{4a} = \tau_{c3z} \quad (4.58)$$

$$\tau_{5e} = -\tau_{c4x} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a} + \theta_{5a}) + \tau_{c4y} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a} + \theta_{4a} + \theta_{5a}) \quad (4.59)$$

$$\tau_{5a} = \tau_{c4z} \quad (4.60)$$

Uma vez obtidos os torques em elevação e azimute, eles entram na dinâmica do cabo somados aos vetores de torques externos. Os elementos do vetor de torques externos encontram-se no Apêndice B.1. É importante ressaltar que, no presente Capítulo, as forças são aplicadas na carga terminal como se esta fosse puntual e, portanto, o cabo nesse caso não sofre torção.

4.2. ALGORITMOS GENÉRICOS

As equações analíticas para o desenvolvimento dos torques com o cabo umbilical dividido em cinco elos permitiram a identificação de um padrão de crescimento, para o caso de se considerar um número n qualquer de elos. Tomando-se como base este padrão, construiu-se então um algoritmo para a determinação dos torques em cada uma das n articulações, mostrado a seguir:

$$\vec{F}_{c0} = [F_{c0x}; F_{c0y}; F_{c0z}];$$

$$\vec{F} = \vec{F}_{c0};$$

$$P_1 = 1;$$

para $i = n: -1: 1$,

$$\begin{aligned}\tau_{x(i-1)} &= P_1 \left[F_{c0z} \sin(\theta_{ei}) \cos\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right) - F_{c0y} \cos(\theta_{ei}) \right] l_i; \\ \tau_{y(i-1)} &= P_1 \left[F_{c0x} \cos(\theta_{ei}) - F_{c0z} \sin(\theta_{ei}) \sin\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right) \right] l_i; \\ \tau_{z(i-1)} &= P_1 \left[F_{c0y} \sin(\theta_{ei}) \sin\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right) - F_{c0x} \sin(\theta_{ei}) \cos\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right) \right] l_i; \\ \vec{\tau}_{i-1} &= [\tau_{x(i-1)}; \tau_{y(i-1)}; \tau_{z(i-1)}];\end{aligned}\tag{4.61}$$

$$R_{(n-1)} = \begin{bmatrix} \cos\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right) & -\sin\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right) & 0; \sin\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right) & \cos\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right) & 0; 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\vec{\tau}_{c(i-1)} = R_{(n-1)}^T \vec{\tau}_{(i-1)} = [\tau_{cx(i-1)}; \tau_{cy(i-1)}; \tau_{cz(i-1)}];$$

$$\tau_{ia} = \tau_{cz(i-1)};$$

$$\tau_{ie} = -\tau_{cx(i-1)} \cos\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right) + \tau_{cy(i-1)} \sin\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right);$$

$$\mu_x = \sin(\theta_{ei}) \sin\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right); \mu_y = \sin(\theta_{ei}) \cos\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right); \mu_z = \cos(\theta_{ei});$$

$$\vec{\mu} = [\mu_x; \mu_y; \mu_z];$$

$$\text{se } |\vec{F}| = 0, \quad |\vec{F}| = 1e - 12; \text{ fim se,}$$

$$\vec{F} = \vec{F} \text{ abs} \left(\frac{\vec{F}^T \vec{\mu}}{|\vec{F}|} \right);$$

$$P_1 = P_1 \text{ abs} \left(\frac{\vec{F}^T \vec{\mu}}{|\vec{F}|} \right);$$

fim para,

Onde θ_{ei} são ângulos de elevação e θ_{ak} são ângulos de azimute, $i=1,...,n$.

4.3. SIMULAÇÕES PARA FORÇAS APLICADAS NA CARGA TERMINAL

Nesta seção serão mostradas simulações realizadas com os algoritmos genéricos desenvolvidos neste Capítulo. Vale ressaltar que os algoritmos genéricos para a matriz de inércia, matriz de constantes elásticas, matriz de coeficientes de atrito, vetor Coriolis-centrífugos e vetor de torques gravitacionais são os mesmos mostrados no Capítulo 2. As simulações aqui apresentadas têm como objetivo verificar se o modelo dinâmico permite resultados de acordo com o que seria fisicamente esperado, ou seja, testa-se o modelo de forma qualitativa, já que não há resultados experimentais ou alguma solução analítica. Os tipos de simulações foram idealizados de forma a se saber, previamente, qual deveria ser a evolução do cabo no espaço tridimensional. Por exemplo, aplicando-se uma força na carga terminal apenas na direção Y , o deslocamento do cabo deveria estar contido no plano YZ . Desta forma, torna-se possível testar qualitativamente o modelo dinâmico.

Serão apresentadas sete simulações, considerando-se forças externas no referencial inercial atuantes na carga terminal. Todas as simulações apresentadas foram realizadas sob a ação do arrasto hidrodinâmico e empuxo, conforme definido no Capítulo 2 (cabo considerado dentro da água).

A forma de visualização dos resultados a partir de gráficos com ângulos de azimute e elevação torna-se inadequada, pois não permite visão abrangente do cabo em movimento no espaço tridimensional. Além disso, à medida que se aumenta o número de elos, torna-se inviável visualizar os ângulos de elevação e azimute dos mesmos graficamente devido ao acúmulo de cores representativas e ao aumento da quantidade de curvas próximas entre si, em um mesmo gráfico. Portanto, a forma de visualização dos resultados adotada foi a partir de *frames* capturados em intervalos de tempo pré-definidos em cada simulação, de forma a contemplar o cabo em movimento no espaço tridimensional.

Para todas as simulações os parâmetros físicos adotados estão na Tabela 4. 1.

Tabela 4.1 - Parâmetros físicos adotados para forças no referencial inercial aplicadas na carga terminal

Parâmetros	Valor numérico (unidade)	Significado físico
l_{comp}	1200 m	Comprimento do Cabo
n	22, 26, 36	Número de elos
F_{c0}	$[F_{c0x}; F_{c0y}; F_{c0z}]$	Força aplicada à carga terminal
r_i	$\frac{0,01}{2}$ (m)	Raio de cada elo (constante)
l_i	$\frac{l_{comp}}{n}$ (m)	Comprimento de cada elo
m_{ea}	1000 (kg/m ³)	Massa Específica da água
m_e	7850 (kg/m ³)	Massa específica do cabo
m_c	600 kg	Massa da carga terminal
m_i	$\pi r_i^2 l_i m_e$ (kg)	Massa de cada elo
I_{Re}	$\frac{m_i}{12} l_i^2$ (kgm ²)	Momento de inércia rotacional de elevação
I_{Ra}	$I_{Re}[(0,9 \sin(\theta_{ei})) + 0,1]$ (kgm ²)	Momento de inércia rotacional de azimute
I_{Rt}	$\left(\frac{m_i}{2}\right) r_i^2$ (kgm ²)	Momento de inércia rotacional de torção
E_y	$8,10^{10}$ (N/m ²)	Módulo de Young (Elasticidade do cabo)
I_{sec}	$\frac{1}{4} \pi r_i^4$ (m ⁴)	Momento de inércia de área da seção transversal
k_e	$\frac{5}{6} n E_y \frac{I_{sec}}{l_{comp}} \left(\frac{Nm}{rd}\right)$	Constante elástica de elevação
k_a	Zero $\left(\frac{Nm}{rd}\right)$	Constante elástica de azimute
k_t	$50 k_e \left(\frac{Nm}{rd}\right)$	Constante elástica de torção
c_e	$33,33n \left(\frac{Nms}{rd}\right)$	Coeficiente de atrito elevação
c_a	$33,33n \left(\frac{Nms}{rd}\right)$	Coeficiente de atrito azimute
c_t	$0,833n \left(\frac{Nms}{rd}\right)$	Coeficiente de atrito torção

c_v	$200 \left(\frac{Ns^2}{rd} \right)$	Coeficiente de arrasto hidrodinâmico
g	$9,81 (m/s^2)$	Aceleração gravitacional

A primeira simulação foi realizada com o cabo dividido em 22 elos. Aplicou-se uma força $\vec{F}_{c0y}$ de intensidade $280 N$ na direção Y , atuante na carga terminal por $10 s$ de simulação. A partir de $10 s$ a força $\vec{F}_{c0y}$ foi anulada e aplicou-se forças $\vec{F}_{c0x}$ de intensidade $28 N$ na direção X e $\vec{F}_{c0z}$ de intensidade $1400 N$ na direção Z (sinalizado em vermelho na Figura 4.7, o *frame* correspondente ao instante em que são aplicadas estas forças) até $50 s$ e após $50 s$ todas as forças foram anuladas, ou seja, a carga terminal ficou em situação de queda livre (sinalizado em verde na Figura 4.7, o *frame* correspondente ao instante em que as forças foram anuladas). O tempo total de simulação foi de $80 s$. As Figuras 4.5 e 4.6 mostram, respectivamente, a trajetória da carga terminal em cada um dos eixos x, y e z (sistema inercial da base) e a trajetória espacial descrita pelo centro de massa da carga terminal. A Figura 4.7, ilustra a movimentação do cabo para esta simulação, sendo que a mesma é mostrada em forma de *frames* visualizados a cada $1,25 s$ e com escala X de $-50(m):50(m)$, Y de $-60(m):60(m)$ e Z de $-1200 (m):0(m)$, para melhor apresentação dos resultados.

A segunda simulação também foi realizada com o cabo dividido em 22 elos, porém com aplicações de forças diferentes. Aplicou-se uma força $\vec{F}_{c0y}$ de intensidade $280 N$ na direção Y , atuante na carga terminal por $10 s$ de simulação. A partir de $10 s$ a força $\vec{F}_{c0y}$ foi anulada e aplicada uma força $\vec{F}_{c0z}$ de intensidade $-1400 N$ na direção Z (sinalizado em vermelho na Figura 4.10, o *frame* correspondente ao instante em que foi aplicada esta força) até $70 s$ e após $70 s$ a carga terminal ficou em situação de queda livre (sinalizado em verde na Figura 4.10, o *frame* correspondente ao instante em que todas as forças foram anuladas). O tempo total de simulação foi de $110 s$. As Figuras 4.8 e 4.9 mostram, respectivamente, a trajetória da carga terminal em cada um dos eixos x, y e z e a trajetória espacial descrita pelo centro de massa da carga terminal. A Figura 4.10 ilustra a movimentação do cabo para esta simulação, sendo que a mesma é mostrada em forma de *frames* visualizados a cada $1,715 s$ e com escala X de $-100(m):100(m)$, Y de $-150(m):150(m)$ e Z de $-1200 (m):0(m)$.

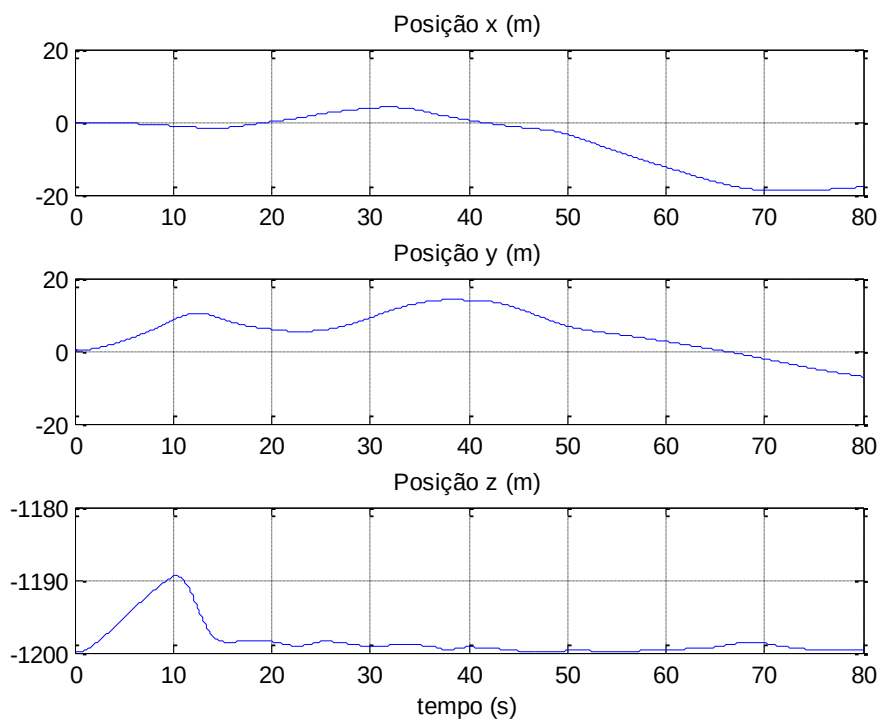


Figura 4.5 - Primeira simulação, posições x , y e z da carga terminal, 22 elos, força positiva na direção Y até 10 s, entre 10 s e 50 s força positiva na direção X e força positiva na direção Z , após 50 s queda livre, tempo total de simulação 80 s

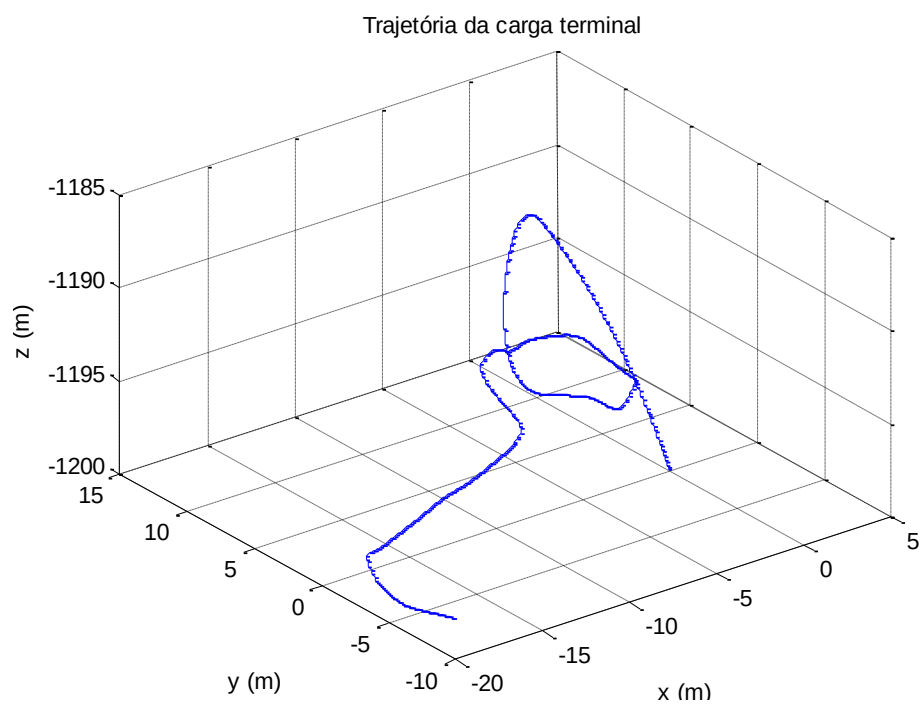
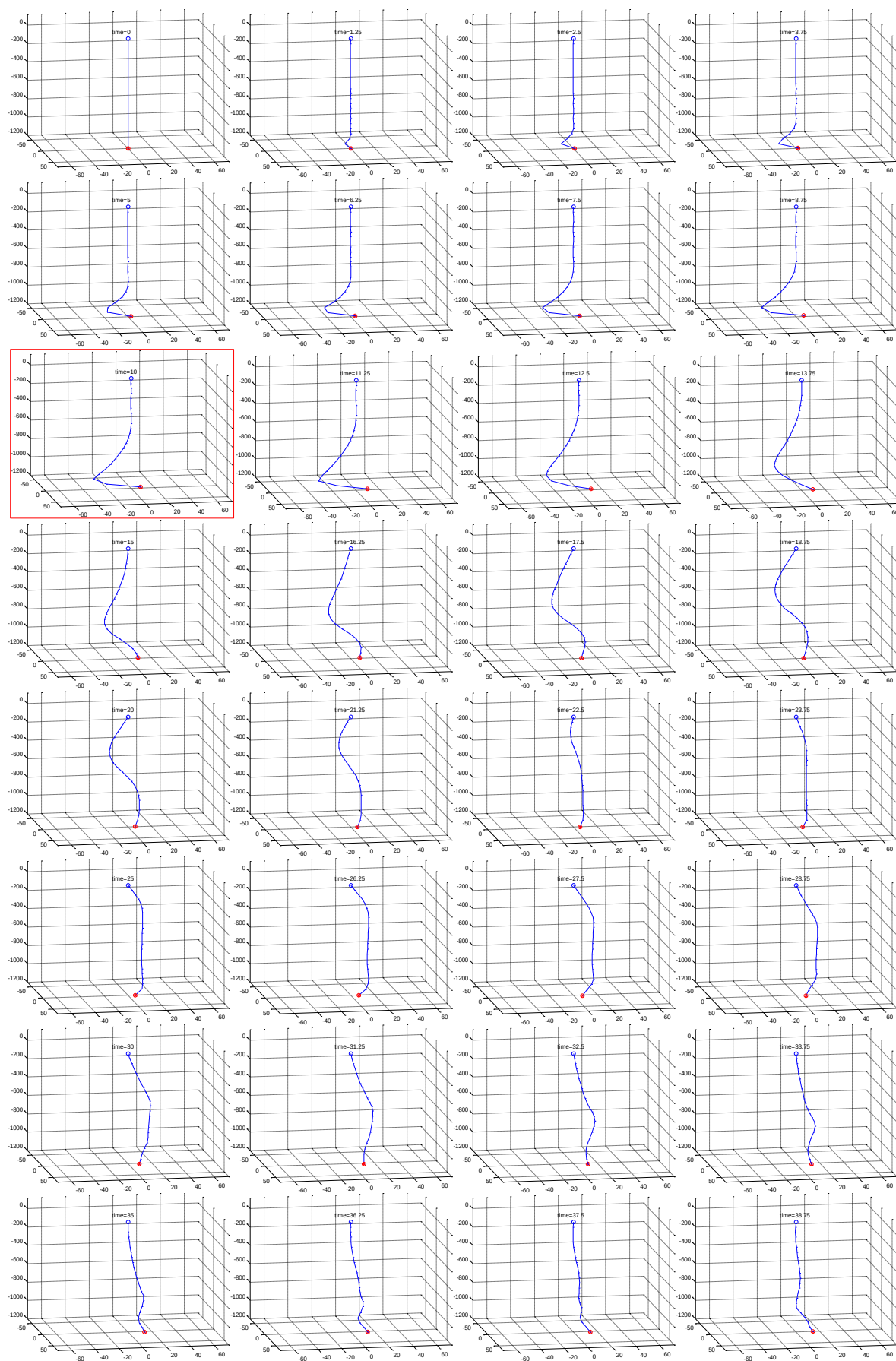


Figura 4.6 - Primeira simulação, trajetória espacial da carga terminal, 22 elos, força positiva na direção Y até 10 s, entre 10 s e 50 s força positiva na direção X e força positiva na direção Z , após 50 s queda livre, tempo total de simulação 80 s



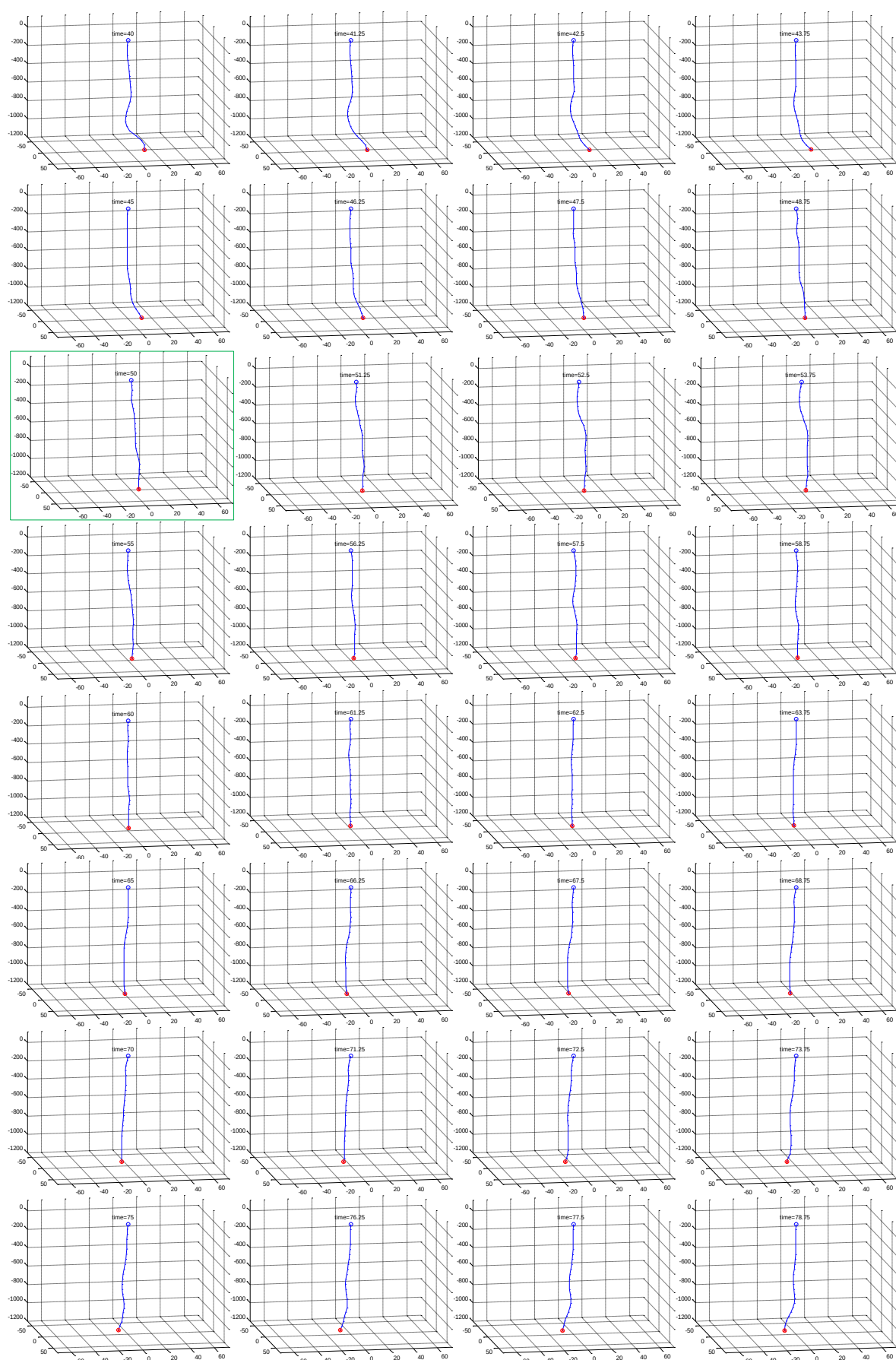


Figura 4.7 - Primeira simulação, 22 elos, força positiva na direção Y até 10 s, entre 10 s e 50 s força positiva na direção X e força positiva na direção Z, após 50 s queda livre (frames a cada 1,25 s)

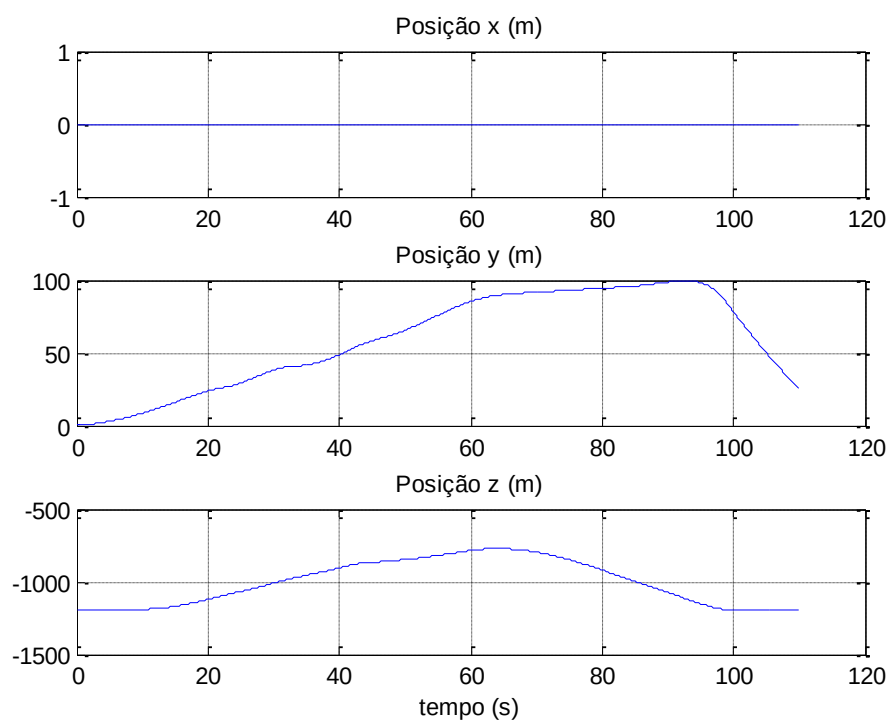


Figura 4.8 - Segunda simulação, posições x, y e z da carga terminal, 22 elos, força positiva na direção Y até 10 s, entre 10 s e 70 s força negativa na direção Z, após 70 s queda livre, tempo total de simulação 110 s

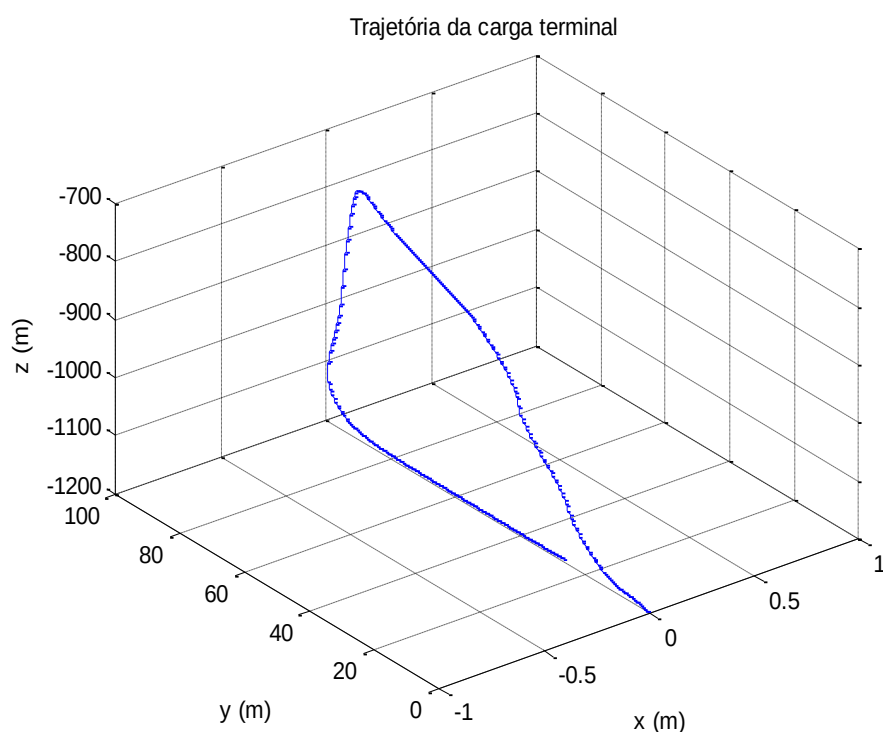
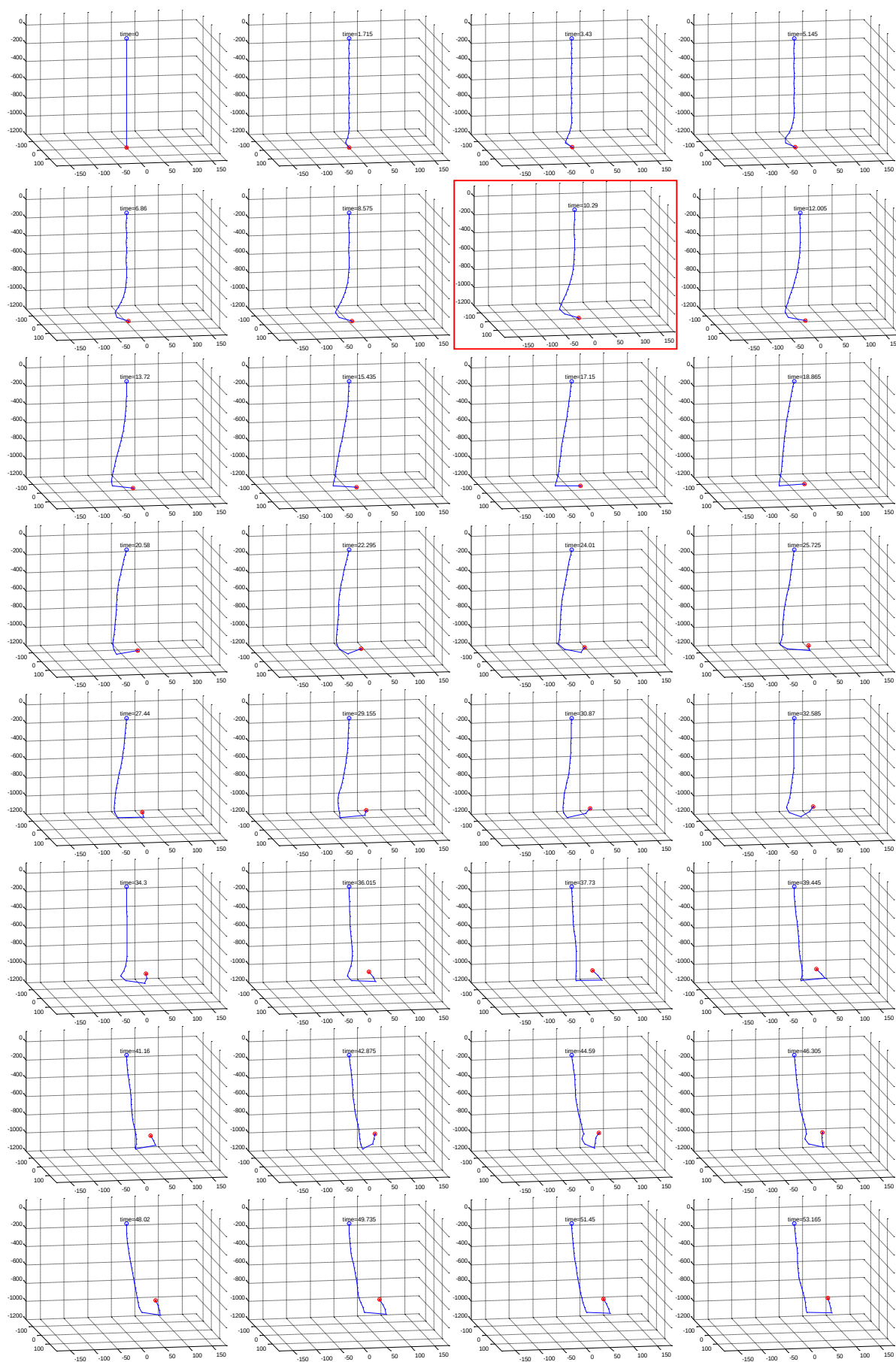


Figura 4.9 - Segunda simulação, trajetória espacial da carga terminal, 22 elos, força positiva na direção Y até 10 s, entre 10 s e 70 s força negativa na direção Z, após 70 s queda livre, tempo total de simulação 110 s



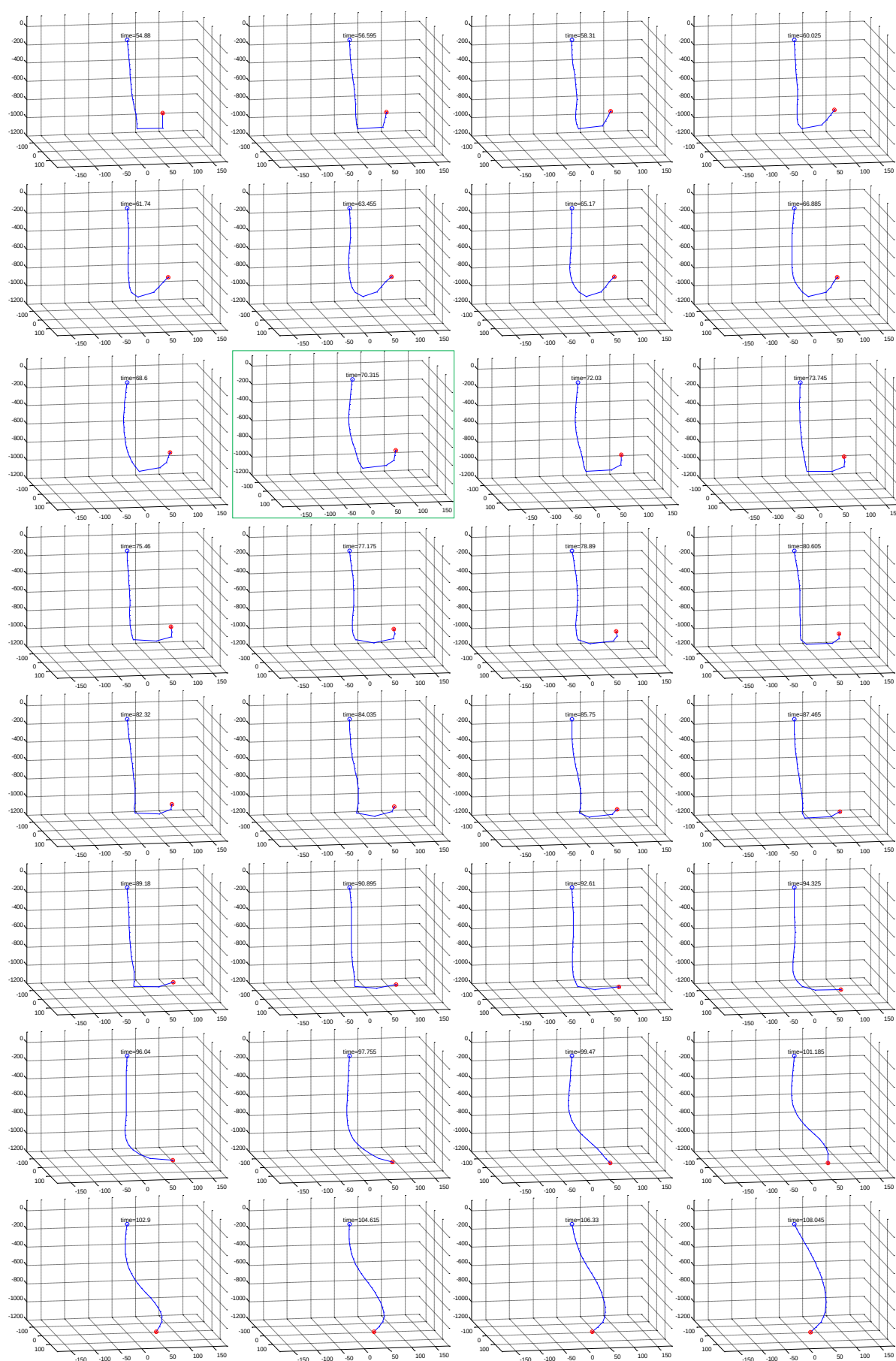


Figura 4.10 - Segunda simulação, 22 elos, força positiva na direção Y até 10 s, entre 10 s e 70 s força negativa na direção Z, após 70 s queda livre (frames a cada 1,715 s)

A terceira simulação foi realizada com o cabo dividido em 26 elos. Aplicaram-se forças nas direções X e Y , sendo uma força $\vec{F}_{c0x}$ de intensidade 28 N na direção X e outra $\vec{F}_{c0y}$ de intensidade 280 N na direção Y , atuantes na carga terminal por 30 s de simulação. A partir de 30 s a carga terminal ficou em situação de queda livre (sinalizado em vermelho na Figura 4.13, o *frame* correspondente ao instante em que as forças foram anuladas). O tempo total de simulação foi de 50 s . As Figuras 4.11 e 4.12 mostram, respectivamente, a trajetória da carga terminal em cada um dos eixos x, y e z e a trajetória espacial descrita pelo centro de massa da carga terminal. A Figura 4.13 ilustra a movimentação do cabo para esta simulação, sendo que a mesma é mostrada em forma de *frames* visualizados a cada $0,78\text{ s}$ e com escala X de $-50(m):50(m)$, Y de $-60(m):60(m)$ e Z de $-1200(m):0(m)$.

A quarta simulação foi realizada com o cabo dividido em 26 elos. Aplicou-se uma força $\vec{F}_{c0y}$ de intensidade 280 N na direção Y , atuante na carga terminal por 10 s de simulação. A partir de 10 s a força $\vec{F}_{c0y}$ foi anulada e aplicou-se uma força $\vec{F}_{c0z}$ de intensidade -1400 N na direção Z (sinalizado em vermelho na Figura 4.16, o *frame* correspondente ao instante em que esta força é aplicada) até 60 s e após 60 s foi aplicada uma força $\vec{F}_{c0z}$ de intensidade 1400 N na direção Z (sinalizado de verde na Figura 4.16, o *frame* correspondente ao instante em que esta força é aplicada). O tempo total de simulação foi de 110 s . As Figuras 4.14 e 4.15 mostram, respectivamente, a trajetória da carga terminal em cada um dos eixos x, y e z e a trajetória espacial descrita pelo centro de massa da carga terminal. A Figura 4.16 ilustra a movimentação do cabo para esta simulação, sendo que a mesma é mostrada em forma de *frames* visualizados a cada $1,715\text{ s}$ e com escala X e Y de $-100(m):100(m)$ e Z de $-1200(m):0(m)$.

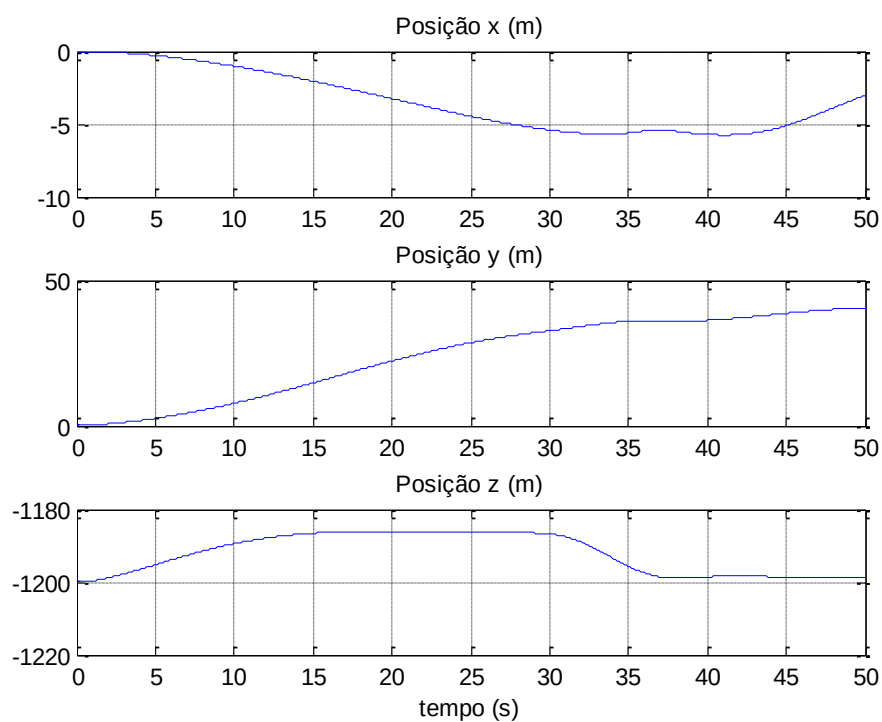


Figura 4.11 - Terceira simulação, posições x , y e z da carga terminal, 26 elos, forças positivas nas direções X e Y até 30 s, após 30 s queda livre, tempo total de simulação 50 s.

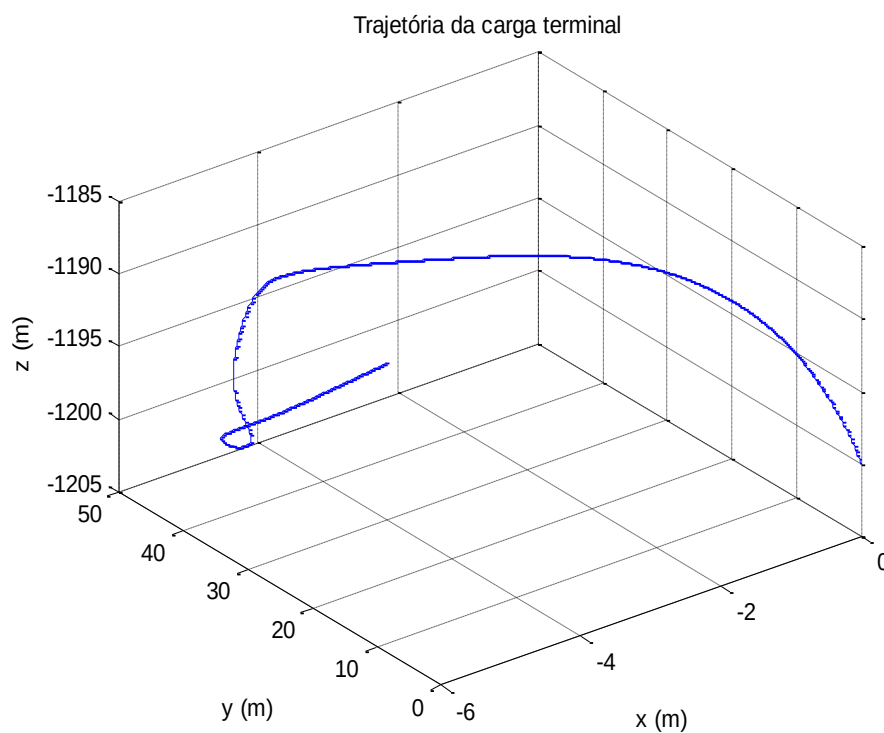
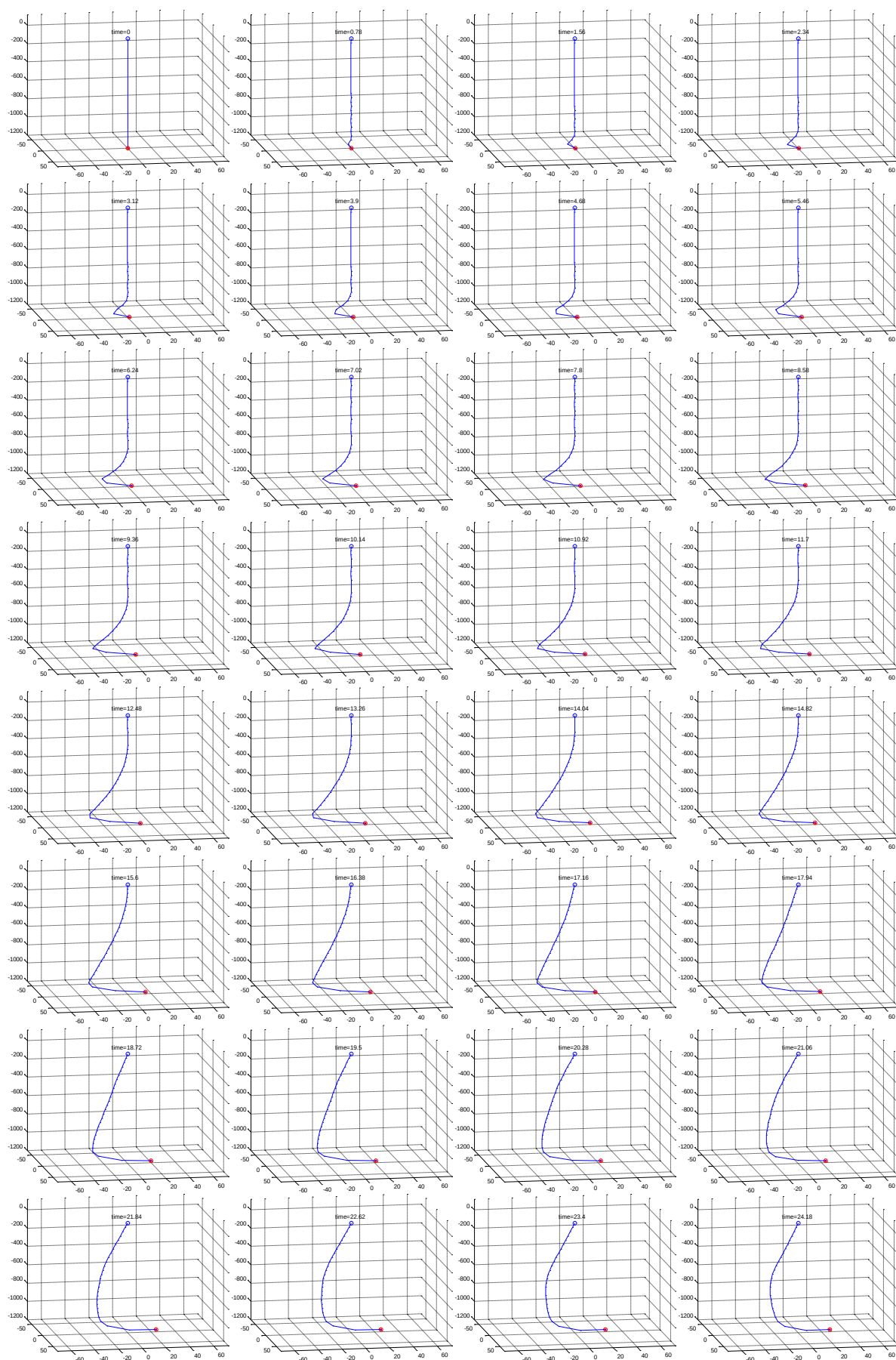


Figura 4.12 - Terceira simulação, trajetória espacial da carga terminal, 26 elos, forças positivas nas direções X e Y até 30 s, após 30 s queda livre, tempo total de simulação 50 s



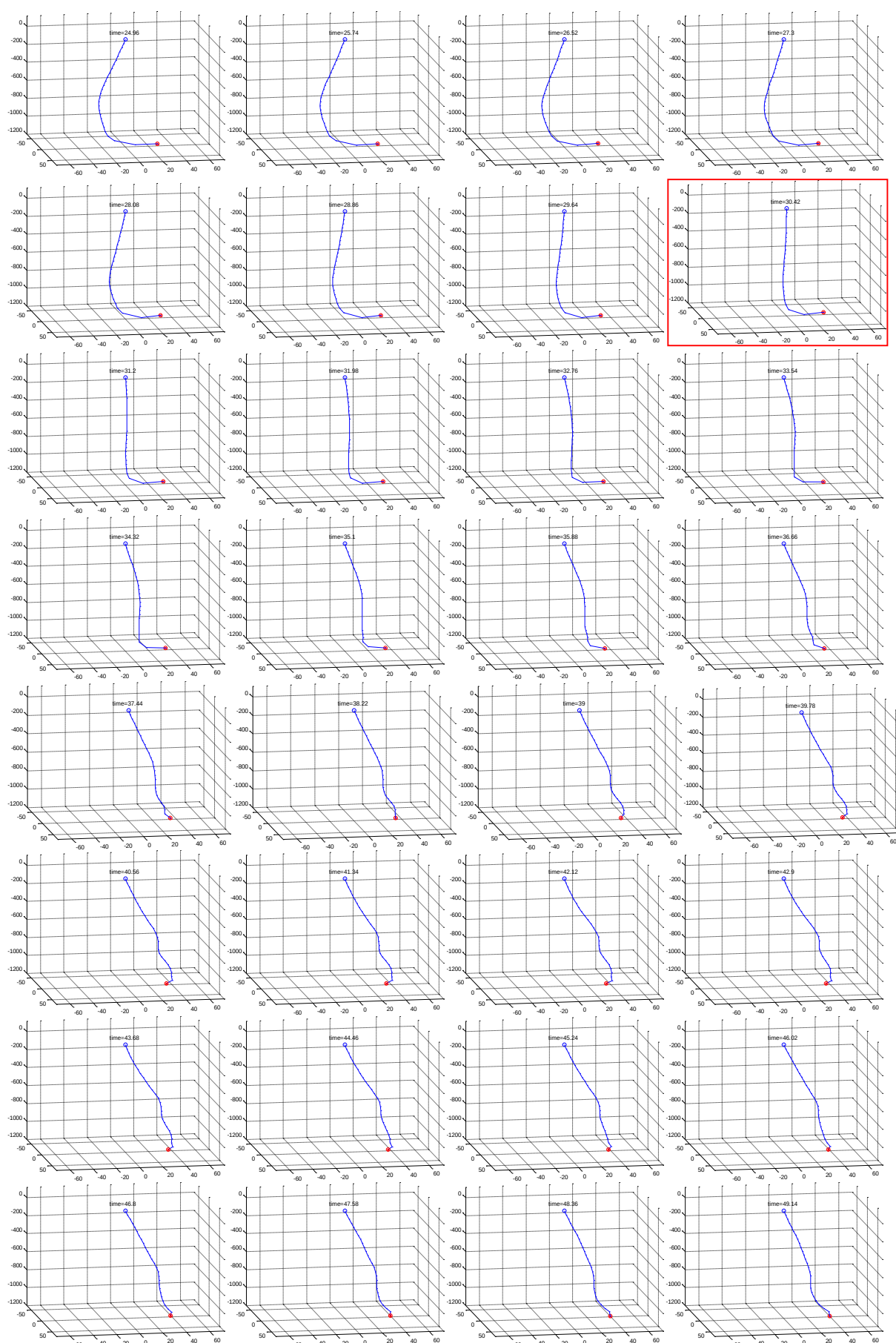


Figura 4.13 - Terceira simulação, 26 elos, forças positivas nas direções X e Y até 30 s, após 30 s queda livre (frames a cada 0,78 s)

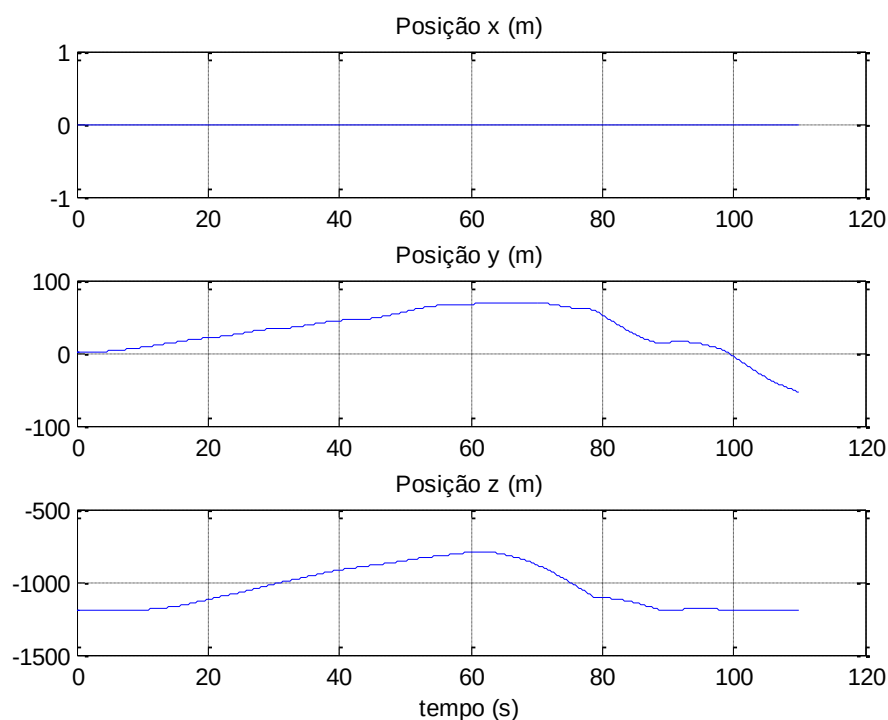


Figura 4.14 - Quarta simulação, posições x , y e z da carga terminal, 26 elos, força positiva na direção X até 10 s, entre 10 s e 60 s força negativa na direção Z , após 60 s força positiva na direção Z , tempo total de simulação 110 s

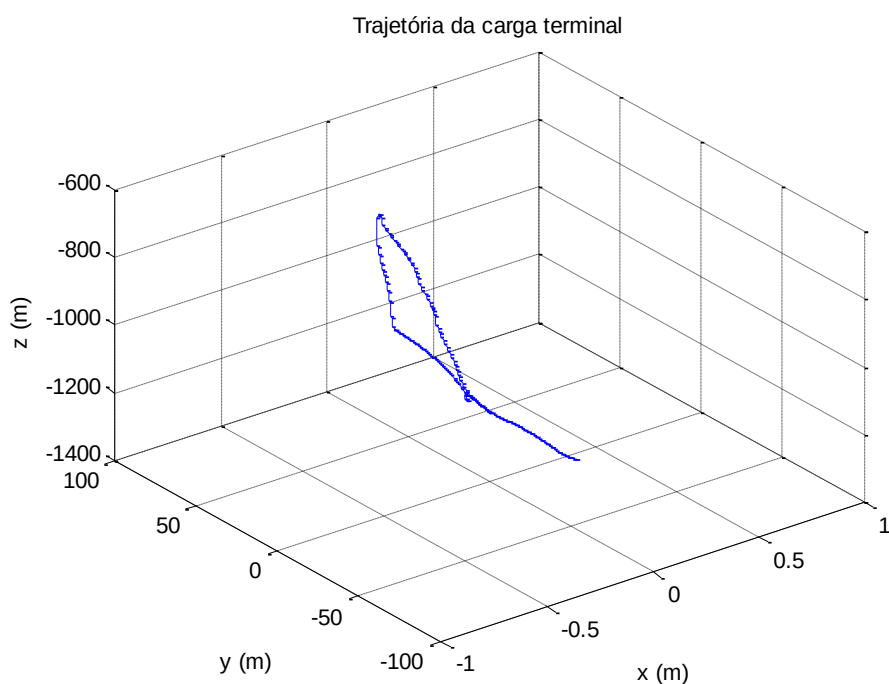
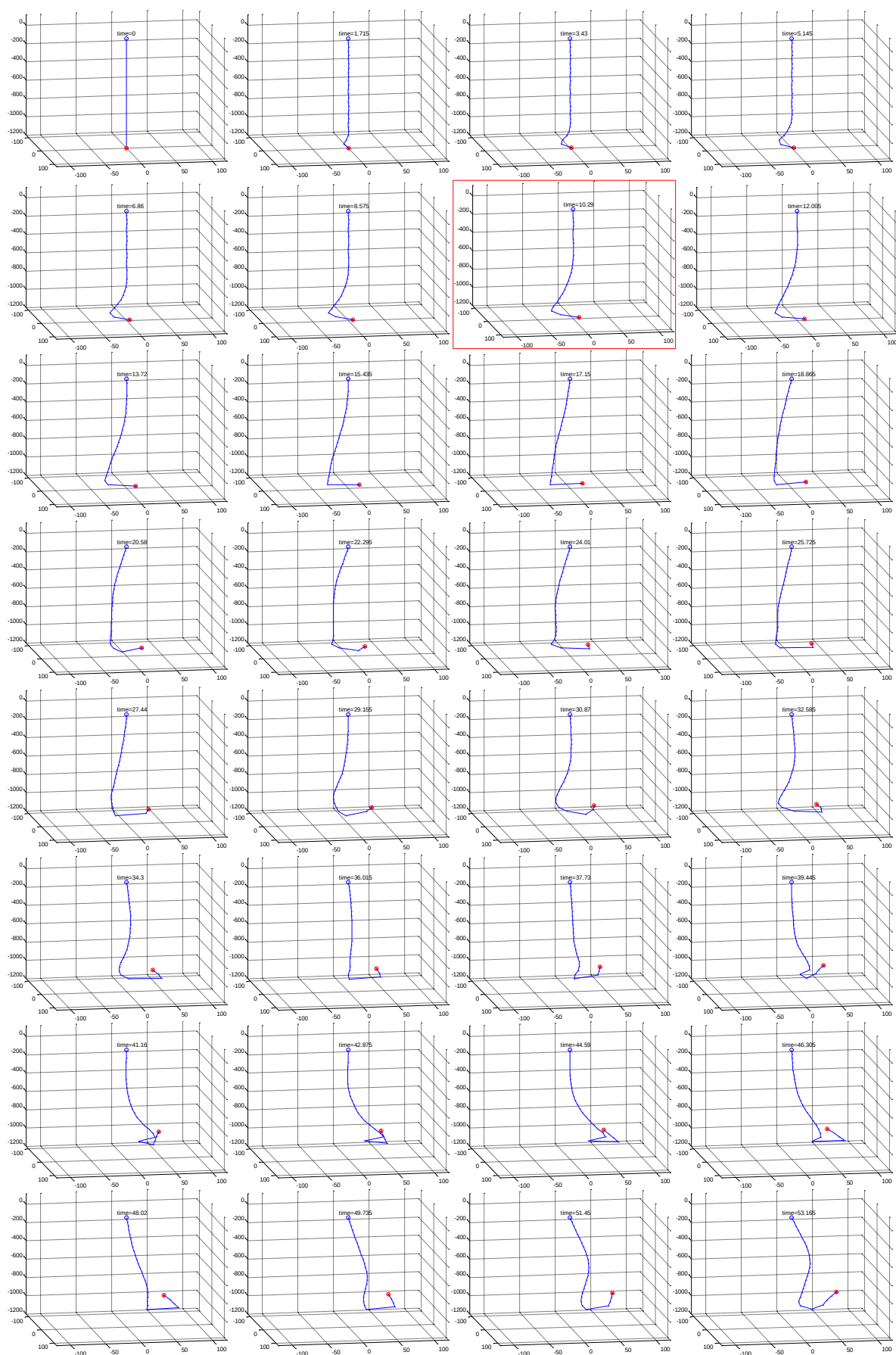


Figura 4.15 - Quarta simulação, trajetória espacial da carga terminal, 26 elos, força positiva na direção X até 10 s, entre 10 s e 60 s força negativa na direção Z , após 60 s força positiva na direção Z , tempo total de simulação 110 s



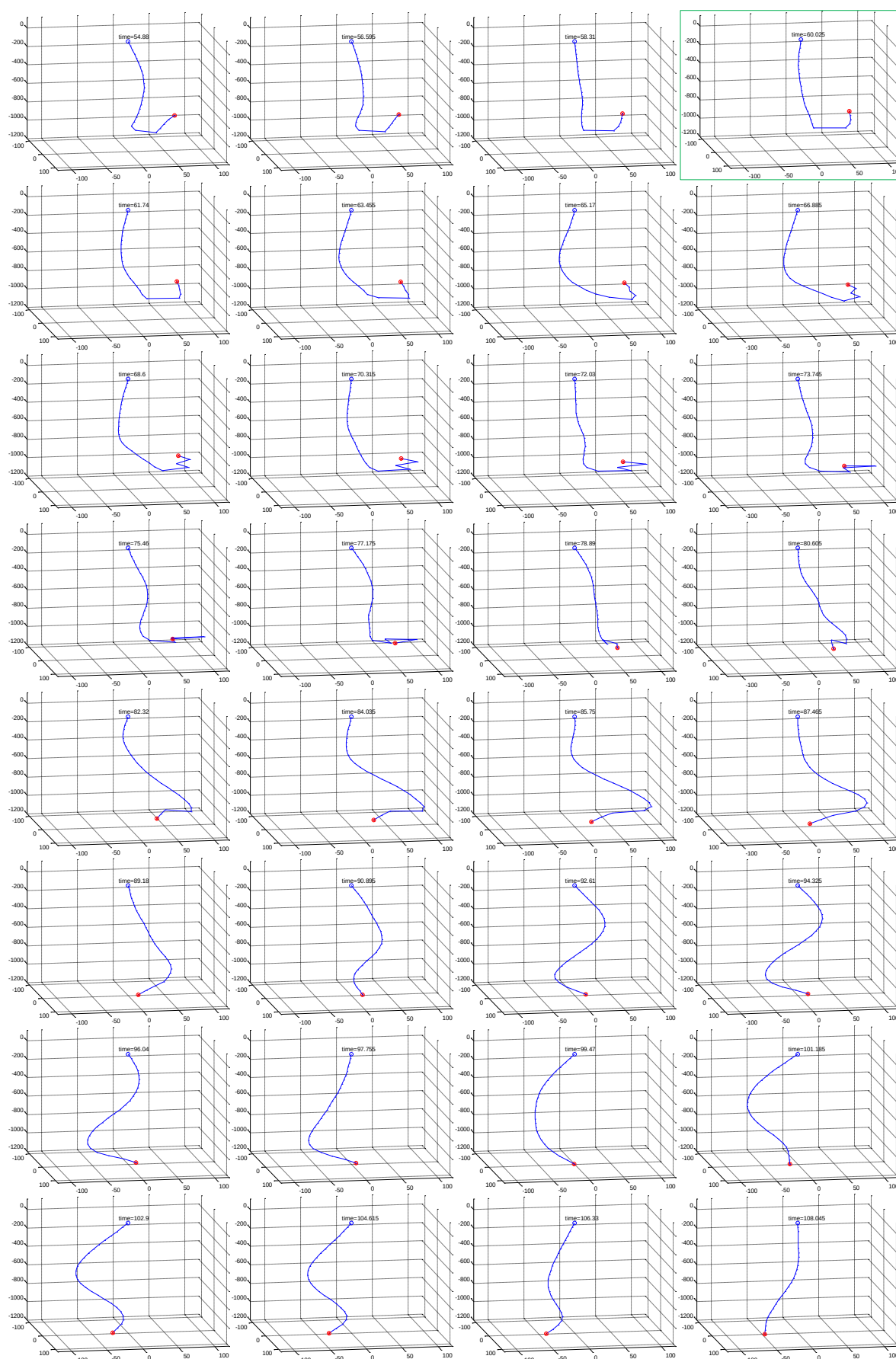


Figura 4.16 - Quarta simulação, 26 elos, força positiva na direção X até 10 s, entre 10 s e 60 s força negativa na direção Z , após 60 s força positiva na direção Z (frames a cada 1,715 s)

A quinta simulação tem as mesmas condições da segunda simulação, aumentando-se apenas o número de elos, passando de 22 elos para 26 elos. A Figura 4.17, ilustra a trajetória da carga terminal em cada um dos eixos x, y e z . Comparada à Figura 4.8 da segunda simulação, observa-se que o deslocamento da carga terminal em y foi ligeiramente menor, mantendo, entretanto, a mesma forma. A Figura 4.18 ilustra a trajetória espacial descrita pelo centro de massa da carga terminal e a Figura 4.19 ilustra a movimentação do cabo para esta simulação, sendo que a mesma é mostrada em forma de *frames*, com o mesmo intervalo de visualização e escala da segunda simulação.

A sexta simulação apresentada foi realizada com o cabo dividido em 26 elos. Aplicou-se uma força $\vec{F}_{c0y}$ na direção Y de intensidade 560 N atuante na carga terminal até 10 s de simulação. A partir de 10 s continuou sendo aplicada a força de 560 N na direção Y e foi aplicada uma nova força $\vec{F}_{c0z}$ de intensidade -1400 N na direção Z , atuante na carga terminal (sinalizado em vermelho na Figura 4.22, o *frame* correspondente ao instante que é aplicada esta força) até 70 s de simulação. Após 70 s de simulação a carga terminal ficou em situação de queda livre (sinalizado em verde na Figura 4.22, o *frame* correspondente ao instante em que foram anuladas todas as forças). O tempo total de simulação foi de 120 s . As Figuras 4.20 e 4.21 mostram, respectivamente, a trajetória da carga terminal em cada um dos eixos x, y e z e a trajetória espacial descrita pelo centro de massa da carga terminal. A Figura 4.22 ilustra a movimentação do cabo para esta simulação, sendo que a mesma é mostrada em forma de *frames* visualizados a cada $1,875\text{ s}$ e com escala X de $-200(m):200(m)$, Y de $-300(m):300(m)$ e Z de $-1200(m):0(m)$.

A sétima simulação foi realizada com o cabo dividido em 36 elos. Aplicou-se uma força $\vec{F}_{c0y}$ na direção Y de intensidade 280 N atuante na carga terminal até 10 s de simulação. A partir de 10 s a força $\vec{F}_{c0y}$ foi anulada e aplicou-se uma força $\vec{F}_{c0z}$ de intensidade -1400 N na direção Z atuante na carga terminal (sinalizado em vermelho na Figura 4.25, o *frame* correspondente ao instante que esta força é aplicada) até 60 s de simulação. Após de 60 s foi aplicada uma força $\vec{F}_{c0z}$ de intensidade 1400 N (sinalizado em verde na Figura 4.25, o *frame* correspondente ao instante que esta força é aplicada). O tempo total de simulação foi de 110 s . As Figuras 4.23 e 4.24 mostram, respectivamente, a trajetória da carga terminal em cada um dos eixos x, y e z e a trajetória espacial descrita pelo centro de massa da carga terminal. A Figura 4.25 ilustra a movimentação do cabo para esta simulação, sendo que a

mesma é mostrada em forma de *frames* visualizados a cada 1,715 s e com escala X e Y de $-100(m):100(m)$ e Z de $-1200(m):0(m)$

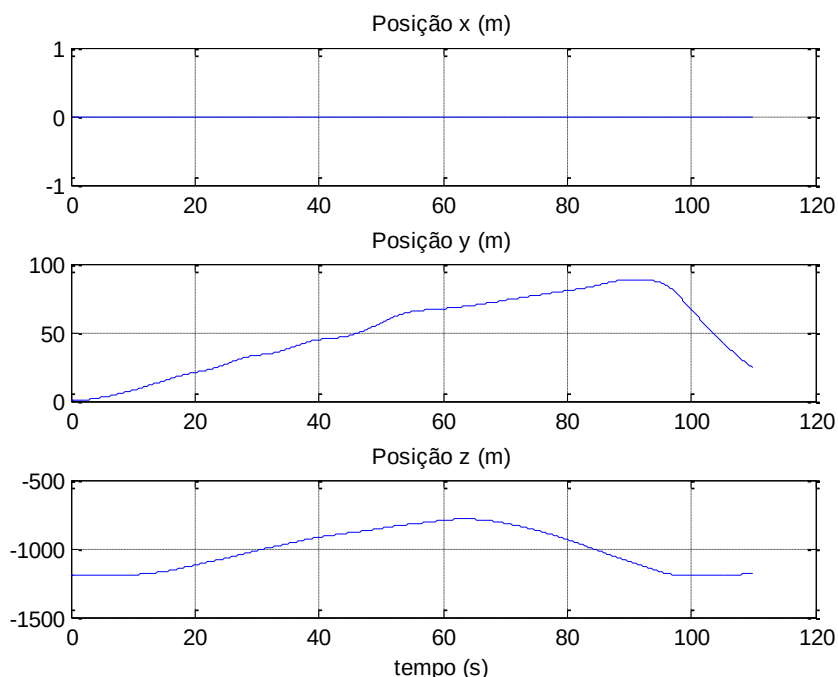


Figura 4.17- Quinta simulação, posições x, y e z da carga terminal, 26 elos, força positiva na direção Y até 10 s, entre 10 s e 70 s força negativa na direção Z, após 70 s queda livre, tempo total de simulação 110 s

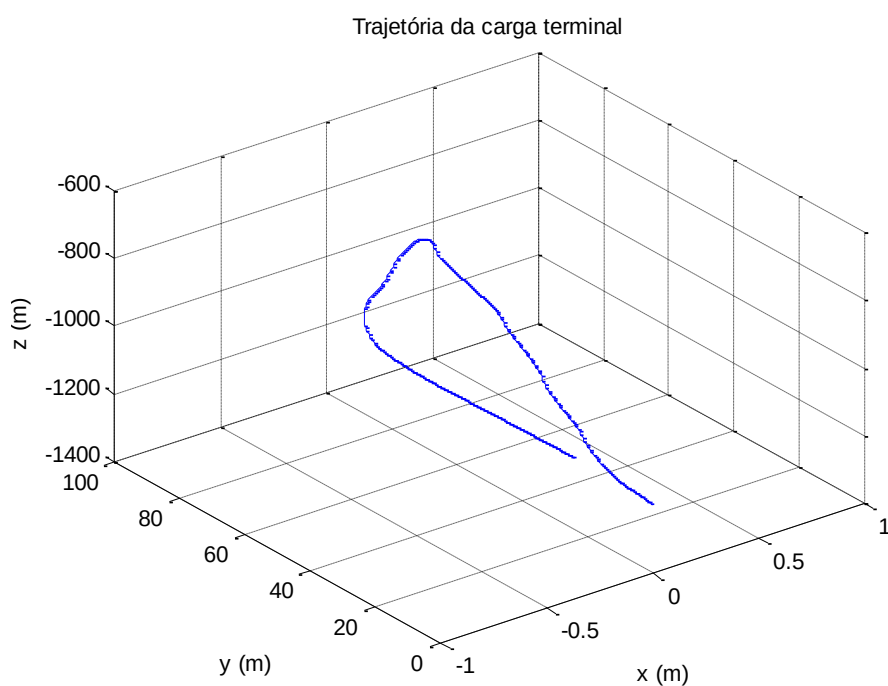
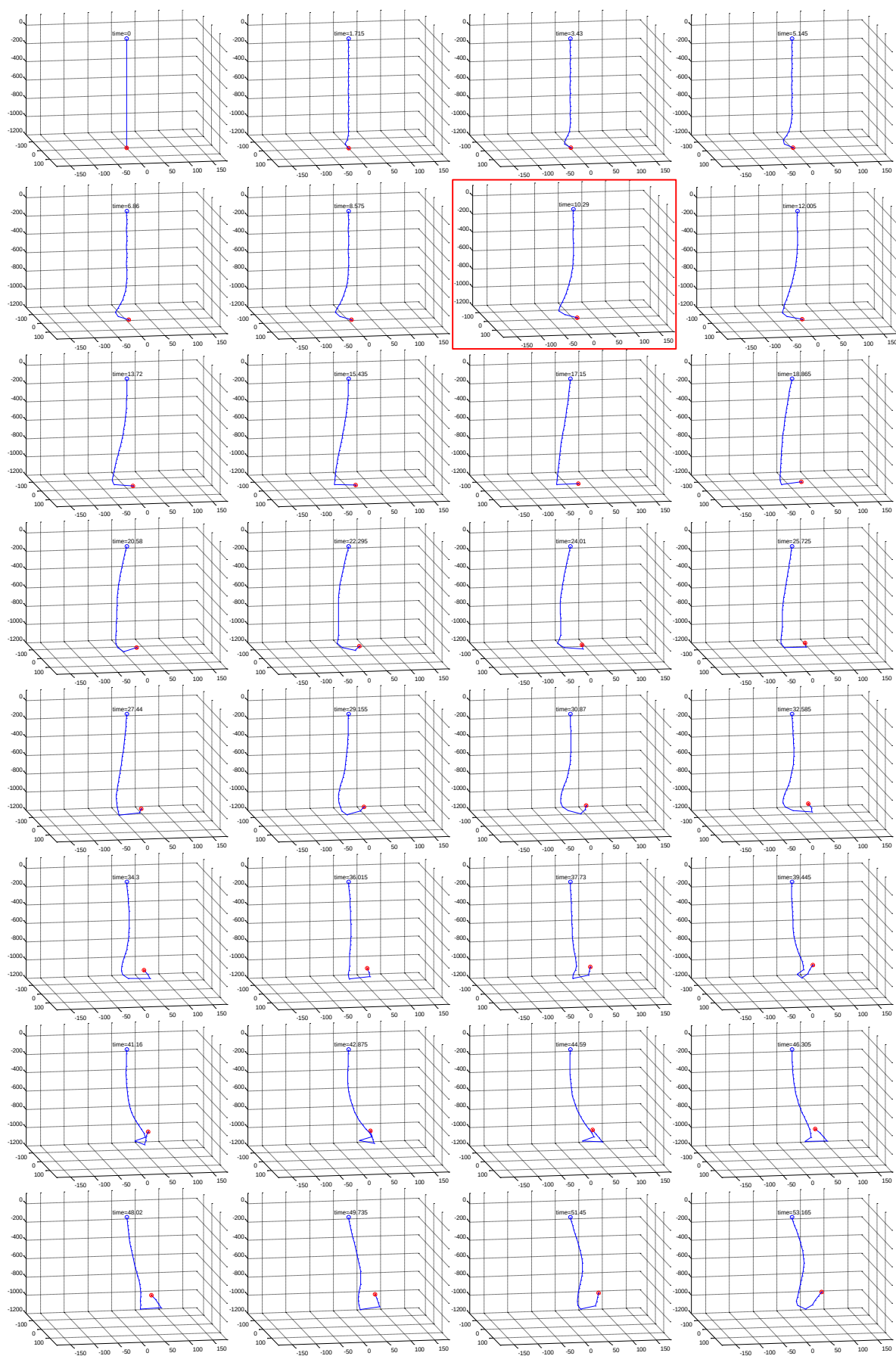


Figura 4.18 - Quinta simulação, trajetória espacial da carga terminal, 26 elos, força positiva na direção Y até 10 s, entre 10 s e 70 s força negativa na direção Z, após 70 s queda livre, tempo total de simulação 110 s



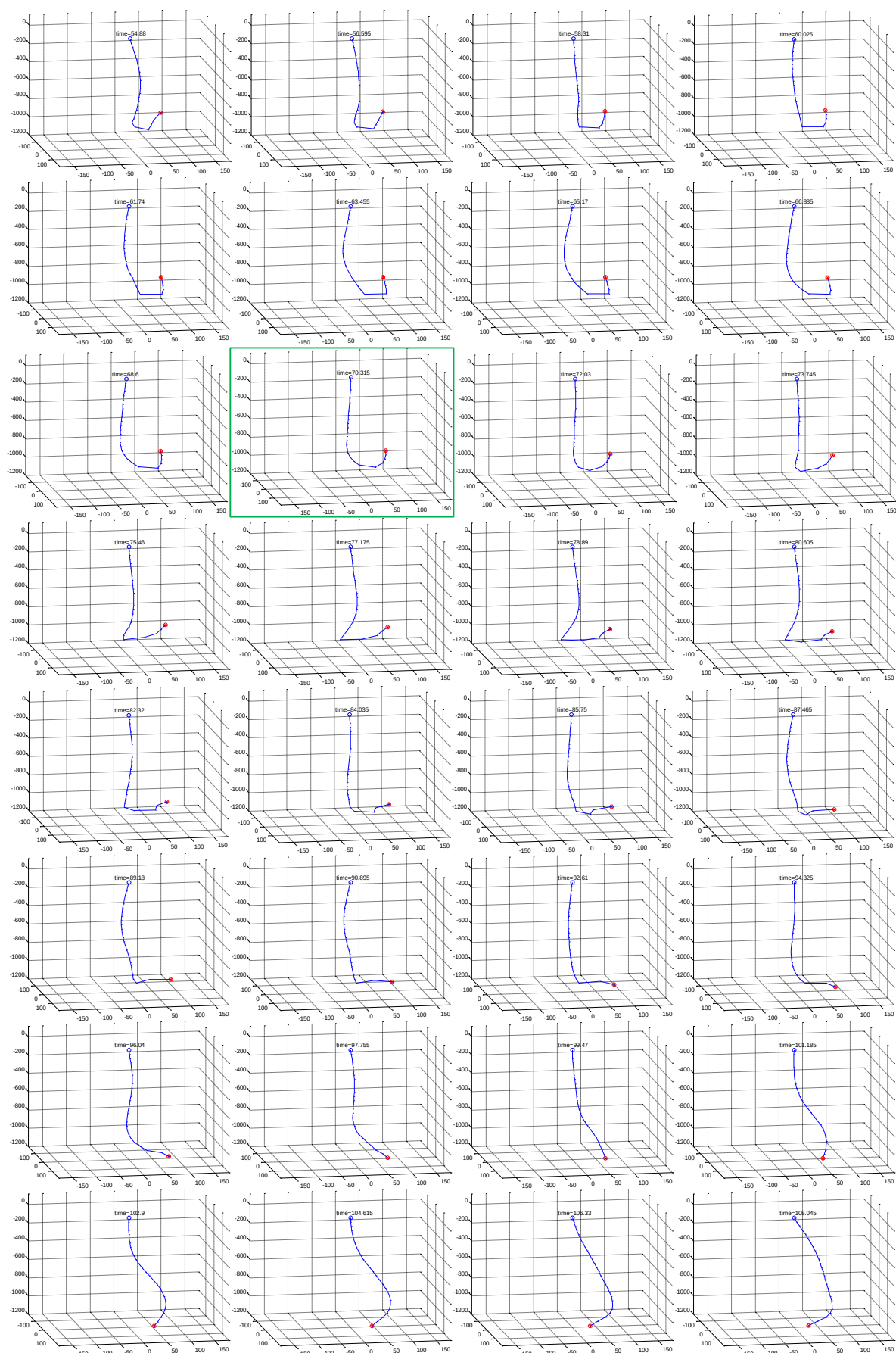


Figura 4.19- Quinta simulação, 26 elos, força positiva na direção Y até 10 s e 70 s força negativa na direção Z, após 70 s queda livre (frames a cada 1,715 s)

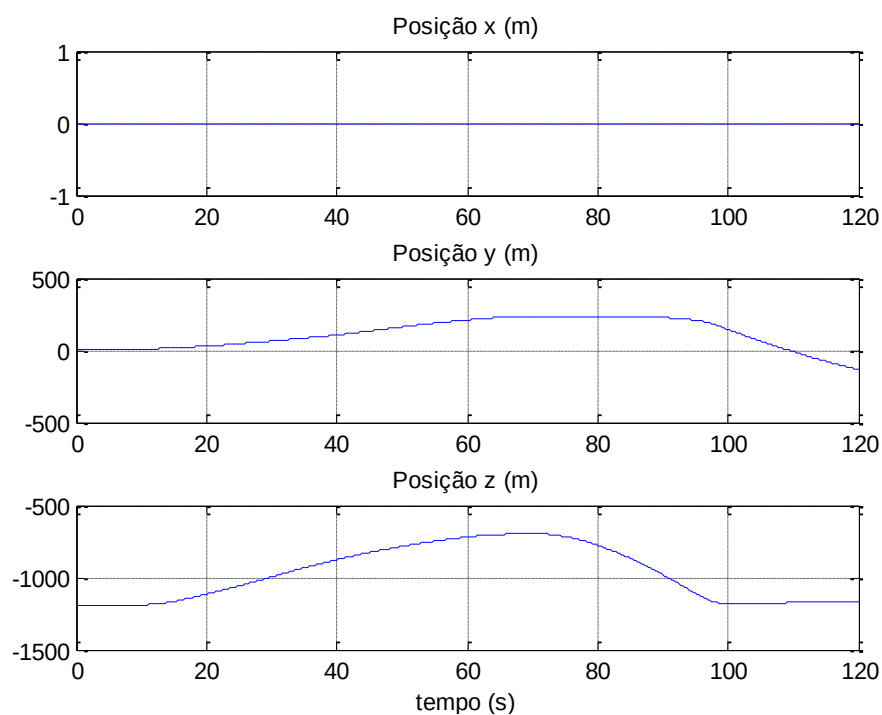


Figura 4.20 - Sexta simulação, posições x , y e z da carga terminal, 26 elos, força positiva na direção Y até 10 s, entre 10 s e 70 s força positiva na direção Y e força negativa na direção Z , após 70 s queda livre, tempo total de simulação 120 s

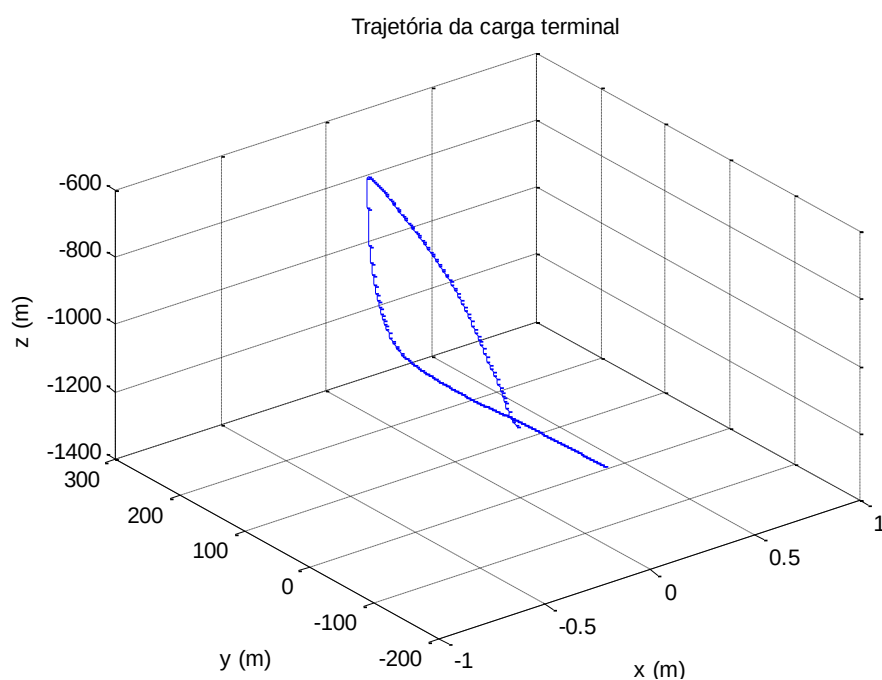
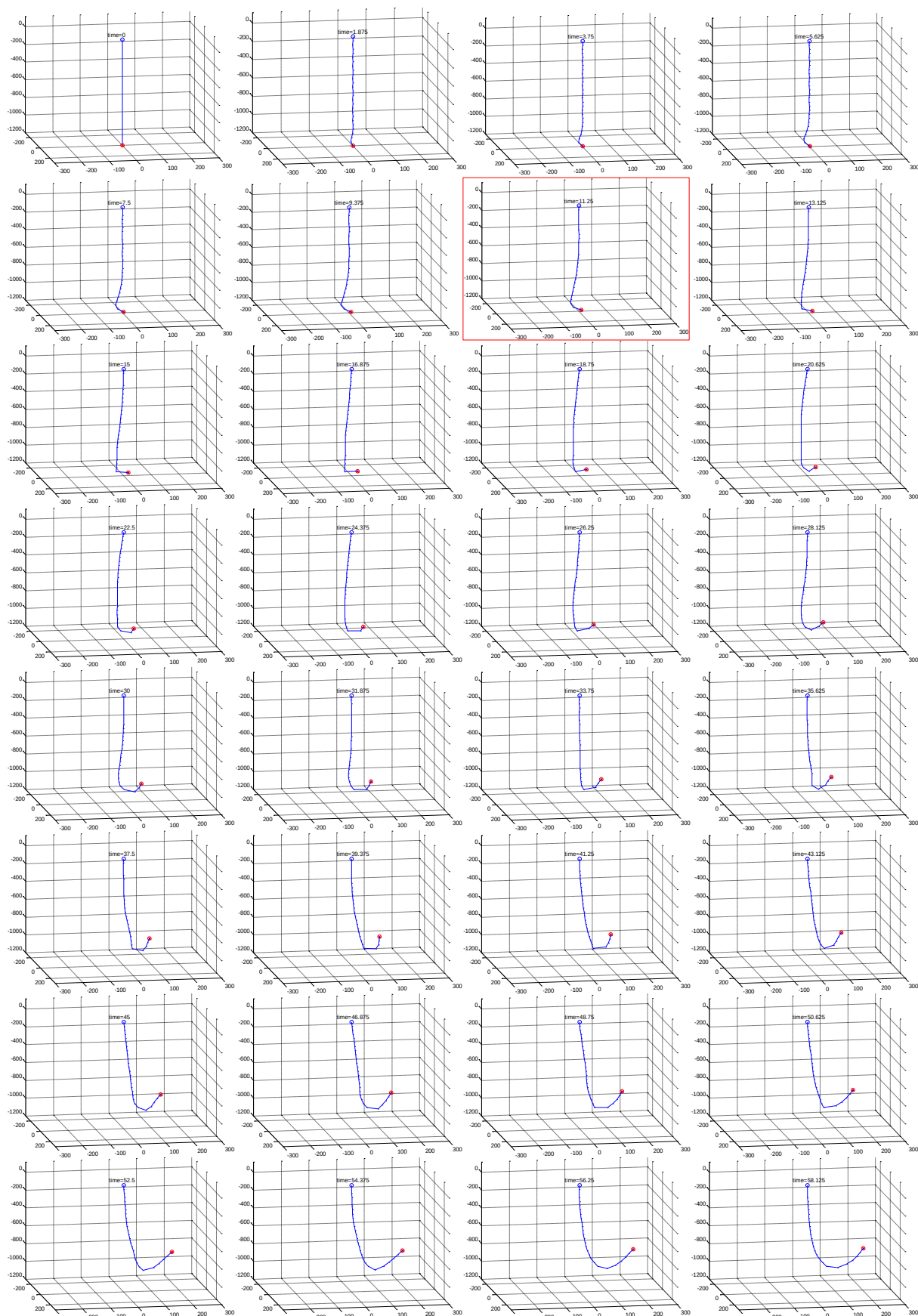


Figura 4.21 - Sexta simulação, trajetória espacial da carga terminal, 26 elos, força positiva na direção Y até 10 s, entre 10 s e 70 s força positiva na direção Y e força negativa na direção Z , após 70 s queda livre, tempo total de simulação 120 s



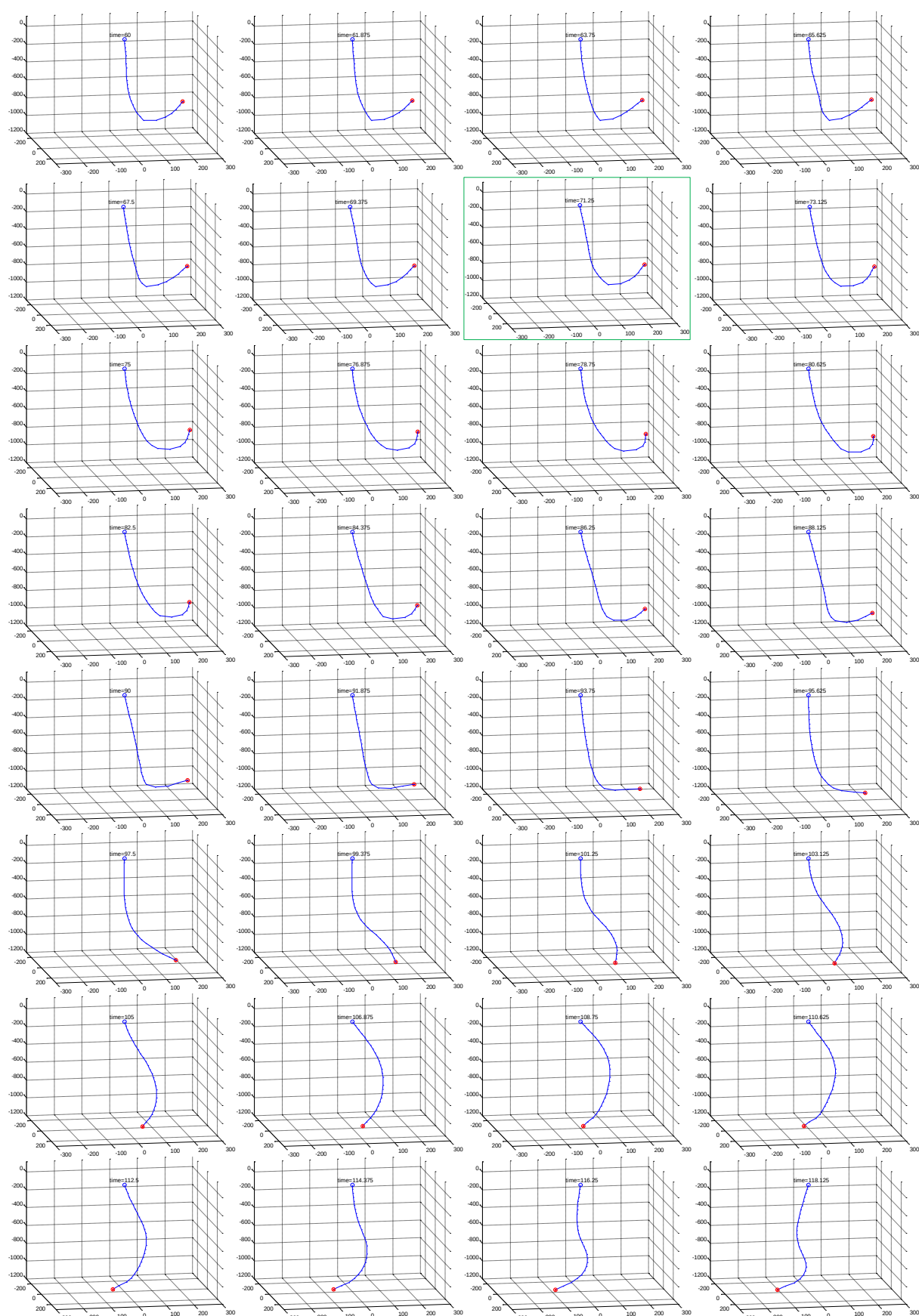


Figura 4.22 - Sexta Simulação, 26 elos, força positiva na direção Y até 10 s, entre 10 s e 70 s força positiva na direção Y e força negativa na direção Z, após 70 s queda livre (frames a cada 1,875 s)

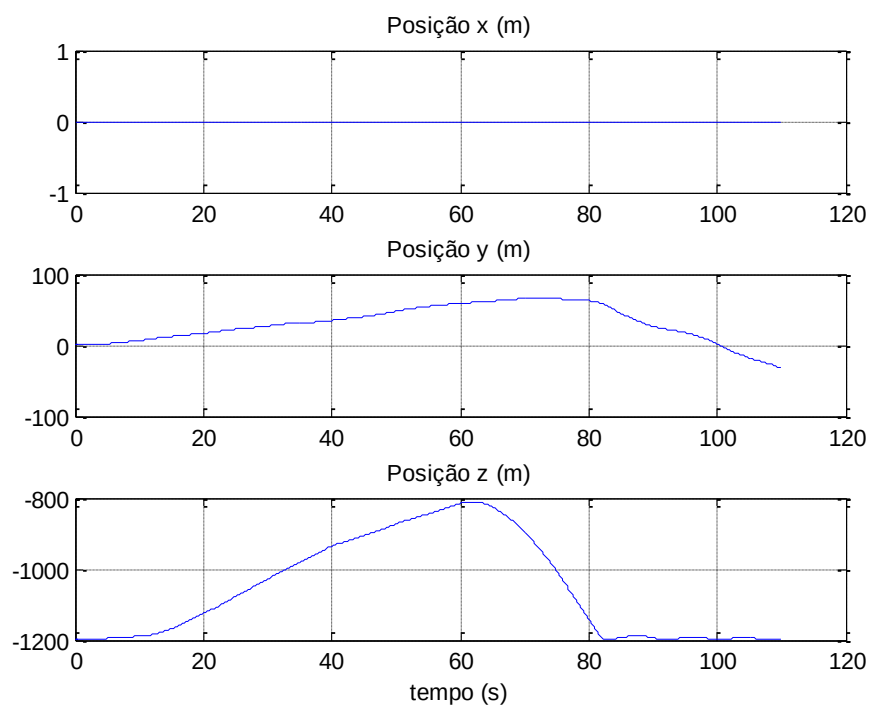


Figura 4.23 - Sétima simulação, posições x , y e z da carga terminal, 36 elos, força positiva na direção Y até 10 s, entre 10 s e 60 s força negativa na direção Z , após 60 s força positiva na direção Z , tempo total de simulação 110 s

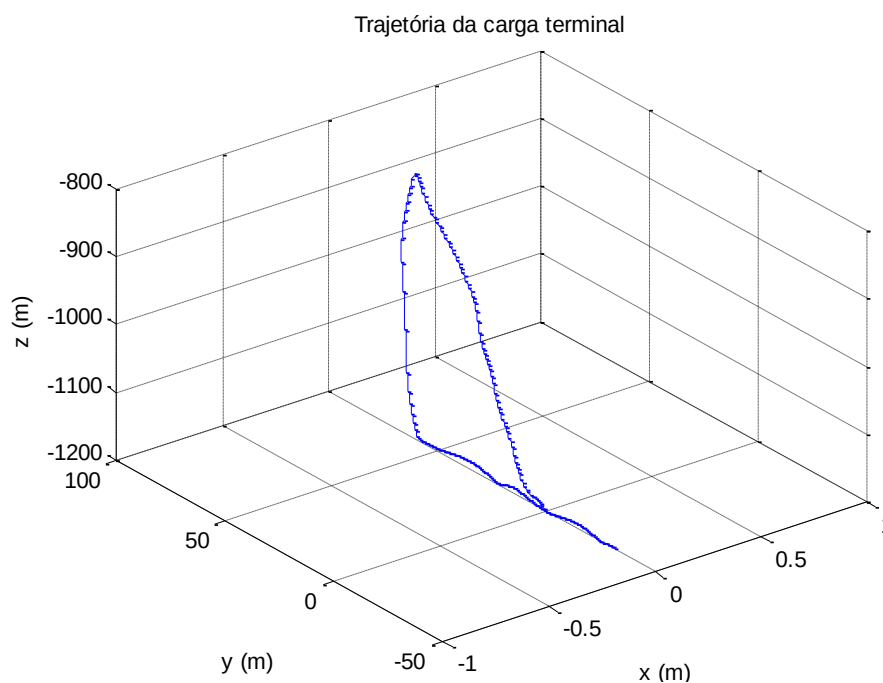
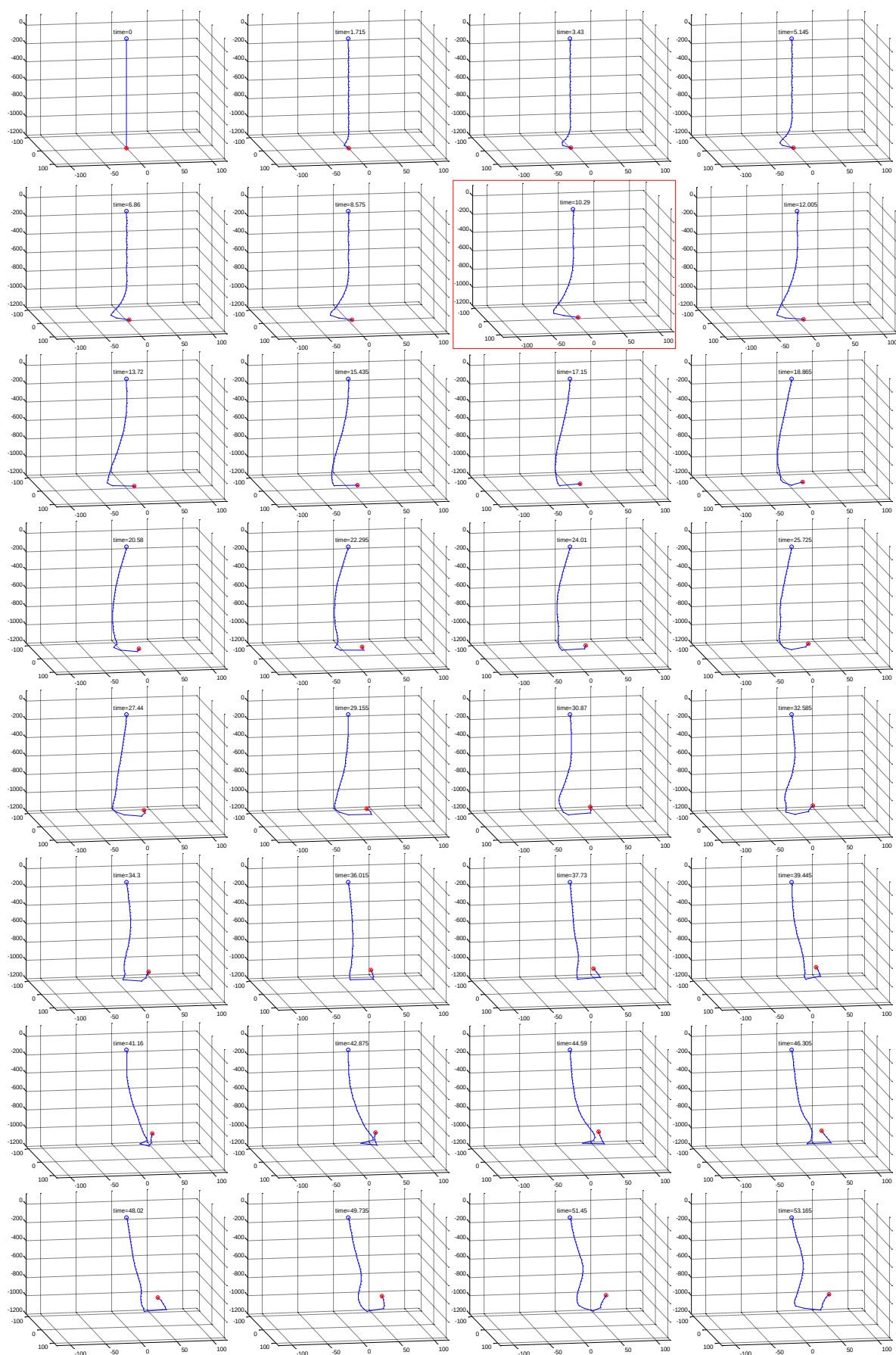


Figura 4.24 - Sétima simulação, trajetória espacial da carga terminal, 36 elos, força positiva na direção Y até 10 s, entre 10 s e 60 s força negativa na direção Z , após 60 s força positiva na direção Z , tempo total de simulação 110 s



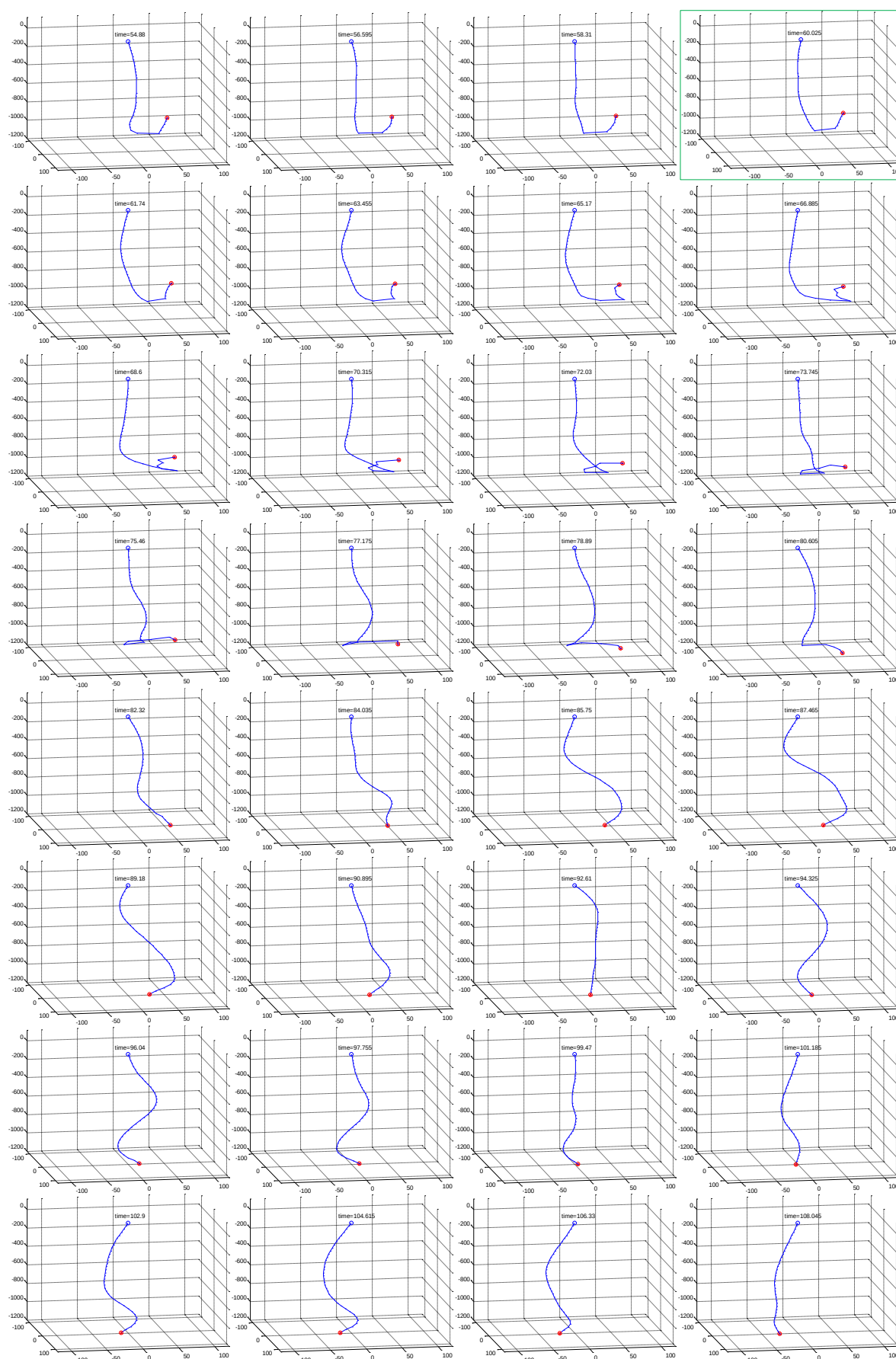


Figura 4.25 - Sétima Simulação, 36 elos, força positiva na direção Y até 10 s, entre 10 s e 60 s força negativa na direção Z, após 60 s força positiva na direção Z (frames a cada 1,715 s)

4.4. CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE AS SIMULAÇÕES PARA FORÇAS APLICADAS NA CARGA TERMINAL

Nesta seção, são feitas algumas considerações a respeito das simulações realizadas com o algoritmo genérico desenvolvido, bem como sobre o tempo computacional gasto para realizar as simulações numéricas.

Para a solução numérica das equações diferenciais do modelo dinâmico é necessário obter a inversa da matriz de inércia. Porém, à medida que se aumenta o número de elos para um mesmo comprimento do cabo, observa-se que o determinante desta matriz aproxima-se de zero, acarretando problemas para a integração numérica. As simulações computacionais apresentadas neste Capítulo consideraram um cabo com comprimento total de 1200 m, dividido em até 36 elos e com uma carga terminal de 600 kg. Em todos os casos, os resultados se mostraram conforme o esperado fisicamente. O conhecimento das condições iniciais e das forças aplicadas à carga terminal induzem, a priori, ao conhecimento prévio sobre como será a movimentação do cabo no espaço tridimensional. Realizadas as simulações, a movimentação espacial do cabo coincide, em todos os casos, ao que se esperava previamente. As Figuras mostradas em forma de *frames* apresentaram uma impressão de continuidade na flexibilidade estrutural do cabo e esta impressão é ampliada à medida que se amplia a quantidade de elos considerados.

As simulações computacionais apresentadas demandaram um tempo computacional considerável e, à medida que se aumenta o número de elos o tempo de simulação cresce consideravelmente. Como exemplo para análise destes tempos, foram feitas simulações testes, todas considerando o cabo fixo em uma extremidade e uma carga terminal na outra extremidade. Os parâmetros adotados estão na Tabela 4.1. Aplicou-se uma força $\vec{F}_{c0y}$ (no referencial inercial) de intensidade 280 N na direção Y, atuante na carga terminal por 10 s e, após 10 s, a carga terminal ficou em situação de queda livre. O tempo de simulação para todos os testes foi de 15 s e o cabo foi dividido em 16, 26, e 36 elos, com os respectivos tempos computacionais gastos expressos na Tabela 4.2. As simulações foram realizadas utilizando-se o *software* MATLAB®, tendo como integrador numérico o Runge-Kutta de quarta e quinta ordem com ajuste automático do passo de integração, a partir da rotina ODE45, em um microcomputador modelo Dell Inspiron 14 3442-A40, com processador Intel Core i5 e memória RAM de 8 GB DDR3 1700 MHz.

Tabela 4. 2 – Tempos computacionais gastos para simulações com forças aplicadas no referencial inercial

Número de elos	Tempo computacional
16	1 min 02 s
26	14 min 30 s
36	1 h 51 min 23 s

A Tabela acima mostra que o acréscimo do número de elos aumenta consideravelmente o tempo de simulação, aumento este que se assemelha a uma forma exponencial.

CAPÍTULO 5

FORÇAS E TORQUES NA CARGA TERMINAL

No presente Capítulo, a carga terminal não mais será considerada puntual e sim, um corpo rígido no qual atuam forças e torques. Portanto, o objetivo agora é determinar a influência de forças e torques atuantes na carga terminal sobre a dinâmica do cabo.

No Capítulo anterior, os torques nas articulações do cabo foram identificados a partir do conhecimento da força externa atuante na carga terminal, força esta escrita no referencial inercial da base. Neste Capítulo, tanto forças quanto torques atuantes na carga terminal estão no referencial do corpo ($X_c Y_c Z_c$, Figura 5.1), ou seja, aproxima-se mais da situação na qual se tem um ROV como carga terminal, pois as forças e torques em um ROV estão sempre definidas no referencial móvel (referencial do corpo), conforme explicitado no Capítulo 3. Portanto, parte do equacionamento existente no presente Capítulo é dedicada a transformações entre sistemas de referência, levando-se esforços do sistema do corpo para o inercial e assim, seguir o procedimento desenvolvido no Capítulo 4.

Na sequência do Capítulo apresenta-se inicialmente o desenvolvimento de equações gerais para forças e torques, considerando-se o cabo formado por um e três elos, com uma carga terminal, conforme mostram as Figuras 5.1 e 5.5. Posteriormente apresenta-se o desenvolvimento de um algoritmo genérico que possibilita a obtenção das forças e torques no cabo e torques sobre a carga terminal para qualquer número de graus de liberdade escolhido para representar a dinâmica contínua do cabo no espaço tridimensional. Este algoritmo genérico foi incorporado aos algoritmos que geram o modelo do cabo, apresentados no Capítulo 2, sendo capaz de gerar os torques em cada uma das n articulações do cabo, necessitando apenas do conhecimento das forças externas que são aplicadas na carga terminal. A carga terminal do cabo recebe forças externas nas três direções do referencial fixo ao corpo $X_c Y_c Z_c$. Essas forças externas podem também gerar torques em torno do centro de massa da carga. Ao final do Capítulo apresentam-se simulações que testam qualitativamente o modelo considerando-se forças externas na carga terminal, provocando ou não torques em torno do seu centro de massa.

5.1. EQUACIONAMENTO PARA O CABO COM UM ELO

Para a compreensão do processo de transformação da força (vetor no espaço 3D) no referencial do corpo para o referencial inercial é interessante trabalhar inicialmente considerando-se o cabo com apenas um elo. Neste caso, o cabo corresponde a um pêndulo espacial simples. A Figura (5.1) ilustra essa situação e os sistemas referenciais utilizados.

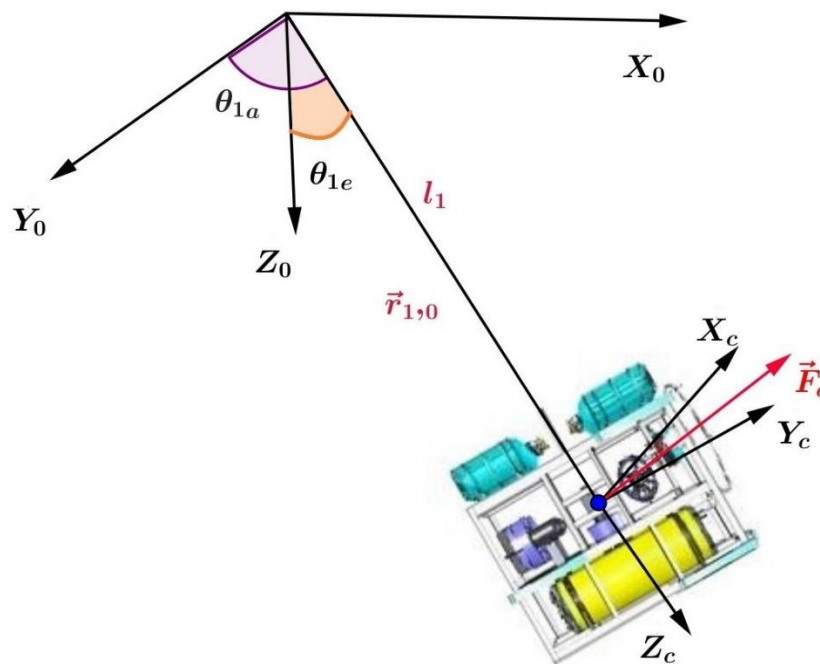


Figura 5.1 – Representação dos referenciais do corpo e inercial

A modelagem do cabo é desenvolvida no referencial inercial $X_0Y_0Z_0$, com a origem coincidindo com a extremidade fixa do cabo, onde o eixo Z_0 tem direção vertical para baixo, o eixo Y_0 coincidente com a direção do movimento inicial realizado pelo cabo e o eixo X_0 é perpendicular aos outros dois eixos, formando o triedro.

Para a determinação das forças e torques ao longo do cabo, produzidos pela força aplicada na carga terminal, define-se o referencial do corpo $X_cY_cZ_c$, com origem no centro de massa do veículo (carga terminal), onde o eixo Z_c é coincidente com a direção do elo fixo ao veículo, o eixo Y_c é paralelo à direção frontal do veículo e o eixo X_c é perpendicular aos eixos Y_c e Z_c (direção transversal), como ilustrado na Figura 5.1.

Ao ligar os atuadores da carga terminal (ROV), ela entra em movimento devido a uma força resultante, denotada por $\vec{F}_c$, que está no referencial do corpo ($X_cY_cZ_c$). Essa força produz

forças e torques sobre o cabo e pode produzir torques sobre a própria carga terminal desde que essa força resultante não tenha direção coincidente com o centro de massa da carga terminal. O torque produzido pelas forças sobre o cabo (atuante na última articulação, que, no caso da Figura 5.1, é a articulação fixa à origem do referencial inercial) é denotado de $\vec{\tau}_0$ ($\vec{\tau}_0 = (\tau_{0x}, \tau_{0y}, \tau_{0z})$ – expresso no referencial inercial) e o torque produzido pelas forças sobre a carga terminal é denotado de $\vec{\tau}_c$ ($\vec{\tau}_c = (\tau_{cx}, \tau_{cy}, \tau_{cz})$ – conhecido do modelo dinâmico do ROV).

A dinâmica do cabo está no referencial inercial $X_0Y_0Z_0$ e, portanto, os torques produzidos no cabo devem estar nesse mesmo referencial. Para haver torques na carga terminal, a direção da força resultante não deve conter o centro de massa. Esta força resultante $\vec{F}_c$ tem a forma: $\vec{F}_c = (F_{cx}, F_{cy}, F_{cz})$, onde cada uma das forças é formada por outras duas, ou seja, $F_{cx} = F_{cxa} + F_{cxb}$, $F_{cy} = F_{cya} + F_{cyb}$ e $F_{cz} = F_{cza} + F_{czb}$, denotando dois atuadores em cada direção.

As forças aplicadas F_{cx} , F_{cy} e F_{cz} são originadas nos atuadores do ROV, cuja disposição são dois atuadores em cada plano de simetria do ROV. P_1 e P_2 são dois atuadores no plano Y_cZ_c e estão na direção X_c e, desta forma, compoendo a força F_{cx} , onde F_{cxa} é aplicada no atuador P_1 e F_{cxb} no atuador P_2 (ver Figura 5.2 (a)). P_3 e P_4 são dois atuadores no plano X_cZ_c e estão na direção Y_c , compoendo a força F_{cy} , onde F_{cya} é aplicada no atuador P_3 e F_{cyb} no atuador P_4 (ver Figura 5.2 (b)). P_5 e P_6 são dois atuadores no plano Y_cX_c e estão na direção Z_c , compoendo a força F_{cz} , onde F_{cza} é aplicada no atuador P_5 e F_{czb} no atuador P_6 (ver Figura 5.2 (c)). Portanto, é necessário identificar as coordenadas dos vetores $\vec{F}_c$ e $\vec{r}_{1,0}$ no referencial inercial.

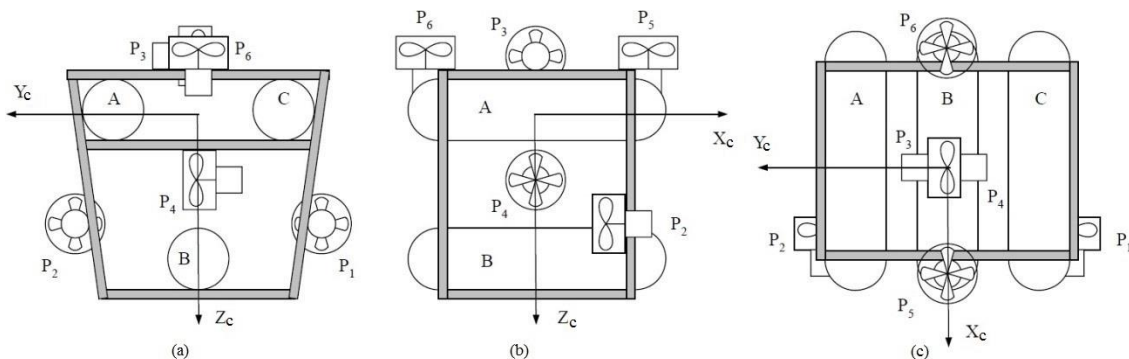


Figura 5.2 – Representação dos atuadores (Adaptado de TAVARES [27])

Na Figura 5.1, o cabo apresenta apenas um elo e o braço de alavanca correspondente ao vetor $\vec{r}_{1,0} = (r_{1,0x}, r_{1,0y}, r_{1,0z})$, ligando a carga terminal à origem do sistema inercial $X_0Y_0Z_0$, suas componentes são:

$$\vec{r}_{1,0} = \begin{cases} r_{1,0x} = -l_1 \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} \\ r_{1,0y} = -l_1 \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} \\ r_{1,0z} = -l_1 \cos \theta_{1e} \end{cases}$$

A força $\vec{F}_c$ gerada ao ligar os atuadores do veículo tem suas coordenadas expressas no referencial do corpo $X_cY_cZ_c$. Como o modelo dinâmico do cabo está no referencial inercial, é conveniente obter a força $\vec{F}_c$ nesse referencial, ou seja, $\vec{F}_0 = (F_{0x}, F_{0y}, F_{0z})$. Para isso faz-se necessário a utilização de transformações homogêneas, transformando inicialmente a força $\vec{F}_c$ no referencial do corpo para o referencial da última articulação $(X_{n-1}, Y_{n-1}, Z_{n-1})$, denotada por F_j . Como, neste exemplo, o cabo é composto apenas por um elo, o vetor força no referencial inercial $\vec{F}_0$ coincide com o vetor força do referencial da última articulação $\vec{F}_j$ e, desta forma, $\vec{F}_j = \vec{F}_0$.

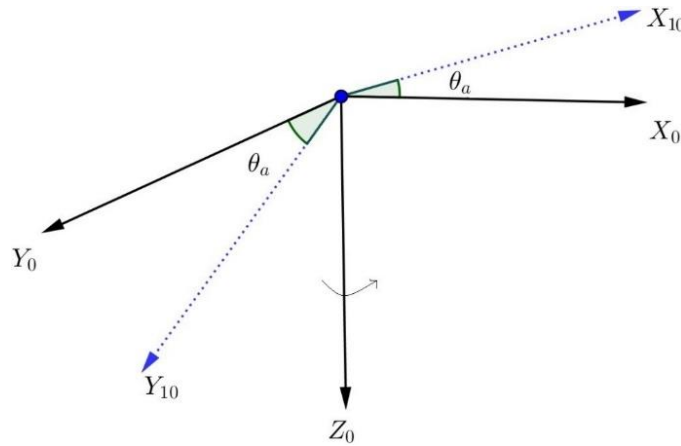


Figure 5.3 - Representação da primeira rotação

A primeira rotação aplicada ao sistema é sobre o eixo Z_0 de um ângulo θ_a . Obtém-se um novo sistema de eixos $X_{10}Y_{10}Z_{10}$, Figura 5.3. A Força $\vec{F}_0$ aplicada no veículo no referencial $X_{10}Y_{10}Z_{10}$ é dada por:

$$\vec{F}_0 = R_{Z,\theta_a} \vec{F}_{10} \quad (5.1)$$

onde R_{Z,θ_a} é a matriz de rotação em torno de Z de um ângulo θ_a .

Em seguida aplica-se uma rotação de um ângulo θ_e sobre o eixo X_{10} , gerando-se o referencial $X_{20}Y_{20}Z_{20}$:

$$\vec{F}_{10} = R_{X,\theta_e} \vec{F}_{20} \quad (5.2)$$

onde R_{X,θ_e} é a matriz de rotação em torno do eixo X de um ângulo θ_e .

Posteriormente, realiza-se a rotação sobre o eixo Z_{20} de um ângulo $-\theta_a$, gerando o referencial $X_{30}Y_{30}Z_{30}$:

$$\vec{F}_{20} = R_{Z,-\theta_a} \vec{F}_{30} \quad (5.3)$$

onde $R_{Z,-\theta_a}$ é a matriz de rotação em torno do eixo Z de um ângulo $-\theta_a$.

Por fim, rotaciona-se $-\theta_T$ sobre o eixo Z_{30} , chegando-se no referencial $X_cY_cZ_c$:

$$\vec{F}_{30} = R_{Z,-\theta_T} \vec{F}_c \quad (5.4)$$

onde $R_{Z,-\theta_T}$ é a matriz de rotação em torno de Z de um ângulo $-\theta_T$.

As matrizes de rotação possuem as seguintes definições:

$$R_{Z,\theta_a} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{1a} & \sin \theta_{1a} & 0 \\ -\sin \theta_{1a} & \cos \theta_{1a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$R_{X,\theta_e} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{1e} & \sin \theta_{1e} \\ 0 & -\sin \theta_{1e} & \cos \theta_{1e} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$R_{Z,-\theta_a} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{1a} & -\sin \theta_{1a} & 0 \\ \sin \theta_{1a} & \cos \theta_{1a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$R_{Z,-\theta_T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{1T} & -\sin \theta_{1T} & 0 \\ \sin \theta_{1T} & \cos \theta_{1T} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Define-se portanto o produto das matrizes de rotação por:

$$M_{01} = R_{Z,\theta_a} R_{X,\theta_e} R_{Z,-\theta_a} R_{Z,-\theta_T} \quad (5.9)$$

Logo, das equações (5.1), (5.2), (5.3) e (5.4), tem-se a força $\vec{F}_0$ no referencial da última articulação (neste caso, coincide também com o inercial):

$$\vec{F}_0 = R_{Z,\theta_a} R_{X,\theta_e} R_{Z,-\theta_a} R_{Z,-\theta_T} \vec{F}_c \quad (5.10)$$

Portanto, das equações (5.9) e (5.10), o vetor força $\vec{F}_0$ pode ser definido como:

$$\vec{F}_0 = M_{01} \vec{F}_c \quad (5.11)$$

Definido o vetor força no referencial inercial, é possível identificar os torques no referencial inercial a partir da equação (4.1) como sendo:

$$\vec{\tau}_0 = \vec{F}_0 \wedge \vec{r}_{1,0} \quad (5.12)$$

Desta forma, o vetor de torques $\vec{\tau}_0$ pode ser escrito como:

$$\vec{\tau}_0 = \begin{bmatrix} (F_{0z} \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} - F_{0y} \cos \theta_{1e}) \vec{i} + \\ + (F_{0x} \cos \theta_{1e} - F_{0z} \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a}) \vec{j} + \\ + (F_{0y} \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} - F_{0x} \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a}) \vec{k} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

As coordenadas do vetor de torques $\vec{\tau}_0 = (\tau_{0x}, \tau_{0y}, \tau_{0z})$, correspondem aos torques no cabo sobre os eixos X_0, Y_0 e Z_0 , respectivamente.

A carga terminal sofre torques oriundos das diferentes forças aplicadas sobre ela e produz torques sobre a última articulação. Os torques produzidos na carga terminal (referencial do corpo) são definidos por:

$$\vec{\tau}_c = (\tau_{cx}, \tau_{cy}, \tau_{cz}) \quad (5.14)$$

onde a diferença entre as forças F_{cxb} e F_{cxa} na direção X_c multiplicada pela distância entre os atuadores P_1 e P_2 produz torque na carga terminal sobre o eixo Z_c diferença entre as forças F_{cyb} e F_{cya} na direção Y_c multiplicada pela distância entre os atuadores P_3 e P_4 também produz torque na carga terminal sobre o eixo Z_c e a diferença entre as forças F_{czb} e F_{cza} na direção Z_c multiplicada pela distância entre os atuadores P_5 e P_6 produz torque na carga

terminal sobre o eixo X_c . Desta forma, os torques na carga terminal nos eixos X_c, Y_c e Z_c , respectivamente, são dados por $\tau_{cx} = [(F_{czb} - F_{cza})d]$, $\tau_{cy} = 0$, $\tau_{cz} = [(F_{cyb} - F_{cya})d + (F_{cxb} - F_{cxa})d]$, onde d é a distância em metros entre os atuadores na carga terminal. Os torques na carga terminal são descritos de acordo com o posicionamento dos atuadores na mesma.

Para obter os torques atuantes na carga terminal no referencial da última articulação, é necessário efetuar a transformação dos torques $\vec{\tau}_c$ (referencial do corpo) para a última articulação. O vetor de torques na última articulação, denotado por $\vec{\tau}_{ca} = (\tau_{cax}, \tau_{cay}, \tau_{caz})$ é obtido a partir do produto entre a matriz de rotação M_{01} e o vetor torque na carga terminal $\vec{\tau}_c$.

$$\vec{\tau}_{ca} = M_{01} \vec{\tau}_c \quad (5.15)$$

Como visto no Capítulo 4, a partir dos torques no cabo expressos no referencial da articulação é possível identificar os torques de elevação (τ_{1e}) e azimuth (τ_{1a}) no cabo descritos, respectivamente, nas equações (4.51) e (4.52).

$$\begin{aligned} \tau_{1e} &= -\tau_{0x} \cos \theta_{1a} + \tau_{0y} \sin \theta_{1a} \\ \tau_{1a} &= \tau_{0z} \end{aligned}$$

Neste caso, como o cabo sofre torção, é possível identificar o torque em torção, que atua na última articulação. O torque em torção na última articulação é igual ao torque produzido pela carga terminal sobre o eixo Z_c (referencial do corpo), logo:

$$\tau_{nt} = \tau_{cz} \quad (5.16)$$

Vale ressaltar que os torques de azimuth e elevação na última articulação estão em função também dos torques provocados pela carga terminal sobre esta última articulação ($\vec{\tau}_{ca}$), devendo-se isto ao acoplamento da dinâmica do próprio cabo. Desta forma, o torque de elevação (τ_{ec}) e o torque de azimuth (τ_{ac}) na última articulação são, respectivamente:

$$\tau_{ec} = -\tau_{cax} \cos \theta_{1a} + \tau_{cay} \sin \theta_{1a} \quad (5.17)$$

$$\tau_{ac} = \tau_{caz} \quad (5.18)$$

Como a última articulação do cabo sofre torques de elevação e azimute em função dos torques no cabo e dos torques provocados na carga terminal, os torques de elevação e azimute na articulação n (última articulação) são, respectivamente:

$$\tau_{eu} = \tau_{1e} + \tau_{ec} \quad (5.19)$$

$$\tau_{au} = \tau_{1a} + \tau_{ac} \quad (5.20)$$

Os torques em azimute, elevação e torção entram na dinâmica do cabo somados aos torques externos, oriundos, por exemplo, de correntes oceânicas. Vale ressaltar que neste caso o cabo é constituído por apenas um elo. Os elementos deste vetor encontram-se no Apêndice B.2.

5.2. EQUACIONAMENTO PARA O CABO DIVIDIDO EM TRÊS ELOS

Considera-se o cabo articulado a uma base fixa em uma de suas extremidades e livre em sua outra extremidade que contém a carga terminal. No presente exemplo, o cabo foi dividido em três partes rígidas, de comprimentos l_1 , l_2 e l_3 , conectadas por articulações fictícias, conforme ilustrado na Figura 5.4.

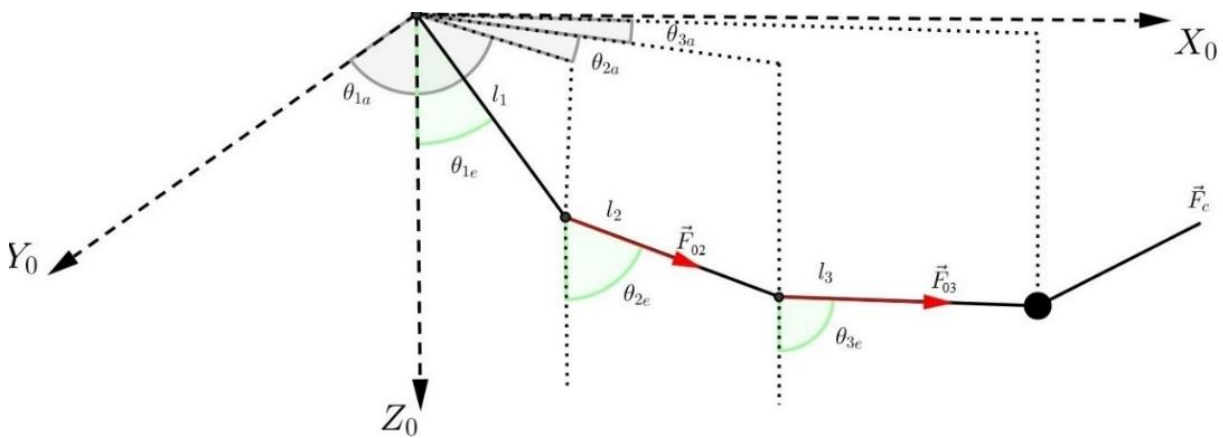


Figura 5.4 – Representação geral para o cabo dividido em três elos

Como exemplificado na Figura 5.4, o cabo é dividido em três elos e, portanto, devem ser identificados os torques atuantes nas três articulações, devidos aos esforços originados na carga terminal. Para a obtenção dos torques no referencial da última articulação, é necessária a obtenção da força $\vec{F}_c$ (originalmente no referencial do corpo) no referencial inercial da base. Para isso, inicialmente efetua-se a transformação da força $\vec{F}_c$ no referencial do corpo para o referencial da última articulação $X_2Y_2Z_2$. Essa transformação da força $\vec{F}_c$ para a última articulação é de forma análoga ao que foi explicado para o caso com apenas um elo. A Figura 5.5 ilustra os sistemas de referência utilizados em cada articulação para o cabo dividido em três elos.

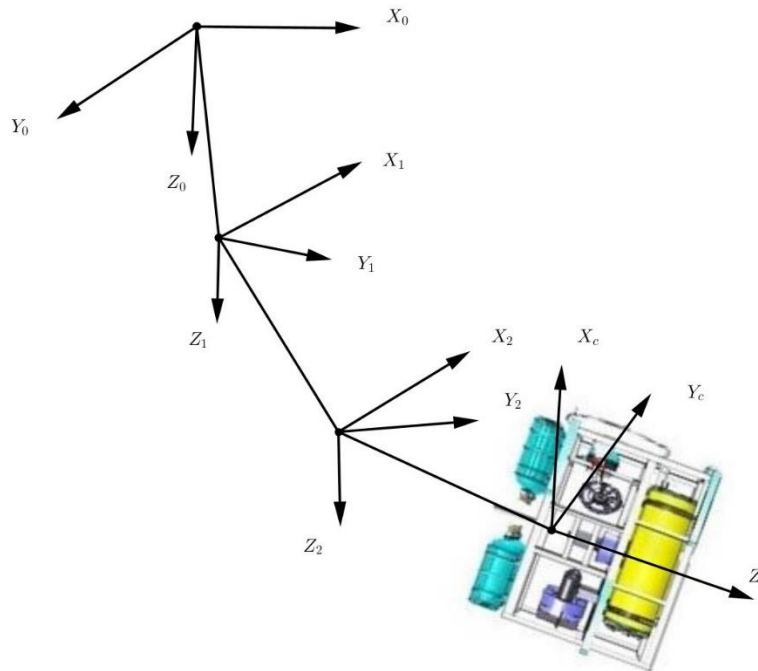


Figure 5.5 – Representação dos sistemas ao longo da cadeia, para o cabo com três elos

A matriz de transformação do referencial do corpo $X_cY_cZ_c$ para o referencial a última articulação $X_2Y_2Z_2$, pode ser obtida a partir das quatro matrizes de rotação:

$$R_{Z,\theta_{3a}} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{3a} & \sin \theta_{3a} & 0 \\ -\sin \theta_{3a} & \cos \theta_{3a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

$$R_{X,\theta_{3e}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{3e} & \sin \theta_{3e} \\ 0 & -\sin \theta_{3e} & \cos \theta_{3e} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

$$R_{Z,-\theta_{3a}} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{3a} & -\sin \theta_{3a} & 0 \\ \sin \theta_{3a} & \cos \theta_{3a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

$$R_{Z,-\theta_{3T}} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{3T} & -\sin \theta_{3T} & 0 \\ \sin \theta_{3T} & \cos \theta_{3T} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

O produto das matrizes de rotação é dado por:

$$M_{03} = R_{Z,\theta_{3a}} R_{X,\theta_{3e}} R_{Z,-\theta_{3a}} R_{Z,-\theta_{3T}} \quad (5.25)$$

A transformação do vetor força do referencial $X_c Y_c Z_c$ para o referencial $X_2 Y_2 Z_2$ (referencial da última articulação) é definida como:

$$\vec{F}_j = M_{03} \vec{F}_c \quad (5.26)$$

O vetor $\vec{F}_j$ tem suas coordenadas expressas no referencial $X_2 Y_2 Z_2$ e deve ser transformado para o referencial inercial da base $X_0 Y_0 Z_0$. Como o cabo tem três articulações, a matriz de transformação é obtida a partir de duas rotações negativas em azimute sobre o eixo Z_2 :

$$N_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) & -\sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) & 0 \\ \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) & \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Portanto, a força aplicada no cabo, expressa no referencial inercial da base é dada por:

$$\vec{F}_0 = N_2 \vec{F}_j \quad (5.28)$$

Definido o vetor força no referencial inercial, pode-se determinar os torques atuantes em cada articulação, no referencial inercial, utilizando-se o mesmo procedimento desenvolvido no Capítulo 4. Desta forma, os torques $\vec{\tau}_0$ (articulação da base), $\vec{\tau}_1$ (articulação intermediária) e $\vec{\tau}_2$ (última articulação), respectivamente, possuem as formas:

$$\vec{\tau}_0 = \cos \alpha_3 \cos \alpha_2 \left[\begin{aligned} &\left(\begin{aligned} &F_{0z} \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} + \\ &-F_{0y} \cos \theta_{1e} \end{aligned} \right) \vec{i} + \\ &+ \left(\begin{aligned} &F_{0x} \cos \theta_{1e} + \\ &-F_{0z} \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} \end{aligned} \right) \vec{j} + \\ &+ \left(\begin{aligned} &F_{0y} \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} + \\ &-F_{0x} \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} \end{aligned} \right) \vec{k} \end{aligned} \right] l_1 \quad (5.29)$$

$$\vec{\tau}_1 = \cos \alpha_3 \left[\begin{aligned} &\left(\begin{aligned} &F_{0z} \sin \theta_{2e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + \\ &-F_{0y} \cos \theta_{2e} \end{aligned} \right) \vec{i} + \\ &+ \left(\begin{aligned} &F_{0x} \cos \theta_{2e} + \\ &-F_{0z} \sin \theta_{2e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) \end{aligned} \right) \vec{j} + \\ &+ \left(\begin{aligned} &F_{0y} \sin \theta_{2e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + \\ &-F_{0x} \sin \theta_{2e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) \end{aligned} \right) \vec{k} \end{aligned} \right] l_2 \quad (5.30)$$

$$\vec{\tau}_2 = \left[\begin{aligned} &\left(\begin{aligned} &F_{0z} \sin \theta_{3e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) + \\ &-F_{0y} \cos \theta_{3e} \end{aligned} \right) \vec{i} + \\ &+ \left(\begin{aligned} &F_{0x} \cos \theta_{3e} + \\ &-F_{0z} \sin \theta_{3e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) \end{aligned} \right) \vec{j} + \\ &+ \left(\begin{aligned} &F_{0y} \sin \theta_{3e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) + \\ &-F_{0x} \sin \theta_{3e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) \end{aligned} \right) \vec{k} \end{aligned} \right] l_3 \quad (5.31)$$

Como visto anteriormente, a carga terminal sofre torques oriundos das diferentes forças aplicadas sobre ela e produz torques sobre a última articulação. Desta forma, o torque na carga terminal ($\vec{\tau}_c$) é descrito conforme a Equação (5.14) e o torque produzido pela carga terminal na última articulação denotado por $\vec{\tau}_{ca} = (\tau_{cax}, \tau_{cay}, \tau_{caz})$ no referencial da própria articulação é dado pelo produto da matriz de rotação M_{03} descrita na Equação (5.25) e o vetor torque na carga terminal $\vec{\tau}_c$:

$$\vec{\tau}_{ca} = M_{03} \vec{\tau}_c \quad (5.32)$$

Os vetores de torques $\vec{\tau}_0$, $\vec{\tau}_1$ e $\vec{\tau}_2$ obtidos nas equações (5.29), (5.30) e (5.31), são transformados para o sistema da articulação, podendo assim gerar os torques de azimuth e de elevação em cada articulação, como foi explicado no Capítulo 4. Neste caso em particular, como descrito para o caso de um elo, existe o torque em torção, aplicado na última articulação, o qual é transmitido ao restante do cabo devido ao acoplamento dinâmico do seu modelo.

Como foi visto, os torques de elevação e de azimute na última articulação estão também em função dos torques atuantes na carga terminal e que são transmitidos à última articulação. Desta forma, o torque de elevação (τ_{ec}) e de azimute (τ_{ac}) na última articulação provocados pela carga terminal possuem as formas:

$$\tau_{ec} = -\tau_{cax} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) + \tau_{cay} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) \quad (5.33)$$

$$\tau_{ac} = \tau_{caz} \quad (5.34)$$

Portanto, os torques em elevação e em azimute na última articulação são, respectivamente:

$$\tau_{eu} = \tau_{3e} + \tau_{ec} \quad (5.35)$$

$$\tau_{au} = \tau_{3a} + \tau_{ac} \quad (5.36)$$

Uma vez obtidos os torques em elevação, azimute e torção, eles entram na dinâmica do cabo somados aos vetores de torques externos. Os elementos deste vetor encontram-se no Apêndice B. 2.

5.3. ALGORITMO GENÉRICO

Com o desenvolvimento dos torques para o cabo dividido em três elos, considerando torques atuantes em cada articulação do cabo e na própria carga terminal devido às diferentes forças externas aplicadas na carga, foram feitas análises que possibilitaram a verificação de um crescimento padrão para qualquer número de elos considerados. Vale ressaltar que o algoritmo genérico visto no Capítulo 4 possibilitou a geração de forças e torques no referencial inercial ao longo da cadeia articulada de elos, para forças aplicadas no mesmo referencial. Os algoritmos a seguir são acoplados ao algoritmo do Capítulo 4, já que o objetivo do presente Capítulo é aplicar forças e torques na carga terminal, escritos no referencial do corpo e transformá-los para o referencial inercial, pois as forças e torques

atuantes ao longo da cadeia estão no referencial inercial, como visto anteriormente. Desta forma, foi necessária a criação de dois algoritmos, um que transforma as forças e torques aplicados a carga terminal no referencial do corpo para o referencial inercial e outro para a determinação dos torques em cada uma das n articulações.

A transformação das forças e torques aplicados no referencial do corpo para o referencial inercial são obtidos a partir do algoritmo:

$$\begin{aligned}
 F_c &= [F_{cxa} + F_{cxb}; F_{cya} + F_{cyb}; F_{cza} + F_{czb}]; \\
 \tau_{cx} &= (F_{czb} - F_{cza})d; \\
 \tau_{cy} &= 0; \\
 \tau_{cz} &= (F_{cyb} - F_{cya})d + (F_{cxb} - F_{cxa})d; \\
 \tau_{tn} &= \tau_{cz}; \\
 \tau_c &= [\tau_{cx}; \tau_{cy}; \tau_{cz}]; \\
 R_{z,\theta_{na}} &= [\cos(\theta_{na}) \quad \sin(\theta_{na}) \quad 0; -\sin(\theta_{na}) \quad \cos(\theta_{na}) \quad 0; 0 \quad 0 \quad 1]; \\
 R_{x,\theta_{ne}} &= [1 \quad 0 \quad 0; 0 \quad \cos(\theta_{ne}) \quad \sin(\theta_{ne}); 0 \quad -\sin(\theta_{ne}) \quad \cos(\theta_{ne})]; \\
 R_{z,-\theta_{na}} &= [\cos(\theta_{na}) \quad -\sin(\theta_{na}) \quad 0; \sin(\theta_{na}) \quad \cos(\theta_{na}) \quad 0; 0 \quad 0 \quad 1]; \\
 R_{z,-\theta_{nt}} &= [\cos(\theta_{nt}) \quad -\sin(\theta_{nt}) \quad 0; \sin(\theta_{nt}) \quad \cos(\theta_{nt}) \quad 0; 0 \quad 0 \quad 1]; \\
 M_{0n} &= R_{z,\theta_{na}} R_{x,\theta_{ne}} R_{z,-\theta_{na}} R_{z,-\theta_{nt}}; \\
 F_j &= M_{0n} F_c; \\
 \tau_{ca} &= M_{0n} \tau_{cr} = [\tau_{cax}; \tau_{cay}; \tau_{caz}]; \\
 N_{n-1} &= \begin{bmatrix} \cos\left(\sum_{i=1}^{n-1} \theta_{ai}\right) & -\sin\left(\sum_{i=1}^{n-1} \theta_{ai}\right) & 0; \sin\left(\sum_{i=1}^{n-1} \theta_{ai}\right) & \cos\left(\sum_{i=1}^{n-1} \theta_{ai}\right) & 0; 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\
 F_{c0} &= N_{n-1} F_j;
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

onde, θ_{na} , θ_{ne} e θ_{nt} , são, respectivamente, os ângulos de azimute, elevação e torção no último elo.

Os torques atuantes em cada uma das n articulações fictícias são obtidos a partir do algoritmo a seguir, já definido no Capítulo anterior, mas que, no caso atual, foi modificado para a inclusão do torque sobre a carga terminal:

$$\vec{F}_{c0} = [F_{c0x}; F_{c0y}; F_{c0z}];$$

$$\vec{F} = F_{c0};$$

$$P_1 = 1;$$

para $i = n: -1: 1$,

$$\begin{aligned} \tau_{x(i-1)} &= P_1 \left[F_{c0z} \sin(\theta_{ei}) \cos\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right) - F_{c0y} \cos(\theta_{ei}) \right] l_i; \\ \tau_{y(i-1)} &= P_1 \left[F_{c0x} \cos(\theta_{ei}) - F_{c0z} \sin(\theta_{ei}) \sin\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right) \right] l_i; \\ \tau_{z(i-1)} &= P_1 \left[F_{c0y} \sin(\theta_{ei}) \sin\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right) - F_{c0x} \sin(\theta_{ei}) \cos\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right) \right] l_i; \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\vec{\tau}_{i-1} = [\tau_{x(i-1)}; \tau_{y(i-1)}; \tau_{z(i-1)}];$$

$$R_{(n-1)} = \begin{bmatrix} \cos\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right) & -\sin\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right) & 0; \sin\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right) & \cos\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right) & 0; 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\vec{\tau}_{c(i-1)} = R_{(n-1)}^T \tau_{(i-1)} = [\tau_{cx(i-1)}; \tau_{cy(i-1)}; \tau_{cz(i-1)}];$$

$$\tau_{ia} = \tau_{cz(i-1)};$$

$$\tau_{ie} = -\tau_{cx(i-1)} \cos\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right) + \tau_{cy(i-1)} \sin\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right);$$

se $i = n$,

$$\tau_{ec} = -\tau_{cax} \cos(\theta_{ai}) + \tau_{cay} \sin(\theta_{ai});$$

$$\tau_{ac} = \tau_{caz};$$

$$\tau_{eu} = \tau_{ie} + \tau_{ec};$$

$$\tau_{au} = \tau_{ia} + \tau_{ac};$$

fim se,

$$\mu_x = \sin(\theta_{ei}) \sin\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right); \mu_y = \sin(\theta_{ei}) \cos\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right); \mu_z = \cos(\theta_{ei});$$

$$\vec{\mu} = [\mu_x; \mu_y; \mu_z];$$

$$\text{se } |\vec{F}| = 0, \quad |\vec{F}| = 1e-12; \text{ fim se,}$$

$$\vec{F} = \vec{F} \text{ abs} \left(\frac{\vec{F}^T \vec{\mu}}{|\vec{F}|} \right);$$

$$P_1 = P_1 \text{ abs} \left(\frac{\vec{F}^T \vec{\mu}}{|\vec{F}|} \right);$$

fim para,

Onde, θ_{ei} são ângulos de elevação, θ_{ak} são ângulos de azimute, $R_{(n-1)}$ é a matriz de transformação para o sistema da última articulação e $\tau_{c(i-1)}$ é o vetor de torque produzido pelas forças sobre o cabo definido no sistema da articulação.

5.4. SIMULAÇÕES PARA FORÇAS E TOQUES NA CARGA TERMINAL

As simulações apresentadas a seguir foram realizadas com algoritmos genéricos apresentados neste Capítulo. Vale ressaltar que os algoritmos genéricos para a matriz de inércia, matriz de constantes elásticas, matriz de coeficientes de atrito, vetor Coriolis-centrífugos e vetor de torques gravitacionais são os mesmos mostrados no Capítulo 2. O objetivo é verificar se os modelos dinâmicos permitem reproduzir em simulações resultados fisicamente esperados.

As simulações são divididas em duas partes, sendo que na primeira foram realizadas cinco simulações, considerando-se forças externas no referencial do corpo atuantes na carga terminal, mas sem provocar torque sobre esta. Na segunda, foram realizadas três simulações, considerando-se forças externas no referencial do corpo e torques na carga terminal. Todas as simulações foram realizadas sob ação do arrasto hidrodinâmico (cabo considerado dentro d'água) e apresentadas graficamente em forma de *frames*.

Para todas as simulações, os parâmetros físicos gerais adotados estão na Tabela 5.1.

5.4.1. Simulações para Forças Aplicadas na Carga Terminal

Para o caso de forças externas atuantes na carga terminal e descritas no referencial do corpo, foram consideradas cinco simulações, que possibilitam verificar o comportamento do cabo e da carga terminal a partir da aplicação dessas forças. Vale ressaltar que essas forças não geram torques na carga terminal.

Para as cinco simulações realizadas, os parâmetros físicos adotados estão na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 - Parâmetros físicos adotados para forças no referencial do corpo aplicadas na carga terminal

Parâmetros	Valor numérico (unidade)	Significado físico
l_{comp}	1200 m	Comprimento do Cabo
n	16, 22, 26	Número de elos
F_{cx}	$F_{cxa} + F_{cxb}$	Força aplicada à carga terminal na direção x
F_{cy}	$F_{cya} + F_{cyb}$	Força aplicada à carga terminal na direção y
F_{cz}	$F_{cza} + F_{czb}$	Força aplicada à carga terminal na direção z
r_i	$\frac{0,01}{2}$ (m)	Raio de cada elo (constante)
l_i	$\frac{l_{comp}}{n}$ (m)	Comprimento de cada elo
m_{ea}	1000 (kg/m^3)	Massa Específica da água
m_e	7850 (kg/m^3)	Massa específica do cabo
m_c	600 kg	Massa da carga terminal
m_i	$\pi r_i^2 l_i m_e$ (kg)	Massa de cada elo
I_{Re}	$\frac{m_i}{12} l_i^2$ (kgm^2)	Momento de inércia rotacional de elevação
I_{Ra}	$I_{Re} [(0,9 \sin(\theta_{ei})) + 0.1]$ (kgm^2)	Momento de inércia rotacional de azimuth
I_{Rt}	$\left(\frac{m_i}{2}\right) \cdot r_i^2$ ($kg \cdot m^2$)	Momento de inércia rotacional de torção
E_y	$8 \cdot 10^{10}$ (N/m^2)	Módulo de Young (Elasticidade do cabo)
I_{sec}	$\frac{1}{4} \pi r_i^4$ (m^4)	Momento de inércia de área da seção transversal
k_e	$\frac{5}{6} n E_y \frac{I_{sec}}{l_{comp}} \left(\frac{Nm}{rd}\right)$	Constante elástica de elevação
k_a	Zero $\left(\frac{Nm}{rd}\right)$	Constante elástica de azimuth
k_t	$50 k_e \left(\frac{Nm}{rd}\right)$	Constante elástica de torção
c_e	$33,33n \left(\frac{Nms}{rd}\right)$	Coeficiente de atrito elevação
c_a	$1666,67n \left(\frac{Nms}{rd}\right)$	Coeficiente de atrito azimuth
c_t	$8,33n \left(\frac{N \cdot m \cdot s}{rd}\right)$	Coeficiente de atrito torção
c_v	$200 \left(\frac{Ns^2}{rd}\right)$	Coeficiente de arrasto hidrodinâmico
g	9,81 (m/g^2)	Aceleração gravitacional

Na primeira simulação o cabo é composto por 16 elos. Foi aplicada uma força $\vec{F}_{cx}$ e outra $\vec{F}_{cy}$, ambas de intensidade 28N, atuantes na carga terminal até 30 s de simulação. Após 30 s, a força $\vec{F}_{cx}$ foi anulada e modificou-se $\vec{F}_{cy}$ para $-28N$ (sinalizado em vermelho na

Figura 5.8, o *frame* correspondente ao instante em que a força é aplicada). O tempo total de simulação foi de 110 s. As Figuras 5.6 e 5.7 mostram, respectivamente, a trajetória da carga terminal em cada um dos eixos x , y e z e a trajetória espacial descrita pelo centro de massa da carga terminal. A Figura 5.8 ilustra a movimentação do cabo para esta simulação, sendo que a mesma é mostrada em forma de *frames* visualizados a cada 1,715 s e com escala X e Y de $-10(m): 10(m)$ e Z de $-1200(m): 0(m)$, para melhor apresentação dos resultados.

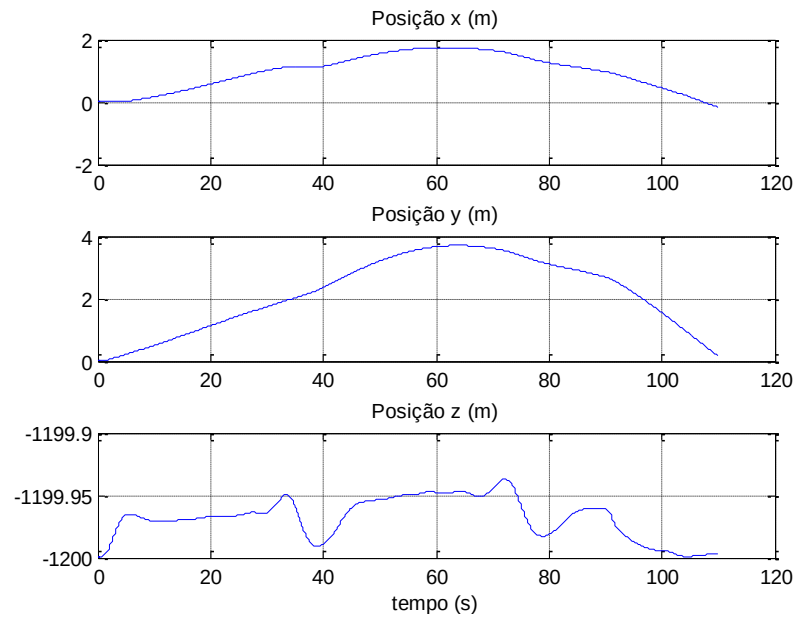


Figura 5.6- Primeira simulação, posições x , y e z da carga terminal, 16 elos, forças positivas na direção $\vec{F}_{cx}$ e $\vec{F}_{cy}$, após 30 s força negativa na direção $\vec{F}_{cy}$, tempo total de simulação 110 s.

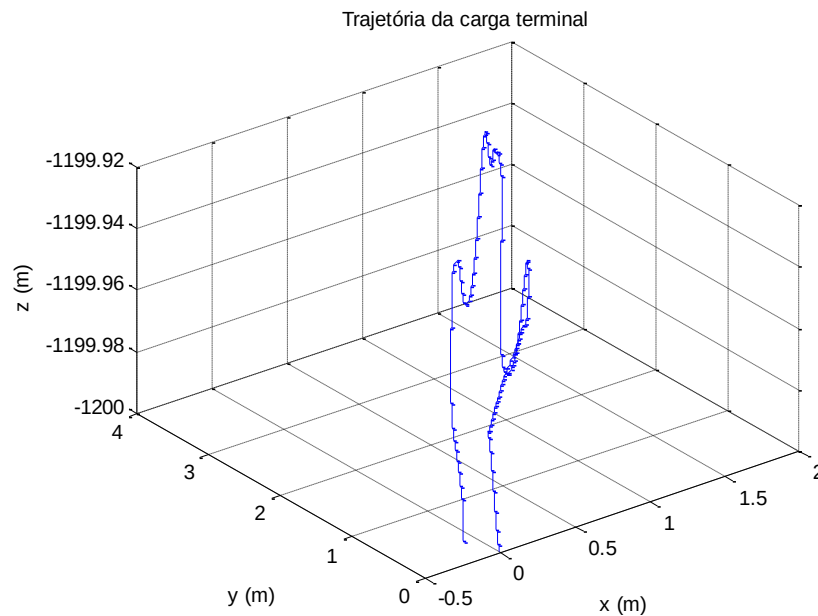
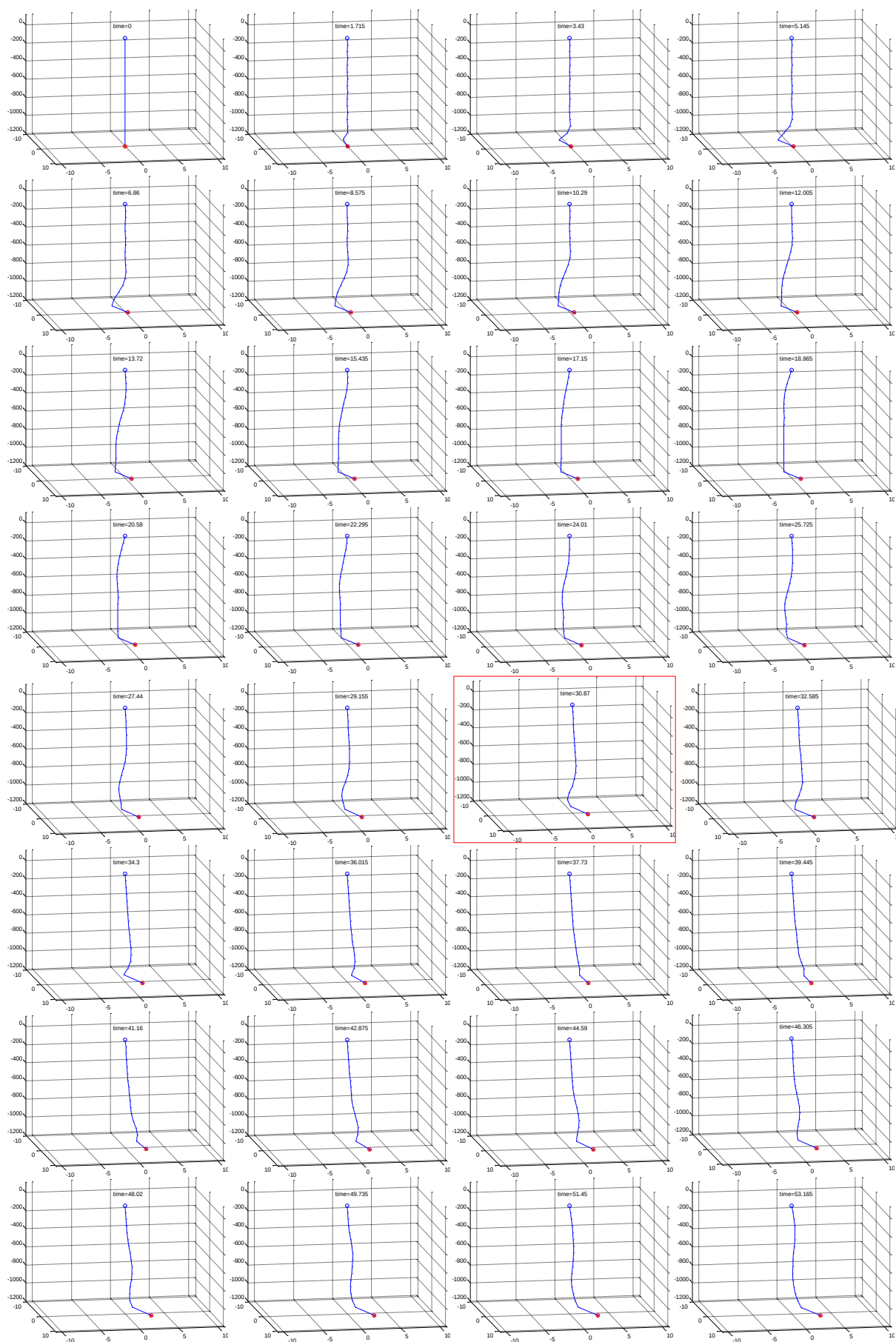


Figura 5.7- Primeira simulação, trajetória espacial da carga terminal, 16 elos, forças positivas na direção $\vec{F}_{cx}$ e $\vec{F}_{cy}$, após 30 s força negativa na direção $\vec{F}_{cy}$, tempo total de simulação 110 s.



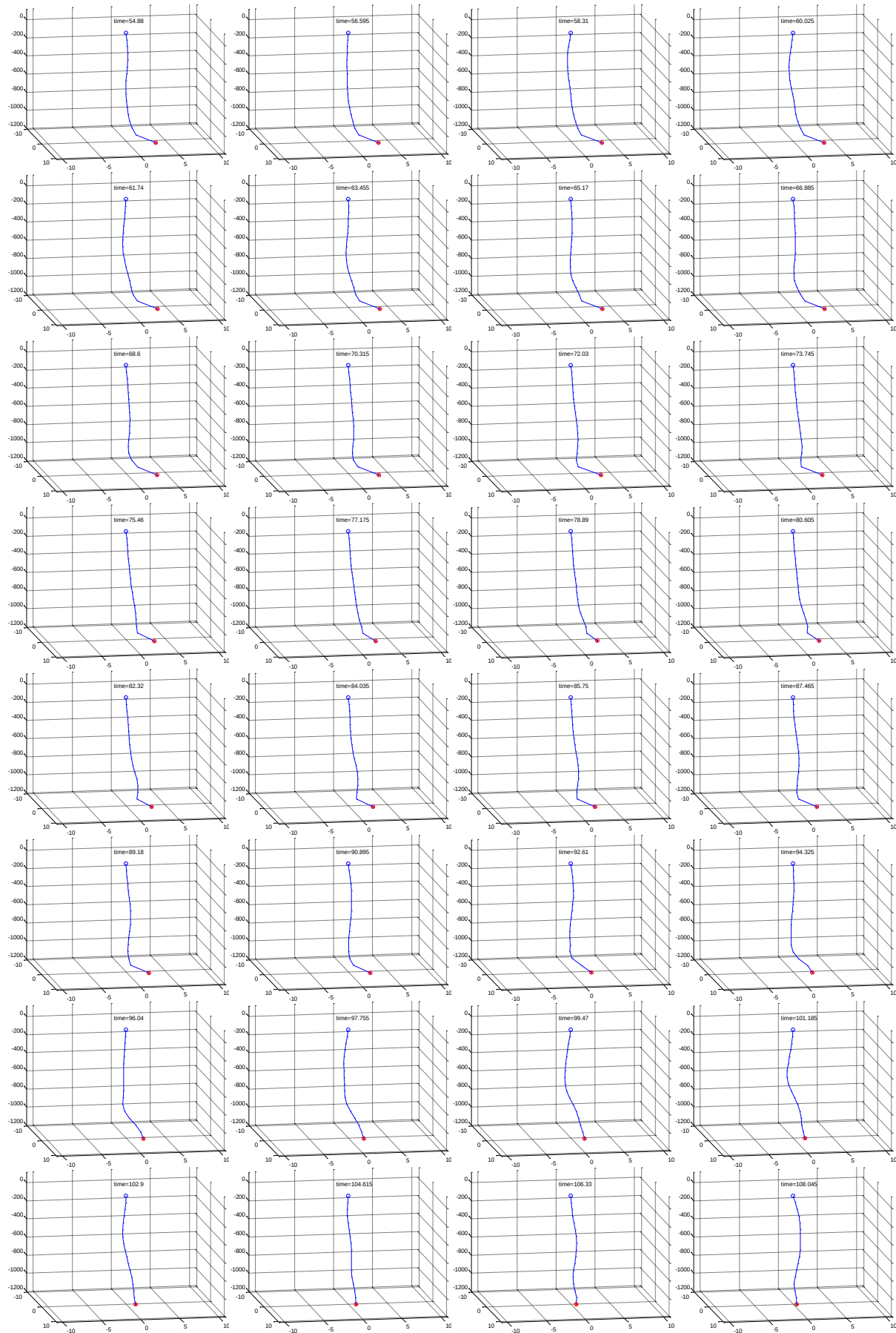


Figure 5.8- Primeira simulação, cabo com 16 elos, forças positivas na direção $\vec{F}_{cx}$ e $\vec{F}_{cy}$, após 30 s força negativa na direção $\vec{F}_{cy}$, todas as forças no referencial do corpo (frames a cada 1,715 s)

Na segunda simulação o cabo é composto por 22 elos. Foi considerada uma força $\vec{F}_{cy}$ de intensidade $280N$, atuante na carga terminal até 40 s de simulação. A partir de 40 s , $\vec{F}_{cy}$ foi anulada e foi aplicada uma força $\vec{F}_{cz}$ de intensidade $560N$ (sinalizado em vermelho na Figura 5.11, o *frame* correspondente ao instante em que a força é aplicada) até 80 s e após 80 s de simulação esta força foi anulada, ou seja, a carga terminal ficou em situação de queda livre (sinalizado em verde na Figura 5.11, o *frame* correspondente ao instante em que a força foi anulada). O tempo total de simulação foi de 110 s . As Figuras 5.9 e 5.10 mostram, respectivamente, a trajetória da carga terminal em cada um dos eixos x, y e z e a trajetória espacial descrita pelo centro de massa da carga terminal. A Figura 5.11 ilustra a movimentação do cabo para esta simulação, sendo que a mesma é mostrada em forma de *frames* visualizados a cada $1,715\text{ s}$ e com escala X de $-50(m):50(m)$, Y de $-80(m):80(m)$ e Z de $-1200(m):0(m)$.

Na terceira simulação o cabo é composto por 22 elos. Foi considerada uma força $\vec{F}_{cy}$ de intensidade $280N$, atuante na carga terminal até 60 s de simulação. A partir de 60 s , $\vec{F}_{cy}$ foi anulada e foi aplicada uma força $\vec{F}_{cz}$ de intensidade $-560N$ (sinalizado em vermelho na Figura 5.14, o *frame* correspondente ao instante em que a força é aplicada) até 100 s e após 100 s de simulação esta força foi anulada, deixando a carga terminal em situação de queda livre (sinalizado em verde na Figura 5.14, o *frame* correspondente ao instante em que a força foi anulada). O tempo total de simulação foi de 140 s . As Figuras 5.12 e 5.13 mostram, respectivamente, a trajetória da carga terminal em cada um dos eixos x, y e z e a trajetória espacial descrita pelo centro de massa da carga terminal. A Figura 5.14 ilustra a movimentação do cabo para esta simulação, sendo que a mesma é mostrada em forma de *frames* visualizados a cada $2,185\text{ s}$ e com escala X de $-100(m):100(m)$, Y de $-150(m):150(m)$ e Z de $-1200(m):0(m)$.

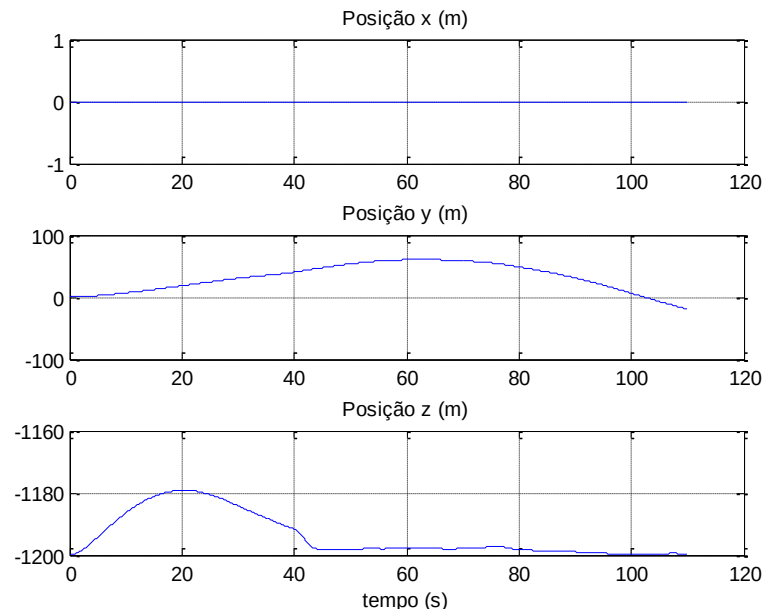


Figura 5.9 - Segunda simulação, posições x , y e z da carga terminal, 22 elos, força positiva na direção $\vec{F}_{cy}$ até 40 s, entre 40 s e 80 s força positiva na direção $\vec{F}_{cz}$, após 80 s queda livre, tempo total de simulação 110 s.

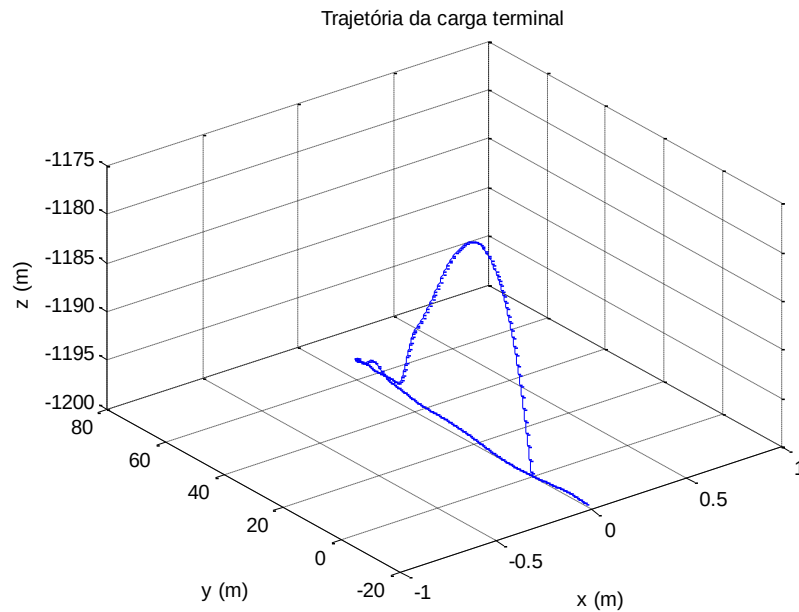
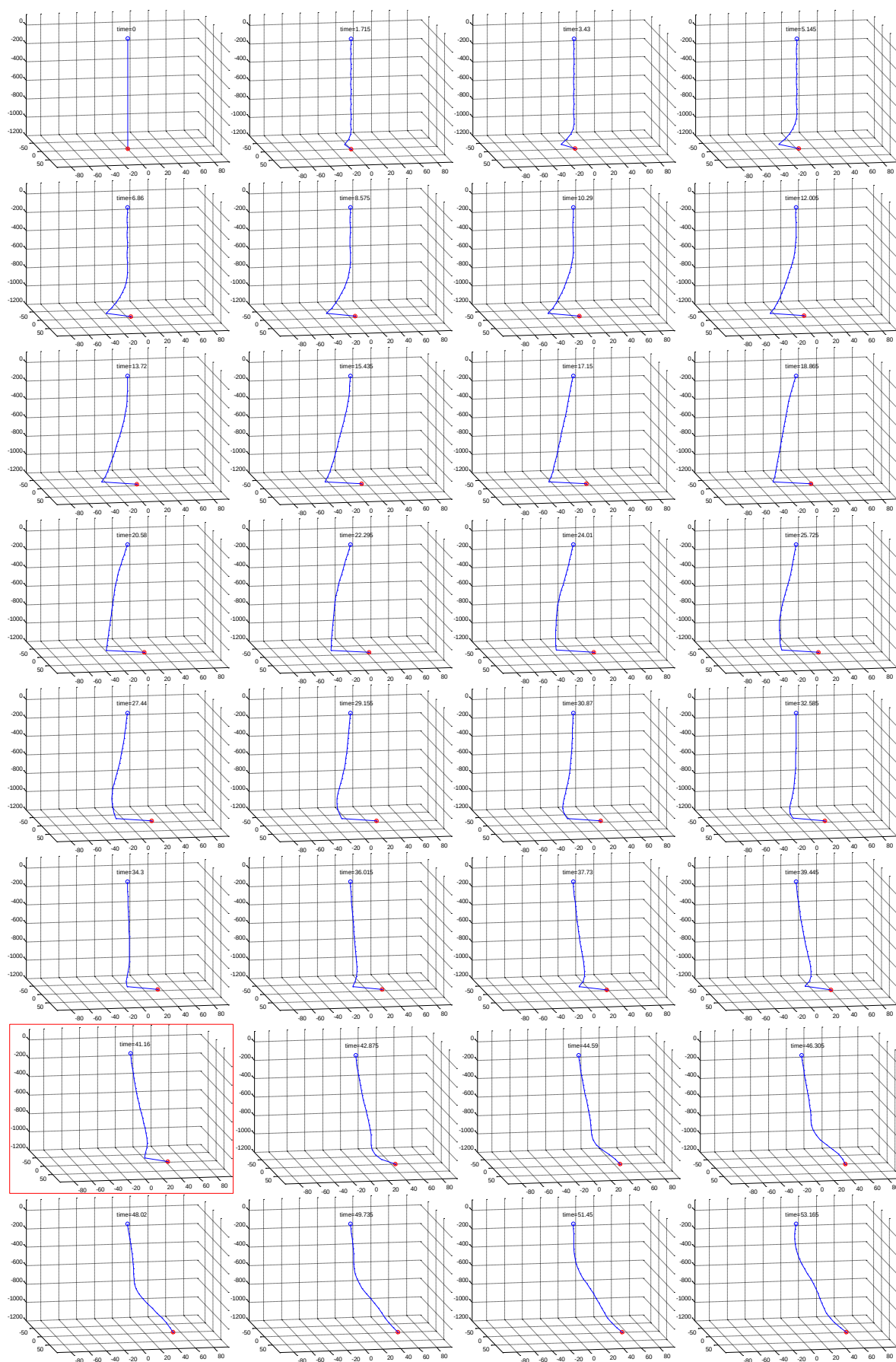


Figura 5.10 – Segunda simulação, trajetória espacial da carga terminal, 22 elos, força positiva na direção $\vec{F}_{cy}$ até 40 s, entre 40 s e 80 s força positiva na direção $\vec{F}_{cz}$, após 80 s queda livre, tempo total de simulação 110 s



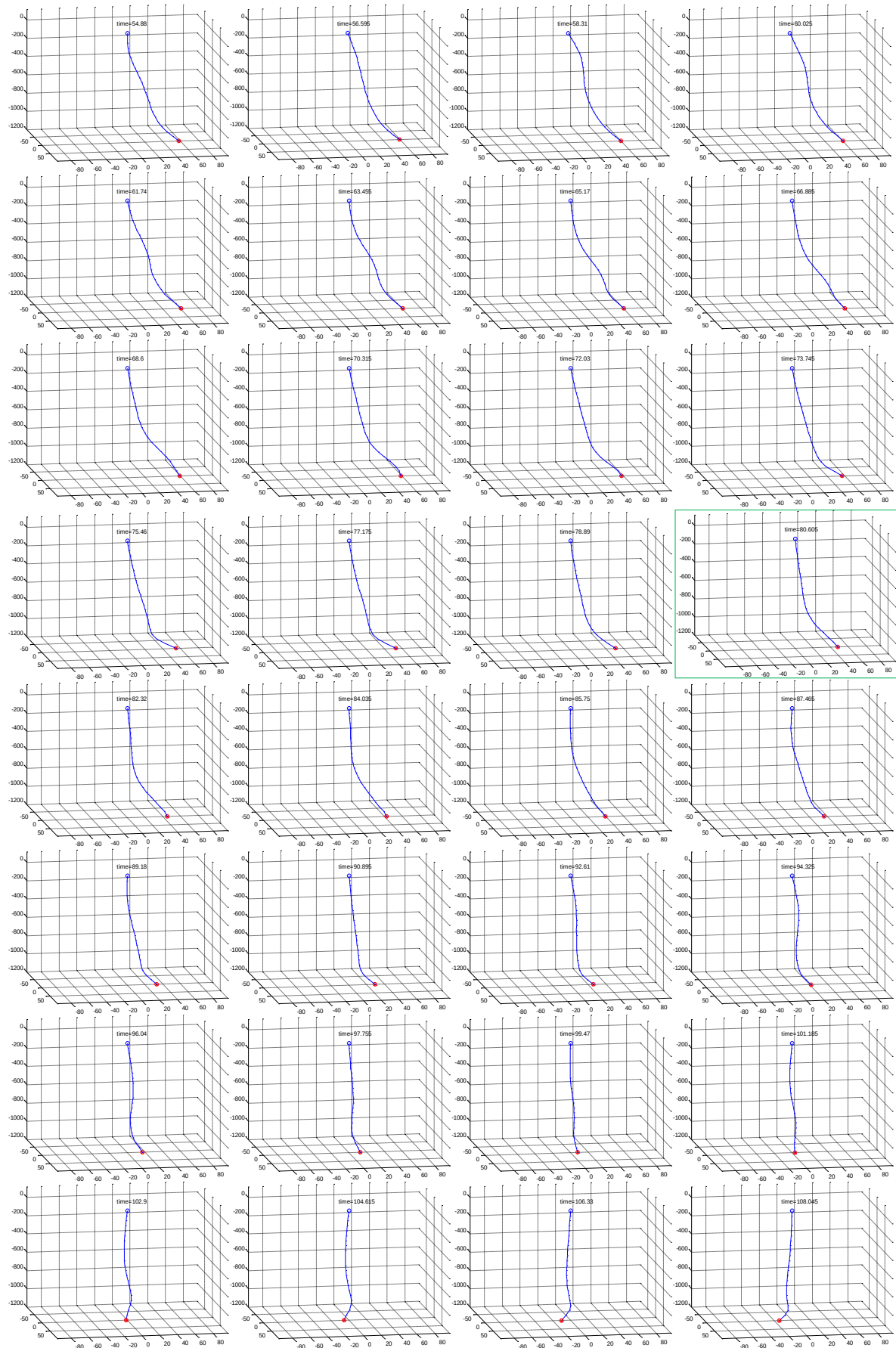


Figura 5.11 – Segunda simulação, cabo com 22 elos, força positiva na direção $\vec{F}_{cy}$ até 40 s, entre 40 s e 80 s força positiva na direção $\vec{F}_{cz}$, após 80 s queda livre, forças no referencial do corpo (frames a cada 1,715 s)

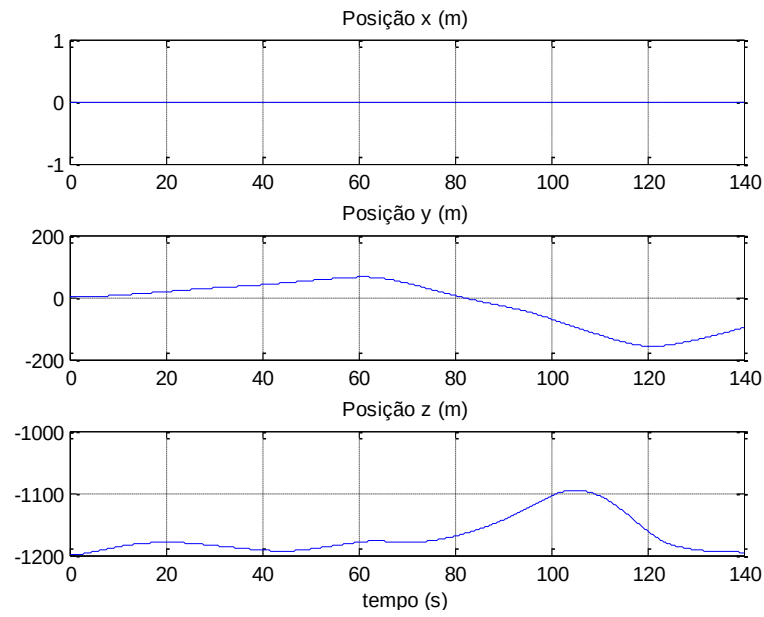


Figura 5.12 - Terceira simulação, posições x , y e z da carga terminal, 22 elos, força positiva na direção $\vec{F}_{cy}$ até 60 s, entre 60 s e 100 s força negativa na direção $\vec{F}_{cz}$, após 100 s queda livre, tempo total de simulação de 140 s

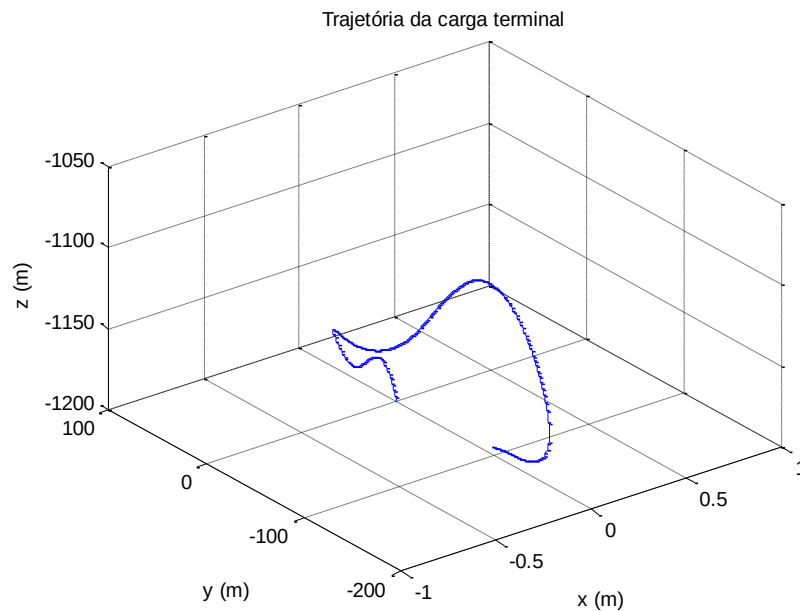
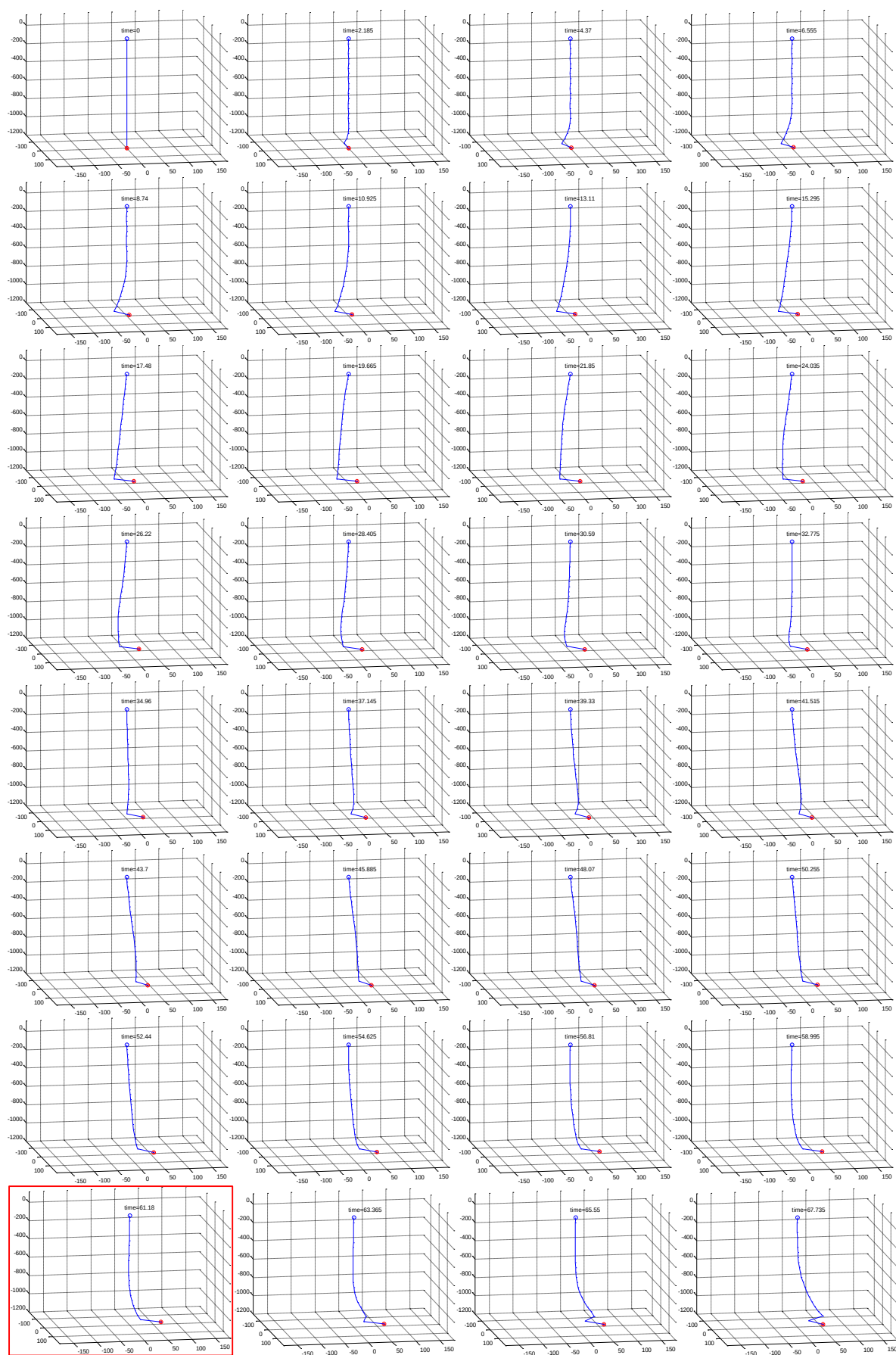


Figura 5.13 - Terceira simulação, trajetória espacial da carga terminal, 22 elos, força positiva na direção $\vec{F}_{cy}$ até 60 s, entre 60 s e 100 s força negativa na direção $\vec{F}_{cz}$, após 100 s queda livre, tempo total de simulação de 140 s



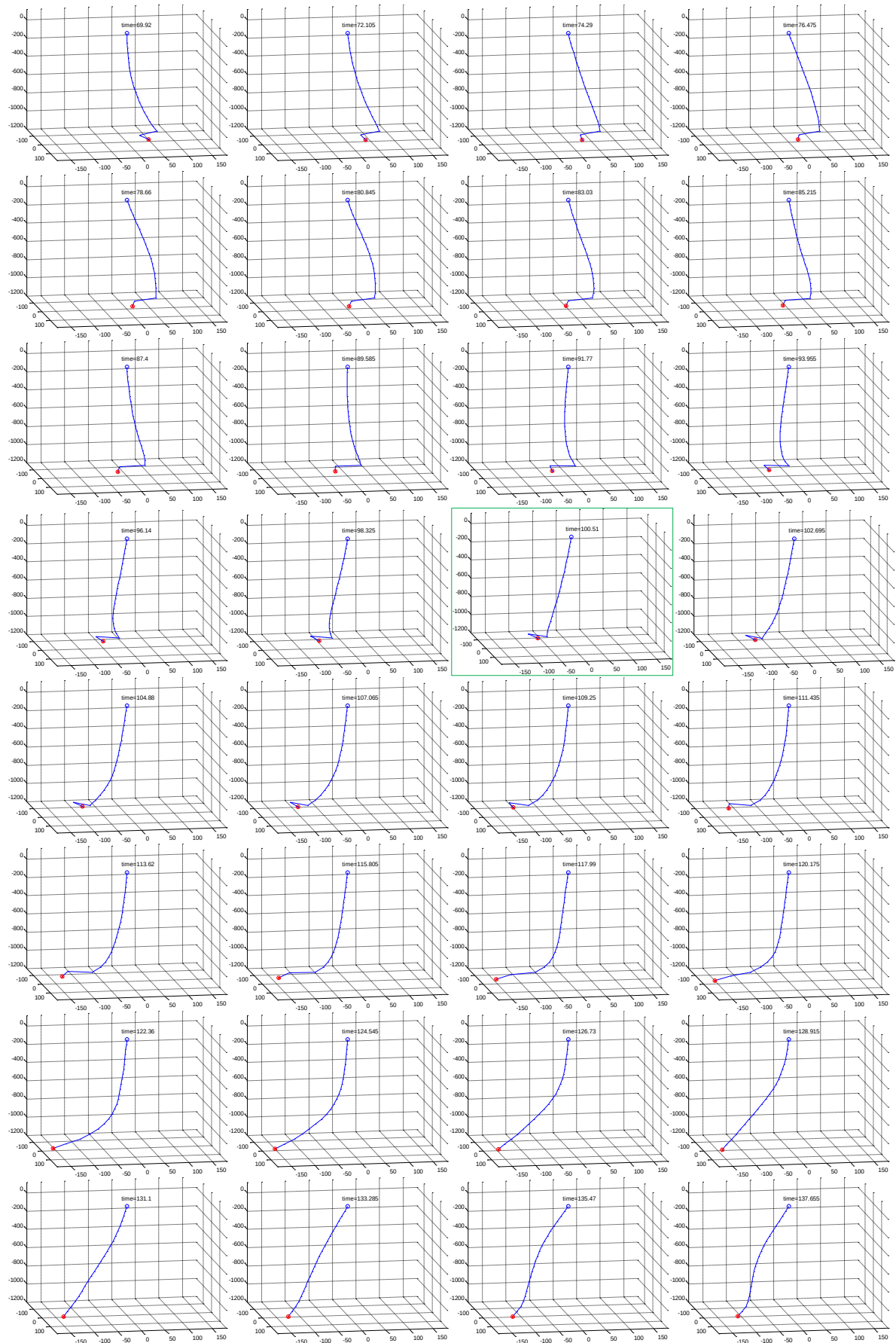


Figura 5.14 - Terceira simulação, cabo com 22 elos, força positiva na direção $\vec{F}_{cy}$ até 60 s, entre 60 s e 100 s força negativa na direção $\vec{F}_{cz}$, após 100 s queda livre, forças no referencial do corpo (frames a cada 2,185 s)

Na quarta simulação o cabo é composto por 22 elos. Foi considerada uma força $\vec{F}_{cy}$ de intensidade $280N$, atuante na carga terminal até $60s$ de simulação. A partir de $60s$, $\vec{F}_{cy}$ foi anulada e foi aplicada uma força $\vec{F}_{cz}$ de intensidade $560N$ (sinalizado em vermelho na Figura 5.17, o *frame* correspondente ao instante em que a força é aplicada) até $100s$ e após $100s$ de simulação esta força foi anulada, ou seja, a carga terminal ficou em situação de queda livre (sinalizado em verde na Figura 5.17, o *frame* correspondente ao instante em que a força foi anulada). O tempo total de simulação foi de $140s$. As Figuras 5.15 e 5.16 mostram, respectivamente, a trajetória da carga terminal em cada um dos eixos x, y e z e a trajetória espacial descrita pelo centro de massa da carga terminal. A Figura 5.17 ilustra a movimentação do cabo para esta simulação, sendo que a mesma é mostrada em forma de *frames* visualizados a cada $2,185s$ e com escala X e Y de $-100(m):100(m)$ e Z de $-1200(m):0(m)$.

Na quinta simulação o cabo é composto por 22 elos. Foi considerada uma força $\vec{F}_{cx}$ de intensidade $28N$ e outra $\vec{F}_{cy}$ de intensidade $112N$, atuantes na carga terminal até $30s$ de simulação. A partir de $30s$, as forças $\vec{F}_{cx}$ e $\vec{F}_{cy}$ foram anuladas e foi aplicada uma força $\vec{F}_{cz}$ de intensidade $140N$ (sinalizado em vermelho na Figura 5.20, o *frame* correspondente ao instante em que a força é aplicada) e após $70s$ de simulação esta força foi anulada, deixando a carga terminal em situação de queda livre (sinalizado em verde na Figura 5.20, o *frame* correspondente ao instante em que a força foi anulada). O tempo total de simulação foi de $110s$. As Figuras 5.18 e 5.19 mostram, respectivamente, a trajetória da carga terminal em cada um dos eixos x, y e z e a trajetória espacial descrita pelo centro de massa da carga terminal. A Figura 5.20 ilustra a movimentação do cabo para esta simulação, sendo que a mesma é mostrada em forma de *frames* visualizados a cada $1,715s$ e com escala X e Y de $-100(m):100(m)$ e Z de $-1200(m):0(m)$.

Na sexta simulação o cabo é composto por 26 elos. Foi considerada uma força $\vec{F}_{cy}$ de intensidade $280N$ e outra $\vec{F}_{cz}$ de intensidade $280N$, atuantes na carga terminal até $70s$ de simulação. A partir de $70s$ continuou sendo aplicada uma força $\vec{F}_{cy}$ de intensidade $280N$ e modificou-se $\vec{F}_{cz}$ para $-840N$ (sinalizado em vermelho na Figura 5.23, o *frame* correspondente ao instante em que as forças são aplicadas) e após $130s$ de simulação as forças foram anuladas, ou seja, a carga terminal ficou em situação de queda livre (sinalizado em verde na Figura 5.23, o *frame* correspondente ao instante em que as forças são anuladas). O tempo total de simulação foi de $170s$. As Figuras 5.21 e 5.22 mostram, respectivamente, a

trajetória da carga terminal em cada um dos eixos x , y e z e a trajetória espacial descrita pelo centro de massa da carga terminal. A Figura 5.23 ilustra a movimentação do cabo para esta simulação, sendo que a mesma é mostrada em forma de *frames* visualizados a cada 2,655 s e com escala X de $-100(m):100(m)$, Y de $-150(m):150(m)$ e Z de $-1200(m):0(m)$.

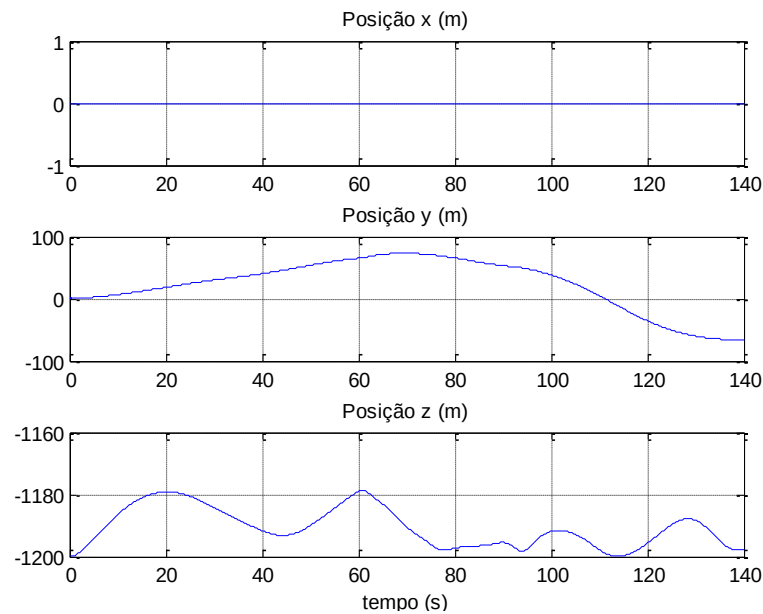


Figura 5.15 - Quarta simulação, posições x , y e z da carga terminal, 22 elos, força positiva na direção $\vec{F}_{cy}$ até 60 s, entre 60 s e 100 s força positiva na direção $\vec{F}_{cz}$, após 100 s queda livre, tempo total de simulação de 140 s

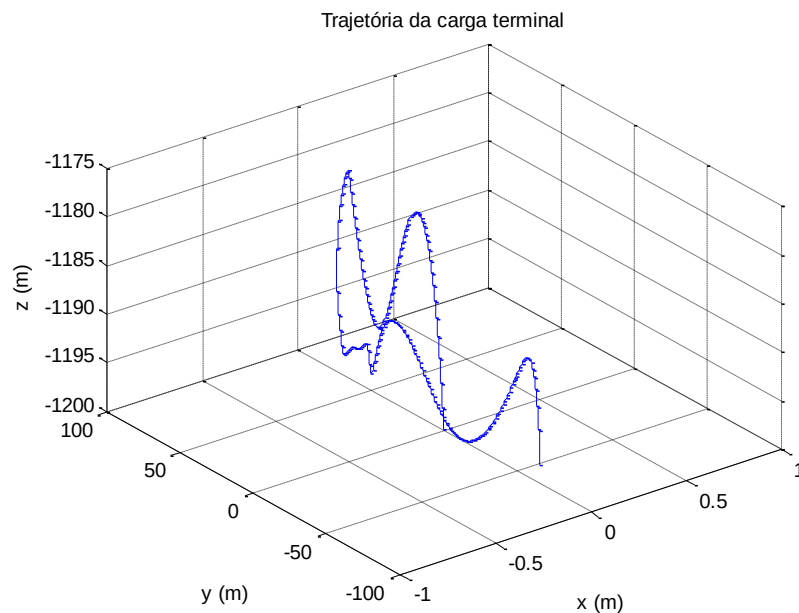
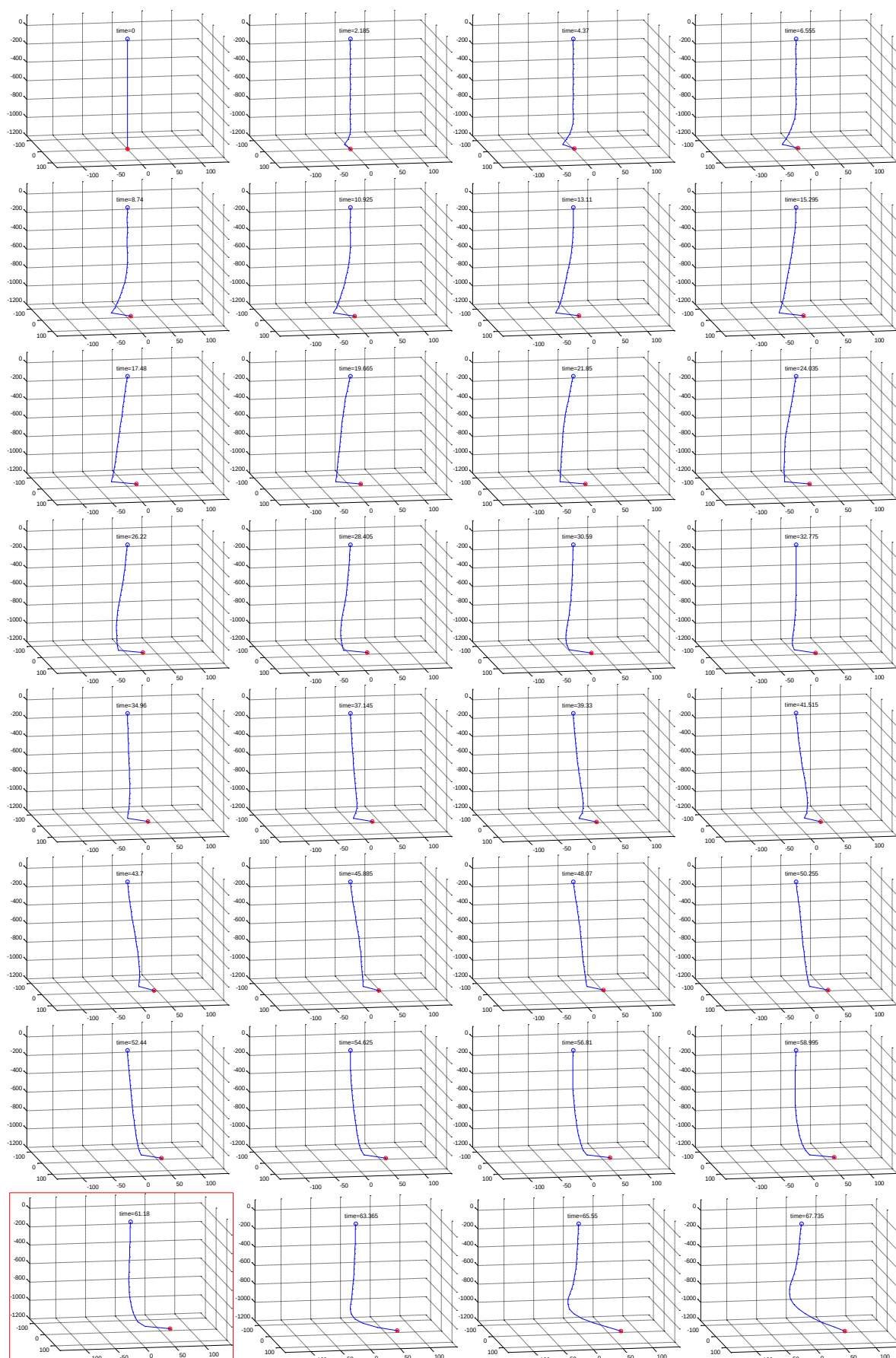


Figura 5.16 - Quarta simulação, trajetória espacial da carga terminal, 22 elos, força positiva na direção $\vec{F}_{cy}$ até 60 s, entre 60 s e 100 s força positiva na direção $\vec{F}_{cz}$, após 100 s queda livre, tempo total de simulação de 140 s



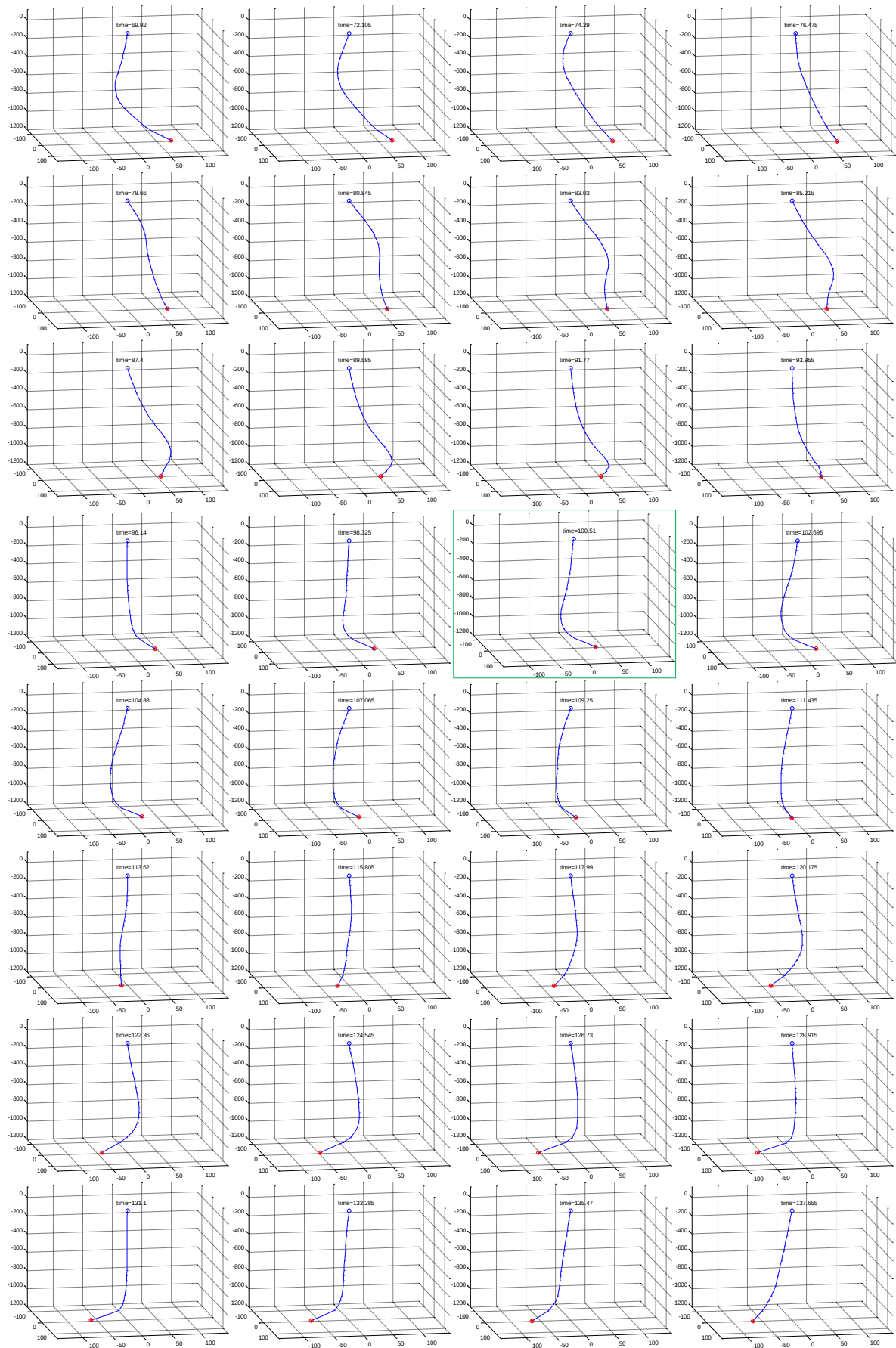


Figura 5.17 - Quarta simulação, cabo com 22 elos, força positiva na direção $\vec{F}_{cy}$ até 60 s, entre 60 s e 100 s força positiva na direção $\vec{F}_{cz}$ após 100 s queda livre, forças no referencial do corpo (frames a cada 2,185 s)

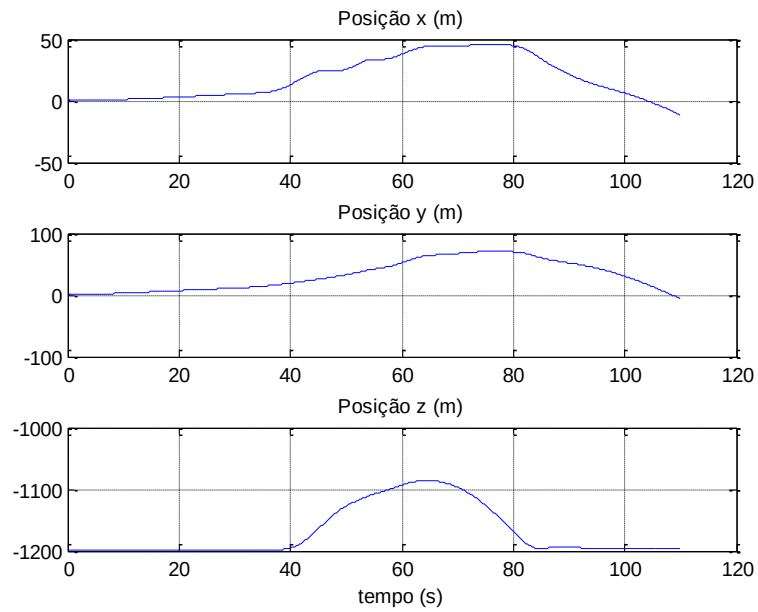


Figura 5.18 - Quinta simulação, posições x , y e z da carga terminal, 22 elos, forças positivas na direção $\vec{F}_{cx}$ e $\vec{F}_{cy}$ até 30 s, entre 30 s e 70 s força positiva na direção $\vec{F}_{cz}$, após 70 s queda livre, tempo total de simulação de 110 s

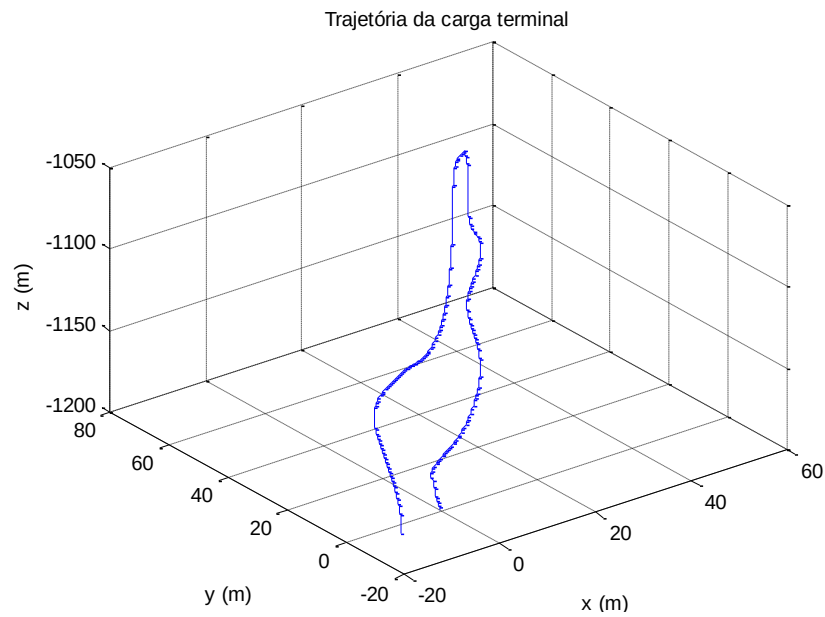
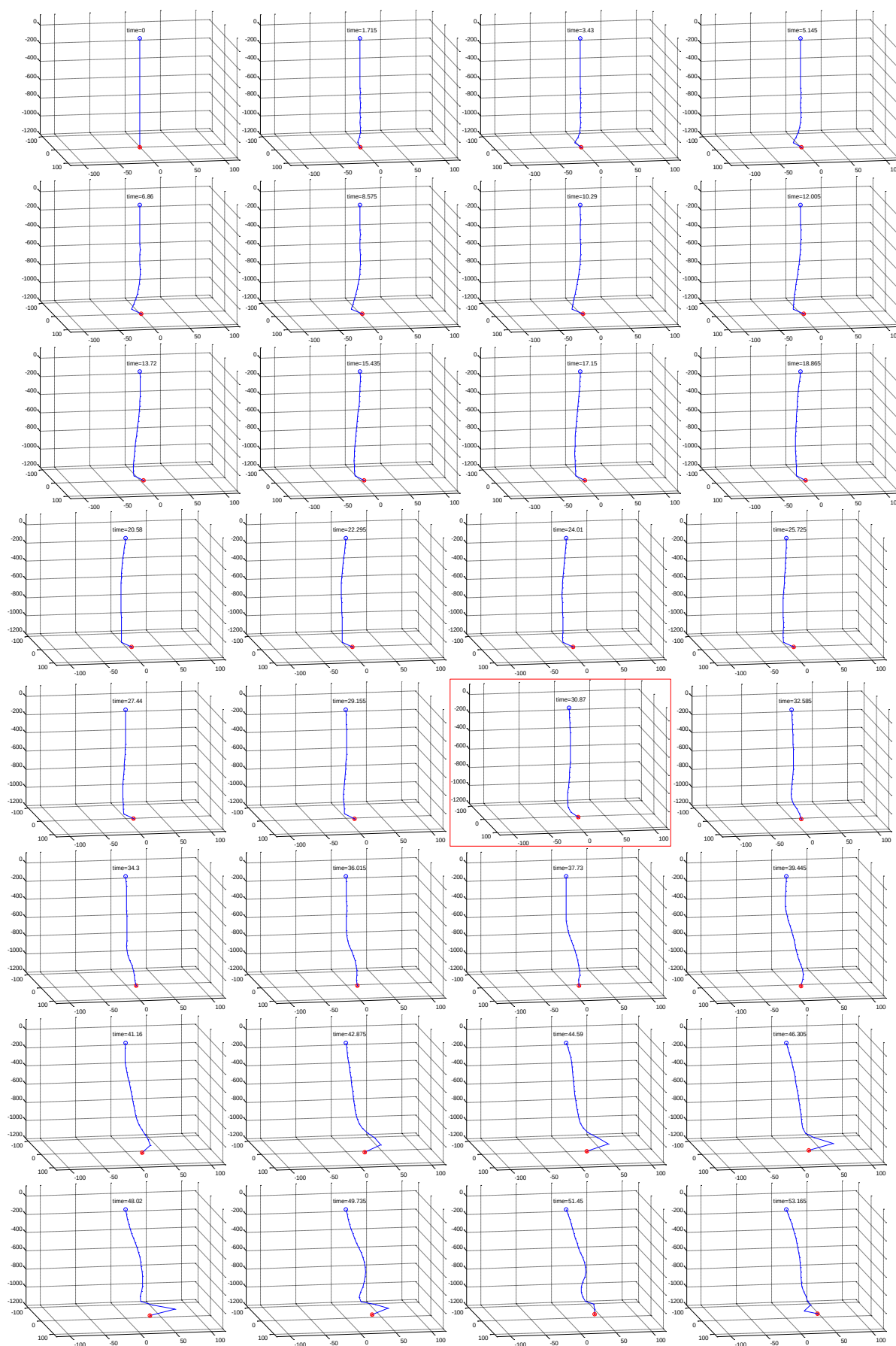


Figura 5.19 - Quinta simulação, trajetória espacial da carga terminal, 22 elos, forças positivas na direção $\vec{F}_{cx}$ e $\vec{F}_{cy}$ até 30 s, entre 30 s e 70 s força positiva na direção $\vec{F}_{cz}$, após 70 s queda livre, tempo total de simulação de 110 s



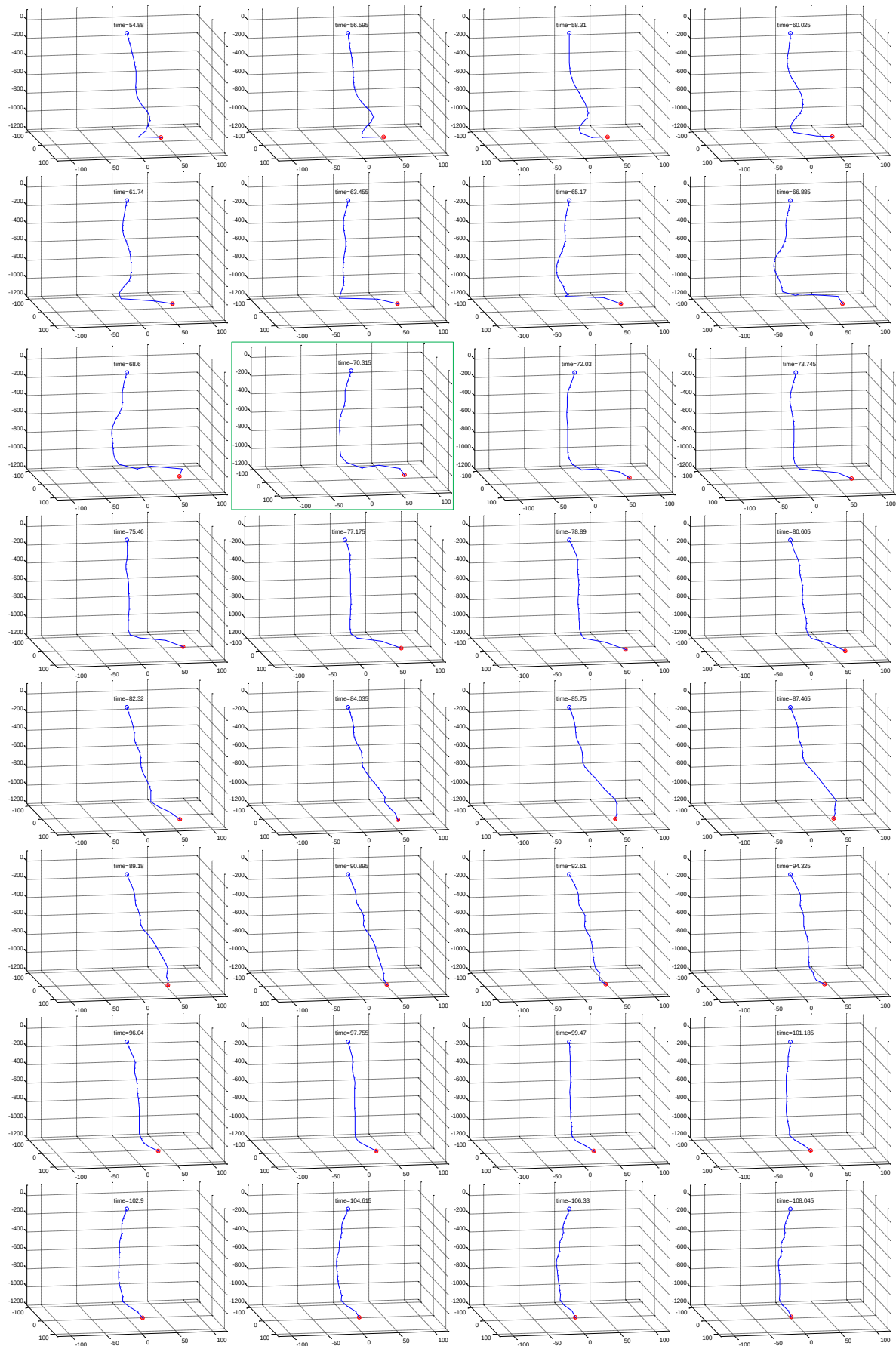


Figura 5.20 - Quinta simulação, cabo com 22 elos, forças positivas na direção $\vec{F}_{cx}$ e $\vec{F}_{cy}$ até 30 s, entre 30 s e 70 s força positiva na direção $\vec{F}_{cz}$, após 70 s queda livre, forças no referencial do corpo (frames a cada 1,715 s)

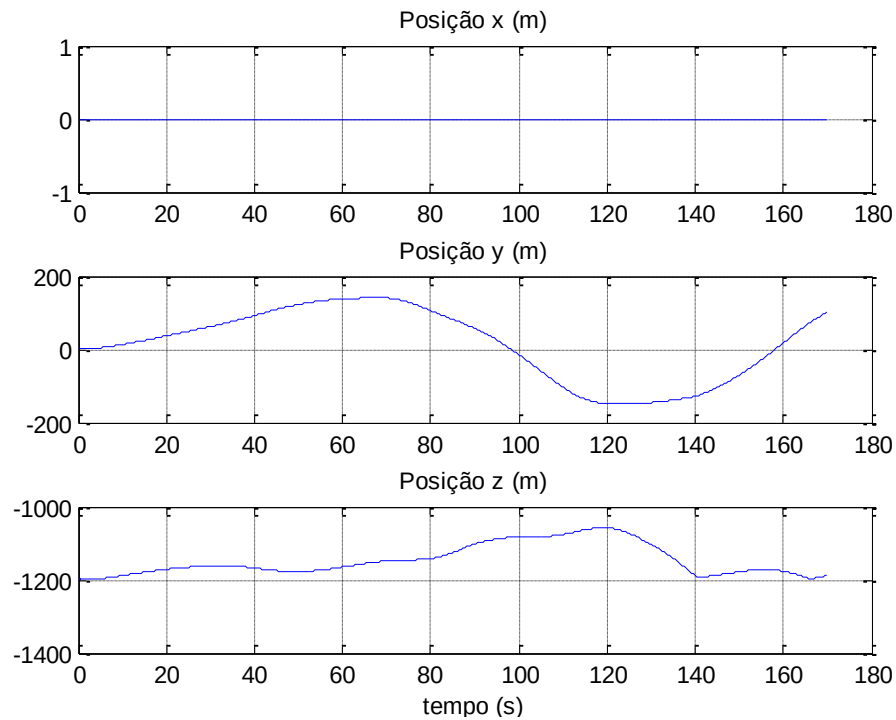


Figura 5.21 - Sexta simulação, posições x , y e z da carga terminal, 26 elos, forças positivas na direção $\vec{F}_{cy}$ e $\vec{F}_{cz}$ até 70 s, entre 70 s e 130 s força positiva na direção $\vec{F}_{cy}$ e força negativa na direção $\vec{F}_{cz}$, após 130 s queda livre, tempo total de simulação de 170 s

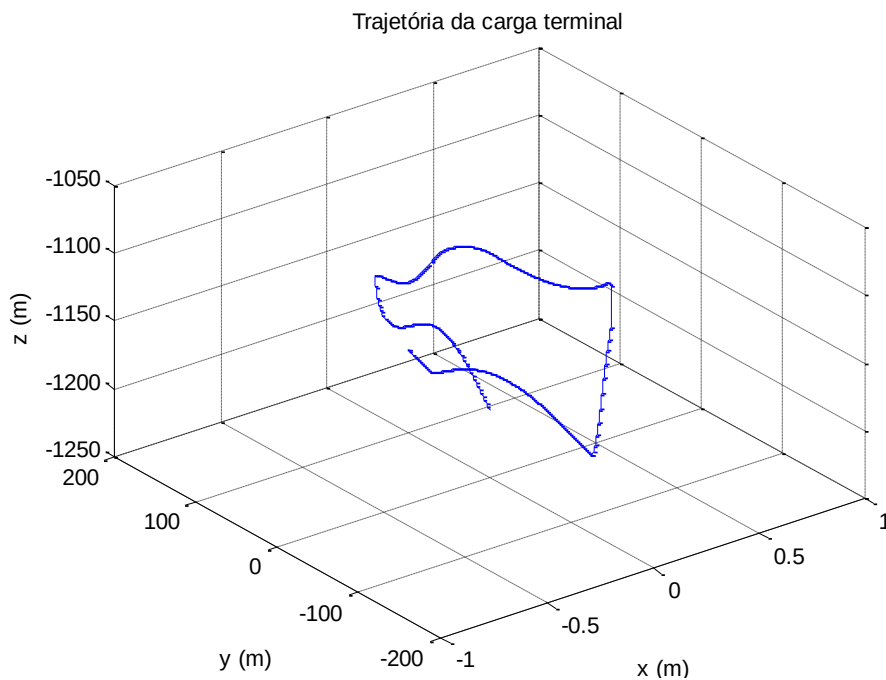
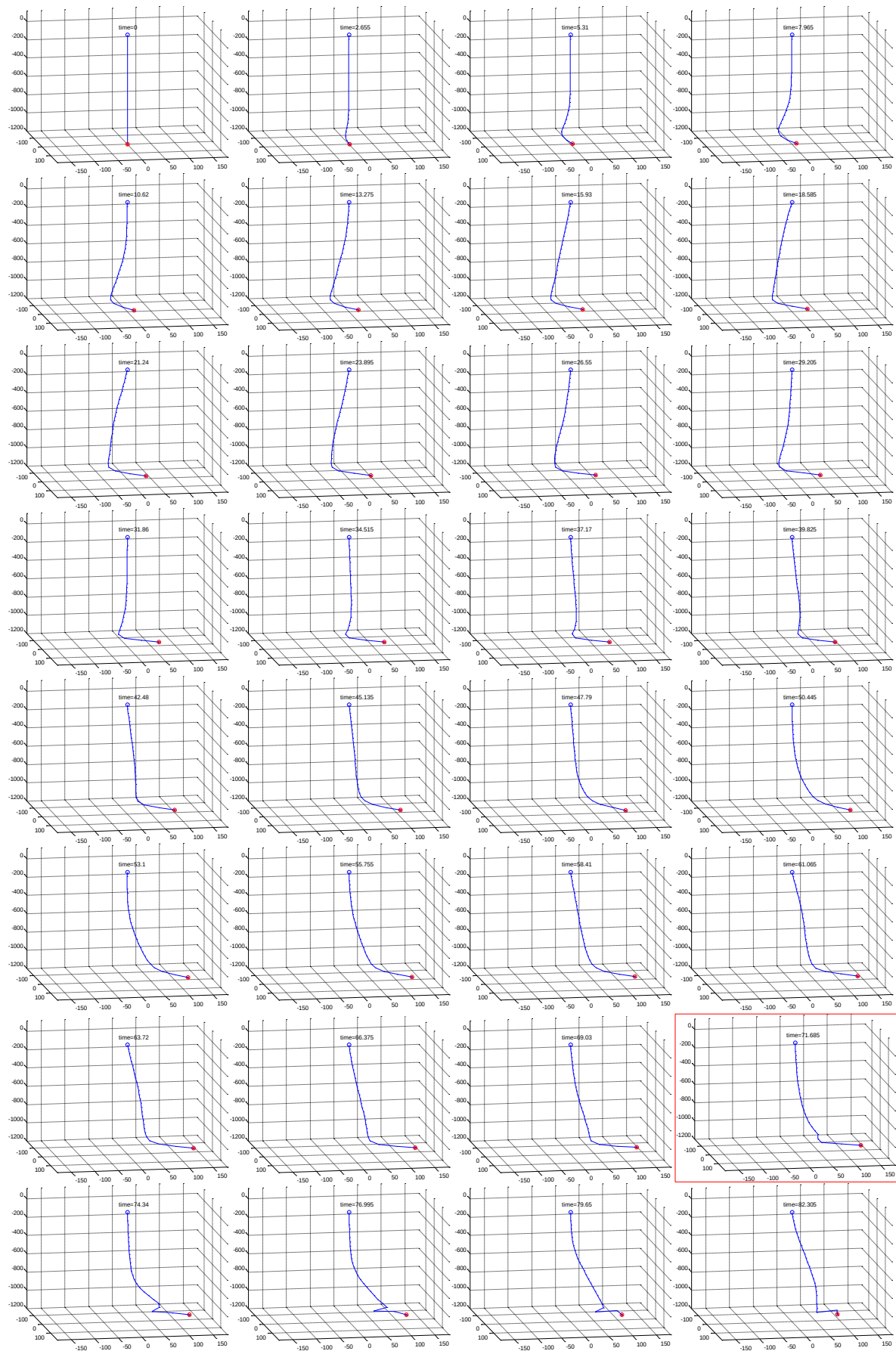


Figura 5.22 - Sexta simulação, trajetória espacial da carga terminal, 26 elos, forças positivas na direção $\vec{F}_{cy}$ e $\vec{F}_{cz}$ até 70 s, entre 70 s e 130 s força positiva na direção $\vec{F}_{cy}$ e força negativa na direção $\vec{F}_{cz}$, após 130 s queda livre, tempo total de simulação de 170 s



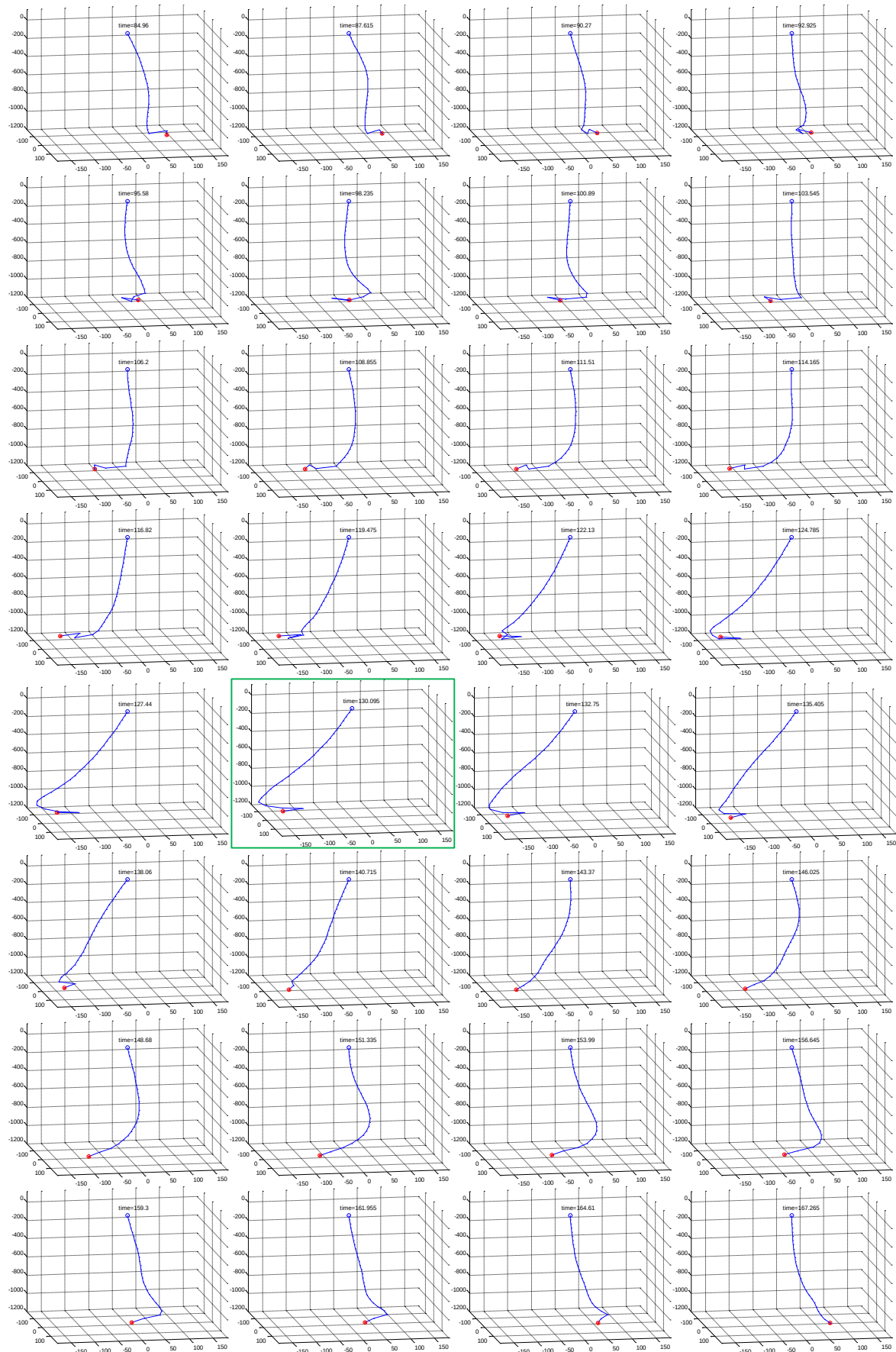


Figura 5.23 - Sexta simulação, cabo com 26 elos, forças positivas na direção $\vec{F}_{cy}$ e $\vec{F}_{cz}$ até 70 s, entre 70 s e 130 s força positiva na direção $\vec{F}_{cy}$ e força negativa na direção $\vec{F}_{cz}$, após 130 s queda livre, forças no referencial do corpo (frames a cada 2,655 s).

Nas simulações realizadas considerou-se aplicações de forças externas no referencial do corpo atuantes na carga terminal. Essas forças foram dispostas de tal forma que não gerassem torques na própria carga.

As simulações computacionais estudadas nesta seção consideraram um cabo com comprimento total de 1200 m dividido em até 26 elos, articulado a uma base fixa em uma de suas extremidades e livre em sua outra extremidade, na qual existe uma carga terminal de 600 kg. Os resultados obtidos estão de acordo com o que é esperado fisicamente e as Figuras em forma de *frames* permitiram visualizar uma aparência de continuidade na flexibilidade estrutural do mesmo, em razão da significativa quantidade de elos considerada.

A fim de aferir o crescimento do tempo de processamento em função do aumento do número de elos, aplicou-se uma força $\vec{F}_{cx}$ na direção X e outra $\vec{F}_{cy}$ na direção Y , ambas no referencial do corpo e com intensidade de 280 N atuantes na carga terminal. O tempo de simulação para todos os testes foi de 10 s e o cabo foi dividido em 16, 21 e 26 elos, com respectivos tempos computacionais expressos na Tabela 5.2. As simulações foram realizadas utilizando-se o *software* MATLAB®, em um microcomputador modelo Dell Inspiron 14 3442-A40, com processador Intel Core i5 e memória RAM de 8 GB DDR3 1700 MHz.

Tabela 5.2 - Tempos computacionais gastos para simulações com forças aplicadas no referencial do corpo

Número de elos	Tempo Computacional
16	47 s
21	5 min 07 s
26	23 min 40 s

Com a Tabela acima, é possível verificar que o tempo de simulação computacional aumenta consideravelmente à medida que se acrescenta elos ao cabo mantendo-se constantes os seus parâmetros físicos.

5.4.2. Simulações para Forças e Torques Aplicados na Carga Terminal

Na subseção anterior, os resultados apresentados consideravam apenas forças aplicadas na carga terminal, de forma que estas forças não geravam torques na mesma. Na presente subseção, as forças aplicadas na carga terminal também geram torques na própria

carga. É importante ressaltar que essas forças estão no referencial do corpo, como se aplicadas por atuadores em um ROV.

Foram realizadas três simulações, com diferentes forças aplicadas à carga terminal e, em todos os casos, essas forças também geravam torques na carga terminal. Conforme já foi mencionado anteriormente, quando torques são aplicados à carga terminal, estes geram torção no cabo. Portanto, a forma de apresentar os resultados das simulações inclui também os ângulos de torção em função do tempo.

Para as três simulações realizadas, os parâmetros físicos específicos adotados estão apresentadas na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 - Parâmetros adotados para forças e torques na carga terminal

Parâmetros	Valor numérico (unidade)	Significado físico
n	6,8	Número de elos
F_{cx}	$F_{cxa} + F_{cxb}$	Força aplicada à carga terminal na direção x
F_{cy}	$F_{cya} + F_{cyb}$	Força aplicada à carga terminal na direção y
F_{cz}	$F_{cza} + F_{czb}$	Força aplicada à carga terminal na direção z
τ_{cx}	$(F_{czb} - F_{cza})0,15$	Torque na carga no eixo x
τ_{cy}	Zero	Torque na carga no eixo y
τ_{cz}	$(F_{cyb} - F_{cya})0,15 + (F_{cxb} - F_{cxa})0,15$	Torque na carga no eixo z

Na primeira simulação, o cabo é composto por 6 elos. Foram consideradas na direção Y uma força $\vec{F}_{cya}$ de intensidade $490N$ e uma força $\vec{F}_{cyb}$ de intensidade $431,2 N$, atuantes na carga terminal por 12 s de simulação e após 12 s as forças foram anuladas, ou seja, a carga terminal ficou em situação de queda livre (sinalizado em vermelho na Figura 5.27, o *frame* correspondente ao instante em que as forças são anuladas). O tempo total de simulação foi de 16 s. Essas diferentes forças atuantes na carga terminal na direção Y fazem com que seja gerado um torque na carga terminal sobre o eixo Z no referencial do corpo, proporcionando uma rotação negativa sobre esse eixo, ou seja, rotação no sentido anti-horário. Esse torque é descrito por τ_{cz} com intensidade de $-8,82 N.m$.

A Figura 5.24 mostra a variação dos ângulos de torção para cada um dos elos. Pode-se observar que a torção sofrida é transmitida para todos os elos. Os torques são aplicados diretamente sobre o último elo e a movimentação dos demais se verifica em razão do acoplamento dinâmico. Vale ressaltar que os ângulos são obtidos com relação ao referencial inercial da base, de forma que o deslocamento angular do último elo contém a soma dos deslocamentos angulares de todos os elos anteriores.

As Figuras 5.25 e 5.26 mostram, respectivamente, a trajetória da carga terminal em cada um dos eixos x, y e z e a trajetória espacial descrita pelo centro de massa da carga terminal. A Figura 5.27 ilustra a movimentação do cabo para esta simulação, sendo que a mesma é mostrada em forma de *frames* visualizados a cada 0,5 s e com escala X $-20(m):20(m)$, Y de $-30(m):30(m)$ e Z de $-1200(m):0(m)$, para melhor apresentação dos resultados.

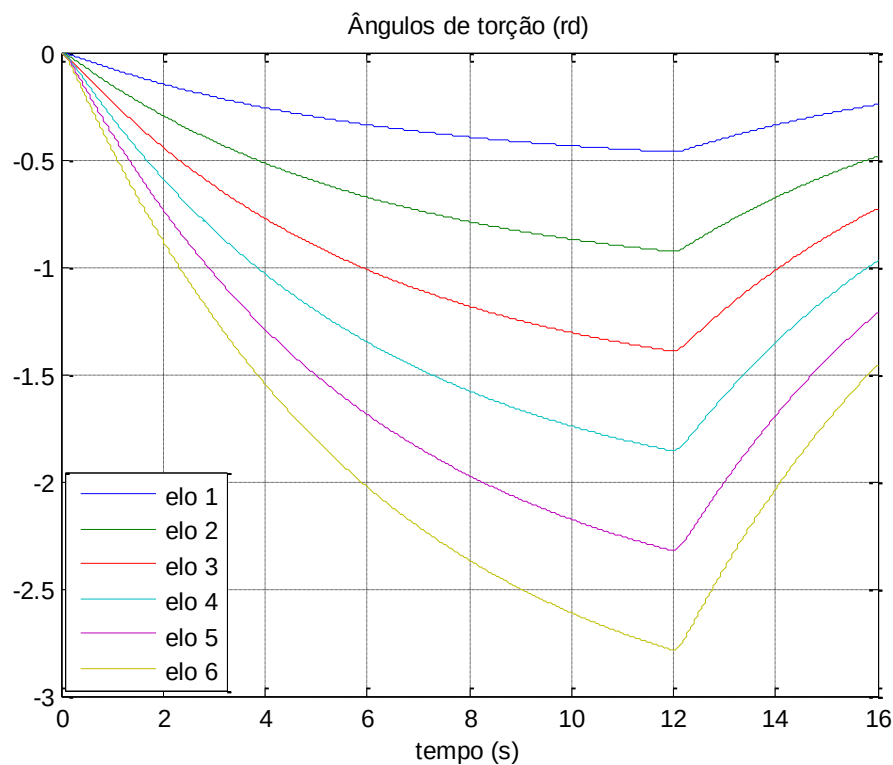


Figura 5.24 - Primeira simulação, ângulos de torção negativos, cabo com 6 elos, tempo total de simulação 16 s.

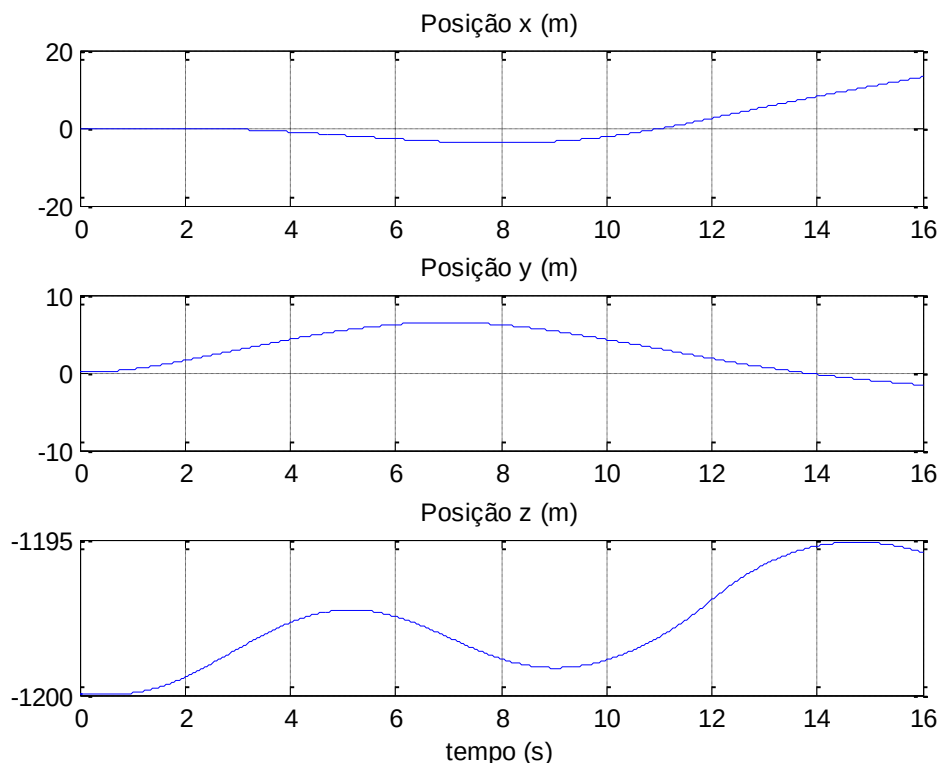


Figura 5.25 - Primeira simulação, posições x, y e z da carga terminal, cabo com 6 elos, tempo total de simulação 16 s.

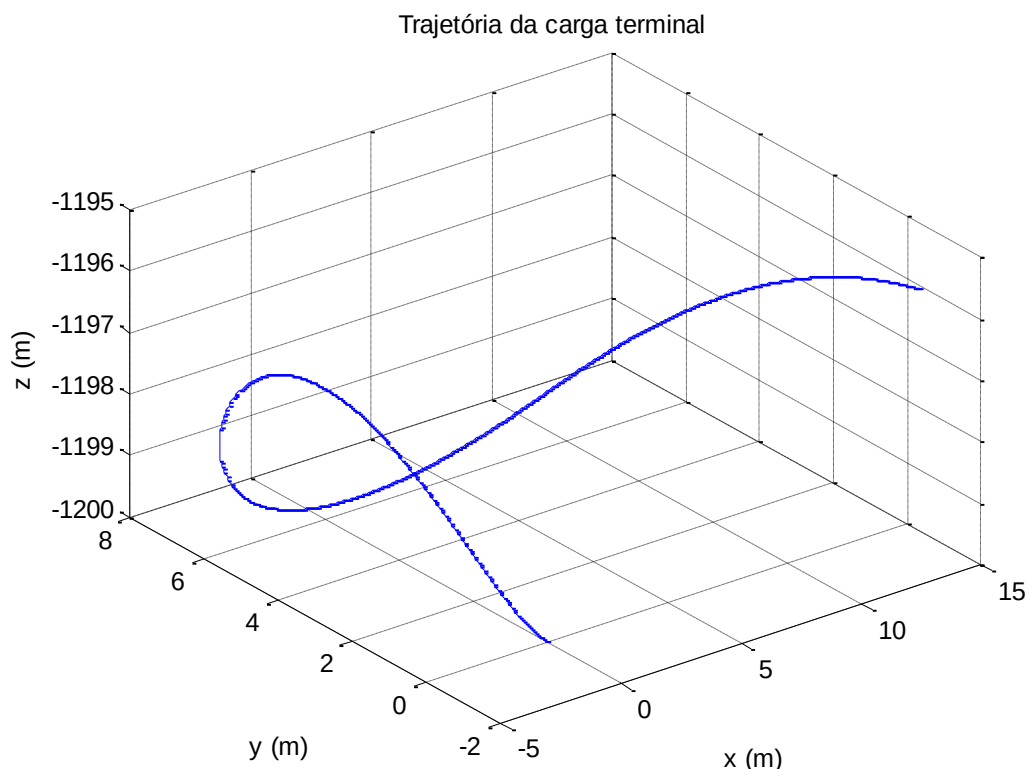


Figura 5.26 - Primeira simulação, trajetória espacial da carga terminal, 6 elos, tempo total de simulação 16 s

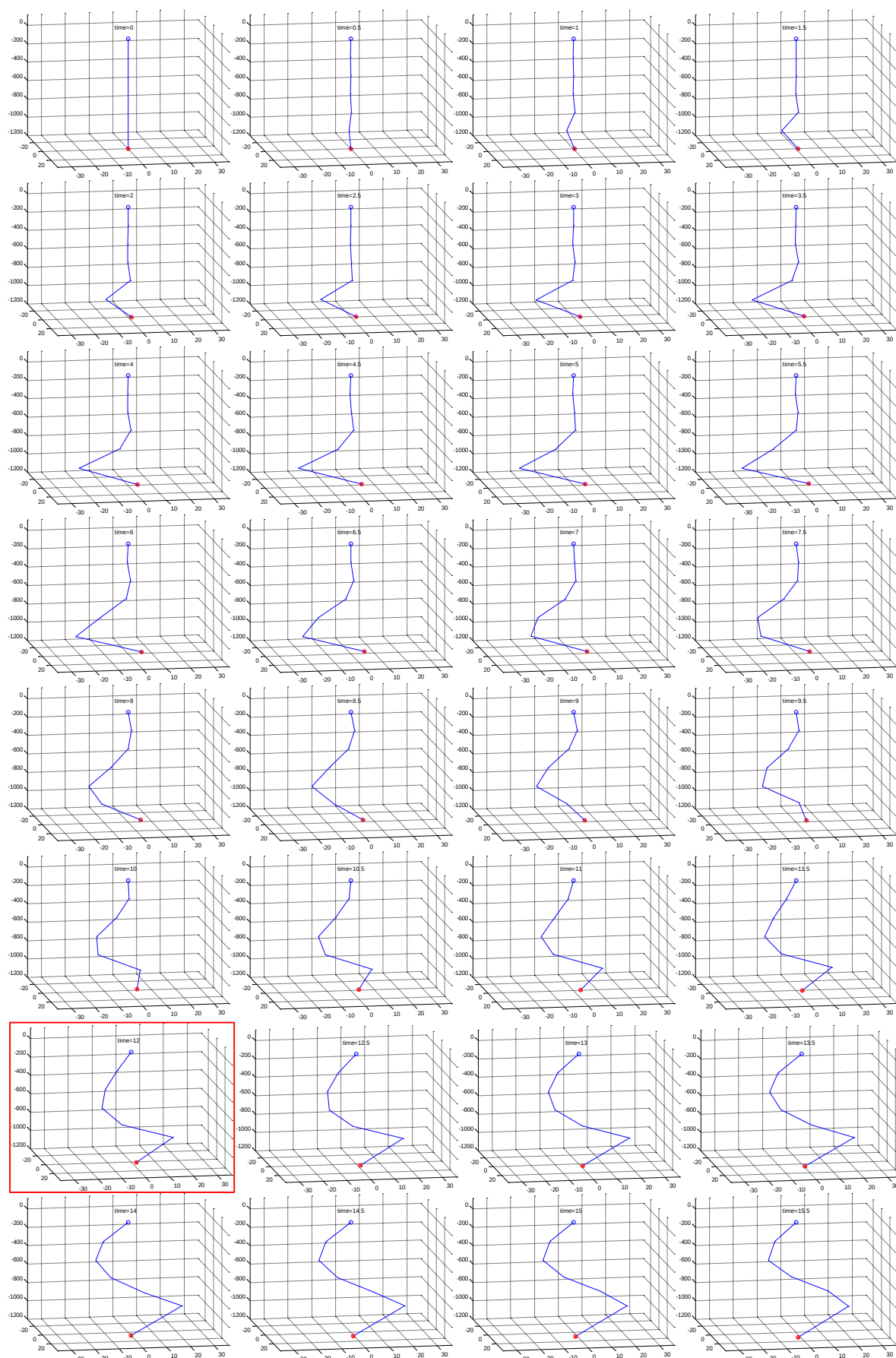


Figura 5.27 - Primeira simulação, cabo com 6 elos, forças no referencial do corpo aplicadas por 16 s de simulação (frames a cada 0,5 s).

Na segunda simulação, o cabo é dividido em 8 elos. Foram consideradas na direção Y uma força $\vec{F}_{cya}$ de intensidade 490 N e outra $\vec{F}_{cyb}$ de intensidade $431,2\text{ N}$, atuantes na carga terminal por 12 s de simulação (tempo total de simulação). Essas diferentes forças geram um torque na carga terminal sobre o eixo Z no referencial do corpo τ_{zc} , com intensidade de $-8,82\text{ N.m}$.

A Figura 5.28 mostra a variação dos ângulos de torção para cada um dos 8 elos. Pode-se observar que a torção sofrida é transmitida para todos os elos e a mesma vai perdendo importância comparada sempre ao elo anterior.

As Figuras 5.29 e 5.30 mostram, respectivamente, a trajetória da carga terminal em cada um dos eixos x, y e z e a trajetória espacial descrita pelo centro de massa da carga terminal. A Figura 5.31 ilustra a movimentação do cabo para esta simulação, sendo que a mesma é mostrada em forma de *frames* visualizados a cada $0,375\text{ s}$ e com escala X $-20(m):20(m)$, Y de $-30(m):30(m)$ e Z de $-1200(m):0(m)$.

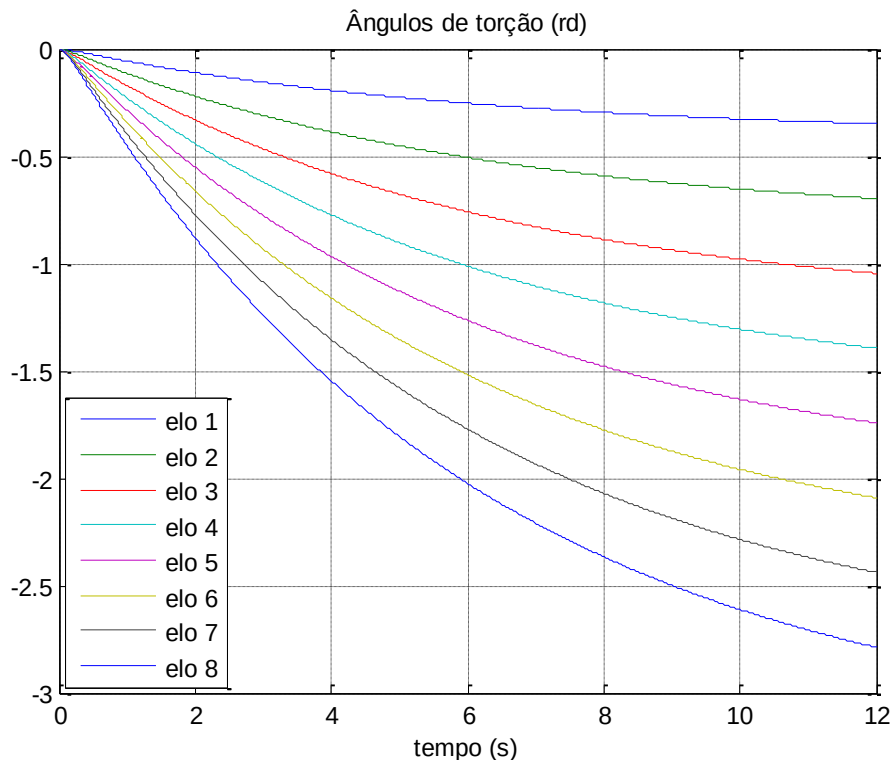


Figura 5.28 - Segunda simulação, ângulos de torção negativos, cabo com 8 elos, tempo total de simulação 12 s.

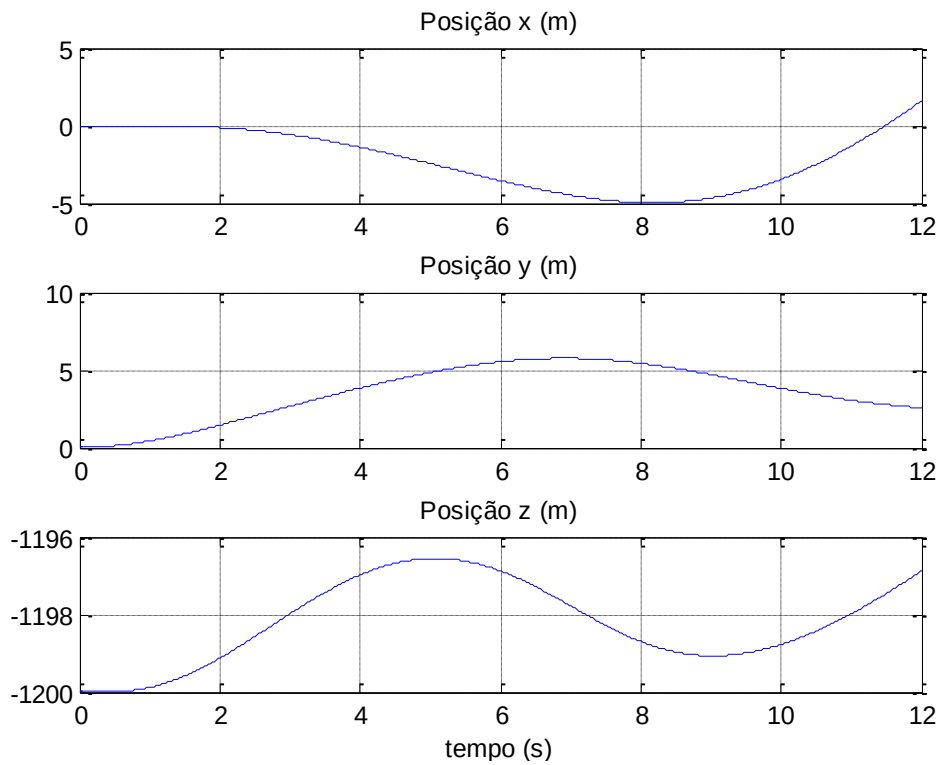


Figura 5.29 - Segunda simulação, posições x , y e z da carga terminal, cabo com 8 elos, tempo total de simulação 12 s.

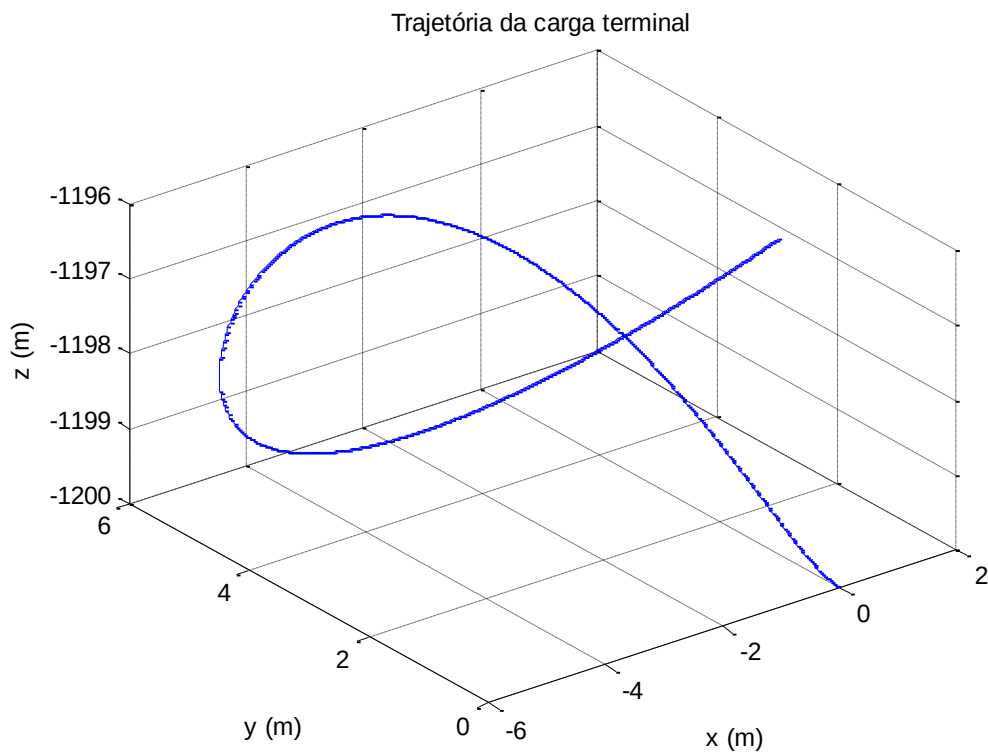


Figura 5.30- Segunda simulação, trajetória espacial da carga terminal, 8 elos, tempo total de simulação 12 s

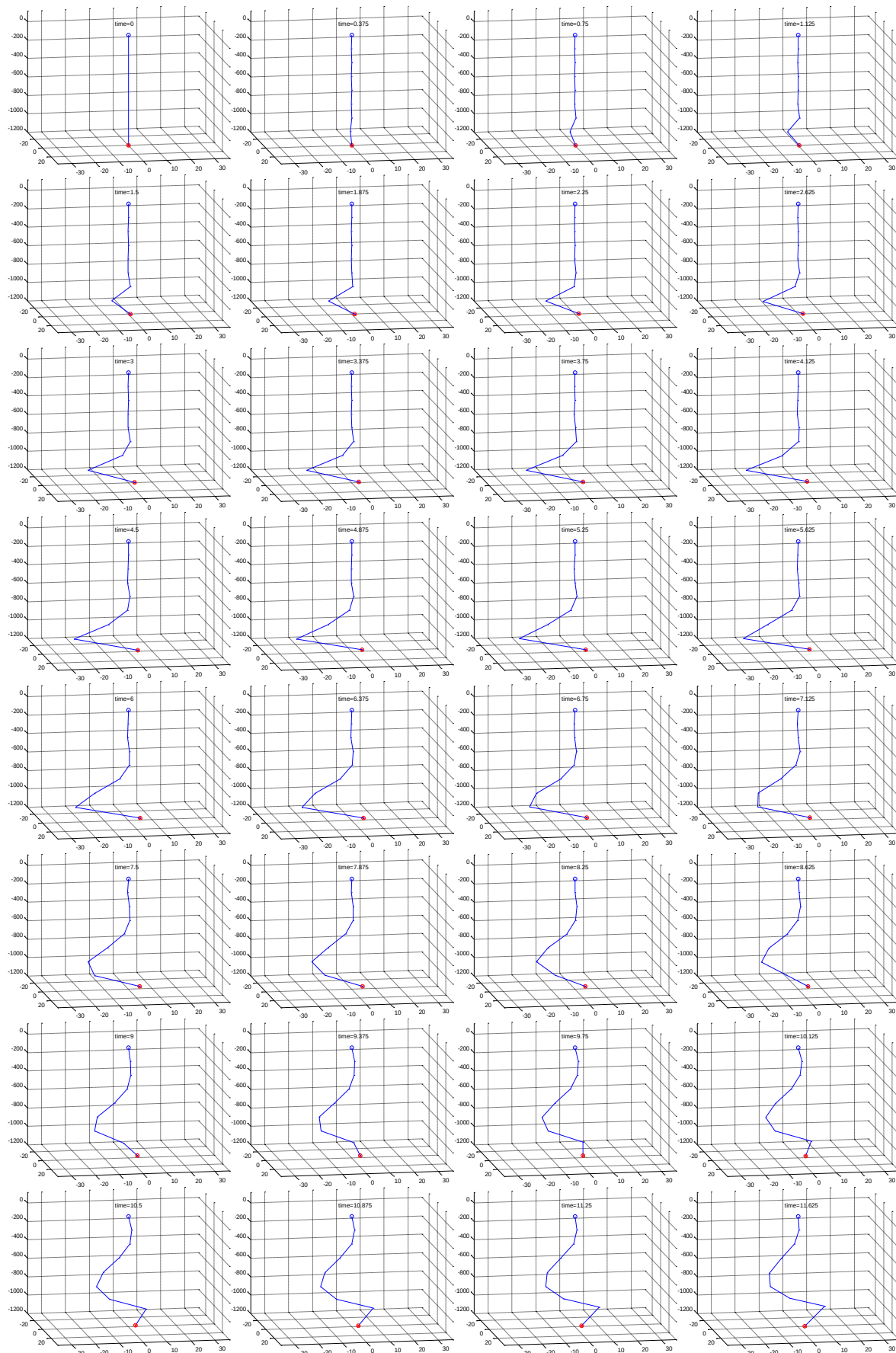


Figura 5.31 - Segunda simulação, cabo com 8 elos, forças no referencial do corpo, tempo total de simulação 12 s (frames a cada 0,375 s)

Na terceira simulação, o cabo é composto por 8 elos. Foram consideradas na direção X uma força $\vec{F}_{cxa}$ de intensidade -14 N e uma força $\vec{F}_{cxb}$ de intensidade 14 N , na direção Y uma força $\vec{F}_{cya}$ de intensidade 280 N e uma força $\vec{F}_{cyb}$ de mesma intensidade, atuantes na carga terminal, considerando-se um tempo total de 14 s de simulação. As forças nos dois atuadores da direção Y são iguais e tendem a impulsionar o ROV na sua direção frontal, enquanto que as forças com mesma amplitude e sinais trocados na direção X provocam apenas um torque sobre o eixo Z do referencial do corpo. Este efeito conjugado de forças deve fazer com que o ROV efetue uma curva no espaço, enquanto se eleva, partindo do repouso, com o cabo totalmente na vertical.

A Figura 5.32 mostra a variação dos ângulos de torção para cada um dos elos. A torção sofrida é transmitida para todos os elos e a mesma vai perdendo importância comparada sempre ao elo anterior. Vale ressaltar que como o torque é aplicado diretamente no último elo, este elo é o que sofre maior deslocamento.

As Figuras 5.33 e 5.34 mostram, respectivamente, a trajetória da carga terminal em cada um dos eixos x, y e z e a trajetória espacial descrita pelo centro de massa da carga terminal. A Figura 5.35 ilustra a movimentação do cabo para esta simulação, sendo que a mesma é mostrada em forma de *frames* visualizados a cada $0,435\text{ s}$ e com escala X $-20(m):20(m)$, Y de $-30(m):30(m)$ e Z de $-1200(m):0(m)$.

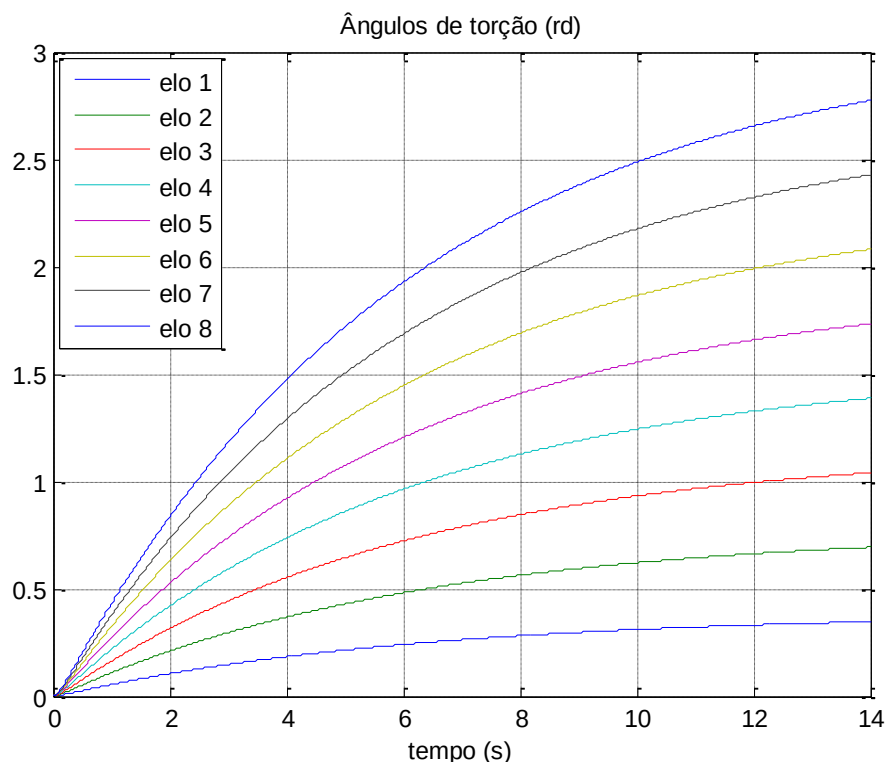


Figura 5.32 - Terceira simulação, ângulos de torção positivos, cabo com 8 elos, tempo total de simulação 14s.

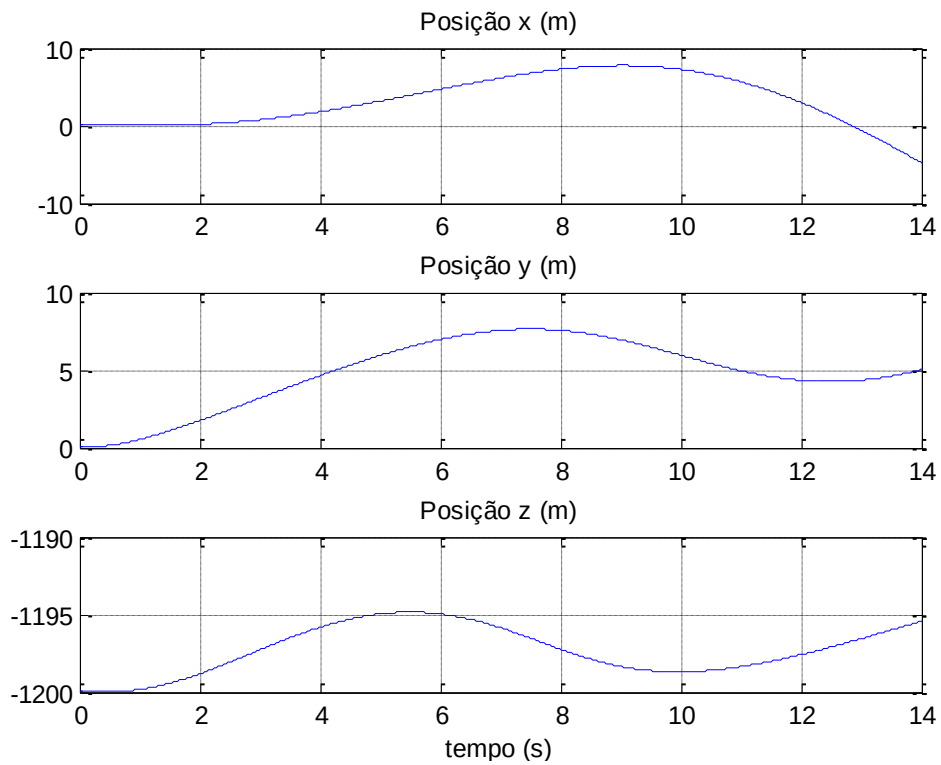


Figura 5.33 - Terceira simulação, posições x, y e z da carga terminal, cabo com 8 elos, tempo total de simulação 14 s.

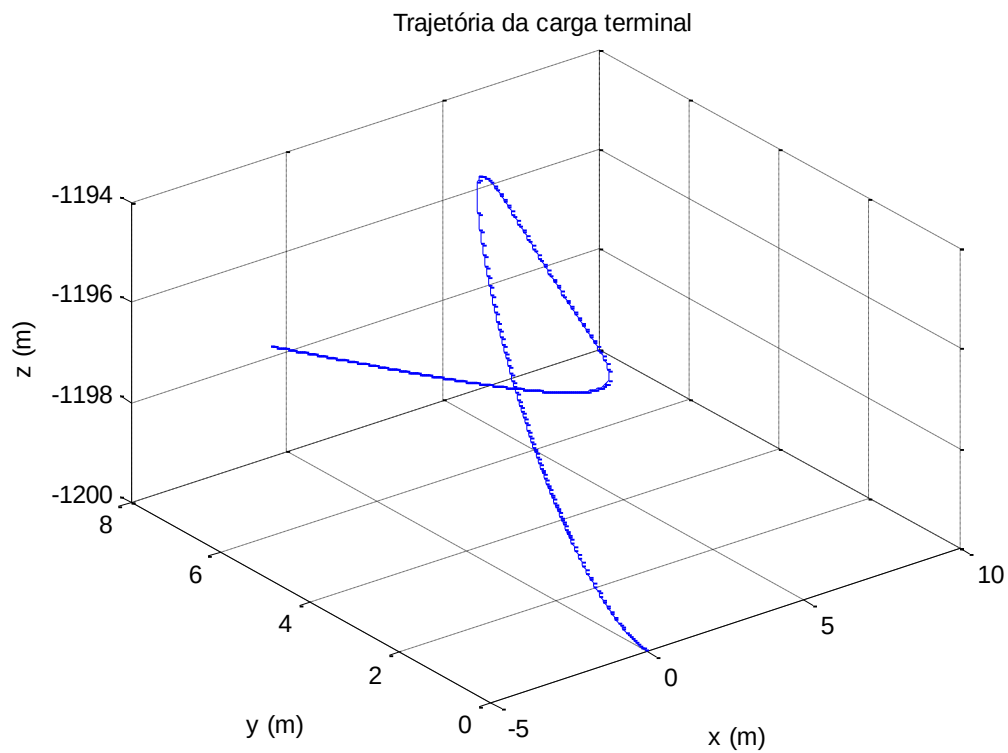


Figura 5.34 - Terceira simulação, trajetória espacial da carga terminal, 8 elos, tempo total de simulação 14 s

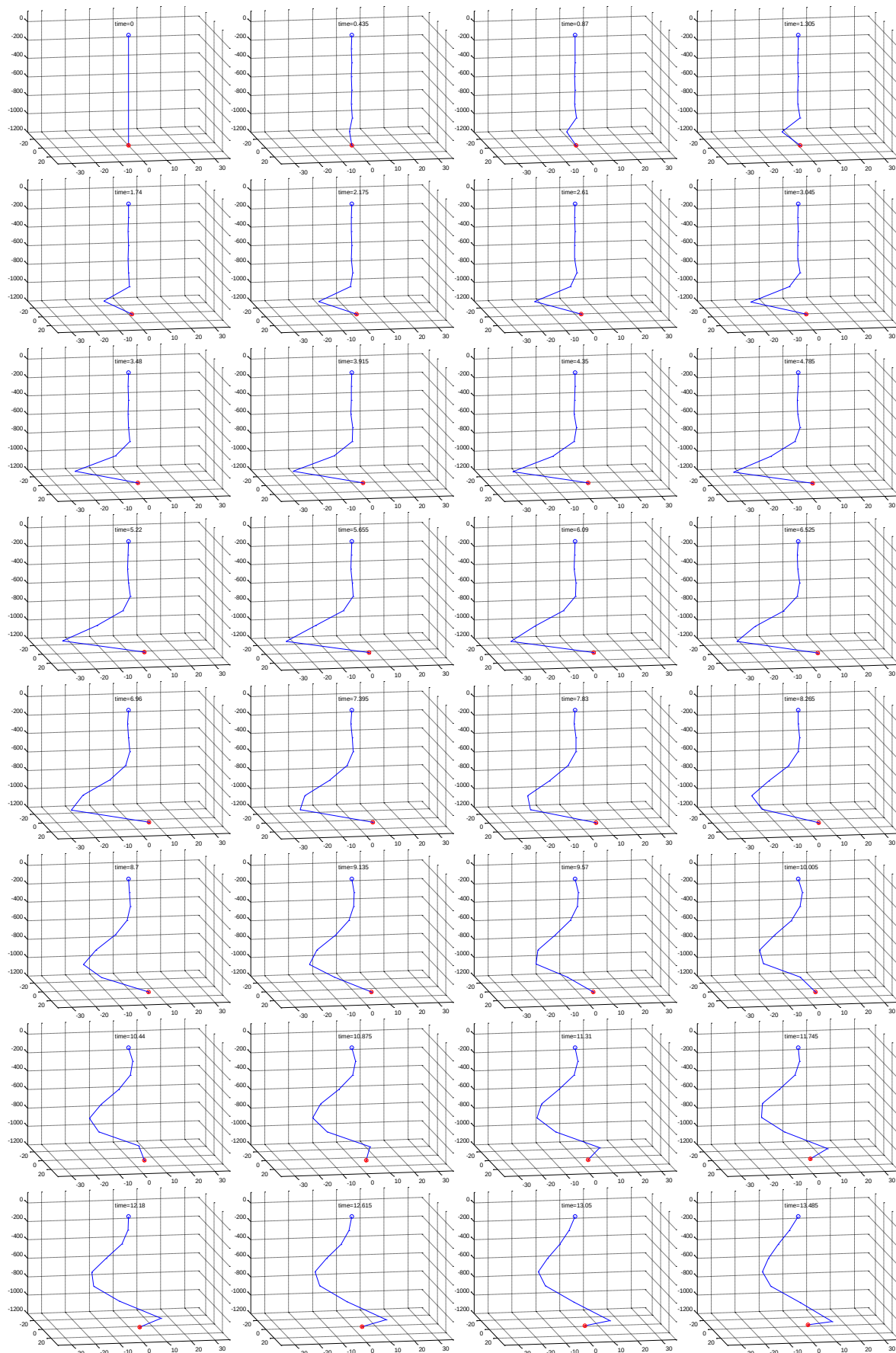


Figura 5.35 - Terceira simulação, cabo com 8 elos, forças no referencial do corpo, tempo total de simulação 14 s (frames a cada 0,435 s)

Nas simulações apresentadas nesta subseção as diferentes forças externas aplicadas na carga terminal geram toques na própria carga e estes torques geram torção no cabo. As simulações computacionais apresentadas consideraram um cabo com comprimento total de 1200 m, dividido em até 8 elos e com uma carga terminal de 600 kg. Como nos casos anteriores, os resultados se mostraram conforme o esperado fisicamente. Nos gráficos de torção observa-se que, em todos os casos, os últimos elos são os que apresentam maior deslocamento e este fato é fisicamente esperado, já que os torques são aplicados diretamente sobre o último elo. Este tipo de simulação foi adotado por ser semelhante ao caso de um veículo subaquático do tipo ROV.

As simulações computacionais apresentadas na subseção anterior já demandavam um tempo computacional considerável, pois na solução numérica das equações diferenciais do modelo dinâmico é necessário inverter a matriz de inércia. No entanto, à medida que se aumenta o número de elos o determinante dessa matriz aproxima-se de zero, acarretando maiores dificuldades na integração numérica. Neste caso, tem-se ainda a geração de torques na carga terminal e este fato deixa o processo computacional mais lento por ativar os modos de vibração em torção.

A exemplo dos casos anteriores, foram realizadas simulações específicas para se determinar o crescimento dos tempos de processamento em razão do acréscimo do número de elos. Os parâmetros específicos adotados nas simulações estão na Tabela 5.3. Foram aplicadas na direção Y uma força $\vec{F}_{cya}$ de intensidade 490N e uma força $\vec{F}_{cyb}$ de intensidade 431,2 N, atuantes na carga terminal por 10 s de simulação. Essas forças provocam torque sobre o eixo Z no referencial do corpo. O cabo foi dividido em 2, 4 e 6 elos, com respectivos tempos computacionais expressos na Tabela 5.4. Como nos casos anteriores, as simulações foram realizadas utilizando-se o *software* MATLAB®, tendo como integrador numérico o Runge-Kutta de quarta e quinta ordem com ajuste automático do passo de integração, a partir da rotina ODE45, em um microcomputador com processador Intel Core i5 e memória RAM de 8 GB DDR3 1700 MHz.

Tabela 5.4 - Tempos computacionais gastos para simulações com forças e torques na carga terminal

Número de elos	Tempo Computacional
2	2 min 58 s
4	42 min 57 s
6	3h 49 min 36 s

A Tabela acima mostra que o acréscimo do número de elos aumenta consideravelmente o tempo de simulação, aumento este que se assemelha a uma forma exponencial.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

Neste Capítulo apresentam-se as conclusões gerais obtidas nesta dissertação, assim como sugestões para trabalhos futuros.

O desenvolvimento matemático contido neste trabalho, referente à modelagem dinâmica para o cabo dividido em três elos, foi originalmente realizado por (ZANELA[30]) e conferidas manualmente, ou seja, sem o auxílio de *softwares* de manipulação simbólica. Os equacionamentos dos torques em cada articulação, das forças em cada elo e dos torques na carga terminal, foram desenvolvidos de forma manual nesta dissertação. Foi observada a existência de padrões de expansão nas equações obtidas, à medida que são adicionados mais elos na aproximação discreta da flexibilidade contínua do cabo. Estes padrões de crescimento permitiram o desenvolvimento de algoritmos genéricos para a geração dos torques de elevação, azimute e torção, para cada uma das n articulações fictícias do modelo. A utilização conjunta desses algoritmos com os algoritmos apresentados no Capítulo 2, permitiu a realização de simulações com forças aplicadas à carga terminal, como se esta fosse um veículo do tipo ROV, sendo esta uma das principais contribuições do presente trabalho.

Como foi visto no Capítulo 1, relacionado à introdução, apesar de existirem vários trabalhos sobre modelagem dinâmica do tipo cabo e sobre modelagem dinâmica de veículos subaquáticos, não há muito no que diz respeito ao acoplamento dessas duas dinâmicas. Portanto, a presente dissertação pretende ser uma contribuição para pesquisadores que necessitem desenvolver trabalhos relacionados com acoplamento entre as dinâmicas do cabo umbilical com um veículo subaquático do tipo ROV. As principais conclusões verificadas em toda a dissertação são resumidas no presente Capítulo, acompanhadas de comentários, visando uma melhor interpretação dos resultados.

No Capítulo 2, apresentou-se o desenvolvimento teórico do Formalismo Discreto aqui empregado para a modelagem dinâmica de cabos, no qual o cabo é dividido em partes rígidas, denominadas de elos, conectadas por articulações fictícias. Neste trabalho foi considerado movimento no espaço tridimensional, permitindo três movimentos livres: elevação, azimute e torção. As coordenadas do centro de massa dos elos e das articulações fictícias são determinadas por transformações homogêneas. Assim, desenvolve-se uma única equação capaz de montar o Lagrangeano do sistema, que depende unicamente do número de elos considerados, ou seja, pode-se dividir a estrutura em n elos. Além disso, foi mostrada a modelagem dinâmica para o cabo dividido em três elos. A partir das equações de Euler-Lagrange, determina-se o sistema de equações diferenciais ordinárias para o modelo. Para isso, considerou-se um cabo de comprimento l , articulado em uma extremidade a uma plataforma fixa e livre em sua outra extremidade, na qual se encontra uma carga terminal. O

desenvolvimento manual desses modelos permitiu validar a correção dos algoritmos genéricos desenvolvidos anteriormente. Observou-se que à medida que se aumenta o número de elos, o Lagrangeano do sistema cresce muito, assim como a quantidade de operações matemáticas na aplicação das equações de Euler-Lagrange. Foram apresentados algoritmos genéricos desenvolvidos por (ZANELA[30]), que permitem gerar de forma automática os elementos que formam as matrizes e os vetores do modelo dinâmico, para qualquer número de elos considerado. Foi realizada uma simulação com o cabo submerso em situação de queda livre a partir de uma configuração inicial. Um software de animação 3D foi construído especialmente para permitir uma melhor visualização gráfica do resultado. Percebeu-se que, de fato, o resultado mostrou-se conforme o esperado fisicamente.

No Capítulo 3 foi apresentado um breve resumo sobre a modelagem dinâmica de veículos subaquáticos, que apresenta um alto nível de complexidade, mas a teoria já é bem conhecida e estabelecida. Este Capítulo foi acrescentado em razão da sua possibilidade de uso em trabalhos futuros, ou seja, esforços oriundos de um ROV poderão movimentar o cabo e a influência dinâmica deste perturbará a dinâmica do ROV.

No Capítulo 4 foi desenvolvido o equacionamento das forças em cada elo e dos torques em cada articulação fictícia, originados por forças externas no referencial inercial aplicadas na carga terminal. É importante ressaltar que o modelo possui as mesmas equações do modelo dinâmico apresentado no Capítulo 2. A medida que o número de elos no qual o cabo é dividido aumenta, as equações para as forças e torques também crescem. Apresenta-se a formulação do algoritmo genérico a partir das equações gerais desenvolvidas neste Capítulo, para qualquer número de elos. Foram realizadas simulações a fim de verificar qualitativamente se as respostas obtidas reproduzem em simulação numérica resultados fisicamente esperados, sendo estas uma das principais contribuições inéditas da presente dissertação.

No Capítulo 5 foi desenvolvido o equacionamento das forças em cada elo e dos torques em cada articulação fictícia, devidos a forças e torques originados por forças externas no referencial do corpo aplicadas na carga terminal. Neste caso a carga terminal não mais é considerada como puntual, e sim, um corpo rígido no espaço, cujas forças externas a ele aplicadas causam tanto forças no seu centro de massa, quanto torques em torno deste centro de massa. Para se assemelhar ao caso de ROV como carga terminal, as forças e torques são considerados no referencial do corpo e, portanto, necessitam ser transformadas para o referencial inercial. Estas transformações entre os sistemas de referência utilizados são explicadas de forma detalhada neste Capítulo. Apresenta-se ainda a formulação do algoritmo

genérico a partir das equações gerais desenvolvidas para a geração dos torques nas articulações, para qualquer número de elos. Foi verificado que as respostas obtidas com as simulações condizem com os resultados fisicamente esperados. A modelagem dinâmica genérica, realizada a partir dos algoritmos propostos, constitui também uma das principais contribuições da presente dissertação.

Em todas as situações, os resultados obtidos mostraram-se conforme o esperado fisicamente, de forma qualitativa. Percebeu-se um aspecto contínuo do cabo à medida que se aumenta o número de elos no modelo dinâmico. Porém o acréscimo do número de elos acarreta um significativo aumento do custo computacional em termos de tempo de processamento.

Por enquanto, forças e torques são aplicados na carga terminal e verifica-se o efeito destas na dinâmica do cabo. Pretende-se, em trabalhos futuros, acoplar de fato as dinâmicas do ROV e do cabo, incluindo-se todos os esforços externos sobre o ROV que foram apresentados no Capítulo 3. Pretende-se ainda desenvolver e testar leis de controle para o ROV seguir trajetórias de referências no espaço 3D com bom desempenho, mesmo sofrendo significativas perturbações dinâmicas oriundas do cabo umbilical.

CAPÍTULO 7

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BANERJEE, A.K; DO, V.N. **Deployment Control of a Cable Connecting a Ship to an Underwater Vehicle**. Applied Mathematics and Computation, 70:97-116 (1995).
- [2] CORDOVÉS, D.C.S. **Análise de Confiabilidade Estrutural de Cabos Umbilicais**. São Paulo, 2008. 134 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia), Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- [3] CUNHA, J. P. V. S. **Projeto e Estudo de Simulação de um Sistema de Controle a Estrutura Variável de um Veículo Submarino de Operação Remota**. Rio de Janeiro, 1992. 135 p. Dissertação (Mestrado em Ciências Engenharia Elétrica), COPPE, UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- [4] FANG, M.C; HOU, C.S; LUO, J.H. **On The Motions of the Underwater Remotely Operated Vehicle With the Umbilical Cable Effect**. Ocean Engineering Letters, Vol. 34(8), p.1275-1289, 2007.
- [5] FJELLSTAD, O. E. **Control of Unmanned Underwater Vehicles in Six Degrees of Freedom-A quaternion Feedback Approach**. Trondheim, Norway, 1994. 113 p. Tese (Doutorado em Engenharia Cibernética), The Norwegian Institute of Technology, University of Trondheim.
- [6] FOSSEN, T. I. **Guidance and Control of Ocean Vehicles**. Chichester: John Wiley & Sons, 1994. 480 p. ISBN 0-471-94113-1.
- [7] FRAGA, S.L. **Geração de Trajetórias – Aplicação a Veículos Subaquáticos**. Porto/Portugal, 2002. 116 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores). FEUP – Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- [8] GOMES, R.M.F. **Controlo e Modelização de Veículos Subaquáticos**. Porto/Portugal, 2002. 117 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores). FEUP – Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- [9] GOMES, S.S. **Modelagem e Controle de Atuadores Robóticos e Veículos Subaquáticos Não Tripulados**. Rio Grande, RS, 2011. 151 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Oceânica), FURG – Universidade Federal do Rio Grande.

- [10] GOMES, S.S; ZEILMANN, A.P; TERRES, M.A.S.M; SOARES, L.B; GOMES, S.C.P. **Controle do Veículo Subaquático Tatuí Utilizando Estrutura Variável.** In: Revista Vetor, Vol.21, p. 110-129, 2012.
- [11] GOULART, C. **Modelagem, Simulação e Controle de Um Veículo Submarino de Operação Remota.** Rio de Janeiro, 2007. 127 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica), COPPE, UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- [12] HERNÁNDEZ, W.P. **Modelagem Dinâmica de um Robô Submarino Semi-Autônomo (Tipo ROV) Para Inspeção de RISERS.** Rio de Janeiro, 2012. 101p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- [13] ISOLDI, L.A.; SANTOS, M.A.V. **Análise Numérica Da Dinâmica De Cabos Altamente Extensíveis.** In: Revista Vetor, Vol.13, p. 7-23, 2003.
- [14] ISOLDI, L. A. **Análise Numérica da Dinâmica de Cabos Altamente Extensíveis.** Rio Grande, RS, 2002. 143 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Oceânica), FURG – Universidade Federal do Rio Grande.
- [15] MACHADO, C. C.; PEREIRA, A. E. L.; GOMES, S. C. P.; DE BORTOLI, A. L. **Um Novo Algoritmo para a Modelagem Dinâmica de Manipuladores Flexíveis.** In: Revista Controle e Automação, Vol. 13, p. 134-140, 2002.
- [16] MARZO, G.R. **Aplicação do Método dos Elementos Finitos na Análise de Tensões Induzidas em Cabos Umbilicais.** São Paulo, 2010. 106 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia), Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- [17] PEREIRA, A. E. L. **Um Estudo sobre Modelagem Matemática de Estruturas Flexíveis.** Porto Alegre, RS, 1999. 144 p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada), UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- [18] PEREIRA, A. E. L. **O Método da Decomposição de Adomian Aplicado à Interação Fluido-Estrutura de um Cabo.** Porto Alegre, RS, 2010. 178 p. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada), UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

- [19] PEREIRA, A. E. L.; GOMES, S.C.P.; DE BORTOLI, A. L. **O Método da Decomposição de Adomian Aplicado à Interação Fluido-estrutura de um Cabo.** In: Revista Vetor, Vol.21, p. 5-30, 2012.
- [20] ROCHA, I.B.P.; PEREIRA, A.E.L.; GOMES, S.C.P. **Modelagem de um ROV Incluindo a Dinâmica de um Cabo Umbilical.** Anais XXXIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Vol.3, p. 1006-1007, 2010.
- [21] ROCHA, I. B. P. **Modelagem Matemática de Cabos Umbilicais e Veículos Subaquáticos Não Tripulados.** Rio Grande, RS, 2013. 116 p. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional), FURG – Universidade Federal do Rio Grande.
- [22] ROCHINHA, A; SAMPAIO, R; LE TALLEC, P. **O Método do Lagrangeano Aumentado no Estudo de Cabos Umbilicais.** Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingenieria. Vol. 6,1, 97-108 (1990).
- [23] SANTANNA, A.V. **Estudo do Comportamento Dinâmico Aplicável à um Veículo de Localização, Invesigação e Resgate Submarino.** Rio de Janeiro, 2010. 140 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), COPPE, UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- [24] SENS, R.E; GOMES, S. C. P.; TAVARES, A.M. **Controle de um veículo subaquático sub-atuado utilizando estrutura variável.** Anais II Semengo, FURG – Universidade Federal do Rio Grande, 2006.
- [25] SNAME. **Nomenclature for reating the Motion of a Submerged Body Through a Fluid.** The Society of Naval Architects and Marine Engineers. Technical and Research. Bulletin No.1-5, 1950.
- [26] SOUZA, E.C. **Modelagem e Controle de Veículos Submarinos Não Tripulados.** São Paulo, 2003. 150 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica), Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- [27] TAVARES, A.M. **Um Estudo Sobre Modelagem e o Controle de Veículos Subaquáticos Não Tripulados.** Rio Grande, RS, 2003.218 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Oceânica), FURG – Universidade Federal do Rio Grande.

- [28] TAVARES, A.M.; GOMES, S.C.P.; CUNHA, M.A.B. **Modelagem Dinâmica e Controle Robusto de um Veículo Subaquático**. In: Revista Vetor, Vol.15(2), p.101-116, 2005.

- [29] VAZ, M.A; PATEL, M.H. **Three-Dimensional Behaviour of Elastic Marine Cables in Sheared Currents**. Applied Ocean Research. Vol. 22, Issue 1, p. 45-53, February 2000.

- [30] ZANELA, E. B. **Modelagem Analítica de Estruturas do Tipo Cabo para Aplicações Subaquáticas**. Rio Grande, RS, 2013. 147 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Oceânica), FURG – Universidade Federal do Rio Grande.

- [31] ZHU, K.-Q.; ZHU, H.-Y.; ZHANG,Y.-S.; GAO.J. **A Multi-Body Space-Coupled Motion Simulation for a Deep-Sea Tethered Remotely Operated Vechicle**. Journal of Hydrodynamic, Vol.20(2), p.210-215, 2008.

- [32] YUH, J. **Modeling and Control of Underwater Robotic Vehicles**. IEEE TRANSACTIONS ON SYSTEMS, MAN, AND CYBERNETICS, Vol. 20, Nº 6, p. 1475-1483, November/December 1990.

- [33] YUH, J. **A Learning Control of Underwater Robotic Vehicles with Thruster Dynamics**. IEEE American Control Conference, p. 565-569, June 1993.

- [34] YUH, J; GONUGUNTA, K.V. **Learning Control of Underwater Robotic Vehicles**. IEEE International Conference on Robotics and Automation, Vol.2, p.106-111, May 1993.

- [35] YUH, J; **Design and Control of Autonomous Underwater Robots: A Survey**. Int'l J. of Autonomous Robots, p. 7-24, 2000.

APÊNDICE A

ELEMENTOS DAS MATRIZES E VETORES PARA O CABO DIVIDIDO EM TRÊS ELOS

Elementos da matriz de inércia I :

$$I_{11} = l_1^2 \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_c \right) + I_{R_{1e}}$$

$$I_{12} = l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) (\cos \theta_{2e} \cos \theta_{1e} \cos \theta_{2a} + \sin \theta_{2e} \sin \theta_{1e}) = I_{21}$$

$$I_{13} = l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) [\cos \theta_{3e} \cos \theta_{1e} \cos(\theta_{2a} + \theta_{3a}) + \sin \theta_{3e} \sin \theta_{1e}] = I_{31}$$

$$I_{14} = -l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) (\sin \theta_{2e} \cos \theta_{1e} \sin \theta_{2a}) + \\ -l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) [\sin \theta_{3e} \cos \theta_{1e} \sin(\theta_{2a} + \theta_{3a})] = I_{41}$$

$$I_{15} = -l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) (\sin \theta_{2e} \cos \theta_{1e} \sin \theta_{2a}) + \\ -l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) [\sin \theta_{3e} \cos \theta_{1e} \sin(\theta_{2a} + \theta_{3a})] = I_{51}$$

$$I_{16} = -l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) [\sin \theta_{3e} \cos \theta_{1e} \sin(\theta_{2a} + \theta_{3a})] = I_{61}$$

$$I_{17} = I_{18} = I_{19} = 0$$

$$I_{22} = l_2^2 \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c \right) + I_{R_{2e}}$$

$$I_{23} = l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) (\cos \theta_{3e} \cos \theta_{2e} \cos \theta_{3a} + \sin \theta_{3e} \sin \theta_{2a}) = I_{32}$$

$$I_{24} = l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) (\sin \theta_{1e} \cos \theta_{2e} \sin \theta_{2a}) + \\ -l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) (\sin \theta_{3e} \cos \theta_{2e} \sin \theta_{3a}) = I_{42}$$

$$I_{25} = -l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) (\sin \theta_{3e} \cos \theta_{2e} \sin \theta_{3a}) = I_{52}$$

$$I_{26} = -l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) (\sin \theta_{3e} \cos \theta_{2e} \sin \theta_{3a}) = I_{62}$$

$$I_{27} = I_{28} = I_{29} = 0$$

$$I_{33} = l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_c \right) + I_{R_{3e}}$$

$$I_{34} = l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) (\sin \theta_{2e} \cos \theta_{3e} \sin \theta_{3a}) + \\ + l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) [\sin \theta_{1e} \cos \theta_{3e} \sin(\theta_{2a} + \theta_{3a})] = I_{43}$$

$$I_{35} = l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) (\sin \theta_{2e} \cos \theta_{3e} \sin \theta_{3a}) = I_{53}$$

$$I_{36} = I_{37} = I_{38} = I_{39} = 0$$

$$\begin{aligned}
I_{44} = & l_1^2 \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_c \right) (\sin^2 \theta_{1e}) + l_2^2 \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c \right) (\sin^2 \theta_{2e}) + \\
& + l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_c \right) (\sin^2 \theta_{3e}) + 2l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) (\sin \theta_{1e} \sin \theta_{2e} \cos \theta_{2a}) + \\
& + 2l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) [\sin \theta_{1e} \sin \theta_{3e} \cos(\theta_{2a} + \theta_{3a})] + \\
& + 2l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) (\sin \theta_{2e} \sin \theta_{3e} \cos \theta_{3a}) + I_{R_{1a}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{45} = & l_2^2 \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c \right) (\sin^2 \theta_{2e}) + l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_c \right) (\sin^2 \theta_{3e}) + \\
& + l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) (\sin \theta_{1e} \sin \theta_{2e} \cos \theta_{2a}) + \\
& + l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) [\sin \theta_{1e} \sin \theta_{3e} \cos(\theta_{2a} + \theta_{3a})] + \\
& + 2l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) (\sin \theta_{2e} \sin \theta_{3e} \cos \theta_{3a}) = I_{54}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{46} = & l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_c \right) (\sin^2 \theta_{3e}) + l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) [\sin \theta_{1e} \sin \theta_{3e} \cos(\theta_{2a} + \theta_{3a})] + \\
& + l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) (\sin \theta_{3e} \sin \theta_{2e} \cos \theta_{3a}) = I_{64}
\end{aligned}$$

$$I_{47} = I_{48} = I_{49} = 0$$

$$\begin{aligned}
I_{55} = & l_2^2 \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c \right) (\sin^2 \theta_{2e}) + l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_c \right) (\sin^2 \theta_{3e}) + \\
& + 2l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) (\sin \theta_{3e} \sin \theta_{2e} \sin \theta_{3a}) + I_{R_{2a}}
\end{aligned}$$

$$I_{56} = l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_c \right) (\sin^2 \theta_{3e}) + l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) (\sin \theta_{3e} \sin \theta_{2e} \cos \theta_{3a}) = I_{65}$$

$$I_{57} = I_{58} = I_{59} = 0$$

$$I_{66} = l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_c \right) (\sin^2 \theta_{3e}) + I_{R_{3a}}$$

$$I_{67} = I_{68} = I_{69} = 0$$

$$I_{71} = I_{72} = I_{73} = I_{74} = I_{75} = I_{76} = 0$$

$$I_{77} = I_{T1}$$

$$I_{78} = I_{79} = 0$$

$$I_{81} = I_{82} = I_{83} = I_{84} = I_{85} = I_{86} = I_{87} = 0$$

$$I_{88} = 0$$

$$I_{91} = I_{92} = I_{93} = I_{94} = I_{95} = I_{96} = I_{97} = I_{98} = 0$$

$$I_{99} = I_{T3} + I_{Tc}$$

Elementos da matriz de coeficientes de atrito C :

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= C_{1e} + C_{2e}; C_{12} = -C_{2e}; C_{13} = C_{14} = C_{15} = C_{16} = C_{17} = C_{18} = C_{19} = 0; \\
 C_{21} &= C_{12}; C_{22} = C_{2e} + C_{3e}; C_{23} = -C_{3e}; C_{24} = C_{25} = C_{26} = C_{27} = C_{28} = C_{29} = 0; \\
 C_{31} &= C_{13}; C_{32} = C_{23}; C_{33} = C_{3e}; C_{34} = C_{35} = C_{36} = C_{37} = C_{38} = C_{39} = 0; \\
 C_{41} &= C_{42} = C_{43} = 0; C_{44} = C_{1a} + C_{2a}; C_{45} = -C_{2a}; C_{46} = C_{47} = C_{48} = C_{49} = 0; \\
 C_{51} &= C_{52} = C_{53} = 0; C_{54} = C_{45}; C_{55} = C_{2a} + C_{3a}; C_{56} = -C_{3a}; C_{57} = C_{58} = C_{59} = 0; \\
 C_{61} &= C_{62} = C_{63} = C_{64} = 0; C_{65} = C_{56}; C_{66} = C_{3a}; C_{67} = C_{68} = C_{69} = 0; \\
 C_{71} &= C_{72} = C_{73} = C_{74} = C_{75} = C_{76} = 0; C_{77} = C_{1T} + C_{2T}; C_{78} = -C_{2T}; C_{79} = 0; \\
 C_{81} &= C_{82} = C_{83} = C_{84} = C_{85} = C_{86} = 0; C_{87} = C_{78}; C_{88} = C_{2T} + C_{3T}; C_{89} = -C_{3T}; \\
 C_{91} &= C_{92} = C_{93} = C_{94} = C_{95} = C_{96} = C_{97} = 0; C_{98} = C_{89}; C_{99} = C_{3T};
 \end{aligned}$$

Elementos da matriz de constantes elásticas K :

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= K_{1e} + K_{2e}; K_{12} = -K_{2e}; K_{13} = K_{14} = K_{15} = K_{16} = K_{17} = K_{18} = K_{19} = 0; \\
 K_{21} &= K_{12}; K_{22} = K_{2e} + K_{3e}; K_{23} = -K_{3e}; K_{24} = K_{25} = K_{26} = K_{27} = K_{28} = K_{29} = 0; \\
 K_{31} &= K_{13}; K_{32} = K_{23}; K_{33} = K_{3e}; K_{34} = K_{35} = K_{36} = K_{37} = K_{38} = K_{39} = 0; \\
 K_{41} &= K_{42} = K_{43} = 0; K_{44} = K_{1a} + K_{2a}; K_{45} = -K_{2a}; K_{46} = K_{47} = K_{48} = K_{49} = 0; \\
 K_{51} &= K_{52} = K_{53} = 0; K_{54} = K_{45}; K_{55} = K_{2a} + K_{3a}; K_{56} = -K_{3a}; K_{57} = K_{58} = K_{59} = 0; \\
 K_{61} &= K_{62} = K_{63} = K_{64} = 0; K_{65} = K_{56}; K_{66} = K_{3a}; K_{67} = K_{68} = K_{69} = 0; \\
 K_{71} &= K_{72} = K_{73} = K_{74} = K_{75} = K_{76} = 0; K_{77} = K_{1T} + K_{2T}; K_{78} = -K_{2T}; K_{79} = 0; \\
 K_{81} &= K_{82} = K_{83} = K_{84} = K_{85} = K_{86} = 0; K_{87} = K_{78}; K_{88} = K_{2T} + K_{3T}; K_{89} = -K_{3T}; \\
 K_{91} &= K_{92} = K_{93} = K_{94} = K_{95} = K_{96} = K_{97} = 0; K_{98} = K_{89}; K_{99} = K_{3T};
 \end{aligned}$$

Elementos do vetor de Coriolis-centrífugos $\vec{F}$:

$$\begin{aligned}
 f_1 = & -2l_1l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) \left\{ \cos \theta_{1e} \left[\begin{aligned} & \cos \theta_{2e} \sin \theta_{2a} (\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a}) \dot{\theta}_{2e} + \\ & \sin \theta_{2e} \cos \theta_{2a} \left(\dot{\theta}_{1a} \dot{\theta}_{2a} + \left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{2a}^2 + \dot{\theta}_{2e}^2}{2} \right) \right) \end{aligned} \right] + \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} (\sin \theta_{1e} \cos \theta_{2e}) \dot{\theta}_{2e}^2 \right\} + \\
 & -2l_1l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \left\{ \cos \theta_{2e} \left[\begin{aligned} & \cos \theta_{3e} \sin(\theta_{2a} + \theta_{3a}) (\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a}) \dot{\theta}_{3e} + \\ & \sin \theta_{3e} \cos(\theta_{2a} + \theta_{3a}) \left((\dot{\theta}_{1a} \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{1a} \dot{\theta}_{3a} + \dot{\theta}_{2a} \dot{\theta}_{3a}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{2a}^2 + \dot{\theta}_{3a}^2 + \dot{\theta}_{3e}^2}{2} \right) \right) \right] + \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} (\sin \theta_{1e} \cos \theta_{3e}) \dot{\theta}_{3e}^2 \right\} + \\
 & -l_1^2 \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_c \right) \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1e} \dot{\theta}_{1a}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2 = & -2l_1l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) \left\{ \cos \theta_{2e} \left[\begin{aligned} & -\cos \theta_{1e} \sin \theta_{2a} \dot{\theta}_{1a} \dot{\theta}_{1e} + \\ & \sin \theta_{1e} \cos \theta_{2a} \left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{1e}^2}{2} \right) \end{aligned} \right] - \frac{1}{2} \cos \theta_{1e} \sin \theta_{2e} \dot{\theta}_{1e}^2 \right\} + \\
 & -2l_2l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \left\{ \cos \theta_{2e} \left[\begin{aligned} & \cos \theta_{3e} \sin \theta_{3a} (\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a}) \dot{\theta}_{3e} + \\ & \sin \theta_{3e} \cos \theta_{3a} \left((\dot{\theta}_{1a} \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{1a} \dot{\theta}_{3a} + \dot{\theta}_{2a} \dot{\theta}_{3a}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{2a}^2 + \dot{\theta}_{3a}^2 + \dot{\theta}_{3e}^2}{2} \right) \right) \right] + \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} \sin \theta_{2e} \cos \theta_{3e} \dot{\theta}_{3e}^2 \right\} + \\
 & -2l_2^2 \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c \right) \sin \theta_{2e} \cos \theta_{2e} \left(\dot{\theta}_{1a} \dot{\theta}_{2a} + \frac{\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{2a}^2}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3 = & -2l_1l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) \left\{ \cos \theta_{3e} \left[-\cos \theta_{1e} \sin(\theta_{2a} + \theta_{3a}) \dot{\theta}_{1a} \dot{\theta}_{1e} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sin \theta_{1e} \cos(\theta_{2a} + \theta_{3a}) \left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{1e}^2}{2} \right) \right] + \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \cos \theta_{1e} \sin \theta_{3e} \dot{\theta}_{1e}^2 \right\} + \\
& -2l_2l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) \left\{ \cos \theta_{3e} \left[-\cos \theta_{2e} \sin \theta_{3a} (\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a}) \dot{\theta}_{2e} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sin \theta_{2e} \cos \theta_{3a} (\dot{\theta}_{1a} \dot{\theta}_{2a}) \left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{2a}^2 + \dot{\theta}_{1e}^2}{2} \right) \right] + \right\} + \\
& -2l_3^2\left(\frac{m_3}{4} + m_c\right) \left[\sin \theta_{3e} \cos \theta_{3e} \left((\dot{\theta}_{1a} \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{1a} \dot{\theta}_{3a} + \dot{\theta}_{2a} \dot{\theta}_{3a}) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{2a}^2 + \dot{\theta}_{3a}^2}{2} \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_4 = & 2l_1l_2\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c\right) \left\{ \cos \theta_{1e} \sin \theta_{2e} \cos \theta_{2a} \dot{\theta}_{1a} \dot{\theta}_{1e} + \right. \\
& \left. + \sin \theta_{1e} \cos \theta_{2e} \cos \theta_{2a} (\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a}) \dot{\theta}_{2e} + \right. \\
& \left. - \sin \theta_{1e} \sin \theta_{2e} \sin \theta_{2a} \left(\dot{\theta}_{1a} \dot{\theta}_{2a} + \left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2 - \dot{\theta}_{1e}^2 + \dot{\theta}_{2e}^2}{2} \right) \right) \right\} + \\
& + 2l_1l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) \left\{ \cos \theta_{1e} \sin \theta_{3e} \cos(\theta_{2a} + \theta_{3a}) \dot{\theta}_{1a} \dot{\theta}_{1e} + \right. \\
& \left. + \sin \theta_{1e} \cos \theta_{3e} \cos(\theta_{2a} + \theta_{3a}) (\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a}) \dot{\theta}_{3e} + \right. \\
& \left. - \sin \theta_{1e} \sin \theta_{3e} \sin(\theta_{2a} + \theta_{3a}) \left((\dot{\theta}_{1a} \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{1a} \dot{\theta}_{3a} + \dot{\theta}_{2a} \dot{\theta}_{3a}) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{\dot{\theta}_{2a}^2 + \dot{\theta}_{3a}^2 - \dot{\theta}_{1e}^2 + \dot{\theta}_{3e}^2}{2} \right) \right) \right\} + \\
& + 2l_2l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) \left\{ \cos \theta_{2e} \sin \theta_{3e} \cos \theta_{3a} (\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a}) \dot{\theta}_{2e} + \right. \\
& \left. + \sin \theta_{2e} \cos \theta_{3e} \cos \theta_{3a} (\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a}) \dot{\theta}_{3e} + \right. \\
& \left. - \sin \theta_{2e} \sin \theta_{3e} \sin \theta_{3a} \left((\dot{\theta}_{1a} \dot{\theta}_{3a} + \dot{\theta}_{2a} \dot{\theta}_{3a}) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{\dot{\theta}_{3a}^2 - \dot{\theta}_{2e}^2 + \dot{\theta}_{3e}^2}{2} \right) \right) \right\} + \\
& + 2l_1^2\left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_c\right) \{ \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1e} \dot{\theta}_{1a} \dot{\theta}_{1e} \} + \\
& + 2l_2^2\left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c\right) \{ \sin \theta_{2e} \cos \theta_{2e} (\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a}) \dot{\theta}_{2e} \} + \\
& + 2l_3^2\left(\frac{m_3}{4} + m_c\right) \{ \sin \theta_{3e} \cos \theta_{3e} (\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a}) \dot{\theta}_{3e} \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_5 = & 2l_1l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) \left\{ \cos \theta_{1e} \sin \theta_{2e} \cos \theta_{2a} \dot{\theta}_{1a} \dot{\theta}_{1e} + \right. \\
& \left. + \sin \theta_{1e} \cos \theta_{2e} \cos \theta_{2a} \left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{1e}^2}{2} \right) \right\} + \\
& + 2l_1l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \left\{ \cos \theta_{1e} \sin \theta_{3e} \cos(\theta_{2a} + \theta_{3a}) \dot{\theta}_{1a} \dot{\theta}_{1e} + \right. \\
& \left. + \sin \theta_{1e} \cos \theta_{3e} \sin(\theta_{2a} + \theta_{3a}) \left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{1e}^2}{2} \right) \right\} + \\
& + 2l_2l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \left\{ \cos \theta_{2e} \sin \theta_{3e} \cos \theta_{3a} (\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a}) \dot{\theta}_{2e} + \right. \\
& \left. + \sin \theta_{2e} \cos \theta_{3e} \cos \theta_{3a} (\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a}) \dot{\theta}_{3e} + \right. \\
& \left. - \sin \theta_{2e} \sin \theta_{3e} \sin \theta_{3a} \left(\frac{(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a}) \dot{\theta}_{3a} + (\dot{\theta}_{3a}^2 - \dot{\theta}_{2e}^2 + \dot{\theta}_{3e}^2)}{2} \right) \right\} + \\
& + 2l_2^2 \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c \right) \{ \sin \theta_{2e} \cos \theta_{2e} (\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a}) \dot{\theta}_{2e} \} + \\
& + 2l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_c \right) \{ \sin \theta_{3e} \cos \theta_{3e} (\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a}) \dot{\theta}_{3e} \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_6 = & 2l_1l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \left\{ \cos \theta_{1e} \sin \theta_{3e} \cos(\theta_{2a} + \theta_{3a}) \dot{\theta}_{1a} \dot{\theta}_{1e} + \right. \\
& \left. + \sin \theta_{1e} \sin \theta_{3e} \sin(\theta_{2a} + \theta_{3a}) \left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{1e}^2}{2} \right) \right\} + \\
& + 2l_2l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \left\{ \cos \theta_{2e} \sin \theta_{3e} \cos \theta_{3a} (\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a}) \dot{\theta}_{2e} + \right. \\
& \left. + \sin \theta_{2e} \cos \theta_{3e} \cos \theta_{3a} \left(\dot{\theta}_{1a} \dot{\theta}_{2a} + \left(\frac{\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{2a}^2 + \dot{\theta}_{2e}^2}{2} \right) \right) \right\} + \\
& + 2l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_c \right) \{ \sin \theta_{3e} \cos \theta_{3e} (\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a}) \dot{\theta}_{3e} \}
\end{aligned}$$

$$f_7 = f_8 = f_9 = 0$$

Elementos do vetor gravitacional $\vec{G}$:

$$g_1 = l_1 \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 \right) g \sin \theta_{1e}$$

$$g_2 = l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) g \sin \theta_{2e}$$

$$g_3 = l_3 \left(\frac{m_3}{2} \right) g \sin \theta_{3e}$$

$$g_4 = g_5 = g_6 = g_7 = g_8 = g_9 = 0$$

Elementos do vetor de torques externos $\vec{T}$:

$$T_{m_1} = T_{\theta_{1e}}; \quad T_{m_2} = T_{\theta_{2e}}; \quad T_{m_3} = T_{\theta_{3e}};$$

$$T_{m_4} = T_{\theta_{1a}}; \quad T_{m_5} = T_{\theta_{2a}}; \quad T_{m_6} = T_{\theta_{3a}};$$

$$T_{m_7} = T_{\theta_{1T}}; \quad T_{m_8} = T_{\theta_{2T}}; \quad T_{m_9} = T_{\theta_{3T}};$$

APÊNDICE B

CABO DIVIDIDO EM UM, TRÊS E CINCO ELOS PARA FORÇAS E TORQUES NA CARGA TERMINAL

APÊNDICE B.1**CABO DIVIDIDO CINCO ELOS PARA FORÇAS NA CARGA TERMINAL**

Elementos do vetor de torques externos $\vec{T}$, para o cabo com cinco elos

$$T_{m_1} = T_{\theta_{1e}} + \tau_{1e};$$

$$T_{m_2} = T_{\theta_{2e}} + \tau_{2e};$$

$$T_{m_3} = T_{\theta_{3e}} + \tau_{3e};$$

$$T_{m_4} = T_{\theta_{4e}} + \tau_{4e};$$

$$T_{m_5} = T_{\theta_{5e}} + \tau_{5e};$$

$$T_{m_6} = T_{\theta_{1a}} + \tau_{1a};$$

$$T_{m_7} = T_{\theta_{2a}} + \tau_{2a};$$

$$T_{m_8} = T_{\theta_{3a}} + \tau_{3a};$$

$$T_{m_9} = T_{\theta_{4a}} + \tau_{4a};$$

$$T_{m_{10}} = T_{\theta_{5a}} + \tau_{5a};$$

$$T_{m_{11}} = T_{\theta_{1T}};$$

$$T_{m_{12}} = T_{\theta_{2T}};$$

$$T_{m_{13}} = T_{\theta_{3T}};$$

$$T_{m_{14}} = T_{\theta_{4T}};$$

$$T_{m_{15}} = T_{\theta_{5T}};$$

APÊNDICE B.2**CABO DIVIDIDO EM UM E TRÊS ELÓS PARA FORÇAS E TORQUES NA CARGA TERMINAL**

Elementos do vetor de torques externos $\vec{T}$ para o cabo com um elo:

$$T_{m_1} = T_{\theta_{1e}} + \tau_{1e} + \tau_{ec};$$

$$T_{m_2} = T_{\theta_{1a}} + \tau_{1a} + \tau_{ac};$$

$$T_{m_3} = T_{\theta_{1T}} + \tau_{nt};$$

Elementos do vetor de torques externos $\vec{T}$ para o cabo com três elos:

$$T_{m_1} = T_{\theta_{1e}} + \tau_{1e};$$

$$T_{m_2} = T_{\theta_{2e}} + \tau_{2e};$$

$$T_{m_3} = T_{\theta_{3e}} + \tau_{3e} + \tau_{ec};$$

$$T_{m_4} = T_{\theta_{1a}} + \tau_{1a};$$

$$T_{m_5} = T_{\theta_{2a}} + \tau_{2a};$$

$$T_{m_6} = T_{\theta_{3a}} + \tau_{3a} + \tau_{ac};$$

$$T_{m_7} = T_{\theta_{1T}};$$

$$T_{m_8} = T_{\theta_{2T}};$$

$$T_{m_9} = T_{\theta_{3T}} + \tau_{nt};$$

$T_{\theta_{ie}}$, $T_{\theta_{ia}}$ e $T_{\theta_{iT}}$ são os torques de elevação, azimute e torção, oriundos da própria dinâmica do cabo e de esforços na carga terminal, τ_{ec} e τ_{ac} são torques de elevação e azimute na última articulação provocados pela carga terminal, enquanto que τ_{ie} , τ_{ia} e τ_{it} são torques oriundos de esforços externos tais como correntes oceânicas atuantes no cabo, para $i = 1, \dots, n$.